Попов Николай, 776 группа

1

a)В силу того, что случайные величины независимые и одинаково распределённые, получаем $E(\xi|\xi+\eta) = E(\eta|\xi+\eta)$
В силу линейности условного матожидания $E(\xi|\xi+\eta) + E(\eta|\xi+\eta) = E(\xi+\eta|\xi+\eta) = \xi+\eta \Rightarrow E(\xi|\xi+\eta) = E(\eta|\xi+\eta) = \dfrac{1}{2}(\xi+\eta)$
b)В силу того, что $\{\xi_i\}-$ iid, то переход $(*)$ верен.

$$E\left[\sum_{i=1}^n \xi_i | S_n = t_1, S_{n+1} = t_2, \cdots\right] = \sum_{i=1}^n E[\xi_i | S_n = t_1, S_{n+1} = t_2, \cdots] \overset{*}{=}$$

$$\overset{*}{=} n \cdot E[\xi_1 | S_n = t_1, S_{n+1} = t_2, \cdots]$$

С другой стороны

$$E\left[\sum_{i=1}^n \xi_i | S_n = t_1, S_{n+1} = t_2, \cdots\right] = E\left[S_n | S_n = t_1, S_{n+1} = t_2, \cdots\right] = t_1 \Rightarrow$$
$$E[\xi_1 | S_n = t_1, S_{n+1} = t_2, \cdots] = \frac{t_1}{n} \Rightarrow E[\xi_1 | S_n, S_{n+1}, \cdots] = \frac{S_n}{n}$$

2

Имеем вычисленное на семинаре значение для $S = \sum_{i=1}^N X_i$:
$E_S = E_N \cdot E_X$, где обозначено $E_X = E(X_i)\ \forall i$.
$V_S = E(S^2) - (E_S)^2$. Найдем $E(S^2)$ по формуле полного матожидания:

$$V(S^2) = E\left[E\left[\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)^2 |N\right]\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^N X_i^2 + \sum_{i\neq j}^N \sum_j^N X_i X_j\right]\right] =$$

$$= E\left[N \cdot E(X^2) + N(N-1)(E_X)^2\right] = E_N \cdot E(X^2) + E(N^2)\cdot(E_X)^2 - E_N \cdot (E_X)^2$$

Тогда $V_S = E_N \cdot E(X^2) + E(N^2)\cdot(E_X)^2 - E_N \cdot (E_X)^2 - (E_N)^2 \cdot (E_X)^2 =$

$$= (E_X^2) \cdot [E(N^2) - (E_N)^2] + E_N \cdot [E(X^2) - (E_X)^2] = (E_X^2) \cdot V_N + E_N \cdot V_X$$

3

$X \sim exp(\lambda) \Rightarrow f_x(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$

$$E[XY|X=t] = E[tY] = tE_Y = \frac{t}{\mu} \Rightarrow E[XY|X] = \frac{X}{\mu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E[E[XY|X]] = E\left[\frac{X}{\mu}\right] = \frac{E_X}{\mu} = \frac{1}{\mu\lambda}$$

и по свойствам дисперсии от линейного преобразования с.в.:

$$V[E[XY|X]] = V\left[\frac{X}{\mu}\right] = \frac{V_X}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2\lambda^2}$$

4

$\bar{x} \sim N(\bar{\mu}, \sum) \Rightarrow \bar{y} = A\bar{x} \sim N(A\bar{\mu}, A\sum A^T)$
Пусть ^{T} - первая строка матрицы А, тогда верно
$y_1 = a^T\bar{x} \sim N(a^T\bar{\mu}, a^T\sum a)$ (с семинара).

b) Возьмем $a = (1,1,1)^T \Rightarrow y_1 = x_1 + x_2 + x_3;\ a^T\bar{\mu} = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 6$

$$a^T\sum a = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2 & 7\\ 2 & 5 & 7\\ 7 & 7 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 56$$

Тогда $y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \sim N(6, 56)$

a)Аналогично, $a = (1,1,-1)^T,\ y_2 = a^T\bar{x} = x_1 + x_2 - x_3$

$$a^T\mu = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = 4$$

$$a^T\sum a = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2 & 7\\ 2 & 5 & 7\\ 7 & 7 & 14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$$

Тогда $y_2 = x_1 + x_2 - x_3 \sim N(4, 0)$
Поскольку дисперсия равна нулю, получаем, что $y_2 = x_1 + x_2 - x_3 \equiv 4 \quad (1)$

c)Способ 1 (Тут $\langle X, Y\rangle = E(X,Y)$)

