平成 25 年度応用数学 A(4M,4J,4C) 前期中間試験 (田所)

2013 年 6 月 12 日 (水) 13:10〜14:10 実施

諸注意

(ちゃんと読みましょう，指示を守らない場合は評価されない可能性があります)

1. 問題用紙 (これ)1 枚 (表裏あり)，解答用紙 2 枚 (表裏あり)，**合計 3 枚ある**ことを確認せよ．
2. 試験監督の**開始の合図**で，**2 枚の解答用紙，両方に学年学科・氏名を書く**こと．
3. 解答は**解答用紙に読みやすい文字で書く**こと．順番通り解く必要はない．
4. **途中式および途中経過を書く**こと．ただし，「答えのみでもよい」と言う部分は答えのみでもよい．
5. **1 枚目が上になるように 2 枚 1 組にして，解答用紙のみ回収する．** 2 枚目に何も書いてなくても回収する．
6. 試験監督が**解答用紙の枚数を数え終わり許可が出るまで，私語を発したり筆記用具を持ってはいけない** (不正防止のため)．
7. 問題は問 1〜問 6 までである．

応用数学 A(4M,4J,4C) 前期中間試験問題

$f(t), x(t), y(t)$ のラプラス変換はそれぞれ $\mathcal{L}[f(t)] = F(s), \mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ と表す.

公式集が 4 ページ目にあるので，必要に応じて使用すること.

問 1. α を定数とするとき，$\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \dfrac{1}{s-\alpha}$ を，**ラプラス変換の定義にしたがって証明せよ** (10 点). $s > \alpha$ として，$\lim\limits_{t\to\infty} e^{-(s-\alpha)t} = 0$ を用いてよい.

問 2. **ラプラス変換**を求めよ (10 点× 3). ただし，$\alpha, \beta(\neq 0), \omega(>0)$ は定数とする.

(1) $3t^2 - 4t + 5$,　　(2) $e^{\alpha t}\cos\beta t$,　　(3) $\dfrac{\sin\omega t}{t}$.

(3) ヒント: 必要ならば，$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{Tan}^{-1}\,\frac{x}{a}$ (a は定数) を用いよ.

問 3. 関数 $\dfrac{F(s)}{s^2-4s+13}$ の逆ラプラス変換 $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{s^2-4s+13}\right]$ を関数 $f(t)$ と積分を用いて表せ (15 点).

ヒント: $s^2-4s+13 = (s-a)^2+b^2$ の形に平方完成せよ. 平方完成できない場合, $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{F(s)}{(s-a)^2+b^2}\right]$ (a, b は定数 ($b \neq 0$)) を求めれば部分点を与える.

問 4. 次の $x = x(t)$ に関する**微分方程式を解け** (15 点× 2).

(1) $x' - 3x = e^{-5t},\ x(0) = 0,$

(3) $x'' - 4x' + 4x = e^{2t},\ x(0) = 1,\ x'(0) = 1.$

問 5. $\log t$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[\log t]$ を求めよ (5 点).
ただし，$s > 0$ とし，$\int_0^\infty e^{-x}\log x\,dx = -\gamma$ (γ は正の定数) を用いてよい.
ヒント: 積分では $st = u$ と言う置換積分を行うと良い.

問 6. 正の実数 $p > 0$ に対して，以下のようにガンマ関数 $\Gamma(p)$ が定まる

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t}t^{p-1}dt.$$

たとえば，$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt$ である．$\Gamma(p)$ は以下の性質を持つことが知られている

$$\begin{cases} \text{(i)} & \Gamma(p+1) & = & p\Gamma(p) \\ \text{(ii)} & \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) & = & \sqrt{\pi} \\ \text{(iii)} & \Gamma(n+1) & = & n! \end{cases}.$$

ただし，n は正の整数とする．ガンマ関数は階乗 $n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ の一般化とみなせる [*1]．上記の定義や性質を用いて，各問いに答えよ (5 点× 2).
(1) $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$ を求めよ.
(2) $\sqrt{t}$ のラプラス変換を求めよ.

[*1] p の範囲は複素数まで拡張できる

公式集

$f(t), g(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $F(s), G(s)$ とおくと以下の関係が成り立つ.

原関数	像関数
$f(at)$	$\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right) \quad (a>0)$
$e^{\alpha t}f(t)$	$F(s-\alpha)$
$f(t-\mu)U(t-\mu)$	$e^{-\mu s}F(s) \quad (\mu>0)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-f(0)s^{n-1}-f'(0)s^{n-2}-\cdots-f^{(n-1)}(0)$
$\displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\dfrac{1}{s}F(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^nf(t)$	$(-1)^nF^{(n)}(s)$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\displaystyle\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$U(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s} \quad (a \geqq 0)$

連絡 (試験後に見よ)

- **試験返却**

4M,4C	6 月 18 日 (火) 1 限
4J	6 月 21 日 (金) 7 限

試験返却後通常授業を行う.

- **授業連絡用 web ページ作成**

https://sites.google.com/site/tadomath/
(主に緊急用の) 連絡に使用します. 小レポート用紙 (pdf ファイル) もあります.

