Лекция 5

Функция распределения случайной величины. Законы распределения случайных величин

- *Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение и другие числа*, призванные в сжатой форме выразить наиболее существенные черты распределения, называются ***числовыми характеристиками случайной величины***.

- Сама величина X – ***случайная***, а ее числовые характеристики являются величинами ***неслучайными***, постоянными.

1. Функция распределения случайной величины

- Описание случайной величины X с помощью закона распределения не является единственным и не универсально.
- Оно неприменимо для ***непрерывной*** случайной величины:

1) нельзя перечислить все бесконечное несчетное множество ее значений;

2) вероятности каждого отдельно взятого значения непрерывной случайной величины равны нулю.

1. Функция распределения случайной величины

- Для описания закона распределения случайной величины X возможен другой подход:

рассматривать не вероятности событий $X=x$ для разных x (как это имеет место в ряде распределения), а вероятности события $X<x$, где x – текущая переменная.

Вероятность $P(X<x)$, очевидно, зависит от x, т.е. является некоторой функцией от x.

1. Функция распределения случайной величины

- ***Определение.*** *Функцией распределения случайной величины* X называется функция $F(x)$, выражающая для каждого x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x:

$$F(x) = P(X < x).$$

- Функцию $F(x)$ иногда называют ***интегральной функцией распределения*** или ***интегральным законом распределения.***

- **Геометрически** функция распределения интерпретируется как *вероятность того, что случайная точка* X *попадет левее заданной точки* x

Пример. Дан ряд распределения случайной величины

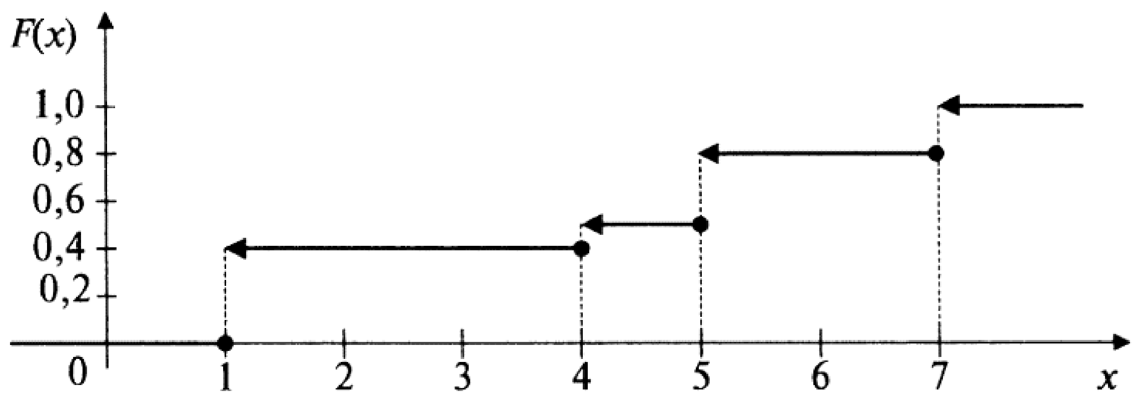
X:

x_i	1	4	5	7
p_i	0,4	0,1	0,3	0,2

Найти и изобразить графически её функцию распределения.

Решение. Будем задавать различные значения х и находить для них $F(x) = P(X < x)$.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ 0{,}4 & \text{при} \quad 1 < x \le 4, \\ 0{,}5 & \text{при} \quad 4 < x \le 5, \\ 0{,}8 & \text{при} \quad 5 < x \le 7, \\ 1{,}0 & \text{при} \quad x > 7. \end{cases}$$



Функция распределения любой дискретной случайной величины есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины и равны вероятностям этих значений.

Сумма всех скачков функции $F(x)$ равна 1.

1. Функция распределения случайной величины

Общие свойства функции распределения

- **1.** Функция распределения случайной величины есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей:

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

- **2.** Функция распределения случайной величины есть неубывающая функция на всей числовой оси.

- **3.** На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности равна единице, т.е.

