第 3 回演習資料

新領域創成科学研究科　人間環境学専攻
橋本　学

１．はじめに

第 3 回の講義の目標は，有限要素法の基本モジュールを利用して，簡単な形状の解析メッシュを生成できるプリプロセッサプログラム (直方体メッシャープログラム) を作成することです.

有限要素法の基本モジュールは

- 有限要素法 (mod_fem3d)
- 要素剛性マトリックス (mod_elemstiffmat3d)
- 要素外力ベクトル (mod_elemexforce3d)
- 物理空間 (x, y, z) における有限要素 (mod_elements3d)
- 計算空間 (ξ, η, ζ) における有限要素 (mod_localelement3d)
- 節点 (mod_nodes3d)
- 直方体メッシャー (mod_rectmesher3d)

の七つです．第 3 回で作成するプログラムは,

- 物理空間 (x, y, z) における有限要素 (mod_elements3d)
- 計算空間 (ξ, η, ζ) における有限要素 (mod_localelement3d)
- 節点 (mod_nodes3d)
- 直方体メッシャー (mod_rectmesher3d)

の四つです.

直方体メッシャープログラムを用いて生成した解析メッシュのデータを ParaView で可視化します．最後に，有限要素法の基本モジュールを利用して，有限要素の体積を計算してもらいます.

２．モジュール mod_nodes3d，mod_localelement3d，mod_elements3d の作成

図 2.1 に節点クラス，有限要素 (計算空間) クラス，有限要素 (物理空間) クラスのクラス図とクラス同士の関連を示します.

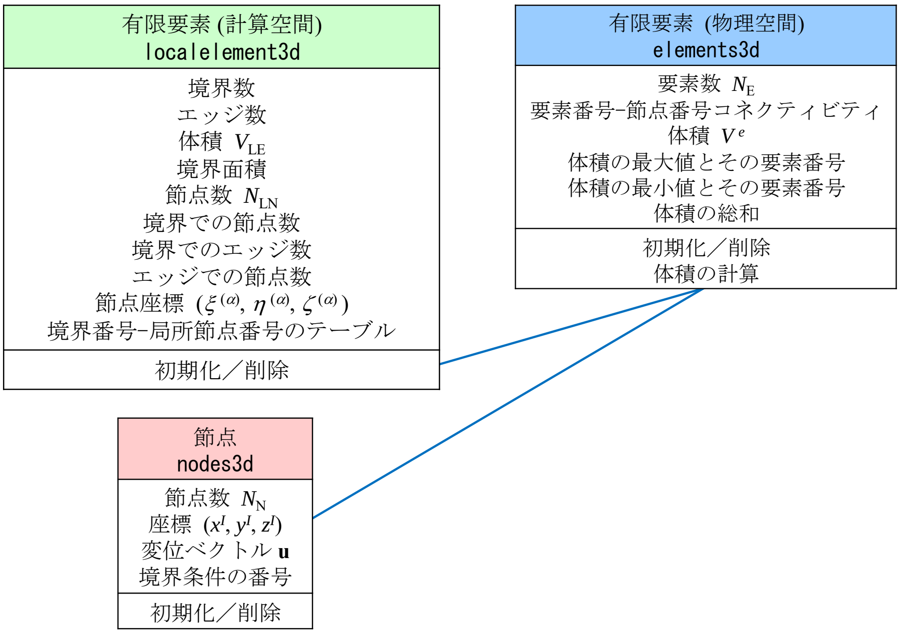

図 2.1　節点クラス，有限要素 (計算空間) クラス，有限要素 (物理空間) クラスのクラス図とクラス同士の関連

C ドライブの下の msys64 フォルダの下に home フォルダがあります．そして，home フォルダの下にユーザ名のフォルダがあります．ユーザ名のフォルダの下に lecture3 フォルダを作成してください．

MSYS2 の MinGW を起動させます．スタートメニューの MSYS2 64bit フォルダの下の MSYS2 MinGW 64-bit をクリックしてください (図 2.2 参照)．または，デスクトップに MSYS2 MinGW のショートカットファイルを作成していたら，ショートカットファイルをクリックしてください (図 2.3 参照)．

