ДЗ-3 по Теории вероятности
Попов Николай, 776 группа

Задача 1

Независимость случайных величин x и y $\Leftrightarrow P(x \in B_1, y \in B_2) = P(x \in B_1) \cdot P(y \in B_2)$ $(*)$. Пусть $a = max(x, y)$ и $b = min(x, y)$

$$F_a(t) = P\{max(x, y) \leq t\} = P(x \leq t, y \leq t) \overset{(*)}{=} P(x \leq t) \cdot P(y \leq t) = F_x(t) \cdot F_y(t)$$

$$F_b(t) = P\{min(x, y) \leq t\} = 1 - P\{min(x, y) > t\} = 1 - P(x > t, y > t) \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} 1 - P(x > t)P(y > t) = 1 - [1 - P(x \leq t)] \cdot [1 - P(y \leq t)] = 1 - (1 - F_x(t))(1 - F_y(t))$$

Задача 2

Поскольку $f_\xi > 0$ и всюду определена, то функция $F_\xi : F'_\xi = f_\xi$ - строго возрастает и всюду дифференцируема и $F_\xi : F'_\xi \neq 0$. Тогда можем воспользоваться формулой для нахождения плотности вероятности случайной величины $\eta = F_\xi(\xi)$.

$$f_\eta(t) = \frac{f_\xi(F_\xi^{-1}(t))}{f_\xi(F_\xi^{-1}(t))} = 1, \text{при } t \in [0, 1], \text{ т.к. } F_\xi(\bar{R}) \subset [0, 1]$$

Так как верно $\int_{-\infty}^{\infty} f_\eta(t)dt = 1$ и $\int_0^1 f_\eta(t)dt = 1$, то $f_\eta(t) = 0, \ t \notin [0, 1]$.
В итоге, $\eta \sim U[0, 1]$.

Задача 3

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Имеем $Y = \varphi(X) = X^2$, которая строго монотонна и непрерывно дифференцируема на каждом из интервалов $I_1 = (-\infty, 0)$ и $I_2 = (0, +\infty)$ и $\varphi(x) \neq 0, x \in I_k$. Введем на каждом из интервалов соответсвенно обратные функции $h_k(y) = \varphi^{-1}(y)$ на I_k. Тогда по формуле

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^{2} f_X(h_k(y)) \cdot |h'_k(y)| \cdot I_{D_k}(y)$$

где D_k– область определения функции $h_k(y)$, $I_{D_k}(y)$– индикатор принадлежности y множеству D_k, получаем

при $y > 0$ $f_Y(y) = \sum\limits_{k=1,2} f_X(h(y)) \left|\frac{d}{dy}h(y)\right| = |(\sqrt{y})'|\cdot f_X(\sqrt{y}) + |(-\sqrt{y})'|\cdot f_X(-\sqrt{y}) =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\pi\sigma} \cdot \left(\exp\left(-\frac{(\sqrt{y}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{(\sqrt{y}+\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\right)$$

и $f_Y(y) = 0$ при $y \leq 0$.

Задача 4

Длина основания равнобедренного треугольника равна $s = 2\sin\frac{\alpha}{2}$,
$\alpha \sim U[0, 2\pi]$.

При $y \in [0, 2] \hookrightarrow F_s(y) = P\left(2\sin\frac{\alpha}{2} \leq y\right) = P\left(\frac{\alpha}{2} \notin \left(\arcsin\frac{y}{2}; \pi - \arcsin\frac{y}{2}\right)\right) =$

$= P\left(\alpha \notin \left(2\arcsin\frac{y}{2}; 2\pi - 2\arcsin\frac{y}{2}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2\pi}\left(2\pi - 4\arcsin\frac{y}{2}\right) = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{y}{2}.$

При $y < 0 \hookrightarrow F_s(y) = 0$, при $y > 2 \hookrightarrow F_s(y) = 1$.