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

- 4. Вероятность попадания случайной величины в интервал $[x_1, x_2)$ (включая x_1) равна приращению ее функции распределения на этом интервале, т.е.

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

2. Законы распределения ДСВ

- Особенно важными являются ДСВ, которые принимают значения из множества целых неотрицательных чисел 0, 1, 2, ...

Эти величины описывают реальные задачи.

- К наиболее распространенным законам распределения ДСВ относят:
- ***биномиальное распределение***,
- ***распределение Пуассона,***
- ***геометрическое распределение***.

2. Законы распределения ДСВ

- *Определение.* Дискретная случайная величина X имеет биномиальный закон распределения с параметрами n и p, если она принимает значения $0, 1, 2, \ldots, m, \ldots, n$ с вероятностями $P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$

где $0 < p < 1, q = 1 - p$.

X	0	1	2	…	$n-1$	n
P	q^n	$C_m^1 pq^{n-1}$	$C_m^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_m^{m-1} p^{n-1} q$	p^n

2. Законы распределения ДСВ

- *Теорема*. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, распределенной по биномиальному закону:

Числовые характеристики ДСВ X при биномиальном распределении

$$M(X) = nq \;; \qquad D(X) = npq; \qquad \sigma = \sqrt{npq}$$

- Очевидно, что определение биномиального закона корректно, так как основное свойство ряда распределения

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$$

выполнено, так как сумма в левой части является сумой всех членов разложения бинома Ньютона:

$$q^n + C_n^1 pq^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \cdots C_n^m p^m q^{n-m} + \cdots + p^n = (q+p)^n = 1^n = 1$$

2. Законы распределения ДСВ

Следствие. Математическое ожидание частости $\frac{m}{n}$ события в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может наступить с одной и той же вероятностью p, равно p, т.е. $M\left(\frac{m}{n}\right) = p$, а дисперсия $D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{pq}{n}$

Доказательство. Частость события $\frac{m}{n}$ есть $\frac{X}{n}$, т.е. $\frac{m}{n} = \frac{X}{n}$, где X – случайная величина, распределенная по биномиальному закону. Поэтому

$$M\left(\frac{m}{n}\right) = M\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} M(X) = \frac{1}{n} \cdot np = p,$$

$$D\left(\frac{m}{n}\right) = D\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2} D(X) = \frac{1}{n^2} \cdot npq = \frac{pq}{n}.$$

2. Законы распределения ДСВ

- *Смысл аргументов* в функциях *f(x)* и *Ф(x)*, содержащихся в локальной и интегральной теоремах Муавра-Лапласа:

- 1) аргумент *x* функции *f(x)* есть отклонение числа $X=m$ появления события *A* в *n* независимых испытаниях, распределенного по биномиальному закону, от его среднего значения $M(X)=np$, выраженное в стандартных отклонениях

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{npq}$$

- 2) аргумент *x* функции *Ф*(*x*), рассматриваемой в следствии интегральной теоремы Муавра-Лапласа, есть отклонение *A* частости *m/n* события *A* в *n* независимых испытаниях от его вероятности *p* в отдельном испытании, выраженное в стандартных отклонениях

$$\sigma\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt{D\left(\frac{m}{n}\right)} = \sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

2. Законы распределения ДСВ

- Если в схеме повторных независимых испытаний $n \to \infty$, а число p близко к 0, и кроме того $np \to \lambda$ при $n \to \infty$, тогда ДСВ X, которая определяет количество появлений определённого события с схеме Бернулли имеет **распределение Пуассона**, которое задаётся таблицей:

X	0	1	2	...	$n-1$	n
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$

Определение. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если она принимает значения 0, 1, 2,..., m,... (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = P_m(\lambda)$$

2. Законы распределения ДСВ

- **Определение.** Дискретная случайная величина X=*m* имеет *геометрическое распределение* с параметром *p*, если она принимает значения 1,2,..., *m*, ... (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями

$$P(X = m) = pq^{m-1}$$

где $0<p<1$, $q = 1 - p$.

