Домашнее 2

1. Дано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и набор событий $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$, такой что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega,\ B_iB_j = \varnothing$ и $\mathbb{P}\{B_i\} > 0$. Докажите, что для любых событий $A \in \mathcal{F},\ C \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}\{B_iC\} \neq 0$, выполняется
$$\mathbb{P}\{A|C\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A|B_iC\}\mathbb{P}\{B_i|C\}$$

2. В урне лежит один белый шар. В неё добавляют ещё один шар неизвестного цвета, причём с вероятностью $\frac{1}{2}$ это будет белый шар, а с вероятностью $\frac{1}{2}$ – чёрный. После этого из урны вытаскивается шар, и оказывается, что он белый. Какова вероятность того, что в урну был добавлен белый шар?

3. (№51) В $(m+1)$ урне содержится по m шаров, причем урна с номером n содержит n белых и $(m-n)$ черных шаров $(n = 0, 1, ..., m)$. Случайным образом выбирается урна и из нее k раз с возвращением извлекаются шары. Найдите:

   а) вероятность того, что следующим также будет извлечен белый шар при условии, что все k шаров оказались белыми,

   б) ее предел при $m \to \infty$

   Указание 1. Воспользуйтесь формулой из задачи 1.

   Указание 2. В пункте б) воспользуйтесь тем фактом, что $\sum\limits_{i=1}^{n} i^k \sim \dfrac{n^{k+1}}{k+1}$