Задача 1

Наша цель — учеличить длину каждого дизьюнкта до 3-х, так чтобы новая КНФ была тождественно равна старой. Это выполнится, если удлинить каждый дизьюнкт так, что «длинный» дизьюнкт тождественно равен исходному. Добавим новую, отличную от всех имеющихся, переменную a в дизьюнкт длины 2:
$(x_1 \vee x_2) \to (x_1 \vee x_2 \vee a)$
Если это a равно 0, то новый дизьюнкт тождественен старому, иначе он равен 1. Чтобы не зависеть от значения a, заменим:
(1) $\quad (x_1 \vee x_2) \equiv (x_1 \vee x_2 \vee a) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \bar{a})$
Если дизьюнкт длины 1, повторим данную процедуру до получения тройных дизьюнктов:
(2) $\quad x_1 \equiv (x_1 \vee a) \wedge (x_1 \vee \bar{a}) \equiv (x_1 \vee a \vee b) \wedge (x_1 \vee \bar{a} \vee b) \wedge (x_1 \vee a \vee \bar{b}) \wedge (x_1 \vee \bar{a} \vee \bar{b})$

$$3\text{-}SAT \leq_p 3\text{-}CNF \quad \overset{def}{\Leftrightarrow} \quad \exists\ f_p(x) \equiv x : \forall x \hookrightarrow x \in 3\text{-}SAT \Leftrightarrow f_p(x) \in 3\text{-}CNF$$

В итоге, функция f_p, прочитывая формулу из входа, будет создавать новую формулу, которая тождественна исходной и длиннее её максимум в 23 раза (посимвольно), заменяя каждый дизьюнкт по правилам (1) и (2), т. е. f_p является полиномиальной. Ввиду того, что выполнимость сгенерированной формулы равносильна выполнимости исходной формулы, то необходимая сводимость показана.

Задача 2

(i) $\psi = x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3 \quad A_\psi = \{\{x_1, \bar{x}_1\}, \{\{x_2, \bar{x}_2\}, \{\{x_3, \bar{x}_3\}, \{x_1, x_2, \bar{x}_3\}\}$
Протыкающее множество — $\{x_1, x_2, \bar{x}_3\}$
(ii) $A_\chi = \{\{x_1, \bar{x}_1\}, \{x_2, \bar{x}_2\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, \bar{x}_2\}, \{\bar{x}_1\}\}$

Дополняем КНФ до тождественной добавив дизьюнкты вида $a \vee \bar{a}$ для каждой из n переменных.

Пусть КНФ выполнима. Будем выбирать из каждого дизьюнкта в преобразованной КНФ по одной переменной (x или $\bar{x}$), которая равна единице в выполняющем наборе и помещать их в наше протыкающее множество. Т. к. для каждой переменной есть дизьюнкт $a \vee \bar{a}$, то из каждой такой пары либо переменная, либо ее отрицание попадет в протыкающее множество, т.е. в нем будет n элементов, т. к. из выполнимости КНФ следует её непротиворечивость, т.е. нет пар $a, \bar{a}$.

Пусть у нас есть протыкающее множество из n элементов. Если в нем есть пара $a, \bar{a}$, то для какой то из n переменных в этом протыкающем множестве нет ни ее, ни ее отрицания, что невозможно, т. к. тогда протыкающее множество не пересекается с дизьюнктом где есть эта переменная в паре со своим отрицанием. Т. е. пар $a, \bar{a}$ нет в нашем протыкающем множестве, значит, в нем для каждой переменной есть либо она, либо ее отрицание и это множество пеерсекается с каждым дизьюнктом, обозначим (1). Пусть каждая переменная их протыкающего множества равна 1. В силу (1) получаем, что протыкающее множество - это выполняющий набор для КНФ, т.к. каждый диьюнкт будет равен 1 и противоречия в таком наборе нет, т.е. КНФ выполнима.

Задача 3

(i) Граф строится однозначно, поэтому не буду повторяться. $n_{new}(\psi) + 2m_{new}(\psi) = 5$. Вершинное покрытие $\{x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, x_2, x_3\}$

1)Дополненная по правилам из задачи №1 КНФ тождественна полученной ровно-3-КНФ.

2)Пусть ровно 3 КНФ выполнима. Тогда сущесвует выполняющий непротиворечивый набор, при котором в каждом дизьюнкте, а значит, и треугольнике, ему соответствующем, в графе ровно по одной веришине равной 1. Добавим вершину графа из треугольников в вершинное покрытие, если значение вершины 0, и из пар a—$\bar{a}$, если значение вершины равно 1. Т.к. набор непротиворечив, то среди пар будут отмечены ровно n вершин. В каждом треугольнике отмечено по две вершины в каждом из m треугольников. Каждое ребро при таком выборе вершин инцидентно хотя бы одной выбранной вершине, т. е. выбранное множество вершин — это вершинное покрытие и в нем есть $n + 2m$ веришины.

$(*)$ Пусть дано вершинное покрытие мощности $n + 2m$. Оно таково, что из каждого дизьюнктого треугольника в него входят хотя бы две вершины, т. к. иначе одно из ребер, образующих треугольник, не будет иметь ни одной инцидентной вершины, входящей в вершинное покрытие.

