論理と命題

例1.1

F_1: もし列車が遅れてタクシーが駅にいなければ、太郎は会議に遅れる
F_2: 太郎は会議に遅れなかった
F_3: 列車が遅れた
G: タクシーが駅にいた

を命題論理式で表現すると，

F_1: $P \land \neg Q \to R$
F_2: $\neg R$
F_3: P
G: Q

P: 列車が遅れた
Q: タクシーが駅にいた
R: 太郎は会議に遅れた

論証は次の通り: F_3のPとF_1より，$\neg Q \to R$が得られ，　これとF_2の$\neg R$より，$\neg\neg Q = Q$（タクシーが駅にいた）が結論される．

$F_1 \sim F_3$が真ならば，G:Qも真となる．したがって，　Gは$F_1 \land F_2 \land F_3$の**論理的帰結**であり，この論証は**妥当**である．

命題論理の命題

定義1.1　真偽が定められる判断や主張を**命題**(proposition)と呼ぶ. 命題は平叙文で記述される. 命題が真である (正しい) ことを”その**真理値** (truth value) は**真** (***T***：true) である”といい, 命題が偽である（間違っている) ことを”その真理値は偽 (***F***：false) である”という.

例1.2

1. 1=1,1=2 ｜ 1=1は真の, 1=2は偽の命題.
2. a=1,a=b ｜ 変数値が未知ならば真偽は未定.
   変数を含む命題を**命題関数**と呼ぶ. 例えば, $F(x,y) \overset{\text{def}}{=} x+3=xy$ と定義すると, F (1,4) は1+3=1×4という真の命題を, F (2,2) は2+3=2×2という偽の命題を表す.

3. 3と5の和は8 ｜ 算数に関する真な命題.
4. 花子は次郎の言掛りに切れた ｜ やや問題がある命題
5. 偶数は2つの素数の和で表せる ｜ Goldbachの予想
6. 火星人はピザパイが好き ｜ 馬鹿げているが，真偽を考えられるので命題として扱う.
7. イルカは魚類か魚類でない ｜ AまたはAでないという形. Aが何でも成立つので，**論理的に真**な命題である.
8. 彼は人間であって人間でない ｜ AかつAでないという形. Aが何でも成立たないので，**論理的に偽**な命題である.

次のような平叙文でない文は命題として扱わない.

- 塩をとってくれない？
- よーいドン
- 幸運を祈る

命題を原子文すなわち不可分な文として扱う．各原子文に p,q,p_1,q_1 のような異なる記号を割り当てる．以下の**論理結合子**を用いて，原子文からより複雑な文を構成できる．

¬：　pの**否定**は¬pと記す．

∨：　p∨rは，pかrの少なくとも一方が真を表明する．
　　p∨rをpとrの**選言**と呼ぶ．

∧：　p∧rは，pとrの両方が真を表明する．
　　p∧rをpとrの**連言**と呼ぶ．

→：　p→rは，pならばqという**含意**，すなわち，qはpの論理的帰結を表している．→の左辺を**前提**，右辺を**結論**と呼ぶ．

連言

AかつB (A∧B) という形の命題を連言 (conjunction) という.

1. “風が強く吹き，そして雨が激しく降る”

   A命題の連言をつくる接続詞には，“そして”，“かつ”，“および”，“また”，“しかし” , などがある.

2. “敏夫と明は映画を見た”

   “この花は白くて，可憐だ”

   このように，接続詞は簡略されることが多い.

➢ 選言

"AまたはB" (A∨B) の形の命題を**選言**(disjunction) という.

1. **排他的選言**(exclusive disjunction)

   " 1等当選者には車を1台か**または**100万円を与える"は,
   通常, 一方が真なら他方は偽を意味し, 両方が真あるいは
   偽, は意味しない.

   "1年以下の懲役**または**50万円以下の罰金に処する"も
   同様, 懲役と罰金の両方が科せられることはない.

