制御工学　前期中間試験問題

2013/ 6/ 11
制御工学担当　渡邊

【注意】解答は太字四角内に書くこと．途中経過は部分点対象とする．図や説明は内容の正確さに加えて，分量も採点基準とする．解答欄が足りなければ裏面等に記載してよいが，その旨を明示すること．

8

1. 次の制御システムの解析手法に関する文章の空欄に適切な用語を埋めよ．
デルタ関数をシステムに入力すると得られる[1]と入力の[2]積分をすることで任意の入力に対する出力が得られる．内部の微分方程式表現が既知の場合は，[3]変換することで入出力関係を示す[4]が得られる．離散システムの場合は差分方程式に対して[5]変換を用いることで[4]を求められる．なお[1]の[2] 積分を[3]変換しても[4]は導出される．

1. ~~入出力微分方程式~~ インパルス応答	**2.** たたみこみ	**3.** ラプラス
4. 伝達関数	**5.** Z	

6

2. $\cos(\omega n)$ のZ変換を次の手順で求めよ．

(1) $\cos(\omega n)$ をオイラーの公式により $e^{j\theta}$ の形に変換せよ　$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

$\theta = \omega n$　$e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j\sin(\omega n)$

$+\ e^{-j\omega n} = \cos(\omega n) - j\sin(\omega n)$

$e^{j\omega n} + e^{-j\omega n} = 2\cos(\omega n)$

$$\frac{e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}}{2}$$

$$\boxed{e^{j\omega} z^{-1} + e^{-j\omega} z^{-1}}$$

? ?

(2) 無限級数の関係を利用して(1)の式をZ変換せよ

$L[\cos(\omega n)] = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\omega n) z^{-n}$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}) z^{-n} = \frac{1}{2}\sum\{(e^{j\omega} z^{-1})^n + (e^{-j\omega} z^{-1})^n\}$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-e^{j\omega} z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-j\omega} z^{-1}}\right\}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{2 - e^{j\omega} z^{-1} - e^{-j\omega} z^{-1}}{1 - e^{j\omega} z^{-1} - e^{-j\omega} z^{-1} + z^{-2}}\right) = \frac{1-\cos\omega z^{-1}}{1-2\cos\omega z^{-1} + z^{-2}}$

$$\boxed{\frac{1-\cos(\omega) z^{-1}}{1-2\cos(\omega) z^{-1} + z^{-2}}}$$

0

3. 数列 $\sum_{k=0}^{n} x(k)$ のZ変換を次の手順に従って求めよ

(1) 数列を $y(n)$ と置いた場合，$y(n)$ と $y(n\text{-}1)$ の差 $y(n)\text{-}y(n\text{-}1)$ を，x を含む等式で表せ

$y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k) \rightarrow x(0) + x(1) + \cdots + x(n-1) + x(n)$

$y(n) - y(n-1) = x(n)$

$y(n-1) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k) \rightarrow x(0) + x(1) + \cdots + x(n-2) + x(n-1)$

$$\boxed{x(k) - x(k-1)}$$

$y(n) - y(n-1) = x(n)$

(2) (1)の式をZ変換することによって $y(n)$ のZ変換を示せ．ただし $Z[x(n)] = X(z)$ とする．

$y(n) \Rightarrow Y(z)$

$Y(z) - z^{-1} Y(z) = X(z)$

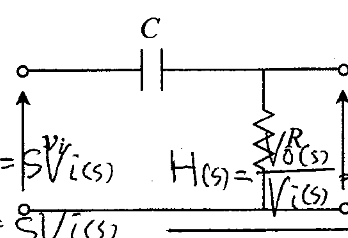
$Y(z) = \frac{X(z)}{1-z^{-1}}$

$\frac{X(z)}{1-z^{-1}}$

$$\boxed{\frac{1}{1-x^{-1}}}$$

0

4. 次の回路図（CR 回路）の微分方程式が以下の式で表わされることがわかっている．このとき，この回路の伝達関数 $H(s)$ 及び単位ステップ入力に対する応答を求めよ．ここで，電圧の初期値は全て無視する．



$$\frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_o(t) = \frac{dv_i(t)}{dt}$$

$\frac{dV_o(t)}{dt} + \frac{1}{RC}V_o(t) = \frac{dV_i(t)}{dt}$

ラプラス

$V_o(t) \Rightarrow V_o(s)$

$\frac{dV_o(t)}{dt} \Rightarrow sV_o(s)$

$sV_o(s) + \frac{1}{RC}V_o(s) = sV_i(s)$

$V_o(s)\left\{s + \frac{1}{RC}\right\} = sV_i(s)$

$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{v_o S}{S + \frac{1}{RC}}$

$H(s) = \frac{V_o(s)}{dV_i(s)} = \frac{1}{(1+RCS)d}$??

n??

