

理容師の論理学

述語論理入門

問題2.1

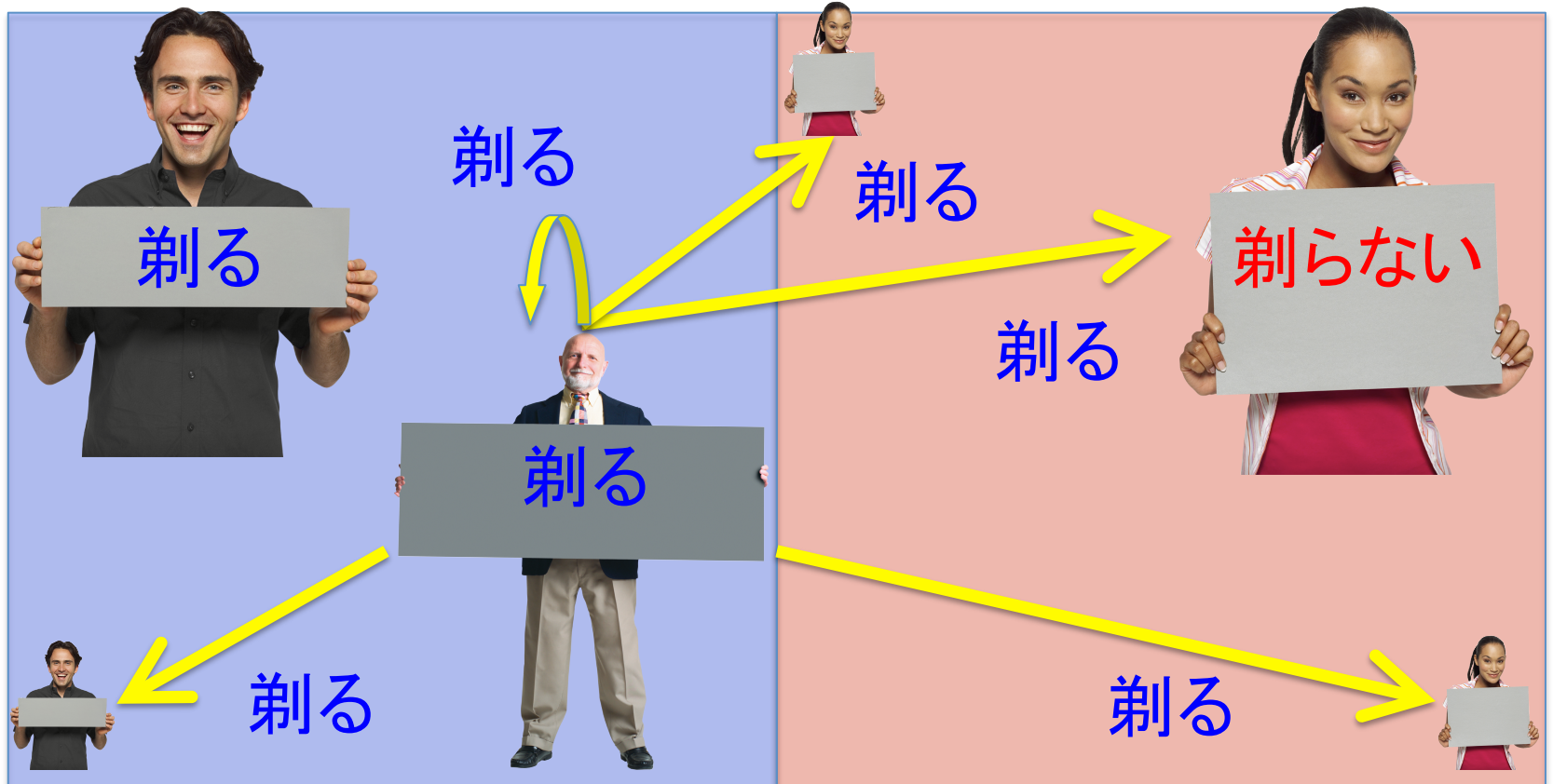
- P 島の住民の理容師 A は、自分自身の髭を剃らないすべての 住民の髭を剃る
- 理容師 A は自分自身の髭を剃るか？

