

第4話

ロッキングとその逃れ方

有限要素法による固体・構造解析では、近似解が実際の解に比べて極端に硬く評価されるロッキング (locking) とよばれる現象が知られています。本話では、細長い構造物の曲げ変形時に不必要なせん断ひずみが生じることによる“せん断”ロッキングと、体積変化がほとんど生じない（擬似非圧縮性）材料を扱う際に現れ得る“体積”ロッキングについて、それらのメカニズムと代表的な回避方法を紹介します。

4.1 ロッキング現象とその発生メカニズム

4.1.1 はじめに

有限要素法は境界値問題を要素と節点で離散化することで、数値的に近似解を求める手法です。近似解法なので、第2話でみたような誤差を生じることは避けられず、一般的な（変位法に基づく）有限要素法では、同じ荷重条件下において厳密解と比較して小さい変形、すなわち硬い解が得られます。このような近似誤差は、第3話で説明したように、支配方程式の解として要素内に簡単な（多項式の）関数形を仮定して離散化するかぎり避けられないものです。そして、とくに低次要素を用いた曲げ変形を対象とした解析や非圧縮材料を扱う場合には、極端に剛な応答が得られ、誤差が過大になることがあります。このような有限要素解の特異な応答をロッキング (locking) 現象といい、前者をせん断ロッキング (shear locking)，後者を体積ロッキング (volumetric locking) とよんでいます。

せん断ロッキングは、低次要素を用いて細長い（あるいは薄い）構造物の曲げ変形を再現する際に、表現できる節点の動き（モード）が少なすぎて、いわゆる“偽りの”せん断ひずみ (spurious shear) が生じてしまい、実際よりも大きなエ

エネルギーが必要となることにより剛な応答となる（ロックする）現象です。一般に、要素が細長くなるほど顕著になる傾向にあります。一方、体積ロッキングは、変形前と変形後の体積変化が非常に小さい材料、すなわち擬似非圧縮性（near-, pseudo- or quasi-incompressibility）あるいは微圧縮性を示す材料の挙動を、節点の動きによって要素の領域内部で表現しようとする際に、体積変形以外の変形モードも生じないように拘束してしまうことによって現れます。以下では、典型的な例として、線形弾性材料の2次元静的つり合い問題の有限要素解析において固体要素（solid element）である4節点四辺形要素を用いた場合に生じるロッキング現象とその発生メカニズムを説明します。

4.1.2 弹性体の変形と要素剛性方程式

2次元の平面ひずみ状態における等方・線形弾性体の弾性係数行列は次式で与えられます。

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

ここで、 E はヤング（Young）率、 ν はポアソン（Poisson）比です。この係数を用いて、応力 $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \ \ \sigma_y \ \ \tau_{xy}\}^T$ とひずみ $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \ \ \varepsilon_y \ \ \gamma_{xy}\}^T$ は、

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \left[K\mathbf{i}\mathbf{i}^T + 2G\left(\bar{\mathbf{I}} - \frac{1}{3}\mathbf{i}\mathbf{i}^T\right) \right] \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{D}_{\text{vol}} + \mathbf{D}_{\text{dev}})\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.2)$$

によって関係づけられます¹。ここで、 K と G は、それぞれ体積弾性率（bulk modulus）とせん断弾性係数（shear modulus of elasticity）であり、ヤング率とポアソン比と次の関係にあります。

¹表記のひずみを体積変形成分と偏差成分に分解するためのベクトルを次式で定義しています。

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{i}\mathbf{i}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{I}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

もとの体積 V に ΔV の体積変化があるときの体積ひずみは $\Delta/V = \varepsilon_y + \varepsilon_x + \varepsilon_z$ です（平面ひずみ状態では $\varepsilon_z = 0$ ）。

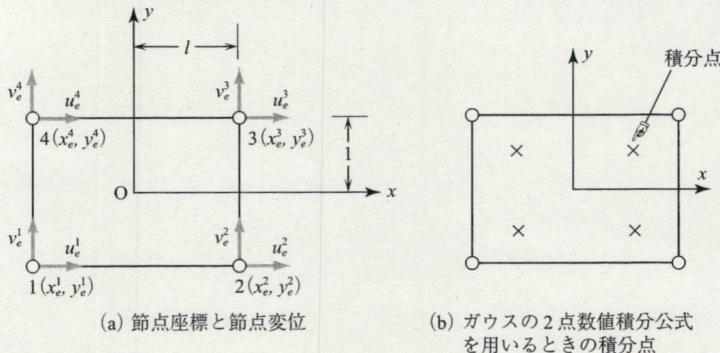


図4.1 双1次四辺形要素

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.3)$$

完全な非圧縮性はポアソン比が0.5となることを意味するので、この体積弾性係数が無限大になります。これは、応力、ひいてはひずみエネルギーが無限大になることを意味するので、別の定式化が必要となります²。完全には非圧縮ではないが、体積変形量が非常に小さい挙動を示す材料のことを擬似非圧縮性材料といいますが、ポアソン比が0.5に近くなることで体積弾性係数に関連した剛性が非常に大きな値になるので、数値的に取り扱いにくくなることが想像できます。

変位法に基づく有限要素法では、変位のみを独立変数とする弱形式(weak form)、あるいは仮想仕事式(equation of virtual work)に対して変位の補間近似を導入します。ここでは、最も単純な例として、図4.1(a)に示すような各辺が座標軸に平行な4節点四辺形要素について、以下のような形状関数を用いた変位の補間近似を考えます³。