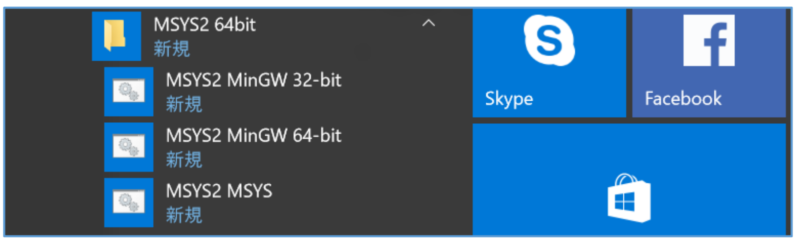

図 2.2　スタートメニューの MSYS2 64bit フォルダ

図 2.3　MSYS2 MinGW のショートカットアイコン

MinGW が起動し，図 2.4 のようなターミナル画面が表示されます.

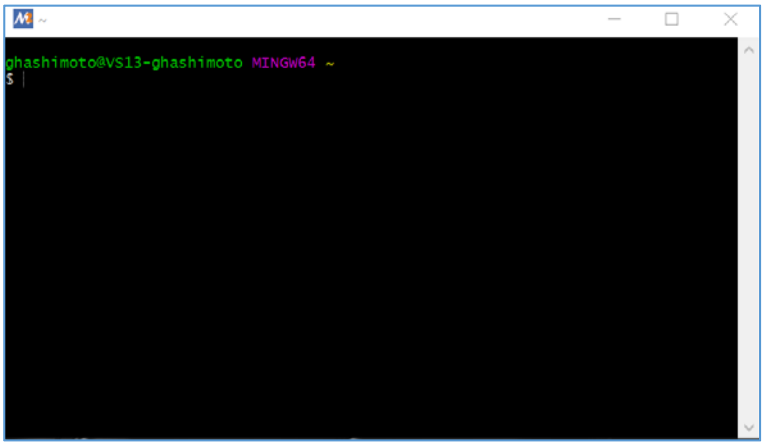

図 2.4　MinGW のターミナル画面

まず，節点モジュールプログラム mod_nodes3d.f90，有限要素 (計算空間) モジュールプログラム mod_localelement3d，有限要素 (物理空間) モジュールプログラム mod_elements3d を作成してください (資料「第 3 回演習プログラム」のプログラム 1～3 参照)．次に，これらのモジュールを動かすアプリケーションモジュール mod_appli.f90 とメインプログラム main_appli.f90 を作成してください (資料「第 3 回演習プログラム」のプログラム 4 と 5 参照).

MinGW のターミナル画面で

```
$ gfortran –c mod_nodes3d.f90
```

と入力し，「Enter」を押してください．オブジェクトファイル mod_nodes3d.o が作成されます.

```
$ gfortran –c mod_localelement3d.f90
```

と入力し，「Enter」を押してください．オブジェクトファイル mod_localelement3d.o が作成されます.

```
$ gfortran –c mod_elements3d.f90
```

と入力し，「Enter」を押してください．オブジェクトファイル mod_elements3d.o が作成されます.

```
$ gfortran –c mod_appli.f90
```

と入力し，「Enter」を押してください．オブジェクトファイル mod_appli.o が作成されます.

```
$ gfortran –o main_appli main_appli.f90 mod_nodes3d.o mod_localelement3d.o
mod_elements3d.o mod_appli.o
```

と (1 行で) 入力し,「Enter」を押してください．実行形式ファイル main_appli.exe が作成されます．そして，ターミナル画面に

```
$ ./main_appli
```

と入力して,「Enter」を押して，実行してください．実行すると，AVS UCD フォーマットのファイル mesh.inp が生成されます．ParaView を用いて可視化すると，図 2.5 のように，一つの 8 節点六面体要素が表示されます．

