応用数学B　問題用紙

H25 年度前期定期試験　2013.9.19

4　M　J　C（○で囲め）　学籍番号　　　　　　　　　　　氏名

1. 次の各積分の値を求めよ．ただし，C はすべて原点を中心とする半径 2 の円とする．(6 点× 4=24 点)

(1) $\displaystyle\int_C (e^z + \cos z)\,dz$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-\pi}\,dz$

(3) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z+i}\,dz$

(4) $\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{(z-1)^2}\,dz$

2. 次の 3 つの関数 (a)～(c) のそれぞれについて，以下の各問いに答えよ．　(6 点× 3 × 3=54 点)

(a) $\dfrac{\sin z}{z^2}$　　(b) $\dfrac{1}{z^2(1-3z)}$　　(c) $e^{\frac{1}{z}}$

(1) $z=0$ を中心とするローラン展開の主要部（負べきの部分）を求めよ．

(2) 孤立特異点 $z=0$ の種類（例:2位の極）をいえ．

(3) 孤立特異点 $z=0$ における留数を求めよ．

3. 以下の各問いに答えよ．

(1) $z=e^{i\theta}$ とおくことにより，次式が成り立つことを証明せよ．　(10 点)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\cos\theta} = -i\int_C \frac{dz}{2z^2+5z+2}$$

ただし，C は円 $|z|=1$ を表す．

(2) この積分の値を求めよ．　(12 点)

必要ならば以下の公式を使ってよい．

- $e^z = 1 + \dfrac{z}{1!} + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots + \dfrac{z^n}{n!} + \cdots,$
- $\sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,$
- $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$
- $\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + \cdots, \quad (|z|<1)$

応用数学B　解答用紙

H25年度前期期末試験　2013.9.19　100

4 M J C（○で囲め）　学籍番号　　　　氏名

1~2は答のみを解答欄に記入し、3~6は途中式等も記述せよ。

1.

(1) 6	(2) 6	(3) 6	(4) 6
0	0	$2\pi i$	$-2\pi e^{i}$

24

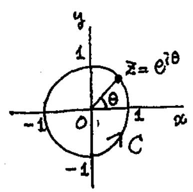
2.

	(a)	(b)	(c)
(1) 主要部	6 $\frac{1}{z}$	6 $\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z}$	6 $\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{z}$
(2) 種類	6 1位の極	6 2位の極	6 真性特異点
(3) 留数	6 1	6 3	6 1

54

10

3. (1) $|z|=1$であり，$z=e^{i\theta}$とおくとθは0から2πまで変化する。また$dz=ie^{i\theta}d\theta$であるから ┘2



$$\int_C \frac{dz}{2z^2+5z+2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{i\theta}d\theta}{2e^{2i\theta}+5e^{i\theta}+2}$$

$$=i\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2e^{i\theta}+5+2e^{-i\theta}}$$

$$i\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}$$

$$=i\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+2\times 2\cos\theta}$$ ┘4

$$=i\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+4\cos\theta}$$

$$\therefore \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+4\cos\theta}=-i\int_C\frac{dz}{2z^2+5z+2} \ //$$ ┘4

12

(2)

$$\begin{array}{ccc} 2 & \times\ 1 \to & 1 \\ 1 & \ \ 2 \to & 4 \\ \hline 2 & 2 & 5 \end{array}$$

$\therefore 2z^2+5z+2=(2z+1)(z+2)$ ┘4

したがって

$$(与式)=-i\int_C\frac{dz}{(2z+1)(z+2)}$$

$$f(z)=\frac{1}{(2z+1)(z+2)}$$

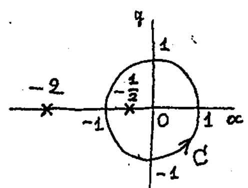
の孤立特異点は

$z=-\frac{1}{2}, -2$であり

どちらも1位の極．

このうちC内にあるのは

$z=-\frac{1}{2}$であるから ┘2



$$\mathrm{Res}[f,-\tfrac{1}{2}]=\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\left\{\left(z+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{(2z+1)(z+2)}\right\}$$ ┘2

$$=\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\left\{\cancel{\left(z+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2\cancel{(z+\frac{1}{2})}(z+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2\left(-\frac{1}{2}+2\right)}$$