問 1.

$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\right] = \int_0^\infty e^{-st}e^{\alpha t}dt \quad \boxed{5点}$$
$$= \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}dt$$
$$= \left[-\frac{1}{s-\alpha}e^{-(s-\alpha)t}\right]_0^\infty \quad \boxed{3点}$$
$$= -\frac{1}{s-\alpha}(0-1)$$
$$= \frac{1}{s-\alpha} \quad \blacksquare \quad \boxed{2点}$$

問 2. (1)

$$\mathcal{L}\left[3t^2-4t+5\right] = 3\cdot\frac{2}{s^3} - \frac{4}{s^2} + \frac{5}{s}$$
$$= \boxed{\frac{6}{s^3} - \frac{4}{s^2} + \frac{5}{s}} \quad \boxed{10点}$$

注 1,2 個の項が間違っていたら，それぞれ 3,6 点引き.

(2)
$$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\cos\beta t\right]$$
$$= \boxed{\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}} \quad \boxed{10点}$$

注 $\dfrac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$, $\dfrac{s}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$ はそれぞれ 2,3 点止まり.

(3) $\mathcal{L}\left[\sin\omega t\right] = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2} = F(s)$ とおく.

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin\omega t}{t}\right] = \int_s^\infty F(\sigma)d\sigma$$
$$= \int_s^\infty \frac{\omega}{\sigma^2+\omega^2}d\sigma \quad \boxed{5点}$$
$$= \omega\int_s^\infty \frac{1}{\sigma^2+\omega^2}d\sigma$$
$$= \omega\left[\frac{1}{\omega}\operatorname{Tan}^{-1}\frac{\sigma}{\omega}\right]_s^\infty \quad \boxed{3点}$$
$$= \left[\operatorname{Tan}^{-1}\frac{\sigma}{\omega}\right]_s^\infty$$
$$= \lim_{\sigma\to\infty}\operatorname{Tan}^{-1}\frac{\sigma}{\omega} - \operatorname{Tan}^{-1}\frac{s}{\omega}$$
$$= \boxed{\frac{\pi}{2} - \operatorname{Tan}^{-1}\frac{s}{\omega}} \quad \boxed{2点}$$

注 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\operatorname{Tan}^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

問 3.

$$s^2-4s+13 = (s-2)^2-4+13$$
$$= (s-2)^2+9$$

を得る. $\boxed{5点}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s^2-4s+13}\right]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{(s-2)^2+3^2}\right]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\cdot\frac{1}{(s-2)^2+3^2}\right]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{(s-2)^2+3^2}\right]$$
$$\boxed{4点}$$
$$= f(t) * \frac{e^{2t}\sin 3t}{3} \quad \boxed{3点}$$
$$= \int_0^t \frac{e^{2(t-\tau)}\sin 3(t-\tau)}{3}f(\tau)d\tau$$
$$= \boxed{\frac{1}{3}\int_0^t e^{2(t-\tau)}\sin 3(t-\tau)f(\tau)d\tau} \quad \boxed{3点}$$

注 平方完成の 5 点分しかできていないが，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{(s-2)^2+3^2}$ の変形やたたみこみに気づいていそうなものには，追加で最大 3 点を与えた.

問 4. (1) 与えられた微分方程式にラプラス変換を施す.

$$x' - 3x = e^{-5t}$$
$$\mathcal{L}\left[x'(t)\right] - 3\mathcal{L}\left[x(t)\right] = \frac{1}{s+5}$$
$$sX(s) - x(0) - 3X(s) = \frac{1}{s+5}$$
$$(s-3)X(s) = \frac{1}{s+5} \quad \boxed{5点}$$
$$X(s) = \frac{1}{(s+5)(s-3)} \quad \boxed{4点}$$
$$X(s) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{s-3} - \frac{1}{s+5}\right)$$
$$\boxed{3点}$$

となり，

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right]$$
$$= \frac{1}{8}\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+5}\right]\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{8}\left(e^{3t} - e^{-5t}\right)} \quad \boxed{3点}$$

注 部分分数分解の間違いは，できるだけそのミスのもとで最後まで見た (最大 12 点).

(2) 与えられた微分方程式にラプラス変換を施す.

$$x'' - 4x' + 4x = e^{2t}$$
$$\mathcal{L}\left[x''\right] - 4\mathcal{L}\left[x'\right] + 4\mathcal{L}\left[x\right] = \mathcal{L}\left[e^{2t}\right]$$
$$s^2X(s) - x(0)s - x'(0)$$
$$-4(sX(s) - x(0)) + 4X(s) = \frac{1}{s-2} \quad \boxed{3点}$$
$$(s^2-4s+4)X(s) - s - 1 + 4 = \frac{1}{s-2}$$

より， $\boxed{2点}$

$$(s-2)^2X(s) = \frac{1}{s-2} + s - 3 \quad \boxed{5点}$$
$$= \frac{1+(s-2)(s-3)}{s-2}$$
$$= \frac{s^2-5s+7}{s-2}$$
$$X(s) = \frac{s^2-5s+7}{(s-2)^3}$$

