# 第 5 回演習資料

新領域創成科学研究科　人間環境学専攻
橋本　学

## １．はじめに

作成したプログラムが意図したように動作することをコード検証 (Code Verification) といいます．厳密解がある問題を解析し，計算で得られた近似値と厳密値を比較することによって，コード検証を行うことができます．

有限要素解析では，有限要素を細かく分割していくと，近似値はある値に近づいていきます．厳密解がある問題に対して，十分に細かくした有限要素解析で得られた近似値は厳密値であると考えることができます．有限要素を細かくしていくと，近似値と厳密値の差 (誤差) がどのような値となるのかを検証することを計算検証 (Calculation Verification) または精度検証 (Accuracy Verification) といいます．

第 5 回では，単純引張変形，単純せん断変形，単純支持梁の曲げ変形を解析し，計算結果と厳密解を比較します．第 5 回の目的は，Verification (Code Verification と Calculation Verification) を行うことで，計算結果の信頼性を判断できるようになることです．

## ２．作業フォルダ（作業ディレクトリ）の準備

C ドライブの下の msys64 フォルダの下に home フォルダがあります．そして，home フォルダの下にユーザ名のフォルダがあります．ユーザ名のフォルダの下に lecture5 フォルダを作成してください．ユーザ名のフォルダの下に，連立一次方程式の計算で使用したライブラリが置いてある lib フォルダがあることを確認してください (図 2.1 参照)．

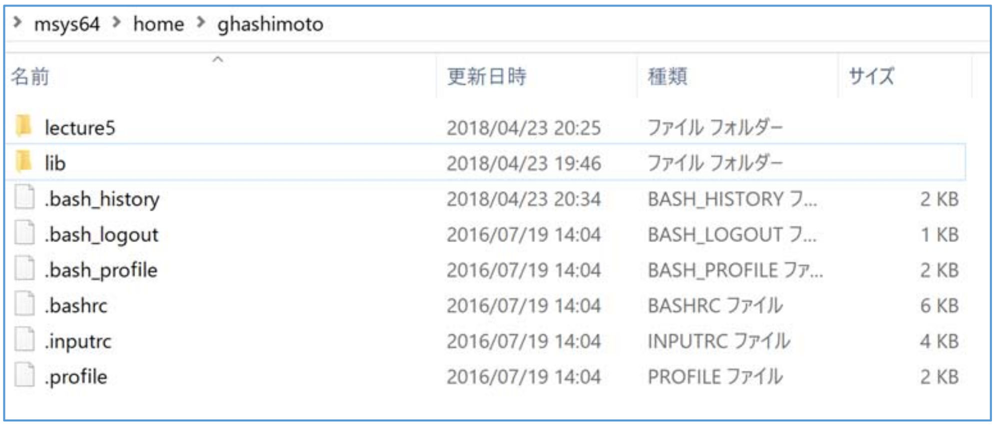



図 2.1　lecture5 フォルダと lib フォルダ

Window OS の場合，lib フォルダの中には，ライブラリ libopenblas.a が置いてあります．Mac OS の場合，lib フォルダの中にライブラリ liblapack.a，librefblas.a，libtmglib.a が置いてあります．

lecture5 フォルダの下に fea フォルダ，meshing フォルダ，mod フォルダを作成します (図 2.2 参照)．第 4 回で作成したファイル

- 節点モジュールプログラム mod_nodes3d.f90
- 有限要素 (計算空間) モジュールプログラム mod_localelement3d.90
- 有限要素 (物理空間) モジュールプログラム mod_elements3d.f90
- 直方体メッシャーモジュールプログラム mod_rectmesher3d.f90
- 要素剛性マトリックスモジュールプログラム mod_elemstiffmat3d.f90
- 要素外力ベクトルモジュールプログラム mod_elemexforcevec3d.90
- 有限要素法モジュールプログラム mod_fem3d.f90

を mod フォルダ内に置いてください．第 4 回で作成した meshing フォルダ内のファイル

- アプリケーションモジュールプログラム mod_appli.f90
- メインプログラム main_appli.f90
- Makefile
- 直方体メッシング用の計算パラメータファイル param_meshing.dat

を meshing フォルダ内に置いてください．第 4 回で作成した fea フォルダ内のファイル

- アプリケーションモジュールプログラム mod_appli.f90
- メインプログラム main_appli.f90
- Makefile

を fea フォルダ内に置いてください．

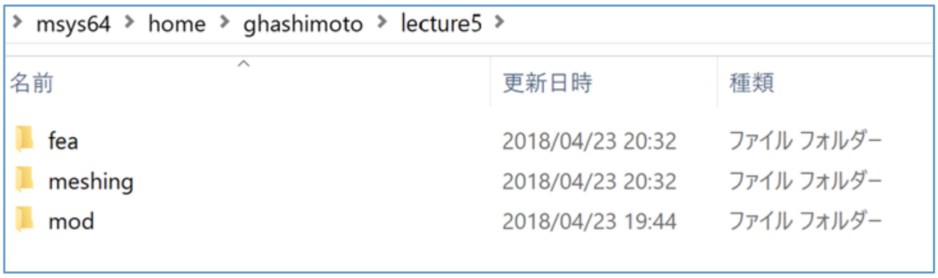



図 2.2　fea フォルダ，meshing フォルダ，mod フォルダ

MSYS2 の MinGW を起動させ，lecture5 ディレクトリへ移動します.

## ３．モジュール mod_elemexforcevec3d の修正

図 3.1 に有限要素解析のクラス図とクラス同士の関連を示します.