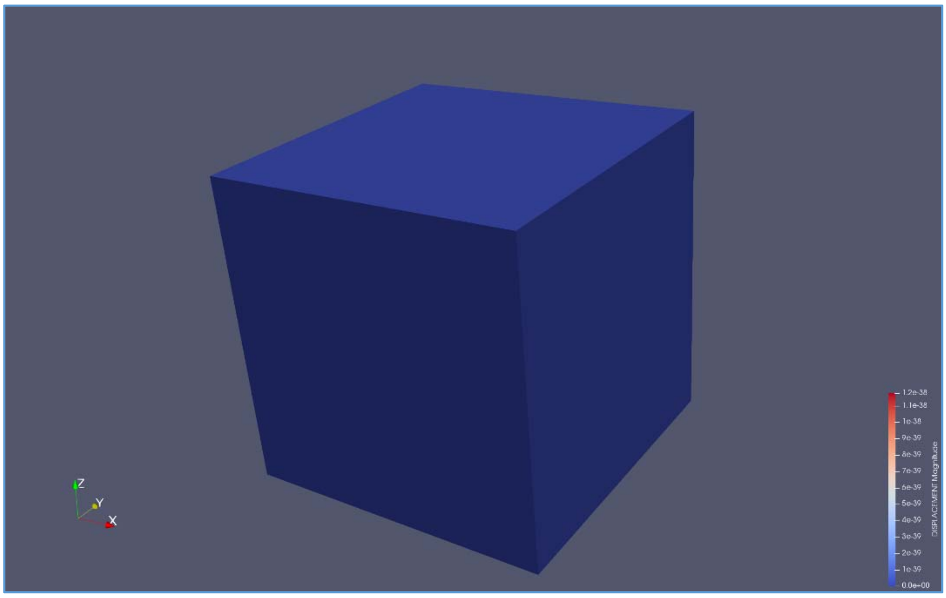

図 2.5　ParaView による mesh.inp のデータの可視化結果 (1 個の 8 節点六面体要素)

