

# Metody Numeryczne - Aproksymacja profilu wysokościowego

## Wstęp

Celem projektu była implementacja oraz analiza dwóch metod aproksymacji interpolacyjnej - interpolacji Lagrange'a oraz interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia. Do realizacji zastosowałem język Python 3.12 z wykorzystaniem biblioteki pandas, matplotlib oraz math przy użyciu IDE - PyCharm.

Do przeprowadzenia analizy użyłem danych wysokościowych o zróżnicowanym charakterze z plików pobranych z kursu na enauczaniu:

- MountEverest.csv - najwyższy szczyt Ziemi
- SpacerniakGdansk.csv - trasa raczej płaska, ale z paroma stromymi wzniesieniami

**Interpolacja** - jest to estymacja wartości badanej wielkości w obszarach między dyskretnymi punktami. Stosowana w wielu dziedzinach np. w uczeniu maszynowym, statystyce, systemach sensorowych.

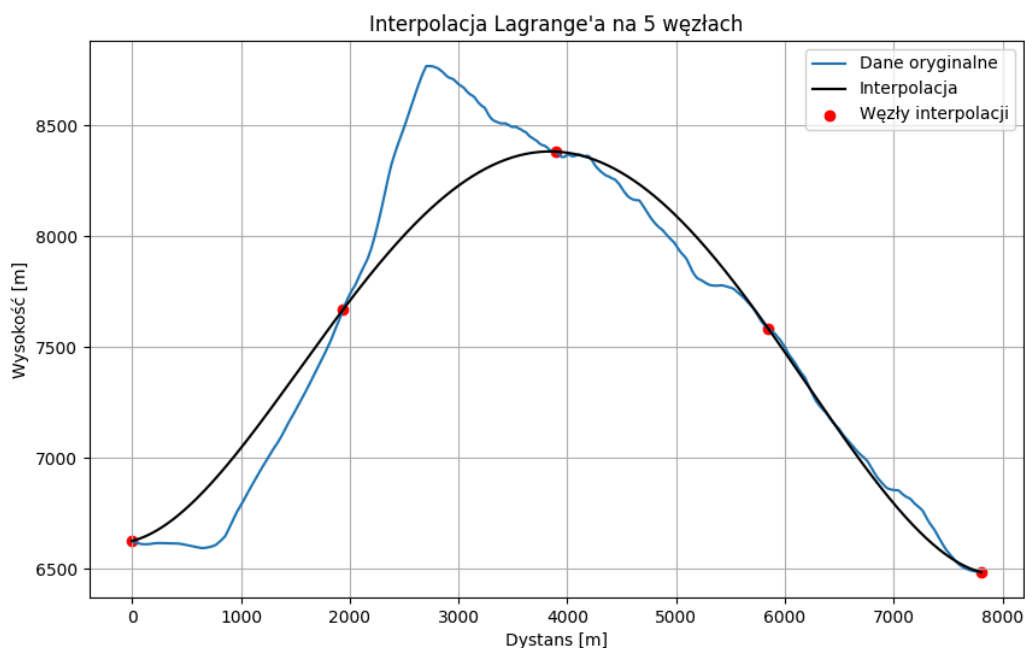
**Interpolacja Josepha Lagrange'a** - nazywana też interpolacją wielomianową, charakteryzuje się stabilnością oraz jest łatwa w implementacji, nie trzeba konstruować i rozwiązywać układu równań liniowych. Jej złożoność czasowa to  $O(n^2)$ . Jest ona podatna na efekt Rungego, czyli pogorszenie jakości interpolacji wielomianowej (przy krańcach przedziału pojawiają się duże oscylacje), mimo zwiększenia liczby jej węzłów, zjawisko typowe dla interpolacji za pomocą wielomianów wysokich stopni przy stałych odległościach węzłów. Baza Lagrange do interpolacji składa się z funkcji określonych wzorem:

$$\phi_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

**Interpolacja funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia** - polega na interpolacji lokalnej (na kilku podprzedziałach) wielomianami trzeciego stopnia i późniejszym połączeniem ich (sklejeniem). Do tego wymaga rozwiązania układu równań liniowych, do czego można użyć dowolnej z metod numerycznych - metody Jacobiego, metody Gaussa-Seidla lub metody faktoryzacji LU. Jest używana bardzo często, aby uniknąć problemu zjawiska Rungego. Jest to również metoda trudniejsza w implementacji w porównaniu do Lagrange'a, jednak posiada lepszą złożoność czasową na poziomie  $O(n)$ .

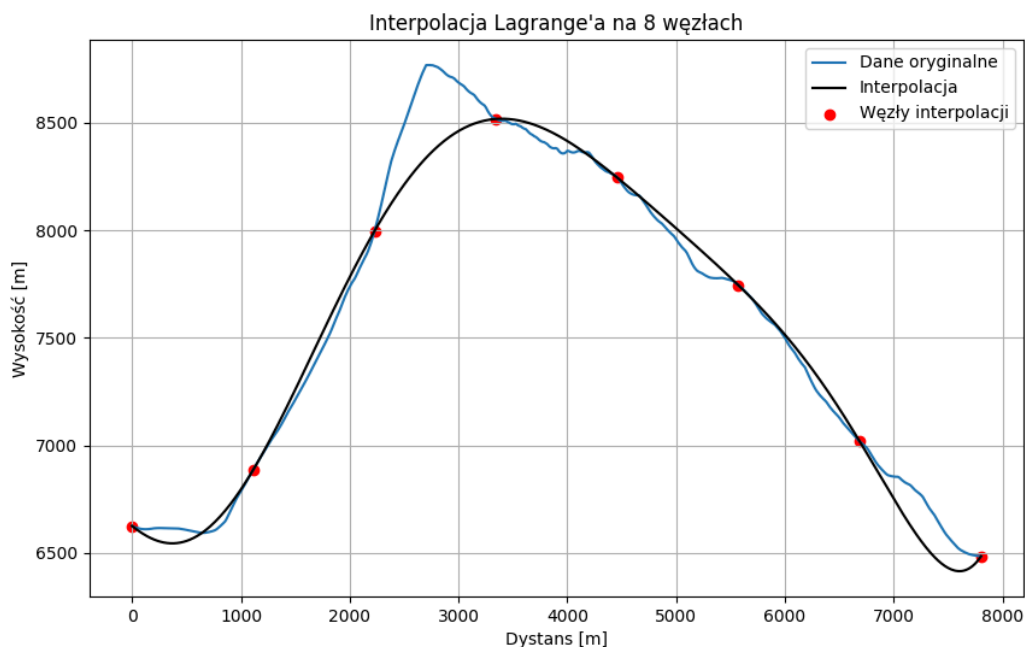
## Analiza podstawowa interpolacji wielomianowej pierwszej trasy - zbadanie wpływu liczby węzłów na interpolację. Węzły zostały rozmieszczone w sposób równoległy.