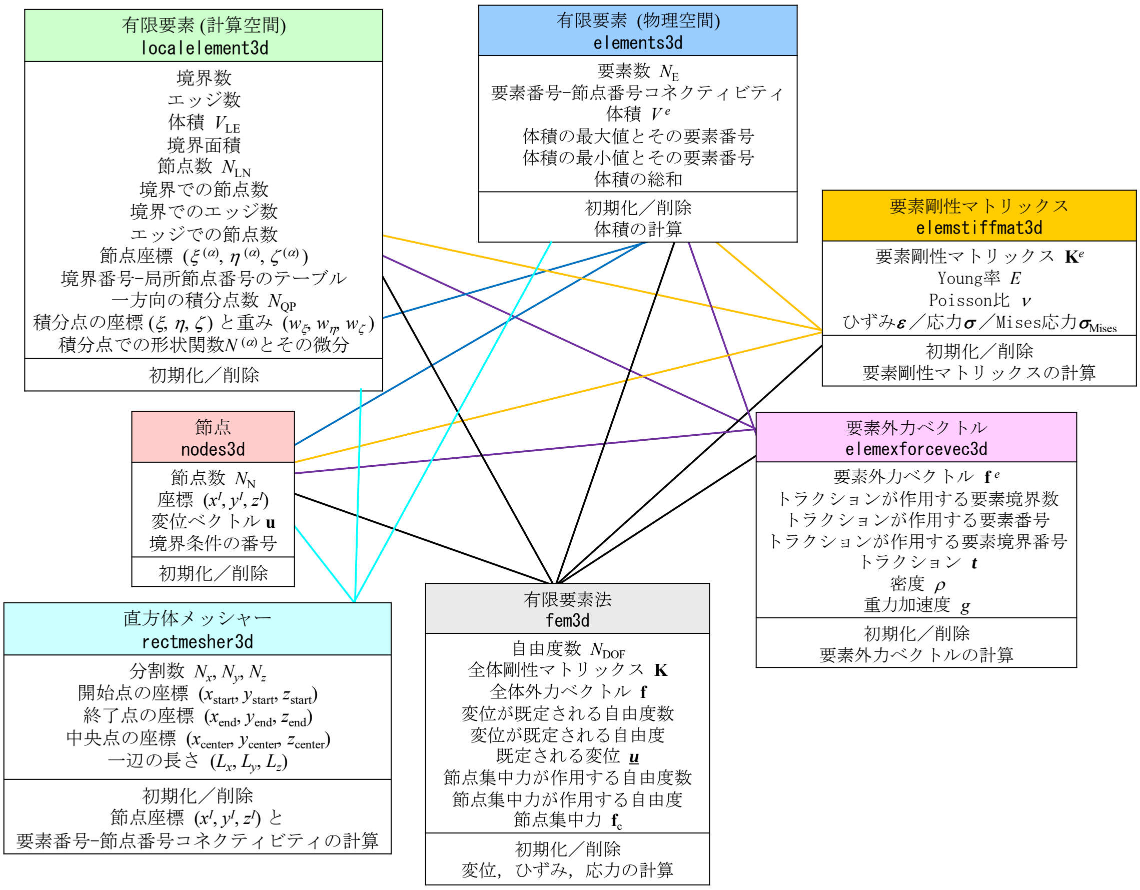



図 3.1　有限要素解析のクラス図とクラス同士の関連

mod フォルダ内の要素外力ベクトルモジュールプログラム mod_elemexforcevec3d.f90 を修正してください (資料「第 5 回演習プログラム」のプログラム 1 参照)．サブルーチン cal_elemforcevec3d の要素外力ベクトル $\mathbf{f}^e$ を計算するプログラムを以下に示します.

要素外力ベクトル　efv3d%f(isize, ie)

```
efv3d%f = 0.0D0
```

$$\int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix} d\Gamma = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} t_x \\ t_x \\ t_y \end{pmatrix} \left\{ \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \times \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \cdot \boldsymbol{n} \right\} d\xi d\eta$$

$$\simeq \left( \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} d\xi d\eta \right) \begin{pmatrix} t_x \\ t_x \\ t_y \end{pmatrix} \left\{ \overline{\left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \times \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \cdot \boldsymbol{n}} \right\}$$

```
DO ib = 1, efv3d%nelemboundaries
```
Neumann 境界条件が与えられる要素境界番号のループ始め

```
 !----------------------------------------------------------

 ie = efv3d%table_ie(ib)
```
要素番号

```
 ma = efv3d%table_ma(ib)
```
局所境界番号

```
 DO naa = 1, le3d_nnodes_boundary
```
要素番号のループ始め

```
  na = le3d_table_na(naa, ma)
```
局所節点番号

```
  id = es3d_connectivity(na, ie)
```
節点番号（要素番号-節点番号コネクティビティの使用）

```
  DO i = 1, 3
```
$x$, $y$, $z$ 成分のループ始め

```
   x_local(i, naa) = ns3d_x(i, id)
```
$\left(x^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}, z^{(\alpha)}\right) \leftarrow \left(x^{I}, y^{I}, z^{I}\right)$

```
  END DO
```
$x$, $y$, $z$ 成分のループ終わり

```
 END DO

 IF( le3d_nboundaries .EQ. 6 ) THEN
```
要素が六面体の場合（境界の形状は四角形）

***a***

```
x31(1) = x_local(1, 3)-x_local(1, 1)
x31(2) = x_local(2, 3)-x_local(2, 1)
x31(3) = x_local(3, 3)-x_local(3, 1)
```

$\boldsymbol{b}$

```
x42(1) = x_local(1, 4)-x_local(1, 2)
x42(2) = x_local(2, 4)-x_local(2, 2)
x42(3) = x_local(3, 4)-x_local(3, 2)
```

要素番号 $e$，局所境界番号 $m$ の要素境界の表面積 $S_m^e$，外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}_m^e$

$$S_m^e\ \boldsymbol{n}_m^e = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

```
area_nx = 0.5D0*( x31(2)*x42(3)-x42(2)*x31(3) )
area_ny = 0.5D0*( x31(3)*x42(1)-x42(3)*x31(1) )
area_nz = 0.5D0*( x31(1)*x42(2)-x42(1)*x31(2) )
```

$S_m^e$

```
area = DSQRT( area_nx*area_nx   &
             +area_ny*area_ny   &
             +area_nz*area_nz )
```

2 次元の Jacobian の平均値

$$\overline{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\times\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\cdot\boldsymbol{n}\right\}} = \frac{S_m^e}{4}$$

```
det_j = 0.25D0*area
```

```
IF( le3d_nnodes .EQ. 8 ) THEN
```
要素が 8 節点の場合

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbf{N}^{\mathrm{T}}d\xi d\eta$$

```
 n(1) = 1.0D0
 n(2) = 1.0D0
 n(3) = 1.0D0
 n(4) = 1.0D0

END IF
```

```
  END IF

  DO naa = 1, le3d_nnodes_boundary  局所

   na = le3d_table_na(naa, ma)   局所節点番号

   isize = 3*(na-1)+1  局所自由度番号
   efv3d%f(isize, ie)                              &
   = efv3d%f(isize, ie)+n(naa)*efv3d%t(1, ib)*det_j

   isize = 3*(na-1)+2  局所自由度番号
   efv3d%f(isize, ie)                              &
   = efv3d%f(isize, ie)+n(naa)*efv3d%t(2, ib)*det_j

   isize = 3*(na-1)+3  局所自由度番号
   efv3d%f(isize, ie)                              &
   = efv3d%f(isize, ie)+n(naa)*efv3d%t(3, ib)*det_j

  END DO

 END DO   Neumann 境界条件が与えられる要素境界番号のループ始め

!----------------------------------------------------------------------
```

$$
\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \rho \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} d\Omega = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \rho \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} J \, d\xi d\eta d\zeta
$$