伝達関数 $\boxed{\frac{1}{(1+RCS)d}}$

$L[u(t)] = \frac{1}{s}$

$V_i(s) = \frac{1}{s}$

$V_o(s) = \frac{s}{s+\frac{1}{RC}} \times \frac{1}{s}$

$= \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}$　$V_o(t) = e^{-\frac{1}{RC}t}$

単位ステップ入力に対する応答 $\boxed{1 - e^{-\frac{t}{RCd}}}$

$V(s) = \frac{1}{1+RCs} = \frac{A}{sd}$

$V_o(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RCd}}$

学籍番号 [redacted]

5. 問 4 の微分方程式から差分方程式を導出し，パルス伝達関数 $H(z)$ 及び単位ステップ入力に対する応答を求めよ．

0

$$\frac{dV_o(t)}{dt} \Rightarrow \frac{V_o(nT)-V_o(nT-T)}{T}$$

$$\frac{V_o(nT)-V_o(nT-T)}{T} + \frac{1}{RC}V_o(nT) = \frac{V_i(nT)-V_i(nT-T)}{T}$$

$$V_o(nT)-V_o(nT-T) + \frac{T}{RC}V_o(nT) = V_i(nT)-V_i(nT-T)$$

Z変換

$$V_o(nT) \Rightarrow V_o(z)$$

$$V_o(nT-T) \Rightarrow z^{-1}V_o(z)$$

$$V_o(z) - z^{-1}V_o(z) + \frac{T}{RC}V_o(z) = V_i(z) - z^{-1}V_i(z)$$

$$V_o(z)\left\{1 - z^{-1} + \frac{T}{RC}\right\} = V_i(z)(1-z^{-1})$$

$$1 + \frac{T}{RC}\left(=\frac{RC+T}{RC}\right) \Rightarrow A とする．$$

$$V_o(z)\{A - z^{-1}\} = V_i(z)(1-z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{V_o(z)}{V_i(z)} = \frac{1-z^{-1}}{A-z^{-1}}$$

パルス伝達関数 $\boxed{\dfrac{1}{1+RCs}}$ $\cancel{\dfrac{1-z^{-1}}{A-z^{-1}}}$

単位ステップ入力に対する応答 $\boxed{1-e^{-\frac{t}{RC}}}$

$$\cancel{V_i(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}}$$

$$V_o(z) = \cancel{\frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}}}\ \frac{1}{A-z^{-1}} = \frac{1}{A-z^{-1}}$$

$$\frac{\frac{1}{A}}{1-\frac{1}{A}z^{-1}}$$

$$V_o(t) = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{A}\right)^n = \left(\frac{1}{A}\right)^{n+1}$$

6. あるアナログシステムにインパルス入力を与えたところ以下の応答が得られた．この時，次の問いに答えよ．

0

$$y(t) = \frac{4}{3}\left(e^{-t} - e^{-4t}\right)$$

(1) このシステムの伝達関数 $H(s)$を求めよ

$$y(t) = \frac{4}{3}\left(e^{-t} - e^{-4t}\right) \Rightarrow \frac{4}{3}\left\{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+4}\right\}$$

$$\left(\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha}\right) \qquad = \frac{4}{s^2+5s+4}$$

$\boxed{\dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{3}e^{-t}}$

(2) このシステムの単位ステップ応答 $y(t)$を求めよ

$$H(s) = \frac{4}{s^2+5s+4}$$

$$Y(s) = \frac{4}{s^2+5s+4} \times \frac{1}{s} = \frac{4}{(s+1)(s+4)s} \overset{BBB}{\Rightarrow} \frac{1}{s} - \frac{4}{3(s+1)} + \frac{1}{3(s+4)} \overset{逆ラプラス}{\Rightarrow} \boxed{y(t) = 1 - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t}}$$

7. インパルス応答が $h(n)=0.2^n$ であるデジタルシステムに単位ステップ入力 $x(n)=1$ $(n>=0)$ を加えた時の出力 $y(n)$を，逆 Z 変換を用いて求めよ．

1

$$h(n) = 0.2^n$$

$$H(z) = \frac{1}{1-(0.2)z^{-1}}$$

単位ステップ

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-(0.2)z^{-1}} \times \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$= \frac{5}{4}\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{5}\,\frac{1}{1-(0.2)z^{-1}}\right)$$

$$\quad 1 \qquad\qquad 0.2^n$$

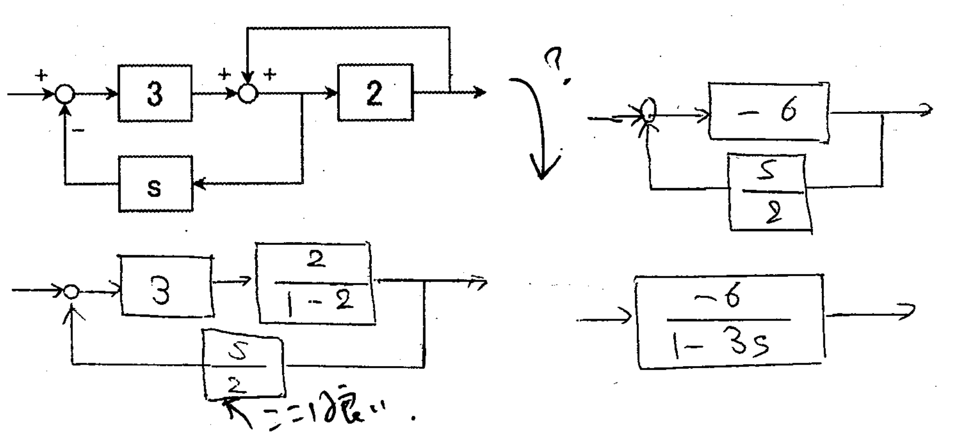
$$y(n) = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}(0.2)^n$$

$\boxed{\dfrac{1}{8}\{2(0.2)\}10(1.0)^n\}}$

1.

