応用数学B　問題用紙

H25 年度前期中間試験　2013.6.14

4 M E D J C（○で囲め）　学籍番号　　　　　　　　　　　　氏名

1. 次の複素数を複素平面上に図示せよ．また，極形式 $re^{i\theta}$ で表せ．ただし，偏角 θ の範囲を $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．　(8 点× 2=16 点)

(1) $1+i$

(2) $-\sqrt{3}-i$

2. 次の値を求めよ．　(8 点× 3=24 点)

(1) $\mathrm{Re}(4-2i)+\mathrm{Im}(3+i)$

(2) $(1+\sqrt{3}i)^6$

(3) $\mathrm{Log}\, i$

3. 以下の等式が成り立つことを証明せよ．ただし，nは自然数とする．
（オイラーの公式と定義式 $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ を使う）
(8 点× 2=16 点)

(1) $e^{i\pi}=-1$

(2) $\cos n\pi = (-1)^n$

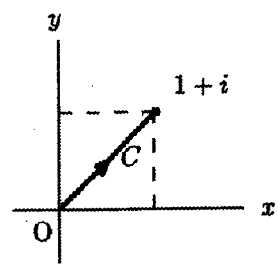
4. 関数 $u(x,y)=x^2-y^2+3x$ について，次の各問いに答えよ．　(8 点× 3=24 点)

(1) $u(x,y)$ は調和関数であることを示せ．

(2) $u(x,y)$ を実部とする正則関数 $f(z)$ を 1つ 求めよ．

(3) 前問で求めた $f(z)$ を z の式で表せ．

5. 原点から点 $1+i$ に至る図の線分を C とおくとき，次の各問いに答えよ．　(4 点× 2=8 点)

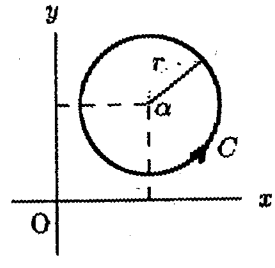


(1) 線分 C の方程式を $z=z(t)$, $(a \leqq t \leqq b)$ の形で表せ．ただし，t は実数とする．

(2) 前問の結果を使って次の積分の値を求めよ．

$$\int_C \bar{z}\, dz$$

6. 点 α を中心とする半径 r の図の円を C とおくとき，次の各問いに答えよ．ただし，α は定数，r は正の定数である．(4 点× 3=12 点)



(1) 円 C の方程式を $z=z(t)$, $(a \leqq t \leqq b)$ の形で表せ．ただし，t は実数とする．

(2) 前問の結果を用いて次の積分の値を求めよ．

$$\int_C \frac{1}{z-\alpha}\, dz$$

(3) 同様にして，次の積分の値を求めよ．

$$\int_C \frac{1}{(z-\alpha)^5}\, dz$$

2. (1) (与式) $= 4+1$
$= 5$ //

(2) (与式) $= \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6$
$= 2^6 e^{i2\pi}$
$= (2^3)^2$
$= 8^2$
$= 64$ //

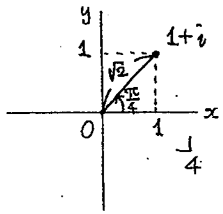
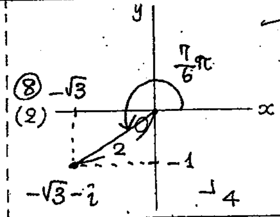
(3) (与式) $= \log|i| + i \arg i$
$= \log 1 + i \cdot \frac{\pi}{2}$
$= 0 + i\frac{\pi}{2}$
$= \frac{\pi}{2} i$ //

Logでは $-\pi < \arg i \leqq$ とするので

応用数学B　解答用紙　　H25 年度前期中間試験　2013.6.14

4 M E D J C (○で囲め)　学籍番号　　氏名　　100

1~2 は答のみを解答欄に記入し、3~6 は途中式等も記述せよ。

1.	(1) 	$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$		(2) 	$2e^{i\frac{7}{6}\pi}$
2.	(1) 5		(2) 64		(3) $\frac{\pi}{2}i$