３．モジュール mod_rectmesher3d の作成

図 3.1 に節点クラス，有限要素 (計算空間) クラス，有限要素 (物理空間) クラス，直方体メッシャークラスのクラス図とクラス同士の関連を示します．

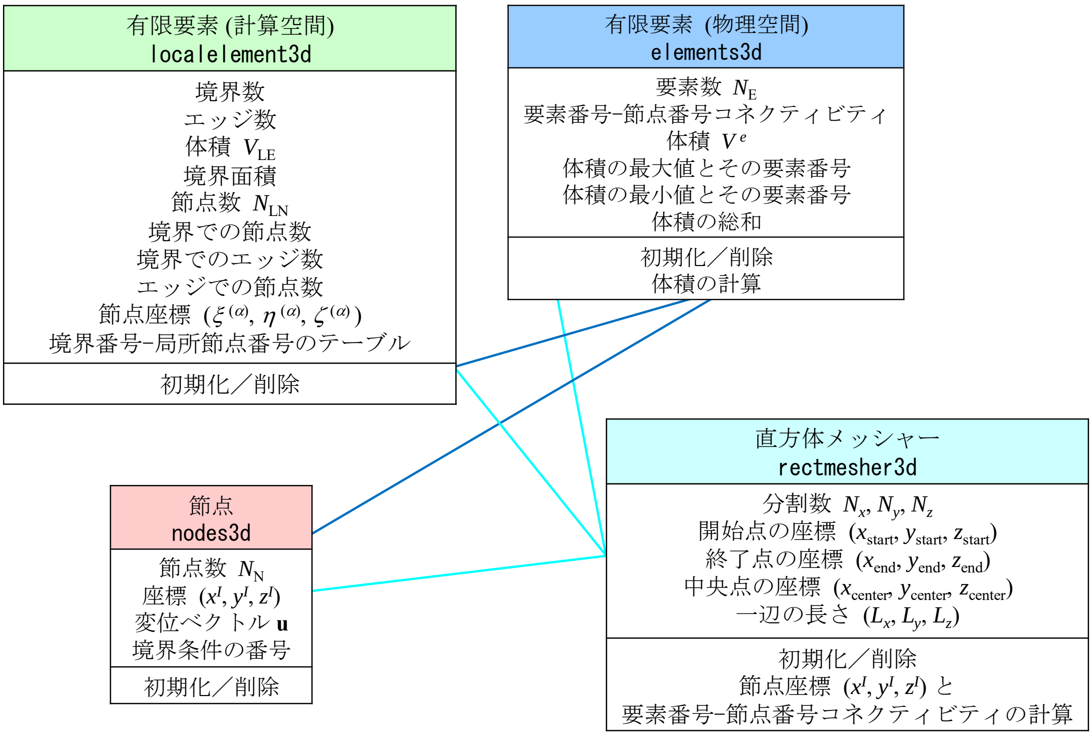

図 3.1　節点クラス，有限要素 (計算空間) クラス，有限要素 (物理空間) クラス，直方体メッシャークラスのクラス図とクラス同士の関連

図 3.2 に示される直方体領域の解析メッシュを作成します．図 3.3 に節点番号と要素番号を示します．

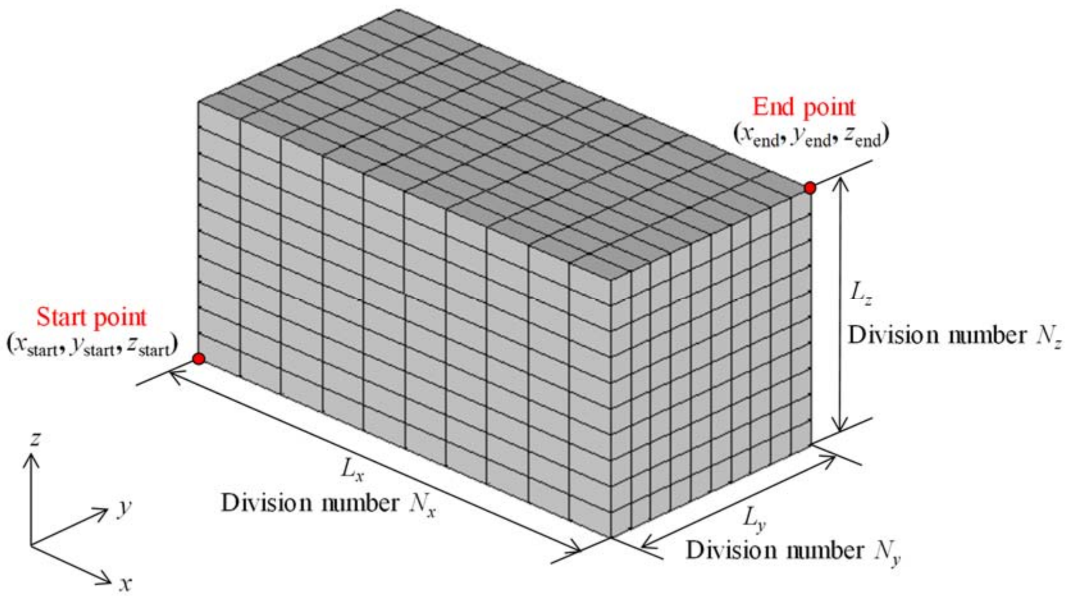

図 3.2　直方体領域の解析メッシュとパラメータ

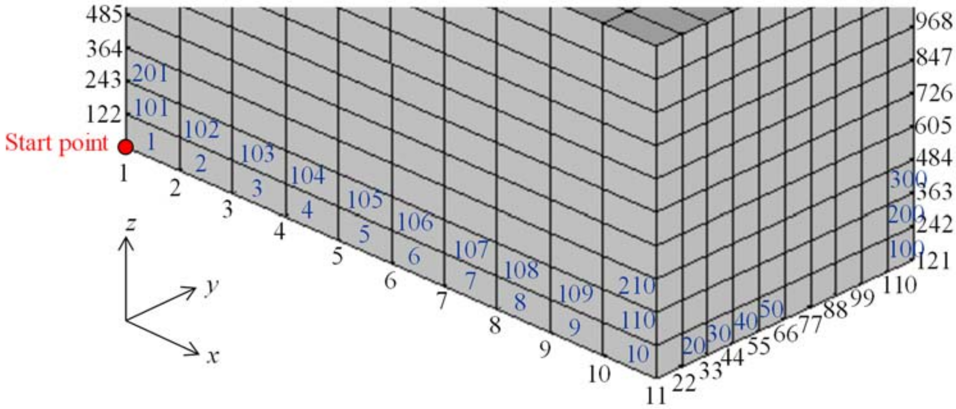

図 3.3　直方体領域の解析メッシュの節点番号 (黒色数字) と要素番号 (青色数字)

