ДЗ-1 по Теории вероятности

Попов Николай, 776 группа

Задача 1

Пусть каждый из пассажиров, стоящих на позициях $2, 3, \cdots, n$ имеет билет с таким же номером соответственно. Заметим, что рассаживание зависит от позиции, на которую сядет заяц и каждая рассадка, соответствующая различной посадке зайца взаимоисключается с другой.
Обозначим:
$A_n = \{$всего есть n мест и n пассажиров и n-ый из них сел на свое n-ое место$\}$,
Z - позиция зайца,
$P(A_n|\ Z = i)$ - условная вероятность события A_n при условии, что заяц сидит на месте i.
Получаем:

$$P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_n|\ Z = i) \cdot P(Z = i) = 1 \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{n} P(A_n|\ Z = i) =$$

Заметим, что если занято i-ое место из мест $2, 3, \cdots, n$, то все пассажиры $2, 3, \cdots, i-1$ точно сядут на свои места и задача сведется к аналогичной с меньшим числом пассажиров: надо будет найти $P(A_{n-i+1})$. Тогда имеем:

$$P(A_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n-1} P(A_{n-i+1})$$

Решим задачу, если $n = 2$ и 3: $P(A_2) = \dfrac{1}{2}$, $P(A_3) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} P(A_2) = \dfrac{1}{2}$.
Предположим, что $\forall i \in \overline{2, n-1} \hookrightarrow P(A_i) = \dfrac{1}{2}$. Тогда получаем:

$$P(A_n) = \frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{n-2}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $P(A_n) = \dfrac{1}{2}$.

Задача 2

Расположим первую точку для определенности в самой нижней точке окружности. Эту точку будем считать опорной и для определенности работать с правой полуокружностью. Теперь с вероятностью $\frac{1}{2}$ каждая брошенная точка попадает в правую полуокружность. Но при этом любая из n точек могла быть опорной, поэтому все точки попадут в одну полуокружность с вероятностью $P = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Задача 3

Построим дизьюнктый набор множеств:

$$B_1 = A_1, \quad \text{при n>1 } B_n = A_n \setminus \cup_{k=1}^{n-1} A_k$$

Из построения следует, что $\cup_{k=1}^{n} A_n = \cup_{k=1}^{n} B_n$:
1) пусть $w \in \cup B_n \Rightarrow \exists w \in B_k \Rightarrow w \in A_k \Rightarrow w \in \cup A_n$
2) пусть $w \in \cup A_n \Rightarrow \exists k : w \notin A_1, w \notin A_2, \cdots, w \notin A_k \, \& w \ \in A_{k+1} \Rightarrow w \in B_{k+1}$

Из построения следует также, что $B_k \cap B_l = \emptyset, k > l$, поскольку если $w \in B_k \Rightarrow w \in A_k \ \& \ w \notin \cup_{t=1}^{k-1} A_t \Rightarrow q \notin A_l \Rightarrow w \notin B_l$

Тогда получаем:

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = P(\cup_{i=1}^{n} B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \setminus \cup_{k=1}^{n-1} A_k) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(Последний переход по вложению).