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} = \boldsymbol{u}(x) \approx \boldsymbol{u}^h(x) = \begin{Bmatrix} \sum_{\alpha=1}^4 N_\alpha^e(\boldsymbol{x}) u_\alpha^e \\ \sum_{\alpha=1}^4 N_\alpha^e(\boldsymbol{x}) v_\alpha^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{N}}_e(\boldsymbol{x}) \tilde{\boldsymbol{u}}_e \\ \tilde{\boldsymbol{N}}_e(\boldsymbol{x}) \tilde{\boldsymbol{v}}_e \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

ここで、 $\boldsymbol{x} = \{x, y\}^T$ であり、節点変位ベクトル $\tilde{\boldsymbol{u}}_e$, $\tilde{\boldsymbol{v}}_e$ と形状関数ベクトル $\tilde{\boldsymbol{N}}_e(\boldsymbol{x})$ はそれぞれ次のように定義されています。

²完全な非圧縮性材料については、体積ひずみを恒等的にゼロにする拘束条件を付加してモデル化され、対応する圧力は構成則から定まらない独立変数となります。

³第2話でみた要素では<QL>に対応します

$$\tilde{\mathbf{u}}_e = \begin{pmatrix} u_1^e & u_2^e & u_3^e & u_4^e \end{pmatrix}^T, \quad \tilde{\mathbf{v}}_e = \begin{pmatrix} v_1^e & v_2^e & v_3^e & v_4^e \end{pmatrix}^T \quad (4.5)$$

$$\tilde{N}_e(\mathbf{x}) = \{N_1^e(\mathbf{x}) \quad N_2^e(\mathbf{x}) \quad N_3^e(\mathbf{x}) \quad N_4^e(\mathbf{x})\} \quad (4.6)$$

また、各節点に関する形状関数は次式で与えられています。

$$\left. \begin{array}{l} N_1^e(x, y) = \frac{1}{4l}(l-x)(1-y), \quad N_2^e(x, y) = \frac{1}{4l}(l+x)(1-y) \\ N_3^e(x, y) = \frac{1}{4l}(l+x)(1+y), \quad N_4^e(x, y) = \frac{1}{4l}(l-x)(1+y) \end{array} \right\} \quad (4.7)$$

さて、第3話の議論によれば、節点変位ベクトル $\tilde{\mathbf{u}}_e$, $\tilde{\mathbf{v}}_e$ は、それぞれ剛体移動、一軸引張り／圧縮、せん断、曲げの4つの基本変形モードの線形和で表すことができます（第3話、図3.3参照）。たとえば、図4.1(a)の要素の基本変形モードは、

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}_E = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l}_S = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_B = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \\ 1/4 \\ -1/4 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

ですが、これらは互いに直交すること、すなわち $\mathbf{r}^T \mathbf{l}_E = \mathbf{r}^T \mathbf{l}_S = \mathbf{r}^T \mathbf{h}_B = \mathbf{l}_E^T \mathbf{l}_S = \mathbf{l}_E^T \mathbf{h}_B = \mathbf{l}_S^T \mathbf{h}_B = \mathbf{0}$ が確認できます。

一方、この変位の近似により、要素内のひずみ $\boldsymbol{\epsilon}$ は

$$\boldsymbol{\epsilon} = \partial \mathbf{u} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{N}_e \tilde{\mathbf{u}}_e \\ \tilde{N}_e \tilde{\mathbf{v}}_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{N}_e}{\partial x} \tilde{\mathbf{u}}_e \\ \frac{\partial \tilde{N}_e}{\partial y} \tilde{\mathbf{v}}_e \\ \frac{\partial \tilde{N}_e}{\partial y} \tilde{\mathbf{u}}_e + \frac{\partial \tilde{N}_e}{\partial x} \tilde{\mathbf{v}}_e \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

のように近似されます。ここで、形状関数の微分の具体形は、

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{N}_e}{\partial x} = \{-1+y \quad 1-y \quad 1+y \quad -1-y\} \\ \frac{\partial \tilde{N}_e}{\partial y} = \{-l+x \quad -l-x \quad l+x \quad l-x\} \end{array} \right\} \quad (4.10)$$

ですので、ひずみの各成分は次のようになります。

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -u_1^e + u_2^e + u_3^e - u_4^e + (u_1^e - u_2^e + u_3^e - u_4^e)y \\ &= l_E^T \tilde{u}_e + h_B^T \tilde{u}_e y\end{aligned}\quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= (-v_1^e - v_2^e + v_3^e + v_4^e)l + (v_1^e - v_2^e + v_3^e - v_4^e)x \\ &= l_l^T \tilde{v}_e + h_B^T \tilde{v}_e x\end{aligned}\quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= (-u_1^e - u_2^e + u_3^e + u_4^e)l + (-v_1^e + v_2^e + v_3^e - v_4^e) \\ &\quad + (u_1^e - u_2^e + u_3^e - u_4^e)x + (v_1^e - v_2^e + v_3^e - v_4^e)y \\ &= l_S^T \tilde{u}_e l + l_E^T \tilde{v}_e + h_B^T \tilde{u}_e x + h_B^T \tilde{v}_e y\end{aligned}\quad (4.13)$$

ここで、要素内のひずみが上記の基本変形モードと節点変位ベクトルと内積を用いて表されることに注意してください。

x, y 方向の節点変位ベクトルをまとめて $\mathbf{d}_e = \{\tilde{u}_e^T, \tilde{v}_e^T\}^T$ と表すと、この要素に蓄えられるひずみエネルギーは、

$$U_e(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{Q_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \int_{Q_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV \approx \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e = U_e(\mathbf{d}_e) \quad (4.14)$$