2. **包含的選言** (inclusive disjunction)

   "現金**または**カードでの支払いが可能だ"は, いずれか
   一方が真の時だけでなく, 両方が真のときにも真となる.

記号論理学では, 論理和は包含的選言を意味し, 排他的選言
を意味するときは, 排他的論理和と特記する

- **否定**
  1. **矛盾律**　“この花は白くて白くない”
     Aが何であってもA∧¬Aは常に偽となる.
  2. **排中律**　“この花は白いか白くない”
     Aが何であってもA∨¬Aは常に真となる.
  3. **二重否定律**　“君は無罪でないことはない”
     二重否定文はニュアンスの違いを無視すれば, 元の文“君は無罪だ”と同じ意味である.
- **ドモルガン律**
  1. “安くてうまい”の否定は“高いかまずい”. “高くてまずい”ではない. A∧Bの否定は¬A∨¬B, A∨Bの否定は¬A∧¬B.
  2. ド・モルガン律は,「連言の否定は否定の選言」,「選言の否定は否定の連言」とも言える. 英文法の用語では, 連言の否定は**部分否定**となり, 選言の否定は**完全否定**となる.

条件文

1. (1) “明日晴天ならば外出する”，(2)“4で割切れる整数は（ならば）2で割り切れる”のように，“AならばB”（A→B）という形の命題を，**条件文**といい，Aを**前件**(antecedent)，Bを**後件**(consequent)という．

2. “AでないならばBでない”（¬A→¬B）は，“AならばB”（A→B）の**裏**という．(1)の裏は，(1‘) “明日晴天でないならば外出しない”，(2)の裏は，(2’) “4で割り切れない整数は　2で割り切れない”である．(2’)が成立しないことから分かるように，**裏は必ずしも真ではない．**

3. “AならばB”（A→B）と，“Aでないか，またはB”（¬A∨B）は同じ．

選言三段論法(I)：A∨Bと¬Aから，Bが結論できる．系として，A∨Bから，¬A→Bが結論できる．

選言・条件三段論法(II)：A∨BとB→Cから，A∨Cが結論できる．

(3) A→Bと仮定する．排中律より，(4) ¬A∨Aが成り立つ．

よってIIより，(5) ¬A∨Bが結論できる．

また，(5)と¬Aの否定を仮定すると，Iより(3)が結論できる．

したがって，(3)と(5)は同じ意味である．

4. “AならばB”（A→B）に対し，“BでないならばAでない”(¬B→¬A）を**対偶**(contrapositive)という．この対偶を選言で表すと“BまたはAでない”（B∨¬A）となり，結局元の条件文“AならばB”と同じである．

5. “～のとき”, “～のときにかぎり”, “～だけが”

