# Домашнее 7.
# Характеристические функции

1. Будем говорить, что случайная величина $\xi$ имеет *решётчатое распределение*, если существуют числа $a, h \in \mathbb{R}, h > 0$, такие что $\xi$ почти наверное принимает значения из множества $\{a+kh\}_{k\in\mathbb{Z}}$, т.е.
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}\{\xi = a + kh\} = 1$$
Докажите, что $\xi$ имеет решётчатое распределение тогда и только тогда, когда $|\varphi_\xi(\frac{2\pi}{h})| = 1$ для некоторого $h > 0$.

2. Может ли следующая функция быть характеристической функцией некоторой случайной величины:
$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, t \in [-T, T] \\ 0, t \notin [-T, T] \end{cases}$$
Изменится ли ответ, если сгладить разрывы $\varphi$ в точках $(-T), T$?

3. Пусть $\xi$ и $\eta$ – независимые одинаковые распределённые случайные величины с характеристической функцией $\varphi(t)$. Найти характеристическую функцию случайной величины $\xi - \eta$.

4. На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, представляющем собой отрезок $[0, 1]$ с $\sigma$-алгеброй борелевских множеств и мерой Лебега, определена случайная величина $\xi(\omega)$. Найти её характеристическую функцию, если

   a) $\xi(\omega) = \begin{cases} 2\omega,\ 0 \leqslant \omega \leqslant \frac{1}{2} \\ 2\omega - 1,\ \frac{1}{2} < \omega \leqslant 1 \end{cases}$

   b) $\xi(\omega) = \begin{cases} \log\omega,\ \omega > 0 \\ 0,\ \omega = 0 \end{cases}$

   c) $\xi(\omega) = \begin{cases} 1,\ 0 \leqslant \omega \leqslant \frac{1}{3} \\ 0,\ \frac{1}{3} < \omega < \frac{2}{3} \\ 1,\ \frac{2}{3} \leqslant \omega \leqslant 1 \end{cases}$