を得る.

$$\frac{s^2-5s+7}{(s-2)^3} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{(s-2)^3}$$

とおく．分母を払って，

$$s^2-5s+7 = A(s-2)^2 + B(s-2) + C$$

を得る．これに，$s = 2, 1, 3$ を代入しても等式が成立するので，

$$\begin{cases} 1 = C \\ 3 = A - B + C \\ 1 = A + B + C \end{cases}$$

を解いて，A, B, C を定めればよい.

$$(A, B, C) = (1, -1, 1) \quad \boxed{3点}$$

を得る．よって，

$$x(t)$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right]$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^3}\right]$$
$$= e^{2t} - te^{2t} + \frac{1}{2}t^2e^{2t}$$
$$= \boxed{\frac{(2-2t+t^2)e^{2t}}{2}} \quad \boxed{2点}$$

注 途中の，$(s-2)^2X(s) = \dfrac{1}{s-2} + s - 3$ 部分については，右辺を通分しないで計算すると，通常の部分分数分解を使わないで計算できる.

$$(s-2)^2X(s) = \frac{1}{s-2} + s - 3 \quad \boxed{5点}$$
$$X(s) = \frac{1}{(s-2)^3} + \frac{s-3}{(s-2)^2}$$
$$= \frac{1}{(s-2)^3} + \frac{s-2-1}{(s-2)^2}$$
$$= \frac{1}{(s-2)^3} + \frac{s-2}{(s-2)^2} - \frac{1}{(s-2)^2}$$
$$= \frac{1}{(s-2)^3} + \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2} \quad \boxed{3点}$$

注 $\dfrac{1}{s-2} + s - 3$ をちょっと間違えた場合，たとえば $\dfrac{1}{s-2} + s + 5$ など，できるだけそのミスのもとで最後まで見た (最大 10 点)．ただし，2 重に間違えた場合は追加部分の点はない.

最初に間違えていたが，それなりの流れが合っていれば，最大 5 点を与えた.

問 5.

$$\mathcal{L}\left[\log t\right]$$
$$= \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-st}\log t\,dt$$
$$= \int_{u=0}^{u=\infty} e^{-u}\log\frac{u}{s}\frac{du}{s} \quad \boxed{2点}$$
$$= \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-u}(\log u - \log s)du \quad \boxed{1点}$$
$$= \frac{1}{s}\left(\int_0^\infty e^{-u}\log u\,du - \log s\int_0^\infty e^{-u}du\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{s}\left(-\gamma - \log s\left[-e^{-u}\right]_0^\infty\right) \\
&= \frac{-\gamma + \log s(0-1)}{s} \\
&= \boxed{-\frac{\log s + \gamma}{s}} \quad \boxed{2\text{点}}
\end{aligned}
$$

置換積分では，$st = u$ と置き，

$$sdt = du$$

$$dt = \frac{du}{s}$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
t & 0 & \to & \infty \\ \hline
u & 0 & \to & \infty
\end{array}
$$

とした．

注 $\dfrac{du}{s}$ を du とした場合，，できるだけそのミスのもとで最後まで見た (最大 3 点)．

コメント 問題に表れたオイラーの定数 $\gamma = 0.5772\cdots$ は，現時点で無理数かどうかも証明されていない (はず)．

問 6． (1)

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) &= \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) && (\text{性質 (i)}) \\
&= \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) && (\text{性質 (i)}) \\
&= \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) && (\text{性質 (i)}) \\
&= \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} && (\text{性質 (ii)}) \\
&= \boxed{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\sqrt{t}\right] &= \int_0^\infty e^{-st}\sqrt{t}\,dt \quad \boxed{2\text{点}} \\
&= \int_0^\infty e^{-u}\sqrt{\frac{u}{s}}\frac{du}{s} \\
&= \frac{1}{s\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{1}{2}}du \quad \boxed{1\text{点}} \\
&= \frac{1}{s\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{3}{2}-1}du \\
&= \frac{1}{s\sqrt{s}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{s\sqrt{s}}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{s\sqrt{s}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\
&= \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}}} \quad \boxed{2\text{点}}
\end{aligned}
$$

置換積分では，$st = u$ と置き，

$$sdt = du$$

$$dt = \frac{du}{s}$$

$$
\begin{array}{c|ccc}
t & 0 & \to & \infty \\ \hline
u & 0 & \to & \infty
\end{array}
$$

とした．

コメント $\alpha > -1$ を定数とするとき，

$$\mathcal{L}\left[t^\alpha\right] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

が成り立つ．次のように解析 1A で学んだ公式などもガンマ関数で表すことができる．$p > -1$ を定数とするとき

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}
$$

が成り立つ．

部分点の基準

原則的に軽微なミスが 1 箇所あれば 2〜3 点引き，軽微なミス 2 回以上および重大な間違いはその問題の得点なし．

採点ミス (特に合計得点) がある場合は**配布した日の夕方まで**に申告すること．欠席した場合は考慮する．

2013/6/11 作成 (田所)