- *Случайная величина X=m, имеющая геометрическое распределение, представляет собой число m испытаний, проведенных по схеме Бернулли, с вероятностью p наступления события в каждом испытании до первого положительного исхода.*

- Числовые характеристики ДСВ *X*, которые имеют геометрический закон распределения:

$$M(X) = \frac{1}{p} \qquad D(X) = \frac{q}{p^2}$$

2. Законы распределения ДСВ

Ряд геометрического распределения:

X	1	2	3	...	m	…
p	p	pq	pq^2	...	pq^{m-1}	…

Вероятности pq образуют *геометрическую* прогрессию с первым членом p и знаменателем q (отсюда название *«геометрическое распределение»*).

Определение геометрического распределения корректно, так как сумма ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p + pq + \cdots + pq^{m-1} + \cdots = p(1 + q + \cdots + q^{m-1} + \cdots) = p\frac{1}{1-q} = 1,$$

(так как $\frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$ сумма ряда $\sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1}$ при $|q|<1$).

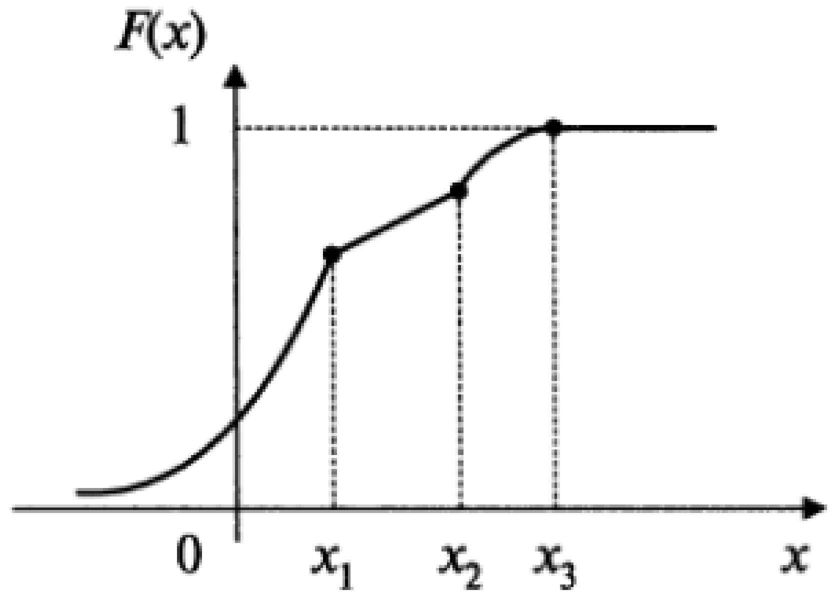
3. Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности

- ***Определение.*** Случайная величина X называется непрерывной, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек.

Будем рассматривать пространство элементарных событий как совокупность всех точек числовой оси.

В этом случае введенная ранее функция распределения имеет вид:

$$F(x) = P(X > x)$$



3. Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности

Пусть функция распределения является непрерывной. Вероятность того, что в результате испытаний случайная величина X примет значение a, где a - произвольное действительное число

$$P(x=a)=\lim_{n\to\infty}(a\le X<a+\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}(-F(a)+F(a+\frac{1}{n}))=\lim_{n\to\infty}(F(a+\frac{1}{n})-F(a))=0$$

Теорема. Вероятность любого отдельно взятого значения непрерывной случайной величины равна нулю.

- Из приведенной выше теоремы следует, что нулевой вероятностью могут обладать и возможные события, так как событие, состоящее в том, что случайная величина X приняла конкретное значение a, является возможным.

3. Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности

- ***Следствие.*** Если X - непрерывная случайная величина, то вероятность попадания случайной величины в интервал (x_1, x_2) не зависит от того, является этот интервал открытым или закрытым, т.е.

$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 < X \le x_2) = P(x_1 \le X \le x_2)$$

Определение. Плотностью вероятности (плотностью распределения или просто плотностью) $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{(x \le X \le x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

3. Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности

- ***Свойства плотности вероятности***

1. Плотность вероятности является неотрицательной функцией.

