Задача 1

(3) Пусть n — четное число, т.е. $n = 2k$. Тогда для диофантова уравнения уравнения из условия число решений равно $A_n = \lfloor \frac{n}{6} \rfloor - I(n \; mod \; 6 = 0)$, где $I()$ - индикатор, равный 1, если утверждение в скобках истинно и равный 0, если оно ложно. Такой ответ следует из того, что выбор y однозначно определяет x в уравнении. А число натуральных y, удовлетворяющих уравнению, получаем из того, что y - четное. Т.е. если разбить число n на шестёрки, то каждая из них выражается либо через $2x$, либо $3y$, и также учитываем, что x и y не равны нулю.

Аналогично, для нечетных $n = 2k+1$ сведением к предыдущему рассуждению получаем $A_n = \lfloor \frac{n-3}{6} \rfloor - I((n-3) \; mod \; 6 = 0) + 1$

Обьединив эти ответы, можно записать для произвольного n: число решений ранво $A_n = \lfloor \frac{1}{6}(n - 3 \cdot I(n \; mod \; 2 = 1)) \rfloor + I(n \; mod \; 2 = 1) + I((n - 3 \cdot I(n \; mod \; 2 = 1) \; mod \; 6 = 0))$

(2) Из формулы для A_n получаем $A_n = \theta(n)$

(1) Если подставлять в выражение $2x + 3y$ всеможножные натуральные числа x и y (неравные нулю), то получим все n, удовлетворяющие условию. Тогда, т.к. при $n = 0$ задача не рассматривается, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n = \sum_{x,y \in N} x^{2x+3y} = \sum_{x=1}^{\infty} x^{2x} \sum_{y=1}^{\infty} x^{3y} = \frac{x^2}{1-x^2} \cdot \frac{x^3}{1-x^3} = \frac{x^5}{(1-x^2)(1-x^3)}$$

Задача 2

(1) Покажем, что $s_i \leq \frac{2}{3} s_{i-1}$
Т.к. $x_i > y_i$ на каждой итерации, то $x_{i-1} = a_{i-1} y_{i-1} + x_{i-1} \bmod y_{i-1}$, где $a_{i-1} \geq 1$
Преобразованиями получаем

$$x_i + y_i \leq \frac{2}{3}(x_{i-1} + y_{i-1}) \Leftrightarrow y_{i-1} + x_{i-1} \bmod y_{i-1} \leq \frac{2}{3} y_{i-1} + \frac{2}{3} x_{i-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_{i-1} \geq y_{i-1} + 3(x_{i-1} \bmod y_{i-1}) \Leftarrow x_{i-1} \geq 3(x_{i-1} \bmod y_{i-1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2a_{i-1} - 1) y_{i-1} \geq x_{i-1} \bmod y_{i-1}$$

Что верно, т.к. $x_{i-1} \bmod y_{i-1} < y_{i-1}$ и $(2a_{i-1}-1) \geq 1$

(2) Т.к. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ и $F_m < F_{m+1}$, то $\gcd(F_{m+2}; F_{m+1}) = \gcd(F_{m+1}+F_m; F_{m+1}) = \gcd(F_{m+1}; F_m) = \dots = \gcd(F_2; F_1) = \gcd(1;1) = 1$

Задача 3

При больших k $u_i \sim \dfrac{k}{4}$

$$\frac{k^3}{4^2} < G(k) = 4G\left(\frac{k}{4}\right) + \frac{k^3}{4^2} = \frac{k^3}{4^2}\sum_{k=0}^{\log_4 k}\frac{1}{4^{2k}} \leq \frac{k^3}{4^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{4^{2k}}$$

Т.к. последняя сумма убывающей геометрической прогрессии это константа, то получаем, что $G(k) = \Theta(k^3)$

Задача 4

(1)Количество открывающих и закрывающих скобок в правильной скобочной последовательности равны, значит, n — четное.

Из условия на префикс получаем, что в любой скобочной последовательности, удовлетворяющей условию, есть внешняя пара скобок. В противном случае последовательность будет состоять по крайней мере из двух не вложенных друг в друга скобочных последовательностей, а значит, существует префикс, не удовлетворяющий условию.