$$
\simeq \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{QP}}}\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{QP}}}\sum_{k=1}^{N_{\mathrm{QP}}} w_i w_j w_k \left\{ \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \times \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right\} \Bigg|_{(\xi_i,\, \eta_j,\, \zeta_k)} \rho \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}
$$

```
 DO ie = 1, es3d_n  要素番号のループ始め

  !---------------------------------------------------------

  DO na = 1, le3d_nnodes  局所節点番号のループ始め
```

```
  id = es3d_connectivity(na, ie)
```
節点番号（要素番号-節点番号コネクティビティの使用）

```
  DO i = 1, 3
```
$x$, $y$, $z$ 成分のループ始め

```
   x_local(i, na) = ns3d_x(i, id)
```
$\left(x^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}, z^{(\alpha)}\right) \leftarrow \left(x^{I}, y^{I}, z^{I}\right)$

```
  END DO
```
$x$, $y$, $z$ 成分のループ終わり

```
 END DO
```
局所節点番号のループ終わり

```
 !--------------------------------------------------------

 DO ijk = 1, nqps_tot
```
積分点のループ始め

```
  !--------------------------------------------------

  ! Covariant basis vector
```
共変基底ベクトルの計算

$$\boldsymbol{g}_1 = \sum_{\alpha=1}^{N_{\mathrm{LN}}} \frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial \xi} \boldsymbol{x}^{(\alpha)}, \quad \boldsymbol{g}_2 = \sum_{\alpha=1}^{N_{\mathrm{LN}}} \frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial \eta} \boldsymbol{x}^{(\alpha)}, \quad \boldsymbol{g}_3 = \sum_{\alpha=1}^{N_{\mathrm{LN}}} \frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial \zeta} \boldsymbol{x}^{(\alpha)}$$

```
  DO i = 1, 3
```
$x$, $y$, $z$ 成分のループ始め

```
   g1(i) = 0.0D0
   g2(i) = 0.0D0
   g3(i) = 0.0D0

   DO na = 1, le3d_nnodes
```
局所節点番号のループ始め

```
    g1(i) = g1(i)+le3d_dndxi_qp(1, na, ijk)*x_local(i, na)
    g2(i) = g2(i)+le3d_dndxi_qp(2, na, ijk)*x_local(i, na)
    g3(i) = g3(i)+le3d_dndxi_qp(3, na, ijk)*x_local(i, na)

   END DO
```
局所節点番号のループ終わり

```
  END DO
```
$x$, $y$, $z$ 成分のループ終わり

```
!----------------------------------------------------

! Jacobian
```

$J = \boldsymbol{g}_1 \cdot (\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3)$

```
det_j = g1(1)*( g2(2)*g3(3)-g2(3)*g3(2) ) &
       +g1(2)*( g2(3)*g3(1)-g2(1)*g3(3) ) &
       +g1(3)*( g2(1)*g3(2)-g2(2)*g3(1) )

w_w_w_det_j                                         &
= le3d_w_qp(1, ijk)*le3d_w_qp(2, ijk)*le3d_w_qp(3, ijk) &
  *det_j

!----------------------------------------------------

! N matrix
```

$$\mathbf{N} = \left( \mathbf{N}^{(1)} \ \cdots \ \mathbf{N}^{(\alpha)} \ \cdots \ \mathbf{N}^{(N_{\mathrm{LN}})} \right)$$

$$\mathbf{N}^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} N^{(\alpha)} & 0 & 0 \\ 0 & N^{(\alpha)} & 0 \\ 0 & 0 & N^{(\alpha)} \end{pmatrix}$$

```
nmat = 0.0D0

DO nb = 1, le3d_nnodes  局所節点番号のループ始め

 jsize1 = 3*(nb-1)+1  局所自由度番号
 jsize2 = 3*(nb-1)+2  局所自由度番号
 jsize3 = 3*(nb-1)+3  局所自由度番号

 nmat(1, jsize1) = le3d_n_qp(nb, ijk)
 nmat(2, jsize2) = le3d_n_qp(nb, ijk)
 nmat(3, jsize3) = le3d_n_qp(nb, ijk)

END DO  局所節点番号のループ終わり

!----------------------------------------------------
```

重力加速度 $g$

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

```
bvec(1) = 0.0D0
bvec(2) = 0.0D0
bvec(3) = efv3d%g

!---------------------------------------------------

DO isize = 1, 3*le3d_nnodes    局所自由度番号のループ始め

 DO k = 1, 3    x, y, z 成分のループ始め

  efv3d%f(isize, ie)                    &
  = efv3d%f(isize, ie)                  &
   +w_w_w_det_j                         &
    *efv3d%rho(ie)*nmat(k, isize)*bvec(k)

 END DO    x, y, z 成分のループ終わり

END DO    局所自由度番号のループ終わり

!---------------------------------------------------

END DO   積分点のループ終わり

!-------------------------------------------------------

END DO   要素番号のループ終わり
```

七つの有限要素法の基本モジュール

- 有限要素法 (mod_fem3d)
- 要素剛性マトリックス (mod_elemstiffmat3d)
- 要素外力ベクトル (mod_elemexforcevec3d)
- 物理空間 ($x$, $y$, $z$) における有限要素 (mod_elements3d)

- 計算空間 $(\xi, \eta, \zeta)$ における有限要素 (mod_localelement3d)
- 節点 (mod_nodes3d)
- 直方体メッシャー (mod_rectmesher3d)

が完成しました.

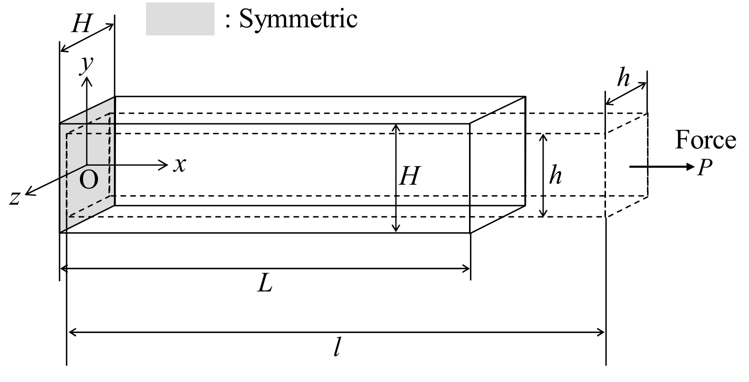
## ４. 単純引張変形解析

### 4.1　解析モデルと境界条件

図 4.1 に単純引張変形の解析モデルと境界条件を示す. 左側では, 対称境界条件が与えられる. 右側には, 一定の応力

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{H^2}$$

が与えられる.




Young's modulus: $E = 2.0 \times 10^{11}$ Pa
Poisson's ratio: $\nu = 0.3$
Geometry: $L = 10$ m, $H = 2$ m
Traction: $\dfrac{P}{H^2} = 4.0 \times 10^7$ Pa

図 4.1　単純引張変形の解析モデルと境界条件

### 4.2　直方体メッシングプログラムのコンパイルと実行

meshing フォルダ内のアプリケーションモジュールプログラム mod_appli.f90 を修正します (資料「第 5 回演習プログラム」のプログラム 2 参照).

