Задача 1

Аналогии с топологической сортировкой получаем, что если цикл был бы, то было бы ребро ведущее из вершины с меньшим номером к вершине с меньшим номером, что противоречит условию.

Задача 2

Будем "достраивать"путь, рассматривая подграфы исходного графа. На 2-х вершинах простой путь - это ребро. При добавлении 3 вершины перезаписываем путь. Если у нас есть простой путь длины n, то либо новая вершина добавится в начало этого пути, либо в конец, либо найдется пара вершин из пути, первая из которых входит в новую вершину а следующая выходит. т.е. в любом случае получим более длинный простой путь.
Корректность: путь всегда простой и достраивание верно.
Асимптотика:в поисках места для каждой новой вершины будем проходить по имеющемуся пути в поисках места для нее, выполняя сравнения. Получаем

$$\sum_{i=2}^{n} ci = \Theta(n^2)$$

Задача 3

a)Прямое ребро из вершины n в k: d(n)<d(k)<f(k)<f(n) b)Перекрестное:d(n)<f(n)<d(k)<f(k) либо d(k)<f(k)<d(n)<f(n)

Задача 4

в орграфе найдем его компоненты сильной связности. Сделаем обход графа в глу- бину, транспонируем граф и будем делать обход в глубину от вершин в порядке убывания времени закрытия. Полученные деревья и будут «областями». Корректность : так находятся компоненты силной связности. Асимптотика составлена из проходов по всем вершинам (V)и транспонировании ребер(E). В итоге O(V+E).

Задача 5

Цель в том, чтобы идти постоянно в новые комнаты если они есть. Будем действовать по аналогии с DFS. Для этого отметим первую комнату кучей монеток в центре. Затем будем помечать входы в туннели следующим образом: туннель откуда мы пришли пометим одной монетой, тогда всегда сможем вернуться. Пока можем идем идем в новые комнаты, если пришли туда где уже были или уходим из комнаты без выхода и неисследовательных туннелей, то двумя монетами "запираем этот туннель". В итоге, мы всегда знаем куда еще нужно и надо пойти и либо найдем выход, либо поймем что его нет, когда все туннели исследованы.
Корректность слдеует из идеи DFS, т.к. мы идем вглубь пока можем, иначе возвращаемся по пути спуска и снова идем пока можем из каждой комнаты на пути назад.
При этом через каждое ребро мы проходим два раза максимум, когда первый раз по нему проходим и если приходиться возвращаться по нему.Поэтому асимптотика линейна относительно числа коридоров.

Задача6

Все ребра сонаправленные с ребрами в пути можно выкинуть (как в топологически отсортированном графе они не образуют циклов и К.С.Св.). Далее работаем с ребрами направленными противоположно. Отсортируем все эти ребра по возрастанию концов. Если два ребра "пересекаются"по вершинам, то они входят в одну компоненту связности, т.е. нужно посчитать число разрывов по вершинам между группами пересекающихся ребер в отсортированном массиве ребер.
Сортировка работает за O(mlog(m)), потом пройдемся по m ребрам и увеличиваем счетчик если if end(i+1)<=start(i) (count++).Ответ count+1.

Задача 7(семинар)

Конденсат этого графа он сам. значит, граф DAG, т.к. конденсат - DAG.