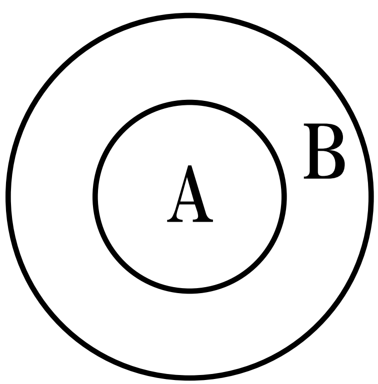
(6) “先生は病気のとき休講する”（病気→休講）

(7) “先生は病気のときにかぎり休講する”（休講→病気）

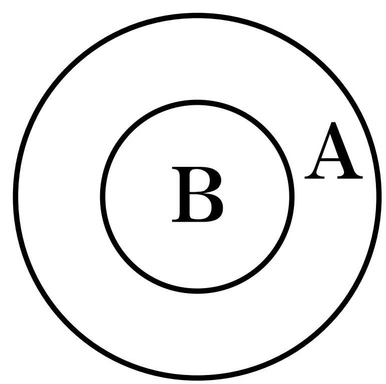
(8) “先生は病気のとき，かつそのときにかぎり休講する”
（病気↔休講）

(7)は，(6)の裏“先生は病気でないならば休講しない”とその対偶　“休講するなら先生は病気”と同じ．(8)は，(6)と(7)の連言．

AのときB，AならばB

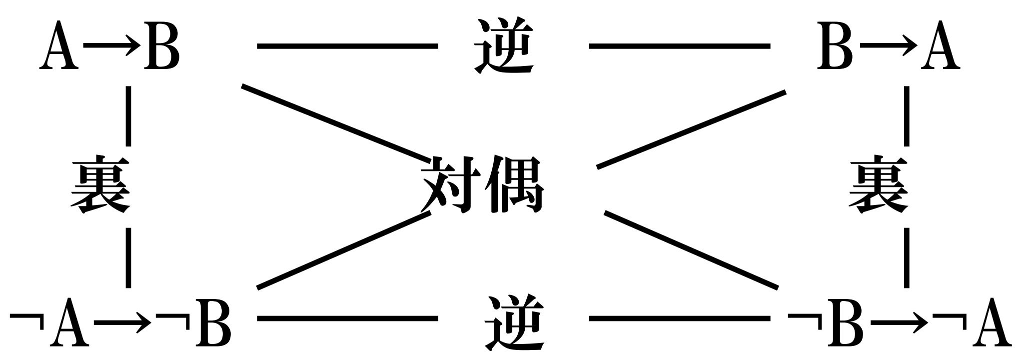


AのときにかぎりB，AだけがB



6. “AならばB”(A→B)に対し，“BならばA”(B→A)を**逆**という. これは，対偶をとると”AでないならばBでない”となるので，”AならばB”の裏と同じになる. したがって，裏が必ずしも真でないから，**逆は必ずしも真でない.**

7. 条件文とその裏，逆，対偶の相互関係



8. 必要条件と十分条件

命題A→Bが真であるとき，AはBであるための**十分条件**といい， BはAであるための**必要条件**という.

述語論理

命題論理では，“～が存在する”(there exists)，“全ての～は”(all)，“～の中で”(among)，“～だけが”(only)のような修飾子を表現できない．
このため，∀(for all)：**全称限量子**(universal quantifier)，∃(there exists)：**存在限量子**(existential quantifier)および対象を指示する**変数**(variable)を導入した**述語論理**(predicate logic)が開発された．これは**一階論理**(first-order logic)とも呼ばれる．

$\forall xF(x)$：　全てのxはFである．

$\exists xF(x)$：　あるxはFである．

例1.3　全ての学生はある教官よりも若い. Every student x is younger than some instructor y.

$$\forall x(S(x)\rightarrow \exists y(I(y)\wedge Y(x,y)))$$

S,I,Yは述語記号(predicate symbol). S(x):xは学生, I(x):xは教官, Y(x,y):xはyより若い, を表す. “全てのxに対し, もしxが学生ならば, あるyが存在して, yは教官であり, xはyより若い” と読む. より自然に, “全ての学生は自分よりも若い教官をもつ” でもよい.

例1.4　全ての鳥が飛ぶわけではない. Not all birds can fly.

$$\neg(\forall x(B(x)\rightarrow F(x)))$$

“全ての鳥が飛べる” の否定. 但し, B(x):xは鳥,F(x):xは飛ぶ. もしくは, “あるxが存在して, xは鳥で, かつ飛べない”. または, “ある鳥は飛べない”.
$\exists x(B(x)\wedge\neg F(x))$.例えば, ペンギンは鳥で, かつ飛べないので, これら２つの式は真と評価される.

関数記号を使用すると，記述能力がさらに増す．

例1.5　全ての子供はその母より若い．Every child is younger than its mother.

$\forall x \forall y(C(x) \wedge M(y,x) \rightarrow Y(x,y))$

但し，C(x)：xは子供，M(x,y)：xはyの母親，Y(x,y)：xはyより若い.各人は母を一人もつから，“xの任意の母”という表現は簡潔でない．関数m(x)：xの母，を導入すると，$\forall x\,(C(x) \rightarrow Y(x,m(x)))$と書ける．

例1.6　純と修は同じ母方の祖母をもつ．Jun and Osamu have the same maternal grandmother.

