Задача 1

Рассмотрим варианты того как можно начать заполение полосы с одного ее края. Либо ложим одну вертикальную табличку, либо две горизонталные, либо квадрат (все плотно к краю). Получаем рекуренту на количество способов $F_n = 3F_{n-2} + F_{n-1}$. Решаем её: $\Lambda^2 - \Lambda - 3 = 0 \Rightarrow \Lambda\ = 0.5(1 \pm \sqrt{13}),\ F_n = C_1(0.5(1+\sqrt{13}))^n + C_2(0.5(1-\sqrt{13}))^n$.

Из того, что $F_1 = 1, F_2 = 4$ получаем $C_1 = \frac{1}{2\sqrt{13}}(1+\sqrt{13}), C_1 = \frac{-1}{2\sqrt{13}}(1-\sqrt{13})$. В итоге, $F_n = \frac{1}{\sqrt{13}}\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{13}}\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^{n+1}$
Переводим линейную рекуренту для F_n в систему рекурент $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix}$ Считаем первые несколько степеней матрицы по модулю 31: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 19 & 21 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 40 & 57 \\ 19 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 26 \\ 19 & 21 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 97 & 120 \\ 40 & 57 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 27 \\ 9 & 26 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} 217 & 291 \\ 97 & 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 4 & 27 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^8 = \begin{pmatrix} 508 & 651 \\ 217 & 291 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = 12E_2$. Тогда

$$\begin{pmatrix} F_{30000+1} \\ F_{30000} \end{pmatrix} = 12^{30000/8}E_2\begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = 12^{3750}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = (12^{125})^{30}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \underset{31}{\equiv} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Т. е. $F_{30000} \underset{31}{\equiv} 1$

Задача 2

(i) $g(2) = 4+2+2+4 = 12$ - количество путей длины два, в которых на втором месте после 1 идут вершины 1, 2, 3 и 4.
Общая формула для $g(n)$ — сумма элементов первой строки в матрице A^n, где A – матрица смежности графа. Формула верна, т.к. $A^n[i][j]$ есть количество путей между вершинами i и j, состоящих ровно из n рёбер. Покажем это по индукции:
1. матрица смежности A является ответом на задачу при k=1 — она содержит количества путей длины 1 между каждой парой вершин.
2. В предположении, что A^k содержит в каждой ячейке число путей длины k между вершинами i и j, для количества путей длины $k+1$ между этими вершинами получаем формулу $\sum_{q=1}^{n} A^k[i][q] \cdot A[q][j]$ (n вершин в

графе), что равно $A^{k+1}[i][j]$.
Поэтому сложив элементы первой строки в A^n, получим число путей длины n из первой вершины до всех вершин в графе, включая её саму.
(ii) Найдем рекуренту ввиду доказанного выше факта:

Пусть $A^n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$. Тогда $g(n) = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14}$

$$A^{n+1} = A^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(n) & a_{11} + a_{14} & a_{11} + a_{14} & g(n) \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

$$g(n+1) = 2g(n) + 2(a_{11} + a_{14})$$

$$A^{n+2} = A^{n+1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(n+1) & 2g(n) & 2g(n) & g(n+1) \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix}$$

Ответ: $g(n+2) = 2g(n+1) + 4g(n)$

(iii) При непосредственном вычислении по рекуррентной формуле g_{20000} mod 29 будем вычислять новое значение $g(n)$ mod 29, зная предыдущие два значения $g(n-1)$ mod 29 и $g(n-2)$ mod 29. При этом все значения будем производить по модулю 29. При этом на каждом из $n-2$ шагов (вычисления начинаем от $g_1 = 4$ и $g_2 = 12$) все операции будем производить по модулю, т.е. будем работать с числами от 0 до 28, а значит, арифметические операции с ними (умножение, сложение и приведение по модулю) выполняются за константное время с использованем константной памяти. В итоге, трудоемкость вычисления $g(n)$ по любому модулю есть $\Theta(n)$. При $n = 20000$ получаем порядка 20000 итераций, причем на каждой из них затрачивается времени не более $2\log^2 29 + 2\log 4 \cdot 29 + \log^2 6 \cdot 29$ (это соответственно умножение, сложение и поиск остатка по модулю).
(iv) Отсутствие периода означает, что каждое новое число уникально в последовательности. Каждое число в последовательности считается по двум предыдущим, т.е. если периода нет, то пары остатков, которые дают соседние элементы в последовательности, всегда получаются новые. По модулю m таких пар не более чем m^2, а значит, при $n > m^2$, какая-то пара встретится больше раза. А значит, все последующие элементы тоже повторятся при вычислении по формуле. Длина периода по модулю m не более m^2, значит, его точно найдем, вычислив не более m^2 пар за общее время $O(m^2 \log^3 m)$. При нахождении