MinGW のターミナル画面で

```
$ cd
```

と入力して，「Enter」を押してください．

```
$ cd meshing
```

と入力して，「Enter」を押して，meshing ディレクトリへ移動してください．以下のコマンドを入力し，

```
$ make
```

「Enter」を押すと，コンパイルでき，実行形式ファイル meshing.exe が作成されます．直方体メッシング用の計算パラメータファイル param_meshing.dat 内のパラメータを

```
!DIVISION_NUMBER　直方体一辺の分割数
 20, 2, 2
!START_POINT　直方体の座標の出発点 [m]
 0.0, -0.5, -0.5
!END_POINT　直方体の座標の終了点 [m]
 10.0, 0.5, 0.5
!PROBLEM　問題番号
 2
!YOUNG'S_MODULUS　Young 率 E [Pa]
 2.0e11
!POISSON'S_RATIO　Poisson 比 ν
 0.3
!DENSITY　密度 ρ [kg/m^3]
 7.8e3
!GRAVITATIONAL_ACCELERATION　重力加速度 g [m/s^2]
 0.0
!END　データの終わり
```

のように設定してください．ターミナル画面に

```
$ ./meshing
```

と入力して，「Enter」を押して，処理を実行してください．meshing ディレクトリに mesh.dat ファイル，ic.dat ファイル，bc.dat ファイル，param_fea.dat ファイル，mesh.inp ファイルが作成されていることを確認してください．mesh.dat ファイル，ic.dat ファイル，bc.dat ファイル，param_fea.dat ファイルは，有限要素解析用の計算パラメータファイルです．ターミナル画面に

```
$ mv mesh.dat bc.dat ic.dat param_fea.dat ../fea
```

と入力して，「Enter」を押して，mesh.dat ファイル，ic.dat ファイル，bc.dat ファイル，

param_fea.dat ファイルを fea ディレクトリへ移動させてください．

mesh.dat ファイルのデータを以下に示します．mesh.dat ファイルは，解析メッシュに関する情報を含んでいます．

```
!NODE     節点データカード
          節点番号 I，座標 (x^I，y^I，z^I)
          1,   0.00000000E+00,  -0.50000000E+00,  -0.50000000E+00
          2,   0.50000000E+00,  -0.50000000E+00,  -0.50000000E+00
          3,   0.10000000E+01,  -0.50000000E+00,  -0.50000000E+00
                         …
        188,   0.95000000E+01,   0.50000000E+00,   0.50000000E+00
        189,   0.10000000E+02,   0.50000000E+00,   0.50000000E+00
!ELEMENT,   6,   8,   2     要素データカード，境界数，節点数，(一方向の) 積分点数
          要素番号 e，要素番号-節点番号コネクティビティ connectivity( (α), e )
          1,     1,     2,    23,    22,    64,    65,    86,    85
          2,     2,     3,    24,    23,    65,    66,    87,    86
          3,     3,     4,    25,    24,    66,    67,    88,    87
                         …
         79,   103,   104,   125,   124,   166,   167,   188,   187
         80,   104,   105,   126,   125,   167,   168,   189,   188
!END   データの終わり
```

ic.dat ファイルのデータを以下に示します．ic.dat ファイルは，変位の初期条件を含んでいます．

```
!DISPLACEMENT   節点番号 I，u_x^I，u_y^I，u_z^I
          1,    0.00000000E+00,   0.00000000E+00,   0.00000000E+00
          2,    0.00000000E+00,   0.00000000E+00,   0.00000000E+00
          3,    0.00000000E+00,   0.00000000E+00,   0.00000000E+00
                         …
        188,    0.00000000E+00,   0.00000000E+00,   0.00000000E+00
        189,    0.00000000E+00,   0.00000000E+00,   0.00000000E+00
!END   データの終わり
```

bc.dat ファイルのデータを以下に示します．bc.dat ファイルは，境界条件番号を含んでいます．計算する節点ならば 0，変位境界条件 (Dirichlet 境界条件) が与えられる節点ならば

1，トラクション境界条件 (Neumann 境界条件) が与えられる節点ならば 2 です.

```
!DISPLACEMENT　節点番号 I,  ux^I の境界条件番号，uy^I の境界条件番号，uz^I の境界条件番号
      1,       1,       0,       0
      2,       0,       0,       0
      3,       0,       0,       0
                        …
    188,       0,       0,       0
    189,       0,       0,       0
!END　データの終わり
```

有限要素解析用の計算パラメータファイル param_fea.dat のデータを以下に示します.

```
!ANALYSIS_TYPE　解析タイプ
STATIC_ANALYSIS
!YOUNG'S_MODULUS　Young 率　E [Pa]
   0.20000000E+12
!POISSON'S_RATIO　Poisson 比　ν
   0.30000000E+00
!DENSITY　密度　ρ [kg/m^3]
   0.78000000E+04
!GRAVITATIONAL_ACCELERATION　重力加速度　g [m/s^2]
   0.00000000E+00
!F_LOADED
!TRACTION
        トラクションが与えられる要素境界番号，要素番号，局所境界番号，トラクションベクトル
      1,      20,       4,  0.40000000E+08,  0.00000000E+00,  0.00000000E+00
      2,      40,       4,  0.40000000E+08,  0.00000000E+00,  0.00000000E+00
      3,      60,       4,  0.40000000E+08,  0.00000000E+00,  0.00000000E+00
      4,      80,       4,  0.40000000E+08,  0.00000000E+00,  0.00000000E+00
!END　データの終わり
```

## 4.3　有限要素解析プログラムのコンパイルと実行

　fea フォルダ内のアプリケーションモジュールプログラム mod_appli.f90 を修正します (資料「第 5 回演習プログラム」のプログラム 3 参照). これで，本講義の有限要素解析用のアプリケーションモジュールプログラム mod_appli.f90 は完成です.

　MinGW のターミナル画面で

```
$ cd
```

と入力して，「Enter」を押してください.

```
$ cd fea
```

と入力して,「Enter」を押して，fea ディレクトリへ移動してください. 以下のコマンドを入力し,

```
$ make
```

「Enter」を押すと，コンパイルでき，実行形式ファイル fea.exe が作成されます. ターミナル画面に

```
$ ./fea
```

と入力して,「Enter」を押して，処理を実行してください. result.inp ファイルが出力されます.　ParaView を用いて可視化すると，図 4.2 のように，単純引張変形の様子が表示されます.