Число правильных скобочных последовательностей из $n-2$ скобок равно $\frac{2}{n}\mathrm{C}_{n-2}^{0.5n-1}$

Задача 5

Т.к. $T(n)$ — монотонная неотрицательная функция, то

$$10\frac{n^3}{\log n} \leq T(n) = 3T\left(\lceil\frac{n}{\sqrt{3}}\rceil - 5\right) + 10\frac{n^3}{\log n} \leq 3T\left(\frac{n}{\sqrt{3}}\right) + 10\frac{n^3}{\log n} \tag{1}$$

Для $G(n) = 3G\left(\frac{n}{\sqrt{3}}\right) + 10\frac{n^3}{\log n}$ по мастер-теореме (вариант 3) получаем:

$$G(n) = aG\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),\ \log_b a = 2 < c = 2.5,\ f(n) = \frac{10n^3}{\log n}$$

Т.к.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^c} = 10 \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2\sqrt{n}} = \infty$$

то $f(n) = \Omega(n^c)$ и т.к. выполнено условие регулярности:

$$\exists p < 1 : \quad 3f\left(\frac{n}{\sqrt{3}}\right) = \frac{10n^3}{\sqrt{3}\log\frac{n}{\sqrt{3}}} \leq p \cdot \frac{10n^3}{\log n} = pf(n) \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \exists p : 1 > p \geq \frac{\log n}{\sqrt{3}\log\frac{n}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\log\sqrt{3}}{\log n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

То получаем, $G(n) = \Theta(f(n)) = \Theta\left(\frac{n^3}{\log n}\right)$.

В силу (1) получаем $T(n) = \Theta\left(\frac{n^3}{\log n}\right)$.

Used Master – theorem link

Задача 6

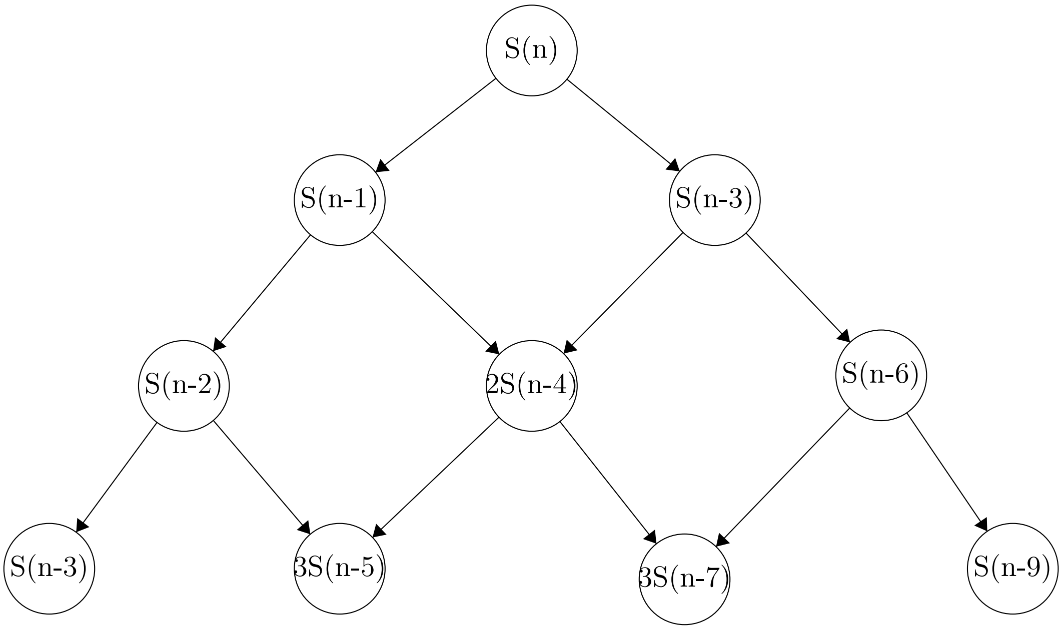
$$T(n) = T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{3n}{4}\right) + \Theta(n)$$