2. $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(U)dU$.

$$F(x) = F(x) - F(-\infty)$$

Геометрически полученная вероятность равна площади фигуры, ограниченной сверху кривой распределения и опирающейся на отрезок [*a*, *b*]

3. $P(a \le x \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

$$P(a \le x \le b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

4. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = P(X < \infty) = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$$

3. Непрерывные случайные величины. Плотность вероятности

Следствие: Если пространством элементарных событий является отрезок числовой оси, то пространство элементарных событий формально можно распространить на всю числовую ось, положив вне отрезка значение плотности вероятности равное 0.

В случае НСВ математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение имеют тот самый вид и те же свойства, но рассчитываются по другим формулам.

4. Вероятностные характеристики непрерывных случайных величин

- Если $f(x)$ плотность распределения вероятностей X, то $M(X)$ находят по формуле:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

- *Дисперсия*, как и в случае ДСВ, вычисляется по формуле

$$D(X) = M((X - M(X))^2)$$

что в случае НСВ имеет вид

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^2 f(x) dx$$

- Для расчёта удобно использовать формулу

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right)^2$$

- *Среднее квадратичное отклонение* НСВ определяют следующим образом:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

4. Вероятностные характеристики непрерывных случайных величин

- ***Модой*** *(Мо)* называется значение случайной величины, которое встречается чаще всего, т.е. имеет максимальную вероятность (для дискретной случайной величины) или максимум функции плотности вероятности в данной точке (при непрерывной случайной величине).

- Одна и та же величина может иметь несколько мод. Однако возможно, что случайная величина и не имеет моды (если все её значения имеют одинаковую вероятность (равномерное распределение).

4. Вероятностные характеристики непрерывных случайных величин

- ***Медиана***. Определим сначала понятие квантиля непрерывной случайной величины. Корень уравнения

$F(x) = p$, где $F(x)$ - функция распределения и $0<p<1$,

называется p-квантилем x_p .

- По определению функции распределения $F(x)$ получаем

$$P(X < Me) = \frac{1}{2} \quad \text{и отсюда} \quad P(X > Me) = \frac{1}{2}$$

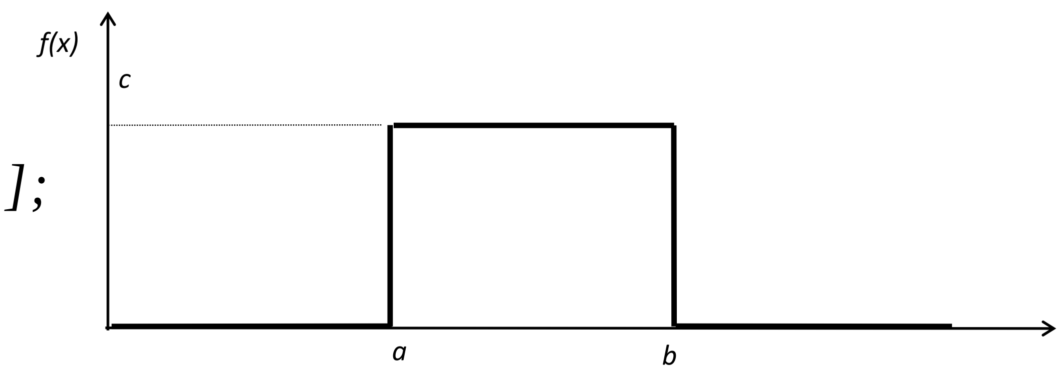
- Таким образом, медиана делит область значений случайной величины на две равные по вероятности части.