$E[Y_2|X_1 = 5, X_2 = 3] = E[X_1 + X_2 + X_3|X_1 = 5, X_2 = 3] = E[X_1|X_1 = 5, X_2 = 3] + E[X_2|X_1 = 5, X_2 = 3] + E[X_3|X_1 = 5, X_2 = 3] = 5 + 3 + E[X_3|X_1 = 5, X_2 = 3]$ Вычислим последнее слагаемое. Проектируем: $X_3 = A + B : A||X_1, B \perp X_1;\ \ B = C + D : C \perp X_2, D||X_2 \Rightarrow X_3 = A + C + D$

$A = \dfrac{\langle X_3, X_1 \rangle}{||X_1||^2} X_1, B = X_3 - A; \;\; = \dfrac{\langle B, X_2 \rangle}{||X_2||^2} X_2; \; C = B - D$

$E(X_1 X_3) = cov(X_1, X_3) + E_{X_1} = 7 + 2 * 1 = 9 \cdot E_{X_3};$
$E(X_1^2) = V(X_1) + (E_{X_1})^2 = 5 + 2^2 = 9$

$A = \dfrac{E(X_1 X_3)}{E(X_1^2) X_1} \Rightarrow A = X_1; \; B = X_3 - X_1$

$D = \dfrac{X_2}{||X_2||^2} \left(\langle X_3, X_2 \rangle - \langle X_1, X_2 \rangle\right) = \dfrac{X_2}{E(X_2^2)} (E(X_2 X_3) - E(X_1 X_2))$

$E(X_2 X_3) = cov(X_2, X_3) + E_{X_2} E_{X_3} = 7 + 2 * 1 = 9$
$E(X_2^2) = V(X_2) + (E_{X_2})^2 = 5 + 3^2 = 14$
$E(X_1 X_3) = cov(X_1, X_3) + E_{X_1} E_{X_3} = 2 + 2 * 3 = 8$
$D = X_2 (9/14 - 8/14) = \dfrac{X_2}{14}$
$C = B - D = B - \dfrac{X_2}{14}$

$E(X_3 | X_1 = 5, X_2 = 3) = E(A | X_1 = 5, X_2 = 3) + E(D | X_1 =, X_2 = 3) + E(C | X_1 = 5, X_2 = 3) = 5 + \dfrac{3}{14} + E(C | X_1 = 5) = 5\dfrac{3}{14} + E(B - \dfrac{X_2}{14} | X_1 = 5) = 5\dfrac{3}{14} + E(B | X_1 = 5) \dfrac{1}{14} E(X_2 | X_1 = 5) = 5\dfrac{3}{14} + E(B) - \dfrac{1}{14} E(X_2 | X_1 = 5) = 5\dfrac{3}{14} + E(X_3) - E(X_1) - \dfrac{1}{14} E(X_2 | X_1 = 5) = 5\dfrac{3}{14} + 1 - 2 - \dfrac{1}{14} E(X_2 | X_1 = 5)$
Найдем $E(X_2 | X_1 = 5)$
$X_{||} = \dfrac{E(X_1 X_2)}{E(X_1^2)} X_1 = \dfrac{8}{9} X_1; \; X_{\perp} = X_2 - \dfrac{8}{9} X_1$
$E(X_2 | X_1 = 5) = E(\dfrac{8}{9} X_1 | X_1 = 5) + E(X_{\perp} | X_1 = 5) = \dfrac{40}{9} + E(X_2 - \dfrac{8}{9} X_1) = \dfrac{40}{9} + 3 - \dfrac{8}{9} = \dfrac{32}{9} + 3$

Тогда $E(X_3 | X_1 = 5, X_2 = 3) = 3\dfrac{55}{63}$

Способ 2. Используем факт (1) $: x_1 + x_2 - x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = -4 + x_1 + x_2 \Rightarrow y_2 = 2(x_1 + x_2) - 4 \Rightarrow E(y_2 | x_1 = 5, x_2 = 3) = E(2(x_1 + x_2) - 4 | x_1 = 5, x_2 = 3) = 2(5 + 3) - 4 = 12$

d)$E(y_2 | x_1 = 5, x_2 < 3) = E(2(x_1 + x_2) - 4 | x_1 = 5, x_2 < 3) = 2E(x_2 | x_2 < 3) + 2 * 5 - 4 = 2E(x_2 | x_2 < 3) + 6$ Сделаем замену $\xi = x_2 - 3 \Rightarrow \xi \sim N(3 - 3, 5) \Rightarrow E(x_2 | x_2 < 3) = E(z + 3 | z < 0) = E(z | z < 0) + 3$

$$E(y_2|x_1 = 5, x_2 < 3) = 6 + 2 * 3 + 2 * 2 * \int_{-\infty}^{0} \frac{te^{-t^2/10}}{\sqrt{10\pi}}$$