要素番号 e と節点番号 I のコネクティビティは

$$\text{connectivity}\ (\ (\alpha)\ ,\ e\ ) = I$$

のように表すことができます．ここで，(α) は要素内の局所節点番号です．図3.2に示される直方体領域の解析メッシュの場合，要素番号14の要素番号-節点番号コネクティビティは

$$\text{connectivity}\ (\ (1)\ ,\ 14\ ) = 15$$
$$\text{connectivity}\ (\ (2)\ ,\ 14\ ) = 16$$
$$\text{connectivity}\ (\ (3)\ ,\ 14\ ) = 26$$
$$\text{connectivity}\ (\ (4)\ ,\ 14\ ) = 27$$
$$\text{connectivity}\ (\ (5)\ ,\ 14\ ) = 136$$
$$\text{connectivity}\ (\ (6)\ ,\ 14\ ) = 137$$
$$\text{connectivity}\ (\ (7)\ ,\ 14\ ) = 147$$
$$\text{connectivity}\ (\ (8)\ ,\ 14\ ) = 148$$

です (図 3.4 参照).

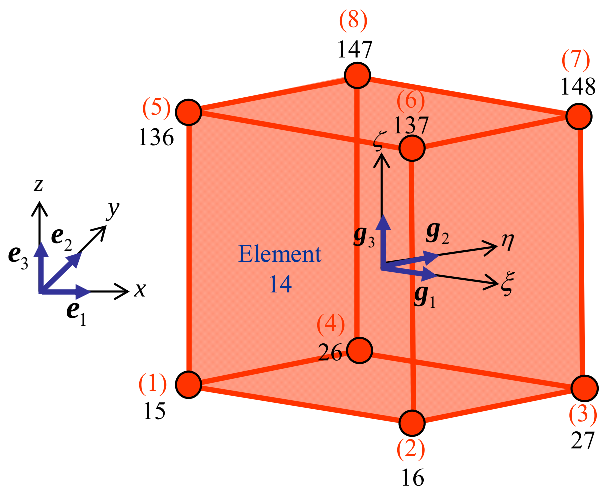

図 3.4　要素番号 14 の節点番号 (黒色数字) と局所節点番号 (赤色数字)

直方体メッシャーモジュールプログラム mod_rectmesher3d.f90 を作成してください (資料「第 3 回演習プログラム」のプログラム 6 参照)．モジュール mod_rectmesher3d を動かすため，アプリケーションモジュールプログラム mod_appli.f90 を修正します (資料「第 3 回演習プログラム」のプログラム 7 参照).

MinGW のターミナル画面で

```
$ gfortran –c mod_rectmesher3d.f90
```

と入力し，「Enter」を押してください．オブジェクトファイル mod_rectmesher3d.o が作成されます．そして，

```
$ gfortran –c mod_appli.f90
```

と入力し，「Enter」を押してください．オブジェクトファイル mod_appli.o が作成されます．

```
$ gfortran –o main_appli main_appli.f90 mod_nodes3d.o mod_localelement3d.o
mod_elements3d.o mod_rectmesher3d.o mod_appli.o
```

と (1 行で) 入力し，「Enter」を押してください．実行形式ファイル main_appli.exe が作成されます．以下の内容の入力ファイル param_meshing.dat を作成してください．

```
!DIVISION_NUMBER
 10, 10, 10
!START_POINT
 0.0, 0.0, 0.0
!END_POINT
 10.0, 5.0, 5.0
!END
```

そして，ターミナル画面に

```
$ ./main_appli
```

と入力して，「Enter」を押して，実行してください．実行すると，AVS UCD フォーマットのファイル mesh.inp が生成されます．ParaView を用いて可視化すると，図 3.5 のように，1,000 個の 8 節点六面体要素が表示されます.

