ДЗ-4 по Теории вероятности
Попов Николай, 776 группа

Задача 1

1)

a)$P(\xi = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ E_\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}k = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \ \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \ \lambda$

$E(\xi^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}k^2 = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k\lambda^{k-2}}{(k-1)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{(k-1)\lambda^{k-2}}{(k-1)!} + \dfrac{\lambda^{k-2}}{(k-1)!} \right)$

$= \lambda^2 e^{-\lambda} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right)' + e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} (e^{\lambda})' + \lambda = \lambda^2 + \lambda$

$V_\xi = E_\xi - E(\xi^2) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

b)$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$

$E_\xi = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = -x e^{-\lambda x}|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = -\dfrac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}|_0^\infty = \dfrac{1}{\lambda}$

$E(\xi^2) = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx = \dfrac{2}{\lambda} \left(\lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx \right) = \dfrac{2}{\lambda} E_\xi$

$V_\xi = \dfrac{2}{\lambda} \cdot \dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Задача 2

Пусть с.в. $\xi = \{$число остановок лифта$\}$

$F_i =$\{хотя бы один из n человек живет на i этаже\}

$\xi = \sum_{i=2}^{17} I(F_i)$

$P(I(F_i) = 1) = P(F_i) = 1 - P(\bar{F_1}) = 1 - \left(\dfrac{15}{16} \right)^n$

$E_\xi = E(\sum_{i=2}^{17} I(F_i)) = \sum_{i=2}^{17} E(I(F_i)) = 16 E(I(F_i)) = 16 \left(1 - \left(\dfrac{15}{16} \right)^n \right)$

Задача 3

a) Пусть $\forall i \hookrightarrow F(x) = P(X_i < x), F'(x) = f(x)$. Пусть $Y_n = max\{X_1, \cdots, X_{n-1}\}$

$F_n(x) = P(Y_n < x) = P(X_1 < x) \cdots P(X_{n-1} < x) = F^{n-1}(x),\ f_n(x) = (n-1)F^{n-2}f(x)$

$P(X_n > Y_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx \cdot \int_x^{\infty} f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} (n-1)F^{n-2}f(x)dx \cdot$
$\cdot(F(\infty) - F(x)) = (n-1)\int_{-\infty}^{\infty} F^{n-2}(1-F(x))f(x)dx = (n-1)\int_{-\infty}^{\infty} (F^{n-2} - F^{n-1}(x))dF(x) =$

$= (n-1)\int_0^1 (t^{n-2} - t^{n-1})dt = (n-1)\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$

b) Пусть случайная величина ξ={число рекордов}. Вероятность k-го рекорда равна $\frac{1}{k}$, поэтому (ввиду их независимости) имеем
$E_\xi = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\cdot 1 + \left(1 - \frac{1}{k}\right)\cdot 0\right) \simeq \ln n$

Задача 4

$x = d\operatorname{tg}\varphi;\ \varphi \sim U[0,\pi], f_\varphi(x) = \frac{1}{\pi}$
$F_x(t) = P(x < t) = P(d\operatorname{tg}\varphi < t) = P(\varphi < \operatorname{arctg}(t/d)) = \frac{1}{\pi}|\operatorname{arctg} t/d|$
$f_x(t) = F'_x(t) = sign(t)\frac{1}{d\pi}\cdot\frac{1}{1+t^2/d^2} = sign(t)\frac{1}{\pi}\cdot\frac{d}{t^2+d^2}$

$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} tf_x(t)dt = \frac{d}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|t|dt}{d^2+t^2} = \frac{d}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{d(t^2+d^2)}{d^2+t^2} =$
$= \frac{d}{2\pi}\lim_{t\to\infty} ln(t^2+d^2) = +\infty,$
$E(x^2) = \frac{d}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2dt}{d^2+t^2} = 1|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{d}\operatorname{arctg} t/d|_{-\infty}^{\infty} = +\infty$
$V_x = E(x^2) - (E_x)^2 = +\infty$

Задача 5

По формуле из предыдущего ДЗ можем найти

$f_{\xi^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}(exp(-\frac{(\sqrt{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}) + exp(-\frac{(\sqrt{x}+\mu)^2}{2\sigma^2}))$, где $\mu = 0, \sigma^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_{\xi^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} exp\left(-\frac{1}{2}x\right)$ при $x \geq 0$ Сделаем преобразование случайного вектора

$$(X = \xi^2, Y = \eta^2) \xrightarrow{\varphi} \left(T = \xi^2 + \eta^2, Z = \frac{\xi^2}{\xi^2 + \eta^2}\right)$$

ИСпользуя результат преобразования с семинара для суммы двух случайных величин получаем

$$f_{(Z,T)}(z,t) = \frac{1}{|I_{\varphi^{-1}(z,t)}|} f_{(X,Y)}(zt, t-tz) = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{zt(t-zt)}} exp^{-0.5zt} exp^{-0.5(t-zt)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}} \frac{e^{-0.5t}}{t^2} \Rightarrow f_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z,T}(z,t)dz = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{-0.5t}}{t^2} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z - z^2}} = \frac{1}{2t^2} e^{-\frac{1}{2}t}$$

Задача 6

a)

$$lim_{x_1, x_2 \to \infty} F(x_1, x_2) = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 f(x_1, x_2)$$

Переходя в полярные координаты вычисляем интеграл

$$\int_0^1 dr \int_0^1 d\varphi \cdot r \cdot \frac{c}{r} = 2\pi c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2\pi}$$

b)При $x \in [0, 1]$

$$f_{X_1}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X_1,X_2)}(x,y)dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right)$$

Для с.в. X_2 такая же маргинальная плотность распределения. Условная плотность распределния:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{log\left(\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{1-\sqrt{1-y^2}}\right)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Аналогично для второй с.в.

c)Поскольку X и У - независимы $\Leftrightarrow f_{(X,Y)} = f_X \cdot f_Y$, то эти с.в. являются зависимыми:

$$f_{X,Y} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq f_X \cdot f_Y = \frac{1}{4\pi^2} \log\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right) \log\left(\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{1-\sqrt{1-y^2}}\right)$$