となります。ここで、 \mathbf{K}_e は次式で表される要素剛性行列です。

$$\mathbf{K}_e = \int_{Q_e} \mathbf{B}_e^T \mathbf{D} \mathbf{B}_e dV = \int_{-1}^1 \int_{-l}^l \mathbf{B}_e^T \mathbf{D} \mathbf{B}_e h_e dx dy \quad (4.15)$$

ここで、 h_e は要素の厚さであり、被積分関数の多項式次数を考慮すると、一般に x, y 方向にそれぞれ 2 つの積分点をとるガウス (Gauss) の数値積分公式を適用することになっています (図 4.1(b) 参照)。

4.1.3 せん断ロッキングのメカニズム

図 4.2 に示すような連続体 (固体) の小領域の単純曲げの状態を考えましょう。簡単のためここではポアソン比をゼロと仮定すると、弾性論から、変位およびひずみが

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\sigma_0}{E} xy \\ v = \frac{\sigma_0}{2E} (l^2 - x^2) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma_0}{E} y \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (4.16)$$

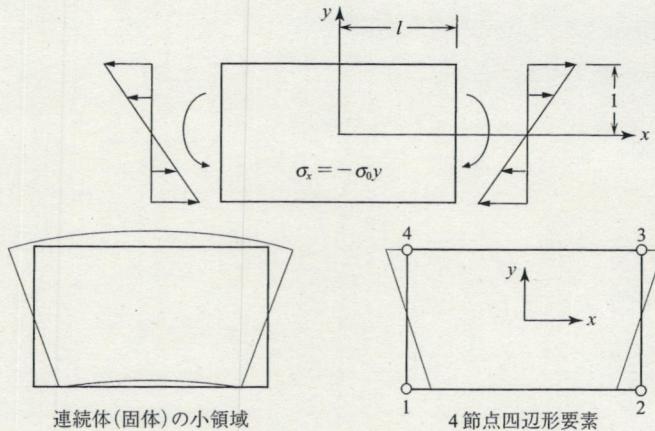


図4.2 連続体と要素の曲げ

となるので、ひずみエネルギーは次式のようになります。

$$U = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \int_{-1}^1 (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dy dx = \frac{2\sigma_0^2 l}{3E} \quad (4.17)$$

一方、同じ曲げモーメントを生ずるような要素の曲げ変形は、式(4.8)の第4式の曲げモードの節点変位を用いて、

$$\tilde{\mathbf{u}}_e = \frac{\sigma_0}{E} \mathbf{h}_B, \quad \tilde{\mathbf{v}}_e = \mathbf{0} \quad (4.18)$$

で与えられ、式(4.11), (4.12), (4.13)と基本変形モードどうしの直交性を考慮すると、要素内のひずみは次式のようになります。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} l \mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{u}}_e + \mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{u}}_e y \\ l \mathbf{h}_S^T \tilde{\mathbf{v}}_e + \mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{v}}_e x \\ l \mathbf{h}_S^T \tilde{\mathbf{u}}_e + \mathbf{h}_E^T \tilde{\mathbf{v}}_e + \mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{u}}_e x + \mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{v}}_e y \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\sigma_0}{E} \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

式(4.16)と比較して、ゼロとなるべきせん断ひずみが x について線形に分布することがわかります。これが、いわゆる“偽りの”せん断ひずみ (spurious shear) であり、同じ曲げ変形を生じるために余計にエネルギーを必要とすることになります。実際、要素に蓄えられるひずみエネルギーは、

$$U^{\text{FEM}} = \frac{2\sigma_0^2}{3E} l \left(1 + \frac{G}{E} l^2 \right) \quad (4.20)$$

であり、式(4.17)のひずみエネルギー U と比較すると、要素の細長比 ($l/1$) が大きくなるほど過大に見積もってしまうことがわかります。すなわち、細長い要素では“偽りの”せん断ひずみが発生して曲がりにくくなる（ロッキングする）ことになるのです。

また、式(4.19)のせん断ひずみ γ_{xy} が要素内の各点で恒等的にゼロになるためには、 $ll_S^T \tilde{u}_e + l_l^T \tilde{v}_e = 0$ と $h_B^T \tilde{u}_e = 0$, $h_B^T \tilde{v}_e = 0$ が必要ですが、基本変形モードの直交性から、この条件は曲げのモード h_B がゼロとなることを意味します。このことからも、この要素は曲げにくいことがわかります。

ここでは2次元固体要素を例にとって説明しましたが、3次元固体要素はもちろん、ティモシェンコ (Timoshenko) のはりやミンドリン (Mindlin) の板・シェルのモデルに対する構造要素 (structural element) でも、同様のせん断ロッキングが問題になります。

4.1.4 体積ロッキングのメカニズム

前項と同じ四辺形要素の体積ひずみは、式(4.11), (4.12)を用いると、次式のようになります。

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = l_E^T \tilde{u}_e + ll_S^T \tilde{v}_e + h_B^T \tilde{u}_e y + h_B^T \tilde{v}_e x \quad (4.21)$$

いま、要素内の任意の点での非圧縮性の条件 $v \rightarrow 0.5$ を考えると、 $\varepsilon_x + \varepsilon_y \rightarrow 0$ となり、恒等的に

$$l_E^T \tilde{u}_e + ll_S^T \tilde{v}_e \rightarrow 0, \quad h_B^T \tilde{u}_e \rightarrow 0, \quad h_B^T \tilde{v}_e \rightarrow 0 \quad (4.22)$$

