問 1. $f(x)$ は**奇**関数なので，$c_0 = 0, a_n = 0$ $\boxed{5\text{点}}$ である．

$$b_n$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{-x\sin nx}_{\text{偶関数}} dx \quad \boxed{5\text{点}}$$
$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx$$
$$= -\frac{2}{\pi}\left\{\left[x\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)dx\right\} \quad \boxed{5\text{点}}$$
$$= \frac{2}{n\pi}\left\{\Big[x\cos nx\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos nx dx\right\}$$
$$= \frac{2}{n\pi}\left\{\pi(-1)^n - 0 - \left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}\right\}$$
$$= \frac{2}{n\pi}\{\pi(-1)^n - (0-0)\}$$
$$= \frac{2\cdot(-1)^n}{n} \quad \boxed{3\text{点}}$$

を得る．求めるフーリエ級数は

$$f(x) \sim \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^n}{n}\sin nx} \quad \boxed{2\text{点}}$$

問 2. (1) $f(x)$ は**偶**関数なので，フーリエ余弦級数を求めればよい．また，$x \geqq 0$ で $|x| = x$ である．

(a)
$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\underbrace{f(x)}_{\text{偶関数}}dx$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^1 f(x)dx$$
$$= \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \quad \boxed{3\text{点}}$$

(b) a_n
$$= \int_{-1}^{1}\underbrace{f(x)\cos n\pi x}_{\text{偶関数}}dx$$
$$= 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx$$
$$= 2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx$$
$$= 2\left\{\left[x\cdot\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right]_0^1 - \int_0^1 1\cdot\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\,dx\right\}$$
$$\boxed{3\text{点}}$$
$$= 2\left\{0 - 0 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x\,dx\right\}$$
$$= -\frac{2}{n\pi}\left[\frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x\right]_0^1$$
$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\{(-1)^n - 1\}$$
$$= \frac{2\{(-1)^n - 1\}}{n^2\pi^2} \quad \boxed{3\text{点}}$$

(c) $b_n = 0$ $\boxed{3\text{点}}$

求めるフーリエ級数は

$$f(x) \sim \boxed{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\{(-1)^n - 1\}}{n^2\pi^2}\cos n\pi x} \cdots (*)$$

$\boxed{3\text{点}}$

(2) $(*)$ に $x = 0$ を代入すると，$\boxed{2\text{点}}$

$$f(0) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\{1 - (-1)^n\}}{n^2\pi^2}$$

であるから，

$$0 = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\{1-(-1)^n\}}{n^2\pi^2}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}$$
$$= \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{2}{1^2} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \cdots\right)$$
$$= \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right)$$

より，

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4} = \boxed{\frac{1}{8}}\pi^2 \quad \boxed{3\text{点}}$$

がわかる．

- $x = 1, 0, -1$ を代入して計算しようとした時点で 2 点を与える．

問 3. (1)
$$\mathcal{F}[f(x)]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx \quad \boxed{4\text{点}}$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0\cdot e^{-iux}dx + \int_0^{\infty} e^{-x}e^{-iux}dx$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-(1+iu)x}dx$$
$$= \left[\frac{1}{-(1+iu)}e^{-(1+iu)x}\right]_0^{\infty} \quad \boxed{3\text{点}}$$
$$= \frac{1}{-(1+iu)}\left[e^{-(1+iu)x}\right]_0^{\infty}$$
$$= \frac{1}{-(1+iu)}(0-1) = \boxed{\frac{1}{1+iu}} \quad \boxed{3\text{点}}$$

を得る [*1]．

(2) フーリエの積分定理より，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+iu}e^{iux}du = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

を得る．$\boxed{5\text{点}}$

左辺を整理すると，

(左辺)
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ux + i\sin ux}{1+iu}\cdot\frac{1-iu}{1-iu}du$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\cos ux + i\sin ux)(1-iu)}{1^2 - i^2u^2}du$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ux + u\sin ux}{1+u^2}du + i\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-u\cos ux + \sin ux}{1+u^2}du$$

$x = 1$ を代入し，$\boxed{3\text{点}}$

実部を比べる

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos u + u\sin u}{1+u^2}du = f(1)$$
$$\frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_0^{\infty}\frac{\cos u + u\sin u}{1+u^2}du = e^{-1}$$

[*1] $\left|e^{-(1+iu)x}\right| = \left|e^{-x}\right|\cdot\left|e^{-iux}\right| = e^{-x}\cdot 1$ より，$\lim_{x\to\infty} e^{-(1+iu)x} = 0$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_0^{\infty}\frac{\cos u + u\sin u}{1+u^2}du = \boxed{\frac{\pi}{e}} \quad \boxed{2\text{点}}$$

を得る．途中で，$\dfrac{\cos u + u\sin u}{1+u^2}$ が偶関数であることを用いた．

- フーリエの積分定理の右辺は $f(x)$ でも不問とする．
- フーリエの積分定理に近い形があれば，3 点は与える．
- フーリエ余弦変換だと思って計算して，
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iux}}{1+iu}du = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{iux}}{1+iu}du$$
とすることは結果的に正しいが，いきなり使って良い事実ではない．これを説明なしに使っている場合は 3 点引き．