Принимая во внимание, что дерево рекурсивных вызовов данной процедуры будет неполным (т.е. с одной стороны аргумент быстрее приблизиться к константе нежели с другой), получаем оценки сверху и снизу, соответствующие высотам полных деревьев при делении аргумента на 4 и на $\frac{4}{3}$ соответственно:

$$n\sum_{k=0}^{\log_4 n}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^k \leq T(n) = 1 + \left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots \leq n\sum_{k=0}^{\log_{\frac{4}{3}} n}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^k$$

Отсюда получаем, что $T(n) = \Theta(n\log n)$

Задача 7



По дереву рекурсивных вызовов получаем для N_s — числа рекурсивных вызовов процедуры $S()$

$$\sum_{k=1}^{\frac{1}{3}(10^{12}-100)} 2^k \leq N_s(10^{12}) \leq \sum_{k=1}^{10^{12}-100} 2^k$$

$$2^{\frac{1}{3}(10^{12}-100))+1} - 2 \leq N_s(10^{12}) \leq 2^{10^{12}-99} - 2$$

Задача 9

При больших n целая часть от аргумента не вносит вклад в асимптотику, поэтому рассмотрим:

$$T(n) = nT\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

Найдем нижнюю оценку нашей рекуренты, оценив рекуренту $G(n)$, равную C при маленьком аргументе:

$$G(n) = nG\left(\frac{n}{2}\right) = C\prod_{k=0}^{\log_2 n} \frac{n}{2^k} = C\cdot\frac{n^{\log_2 n+1}}{2^{0.5\log_2 n(\log_2 n+1)}} = C\cdot\frac{n^{\log_2 n+1}}{n^{0.5(\log_2 n+1)}} = Cn^{0.5(\log_2 n+1)}$$

Т.е. $G(n) = \Theta(n^{0.5(\log_2 n+1)})$ и $G(n) \leq T(n) \quad \forall n \in N$

Теперь верхнюю оценку в предположении, что $n = 2^p$:

$$T(n) = nT\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) = n\left(T\left(\frac{n}{2}\right) + O(1)\right) = n\left(\frac{n}{2}\left(T\left(\frac{n}{2^2}\right) + O(1)\right) + O(1)\right) =$$

$$= O(1)n + O(1)n\frac{n}{2} + O(1)n\frac{n}{2}\frac{n}{2^2} + \cdots + O(1)n\frac{n}{2}\frac{n}{2^2}\cdots\frac{n}{2^{\log_2 n}} =$$

$$= O(2^p) + O(2^p 2^{p-1}) + O(2^p 2^{p-1} 2^{p-2}) + \cdots + O(2^p 2^{p-1} 2^{p-2} \cdots 2 \cdot 1) =$$

$$= O\left(2^{0.5p(p+1)} \cdot \left(2 + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^{0.5k(k+1)}}\right)\right) < O\left(2^{0.5p(p+1)} \cdot \left(2 + \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^k}\right)\right) <$$

$$< O\left(2^{0.5p(p+1)} \cdot \left(2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right)\right) = O\left(2^{0.5p(p+1)} \cdot (2+2)\right) = O(2^{0.5p(p+1)})$$

Т.к. $p = \log_2 n$, то $T(n) = O(2^{0.5\log_2 n(\log_2 n+1)}) = O(n^{0.5(\log_2 n+1)})$

В итоге, получаем, что $T(n) = \Theta(n^{0.5(\log_2 n+1)})$

Задача 8

Дерево рекурсии с высотой H будет несбалансированным для рекуренты (при больших n пренебрегаем округлением)
$T(n) = T(n - \sqrt{n}) + T(\sqrt{n}) + \Theta(n)$

Поэтому оценим высоты самой правой и самой левой его ветвей, т.е. высоты деревьев рекурсии рекурент (1) $T(n) = T(\sqrt{n}) + \Theta(n)$ и (2) $T(n) = T(n - \sqrt{n}) + \Theta(n)$
В случае (1) пусть высота равна h:

$$n^{\left(\frac{1}{2}\right)^h} = const \Leftrightarrow h = \frac{1}{\log 2}(\log\log n - const) \quad \text{т.е.} \quad h = O(\log\log n)$$

В случае (2) из того, что

$$\frac{1}{2}n \leq n - \sqrt{n} \leq 2n \text{ при больших n, то } n - \sqrt{n} = \Theta(n)$$

Для H получили оценки сверху и снизу.