### 1. na 5 węzłach



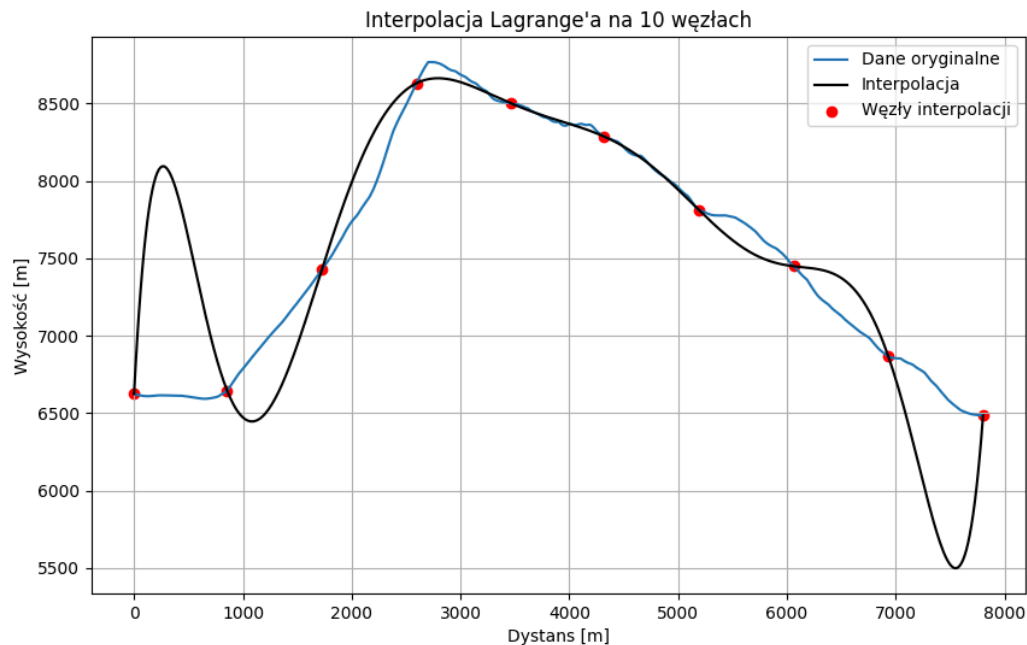
Jak można zauważyć po wykresie interpolacja w sporej mierze nie pokrywa się z danymi oryginalnymi. Z prawej strony jest ona zauważalnie bardziej dopasowana niż z lewej.

### 2. na 8 węzłach



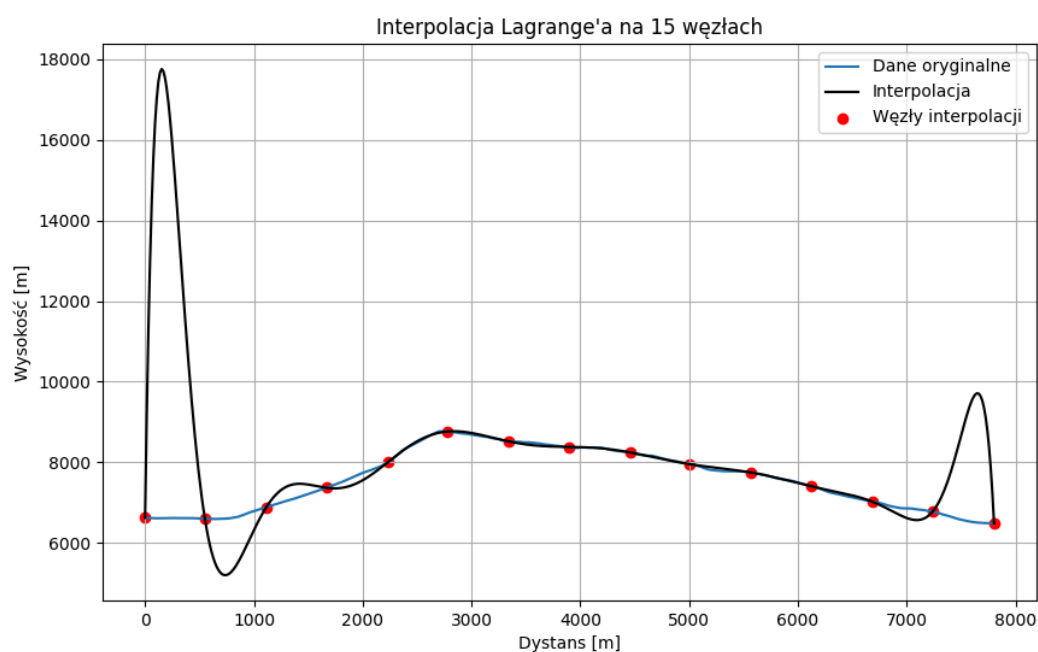
Zwiększenie liczby węzłów poskutkowało lepszą dokładnością w dopasowaniu funkcji, choć nadal nie jest ona idealna.

### 3. na 10 węzłach



Po zwiększeniu liczby węzłów możemy zauważyć polepszenie dopasowania funkcji w jej środkowym przedziale. Uwagę przykuwają także niekorzystne duże oscylacje na krawędziach, czyli występowanie efektu Rungego.

### 4. na 15 węzłach

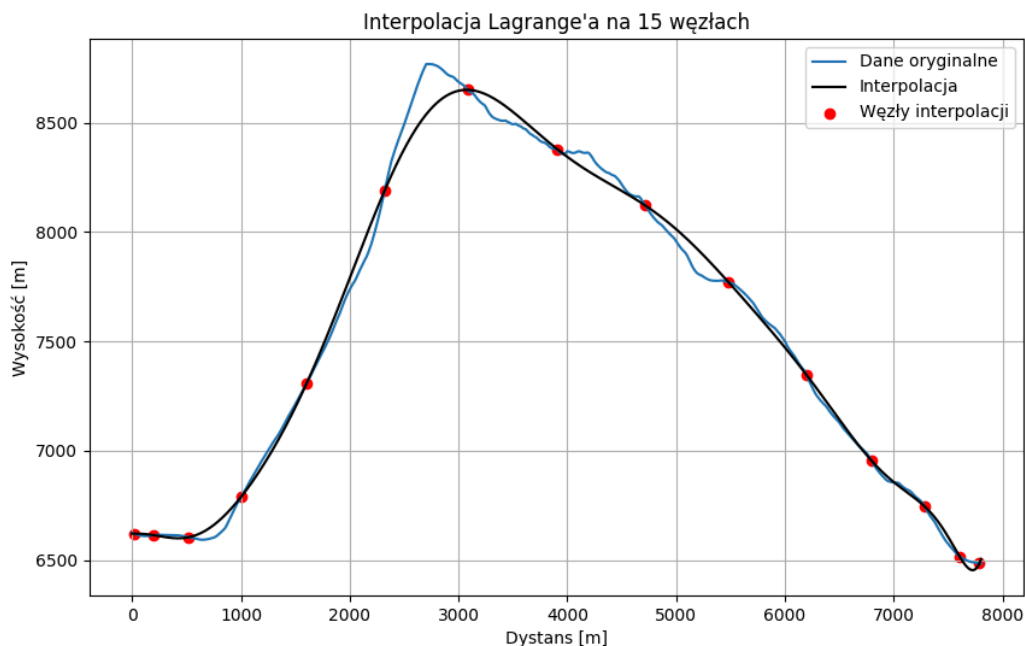


Kolejne zwiększenie liczby węzłów znów skutkuje lepszą dokładnością, lecz także kosztem nasileniem się efektu Rungego. Możemy założyć, że wraz ze zwiększaniem liczby węzłów trend będzie kontynuowany.

