

Задача 1

$$\begin{aligned} P(A|C) &= \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{1}{P(C)} \sum_{i=1}^{\infty} P(ACB_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(ACB_i)}{P(CB_i)} \cdot \frac{P(CB_i)}{P(C)} = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A|CB_i)P(B_i|C) \end{aligned}$$

Задача 2

Обозначим события $A_w = \{\text{добавили белый шар}\}$, $A_b = \{\text{добавили черный шар}\}$,
 $B = \{\text{вынули белый шар}\}$
 $P(A_w) = P(A_b) = 0.5$ по условию.

$$\begin{aligned} P(A_w|B) &= \frac{P(A_w B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_w)P(A_w)}{P(B|A_w)P(A_w) + P(B|A_b)P(A_b)} \\ P(B|A_w) &= 1; P(B|A_b) = \frac{1}{2} \Rightarrow P(A_w|B) = \frac{0.5}{0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0.5} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Задача 3

Обозначим события $A_i = \{\text{Выбрана } i\text{-я урна}\}$, $B = \{\text{k взятых с возвратом шаров белые}\}$,
 $C = \{(k+1)\text{-й взятый шар белый}\}$

а) Используем формулу из задачи 1 (обозначения событий не совпадают непосредственно в этом номере и номере 1):

$$\begin{aligned} P(C|B) &= \sum_{i=0}^m P(C|A_i B)P(A_i|B) \\ P(A_i|B) &= \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=0}^m P(B|A_j)P(A_j)} \\ P(C|A_i B) &= \frac{i}{m} \end{aligned}$$

$$P(A_i|B) = \frac{1/(m+1) \cdot (i/m)^k}{\sum_{j=0}^m 1/(m+1) \cdot (j/m)^k} = \frac{i^k}{\sum_{j=0}^m j^k}$$

$$P(C|B) = \sum_{i=0}^m \frac{i}{m} \cdot \frac{i^k}{\sum_{j=1}^m j^k} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^m j^k} \sum_{i=1}^m i^{k+1}$$

6)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^m j^{k+1}}{m \cdot \sum_{j=1}^m j^k} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{m^{k+2}}{k+2}}{m \cdot \frac{m^{k+1}}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2}$$