совпадения (проверку совпадения можно быстро проверять по матрице $m \times m$ с отметками наличия таковой пары) знаем длину периода p. Тогда $(g(n)\ ;\ g(n-1)) = (g(n\ mod\ p)\ ;\ g((n-1)\ mod\ p)$, что вычислим за $O(\log^3 n)$.

Д-1) Аналитическая формула $g(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(1-\sqrt{5})^{n+1}$ (рекурента как в контрольной и $g(1) = 4, g(2) = 12$,отсюда $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1+\sqrt{5})$ и $C_1 = \frac{-1}{\sqrt{5}}(1-\sqrt{5})$). Обоснование алгоритма в том, что все вычисления, включая извлечение корня и нахождение обратного, можно производить в группе остатков по модулю. Т. к. $11^2 \underset{29}{\equiv} 5$, то $g(20000) \underset{29}{\equiv} 11^{-1}(1+11)^{20001} - 11^{-1}(1-11)^{20001} \underset{29}{\equiv} 8 \cdot 12^{20001\ mod\ 28} - 8 \cdot (-10)^{20001\ mod\ 28} \underset{29}{\equiv} 8(12^9 + 10^9) \underset{29}{\equiv} 8$. Т.к. квадратичный корень по модулю известен (на случай если в формуле есть извлечение корня), то необходимо произвести операции по модулю m: нахождение обратного, сложение, нахождение остатка и умножение с временем работы соответсвенно $\log m, \log m, \log^2 m, \log^2 m$. Умножение придется повторить не более $\log m$ раз (при бинарном возведении в степень). В итоге асимптотика $\log^3 m$.

Задача 4

(1) $L \in NP\text{-}c \Leftrightarrow \forall L' \in NP \hookrightarrow L' \leq_p L \wedge L \in NP \Leftrightarrow \bar{L'} \leq_p \bar{L} \wedge L \in NP$

(2) $L \in co-NP \Leftrightarrow \bar{L} \in NP$

(1) $\wedge$ (2) $\Leftrightarrow \forall L' \in NP \hookrightarrow \bar{L'} \in NP \Rightarrow L' \in co\text{-}NP$
Отсюда $NP = co\text{-}NP$

Задача 6

1)Выберем позиции для 5 единиц (орлы), остальные 5 позиций заполним нулями (решки). Вероятность есть отношение числа благоприятствующих событий к числу всех событий (для всех пунктов). Тогда $P = \frac{C_{10}^5}{2^{10}} = \frac{63}{256}$
2)Аналогично, $P = \sum_{k=6}^{10} \frac{C_{10}^k}{2^{10}} = frac193512$
3)Выбор первых пяти символов определяет всю десятку: $P = \frac{2^5}{2^{10}} = \frac{1}{32}$
4)Считаем вероятность противоположного события, когда орлов выпало от нуля до трех раз. Пусть у нас есть длинная цепочка, начнем расставлять на первые позиции 1 и 0 так, чтобы единиц подряд не было 4 и

более. Вариантов начал разных 4:0 $\cdots$, 10 $\cdots$, 110 $\cdots$, 1110 $\cdots$. Многоточия рассматриваются также, так как перед ней ноль. Складывая предыдущие четыре числа продолжаем рекурентный ряд: 2 4 8 15 29 56 108 208 401 773. Тогда вероятность исходного события равна $\frac{2^{10}-773}{2^{10}} = \frac{251}{1024}$

Задача 7

(i) $B =$ сумма равна 7 $A =$ на первой кости 6

$$P(B) = \frac{6}{6 \cdot 6} = \frac{1}{6}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{B} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{1/6 \cdot 1/6}{1/6} = \frac{1}{6}$$