### Analiza dodatkowa interpolacji wielomianowej pierwszej trasy -

jak wiadomo efekt Rungego występuje dla interpolacji za pomocą wielomianów wysokich stopni przy stałych odległościach rozmieszczenia węzłów. Aby go zminimalizować, stosuje się interpolację z węzłami coraz gęściej upakowanymi na krańcach przedziału interpolacji. Przykładem takich węzłów są m.in. węzły Czebyszewa. Miejsca zerowe wielomianów Czebyszewa zagęszczają się ku krańcom przedziału, co pozwala lepiej związać wielomian zapobiegając naturalnym dla wielomianów wysokiego rzędu oscylacjom.

#### 1. na 15 węzłach Czebyszewa

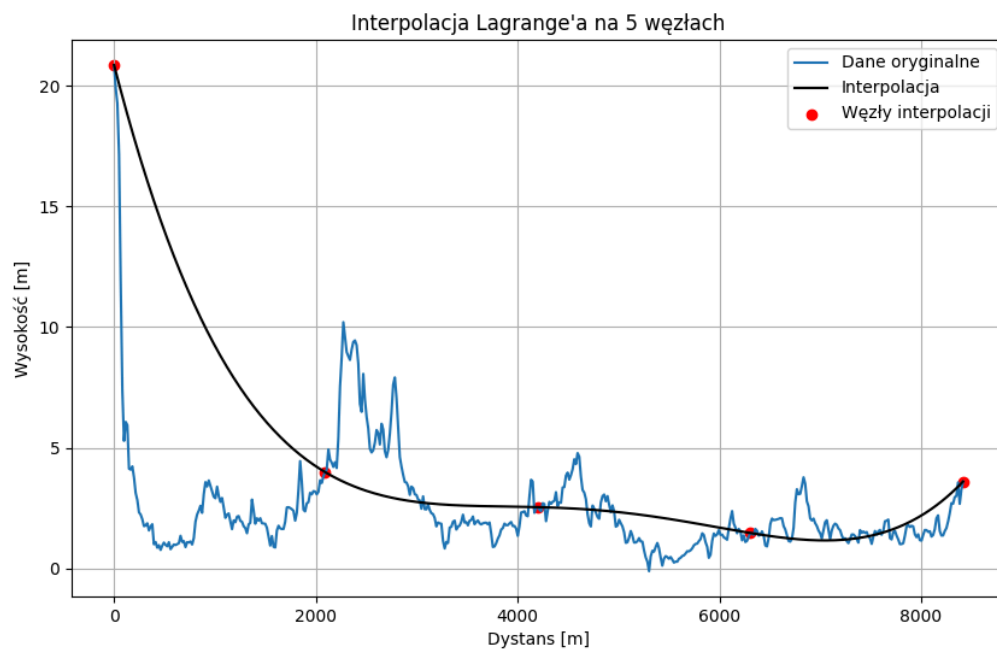


Jak widać efekt Rungego zniknął, a interpolacja całkiem dobrze pokrywa się z danymi oryginalnymi.

### Analiza podstawowa interpolacji wielomianowej drugiej trasy -

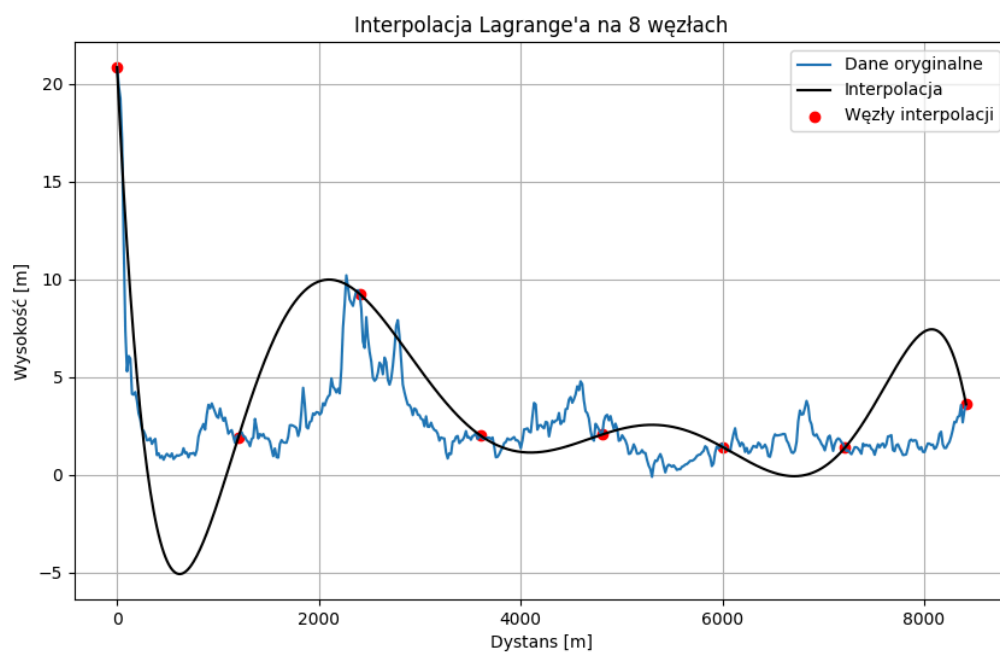
teraz będziemy mieli do czynienia z dużo bardziej zmieniającą się funkcją danych oryginalnych, ze względu na nagłe wzrosty wysokości. Węzły znowu zostają rozmieszczone w sposób równoległy.

## 1. na 5 węzłach



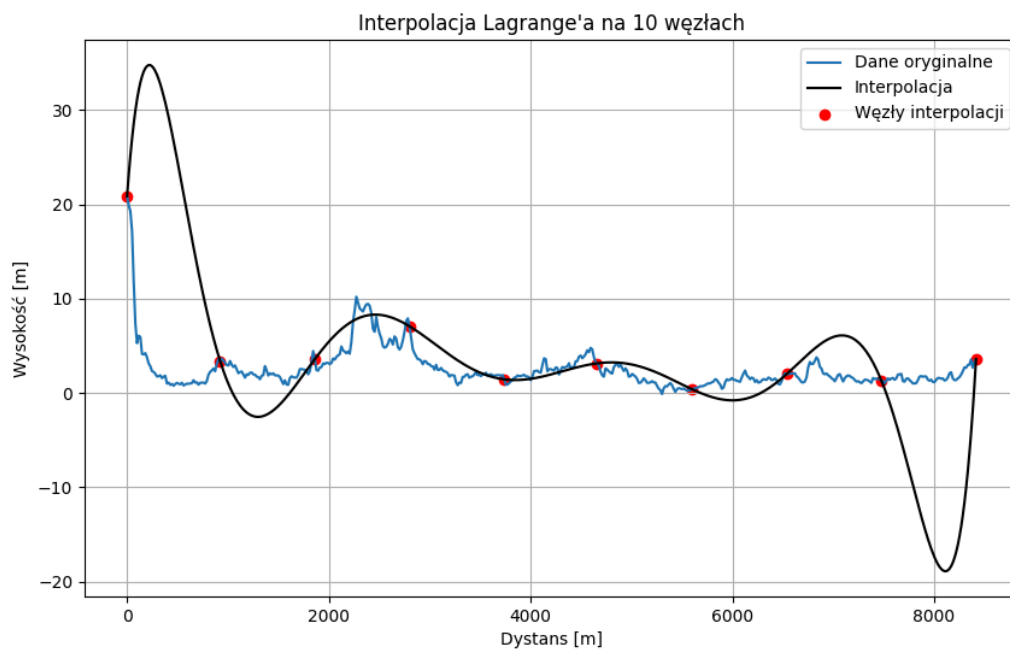
Ze względu na dynamikę zmiany funkcji dla małej liczby węzłów uzyskujemy niezbyt zadowalający wynik. Interpolacja zupełnie nie odzwierciedla charakterystyki danych oryginalnych.

