

Домашнее 3

С.в. значит "случайная величина".

Основные задачи

1. Даны независимые с.в. X и Y . Найти функции распределения с.в. $\max(X, Y)$ и $\min(X, Y)$.
2. Дана непрерывная с.в. ξ , плотность которой всюду определена и положительна. Найти распределение с.в. $\eta = F_\xi(\xi)$, где $F_\xi(\cdot)$ – функция распределения ξ .
3. Пусть $X \sim N(\mu, \sigma)$ – нормальная случайная величина, т.е. её плотность имеет вид

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Найти плотность распределения X^2 .

4. Равнобедренный треугольник на плоскости образован единичным вектором в направлении оси абсцисс и единичным вектором, имеющим случайное равномерно распределённое направление. Найти распределение длины третьей стороны треугольника.

Дополнительные задачи

1. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, где $\Omega = [0, 1]^2$, \mathcal{A} – σ -алгебра борелевских подмножеств Ω , \mathbb{P} – мера Лебега. Обозначим координаты ω_1, ω_2 . Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\xi + \eta$, если

(a) $\xi = \omega_1 + \omega_2, \eta = \omega_1 - \omega_2$;

(b) $\xi = \omega_1, \eta = \omega_2$;

(c) $\xi = \begin{cases} 1, & \omega_1 = \omega_2 \\ 0, & \omega_1 \neq \omega_2 \end{cases}, \eta = \omega_1\omega_2.$

Являются ли с.в. ξ и η независимыми?

2. Пусть ξ – с.в. с функцией распределения F_ξ , а \mathbb{P}_ξ – её распределение (т.е. мера на \mathbb{R} , такая что $\mathbb{P}_\xi\{B\} = \mathbb{P}\{\xi \in B\}$ для любого борелевского множества B – см. конспект семинара). Рассмотрим вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}_\xi)$ и зададим функцию $\eta(x) = x, x \in \mathbb{R}$. Найти функцию распределения η .
3. Пусть $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ – строго возрастающая непрерывная функция, такая что $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$. Рассмотрим с.в. $\eta \sim \mathcal{U}[0, 1]$. Докажите, что с.в. $\xi = F^{-1}(\eta)$ имеет функцию распределения F .

Этот результат, кстати, используется при генерировании случайных чисел на компьютере.