であることが要求されます。この第1式についてはさまざまな節点の動きが可能であるのに対して、第2, 第3式は、基本変形モードの直交性から、 $\tilde{u}_e \rightarrow h_B$, $\tilde{v}_e \rightarrow h_B$ が生じにくい、すなわち曲げモードが現れにくい（体積ロッキングする）ことになります。

また、式(4.2)における弾性係数行列を $D = D_{\text{vol}} + D_{\text{dev}}$ のように体積成分と偏差成分の和としてと表すと、式(4.15)の要素剛性行列は $K_{\text{vol}}^e + K_{\text{dev}}^e$ と表せます。そして、境界条件をすべて考慮したうえで全体剛性方程式

$$Kd = (K_{\text{vol}} + K_{\text{dev}})d = F \quad (4.23)$$

を組み立てたとき、 K_{vol} が特異行列でなければ、 $K_{\text{vol}}d = \mathbf{0}$ を満たす未知節点変位ベクトルは $d = \mathbf{0}$ 以外にないことになり、ロッキングします。上では、式(4.21)

における $\mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{u}}_e y + \mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{v}}_e x$ の項は、要素の曲げモードが生じないような拘束として機能することを述べましたが、別の見方をすると \mathbf{K}_{vol} を正則にする働きをするのです⁴。このロッキング現象は第2話で具体的に例示されていますが、未知節点変位ベクトル \mathbf{d} の全成分がゼロに近くなるので、要素分割を細かくすることはあまり効果がありません。

4.2 ロッキングからの逃れ方

4.2.1 はじめに

前節でみたように、4節点四辺形要素では、せん断ひずみの近似式(4.13)において、曲げ変形にもかかわらず式(4.19)のようなせん断ひずみが生じることがせん断ロッキングの原因でした。また、体積ロッキングについても、体積ひずみの有限要素近似(4.21)がゼロになるための条件が曲げ変形が生じない条件と対応していました。

いずれのケースも、連続体とみなしてモデル化される固体の変形を、要素を構成する節点の限られたパターンの動き（変形モード）の重ね合わせで表現しようとすると、曲げ変形や非圧縮の拘束をうまく表せないことが原因であるといえます。したがって、より高次の多項式を用いた要素を用いれば、一般的にこれらのロッキング現象を回避できる可能性が高まります（第2話2.1.3項の数値解析例を参照してください）。高次要素を適用することは最も単純で有効なロッキングの回避方法であるのですが、万能ではないですし、モデル全体の自由度が大幅に増加してしまうなどの理由から、実務分野では低次要素の利用を好む傾向にあります。

ここでは、前節で取り上げた4節点要素などの低次要素を用いることを前提として、要素内の関数形に対して工夫を施すことでモデルの全自由度を増やすずにロッキングを回避する方法を紹介します。その1つが、第2話や3話でその性能

⁴ \mathbf{K}_{vol} には体積弾性係数が用いられるので、擬似非圧縮性材料では非常に大きな成分を有する剛性行列となります。そのため、 \mathbf{K}_{vol} が特異でなければ変形は自ずと小さくなります。同じ理由から、種々の拘束条件を近似的に満足させるためのペナルティ（penalty）法におけるペナルティ行列も特異でなければなりません。また逆に、 \mathbf{K}_{vol} 自体が非圧縮性を近似的に満足させるためのペナルティ行列であると解釈することもできます^{[1],[2]}。

を例示した非適合要素の類で、要素内ごとに独立な自由度（内部自由度）を導入する方法であり、もう1つが要素剛性行列の数値積分に際してロッキングに寄与するひずみ成分を意図的に除去する方法です。以下、これらのロッキングの回避方法を概観してみましょう。

4.2.2 要素内部自由度を用いたロッキング回避方法

第3話でみたように、4節点四辺形要素に内部自由度を追加することによって曲げ変形を表現できるよう改良することができます。第3話で紹介した Wilson-Taylor の要素^[3]の近似式(3.10)を本話の式(4.4)と同様の表記で表すと、

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{N}}_e(\boldsymbol{x})\tilde{\mathbf{u}}_e + \tilde{\mathbf{G}}_e(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_e \\ \tilde{\mathbf{N}}_e(\boldsymbol{x})\tilde{\mathbf{v}}_e + \tilde{\mathbf{G}}_e(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{\beta}}_e \end{cases} \quad (4.24)$$

となります。ここで、 $\tilde{\mathbf{G}}_e = \{1 - x^2, 1 - y^2\}$, $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_e = \{\alpha_1, \alpha_2\}^T$, $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_e = \{\alpha_3, \alpha_4\}^T$ です。このとき、せん断ひずみを計算すると

$$\gamma_{xy} = \mathbf{l}_S^T \tilde{\mathbf{u}}_e + \mathbf{l}_E^T \tilde{\mathbf{v}}_e + (\mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{u}}_e - 2\alpha_3)x + (\mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{v}}_e - 2\alpha_2)y \quad (4.25)$$

となり、4.3.1項でみた $\gamma_{xy} = 0$ となるための第2、第3の条件が $\mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{u}}_e - 2\alpha_3 = 0$, $\mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{v}}_e - 2\alpha_2 = 0$ になります。この内部自由度 α_2 と α_3 を適切に選べば曲げのモード \mathbf{h}_B が生じても“偽りの”せん断ひずみが生じること、そしてせん断ロッキングを回避することができるのです。