## 2. na 8 węzłach



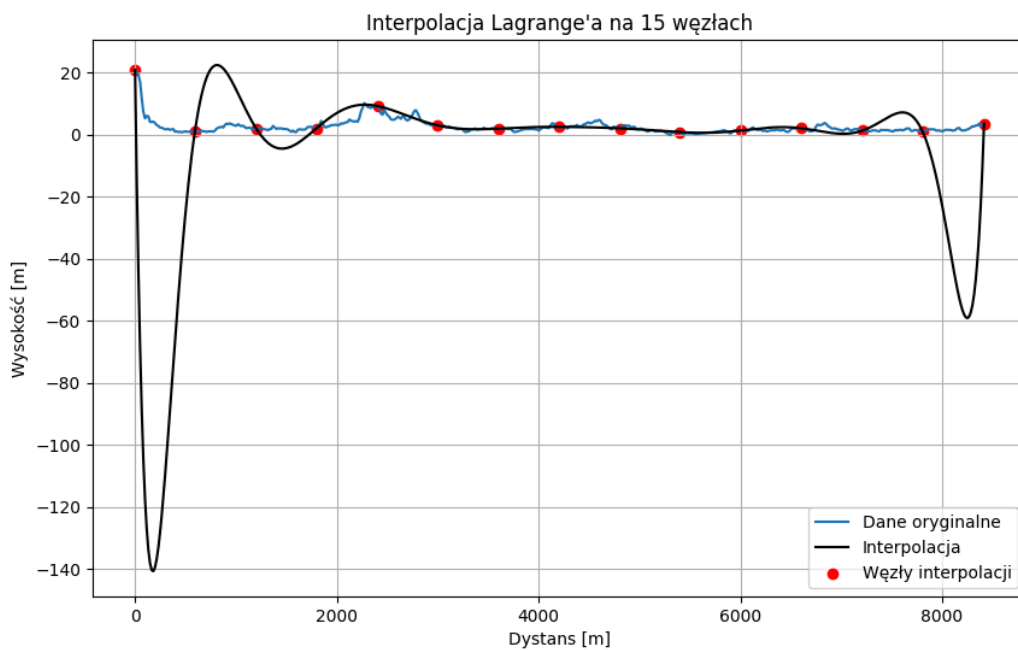
Jak widać dopasowanie się polepszyło, ale jeszcze dużo brakuje do zadowalającego efektu.

### 3. na 10 węzłach



Znowu można zauważyć poprawę dokładności, lecz dodatkowo tym razem mamy też zauważalny efekt Rungego. Nadal sporo brakuje do ideału.

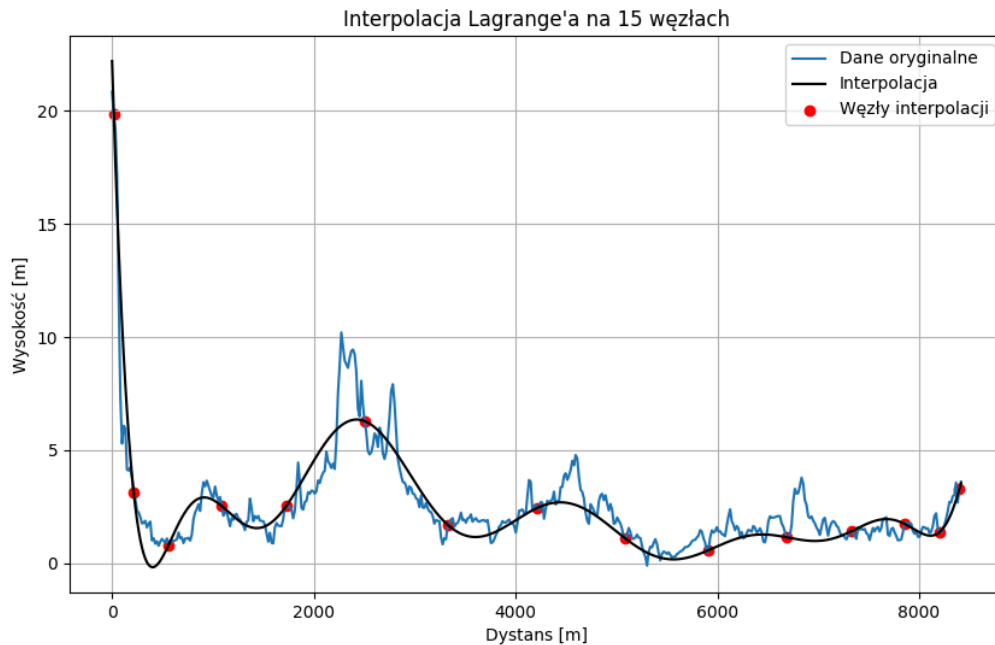
### 4. na 15 węzłach



Tak samo jak przy analizie pierwszej trasy znowu mimo lekkiej poprawy dokładności, znowu otrzymaliśmy duże oscylacje przy krańcach przedziału, czyli niepożądany efekt Rungego nasilił się.

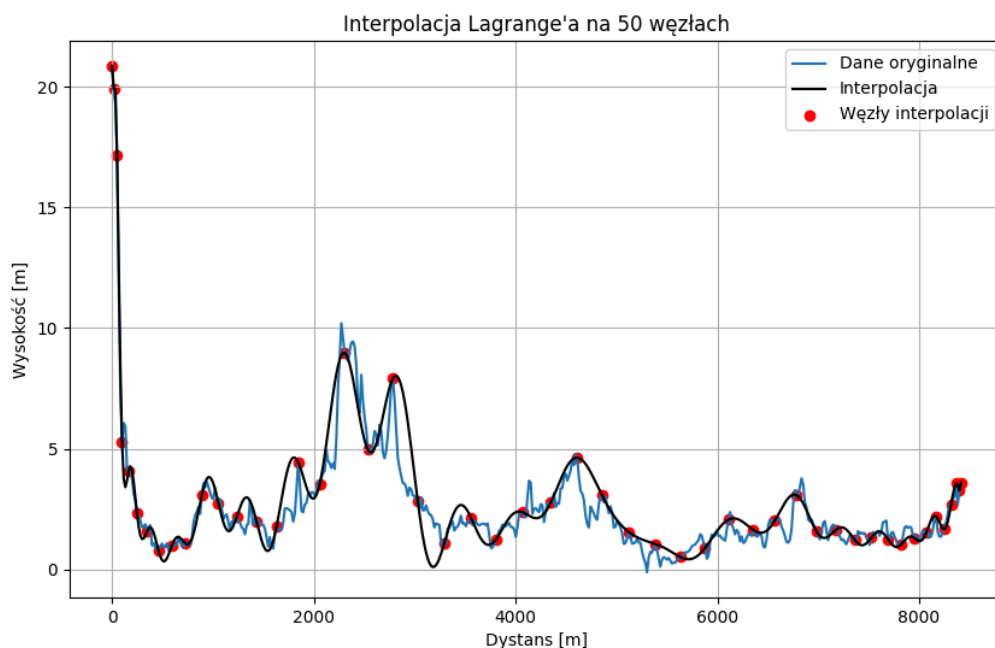
## Analiza dodatkowa interpolacji wielomianowej drugiej trasy

### 1. na 15 węzłach Czebyszewa



Widać, że dzięki zastosowaniu węzłów Czebyszewa udało się zwalczyć efekt Rungego. Przez charakterystykę naszej funkcji danych oryginalnych, niestety nadal nie udało się uzyskać interpolacji będącej blisko wartości idealnego dopasowania.

