Задача 1

В исходной задаче обозначим: $x = x_1, y = x_2$.

$$y_1(2x_1 + x_2) + y_2(x_1 + 3x_2) \le 3y_1 + 5y_2$$

$$x_1(2y_1 + y_2) + x_2(y_1 + 3y_2) \le 3y_1 + 5y_2 = f$$

$$\text{Двойственная задача:} \begin{vmatrix} 3y_1 + 5y_2 \to min \\ 2y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 + 3y_2 = 1 \\ y_1 \ge 0 \\ y_2 \ge 0 \end{vmatrix}$$

Решаем двойственную задачу: $f = 3y_1 + 5y_2 = (3y_1 + 4y_2) + y_2 = 2 + y_2 \Rightarrow f_{min} = 2$. В силу того, что функция f является ограничением сверху на искомое выражение в прямой задаче, то если найдем минимальное её значение, то для интересующей нас функции $g = x_1 + x_2$ будет найдена минимальная верхняя граница. Т. к. для значения $d = max\{g\}$ из ограничений прямой задачи можно вывести $g \le d$, а минималььным $d : g \le d$ является f_{min}, то $g_{max} = f_{min}$.
Отсюда оптимальное значение функции в прямой задаче равно 2.

Задача 2

Каждому ребру присвоим индивидуальную переменнную x_j, равную потоку через это ребро. Если заданы пропускные способности ребер c_j, то запишем неравенства $x_j \le c_j$. Для каждой вершины v, с множеством входящих ребер In и множеством выходящих ребер Out запишем по одному неравенству $\epsilon_v \cdot \sum_{k \in In} x_k = \sum_{i \in Out} x_i$. Пусть s является истоком и t — стоком, ребра S выходят из истока, ребра T входят в сток. Тогда добавим к ограничениям уравнение $\sum_{k \in S} x_k = \sum_{i \in T} x_i$. В полученной задаче линейного программирования, решаемой за полином времени, нужно максимизировать функцию $f = \sum_{i \in T} x_i$.

Задача 3

Нам необходимо минимизировать значение величины $f = max|ax_i + by_i + c|\ \forall i : 1 \le i \le 7$. Решим систему:

$$\begin{vmatrix} f \to min \\ \forall\ k(1 \le k \le 7)\ ax_k + by_k + c \le f \\ \forall\ k(1 \le k \le 7)\ -f \le ax_k + by_k + c \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} f \to min \\ ax_k + by_k + c - f \le 0 \\ ax_k + by_k + c + f \ge 0 \end{vmatrix}$$

Значит найдем значения переменных a, b, c, f, доставляющие минимум f, которые и будут ответом. Для указанной сиситемы точек вспомогательная ЛП:

$$\left|\begin{array}{c} f \to min \\ a+3b+c-f \le 0 \\ 2a+5b+c-f \le 0 \\ 3a+7b+c-f \le 0 \\ 5a+11b+c-f \le 0 \\ 7a+14b+c-f \le 0 \\ 8a+15b+c-f \le 0 \\ 10a+19b+c-f \le 0 \\ a+3b+c+f \ge 0 \\ 2a+5b+c+f \ge 0 \\ 3a+7b+c+f \ge 0 \\ 5a+11b+c+f \ge 0 \\ 7a+14b+c+f \ge 0 \\ 8a+15b+c+f \ge 0 \\ 10a+19b+c+f \ge 0 \end{array}\right|$$

Задача 4

Путь через все вершины с увеличением x_3 указан на чертеже номерами вершин в порядке их обхода. Из чертежа получаем очевидный факт, что порядок обхода вершин не зависит от ε, потому что $0 < \varepsilon < 0.5$. Т. е. для любого ε есть такой путь.

