

# 嘘つきの論理学

命題論理入門

# USO島

- USO島の住民:
  - 善人か悪人
  - 見かけでは判別できない
  - 善人は常に真実を言い、悪人は常に嘘をつく

# 問題1.1

- 私がUSO島で住民 A,B,C に遭遇

私



あなたは善人？  
それとも悪人？



A



B



C

私



※△☆%、 、 、



A



B



C

私



A は「自分は悪人だ」  
と言ったのよ



A



B



C

私



騙されるな！  
B は嘘つきだ！



A



B



C

# 問題1.1

- さて、Cは善人か、それとも悪人か？



私



?



A

悪人



B

善人



C

# 解答1.1

- USO島の住民は誰も「自分は悪人だ」と言えない
  - 善人ならば、「自分は悪人だ」と嘘をつけないし、
  - 悪人ならば、「自分は悪人だ」と真実を言えないから
- よって、「『自分は悪人だ』とAは言った」というBの発言は嘘だ。
- したがって、Cの言ったことは正しい。
- つまり、Bは悪人で、Cは善人である。
  - ただし、Aが善人か悪人かはわからない。

## 問題1.2

- 私が A に「3人中悪人は何人か？」と尋ねた
- 私は A の答えが聞き取れなかったので、B に「A は何と答えたのか」と尋ねた
- B は「『3人中悪人は2人だ』と A は答えた」と言った
- すると、C が「B は嘘をついている」と言った
- さて、C は善人か、それとも悪人か？

# 解答1.2

- B の発言が本当ならば、C が嘘をついている
- B が嘘をついているならば、C の発言は本当
- したがって、B と C の一方は善人で他方は悪人  
(ここまで、実は問題1.1と同じ状況)
- さて、A が善人ならば、「3人中悪人は2人だ」という A の発言は正しいはずだが、B、C のうち悪人はただ一人なので、A が悪人でなければならなくなり、矛盾
- 逆に、A が悪人ならば、「3人中悪人は2人だ」ということ自体は正しいが、その正しいことを A が言うはずがない
- 上で、A が善人でも悪人でもないという、ありえない状況を生み出すのは B の発言を正しいと仮定したからだ
- B の発言が嘘だとすれば、このような不条理は生じない
- したがって、B は悪人で、C は善人である
  - ただし、A が善人か悪人かはわからない

# 正しい推論を行うために

- 日本語は間違えやすい
- 記号化、形式化すると間違えにくくなるだろう

# 記号化

- 「Aは善人である」を  $G_A$  で表す
- 「Aは悪人である」は  $\neg G_A$  で表せる
- Aの発言内容「・・・」を  $Q_A$  で表す
- Aが善人であれば  $G_A$  も  $Q_A$  も真となる
- Aが悪人であれば  $G_A$  も  $Q_A$  も偽となる
- すなわち、 $G_A$  と  $Q_A$  の真偽値は同じである
- これを、  $G_A \equiv Q_A$  と表す

# 問題1.1の記号化

- $Q_B$ : 「A は『自分は悪人だ』と言った」  
 $Q_B = (Q_A = \neg G_A)$   
(  $=$  は事実、すなわち正しいが、  $=$  はまだ怪しい )
- $G_A \equiv Q_A$  より、右辺は  $(G_A \equiv \neg G_A)$  と同値だが、  
この式自体は×、よって、 $Q_B \equiv \text{偽}$
- $G_B \equiv Q_B$  より、 $G_B \equiv \text{偽}$   
(言い換えれば、 $\neg G_B$  が真)

# 問題1.1の記号化

- $Q_C$ : 「Bは嘘つきだ」  $\equiv$  「Bは悪人だ」

$$Q_C = \neg G_B$$

(この  $=$  は事実、すなわち正しい)

- $G_C \equiv Q_C$  より、 $G_C \equiv \neg G_B$
- 結局、 $\neg G_B$  が真、かつ、 $G_C \equiv \neg G_B$  が真となる時、 $G_C$  の真偽は如何に？ という問題



# 真偽表(真理値表)

$G_A$	$G_B$	$G_C$	$\neg G_B$	$G_C \equiv \neg G_B$
○	○	○		
○	○	×		
○	×	○		
○	×	×		
×	○	○		
×	○	×		
×	×	○		
×	×	×		

# 真偽表

$G_A$	$G_B$	$G_C$	$\neg G_B$	$G_C \equiv \neg G_B$
○	○	○	×	
○	○	×	×	
○	×	○	○	
○	×	×	○	
×	○	○	×	
×	○	×	×	
×	×	○	○	
×	×	×	○	

# 真偽表

$G_A$	$G_B$	$G_C$	$\neg G_B$	$G_C \equiv \neg G_B$
○	○	○	×	×
○	○	×	×	○
○	×	○	○	○
○	×	×	○	×
×	○	○	×	×
×	○	×	×	○
×	×	○	○	○
×	×	×	○	×

# 真偽表

$G_A$	$G_B$	$G_C$	$\neg G_B$	$G_C \equiv \neg G_B$
○	○	○	×	×
○	○	×	×	○
○	×	○	○	○
○	×	×	○	×
×	○	○	×	×
×	○	×	×	○
×	×	○	○	○
×	×	×	○	×