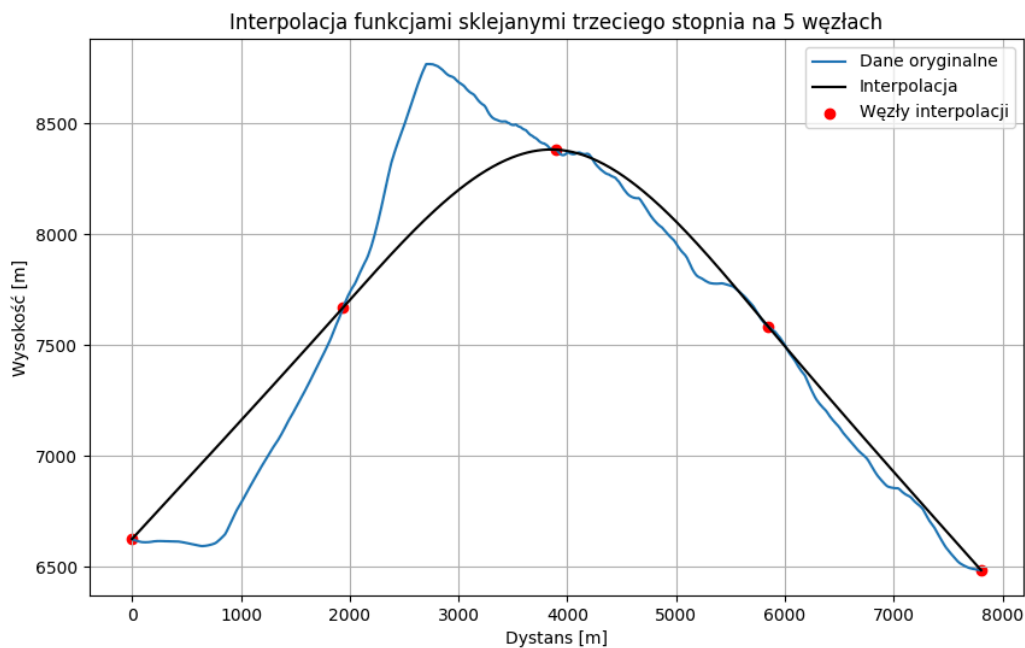
### 2. na 50 węzłach Czebyszewa



Jak można zauważyć dobranie dużej ilości węzłów Czebyszewa spowodowało, że nasza interpolacja dobrze pokrywa się z danymi oryginalnymi.

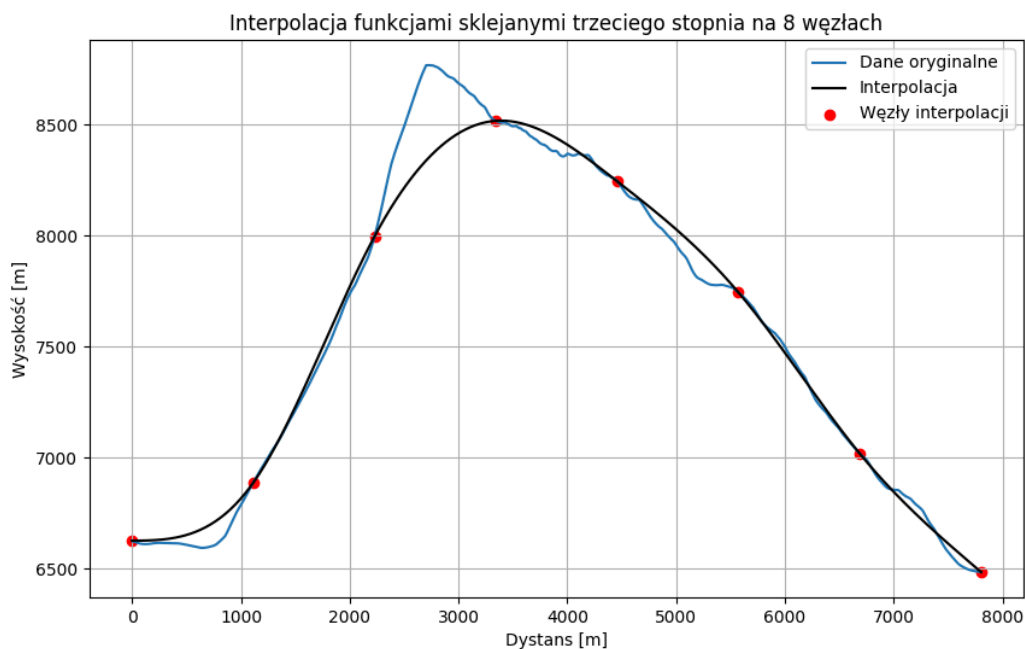
**Analiza podstawowa interpolacji funkcjami sklejanymi pierwszej trasy** - zbadanie wpływu liczby węzłów na interpolację. Węzły zostały rozmieszczone w sposób równoległy. Nie powinien występować efekt Rungego.

1. na 5 węzłach



Jak można zauważyć po wykresie wynik interpolacji odbiega od danych oryginalnych. Jest to bardzo podobny wykres co przy interpolacji wielomianowej.