$\forall x \forall y \forall u \forall v(M(x,y) \wedge M(y,j) \wedge M(u,v) \wedge M(v,o) \rightarrow x=u)$

純と修を定数(constant) j,oで，母を述語Mで表す．
“yとvがそれぞれ純と修の母で，xとuが母達の母とすると，xとuは同一人物だ”．等号(equality) “=”は，2引数の述語．等号は通常，=(x,y)のような前置形でなく，x=yのような中置形で書く．

関数記号m(x)：xの母，を用いれば，m(m(j))=m(m(o))と簡潔に書けるが，関数記号は単一の対象を指す場合にしか使用できない．

各人xの母は唯一人定まるのでm(x)と表せるが，xの弟は関数b(x)では表せない（弟を特定できないから）．

“絵里は安奈の兄弟の一人が好き”

Eri likes Anna's brother.

ならば，$\exists x\,(B(a,x)\wedge L(e,x))$ と書く．

但し，B：兄弟，L：好き，a：安奈，e：絵里．

また，“絵里は安奈の全ての兄弟が好き”

Eri likes all of Anna's brothers.

ならば，$\forall x\,(B(a,x)\rightarrow L(e,x))$ と書く．

全称限量子と存在限量子

$\forall x F(x)$という形の命題を**全称命題**，$\exists x F(x)$という形の命題を**存在命題**と呼ぶ．任意のxに対しF(x)が真のとき，$\forall x F(x)$は真になり，F(x)を真にするxがあれば，$\exists x F(x)$は真になる．

1. ド・モルガン律

$$\neg \forall x F(x) \equiv \exists x \neg F(x), \neg \exists x F(x) \equiv \forall x \neg F(x)$$

2. F(x)のxの領域が有限個の要素$a_1, \cdots, a_n$からなるとき

$$\forall x F(x) \equiv F(a_1) \wedge \cdots \wedge F(a_n),\ \exists x F(x) \equiv F(a_1) \vee \cdots \vee F(a_n)$$

$$\neg \forall x F(x) \equiv \neg (F(a_1) \wedge \cdots \wedge F(a_n)) \equiv \neg F(a_1) \vee \cdots \vee \neg F(a_n) \equiv \exists x \neg F(x)$$

$$\neg \exists x F(x) \equiv \neg (F(a_1) \vee \cdots \vee F(a_n)) \equiv \neg F(a_1) \wedge \cdots \wedge \neg F(a_n) \equiv \forall x \neg F(x)$$

述語と性質

命題関数F(x)は，“xはFである”，または，“xはFという性質をもつ”と読めばF( )は述語である．

1. “ソクラテスは死ぬ”はM(s)と書ける．
   但し，Mは死ぬ，sはソクラテスを表す．この叙述は，ソクラテスという個人に関する**単称判断**である．
2. “人間は死ぬ”人間をHで表すと，この命題は
   $\forall x\,(H(x) \rightarrow M(x))$ と書ける．
   この叙述は，人間全体に関する**全称判断**である．
   これを強調して，**全ての〜は〜である**と読む．
3. **全称肯定命題** ⑴“全ての数学者は詩人である”は，
   F(x)：xは数学者，G(x)：xは詩人，を用いて，
   ⑵ $\forall x\,(F(x) \rightarrow G(x))$ （“全てのxにつき，xが数学者ならばxは詩人である”）と表せる．

4.　$\exists x F(x)$：あるxに対してFである，またはFというものがあると読む．Oは奇数，Pは素数を表すとすると，$\exists x(O(x) \wedge P(x))$という命題は，“奇数かつ素数であるものがある”，“ある奇数は素数である”，“ある素数は奇数である”などと読める．