また、式(4.24)を用いれば、体積ひずみの式(4.21)の代わりに

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \mathbf{l}_E^T \tilde{\mathbf{u}}_e + \mathbf{l}_S^T \tilde{\mathbf{v}}_e + (\mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{u}}_e - 2\alpha_4)y + (\mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{v}}_e - 2\alpha_1)x \quad (4.26)$$

となります。これが恒等的にゼロになる条件も $\mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{u}}_e \rightarrow 0$, $\mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{v}}_e \rightarrow 0$ の代わりに $\mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{u}}_e - 2\alpha_4 \rightarrow 0$, $\mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{v}}_e - 2\alpha_1 \rightarrow 0$ となるので、せん断ロッキングが回避できるのと同じ理由で体積ロッキングも回避できることがわかります。

さて、ここでの内部自由度 α_e の“内部”とは、隣接要素の変形とは独立であることを意味し、要素剛性方程式をつくる際に消去できます。たとえば、式(4.24)を用いると、要素剛性方程式が次式のようになります。

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{dd}^e \mathbf{d}_e + \mathbf{K}_{d\alpha}^e \alpha_e = \mathbf{f}_e \\ \mathbf{K}_{\alpha d}^e \mathbf{d}_e + \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^e \alpha_e = \mathbf{s}_e \end{cases} \quad (4.27)$$

ここで、 $\mathbf{d}_e = \{\tilde{\mathbf{u}}_e^T, \tilde{\mathbf{v}}_e^T\}^T$, $\boldsymbol{\alpha}_e^T = \{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_e^T, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_e^T\}^T$, とおいており、 \mathbf{K}_{dd}^e , $\mathbf{K}_{d\alpha}^e$, \mathbf{K}_{ad}^e , $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^e$ は、それぞれ節点変位ベクトルと内部自由度ベクトルに対応した要素剛性行列、 \mathbf{f}^e と \mathbf{s}^e はそれぞれの要素荷重ベクトルです。この式の第2式を内部自由度 $\boldsymbol{\alpha}^e$ について解くと、 $\boldsymbol{\alpha}^e = (\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^e)^{-1} (\mathbf{s}_e - \mathbf{K}_{ad}^e \mathbf{d}_e)$ となるので、これを第1式に入れると、次式のように節点変位ベクトル \mathbf{d}_e のみの要素剛性方程式にまとめることができます⁵。

$$[\mathbf{K}_{dd}^e - \mathbf{K}_{d\alpha}^e (\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^e)^{-1} \mathbf{K}_{ad}^e] \mathbf{d}_e = \mathbf{f}_e - \mathbf{K}_{d\alpha}^e (\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^e)^{-1} \mathbf{s}_e \quad (4.28)$$

ここで、 \mathbf{K}_{dd}^e は式(4.15)の剛性行列と同一のものであり、 $\mathbf{K}_{d\alpha}^e (\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^e)^{-1} \mathbf{K}_{ad}^e$ は、ロッキングを回避するためのその補正項とみなすことができます。

同様の論理で、内部自由度を追加することでロッキングを回避したり精度向上を図っている要素は多数存在します。なかでも、汎用FEM解析ソフトでも提供されることが多いものとしては、拡張ひずみ仮定(Enhanced Assumed Strain, EAS)要素^[4]やu-p混合法要素^[5]などがあります。EAS要素では拡張ひずみ(enhaned strain)を要素内の独立変数として追加するもので、u-p混合法要素⁶では圧力をそれぞれ内部自由度として追加します。

4.2.3 積分操作によるロッキング回避方法

前節でみたように、ロッキングは、基本的に要素内に仮定した関数形に起因して、節点変位に意図しない拘束が与えられることで発生することを述べました。ここでは、主に体積ロッキングへの対策として、そのような余計な拘束の原因となっている項を要素剛性行列の数値積分に際して（あるいは、先立って）除去する方法を説明します。

次数低減積分法 一般に、要素剛性行列の積分計算に際しては式(4.15)のように数値積分法を適用します。数値積分に必要な積分点の数は、多項式を組み合わせてできる被積分関数の関数形に応じて決まりますが、前節の議論から、厳密に積分したのでは余計な拘束までが剛性行列の性質として厳密に反映されてしまいま

⁵このような操作を静的縮約(static condensation)と呼びます。これにより内部自由度が消去されるので自由度は増えないことがわかります。

⁶変位(u)と圧力(p)を独立変数にとる変分方程式(弱形式)において、それぞれに対して別々の形状関数を用いる、いわゆる混合補間に基づく要素の総称です。圧力を要素間で不連続に近似し、内部自由度として消去するのが一般的です^[6]。

す。そこで、積分点数を規定の数よりも減らすことで、不必要的拘束を除去する方法が提案されました。

たとえば、図 4.1 の双 1 次四辺形要素の積分点数は一般に $2 \times 2 = 4$ 点ですが、図 4.3(a) のように座標の原点 $(x, y) = (0, 0)$ の 1 点での被積分関数の値のみで式(4.15)の数値積分を行うことを考えます。このとき、せん断ロッキングの原因となっている式(4.19)における“偽りの”せん断ひずみの項 $\mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{u}}_e x + \mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{v}}_e y$ や式(4.21)の体積ひずみにおける $\mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{u}}_e y + \mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{v}}_e x$ の項がゼロになり、余計な拘束を除去できます。このように、要素剛性行列の計算に厳密な積分を行うのに必要な積分点数を 1 つ減らしてロッキングを回避する方法を次数低減積分 (reduced integration) 法とよんでいます。

