Попов Николай, 776 группа

1

Покажем:
$\exists\ a, h \in R : \sum_{k\in Z} P(\xi = a + kh) = 1 \Leftrightarrow \exists\ h > 0 : |\varphi_\xi(2\pi/h)| = 1$

$\rightarrow)$ Пусть верно первое утверждение. Возьмем h из него и подставим его во второе

$$|\varphi_\xi(t)| = |Ee^{it\xi}| \Rightarrow |\varphi_\xi(2\pi/h)| = |\sum_{k\in Z} P(\xi = a + kh)e^{i\frac{2\pi}{h}(a+kh)}| =$$

$$= |\sum_{k\in Z} P(\xi = a + kh)e^{i(2\pi k + 2\pi\frac{a}{h})}| = |\sum_{k\in Z} P(\xi = a + kh)e^{2\pi\frac{a}{h}i}| =$$

$$= |e^{2\pi\frac{a}{h}i}| \cdot |\sum_{k\in Z} P(\xi = a + kh)| = 1 \cdot 1 = 1$$

Получено второе утвеждение.

$\leftarrow)$ Пусть верно второе утверждение. Поскольку $|\varphi_\xi(2\pi/b)| = 1$, то комплексное число $\varphi_\xi(2\pi/b)$ лежит на окружности радиуса 1 и потому $\exists\ a \in R : \varphi_\xi(2\pi/b) = e^{ia\frac{2\pi}{b}}$. Так как $\varphi_\xi(2\pi/b) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi}{b}x} dF(x)$, где F - функция распределения ξ,то верно равентво:

$$e^{ia\frac{2\pi}{b}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi}{b}x} dF(x) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi}{b}(x-a)} dF(x) = 1 \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} cos[\tfrac{2\pi}{b}(x-a)]dF(x) + i\int_{-\infty}^{\infty} sin[\tfrac{2\pi}{b}(x-a)]dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} cos[\tfrac{2\pi}{b}(x-a)]dF(x) = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 - cos[\tfrac{2\pi}{b}(x-a)])dF(x) = 0 = E\eta$$

Для с.в. $\eta : \eta \geq 0\ \&\ E\eta = 0$ верно п.н. $\eta = 0$.

В нашем случае $\eta = 1 - cos[\frac{2\pi}{b}(\xi - a)] \Rightarrow cos[\frac{2\pi}{b}(\xi - a)] = 1$ п.н. $\Rightarrow$

$\frac{2\pi}{b}(\xi - a) = 2\pi n$ п.н. $\Rightarrow \xi = a + bn$ п.н. Доказано первое утверждение.

2

1) Функция не является характеристической функцией с.в., поскольку последняя является равномерной непрерывной (из чего следует просто непрерывность), но данная функция φ разрывна в точках T и -T.

2)После сглаживания в точках разрыва функция станет дифференцируемой, но все равно не будет равномерно непрерывной (условие не выполнится в окрестностях точек T и -T)(:/).

3

$\xi, \eta - iid \Rightarrow \xi, (-\eta)-$ независимые с.в.
$\varphi_\xi(t) = \varphi_\eta(t) = \varphi(t)$
$\varphi_{(-\eta)}(t) = Ee^{-it\eta} = \varphi_\eta(-t) \Rightarrow$ по свойтсву характеристической функции для произведения независимых с.в.:
$\varphi_{\xi+(-\eta)}(t) = \varphi_\xi(t) \cdot \varphi_\eta(-t) = \varphi(t) \cdot \varphi(-t)$

4

Вычисляемые интегралы Лебега равны интегралам Римана

a) $\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \int_0^{0.5} e^{2txi}dx + \int_{0.5}^1 e^{ti(2x-1)}dx = \frac{1}{2it}e^{it\cdot 2x}|_0^{0.5} + \frac{e^{-it}}{2it}e^{it\cdot 2x}|_{0.5}^1 =$