8. 次のブロック線図を簡単化し，伝達関数 $H(s)$を求めよ．

3



+3

$\boxed{-\dfrac{2}{1-s}}$

9. ラプラス変換の移動法則 $L[f(t-a)] = e^{-sa}F(s)$ を証明せよ．以下の空欄に自由に記載して良い．

0

$$L[f(t-a)]$$

$$= \int_0^\infty f(t-a)e^{-st}dt$$

$$\tau = t-a$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s(\tau+a)}d\tau$$

$$= \int_0^\infty f(\tau)e^{-sa}e^{-s\tau}d\tau$$

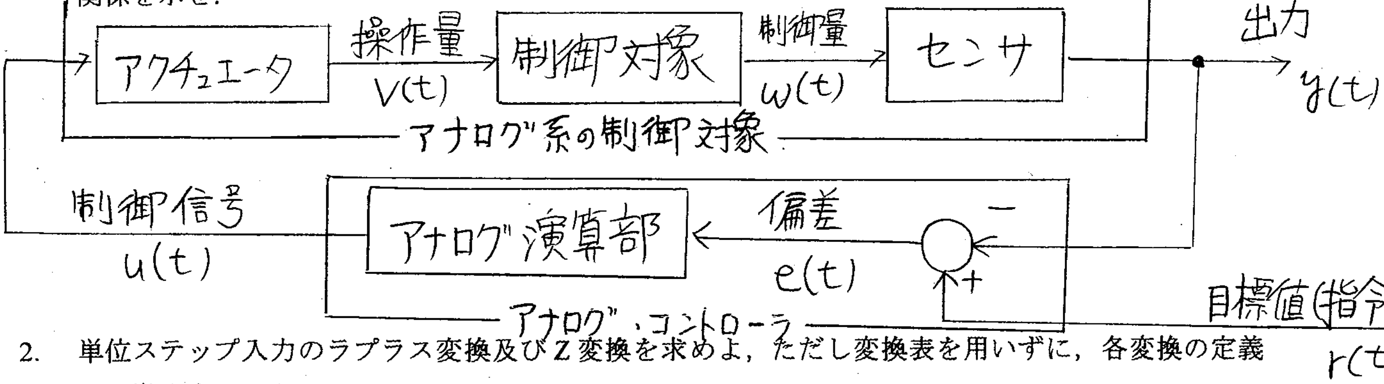
$$= e^{-sa}\underbrace{\int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau}_{F(s)}$$

制御工学　前期中間　演習問題

2013/05/31

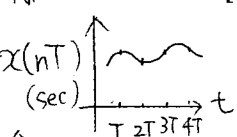
制御工学担当　渡邊

1. フィードバックシステムの一般的なブロック線図を描き，目標値・制御対象・偏差・操作変数の関係を示せ．

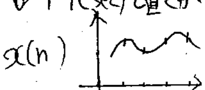


2. 単位ステップ入力のラプラス変換及びZ変換を求めよ，ただし変換表を用いずに，各変換の定義から導出すること．

離散値



⇕ T=1(sec)と置くか否か



n: 正規化した時間

[ラプラス変換]

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty 1\times e^{-st}dt=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty=\frac{1}{s}$$

[Z 変換]

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(nT)z^{-n}$$ に $f(nT)=\{1,1,1,\cdots\}$ $(n\geq 0)$

無限級数の公式 $\frac{1}{1-r}=1+r+r^2+\cdots$　　$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}}$

3. $\sin(\omega nT)$ の Z 変換を求めよ，ただし変換表を用いず導出から行うこと．

$$L[\sin(\omega nT)]=\sum_{n=0}^{\infty}\sin(\omega nT)z^{-n}$$

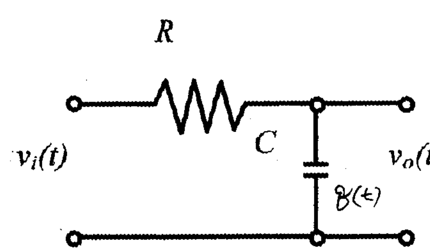
オイラーの公式より，

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega nT}-e^{-j\omega nT}\right)z^{-n}=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1-e^{j\omega T}z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-j\omega T}z^{-1}}\right)$$

通分してオイラーの公式より，

$$=\frac{z^{-1}\sin\omega T}{1-2z^{-1}\cos\omega T+z^{-2}}$$

4. 次の回路図で示される RC 回路の入出力微分方程式を導き，そのラプラス変換を求めて伝達関数を示せ．



（入出力微分方程式）

$$\frac{d}{dt}V_0(t)+\frac{1}{RC}V_0(t)=\frac{1}{RC}V_i(t)$$

（入出力微分方程式のラプラス変換）

$$sV_0(s)+\frac{1}{RC}V_0(s)=\frac{1}{RC}V_i(s)$$

補足

$$\begin{cases} v_o(t)=\frac{1}{C}q(t) \\ i(t)=\frac{d}{dt}q(t) \\ v_i(t)=Ri(t)+\frac{1}{C}q(t) \end{cases}$$

ex) ノイズフィルタ

(伝達関数)

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1+RCS}$$

5.　3 で求めた伝達関数を利用して，単位ステップ入力が与えられた場合の出力を，逆ラプラス変換を利用して求めよ．

$$\left(V_i(s) = \frac{1}{s} \right)$$

$$L[u(t)] = \frac{1}{s}$$

$$V_o(s) = \frac{1}{1+RCs} = \frac{A}{s} - \frac{B}{1+RCs} \quad (\text{部分分数分解})$$

$$V_o(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}$$

6.　4. の RC 回路に離散入力が入るとした場合に，入出力微分方程式から入出力差分方程式を導き，その Z 変換を求めてパルス伝達関数を示せ．

(入出力差分方程式)

$$\frac{V_o(nT) - V_o(nT-T)}{T} + \frac{1}{RC} V_o(nT) = \frac{1}{RC} V_i(nT)$$

(入出力差分方程式の Z 変換)