$$=\frac{1}{-1+4}$$

$$=\frac{1}{3}$$ ┘2

よって留数定理より

$$(与式)=-i\times 2\pi i\,\mathrm{Res}[f,-\tfrac{1}{2}]$$

$$=2\pi\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{2\pi}{3}$$ ┘2 //

22

応用数学B　問題用紙

H25年度前期定期試験　2013.9.19

4 M J C（○で囲め）　学籍番号　　　　氏名

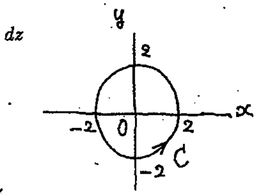
1. 次の各積分の値を求めよ．ただし，Cはすべて原点を中心とする半径2の円とする．（6点×4=24点）

(1) $\int_C (e^z+\cos z)\,dz$

(2) $\int_C \frac{1}{z-\pi}\,dz$

(3) $\int_C \frac{1}{z+i}\,dz$

(4) $\int_C \frac{e^{iz}}{(z-1)^2}\,dz$



2. 次の3つの関数 (a)~(c) のそれぞれについて，以下の各問いに答えよ．（6点×3×3=54点）

(a) $\frac{\sin z}{z^2}$　(b) $\frac{1}{z^2(1-3z)}$　(c) $e^{\frac{1}{z}}$

(1) $z=0$を中心とするローラン展開の主要部（負べきの部分）を求めよ．

(2) 孤立特異点$z=0$の種類（例：2位の極）をいえ．

(3) 孤立特異点$z=0$における留数を求めよ．

3. 以下の各問いに答えよ．

(1) $z=e^{i\theta}$とおくことにより，次式が成り立つことを証明せよ．（10点）

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5+4\cos\theta}=-i\int_C\frac{dz}{2z^2+5z+2}$$

ただし，Cは円$|z|=1$を表す．

(2) この積分の値を求めよ．（12点）

2.(a) $\frac{\sin z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)$

$=\boxed{\frac{1}{z}}-\frac{z}{3!}+\frac{z^3}{5!}-\cdots$

主要部，1位の極，$\mathrm{Res}[f,0]=a_{-1}=1$ //

(b) $\frac{1}{z^2(1-3z)}=\frac{1}{z^2}\left\{1+(3z)+(3z)^2+(3z)^3+\cdots\right\}$

$=\boxed{\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z}}+9+27z+\cdots$

主要部，2位の極，$\mathrm{Res}[f,0]=a_{-1}=3$ //

(c) $e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{\frac{1}{z}}{1!}+\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^3}{3!}+\cdots+\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!}+\cdots$

$=1+\boxed{\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots}$

主要部，真性特異点，$\mathrm{Res}[f,0]=a_{-1}=1$ //

必要ならば以下の公式を使ってよい．

- $e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$,
- $\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$,
- $\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots$,
- $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$,　$(|z|<1)$

1(1) $f(z)=e^z+\cos z$はz平面全体で正則であるから，コーシーの積分定理より 0 //

[別解]

$(与式)=\left[e^z+\sin z\right]_{z=2}^{z=2}=0$ //

(2) $f(z)=\frac{1}{z-\pi}$の孤立特異点は$z=\pi$であるが，これはC外にある。したがってコーシーの積分定理より 0 //

(3) $f(z)=\frac{1}{z+i}$の孤立特異点は$z=-i$（1位の極）で，これはC内にある。よってこの点における留数は

$$\mathrm{Res}[f,-i]=\lim_{z\to-i}\left\{(z+i)\frac{1}{z+i}\right\}$$

$$=\lim_{z\to-i}1$$

$$=1$$

∴留数定理より

$(与式)=2\pi i\,\mathrm{Res}[f,-i]$

$=2\pi i\times 1$

$=2\pi i$ //

(4) $f(z)=\frac{e^{iz}}{(z-1)^2}$の孤立特異点は$z=1$（2位の極）で，これはC内にある。よって

$$\mathrm{Res}[f,1]=\frac{1}{1!}\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left\{\cancel{(z-1)^2}\cdot\frac{e^{iz}}{\cancel{(z-1)^2}}\right\}$$

$$=\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}e^{iz}$$

$$=\lim_{z\to1}ie^{iz}$$

$$=ie^{i}$$

∴留数定理より

$(与式)=2\pi i\,\mathrm{Res}[f,1]$

$=2\pi i\times ie^{i}$

$=-2\pi e^{i}$ //