$= \frac{1}{2it}(e^{it} - 1) + \frac{e^{-it}}{2it}(e^{2ti} - e^{it}) = \dfrac{1}{ti}(e^{ti} - 1) = \dfrac{i}{t}(1 - e^{it})$

b) $\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \int_0^1 e^{it\ln x}dx = \int_0^1 x^{it}dx = \dfrac{1}{it+1}x^{it+1}|_0^1 = \dfrac{1-it}{1+t^2}$

c)$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \int_0^{1/3} e^{it}dx + \int_{1/3}^{2/3} dx + \int_{2/3}^1 e^{it}dx = \dfrac{1}{3}e^{it} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}e^{it} =$
$= \dfrac{1}{3}(2e^{it} + 1)$

Добавление к номеру 4 пункту с из ДЗ-6

Работаем в пространстве с.в. со скалярным произведением $\langle\xi,\eta\rangle = cov(\xi,\eta) = E\left(\overset{o}{\xi}\overset{o}{\eta}\right)$. (в прошлом ДЗ в способе 1 делал то же, но для нецентрированных с.в.)

$E[Y_2|X_1 = 5, X_2 = 3] = E[X_1 + X_2 + X_3|X_1 = 5, X_2 = 3] = E[X_1|X_1 = 5, X_2 = 3] + E[X_2|X_1 = 5, X_2 = 3] + E[X_3|X_1 = 5, X_2 = 3] = 5 + 3 + + E[X_3|X_1 = 5, X_2 = 3]$

Вычислим последнее слагаемое. Проектируем: $X_3 = A+B : A||X_1, B \perp X_1;\quad B = C + D : C \perp X_2, D||X_2 \Rightarrow X_3 = A + C + D$

$A = \frac{\langle X_3, X_1\rangle}{||X_1||^2}X_1, B = X_3 - A;\ = \frac{\langle B, X_2\rangle}{||X_2||^2}X_2;\ C = B - D$

$A = \frac{cov(X_1, X_3)}{V(X_1)}X_1 \Rightarrow A = \frac{7}{5}X_1;$

$B = X_3 - \frac{7}{5}X_1$

$D = \frac{X_2}{||X_2||^2}\left(\langle X_3, X_2\rangle - \langle X_1, X_2\rangle\right) = \frac{X_2}{V(X_2)}(cov(X_2, X_3) - cov(X_1, X_2))$

$D = X_2\frac{(7-2)}{5} = X_2$

$C = B - D = B - X_2$

$E(X_3|X_1 = 5, X_2 = 3) = E(A|X_1 = 5, X_2 = 3) + E(D|X_1 = 5, X_2 = 3) + E(C|X_1 = 5, X_2 = 3) = \frac{7}{5}\cdot 5 + 3 + E(C|X_1 = 5) = 10 + E(B - X_2|X_1 = 5) = 10 + E(B|X_1 = 5) - E(X_2|X_1 = 5) = 10 + E(B) - E(X_2|X_1 = 5) = 10 + E(X_2) - \frac{7}{5}E(X_1) = 10 + 1 - \frac{7}{5}\cdot 2 - E(X_2|X_1 = 5) = 11 - \frac{14}{5} - E(X_2|X_1 = 5) = (*)$

Аналогично через проекции найдем $E(X_2|X_1 = 5)$

$X_{||} = \frac{cov(X_1, X_2)}{V(X_1)}X_1 = \frac{2}{5}X_1;\ X_\perp = X_2 - \frac{2}{5}X_1$

$E(X_2|X_1 = 5) = E(\frac{2}{5}X_1|X_1 = 5) + E(X_\perp|X_1 = 5) = 2 + E(X_2 - \frac{2}{5}X_1) = 2 + 3 - \frac{4}{5} = 5 - \frac{4}{5}$

Тогда $(*) = E(X_3|X_1 = 5, X_2 = 3) = 11 - \frac{14}{5} - (5 - \frac{4}{5}) = 4$

В итоге, $E[Y_2|X_1 = 5, X_2 = 3] = 8 + E[X_3|X_1 = 5, X_2 = 3] = 8 + 4 = 12$
x