Задача 1

Посчитаем произведение матриц

$$A = \frac{1}{n} M_n(w) M_n(w^{-1}) = \left[\sum_{k=0}^{n-1} w_n^{ik} w_n^{-kj} \right]_{i,j=0\cdots n-1} = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(w_n^{i-j} \right)^k \right]_{i,j=0\cdots n-1}$$

Т. к. i и j меньше n, то если $i = j$, то сумма равна n (элемент на диагонали матрицы), иначе она равна нулю по лемме 3 о сложении из файла Горбунова Э. Тогда $A = I_n$ и формула для обратной матрицы верна. Теми же рассуждениями о сумме получаем

$$[M_n^2(w)]_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} w^{ik} w^{kj} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(w^{i+j} \right)^k = \begin{vmatrix} 0, \ if \ (i+j) \neq 0 \ mod \ n \\ n, \ if \ (i+j) = 0 \ mod \ n \end{vmatrix}$$

$$M_n^2(w) = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & n & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_n^4(w) = \left(M_n^2(w) \right)^2 = n^2 I_n$$

Задача 2

y_A обозначим вектор значений многочлена $A(x)$ и y_B аналогично.
$a_A = (2\ 3\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)$, $a_B = (2\ 0\ 3\ 3\ 0\ 0\ 0\ 0)$ — векторы их коэффициентов. При рекурсивном спуске вычисления произведения матрицы Вандермонда на вектор считаем размер метрицы 2 константой.
$a_1 = (2\ 0), a_2 = (0\ 0), a_3 = (3\ 0), a_4 = (1\ 0),$
$b_1 = (2\ 0), b_2 = (3\ 0), b_3 = (0\ 0), a_4 = (3\ 0$

$M_2 a_1 = (2\ 2)^T$, $M_2 a_2 = (0\ 0)^T \Rightarrow M_4 (2\ 0\ 0\ 0)^T = (2\ 2\ 2\ 2)^T$
$M_2 a_3 = (3\ 3)^T$, $M_2 a_4 = (2\ 2)^T \Rightarrow M_4 (3\ 1\ 0\ 0)^T = (3\ 3\ 3\ 3)^T + (1\ i\ -1\ -i)^T = = (4\ 3+i\ 2\ 3-i)^T$

$$y_A = M_8 (2\ 3\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)^T = (2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2)^T +$$

$$+ (4;\ \frac{1}{\sqrt{2}}(3+i)(1+i);\ 2i;\ \frac{1}{\sqrt{2}}(3-i)(i-1);\ -4;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(3+i)(1+i);\ -2i;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(3-i)(i-1)) =$$

$$= (6;\ 2+\sqrt{2}+2\sqrt{2}i;\ 2+2i;\ 2-\sqrt{2}+2\sqrt{2}i;\ -2;\ 2-\sqrt{2}-2\sqrt{2}i;\ 2-2i;\ 2+\sqrt{2}-2\sqrt{2}i)$$

По тем же правилам получаем для второго многочлена

$$y_B = M_8 (2\ 0\ 3\ 3\ 0\ 0\ 0\ 0)^T =$$

$$(8;\ 2-3/\sqrt{2}+3i+3i/\sqrt{2};\ -1-3i;\ 2+3/\sqrt{2}-3i+3i/\sqrt{2};\ 2;\ 2+3/\sqrt{2}+3i-3i/\sqrt{2};\ -1+3i;\ 2-3/\sqrt{2}-3i-3i/\sqrt{2})$$

Пусть $A(x)B(x) = C(x)$. Почленно перемножив получаем y_C

$$(48;\ -9-4\sqrt{2}+7\sqrt{2}i-3i;\ 4-8i;\ -9+4\sqrt{2}+7\sqrt{2}i+3i;\ -4;\ -5+7\sqrt{2}+3i-10\sqrt{2}i;\ 4+8i;\ -5-7\sqrt{2}-3i-10\sqrt{2}i)$$

Далее аналогично перемножаем $a_C = \frac{1}{8} M_8(w^{-1}) y_C = (4; 6; 6; 17; 9; 3; 3; 0)^T$