$$V_o(z) = (1-a) V_i(z) + a z^{-1} V_o(z)$$

ただし $a = \frac{RC}{RC+T}$

(パルス伝達関数)

$$H(z) = \frac{V_o(z)}{V_i(z)} = \frac{1-a}{1-az^{-1}}$$

7.　5 で求めたパルス伝達関数を利用して，単位ステップ入力が与えられた場合の出力を，逆 Z 変換を利用して求めよ．

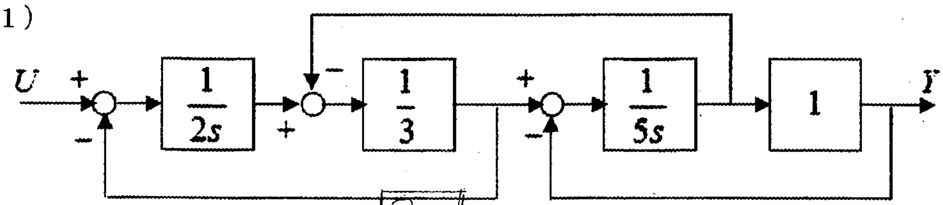
$$L[u(nT)] = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$V_o(z) = \frac{1-a}{1-az^{-1}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{A}{1-az^{-1}} + \frac{B}{1-z^{-1}} \quad (\text{部分分数分解})$$