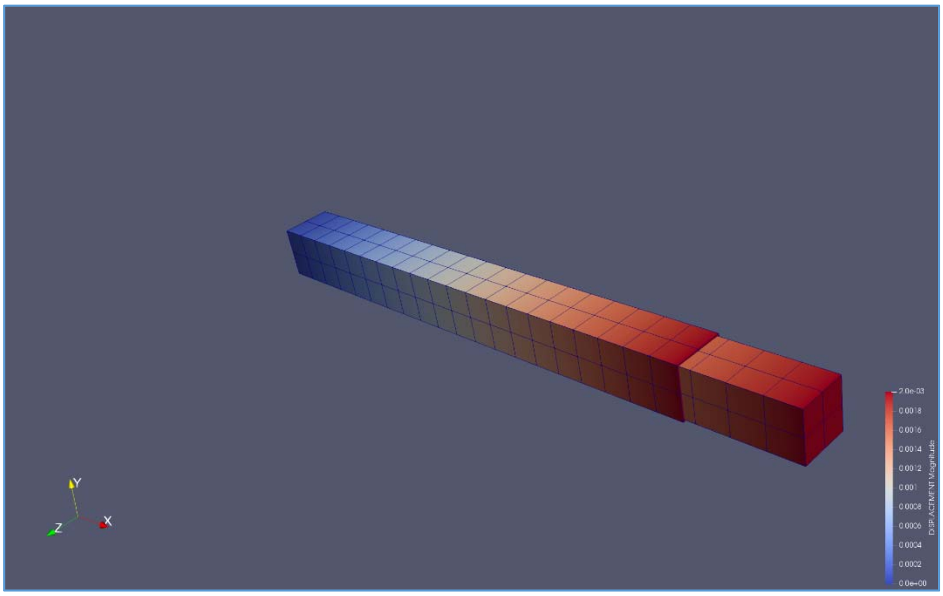



図 4.2　単純引張変形の様子

## 4.4　計算で得られた近似値と厳密値の比較

　構成方程式は

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \lambda(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz})+2\mu\varepsilon_{xx} = \frac{P}{H^2} \\
\sigma_{yy} &= \lambda(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz})+2\mu\varepsilon_{yy} = 0 \\
\sigma_{zz} &= \lambda(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz})+2\mu\varepsilon_{zz} = 0 \\
\sigma_{xy} &= \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0
\end{aligned}
$$

です．また，微小ひずみは

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{l-L}{L} \\
\varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{h-H}{H} \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{h-H}{H} \\
\varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0
\end{aligned}
$$

です．よって，

$$
\begin{cases}
(\lambda+2\mu)\dfrac{l-L}{L}+2\lambda\dfrac{h-H}{H} = \dfrac{P}{H^2} \\
\lambda\dfrac{l-L}{L}+(\lambda+2\mu)\dfrac{h-H}{H}+\lambda\dfrac{h-H}{H} = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
(\lambda+2\mu)a+2\lambda b = c \\
\lambda a+2(\lambda+\mu)b = 0
\end{cases}
$$

が得られます．ただし，

$$
a = \frac{l-L}{L}, \quad b = \frac{h-H}{H}, \quad c = \frac{P}{H^2}
$$

です．式変形

$$
\begin{aligned}
a &= -\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda}b \\
&= -\frac{\dfrac{2E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}+\dfrac{2E}{2(1+\nu)}}{\dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}}b \\
&= -\frac{1}{\nu}b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c &= (\lambda + 2\mu - 2\lambda\nu)a \\
&= \left\{ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{2E}{2(1+\nu)} - \frac{2E\nu^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right\} a \\
&= \left\{ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E(1-2\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{2E\nu^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right\} a \\
&= E\frac{1-\nu-2\nu^2}{(1+\nu)(1-2\nu)}a \\
&= Ea
\end{aligned}
$$

を行うと,

$$
a = \frac{c}{E}, \quad b = -\frac{\nu}{E}c
$$

となります．よって,

$$
l - L = \frac{PL}{EH^2}, \quad \frac{h-H}{2} = -\frac{\nu}{2E}\frac{P}{H}
$$

が得られます．したがって，厳密値は

$$
\begin{aligned}
l - L &= \frac{PL}{EH^2} \\
&= \frac{(4.0\times10^7)(10.0)}{(2.0\times10^{11})} \\
&= 2.0\times10^{-3}\ \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

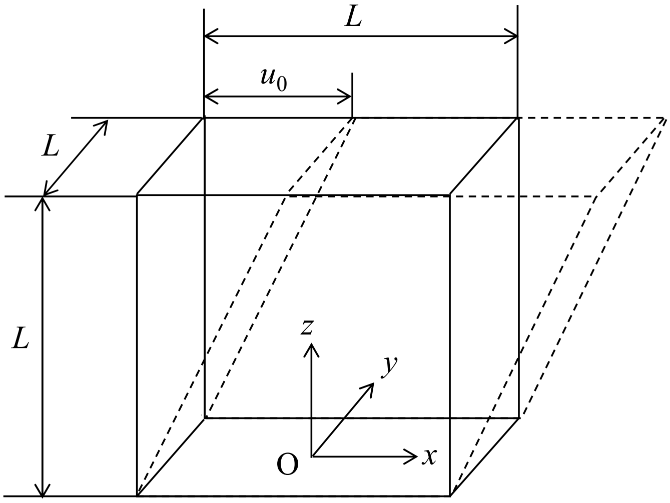
$$
\begin{aligned}
\frac{h-H}{2} &= -\frac{0.3}{2(2.0\times10^{11})}\frac{(4.0\times10^7)}{(1.0)} \\
&= -3.0\times10^{-5}\ \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

となります．計算結果と厳密値を比較してください．

## ５．単純せん断変形解析

### 5.1　解析モデルと境界条件

図 5.1 に単純せん断変形の解析モデルと境界条件を示す．




Young's modulus: $E = 2.0\times10^{11}$ Pa

Poisson's ratio: $\nu = 0.3$

Geometry: $L = 1.0$ m

Traction: $\boldsymbol{t} = -\sigma_{xz}\,\boldsymbol{e}_z$ on $x = -\dfrac{L}{2}$

$\boldsymbol{t} = \sigma_{xz}\,\boldsymbol{e}_z$ on $x = \dfrac{L}{2}$

$\boldsymbol{t} = \sigma_{zx}\,\boldsymbol{e}_x$ on $z = L$

$\sigma_{zx} = \sigma_{xz} = 1.0\times10^{8}$ Pa

図 5.1　単純せん断変形の解析モデルと境界条件

## 5.2　直方体メッシングプログラムのコンパイルと実行

meshing フォルダ内のアプリケーションモジュールプログラム mod_appli.f90 を修正します (資料「第 5 回演習プログラム」のプログラム 4 参照).

MinGW のターミナル画面で

```
$ cd
```

と入力して,「Enter」を押してください.

```
$ cd meshing
```

と入力して,「Enter」を押して, meshing ディレクトリへ移動してください. 以下のコマンドを入力し,

```
$ make
```

「Enter」を押すと, コンパイルでき, 実行形式ファイル meshing.exe が作成されます. 直方体メッシング用の計算パラメータファイル param_meshing.dat 内のパラメータを

```
!DIVISION_NUMBER　直方体一辺の分割数
 10, 10, 10
!START_POINT　直方体の座標の出発点 [m]
 -0.5, -0.5, 0.0
!END_POINT　直方体の座標の終了点 [m]
  0.5, 0.5, 1.0
!PROBLEM　問題番号
 3
!YOUNG'S_MODULUS　Young 率 E [Pa]
 2.0e11
!POISSON'S_RATIO　Poisson 比 ν
 0.3
!DENSITY　密度 ρ [kg/m^3]
 7.8e3
!GRAVITATIONAL_ACCELERATION　重力加速度 g [m/s^2]
 0.0
!END　データの終わり
```