解答2.1

- 仮に理容師 A が自分自身の髭を剃らないとすると、彼は「自分自身の髭を剃らないすべての住民」の一人だが、理容師 A はそのようなすべての住民の髭を剃らなければならない
- よって、理容師 A は自分自身の髭を剃る、となり矛盾
- したがって、理容師 A は自分自身の髭を剃るということになる
 - そして、理容師 A が自分自身の髭を剃ることは条件に反しない
(剃る人を剃るのは構わない)

図式化

- P 島の状況



問題2.2

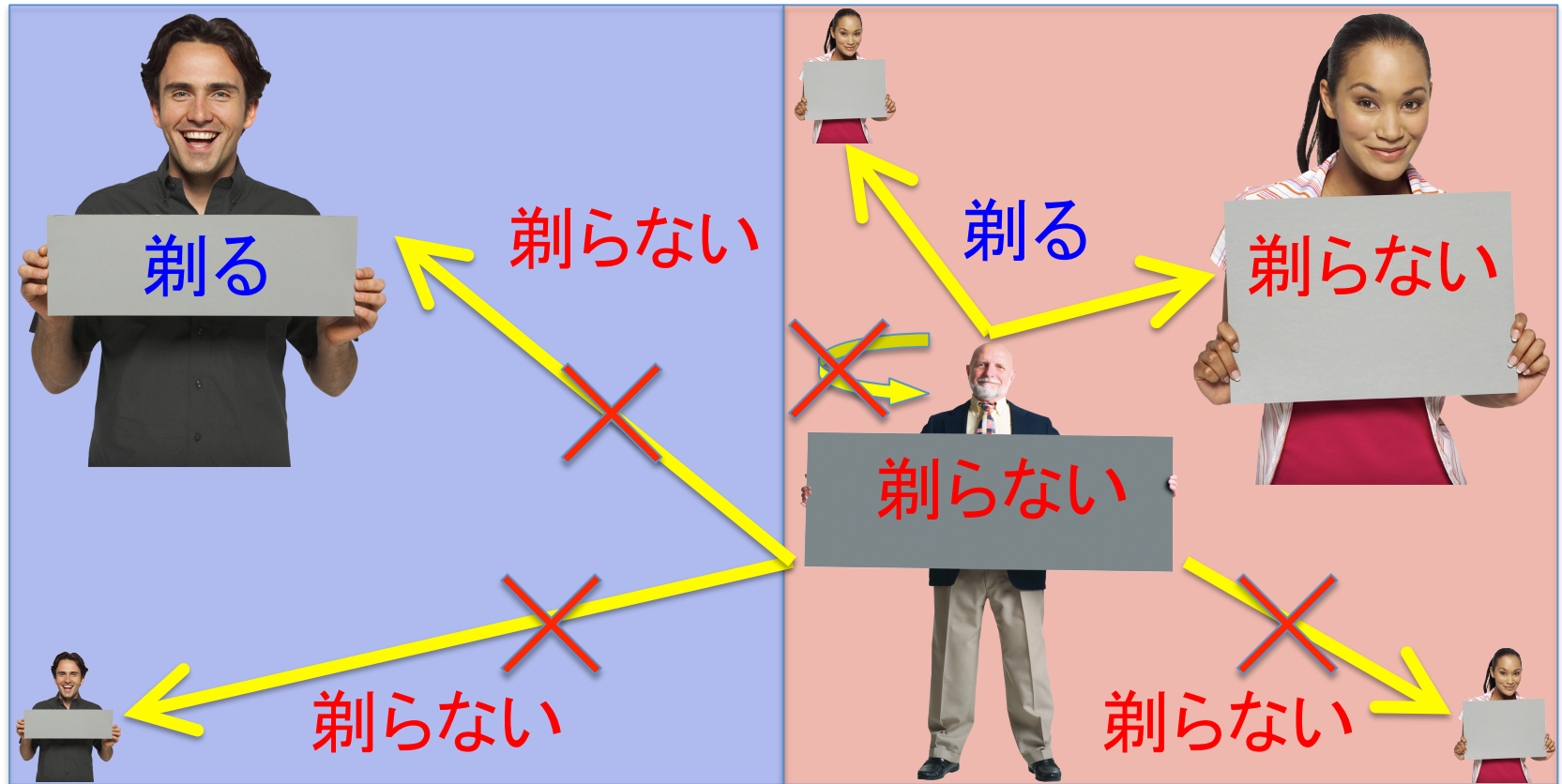
- Q 島の理容師 B は、自分自身の髭を剃らない住民の髭だけを剃る
- 言い換えると、理容師 B は、自分自身の髭を剃る住民の髭は剃らない
- 理容師 B は自分自身の髭を剃るか？