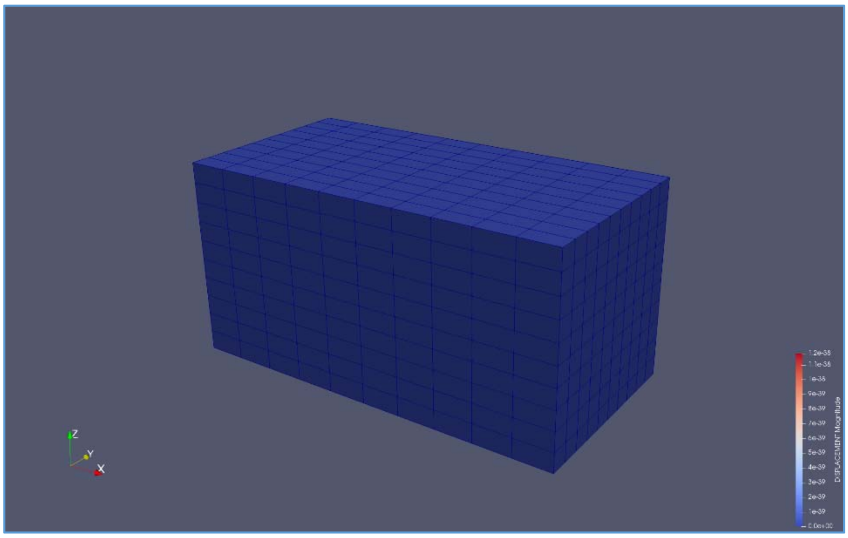

図 3.5　ParaView による mesh.inp のデータの可視化結果 (1,000 個の 8 節点六面体要素)

４．有限要素の体積計算

有限要素法では，要素の体積分を行う必要があります．以下では，Gauss の数値積分を説明します．図 4.1 に示されるように，領域 $-1<\xi<1$ で関数 $f(\xi)$ を積分します.

$$I_1=\int_{-1}^{1} f(\xi)\,d\xi$$

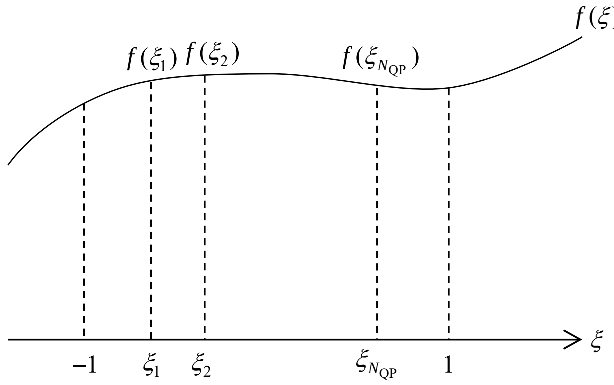

図 4.1　領域 $-1<\xi<1$ で定義された関数 $f(\xi)$

関数 $P_n(\xi)$ を n 次の Legendre 関数とします．Legendre 関数は以下の性質を持ちます.

(i) $n \neq m$ であれば,

$$\int_{-1}^{1} P_n(\xi) P_m(\xi) d\xi = 0$$

(ii) $Q(\xi)$ を $n-1$ 次以下の関数とすると,

$$\int_{-1}^{1} P_n(\xi) Q(\xi) d\xi = 0$$

(iii) $P_n(\xi_i) = 0$ となる零点 ξ_i $(i = 1,\ 2, \cdots, n)$ を持つ.

関数 $f(\xi)$ が $2n-1$ 次の多項式で表される場合,

$$f(\xi) = P(\xi)\ Q(\xi) + R(\xi)$$

となります．ただし，商 $Q(\xi)$ は $n-1$ 次以下の関数，余り $R(\xi)$ は $n-1$ 次以下の関数です．このとき,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(\xi) d\xi &= \int_{-1}^{1} \left\{ P_n(\xi)\ Q(\xi) + R(\xi) \right\} d\xi \\ &= \int_{-1}^{1} P_n(\xi)\ Q(\xi) d\xi + \int_{-1}^{1} R(\xi) d\xi \\ &= \int_{-1}^{1} R(\xi) d\xi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(\xi_i) &= P(\xi_i)\ Q(\xi_i) + R(\xi_i) \\ &= R(\xi_i)\end{aligned}$$

が成り立ちます．$R(\xi)$ を Lagrange 補間すると

$$R(\xi) = \sum_{i=1}^{n} L_i(\xi) R(\xi_i)$$

となります．よって,

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(\xi)\, d\xi &= \int_{-1}^{1} R(\xi)\, d\xi \\
&= \int_{-1}^{1} \sum_{i=1}^{n} L_i(\xi)\, R(\xi_i)\, d\xi \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{-1}^{1} L_i(\xi)\, d\xi \right) R(\xi_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i\, f(\xi_i)
\end{aligned}
$$

となります．積分点数を N_{QP} として，零点 ξ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を積分点の座標とします ($n = N_{\mathrm{QP}}$)．1 次元の場合の Gauss の数値積分は

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-1}^{1} f(\xi)\, d\xi \\
&\simeq \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{QP}}} w_i\, f(\xi_i)
\end{aligned}
$$