5.　特殊肯定命題

(3)“ある数学者は詩人である”は，(4) $\exists x(F(x) \wedge G(x))$ (“数学者かつ詩人であるxが存在する”)と表せる．(3)を否定すると“全ての数学者は詩人でない”となり，(5)　$\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x))$　と表される．したがって，(4)は(5)の否定より得られる．

$$\neg \forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x)) \equiv \exists x \neg(F(x) \rightarrow \neg G(x)) \equiv \exists x(F(x) \wedge G(x))$$

概念・条件・集合はすべて述語の性質Fとして表現できる．

Fが条件を表すなら，F(e)を，“eは条件Fを満たす”，と読む．

また，Fが集合を表すなら，F(e)を，“eは集合Fに属す”とか，“eはFの元（要素）である”と読み，それを$e \in F$と表す．

論理記号の用例

1. $\forall x(F(x) \to G(x))$
   - F,Gを条件と考える場合，“FはGのための**十分条件**である”とか，“GはFのための**必要条件**である”と読む．
   - F,Gを性質と考える場合，“FはGという性質を**含む**”とか，“GはFという性質に**含まれる**”と読む．
   - F,Gを集合と考える場合，“Gは集合Fを含む”とか“Fは集合Gに含まれる”と読む．（含むの関係が丁度逆になる）集合の記法を使って上の命題を書き直すと，$\forall x(x \in F \to x \in G)$となる．この命題を$F \subset G$と書き，“FはGの**部分集合**である”と読む．

伝統的な論理学では，ある性質とその性質をもつ全体からなる集合を，同一の概念の2つの側面と考え，性質のことをその概念の**内包**(intension)，集合のことを**外延**(extension)と呼ぶ．

2. $\forall x(F(x) \leftrightarrow G(x))$

- F,Gを条件と考える場合，“FはGのための**必要十分条件**である”とか，“GはFのための**必要十分条件**である”と読む．
- F,Gを性質，または集合と考える場合，“FとGは**等しい**”とか，“FとGは**同じ**”と読む．特に集合と考えれば，この命題は$\forall x(x \in F \leftrightarrow x \in G)$と表され，F=Gと書く．

3. $\forall x(F(x) \vee G(x))$

- F,Gを述語と考える場合．“FまたはGである”を意味する述語は，命題関数$F(x) \vee G(x)$を$H(x)$と表したときの$H(\ \ )$のことである．
- F,G,Hを集合と考える場合，上のようなHを“FとGの**和集合**”と呼び，$F \cup G$と書く．したがって$\forall x[x \in F \cup G \leftrightarrow (x \in F \vee x \in G)]$は$F \cup G$を定義する正しい命題である．

4. $\forall x(F(x) \wedge G(x))$

- “FかつGである”という述語を考える場合も同様.
  命題関数$F(x) \wedge G(x)$を$H(x)$と表すとき, F,G,Hを集合と考えれば, このHを“FとGの**積集合または共通部分**”と呼び, $F \cap G$と書く. したがって, $\forall x[x \in F \cap G \leftrightarrow (x \in F \wedge x \in G)]$は$F \cap G$を定義する正しい命題である.

5. $\forall x(\neg F(x))$

- “Fでない”という述語を考える場合も同様.
  F,¬Fという述語を集合と考えれば, この¬Fを“Fの**補集合または余集合**(complementary set)”と呼び, F^cと書く.
  したがって,
  $\forall x[x \in F^c \leftrightarrow x \notin F)]$は$F^c$を定義する正しい命題である
  ($x \notin F$は$\neg(x \in F)$の略記).