しかし、この方法では式(4.19)における垂直ひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ における $\mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{u}}_e y$ や $\mathbf{h}_B^T \tilde{\mathbf{v}}_e x$ の項まで除外してしまうので、要素内に応力・ひずみが発生しないことになり、曲げ変形モードがいわゆるゼロエネルギー モード (zero-energy mode)となってしまいます⁷。この手法で解析を行うと、結果として図 4.3(c) に示すようなアワーグラス (砂時計) モード (hourglass mode) とよばれる物理的に不適切な変形モードが現れることがあります。解析誤差を増大させてしまう可能性があることに注意が必要です。ただし、次数低減積分法において、ひずみ成分に擬似的に曲げ変形に對して抵抗する項を加えることでこの問題を回避するアワーグラス制御 (hourglass control) 法^[7] を適用すると、アワーグラスマードが出ること (hourgassing) をある程度抑制できることが知られています。次数低減積分法では、積分点を減らすことで計算コストを劇的に軽減することができる利点から、とくに動的陽解法のように時間増分を小さくしてステップを非常に多くとるような解析コードでは、これにアワーグラス制御法を適用した要素が積極的に活用されています。

選択的次数低減積分法 前述の次数低減積分法は、体積ロッキングを回避する手法として有効ですが、アワーグラス制御を適用する際にはパラメータ設定に留意する必要があります。また、これを適用してもアワーグラスマードの発生を防げないことがしばしばあります。アワーグラスマードの発生は、前述のように、剛性行列の積分に際してすべてのひずみ成分を要素内で一定値として評価することにより、

⁷ 次数低減積分を用いると、全体剛性行列 (4.23) の体積成分 \mathbf{K}_{vol} が特異行列になるので体積ロッキングを回避できますが、同時に偏差成分 \mathbf{K}_{dev} も特異になります。結果として全体剛性行列 \mathbf{K} も特異となります。その階数 (ランク) を下げるのに寄与したゼロ固有値が曲げモードに対応します。

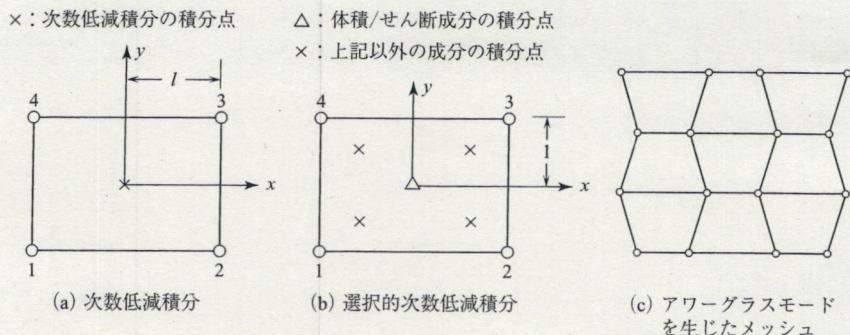


図4.3 双1次四辺形要素の積分点とアワーグラスマード

必要な項までも消去してしまうことが原因といえます。そこで、図4.3(b)のように、体積ロッキングに対して体積ひずみに関する項のみ1点で積分する（積分点を減らす）方法が考えられます。これが、選択的次数低減積分(selective reduced integration)法です⁸。

たとえば、4.1.4項において、要素剛性行列は体積成分と偏差成分の和 $\mathbf{K}_{\text{vol}}^e + \mathbf{K}_{\text{dev}}^e$ のように表すことができると述べましたが、体積変形に関する $\mathbf{K}_{\text{vol}}^e$ の積分に際してのみ次数低減積分を適用し、 $\mathbf{K}_{\text{dev}}^e$ には標準的な数値積分を行うことで余計な拘束を課す働きをするひずみ成分を除去し、ゼロエネルギーモードの発生も防ぐことができます^{[2], [9]}⁹。なお、この方法では曲げモードによるエネルギー寄与分の一部もゼロにしてしまうので、せん断ロッキングも抑えられますが、軟らかすぎる応答が得られるので注意が必要です。

B-bar 要素 上記の選択的次数低減積分法では、要素剛性行列を体積成分と偏差成分の和に分解できることを前提にしているので、異方性材料や非線形問題などに適用するのは困難です。そこで、より一般的で汎用性の高い選択的次数低減積分法として、剛性行列の積分計算に先立って、余計な拘束の原因となるひずみ成分を次数低減積分点での値に置き換える方法が考案されています。

たとえば、本話の例に用いている4節点四辺形要素について求めた式(4.14)や

⁸ 次数低減積分および選択的次数低減積分法を適用した要素は、ある種のu-p混合法要素と等価であることが知られています^[8]。

⁹ 弹性係数行列(4.1)に対する他の分解方法も可能であり、対応して剛性行列の分解もここでの例が唯一ではありません^[11]。

式(4.15)において、要素内のひずみは勾配オペレータ (\mathbf{B} マトリックス) \mathbf{B}_e を用いて $\boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{B}_e \mathbf{d}_e$ と近似していますが、体積ひずみ成分 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{vol}} = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)\mathbf{i}$ と偏差ひずみ成分 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{dev}} = \boldsymbol{\varepsilon} - (1/3)\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{vol}}$ に分解し、対応して \mathbf{B}_e を分解することで、

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx [\mathbf{B}_e^{\text{vol}} + (\mathbf{B}_e - \mathbf{B}_e^{\text{vol}})] \mathbf{d}_e = (\mathbf{B}_e^{\text{vol}} + \mathbf{B}_e^{\text{dev}}) \mathbf{d}_e \quad (4.29)$$