です．ここで，ξ_i は積分点での座標，w_i は積分点での重みです．関数 $f(\xi)$ が $2n-1$ 次の多項式であれば，厳密な積分となります．2 次元の場合の数値積分は

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi, \eta)\, d\xi d\eta \\
&\simeq \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{QP}}} \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{QP}}} w_i\, w_j\, f(\xi_i, \eta_j)
\end{aligned}
$$

であり，3 次元の場合の数値積分は

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi d\eta\, d\zeta \\
&\simeq \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{QP}}} \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{QP}}} \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{QP}}} w_i\, w_j\, w_k\, f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)
\end{aligned}
$$

です．要素の体積は

$$
\begin{aligned}
V^e &= \int_{V^e} dV \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} J\, d\xi d\eta\, d\zeta \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta}\, d\xi d\eta\, d\zeta \\
&= \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{QP}}} \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{QP}}} \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{QP}}} w_i\, w_j\, w_k \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} \right) \cdot \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta} \right|_{(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)}
\end{aligned}
$$

から求まります.

図 4.2 に節点クラス，有限要素 (計算空間) クラス，有限要素 (物理空間) クラス，直方体

メッシャークラスのクラス図とクラス同士の関連を示します．

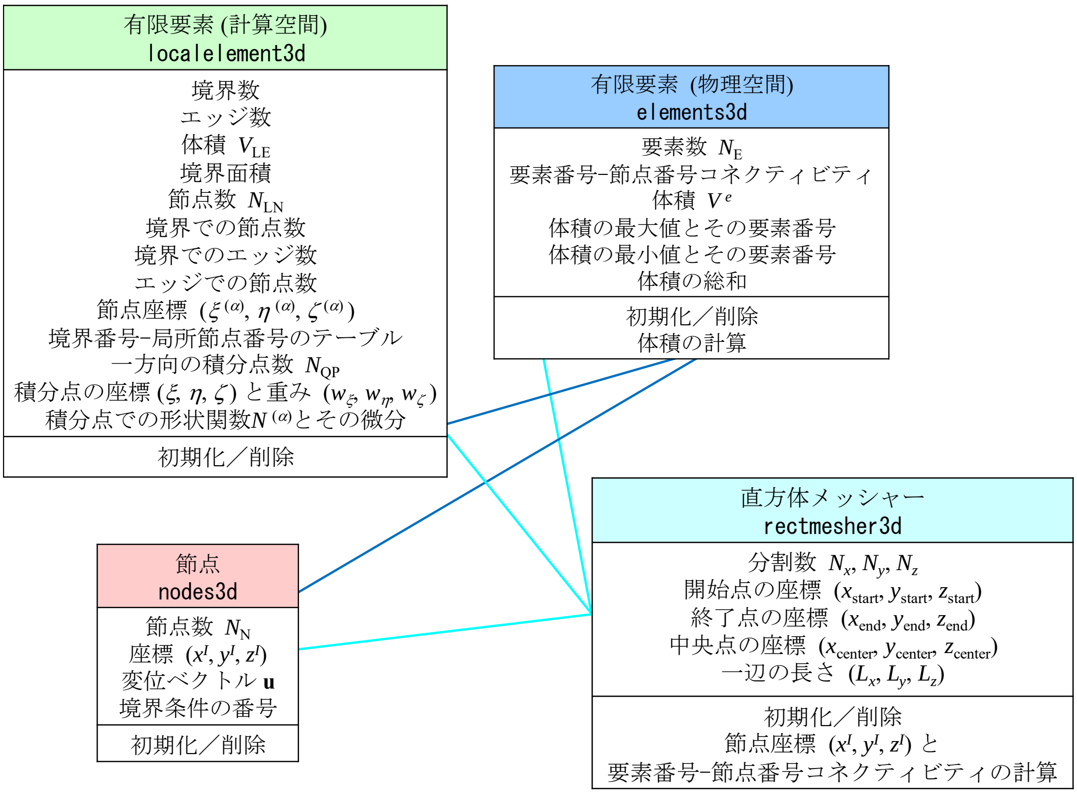

図 4.2　節点クラス，有限要素 (計算空間) クラス，有限要素 (物理空間) クラス，直方体メッシャークラスのクラス図とクラス同士の関連

有限要素 (計算空間) モジュールプログラム mod_localelement3d.f90 と有限要素 (物理空間) モジュールプログラム mod_elements3d.f90 を修正してください (資料「第 3 回演習プログラム」のプログラム 8 と 9 参照)．モジュール mod_localelement3d の Gauss の数値積分に関係する変数，モジュール mod_elements3d の体積計算サブルーチンを追加します．アプリケーションモジュールプログラム mod_appli.f90 も修正する必要があります (資料「第 3 回演習プログラム」のプログラム 10 参照)．