$$V_o(t) = 1 - a^{n+1}$$

8. 次のブロック線図を簡単化し，1つのブロックで表しなさい．

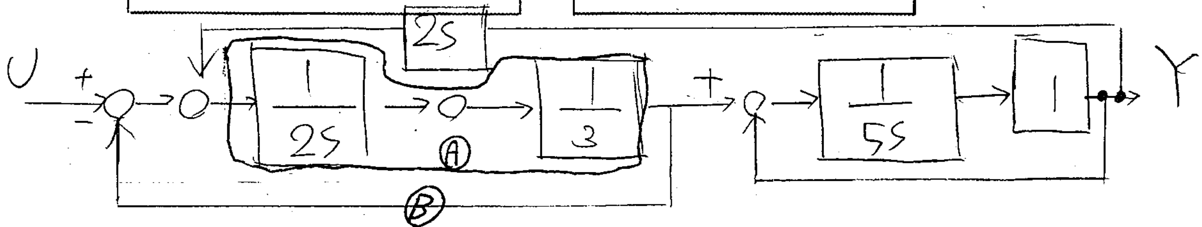
（1）

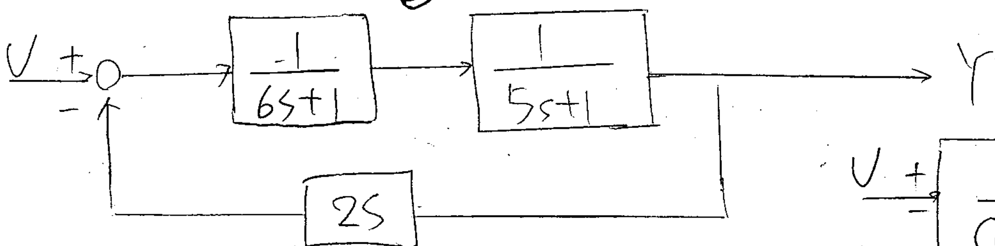


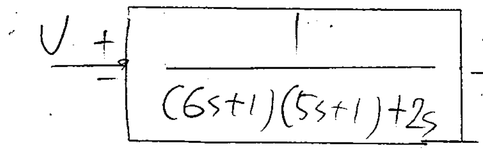
入力符号

↓

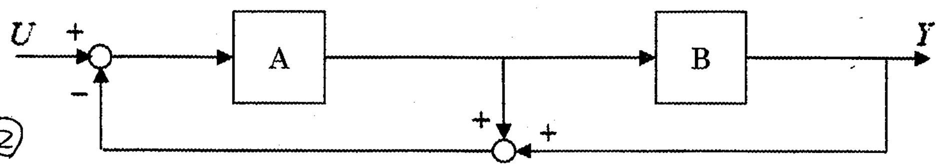
$\pm = \dfrac{A}{1 \mp AB}$

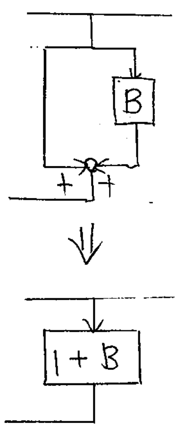




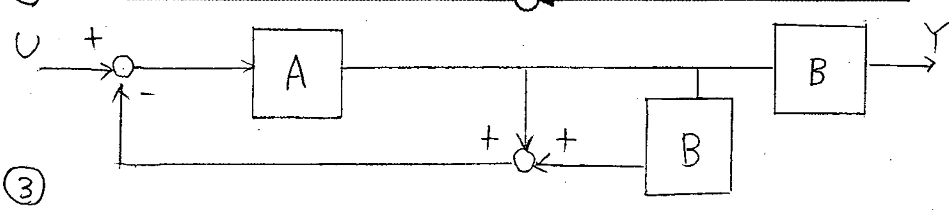


（2）

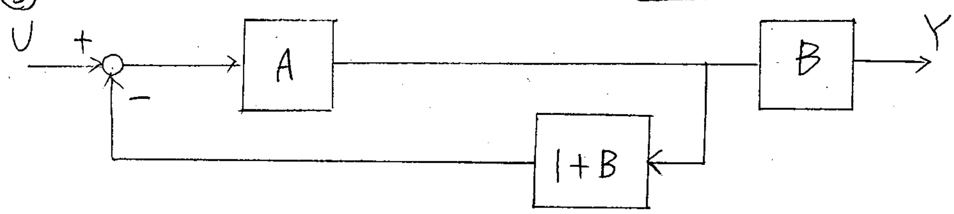




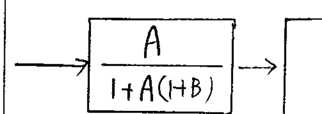
②



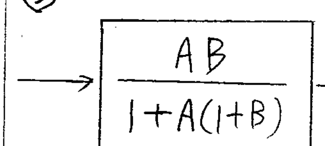
③



④



⑤

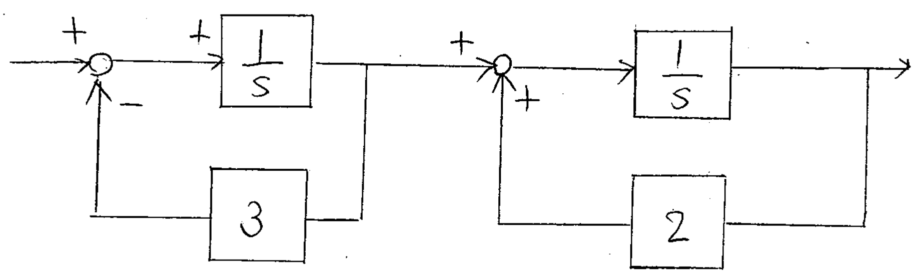


9. 次の伝達関数からブロック線図を導出しなさい．ただし，sの項については$\dfrac{1}{s}$まで分解すること．

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + s - 6}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2+s-6} = \frac{1}{s+3} \times \frac{1}{s-2}$$

$$= \frac{\frac{1}{s}}{(1+3\frac{1}{s})} \times \frac{\frac{1}{s}}{(1-2\frac{1}{s})}$$



10. インパルス応答が $h[nT]=0.5^n$ である離散システムに $x[n]=0.3^n$ を加えた時の出力を，逆 Z 変換を用いて求めよ

$$h(nT)=0.5^n$$

$$x(nT)=0.3^n$$

Z変換

$$H(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

$$X(z)=\frac{1}{1-0.3z^{-1}}$$

$$Y(z)=H(z)X(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}}\times\frac{1}{1-0.3z^{-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{1-0.5z^{-1}}-\frac{3}{1-0.3z^{-1}}\right)$$

$$y(n)=\frac{1}{2}\left\{5(0.5)^n-3(0.3)^n\right\}$$

11. 次の差分方程式の伝達関数を求めよ

$$\underbrace{y[nT]}_{出力}=\underbrace{ax[nT]}_{入力}+\underbrace{bx[nT-T]}_{入力}$$

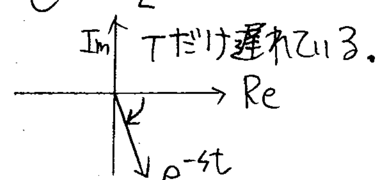
$$Y(z)=aX(z)+bX(z)z^{-1}$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=a+bz^{-1}$$

12.

Z変換のもう1つの重要な点

$e^{-st}=z^{-1}$ に対応



z^{-1}；サンプリング時間Tだけ遅らせる要素

12. 制御工学におけるラプラス変換及び Z 変換の意味を簡単に述べよ

・ラプラス変換：数学的
t領域 ⇒ S領域
（時間） （周波数）

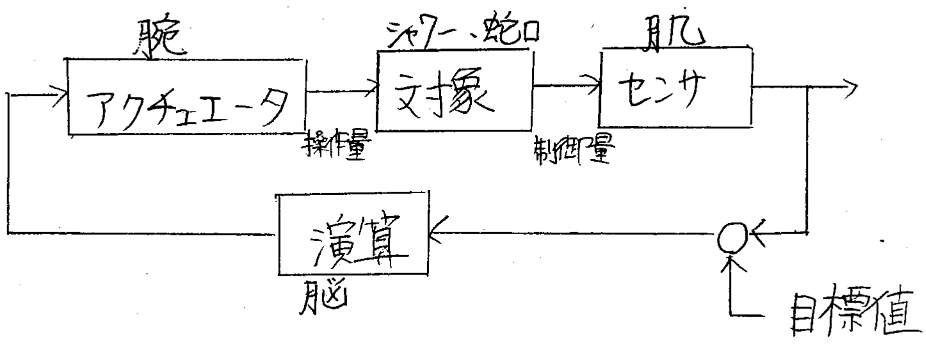
・システムの入出力関係：微分方程式で表せる。
ラプラス変換；微分操作を積に変換できる。
⇓
入出力関係を積で表せる!!

Z変換：ラプラス変換を離散情報に適用した
入出力の関係が積で表せる!!