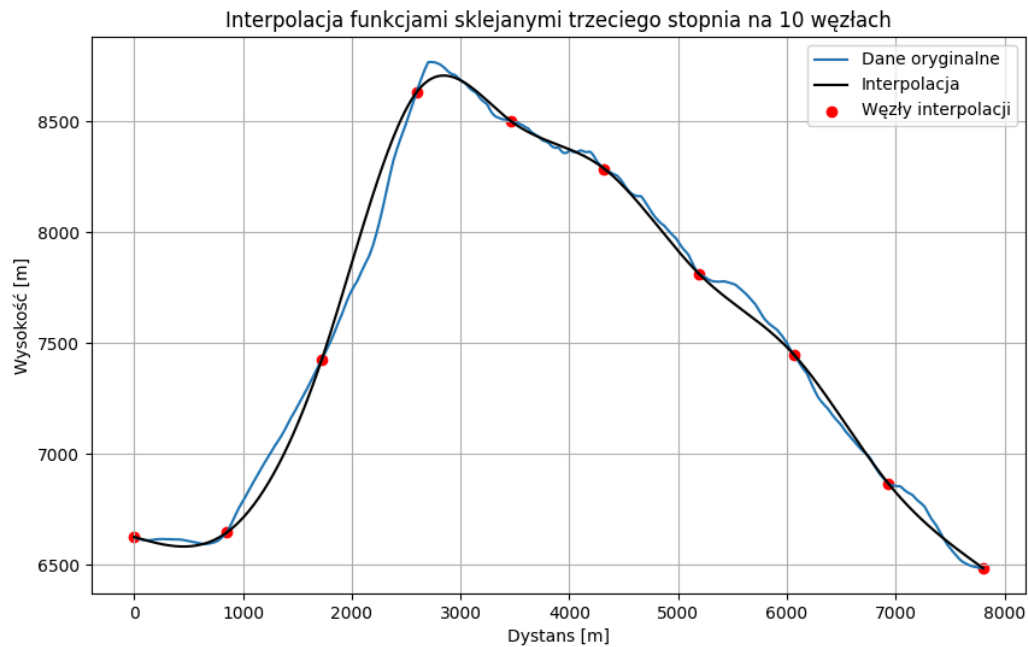
2. na 8 węzłach





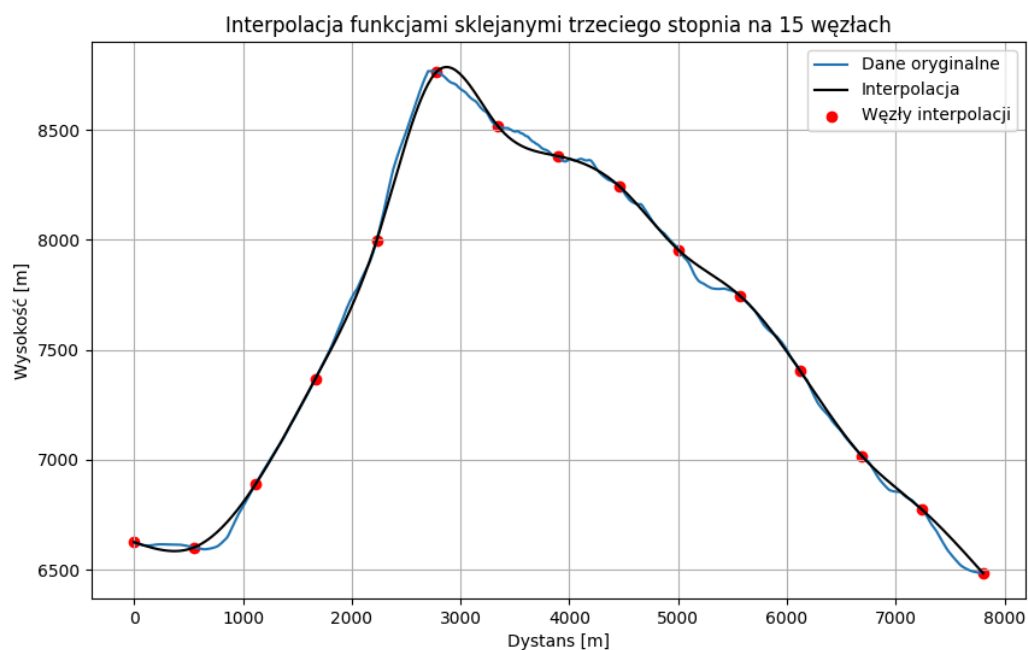
Wykres poprawił się dzięki zwiększeniu liczby węzłów, lecz nadal nie jest idealny. Widać podobieństwo do interpolacji wielomianowej.

### 3. na 10 węzłach



Cały czas obserwujemy polepszanie się wykresu wraz ze wzrostem liczby węzłów. Nie wystąpił tutaj efekt Rungego, który był widoczny w tym przypadku w interpolacji Lagrange'a.

### 4. na 15 węzłach

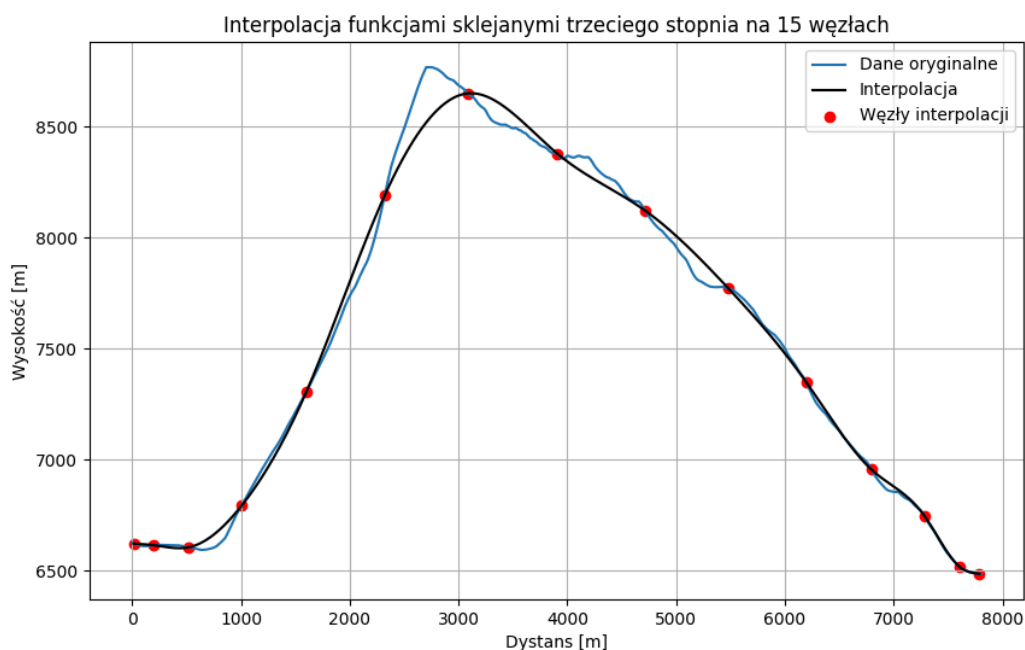


Tak samo jak poprzednio nie wystąpił efekt Rungego oraz interpolacja zwiększyła swoją dokładność. Warto zauważyć i zaznaczyć, że wykres wygląda lepiej niż dla interpolacji wielomianowej przy takiej samej liczbie węzłów tylko, że Czebyszewa.

### Analiza dodatkowa interpolacji funkcjami sklejanymi pierwszej trasy - sprawdzimy wpływ rozmieszczenia punktów węzłowych na wyniki.

Wcześniej były one rozmieszczone równomiernie, teraz zastosujemy interpolację z węzłami Czebyszewa.

#### 1. na 15 węzłach Czebyszewa



Z wykresu widać, że efekt jest odwrotny niż było to w przypadku interpolacji wielomianowej, gdyż nastąpiło pogorszenie. Wynik jest minimalnie mniej dokładny w pewnych miejscach, niż dla równomiernie rozmieszczonych węzłów.