Пусть в каждом треугольнике ровно по две вершины входят в покрытие. Посчитаем их равными 0. Из пары a—$\bar{a}$, можем выбрать еще ровно по 1 вершине, которые посчитаем равными 1. Если из какой-то пары включим в покрытие обе вершины, то останется пара вершин a—$\bar{a}$, ребро между которыми не будет иметь ни одной инцидентной вершины из вершинного покрытия, что невозможно.

Если хотя бы в одном треугольнике все три вершины входят в вершинное покрытие, то останется не больше $n-1$ места для $2n$ парных вершин a—$\bar{a}$ графа. Тогда останется какая-то пара вершин a—$\bar{a}$, ребро между которыми не будет иметь ни одной инцидентной вершины из вершинного покрытия, что невозможно.
Получаем, что набор переменных реализуемый данным вершинным покрытием будет выполняющим набором для соответствующей КНФ $(*)$.

(ii) Для графа G_χ $\;n_{new}(\psi) + 2m_{new}(\psi) = 20$. Пусть есть вершинное покрытие мощности 20. Из $(*) \cdots (*)$ получаем противоречие, как и для меньшего числа вершин, ч. т. д.

Задача 4

(i) $m = 1$, в графе $\tilde{G_\psi}$ три одиночные вершины и есть клика размера 1.
(ii) Предположим, в этом графе есть клика размера 8. Т.к. ребра соединяют вершины из разных долей (т.е. разных дизьюнктов), которые не являются отрицанием друг друга, то приняв за 1 значения этих верщин получим непротиворечивый выполняющий набор для КНФ χ. Но она невыполнима, значит, нет указанной клики и клики большего размера, т.к. из существования таковой следует существование клики размера 8.

Доказательство сводимости полностью аналогично подобному с семинара ($CNF \leq CLIQUE$), дизьюнктам соответствуют доли в графе, число долей равно числу вершин в клике.

Задача 5

(i) $\psi = x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3$
$\tilde{\psi} = x_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3 \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{d}) \wedge (x_2 \vee \bar{d}) \wedge (\bar{x}_3 \vee \bar{d})$

x_1	x_2	$\bar{x}_3$	max кол-во выполнимых дизьюнктов
0	0	0	6 $(d = 0)$
0	0	1	7 $(d = 0)$
0	1	0	7 $(d = 0)$
0	1	1	7 $(d = 0)$
1	0	0	7 $(d = 0)$
1	0	1	7 $(d = 0)$
1	1	0	7 $(d = 0)$
1	1	1	7 $(d = 0)$

(ii) По таблице получаем, что получить больше kq выполнимых дизьюнктов нельзя.

Инвариант преобразования — максимальное число выполнимых дизьюнктов среди десяти полученных $q = 7$, если соответствующий исходный дизьюнкт выполним, и равно 6 иначе.

Сводимость: каждый дизьюнкт исходной РОВНО-3-КНФ преобразуем по правилу из файла NPc в 10 дизьюнктов новой КНФ. По таблице получаем, что выполнимость исходного дизьюнкта равносильна тому, что число новых выполнимых дизьюнктов при подстановке нужного d равно 7, иначе равно 6. Отсюда получаем, если 3-КНФ из n дизьюнктов выполнима $\Leftrightarrow$ выполнимы все дизьюнкты в ней и всего выполнимых дизьюнктов в 2-КНФ будет $7n$, иначе если исходная КНФ невыполнима $\Leftrightarrow$ в ней есть хотя бы один невыполнимый дизьюнкт $\Leftrightarrow$ всего выполнимых дизьюнктов в 2-КНФ будет не больше $7n-1$. Т. к. приведение к РОВНО-3-КНФ из 3-КНФ полиномиально от количества символов в исходной формуле и полиномиальны построение 2-КНФ и подсчет выполнимых дизьюнктов в ней, то получена нужная полиномиальная сводимость.

Задача 7

Найдем в каком случае построенная в приведении $Circuit\text{-}SAT \leq 3\text{-}CNF$ формула выполнима. Когда она равна 1, то $y_n = 1$. При этом дизьюнкт $(y_n = \cdots)$ равен 1, когда равна единице правая часть и т. д. Получается, пытаясь найти выполняющий набор для этой формулы, мы переходя от дизьюнкта к дизьюнкту, разворачиваем формулу, которая равносильна схеме и найдем её выполняющий набор, являющийся частью искомого. Обратно, если есть набор выполяющий формулу, равносильную схеме, то чтобы получить выполняющий набор для построенной формулы, всем остальным переменным нужно присвоить 1. Получили, что эти две формулы равновыполнимы.

Задача 6

Основано на идее из ответа отсюда $mystackoverflow$
Если граф можно раскрасить, добавим три новые вершины с тремя разными отметками. Переберем для каждой вершины три возможных цвета, подсоединив к ней две какие-то вершины из нового треугольника и запустим процедуру проверки. Найдя подходящий цвет переходим к следующей вершине. Т. к. раскраска исходного графа есть, то добавление треугольника и двух ребер не изменит ее. Полиномиальных проверок будет полиномиальное число от числа вершин исходного графа. Т. е. получен нужный нам алгоритм.