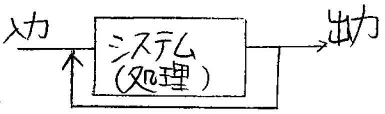
12、
データ系列に対して
$f(n)=\{1,2,3\}$
⇓
Z変換
$F(z)=1+2z^{-1}+3z^{-2}$
離散システムの表現がしやすい

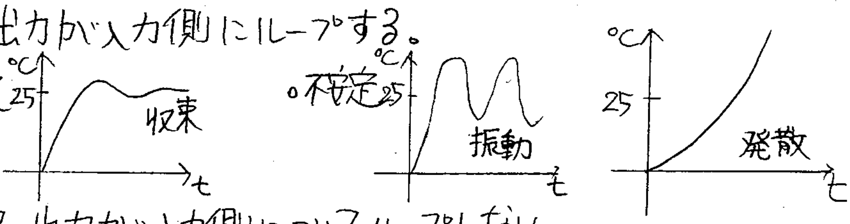
13. 何か1つ，日常にあるフィードバックシステムを取り上げどういう情報がフィードバックしているかを簡単に説明せよ．必要に応じて図があると良い．

シャワーを浴びる時．人が熱いか冷たいかを判断
⇒蛇口を制御

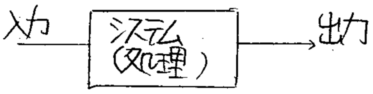


1. ◦フィードバック(feed back)制御：出力が入力側にループする。





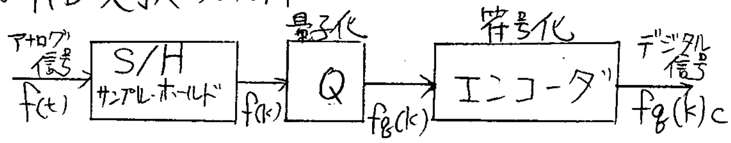
◦フィードフォワード(feed forward)制御：出力が入力側についてループしない。