のように設定してください．ターミナル画面に

```
$ ./meshing
```

と入力して，「Enter」を押して，処理を実行してください．meshing ディレクトリに mesh.dat ファイル，ic.dat ファイル，bc.dat ファイル，param_fea.dat ファイル，mesh.inp ファイルが作成されていることを確認してください．mesh.dat ファイル，ic.dat ファイル，bc.dat ファイル，param_fea.dat ファイルは，有限要素解析プログラムの入力データです．ターミナル画面に

```
$ mv mesh.dat bc.dat ic.dat param_fea.dat ../fea
```

と入力して，「Enter」を押して，mesh.dat ファイル，ic.dat ファイル，bc.dat ファイル，param_fea.dat ファイルを fea ディレクトリへ移動させてください．

　mesh.dat ファイルのデータを以下に示します．mesh.dat ファイルは，解析メッシュに関する情報を含んでいます．

```
!NODE　節点データカード
         節点番号 I, 座標 (x^I, y^I, z^I)
         1, -0.50000000E+00, -0.50000000E+00,  0.00000000E+00
         2, -0.40000000E+00, -0.50000000E+00,  0.00000000E+00
         3, -0.30000000E+00, -0.50000000E+00,  0.00000000E+00
```

```
                              …
       1330,    0.40000000E+00,    0.50000000E+00,    0.10000000E+01
       1331,    0.50000000E+00,    0.50000000E+00,    0.10000000E+01
!ELEMENT,    6,    8,    2      要素データカード，境界数，節点数，(一方向の) 積分点数
            要素番号 e，要素番号-節点番号コネクティビティ connectivity( (α), e )
          1,        1,        2,       13,       12,      122,      123,      134,      133
          2,        2,        3,       14,       13,      123,      124,      135,      134
          3,        3,        4,       15,       14,      124,      125,      136,      135
                              …
        999,     1197,     1198,     1209,     1208,     1318,     1319,     1330,     1329
       1000,     1198,     1199,     1210,     1209,     1319,     1320,     1331,     1330
!END　データの終わり
```

ic.dat ファイルのデータを以下に示します．ic.dat ファイルは，変位の初期条件を含んでいます．

```
!DISPLACEMENT　節点番号 I，u_x^I，u_y^I，u_z^I
          1,    0.00000000E+00,    0.00000000E+00,    0.00000000E+00
          2,    0.00000000E+00,    0.00000000E+00,    0.00000000E+00
          3,    0.00000000E+00,    0.00000000E+00,    0.00000000E+00
                              …
       1330,    0.00000000E+00,    0.00000000E+00,    0.00000000E+00
       1331,    0.00000000E+00,    0.00000000E+00,    0.00000000E+00
!END　データの終わり
```

bc.dat ファイルのデータを以下に示します．bc.dat ファイルは，境界条件番号を含んでいます．計算する節点ならば 0，変位境界条件（Dirichlet 境界条件）が与えられる節点ならば 1，トラクション境界条件（Neumann 境界条件）が与えられる節点ならば 2 です．

```
!DISPLACEMENT　節点番号 I，u_x^I の境界条件番号，u_y^I の境界条件番号，u_z^I の境界条件番号
          1,        1,        1,        1
          2,        1,        1,        1
          3,        1,        1,        1
                              …
       1330,        0,        0,        0
       1331,        0,        0,        0
```

```
!END　データの終わり
```

有限要素解析用の計算パラメータファイル param_fea.dat のデータを以下に示します．

```
!ANALYSIS_TYPE　解析タイプ
STATIC_ANALYSIS
!YOUNG'S_MODULUS　Young 率 E [Pa]
   0.20000000E+12
!POISSON'S_RATIO　Poisson 比 ν
   0.30000000E+00
!DENSITY　密度 ρ [kg/m^3]
   0.78000000E+04
!GRAVITATIONAL_ACCELERATION　重力加速度 g [m/s^2]
   0.00000000E+00
!F_LOADED
!TRACTION
         トラクションが与えられる要素境界番号，要素番号，局所境界番号，トラクションベクトル
         1,        1,        6,   0.00000000E+00,   0.00000000E+00,  -0.10000000E+09
         2,       10,        4,   0.00000000E+00,   0.00000000E+00,   0.10000000E+09
         3,       11,        6,   0.00000000E+00,   0.00000000E+00,  -0.10000000E+09
                                …
       299,     1000,        2,   0.10000000E+09,   0.00000000E+00,   0.00000000E+00
       300,     1000,        4,   0.00000000E+00,   0.00000000E+00,   0.10000000E+09
!END　データの終わり
```

## 5.3　有限要素解析プログラムのコンパイルと実行

MinGW のターミナル画面で

```
$ cd
```

と入力して，「Enter」を押してください．

```
$ cd fea
```

と入力して，「Enter」を押して，fea ディレクトリへ移動してください．ターミナル画面に

```
$ ./fea
```

と入力して，「Enter」を押して，処理を実行してください．result.inp ファイルが出力されます． ParaView を用いて可視化すると，図 5.2 のように，単純せん断変形の様子が表示されます．

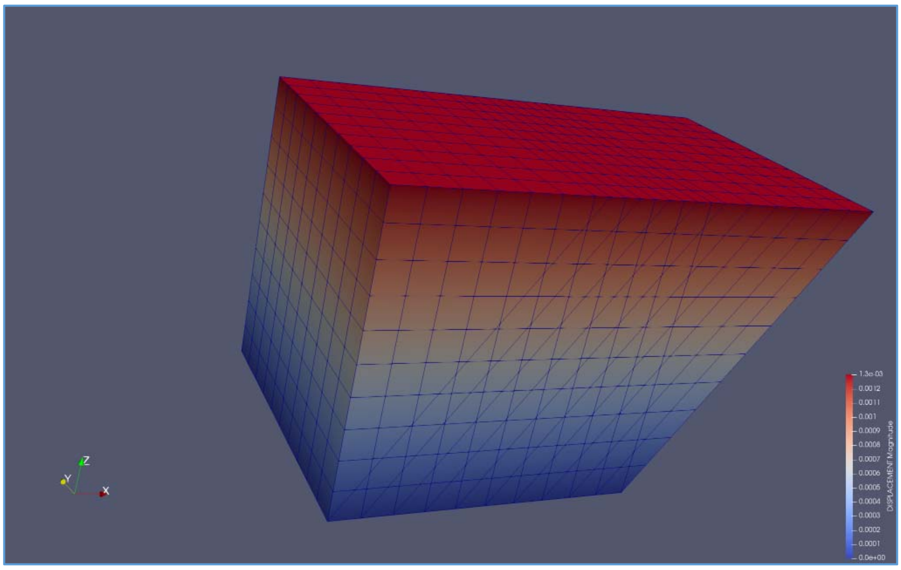


図 5.2　単純せん断変形の様子

## 5.4　計算で得られた近似値と厳密値の比較

図 5.1 に示されるような変位 $u_0 > 0$ のせん断変形が生じるとします．このとき，構成方程式は

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0$$
$$\sigma_{zx} = 2\mu\,\varepsilon_{zx}$$