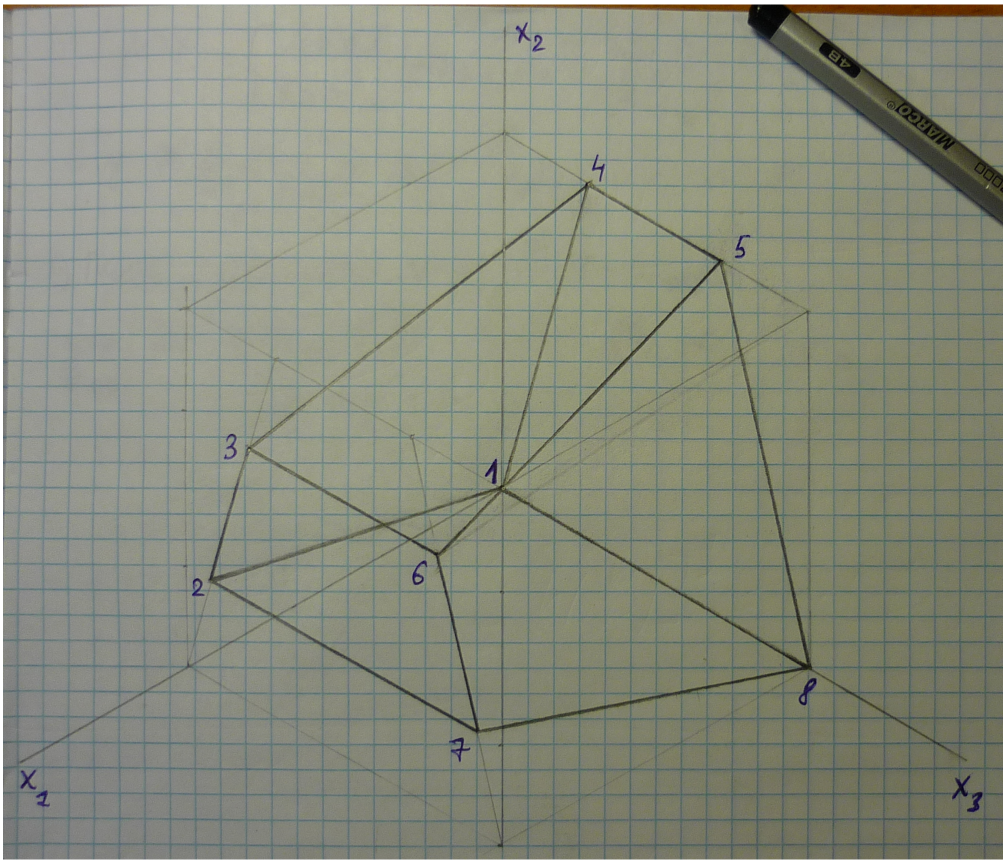

Рис. 1: Фигура при $\varepsilon = \frac{2}{7}$ из задачи №4

Задача 5

Доказательство в две стороны:

1) Пусть система $\left|\begin{matrix} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{matrix}\right|$ совместна. Покажем, что тогда система $\left|\begin{matrix} A^T y \geq 0 \\ y \geq 0 \\ b^T y < 0 \end{matrix}\right|$ несовместна.
Из первой системы получаем $b^T \geq x^T A^T$ и, в силу её совместности, $\exists x$, удовлетворяющий ей.
Предположим, что вторая система совместна, тогда
$\forall y \geq 0 : A^T y \geq 0 \to b^T y \geq x^T(A^T y) \geq 0 \Rightarrow$ невыполнено последнее неравенство второй системы, значит, она несовместна.

(второй вариант того же по сути:)
1.1) Пусть совместна вторая система, покажем, что первая система несовместна:
$\exists y$, удовлетворяющий второй системе. Предположим, что первая система совместна. Тогда
$\exists x \geq 0 :< Ax, y > \leq < b, y >= b^T y < 0$, но $< Ax, y >=< x, A^T y > < \ 0$ противоречит с тем, что $x \geq 0; A^T y \geq 0$, т. е. $< x, A^T y > \geq \ 0$. Тогда первая система не совместна.
(тут $< a, b >$ - сумма покомпонентных произведений векторов a и b)

2) Теперь получим из несовместности первой системы совместность второй системы. Из несовместности первой системы имеем $\forall x \geq 0 \hookrightarrow Ax > b$. Очевидно, что $\exists y > 0 :< x, A^T y >=< Ax, y > > < b, y >$ (это верно для любого такого y). Если $A^T y < 0$, то имеем неверное утверждение $\exists y > 0 \ \forall x \geq 0 \hookrightarrow < x, A^T y > > < b, y >$. Это так, поскольку для конкретного y подберем такой x, в котором координата, соответствующая какой-то отрицательной координате вектора $A^T y$ будет браться все больше и больше, что невозможно, потому что получаемая строгая верхняя оценка на постоянное число $< b, y >$ не может быть отрицательной и сколь угодно большой по модулю. Тогда $A^T \geq 0$. При $x = 0 \to 0 =< x, A^T y > > < b, y >$, т. е. $b^T y < 0$. ($y = 0$ не рассматриваем, поскольку он не является решением второй системы). В итоге, показана совместность второй системы.

Задача 6

1) Пусть первая система $\left|\begin{matrix} Ax \leq 0 \\ x > 0 \end{matrix}\right|$ совместна. Тогда верно $x^T A^T \leq 0$ и для $\forall y \geq 0 \to x^T A^T y \leq 0$. Если $A^T y > 0$, то поскольку $x > 0$, получаем ложное утверждение: $x^T A^T y > 0$. Значит, $A^T y \leq 0$ и вторая система $\left|\begin{matrix} A^T y > 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}\right|$ несовместна.

2) Пусть первая система несовместна. Тогда $\forall x > 0 \to Ax > 0 \Rightarrow x^T A^T > 0$, тогда для $y > 0$ ($y = 0$ не удовлетворяет второй системе) верно $x^T A^T y > 0$. Если $A^T y \leq 0$, то последнее утверждение неверно. Значит, $A^T y > 0$ и вторая система совместна.

Задача 7

Доказательством того, что исходная задача не совпадает в точности с двойственной к двойственной является следующий пример. Найдем двойственную задачу к задаче из семинара без использования модификации:

$$\left|\begin{matrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to max \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leq 7 \\ 8x_1 + 9x_2 + 10x_3 \geq 11 \\ x_1 \leq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{matrix}\right| \overset{\text{Двойственная}}{\Rightarrow} \left|\begin{matrix} 7y_1 - 11y_2 \to min \\ 4y_1 - 8y_2 + y_3 = 1 \\ 5y_1 - 9y_2 = 2 \\ 6y_1 = 10y_2 - y_4 = 3 \\ y_1 \geq 0 \\ y2 \geq 0 \\ y_3 \geq 0 \\ y_4 \leq 0 \end{matrix}\right|$$

Для нахождения двойственной к двойственной нужно ввести семь переменных x_i по одной для каждого ограничения. Тогда в ней будет семь переменнных, а в исходной задаче было три переменные. Поэтому они не совпадают.

При указанной на семинаре обработке простейших неравенств при вычислении двойственной к двойственной задаче число переменных получится такое же, как в исходной задаче, поскольку число «сложных» неравенств в двойственной задаче равно числу переменных в исходной задаче.