問 4. (1) 等式 $e^{-\frac{x^2}{a}} * e^{-\frac{x^2}{b}} = Ce^{-\frac{x^2}{a+b}}$ の両辺にフーリエ変換をほどこすと，

$$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{a}}\right]\cdot\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{b}}\right] = C\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{a+b}}\right] \quad \boxed{4\text{点}}$$
$$\sqrt{\pi a}e^{-\frac{au^2}{4}}\cdot\sqrt{\pi b}e^{-\frac{bu^2}{4}} = C\sqrt{\pi(a+b)}e^{-\frac{(a+b)u^2}{4}}$$
$$\pi\sqrt{ab}e^{-\frac{(a+b)u^2}{4}} = C\sqrt{\pi(a+b)}e^{-\frac{(a+b)u^2}{4}}$$

となる．$\boxed{3\text{点}}$

両辺比較して

$$\pi\sqrt{ab} = C\sqrt{\pi(a+b)}$$
$$C = \boxed{\sqrt{\frac{\pi ab}{a+b}}} \quad \boxed{3\text{点}}$$

- 他の部分ができていないが，$\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{a}}\right] = \sqrt{\pi a}e^{-\frac{au^2}{4}}$ や $C = \sqrt{\dfrac{\pi ab}{a+b}}$ のどちらかがわかっていれば，3 点を与える．

(2)

$$\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{3}}, \quad E(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

を用いると，求める解は

$$u = \varphi(x) * E(x,t) \quad \boxed{5\text{点}}$$
$$= e^{-\frac{x^2}{3}} * \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left(e^{-\frac{x^2}{3}} * e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sqrt{\frac{\pi\cdot 3\cdot 4t}{3+4t}}\,e^{-\frac{x^2}{3+4t}} \quad \boxed{3\text{点}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4\pi t}\cdot\frac{\pi\cdot 3\cdot 4t}{3+4t}}\,e^{-\frac{x^2}{3+4t}}$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{3}{3+4t}}\,e^{-\frac{x^2}{3+4t}}} \quad \boxed{2\text{点}}$$

- (1) が完答でない場合 (8 点以下)，C のまで計算しても満点を与える．

問 5.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx = F(u)$$

を u で微分すると，　$\boxed{3\text{点}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left\{e^{-iux}\right\}' dx = F'(u)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(-ixe^{-iux}\right)dx = F'(u)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-ix)f(x)e^{-iux}dx = F'(u) \quad \boxed{3\text{点}}$$

となる．ただし，途中で

$$\frac{d}{du}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d}{du}e^{-iux}dx$$

を用いた．これを繰り返し u で微分すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^2 f(x)e^{-iux}dx = F''(u)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^3 f(x)e^{-iux}dx = F^{(3)}(u) \quad \boxed{2\text{点}}$$

$$\vdots$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^n f(x)e^{-iux}dx = F^{(n)}(u)$$

$$\mathcal{F}\left[(-ix)^n f(x)\right] = F^{(n)}(u)$$

となり，結論が得られた　■ $\boxed{2\text{点}}$

問 6. (1) $f(x)$ は**偶**関数なので，フーリエ余弦級数を求めればよい．

$$c_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\underbrace{f(x)}_{\text{偶関数}}dx \quad \boxed{3\text{点}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^1 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 x^2\,dx = \boxed{\frac{1}{3}} \quad \boxed{2\text{点}}$$

- $f(x) = \frac{1}{2}(x=-1)$ は積分には無関係なので，考慮する必要はない [*2]．
- $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx$ を計算していれば 3 点与えて，計算が合っていれば満点を与えた．しかし，

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dx$$

のようにまとめて計算している場合は点なし．

(2) 前問より，フーリエ級数

$$f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x$$

を得る．パーセバルの等式 ($L=1$) より，

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2\right)^2 dx = 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2\pi^2}\right)^2$$

$\boxed{3\text{点}}$

$$\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4\pi^4}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{9} + \frac{16}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

がわかる．したがって，

$$\frac{16}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{2}{5} - \frac{2}{9}$$

$$\frac{16}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{8}{45}$$

[*2] $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi$ ではなく，$f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi$ にするために必要．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \boxed{\frac{\pi^4}{90}} \quad \boxed{2\text{点}}$$

コメント

ほとんど教科書の問や例題から出題した．

問 1　夏休み明けの復習プリント (3 章 §1 問 2 の類題)

問 2　3 章 §1 例題 3 と問 6

問 3　3 章 §2 「練習問題 2」1(例題 1 の類題)

問 4　3 章 §2 例題 3,4 の類題

問 5　3 章 §2 問 5

配布した過去問題をやることは良いが，**それをやるだけでは不十分**である．

部分点の基準

軽微な計算ミスは，原則として該当箇所の点を引く．軽微なミス 2 回以上および重大な間違いはその問題の得点なし．

採点ミス (特に合計得点) がある場合は**配布した日の夕方まで**に申告すること．欠席した場合は考慮する．

2013/9/20 作成 (田所)