6. $\{ x \mid F(x) \}$

- 命題F(x)が与えられたとき，その条件Fを満たすもの全体からなる集合を，$\{x \mid F(x)\}$と表す．この記法を用いると，$F \cup G=\{x \mid x \in F \vee x \in G\}$, $F \cap G=\{x \mid x \in F \wedge x \in G\}$, $F^c =\{x \mid x \notin F\}$, となる．$F-G=\{x \mid x \in F \wedge x \notin G\}$は，$F-G=F \cap G^c$を意味する．F−GをFとGの**差集合**，または**Fに関するGの補集合**と呼ぶ．

7. “FはGでない” の表現法は以下が考えられる

① $\forall x(F(x) \rightarrow \neg G(x))$　Fは必ずGでない

② $\neg \forall x(F(x) \rightarrow G(x))$　Fは必ずしもGでない．

③ $\forall x(F(x) \leftrightarrow \neg G(x))$　FとはGでないということ．

④ $\neg \forall x(F(x) \leftrightarrow G(x))$　FとGは同じ概念ではない

この4通りに限った場合，“白馬は馬にあらず” を正しい命題と理解するには，(4)の解釈しかないだろう．

多変数の命題関数

1. x<yのように２変数の命題関数を**関係**と呼ぶ．一般に，n変数の命題関数をn項関係と呼ぶ．特に，**1項関係**は性質，**0項関係**は命題のことである．
2. n変数の命題関数を**n変数の述語**とも呼ぶ．→ ,∧,∨,¬ という論理記号だけを研究する範囲を**命題論理**(propositional logic)という. さらに，∀,∃という論理記号を研究する範囲を**述語論理**(predicate logic)という.
3. 2変数述語F(x,y)の変数xに定数eを代入すると, F(e,y)という1変数yの命題関数が得られる. これから，∀yF(e,y), ∃yF(e,y)という2つの命題が得られる. 同様にして，∀x∀yF(x,y)，∃x∀yF(x,y)，∀x∃yF(x,y)，∃x∃yF(x,y), などの命題を作ることができる.

4. $\forall x \exists y F(x,y)$と$\exists y \forall x F(x,y)$は外見上似ているが，内容の違う命題である．例えば，自然数の領域では$\forall x \exists y (x<y)$（どんな自然数xに対してもそれより大きい自然数yがある）は正しい命題だが，$\exists y \forall x (x<y)$（全ての自然数xよりも大きい自然数yがある）は間違った命題である．

5. $\forall x \forall y F(x,y)$と$\forall y \forall x F(x,y)$は外見上異なる．しかしこれらは，命題を作る道筋が異なるだけで同じ内容である．
   同様のことが，$\exists x \exists y F(x,y)$と$\exists y \exists x F(x,y)$にも言える．

6. n変数の述語に限量子を作用させると，n−1変数の述語ができる．例えば，3変数述語$F(x,y,z)$に対し，$\forall x F(x,y,z)$はy,zを変数とする2変数述語を，$\exists z \forall x F(x,y,z)$は，yを変数とする1変数述語を表している．

述語論理式への翻訳例

- 全ての有理数は実数である。 Every rational number is a real number.

  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

  全ての老人が病気になった。 All old people got sick.

  $\forall x(Old(x) \wedge Person(x) \rightarrow Sick(x))$

  私の父の息子達は私の兄弟だ。 Every son of my father is my brother.

  $\forall x \forall y(F(x,m) \wedge S(y,x) \rightarrow B(y,m))$

  or $\forall x(S(x,f(m)) \rightarrow B(x,m))$

- 老人だけが病気になった。 Only old people got sick.

  $\forall x(Sick(x) \rightarrow Old(x) \wedge Person(x))$

  人は働くときに限り休める。 Every person can take rest only if he works.

  $\forall x(Person(x) \rightarrow (Rest(x) \rightarrow Work(x)))$

- 実数は全て有理数というわけではない. Not every real number is a rational number.

  $\neg\forall x(Q(x)\rightarrow P(x))$ or $\exists x(Q(x)\land\neg P(x))$

- どの中古車販売員も中古車を買わない. No used-car dealer buys a used car.

  $\forall x(U(x)\rightarrow\neg B(x))$

  どの医者もやぶではない. No Doctor is quack.

  $\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x))$ or $\neg\exists x(P(x)\land Q(x))$

  男性は一人も生き残らなかった. No Males survived.