### Analiza podstawowa interpolacji funkcjami sklejanymi drugiej trasy

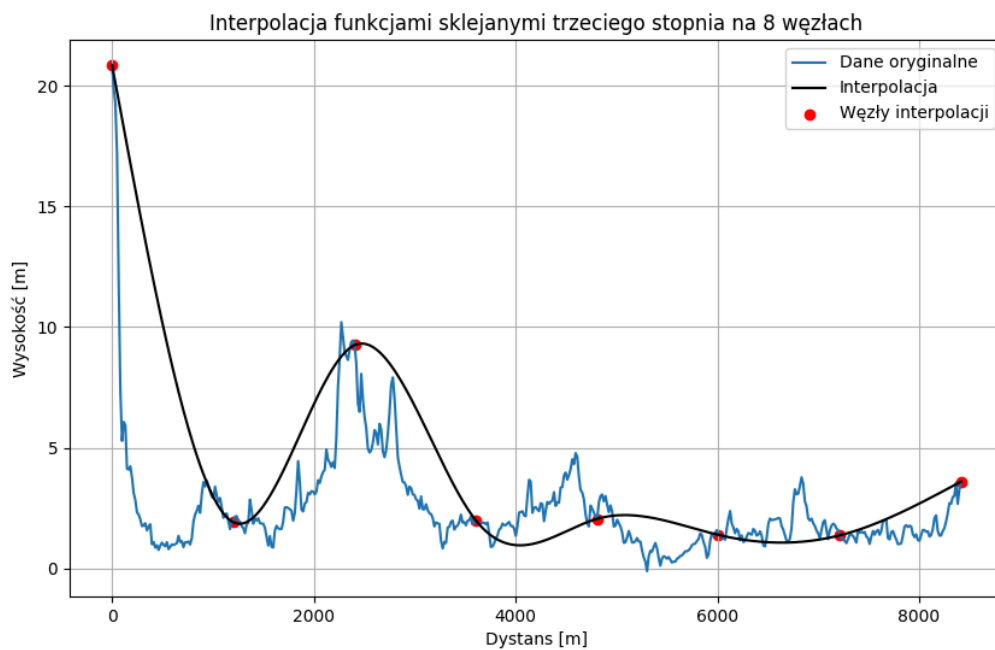
- teraz znowu będziemy przeprowadzać analizę na funkcji o bardziej zmiennej charakterystyce. Węzły są rozmieszczone w sposób równoległy.

## 1. na 5 węzłach



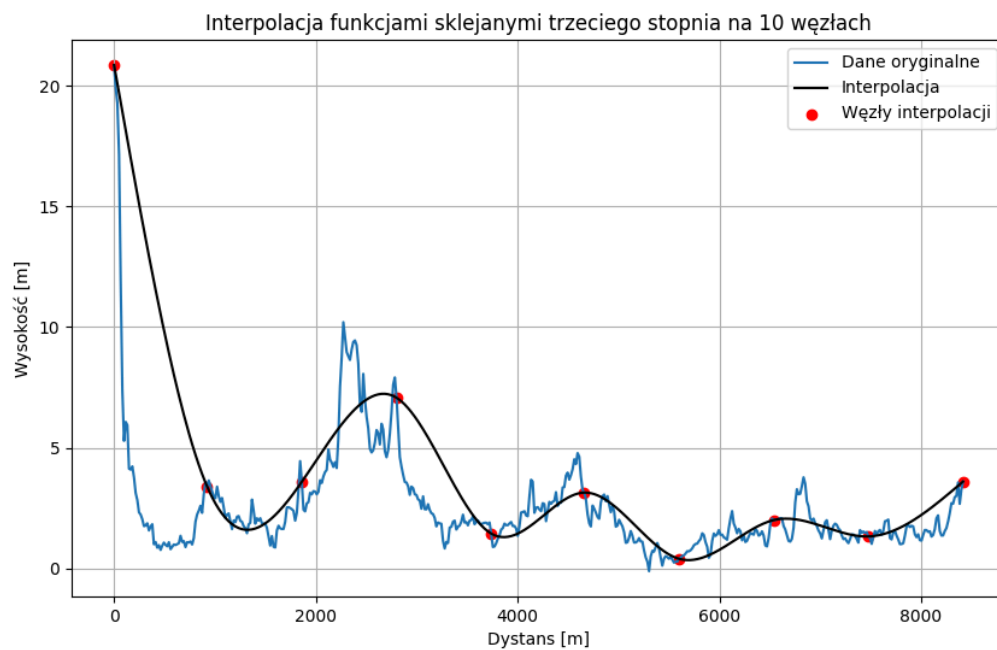
Uzyskujemy niezbyt zadowalający wynik, jest to zapewne powiązane z tym jak wygląda funkcja danych oryginalnych. Wykres jest bardzo podobny co przy interpolacji wielomianowej.

## 2. na 8 węzłach



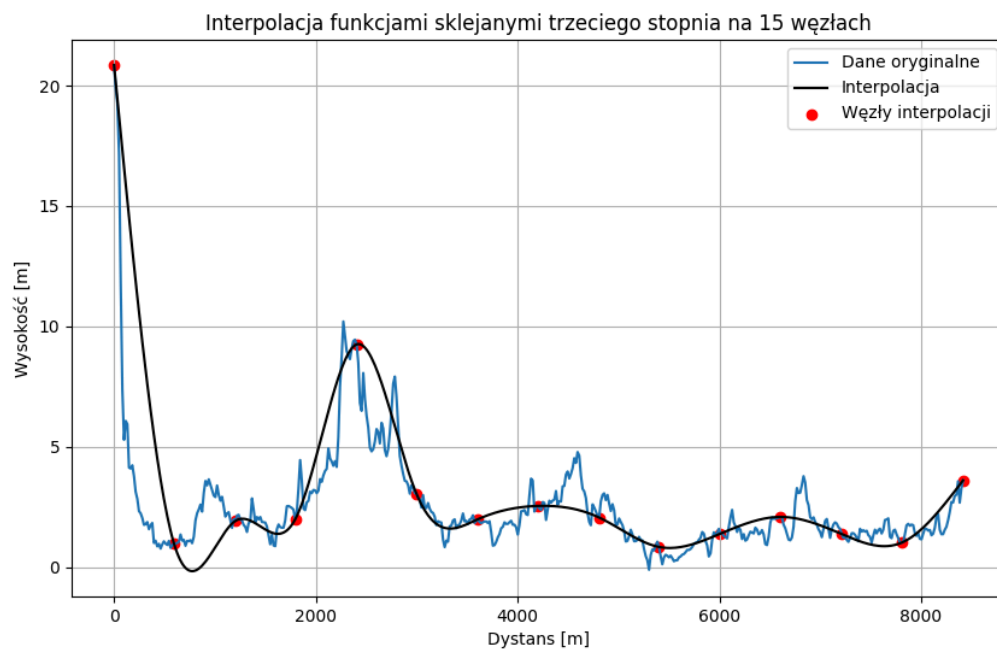
Dokładność się polepszyła, ale jeszcze dużo brakuje do oczekiwanego efektu. Wykres wygląda lepiej, niż w analogicznym przypadku przy interpolacji wielomianowej.

### 3. na 10 węzłach



Wynik znowu uległ zwiększeniu dokładności. Nie wystąpił tutaj efekt Rungego, który to właśnie był widoczny w tym przypadku w interpolacji wielomianowej.