Задача 3

Решим данную задачу, разделяя ее на каждом шаге рекурсивного спуска на две подзадачи равного размера (для этого предположим, что n есть степень двойки, а затем, используя монотонность числа операций $T(n)$ и приблизив n степенями двойки получим тот же результат для произвольного n). На каждом шаге рекурсивного подьема вычисляем произведение двух многочленов :

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta\left(\frac{n}{2}\log\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{\log_2 n}(\log n - k\log 2) = \frac{1}{2}n\log^2 n - \frac{\log 2}{2}n\sum_{k=0}^{\log_2 n}k =$$

$$= \frac{1}{2}n\log^2 n - \frac{\log 2}{2}n\log n(\log n + 1) = \Theta(n\log^2 n)$$

Задача 4

$F-$ матрица Фурье, Λ есть диагональная матрица из собственных векторов циркулянтной матрицы C. По формуле для собственных значений матрицы C:
$\lambda_i = c_0 + c_1(w_n^i) + c_2(w_n^i)^2 + \cdots + c_{n-1}(w_n^i)^{n-1}$ и $w = i$ получаем $\lambda_0 = 15, \lambda_1 = -3-6i, \lambda_2 = -5, \lambda_3 = -3+6i$
$Cx = b \Rightarrow x = C^{-1}x$.С семинара $FC = \Lambda F \Rightarrow C = F^{-1}\Lambda F \Rightarrow C^{-1} = F^{-1}\Lambda^{-1}F \Rightarrow x = F^{-1}\Lambda^{-1}Fb$, что вычислим в порядке $x = F^{-1}(\Lambda^{-1}(Fb))$ по ДПФ:

$$x = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -i & -1 & i\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & i & -1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{15} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-1}{3+6i} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{-1}{5} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6i-3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & i & -1 & -i\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -i & -1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16\\ 8\\ 4\\ 2\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -i & -1 & i\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & i & -1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{15} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-1}{3+6i} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{-1}{5} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6i-3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30\\ 12+6i\\ 10\\ 12-6i\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -i & -1 & i\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & i & -1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ (-8+6i)/5\\ -2\\ (-8-6i)5\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\ 8\\ 4\\ 2\end{pmatrix}$$

Задача 5

1)$[FFT(x)]_i = [Fx]_i = \sum_{k=0}^{n-1} x_k(w_n^i)^k = \lambda_i -$ координата вектора (равна собственному значению матрицы $circ(x)$).

2)$[FFT(y)]_i = [Fy]_i = \sum_{k=0}^{n-1} y_k(w_n^i)^k = b_i$ аналогично

3)$\Lambda = diag(\lambda_i)$; $[FFT(x*y)]_i = [Fcirc(x)y]_i = [\Lambda Fy]_i = \lambda_i \cdot [Fy]_i = \lambda_i b_i$

Задача 6

Транспонируем равенство $CM_n = M_n\Lambda \Rightarrow M_nC^T = \Lambda M_n$, где

$$C^T = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_n & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \vdots & \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{pmatrix}$$

В последнем равентсве вычислим первый столбец в каждом произведении соответсвенно:

$$M_n(c_0, c_n, c_{n-1}, \cdots, c_1)^T = (\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)^T. \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}M_n$$

В силу того, что собственные вектора матрицы сохраняются при ее транспонировании, то утверждение доказано.

$$\text{С помощью БПФ вычисляем: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ -3-4i \\ -3 \\ -3+4i \end{pmatrix}$$

Задача 7

Для каждого элемента $i \in A$ $a_i = 1$, иначе $a_i = 0$.
Умножим за $O(m\log m)$ $(a_1x + \cdots + a_mx^m)(a_1x + \cdots + a_mx^m) = \sum_{k=2}^{2m} p_kx^k$. Если коэффициент p_k ненулевой, то $k \in A + A$, т. к. $p_k \neq 0 \Rightarrow \exists a_i \neq 0, a_j \neq 0 : i + j = k$, т. е. действительно $k \in A$.

Задача 9

За $O(n\log n)$ по ДПФ найдем $\{y_k\}_{k=0}^{n-1}$, а сумму мнимых и действительных частей считаем за линейное время (один проход по вектору). В итоге, решили за $O(n\log n) = o(n^2)$.