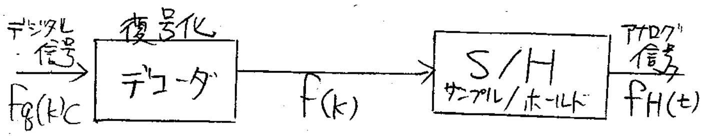
インパルス応答が分かる。
→あらゆる入力に対する出力が分か

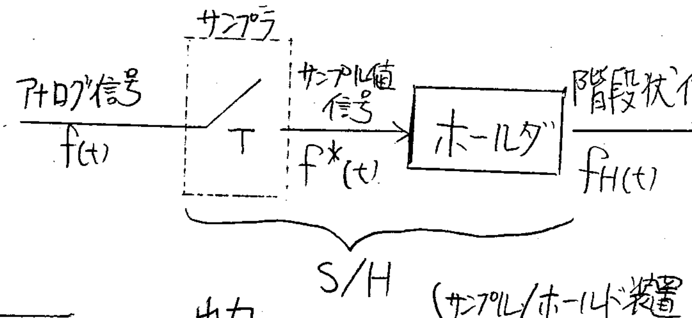
周波数応答が分かる。
→入力に正弦波を入れた時の出力が分か

◦A-D変換の動作

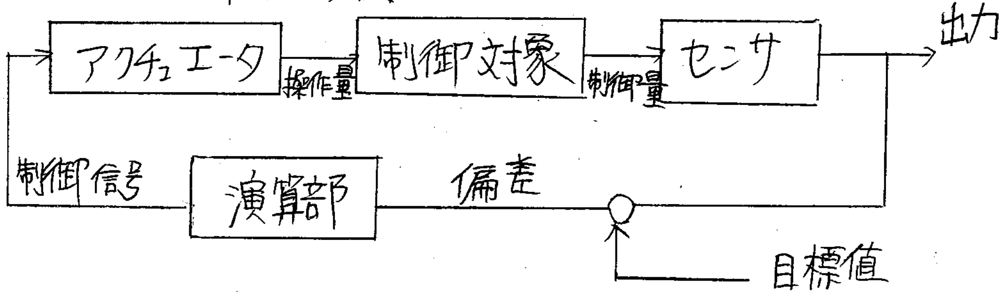


◦D-A変換の動作

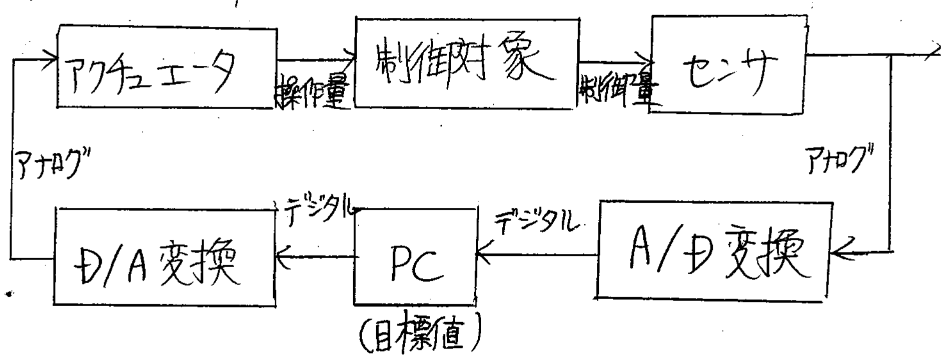




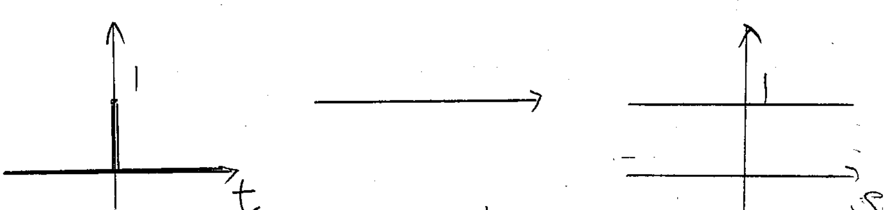
◦アナログの制御ブロック図



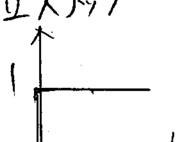
◦デジタルの制御ブロック図

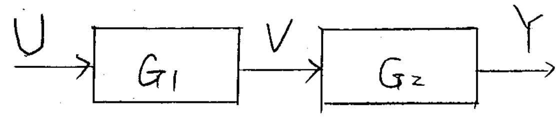
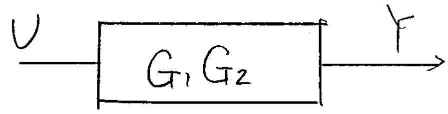
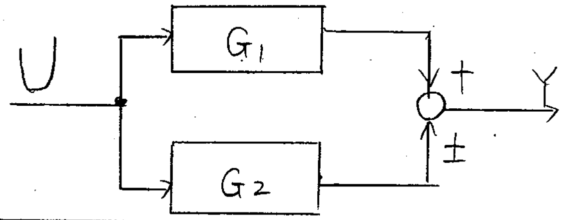
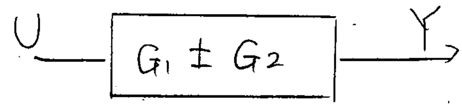
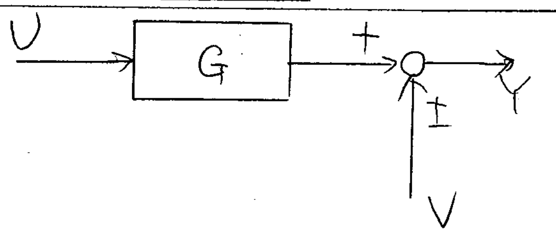
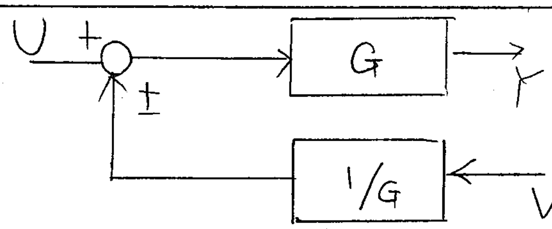
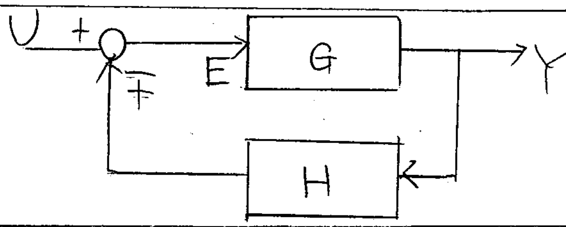
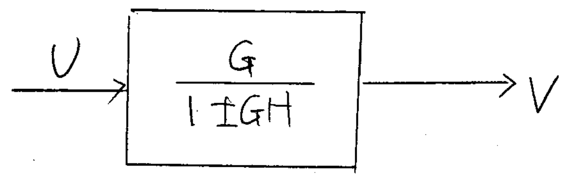
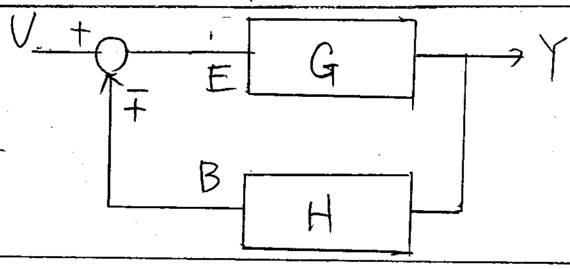
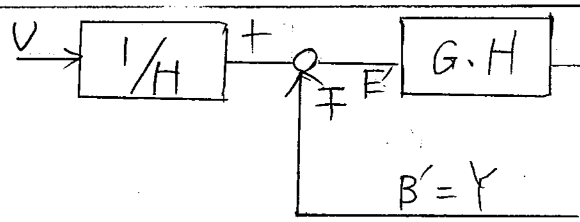


◦単位インパルス $L[g(t)]=1$ (数学的に0)



◦単位ステップ $L[U(t)]=\frac{1}{s}$



No.	種類	原線図	等価線図
1	直列結合		
2	並列結合		
3	加え合わせ点の移動		
4	フィードバック結合		
5	直結フィードバック系への変換		

3. $\cos(\omega nT)$のz変換

$$L[\cos(\omega nT)] = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{i\omega T}z^{-1} + e^{-i\omega T}z^{-1})^n$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{i\omega T}z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-i\omega T}z^{-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{i\omega T}z^{-1}+1-e^{i\omega T}z^{-1}}{(1-e^{i\omega T}z^{-1})(1-e^{-i\omega T}z^{-1})}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2-(e^{i\omega T}+e^{-i\omega T})z^{-1}}{1+z^{-2}-e^{i\omega T}z^{-1}-e^{i\omega T}z^{-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2-2\cos(\omega T)z^{-1}}{1-2\cos(\omega T)z^{-1}+z^{-2}}\right)$$

$$= \frac{1-\cos(\omega T)z^{-1}}{1-2\cos(\omega T)z^{-1}+z^{-2}}$$

Z変換表

単位インパルス	δ	1
	1	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$
	a^n	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$
	ta^n	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^2}$
	$\cos(\omega_0 t)$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$
	$\sin(\omega_0 t)$	$\dfrac{z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$
	$a^t\cos(\omega_0 t)$	$\dfrac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$
	$a^t\sin(\omega_0 t)$	$\dfrac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$

遅延インパルス
(単位ステップ)

$$kT-nT \qquad z^{-k}$$

$$Z[f(nT)]=\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}$$

$$L[f(t)]=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

2、指数関数のZ変換

$$f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & (t \geqq 0) \\ 0 & (t<0) \end{cases}$$

サンプル値列：$\{f(k)\}=1,1,1,\cdots$

パルス列信号：$f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} 1\cdot\delta(t-kT)$