です．また，微小ひずみは

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = 0$$
$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\frac{u_0}{L}$$

です．よって，

$$\begin{aligned}\sigma_{zx} &= 2\mu\,\varepsilon_{zx} \\ &= \mu\frac{u_0}{L}\end{aligned}$$

が得られます． $x = -L/2$ 上で

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t} &= -\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ &= -\sigma_{xz}\,\boldsymbol{e}_z \\ &= -\mu\frac{u_0}{L}\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

を境界条件として与えて， $x = L/2$ 上で

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{t} &= \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{\sigma} \\
&= \sigma_{xz}\, \boldsymbol{e}_z \\
&= \mu \frac{u_0}{L} \boldsymbol{e}_z
\end{aligned}
$$

で境界条件として与えて， $z = L$ 上で

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{t} &= \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{\sigma} \\
&= \sigma_{zx}\, \boldsymbol{e}_x \\
&= \mu \frac{u_0}{L} \boldsymbol{e}_x
\end{aligned}
$$

を境界条件として与えれば，このような変形が生じることになります．境界条件として，

$$
\sigma_{zx} = \sigma_{xz} = 1.0 \times 10^{8}\ \mathrm{Pa}
$$

を与えると，

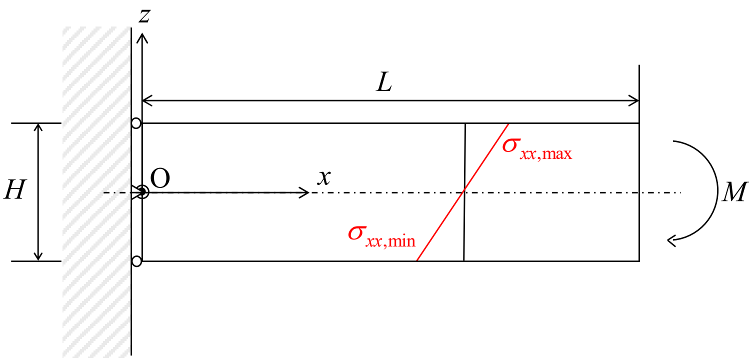
$$
\begin{aligned}
\mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\
&= \frac{(2.0 \times 10^{11})}{2(1+0.3)}\ \mathrm{Pa} \\
u_0 &= \frac{\sigma_{zx} L}{\mu} \\
&= \frac{(1.0 \times 10^{8})(1.0)}{\dfrac{(2.0 \times 10^{11})}{2(1+0.3)}} \\
&= 1.3 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

となります．計算結果と厳密値を比較してください．

## ６．単純支持梁の曲げ変形解析

### 6.1　解析モデルと境界条件

図 6.1 に単純支持梁の解析モデルと境界条件を示す．右側には曲げモーメント $M$ が作用する．




Young's modulus: $E$ = 200,000 MPa

Poisson's ratio: $\nu$ = 0.0

Geometry: $L$ = 100 mm, $H$ = 10 mm, $W$ = 10mm

Bending stress: $\sigma_{xx,\max} = 60.0$ MPa, $\sigma_{xx,\min} = -60.0$ MPa

図 5.1　単純支持梁の解析モデルと境界条件

## 6.2　直方体メッシングプログラムのコンパイルと実行

meshing フォルダ内のアプリケーションモジュールプログラム mod_appli.f90 を修正します (資料「第 5 回演習プログラム」のプログラム 5 参照).

MinGW のターミナル画面で

```
$ cd
```

と入力して,「Enter」を押してください.

```
$ cd meshing
```

と入力して,「Enter」を押して, meshing ディレクトリへ移動してください．以下のコマンドを入力し,

```
$ make
```

「Enter」を押すと，コンパイルでき，実行形式ファイル meshing.exe が作成されます．直方体メッシング用の計算パラメータファイル param_meshing.dat 内のパラメータを

```
1:!DIVISION_NUMBER　直方体一辺の分割数
2: 100, 2, 2
3:!START_POINT　直方体の座標の出発点 [mm]
4: 0.0, -5.0, -5.0
5:!END_POINT　直方体の座標の終了点 [mm]
6: 100.0, 5.0, 5.0
7:!PROBLEM　問題番号
```

```
 4
!YOUNG'S_MODULUS   Young 率  E [Pa]
 2.0E5
!POISSON'S_RATIO   Poisson 比  ν
 0.0
!DENSITY   密度  ρ [ton/mm^3]
 1.0E-9
!GRAVITATIONAL_ACCELERATION   重力加速度  g [mm/s^2]
 0.0
!END   データの終わり
```

のように設定してください．ターミナル画面に

$ ./meshing

と入力して，「Enter」を押して，処理を実行してください．meshing ディレクトリに mesh.dat ファイル，ic.dat ファイル，bc.dat ファイル，param_fea.dat ファイル，mesh.inp ファイルが作成されていることを確認してください．mesh.dat ファイル，ic.dat ファイル，bc.dat ファイル，param_fea.dat ファイルは，有限要素解析プログラムの入力データです．ターミナル画面に

$ mv mesh.dat bc.dat ic.dat param_fea.dat ../fea

と入力して，「Enter」を押して，mesh.dat ファイル，ic.dat ファイル，bc.dat ファイル，param_fea.dat ファイルを fea ディレクトリへ移動させてください．

mesh.dat ファイルのデータを以下に示します．mesh.dat ファイルは，解析メッシュに関する情報を含んでいます．

```
!NODE    節点データカード
         節点番号 I，座標（x^I，y^I，z^I）
         1,   0.00000000E+00,  -0.50000000E+01,  -0.50000000E+01
         2,   0.10000000E+01,  -0.50000000E+01,  -0.50000000E+01
         3,   0.20000000E+01,  -0.50000000E+01,  -0.50000000E+01
                        …
       908,   0.99000000E+02,   0.50000000E+01,   0.50000000E+01
       909,   0.10000000E+03,   0.50000000E+01,   0.50000000E+01
!ELEMENT,     6,    8,    2     要素データカード，境界数，節点数，（一方向の）積分点数
         要素番号 e，要素番号-節点番号コネクティビティ connectivity( (α), e )
         1,     1,     2,   103,   102,   304,   305,   406,   405
         2,     2,     3,   104,   103,   305,   306,   407,   406
```

```
   3,    3,    4,  105,  104,  306,  307,  408,  407
                   …
 399,  503,  504,  605,  604,  806,  807,  908,  907
 400,  504,  505,  606,  605,  807,  808,  909,  908
!END  データの終わり
```

ic.dat ファイルのデータを以下に示します．ic.dat ファイルは，変位の初期条件を含んでいます．

```
!DISPLACEMENT  節点番号 $I$, $u_x^I$, $u_y^I$, $u_z^I$
     1,  0.00000000E+00,  0.00000000E+00,  0.00000000E+00
     2,  0.00000000E+00,  0.00000000E+00,  0.00000000E+00
     3,  0.00000000E+00,  0.00000000E+00,  0.00000000E+00
                   …
   908,  0.00000000E+00,  0.00000000E+00,  0.00000000E+00
   909,  0.00000000E+00,  0.00000000E+00,  0.00000000E+00
!END  データの終わり
```

bc.dat ファイルのデータを以下に示します．bc.dat ファイルは，境界条件番号を含んでいます．計算する節点ならば 0，変位境界条件 (Dirichlet 境界条件) が与えられる節点ならば 1，トラクション境界条件 (Neumann 境界条件) が与えられる節点ならば 2 です．

```
!DISPLACEMENT  節点番号 $I$, $u_x^I$ の境界条件番号, $u_y^I$ の境界条件番号, $u_z^I$ の境界条件番号
     1,    1,    0,    0
     2,    0,    0,    0
     3,    0,    0,    0
                   …
   908,    0,    0,    0
   909,    0,    0,    0
!END  データの終わり
```