MinGW のターミナル画面で

```
$ gfortran –c mod_localelement3d.f90
```

と入力し，「Enter」を押してください．オブジェクトファイル mod_localelement3d.o が作成されます．そして，

```
$ gfortran –c mod_elements3d.f90
```

と入力し，「Enter」を押してください．オブジェクトファイル mod_elements3d.o が作成されます．さらに，

```
$ gfortran –c mod_appli.f90
```

と入力し，「Enter」を押してください．オブジェクトファイル mod_appli.o が作成されます．

```
$ gfortran –o main_appli main_appli.f90 mod_nodes3d.o mod_localelement3d.o
mod_elements3d.o mod_rectmesher3d.o mod_appli.o
```

と (1 行で) 入力し，「Enter」を押してください．実行形式ファイル main_appli.exe が作成されます．そして，ターミナル画面に

```
$ ./main_appli
```

と入力して，「Enter」を押して，実行してください．実行すると，AVS UCD フォーマットのファイル mesh.inp が生成されます．ParaView を用いて可視化すると，図 4.3 のように，1,000 個の 8 節点六面体要素が表示されます．体積の値が 0.25 となっていることを確認してください．

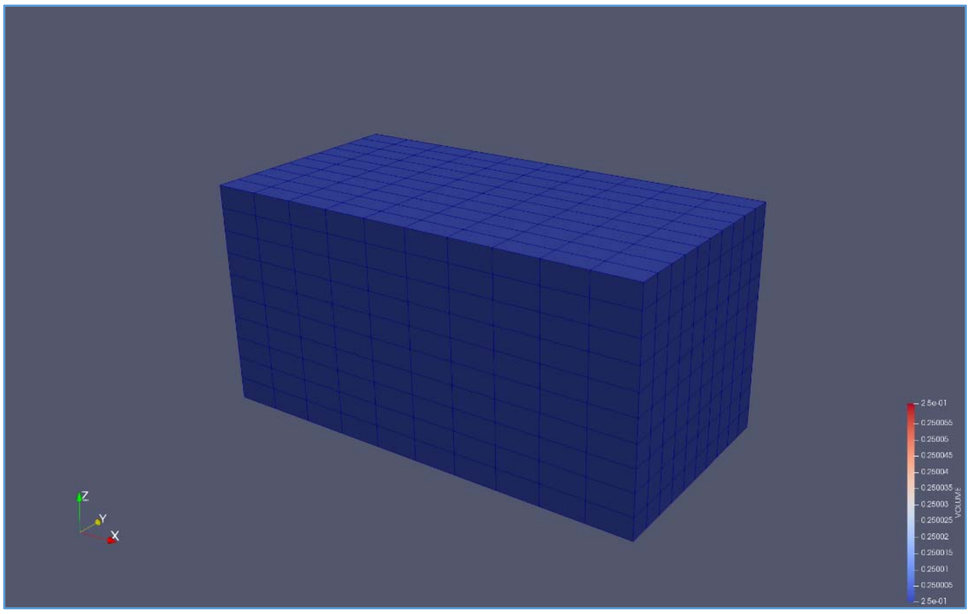

図 4.3　ParaView による mesh.inp の体積データの可視化結果 (1,000 個の 8 節点六面体要素)

５．おわりに

第 3 回では，有限要素解析を行うのに必要となる基本モジュールを用いて，直方体メッシャープログラムを作成しました．解析メッシュデータを生成し，ParaView で解析メッシュを可視化しました．そして，Gauss の数値積分を用いて有限要素の体積を計算しました．

次回は，有限要素法モジュールプログラム mod_fem3d.f90，要素剛性マトリックスモジュールプログラム elemstiffmat3d.f90，要素外力ベクトルモジュールプログラム elemexforce.f90 を作成します. 何か質問がありましたら，橋本 (メールアドレス : ghashimoto@k.u-tokyo.ac.jp)

に連絡してください.