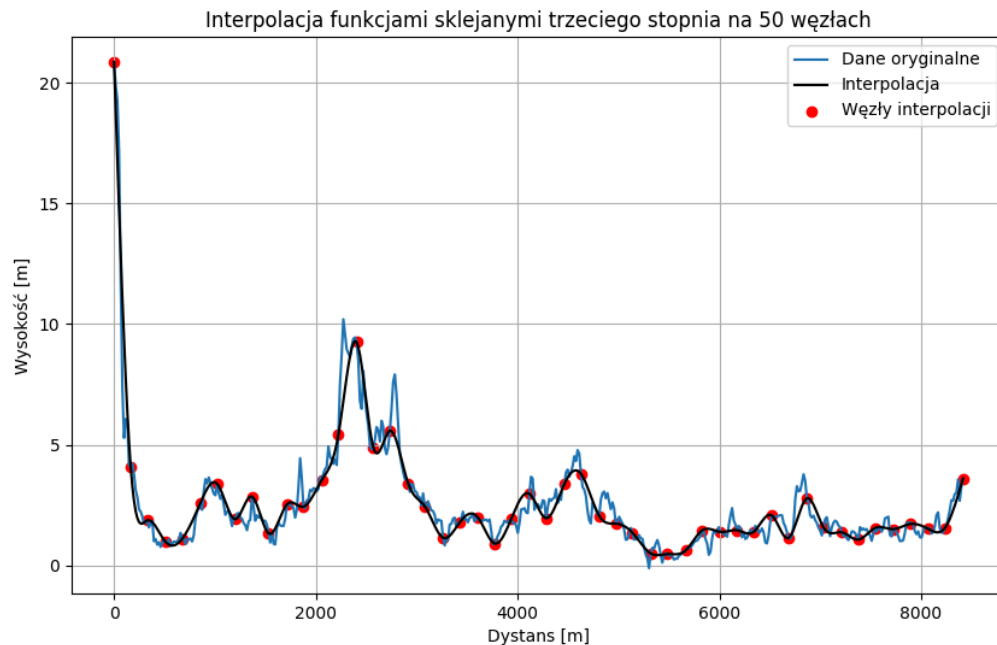
### 4. na 15 węzłach



Cały czas postępuje polepszanie się wykresu wraz ze wzrostem liczby węzłów. Nadal jednak nie jest on jednak bliski ideałowi. Warto zaznaczyć, że wykres wygląda

podobnie co do interpolacji wielomianowej przy takiej samej liczbie węzłów tylko, że Czebyszewa.

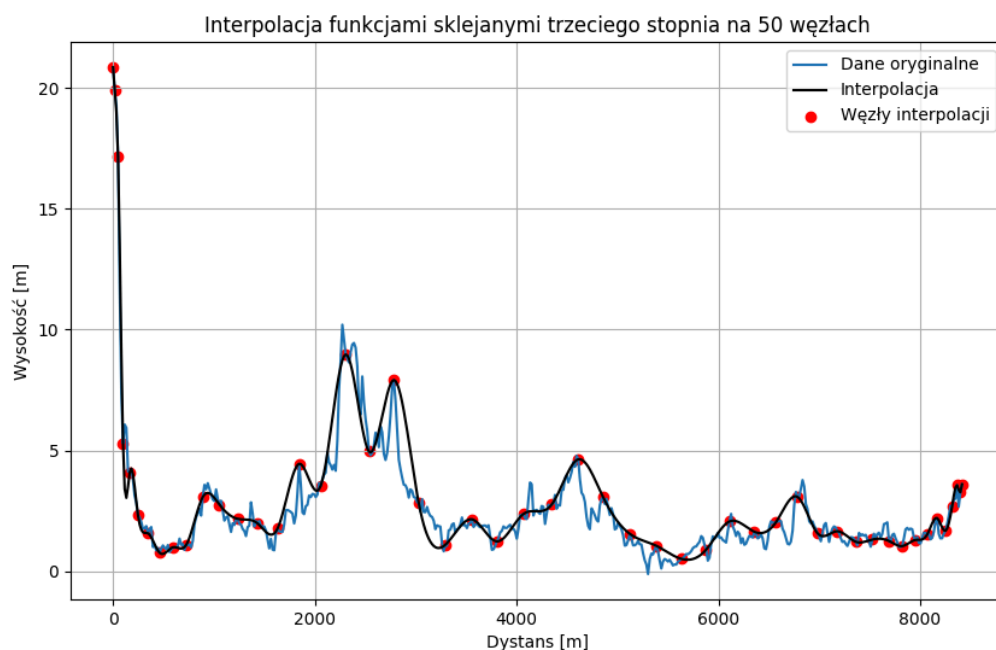
## 5. na 50 węzłach



Jak widać dołożenie dużej ilości węzłów pozwoliło na uzyskanie interpolacji bardzo dobrze pokrywającej się z danymi oryginalnymi. Jest ona minimalnie bardziej dokładna niż przy interpolacji Lagrange'a na węzłach równomiernych.

**Analiza dodatkowa interpolacji funkcjami sklejanymi drugiej trasy -** znowu sprawdzimy wpływ rozmieszczenia punktów węzłowych na wyniki. Zastosujemy interpolację na węzłach Czebyszewa.

## 1. na 50 węzłach Czebyszewa



Można zauważyć, że w pewnych momentach dokładność jest gorsza, niż w przypadku interpolacji na zwykłych węzłach. Interpolacja jest dosyć podobna do analogicznego przykładu interpolacji wielomianowej.

## **Podsumowanie**

Porównując dwie metody aproksymacji interpolacyjnej warto zwrócić uwagę na to, że interpolacja Lagrange'a jest łatwiejsza w implementacji i nie ma w niej potrzeby konstruowania i rozwiązywania układu równań liniowych w przeciwstawie do metody wykorzystującej funkcje sklepane trzeciego stopnia. Natomiast zaletą tej drugiej jest mniejsza złożoność czasowa. Wadą interpolacji wielomianowej jest jej podatność na efekt Rungego, który zwiększa się wraz ze wzrostem liczby węzłów. Co prawda można ją wyeliminować stosując węzły coraz gęściej upakowane na krańcach przedziału interpolacji, np. węzły Czebyszewa. W interpolacji funkcjami sklekanymi trzeciego stopnia ten problem nie występuje. Warto zauważyć, że daje ona też zauważalnie lepszą dokładność w porównaniu do interpolacji Lagrange'a w przypadku, kiedy to węzły rozłożone są równomiernie. Jednak w momencie kiedy to w interpolacji Lagrange'a stosujemy węzły rozłożone nierównomiernie to metoda interpolacji funkcjami sklekanymi trzeciego stopnia na węzłach równomiernych wypada już tylko nieznacznie lepiej. W przypadku kiedy w obu metodach zastosujemy węzły nierównomiernie rozłożone, to wykresy stają się do siebie bardzo podobne. Natomiast jakby porównać samą metodę interpolacji funkcjami sklekanymi trzeciego stopnia, to zastosowanie w jej przypadku węzłów o niestałych odległościach wypada gorzej, niż w przypadku węzłów równomiernych. To wszystko jest również zależne od tego, jak wygląda nasza funkcja danych startowych. Podsumowując metoda wykorzystująca funkcje sklepane trzeciego stopnia gwarantuje nam lepszą dokładność oraz brak występowania efektu Rungego.