$f^*(t)$のZ変換：$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} 1\cdot z^{-k}=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$

Z変換の対応表

単位インパルス：$L[\delta(nT)]=1$

遅延インパルス：$L[s(kT-nT)]=z^{-k}$

単位ステップ：$[u(nT)]=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$

指数関数：$L[a^n]=\dfrac{1}{1-az^{-1}}$

無限級数より

$$\frac{1}{1-r}=1+r^2+r^3+\cdots\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

(4)(1) $Ri(t)=Vi(t)-Vo(t)$

$$Q=CVo(t)$$

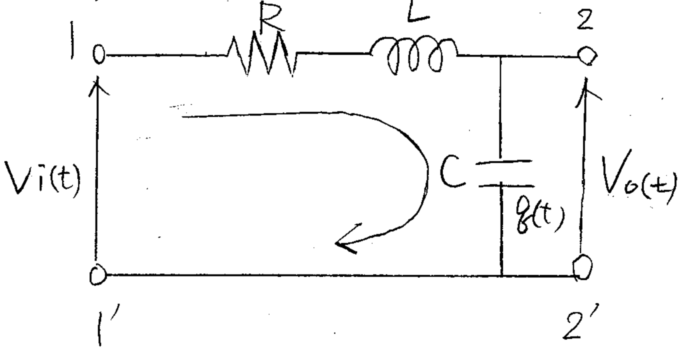
$$R\frac{dQ(t)}{dt}=Vi(t)-Vo(t)$$

$$\frac{d}{dt}CVo(t)=\frac{1}{R}Vi(t)-\frac{1}{R}Vo(t)$$

$$\frac{d}{dt}Vo(t)=\frac{1}{RC}Vi(t)-\frac{1}{RC}Vo(t)$$

$$\frac{d}{dt}Vo(t)+\frac{1}{RC}Vo(t)=\frac{1}{RC}Vi(t)$$

4. RLC回路



$$R\cdot i(t)+L\cdot\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}q(t)=V_i(t)$$

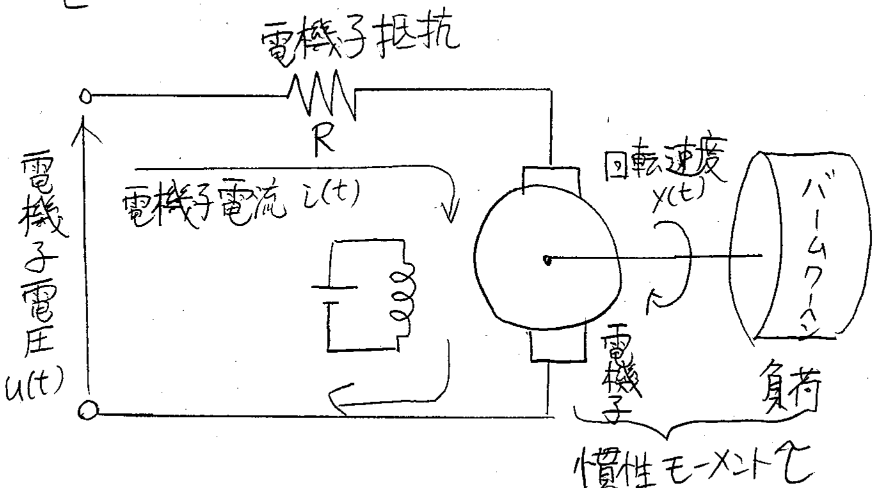
$$i(t)=dq(t)/dt$$

$$V_o(t)=\left(\frac{1}{C}\right)\cdot q(t)$$

上式で $i(t)$, $q(t)$ を消去すると次式が得られる。

$$\frac{d^2V_o(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\cdot\frac{dV_o(t)}{dt}+\frac{1}{LC}V_o(t)=\frac{1}{LC}V_i(t)$$

直流サーボモータ



$$R\cdot i(t)+e(t)=u(t)$$

$$e(t)=k1\cdot y(t)$$

$$\tau(t)=k2\cdot i(t)$$

$$\tau(t)=J\cdot\frac{dy(t)}{dt}+D\cdot y(t)$$

$$\therefore J\cdot\frac{dy(t)}{dt}+\left(D+\frac{k_1k_2}{R}\right)y(t)=\frac{k_2}{R}u(t)$$

$$y(t)=\frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$J\cdot\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+\left(D+\frac{k_1k_2}{R}\right)\frac{d\theta(t)}{dt}=\frac{k_2}{R}u(t)$$

(4)(2)

$$\mathcal{L}\left[V_o'(t)+\frac{1}{RC}V_o(t)\right]=\mathcal{L}\left[\frac{1}{RC}V_i(t)\right]$$

$$sV_o(s)+\frac{1}{RC}V_o(s)=\frac{1}{RC}V_i(s)$$

(3)

$$\frac{V_o}{V_i}$$

$$sV_o(s)+\frac{1}{RC}V_o(s)=\frac{1}{RC}V_i(s)$$

$$V_o(s)\left(\frac{1}{RC}+s\right)=\frac{1}{RC}V_i(s)$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{1}{RC}\cdot\frac{1}{\frac{1}{RC}+s}$$

$$=\frac{1}{1+RCs}$$

(3) $\frac{V_o}{V_i}$

$$sV_o(s)+\frac{1}{RC}V_o(s)=\frac{1}{RC}V_i(s)$$

$$V_o(s)+\left(\frac{1}{RC}+s\right)=\frac{1}{RC}V_i(s)$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{1}{RC}\cdot\frac{1}{\frac{1}{RC}+s}$$

$$=\frac{1}{1+RCs}$$