解答2.2

- 理容師 B は自分自身の髭を剃る人の髭は決して剃らない
 - それゆえ、仮に理容師 B が自分自身の髭を剃るとすれば、自分自身の髭を剃る人(B 自身)の髭を剃ることになって、これは条件に反する
 - したがって、理容師 B は自分自身の髭を剃らないとなる
 - そして、理容師 B が自分自身の髭を剃らないことは条件に反しない
- (剃らない人を剃らないのは構わない)

図式化

- Q 島の状況



問題2.3

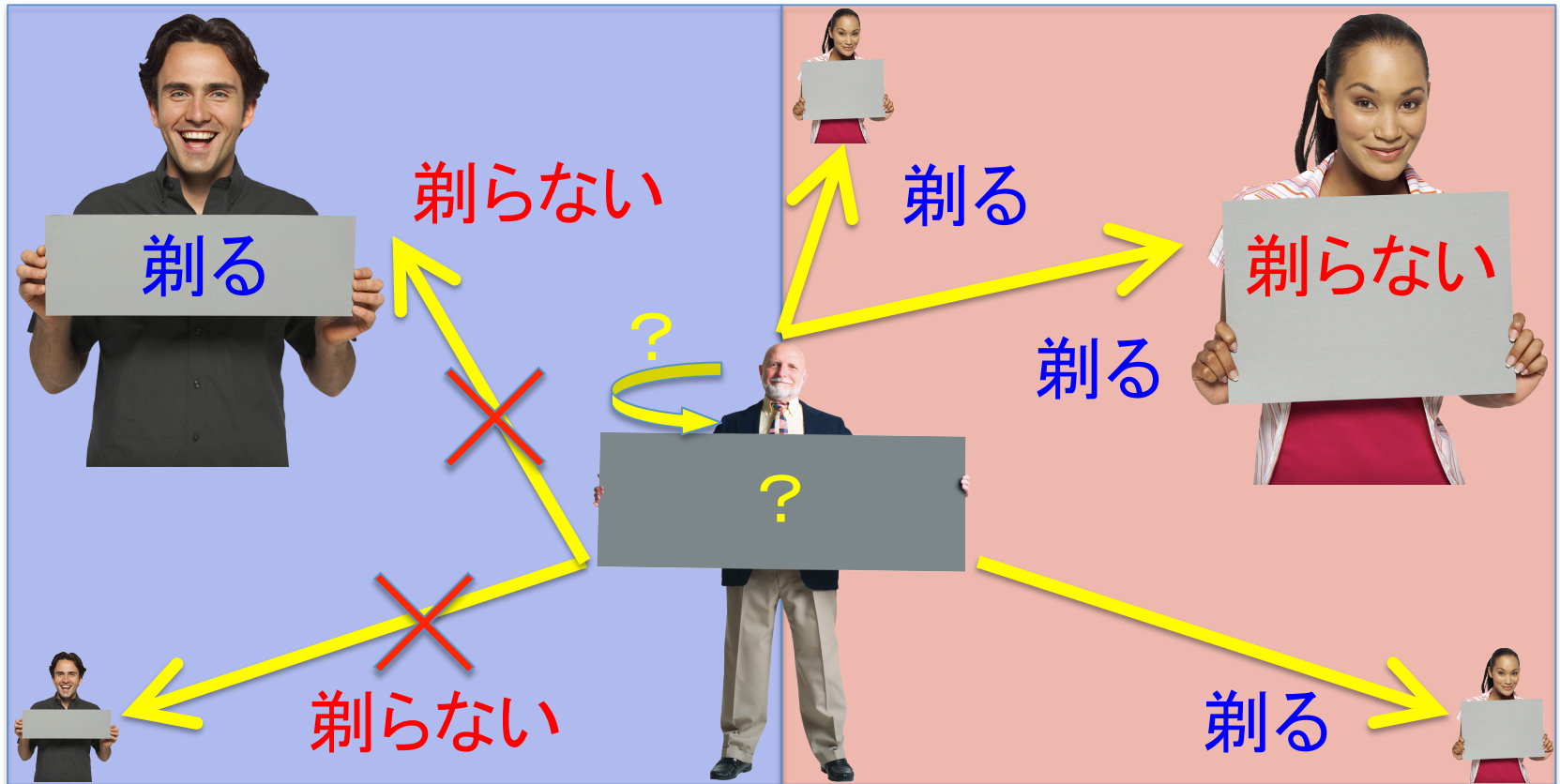
- R 島では、自分自身の髭を剃らないすべての住民の髭だけを剃る理容師 C がいる、と言われている
- 言い換えると、ある住民が自分自身の髭を剃るならば、理容師 C は彼の髭を剃らず、その住民が自分自身の髭を剃らないならば、理容師 C は彼の髭を剃る
(剃るなら剃らず、剃らないなら剃る)
- 理容師 C は自分自身の髭を剃るか？