と書けます。そして、この第1項目の $\mathbf{B}_e^{\text{vol}}$ を要素中心の1点で評価した $\bar{\mathbf{B}}_e^{\text{vol}}$ で置き換えた \mathbf{B} -bar マトリックス

$$\bar{\mathbf{B}}_e = \bar{\mathbf{B}}_e^{\text{vol}} + \mathbf{B}_e^{\text{dev}} \quad (4.30)$$

をもとの \mathbf{B}_e の代わりに用いれば、剛性行列の数値積分に先立って余計な拘束の原因となる項をひずみ成分から除去することができます。この要素は、文字どおり \mathbf{B} -bar 要素 (\mathbf{B} -bar element)^[10] とよばれています¹⁰。

この例のような \mathbf{B} マトリックスの操作を行うと、曲げモードによるエネルギー寄与分の一部を除くことになるので、せん断ロッキングもある程度は緩和することができます。ただし、前節の要素内部自由度を追加する方法と異なり、この要素内の積分操作による方法は要素の近似関数の次数を高次化するものではないので、せん断ロッキングの回避を期待するものではありません¹¹。

\mathbf{B} -bar 法は、変位の勾配オペレータを置き換えるだけでロッキングを回避することができるので、プログラムへの実装も容易ですし、 \mathbf{D} を体積成分と偏差成分に分解することを前提にしないので異方性材料にも適用できます。また、非線形問題における内力ベクトルの計算や接線剛性行列の計算にも利用できるので、さまざまな拡張が試みられています。

¹⁰ この例の要素は、体積ひずみにかかる勾配オペレータを要素中心の1点で評価したうえで剛性行列を積分するので、選択的次数低減積分の一種とみなされています。また、 $\bar{\mathbf{B}}_e^{\text{vol}}$ として要素内平均を用いる平均膨張ひずみ (mean-dilatation) 法^[11] も \mathbf{B} -bar 法の一種といえます。

¹¹ はり、板・シェルなどの構造要素では、次数低減積分によりせん断ロッキングを回避することができます^{[9],[12]}。また、連続体要素に対するせん断ロッキング対策として、要素の方向を考慮してせん断ひずみ成分に選択的に低減積分を施す方法も提案されています。

4.3 体積およびせん断ロッキング現象の数値実験

ここでは、体積およびせん断ロッキングに関する数値実験を行い、前節で紹介した回避方法のなかで代表的なものの効果を見ることにします。

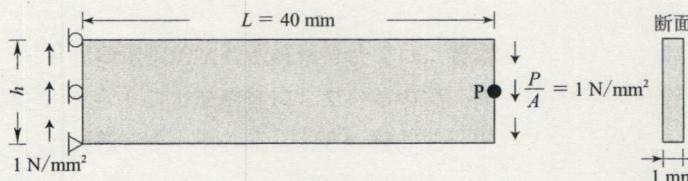
図4.4(a)のような第2話2.1.3項と同様のはり状平面構造物について、平面ひずみ状態を仮定して、以下の2ケースの数値実験を考えます。

Case A (せん断ロッキングの数値実験)：ポアソン比 ν を0.3に固定して、高さ h を1～14 [mm]の範囲で変化させる。

Case B (体積ロッキングの数値実験)：高さ $h=10$ [mm]に固定して、ポアソン比 ν を0.3～0.499の範囲で変化させる。

いずれのケースも、(ゆがみのない)長方形要素のみを対象とし、図4.4(b)に示すような、2.1.3項における[Q3]と同様のメッシュを要素数を固定して用いることにします。また、前節で説明した、変位法に基づく4節点四辺形要素(QUAD4)におけるロッキング現象の回避方法の中から、次の3つの方法を取り上げます。

- (1) Wilson-Taylorの要素(QM6)の利用(4.2.2項参照)
- (2) B-bar要素(B-bar)の利用(4.2.3項参照)
- (3) 剛性行列の体積成分に選択的次数低減積分(SRI)を適用(4.2.3項参照)



(a) はり状の平面構造物

$h = 1 \sim 14 \text{ mm}$ (Case A では 10 に固定)		平面ひずみ ヤング率 : $E = 30000 \text{ MPa}$ ポアソン比 : $\nu = 0.3 \sim 0.499$ (Case B では 0.3 に固定)
---	--	--

(b) FE メッシュ[Q3]