有限要素解析用の計算パラメータファイル param_fea.dat のデータを以下に示します．

```
!ANALYSIS_TYPE  解析タイプ
STATIC_ANALYSIS
!YOUNG'S_MODULUS  Young 率 $E$ [MPa]
```

```
    0.20000000E+06
!POISSON'S_RATIO   Poisson 比 ν
    0.00000000E+00
!DENSITY   密度 ρ [ton/mm^3]
    0.10000000E-08
!GRAVITATIONAL_ACCELERATION   重力加速度 g [mm/s^2]
    0.00000000E+00
!F_LOADED
        節点集中荷重が与えられる節点番号，節点集中荷重ベクトル
        101,   -0.25000000E+03,    0.00000000E+00,    0.00000000E+00
        202,   -0.50000000E+03,    0.00000000E+00,    0.00000000E+00
        303,   -0.25000000E+03,    0.00000000E+00,    0.00000000E+00
        404,    0.00000000E+00,    0.00000000E+00,    0.00000000E+00
        505,    0.00000000E+00,    0.00000000E+00,    0.00000000E+00
        606,    0.00000000E+00,    0.00000000E+00,    0.00000000E+00
        707,    0.25000000E+03,    0.00000000E+00,    0.00000000E+00
        808,    0.50000000E+03,    0.00000000E+00,    0.00000000E+00
        909,    0.25000000E+03,    0.00000000E+00,    0.00000000E+00
!TRACTION
!END   データの終わり
```

## 6.3　有限要素解析プログラムのコンパイルと実行

MinGW のターミナル画面で

```
$ cd
```

と入力して，「Enter」を押してください．

```
$ cd fea
```

と入力して，「Enter」を押して，fea ディレクトリへ移動してください．ターミナル画面に

```
$ ./fea
```

と入力して，「Enter」を押して，処理を実行してください．result.inp ファイルが出力されます． ParaView を用いて可視化すると，図 6.2 のように，曲げ変形の様子が表示されます．

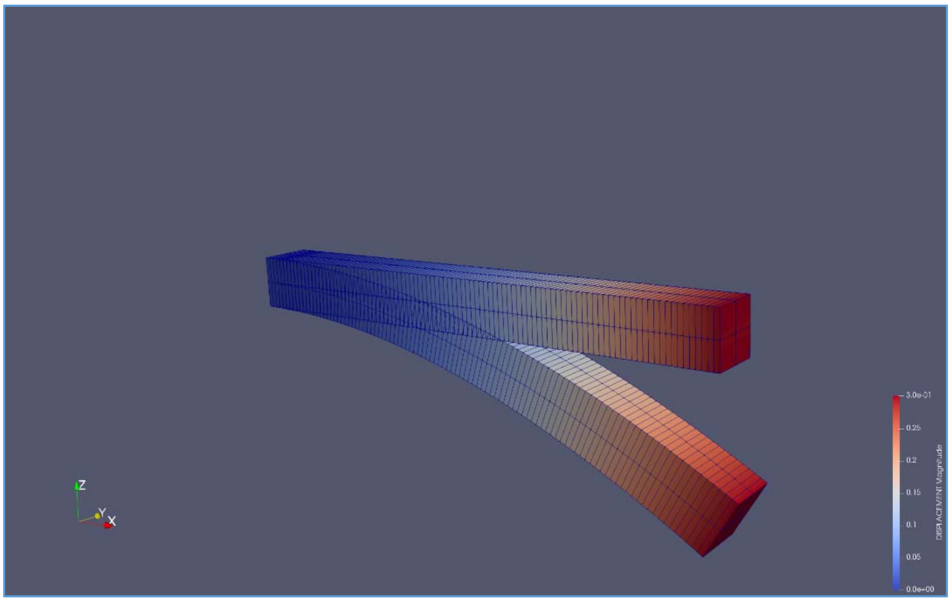


図 6.2　単純支持梁の曲げ変形の様子

## 6.4　計算で得られた近似値と厳密値の比較

微小変形を仮定すると，変位成分 $u_z(x)$ は

$$\frac{d^2u_z}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$$\text{境界条件：}\ u_z(0)=0,\ \left.\frac{du_z}{dz}\right|_{x=0} = 0$$

より求まります．ただし，$M<0$ は曲げモーメント，$I$ は断面 2 次モーメントである．よって，

$$u_z(x) = \frac{M}{2EI}x^2$$

です．曲げ応力は

$$\sigma_{xx} = -\frac{M}{I}z$$

となり，

$$\begin{aligned}\frac{M}{I} &= -\frac{\sigma_{xx}}{z} \\ &= -\frac{(60.0)}{(5.0)} \\ &= -12.0\ \ \text{MPa/mm}\end{aligned}$$

となります.

$$
\begin{aligned}
u_z(x) &= -\frac{(12.0)}{2\,(2.0\times10^5)}\,x^2 \\
&= -(3.0\times10^{-5})\ x^2 \quad [\mathrm{mm}]
\end{aligned}
$$

が得られます．計算結果と厳密値を比較してください.

## ７．おわりに

第 5 回では，単純引張変形，単純せん断変形，単純支持梁の曲げ変形を解析し，計算結果と厳密解を比較しました．計算結果の信頼性を判断するため，Verification (Code Verification と Calculation Verification) を行いました．何か質問がありましたら，橋本 (メールアドレス : ghashimoto@k.u-tokyo.ac.jp) に連絡してください.

### 宿題

(1) 単純引張変形や単純せん断変形の有限要素解析において,

・荷重 $P$ を 2 倍にする場合 (単純引張変形のみ)

・Young 率を 2 倍にする場合

・Poisson 比を 0.0 にする場合

どのような計算結果が得られるかを調べてください.

(2) 単純支持梁の曲げ変形において，meshing フォルダ内にある直方体メッシング用の計算パラメータファイル param_meshing.dat の $x$ 方向分割数を 5，10，50，100，500，1000 と変更した場合，計算で得られた近似値と厳密値を比較してください.