(ii) $E(max\{x_1, x_2\}) + E(min\{x_1, x_2\}) = E(max\{x_1, x_2\} + min\{x_1, x_2\}) =$
$= E\left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{|x_1 - x_2|}{2}) + \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{|x_1 - x_2|}{2}\right) = E\left(x_1 + x_2\right) =$
$= \sum_{k=2}^{12} kP(x_1 + x_2 = k) = \frac{2}{36} + \frac{3 \cdot 2}{36} + \frac{4 \cdot 3}{36} + \frac{5 \cdot 4}{36} + \frac{6 \cdot 5}{36} + \frac{6 \cdot 7}{36} + \frac{8 \cdot 5}{36} +$
$\frac{9 \cdot 4}{36} + \frac{10 \cdot 3}{36} + \frac{11 \cdot 2}{36} + \frac{12}{36} = \frac{58}{9} = 6\frac{4}{9}$

(iv) Независимость равносильна $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
А-четное число, В - кратное трем, $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cap B) =$
$= P($выпало 6$) = \frac{1}{6}$. Т. е. события независимы.

v На n вершинах может быть C_n^2 возможных ребер. Тогда возможных графов $2^{C_n^2} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. При этом на n вершинах простых циклов может быть $\frac{n!}{2n}$, т. к. каждая перестановка соответствует простому пути, но n сдвигов перестановки и инверсия каждой задают один путь. Тогда вероятность того, что случайный граф - простой цикл с учетом формулы Стирлинга при больших $n, n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$

$$\frac{(n-1)!}{2^{0.5n(n-1)+1}} \sim \frac{\sqrt{2\pi(n-1)}(n-1)^{(n-1)}e^{-n+1}}{2^{0.5n(n-1)+1}} \sim e^{-n+1-0.5n(n-1)\ln 2+(n-1)\ln{(n-1)}+0.5\ln(2\pi(n-1))}$$

Что стремится к нулю при $n \to \infty$

Задача 8

Пусть в первой урне a белых и b черных шаров, а во второй x белых и y черных. Тогда $a+b=x+y$ A $=$ (взятые из первой урны n шаров белые) и B $=$ (взятые n шаров из второй урны все либо белые, либо все черные).

$$P(A)=\left(\frac{a}{a+b}\right)^n, P(B)=\left(\frac{x}{x+y}\right)^n+\left(\frac{y}{x+y}\right)^n \Leftrightarrow x^n+y^n=a^n(a\leq x+y)$$

По теореме Ферма при $n\geq 3$ это уравнение не имеет натуральных решений. Поэтому единственным решением являются два случая: в первой урне все шары белые, а во второй либо все черные, либо все белые.

Задача 9

Рассмотрим две комбинации нулей и единиц длины $n+1$: $<\cdots 110>$ и $<\cdots 101>$. Найдем вероятность того, что среди первых n символов последовательности $<\cdots 110>$ нет тройки 110, а при дописывании еще одного нуля она появляется (событие A) и того же для тройки 101 при дописывании 1 (событие B). Тогда

$$P(A)=1-\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{[n/3]}K_1(i)$$

Где $K_1(i)$ есть количество комбинаций с i тройками 110). Аналогично,

$$P(B)=1-\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{[n/2]}K_2(i)$$

Кроме того, что во второй сумме элементов больше, также верно, что $K_1(i)\leq K_2(i)\ \forall i\in N$. Тогда $P(A)>P(B)$, значит, тройка 101 встретится раньше с большей вероятностью.

Задача 10

(i)Т.к. с помощью генератора получаем пары $00,10,01,11$ с равными вероятностями $\dfrac{1}{4}$,то чтобы получить нуль, запустим дважды генератор и, если получим 00, то вернем 0 (получается вероятность 1/3), при 11 не возвращаем ничего и повторяем процедуру, иначе вернем 1 (вероятность 2/3). В худшем случае алгоритм ничего не будет выдавать, а в лучшем вернет сразу нужную цифру с нужной вероятностью (при печатании подряд n символов их соотношение будет стремится к $1:2$ при $n \to \infty$)

(ii) Чтобы генерировать 0 и 1 с равной вероятностью, заметим что с равной вероятностью $\frac{2}{9}$ в новом генераторе получаются пары 10 и 01 (пусть они соответсвуют 1 и 0). Тогда дважды запустив новый генератор и получив 00 и 11 ничего не возвращаем и повторяем запуск, иначе в зависимости от результата вернем 1 или 0.