40

3. (1)

[証] (左辺) $= e^{i\pi}$ （オイラーの公式）

$= \cos\pi + i\sin\pi$

$= (-1) + i\times 0$

$= -1$

$=$ (右辺) //

(2)

[証] $\cos z$ の定義式より

(左辺) $= \cos n\pi$

$= \dfrac{e^{in\pi} + e^{-in\pi}}{2}$

$= \dfrac{(e^{i\pi})^n + (e^{-i\pi})^n}{2}$ （前問の結果より）

$= \dfrac{(-1)^n + \left(\frac{1}{-1}\right)^n}{2}$

$= \dfrac{(-1)^n + (-1)^n}{2}$

$= \dfrac{\cancel{2}(-1)^n}{\cancel{2}}$

$= (-1)^n$

$=$ (右辺) //

4. (1)

$u_x = 2x + 3$

$u_{xx} = 2$

$u_y = -2y$

$u_{yy} = -2$

$\therefore u_{xx} + u_{yy} = 2 + (-2)$

$= 0$

$\therefore u$ は調和関数である。//

(2) コーシー・リーマンの関係式より

$\begin{cases} v_y = u_x = 2x+3 & \cdots ① \\ v_x = -u_y = 2y & \cdots ② \end{cases}$

①より

$v = \int (2x+3)\,dy$

$= 2xy + 3y + C(x)$, $C(x)$ は x の任意関数

これを②へ代入すると

$2y + C'(x) = 2y$

$\therefore C'(x) = 0$

$\therefore C(x) = c$, c は任意定数

$f(z)$ は1つ求めれば良いので, 例えば $c=0$ とすると

$f(z) = u + iv$

$= (x^2 - y^2 + 3x) + i(2xy + 3y)$ //

(3)

$f(z) = x^2 + 2ixy - y^2 + 3(x+iy)$

$= (x+iy)^2 + 3(x+iy)$

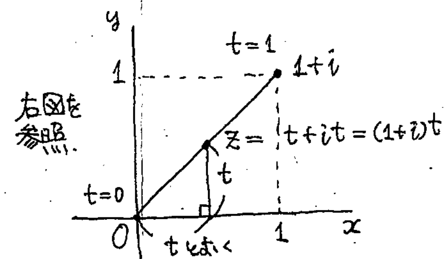
$= z^2 + 3z$ //

40

5. (1)

$z = (1+i)t$, $(0 \leqq t \leqq 1)$ //

右図を参照。



(2)

$\int_C \bar{z}\,dz = \int_0^1 \overline{(1+i)t}\cdot\{(1+i)t\}'\,dt$

$= \int_0^1 (1-i)t\cdot(1+i)\,dt$

$= (1-i)(1+i)\int_0^1 t\,dt$

$= (1-i^2)\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1$

$= 2\cdot\frac{1}{2}$

$= 1$ //

6. (1)

$z = \alpha + re^{it}$, $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$

(2)

$\int_C \frac{1}{z-\alpha}\,dz$

$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{\alpha} + re^{it} - \cancel{\alpha}}\cdot(\alpha + re^{it})'\,dt$

$= \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it}}\,dt$

$= i\int_0^{2\pi} dt$

$= i[t]_0^{2\pi}$

$= 2\pi i$ //

(3)

$\int_C \frac{1}{(z-\alpha)^5}\,dz$

$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\cancel{\alpha} + re^{it} - \cancel{\alpha})^5}\cdot(\alpha + re^{it})'\,dt$

$= \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{r^5 e^{i5t}}\,dt$

$= \frac{i}{r^4}\int_0^{2\pi} e^{-i4t}\,dt$

$= \frac{i}{r^4}\left[\frac{e^{-i4t}}{-i4}\right]_0^{2\pi}$

$= -\frac{1}{4r^4}\left(e^{-i8\pi} - 1\right)$

$= -\frac{1}{4r^4}(1-1)$

$= 0$ //

20