

Домашние 6

Основные задачи

1. (a) Пусть X, Y – независимые одинаково распределённые случайные величины. Покажите, что почти наверное выполнены равенства

$$\mathbb{E}[\xi|\xi + \eta] = \mathbb{E}[\eta|\xi + \eta] = \frac{\xi + \eta}{2}$$

- (b) Пусть X_1, X_2, \dots – iid, $S_k = \sum_{i=1}^k \xi_i$, причём $\mathbb{E}X_i < \infty$. Покажите, что почти наверное выполнено равенство

$$\mathbb{E}[\xi_1|S_n, S_{n+1}, \dots] = \frac{S_n}{n}$$

2. Пусть X_1, X_2, \dots – iid, $\mathbb{E}X_i < \infty$, $N \in \mathbb{Z}_+$ – случайная величина, независимая с X_1, X_2, \dots в совокупности. Обозначим $S = \sum_{i=1}^N X_i$. Найти $\mathbb{V}S$.

3. Пусть ξ и η – с.в. Найти $\mathbb{E}(\mathbb{E}[XY|X])$ и $\mathbb{V}(\mathbb{E}[XY|X])$, если $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\eta \sim \text{Exp}(\mu)$.

4. Рассмотрим нормальный случайный вектор

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 \\ 7 & 7 & 14 \end{pmatrix} \right)$$

- (a) Найти распределение с.в. $Y_1 = X_1 + X_2 - X_3$.
(b) Найти распределение с.в. $Y_2 = X_1 + X_2 + X_3$.
(c) Найти $\mathbb{E}[Y_2|X_1 = 5, X_2 = 3]$.
(d) Найти $\mathbb{E}[Y_2|X_1 = 5, X_2 < 3]$ (можно оставить ответ в виде интеграла или воспользоваться Wolframalpha).