Домашние 4-5

Основные задачи

1. Найдите матожидание и дисперсию

   (a) распределения Пуассона с константой λ (Poiss(λ)).

   (b) экспоненциального распределения с константой λ (Exp(λ)).

2. На первом этаже 17-этажного здания в лифт зашли n человек. Найти математическое ожидание и дисперсию числа остановок лифта, если каждый из вошедших (независимо от остальных) может с равной вероятностью жить на любом из 16 этажей.

   Указание: воспользуйтесь индикаторами случайных событий.

3. (№3.27) Пусть X_1 , X_2, ... — последовательность независимых одинаково распределенных с.в. с непрерывной функцией распределения. Будем говорить, что наблюдается рекордное значение в момент времени n, если $X_n > max\{X_1, ..., X_{n-1}\}$.

   a. Найти вероятность того, что рекорд зафиксирован в момент времени n. *Указание*: сначала найдите $\mathbb{P}\{X_1 > X_2\}$ из соображений симметрии.

   b. Найти мат. ожидание числа рекордов до момента времени n (включительно).

4. (№3.29) Рассмотрим $\mathbb{R}^2$. Пусть на оси ординат зафиксирована точка $(0, d)$. Выберем случайно и равновероятно угол φ и проведём через точку $(0, d)$ прямую под этим углом к оси ординат. Обозначим через X координату точки пересечения этой прямой с осью абсцисс. С.в. X имеет распределение Коши с параметром d. Найти плотность распределения, мат. ожидание и дисперсию X.

5. Пусть ξ и η – iid, имеющие стандартное нормальное распределение $N(0, 1)$, т.е. плотность каждого из них выражается по формуле

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$$

   Найти распределение с.в. $\xi^2 + \eta^2$.

   Указание: рассмотрите случайный вектор $\zeta = (\xi, \eta)^T$. Для него плотность вероятности будет $f_\zeta(x) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(x)$. Затем преобразуйте его так, чтобы одна из координат получилась $\xi^2 + \eta^2$ и воспользуйтесь теоремой о преобразовании плотности случайного вектора.

6. Двумерный случайный вектор $X = (X_1, X_2)^T$ имеет плотность распределения

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \ x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 \\ 0, \text{иначе} \end{cases}$$

   a. Найдите c.

   b. Найдите условные и маргинальные распределения его компонент.

   c. Являются ли они стохастически зависимыми? коррелированными?

Дополнительные задачи

1. В задаче 3:

(a) Пусть $Y_n = \mathbb{I}\{X_n > \max(X_1, \ldots, X_{n-1})\}$, т.е. индикатор рекорда. Показать, что $Y_1, Y_2, \ldots$ независимы в совокупности.

(b) Найти дисперсию числа рекордов до момента времени n.

(c) Показать, что если T – момент появления первого рекорда после момента времени 1, то $\mathbb{E}T = \infty$.

2. Дан n-мерный нормальный случайный вектор $X \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$. Представим его в виде $X = (Y, Z)$, где $Y \in \mathbb{R}^k,\ Z \in \mathbb{R}^{n-k}$. Тогда $m = (m_Y, m_Z)$, где $m_Y = \mathbb{E}Y,\ m_Z = \mathbb{E}Z$, и

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{YY} & \Sigma_{YZ} \\ \Sigma_{ZY} & \Sigma_{ZZ}, \end{pmatrix}$$

где $\Sigma_{YY} = \mathbb{V}Y,\ \Sigma_{ZZ} = \mathbb{V}Z,\ \Sigma_{YZ} = \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}Y)(Z - \mathbb{E}Z)\right] = \Sigma_{ZY}^T$.

(a) Покажите, что маргинальные распределения тоже нормальные: $Y \sim \mathcal{N}(m_Y, \Sigma_{YY}),\ Z \sim \mathcal{N}(m_Z, \Sigma_{ZZ})$.

(b) Найдите условное распределение Y при $Z = z \in \mathbb{R}^{n-k}$.