図4.4 はり状平面構造物による体積およびせん断ロッキング現象の数値実験の条件

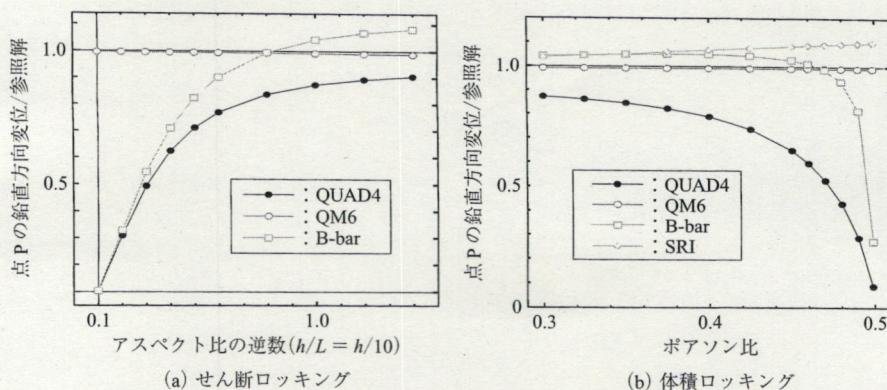


図 4.5 ロッキング現象の数値実験結果

ただし、Case A については(3)は考えません。

まず、図 4.5(a)に、せん断ロッキングに関する数値実験 (Case A) の結果を示します。ここで、縦軸は図 4.4(a)の点 P の鉛直方向変位を参照解で正規化したものであり、横軸は要素のアスペクト比 (細長比) の逆数です。この図から、QUAD4 や B-bar 要素では、はり状構造の高さが低いほど、すなわち要素のアスペクト比が大きくなるほど剛な挙動になる (せん断ロッキングする) ことがわかります。とくに、もともと B-bar 要素は体積ロッキングを回避するために提案されたものですので、せん断ロッキングに対しては精度の劣化を免れないことに注意が必要です。これに対して、曲げモードを内部自由度に有する QM6 を用いると、極端に細長い要素の場合でも参照解と一致した解が得られています。これは、内部自由度の働きにより“偽りのせん断ひずみ”は生じることがなくなり、アスペクト比によらず曲げ変形を厳密に再生し得るからです。ただし、この傾向は長方形要素のみに当てはまるものであり、任意の四辺形形状のアイソパラメトリック要素では表現できるモードがかぎられるために、せん断ロッキングが現れる可能性があります。

次に、体積ロッキングに関する数値実験 (Case B) の結果を、図 4.5(b)に示します。4.1.4 項で考察したように、標準的な 4 節点四辺形要素 (QUAD4) は、ポアソン比 ν が 0.5 に近づくほど剛な応答を示して (体積ロッキングして) おり、約 $\nu = 0.45$ を超えると 50% 以上の誤差を生ずることがわかります。これに対して B-bar 要素は $\nu = 0.48$ 以上になると急激に剛になりますが、 $\nu = 0.45$ 程度では

ロッキングを回避できています。ただし、前節でも述べたように曲げに関する剛性までも小さく評価するので、 $\nu = 0.45$ 以下では参照解に比べて大きめの変形になることに注意が必要です。一方、選択的低減積分を施した場合（SRI）、B-bar要素と同様に曲げに関する剛性を小さめに見積もりますが、 $\nu = 0.499$ 程度でもロッキングしません。また、Wilson-Taylor の要素（QM6）を用いると、どんな値のポアソン比でも参照解とほぼ一致する解が得られています。これは、4.2.2 項および第3話でみたように、曲げ変形モードに関する内部自由度の存在により、曲げと非圧縮変形が共存できるようになるためです¹²。

4.4 まとめ

本話では、2次元問題における4節点四辺形要素を例にとって、せん断および体積ロッキングの発生メカニズムを解説するとともに、自由度数を増やすことでこれらのロッキングを回避するための代表的な方法を紹介しました。このような手法は、市販の有限要素解析プログラムにも実装されており、ユーザーはそれぞれの要素の得手不得手をよく理解したうえで利用するのが望ましいといえます。

本話で例として用いた要素は、2次元問題で長方形、あるいは正方形に限定しました。しかし、実務的には任意形状のアイソパラメトリック要素が用いられる場面が多いはずです。第2、3話でみたように、ゆがんだ要素では必然的に精度が低下します。本話で紹介したロッキングのメカニズムやそれを回避するための方策は、ゆがんだ要素に対してもある程度の効果を発揮しますが、ゆがみに起因する精度劣化を防ぐためのものではありません。有限要素解析に際しては、常にロッキングと要素のゆがみが、近似解の誤差を大きくする可能性をもっていることを認識しておくべきでしょう。

¹² 内部自由度を用いるロッキング回避方法は、微小変形問題については非常に有効ですが、非線形問題で大きなひずみが生じる際に次数低減積分法で現れるようなアワーグラスモードが発生することが確認されています^[13]。また、ゆがみによる精度劣化も防げません。非適合要素がどのような問題に対しても有効なわけではないことに注意しましょう。

参考文献

- [1] T.J.R. Hughes : Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Dover, 2000.
- [2] R.D. Cook, D.S. Malkus, M.E. Plesha and R.J. Witt : Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Fourth Edition, John Wiley & Sons, 2002.
- [3] R.L. Taylor, P.J. Beresford and E.L. Wilson : A non-conforming element for stress analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.10, pp.1211–1220, 1976.
- [4] (たとえば) J. C. Simo and A. Rifai : A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.29, pp.1595–1638, 1990.
- [5] (たとえば) T. Sussman and K. J. Bathe : A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis, *Comput. Struct.*, Vol.26, pp.357–409, 1987.
- [6] K.J. Bathe : Finite Element Procedures, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1996.
- [7] (たとえば) D.P. Flanagan and T. Belytschko : Uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.17, pp.679–706, 1981.
- [8] D.S. Malkus and T.J.R. Hughes : Mixed finite element methods – reduced and selective integration techniques: a unification of concepts, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol.15, No.1, pp.63–81, 1978.
- [9] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor and J.Z. Zhu : The Finite Element Method: Its Basis And Fundamentals, 6th Edition, Butterworth-Heinemann, 2005.
- [10] T.J.R. Hughes : Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol.15, pp.1413–1418, 1980.
- [11] J.C. Nagtegaal, D.M. Parks and J.R. Rice : On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol.4, pp.153–178, 1974.
- [12] 山田貴博 : 計算力学レクチャーシリーズ 9 高性能有限要素法, 日本計算工学会 編, 丸善, 2006.
- [13] P. Wriggers and S. Reese : A note on enhanced strain methods for large deformations, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol.135, pp.201–209, 1996.