解答2.3

- そもそも理容師 C は存在しえない
 - 理容師 C が存在したとすると、彼は自分自身の髭を剃らないすべての住民の髭を剃るので、彼は自分自身の髭を剃らなければならない(解答2.1)
 - 一方、彼は自分自身の髭を剃らない人の髭だけを剃るので、彼は自分自身の髭を剃らない(解答2.2)
 - つまり、自分自身の髭を剃らないすべての住民の髭を剃る理容師(A)は存在しうるし、自分自身の髭を剃らない住民の髭だけを剃る別の理容師(B)も存在しうるが、この両方である理容師(C)は存在しえない

図式化

- R 島の状況



記号化

- 小文字 x, y などは個体変数
- 大文字 A, B などは定数
- 「 x が y を剃る」を $S(x, y)$ と表す
- 「 x が y を剃らない」は $\neg S(x, y)$ で表せる
- 「すべての」は \forall で表す
- 「存在する」は \exists で表す

問題2.1の記号化

- 理容師 A は、自分自身の髭を剃らないすべての住民の髭を剃る

$$\forall x (\underline{\neg S(x, x)} \Rightarrow S(A, x))$$

(x が x を剃らないならば、A は x を剃る)

- 下線部はどんな x でも成立するから、A でも成立する

$$\neg S(A, A) \Rightarrow S(A, A)$$

この式は $S(A, A)$ と同値

問題2.2の記号化

- 理容師 B は、自分自身の髭を剃らない住民の髭だけを剃る

$$\forall x (\underline{S(B, x) \Rightarrow \neg S(x, x)})$$

(B が x を剃るならば、x は x を剃らない)

- 下線部はどんな x でも成立するから、B でも成立する

$$S(B, B) \Rightarrow \neg S(B, B)$$

この式は $\neg S(B, B)$ と同値

問題2.3の記号化

- 自分自身の髭を剃らないすべての住民の髭だけを剃る理容師が存在する

$$\exists y \forall x [\underline{(\neg S(x, x) \Rightarrow S(y, x))} \\ \underline{\wedge (S(y, x) \Rightarrow \neg S(x, x))}]$$

- 下線部はどんな x でも成立するから、 y でも成立する

$$(\neg S(y, y) \Rightarrow S(y, y)) \wedge (S(y, y) \Rightarrow \neg S(y, y))$$

この式は $S(y, y) \wedge \neg S(y, y)$ と同値だが、恒偽