  $\forall x(M(x)\rightarrow\neg S(x))$ or $\neg\exists x(M(x)\land S(x))$

- やぶ医者を好む患者はいない. No patient likes any quack.

  ("ある患者はあるやぶ医者が好き"の否定)

  $\forall x(P(x)\rightarrow\forall y(Q(y)\rightarrow\neg L(x,y)))$ or

  $\neg(\exists x(P(x)\land\exists y(Q(y)\land L(x,y))))$

- 全ての医者が好きという患者はいない。（“ある患者は全ての医者が好き”の否定） No patient likes every doctors.

  $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(D(y) \wedge \neg L(x,y)))$ or
  $\neg \exists x(P(x) \wedge \forall y(D(y) \rightarrow L(x,y)))$

- 中には芸術家もいる。 Some people are artists.

  $\exists x(A(x))$

- ある中古車販売員は正直だ。 Some used-car dealers are honest.

  $\exists x(U(x) \wedge H(x))$

  中古車販売員でない不正直もいる。 Some dishonest people are not used-car dealers.

  $\exists x(\neg H(x) \wedge \neg U(x))$

- 全ての医者が好きという患者もいる。 Some patients like all doctors.

  $\exists x(P(x) \wedge \forall y(D(y) \rightarrow L(x,y)))$

自由変数と束縛変数

1. ∀xF(x)と∃xF(x)において，F(x)を限量子∀x，∃xの**有効範囲**(scope)と呼ぶ．∀xや∃xの有効範囲内の変数xは，place holderと呼ばれる通り見かけ上の変数である．このような変数を**束縛変数**(bound variable)と呼び，それ以外の変数を**自由変数**(free variable)と呼ぶ．

例1.7　$\exists x(ax^2+bx+c=0)$(方程式$ax^2+bx+c=0$は根をもつ)において，a,b,cは自由変数，xは束縛変数である．このような関係は限量子に限らない．例えば，定積分$\int_0$　f(x,y)dxは，1変数yの関数であり，xは束縛変数，yは自由変数に対応する．

例1.8　∃y(F(x)→∀xG(x,y))において，∃yの有効範囲はF(x)→∀xG(x,y)，∀xの有効範囲はG(x,y)である．
F中のxは自由変数，G中のx,yは束縛変数．A(x,y)→∀xB(x)において，A中のx,yは自由変数，B中のxは束縛変数．

限量子規則

∀xFまたは∃xFの**有効範囲**(scpoe)はF.

bound(束縛)　free(束縛)

$$\forall x(\underbrace{P(x)\vee Q(x,y)}_{\forall x\text{の}\mathrm{scope}})$$

- 論理式Fの自由変数yをF(y)と表す.
- 自由変数yに任意の項tを代入した結果をF(t)と表す.
- 但し，自由を損なう代入，束縛変数への代入は禁止する.

例　$F(y)=\forall xP(x,y)$　(yは自由変数)

○ $F(a)=\forall xP(x,a)$　○ $F(z)=\forall xP(x,z)$　○ $F(f(y))=\forall xP(x,f(y))$

× $F(x)=\forall xP(x,x)$　× $F(z)=\forall xP(z,y)$

限量子規則違反

禁止された代入を施すと，間違った表明になる．

例1.9　$\forall x A(x) \rightarrow A(t)$ ：公理　但し，項tはxに対し自由
（tはAの限量子により束縛されない）

$A(x)=\neg\forall y(x=y)$, $t=y$とすると，上記公理は
$\forall x(\neg\forall y(x=y)) \rightarrow \neg\forall y(y=y)$となる．

→の前件は（すべての元と同値な元はないを表すので）
真だが，後件（自身と同値でない）は偽である．

例1.10　$\forall x \exists y(x+y=0)$（整数Ｚ）は，任意のxに対し逆元yが
存在するという真の文である．
これに，$x=y+1$を代入すると，$\forall x \exists y(2y+1=0)$はＺにおいて偽となる．