5. Законы распределения НСВ

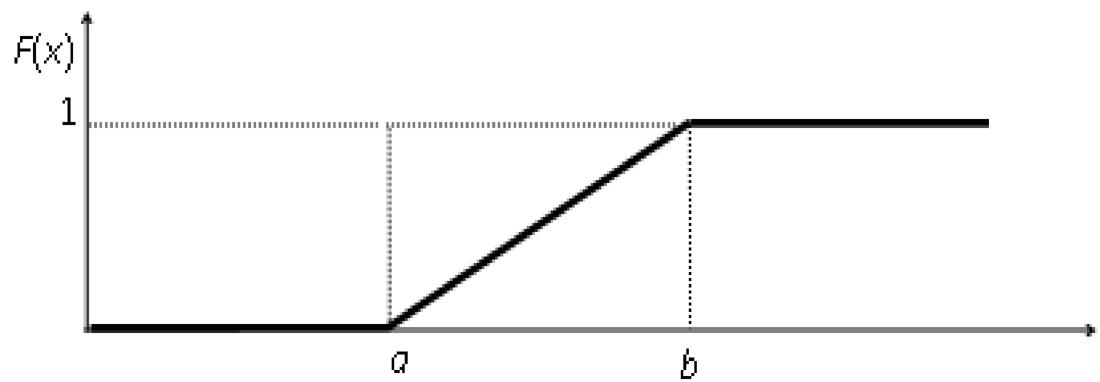
- ***Равномерное распределение***

Определение. Непрерывная случайная величина X имеет равномерный закон распределения на отрезке [*a*, *b*], если ее плотность вероятности *f*(*x*) постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его, т.е.

$$f(x)=\begin{cases} c=\dfrac{1}{b-a},\_если\_x\in[a;b]; \\ 0,\_если\_x\notin[a;b]. \end{cases}$$



$$F(x)=\begin{cases} 0,\_x\le a; \\ \dfrac{x-a}{x-b},\_a<x\le b; \\ 1,\_x>b. \end{cases}$$



5. Законы распределения НСВ

Числовые характеристики равномерно распределенной *НСВ*

$$M(X)=\frac{a+b}{2};\qquad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Вероятность того, что равномерно распределённая НСВ попадёт в промежуток $[x_1; x_2]$ при условии

$$a \le x_1 < x_2 \le b$$

высчитывается по формуле

$$P(x_1 < X < x_2)=\frac{x_1-x_2}{b-a}$$

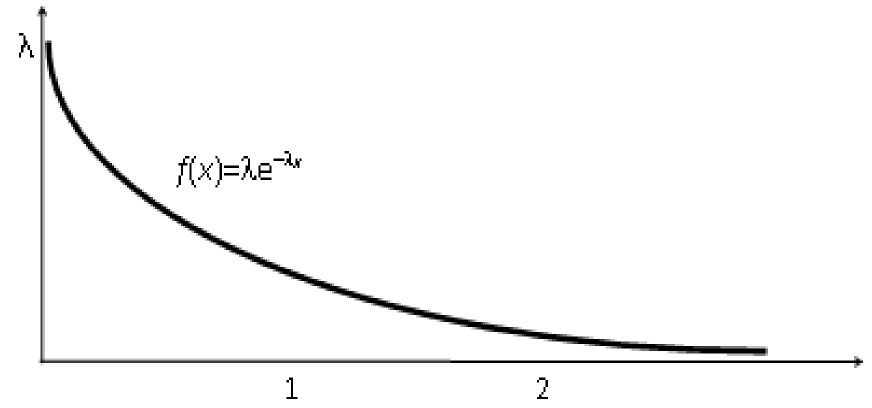
5. Законы распределения НСВ

- Равномерный закон распределения используется при анализе ошибок округления при проведении числовых расчетов (например, ошибка округления числа до целого распределена равномерно на отрезке [-0,5; +0,5]), в ряде задач массового обслуживания, при статистическом моделировании наблюдений, подчиненных заданному распределению.
- Так, случайная величина X, распределенная по равномерному закону на отрезке [0;1], называемая случайным числом от 0 до 1, служит исходным материалом для получения случайных величин с любым законом распределения.

5. Законы распределения НСВ

- *Определение*. Непрерывная случайная величина X имеет ***показательный*** (экспоненциальный) закон распределения с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda \cdot e^{-\lambda x}, \_при\_x \geq o; \\ 0, \_при\_x < 0.\end{cases}$$



- *Интегральная функция распределения для НСВ, имеющей показательное распределение* задаётся формулой

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, \_при\_x \geq 0; \\ 0, \_при\_x < 0.\end{cases}$$

5. Законы распределения НСВ

- *Числовые характеристики:*

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}; \qquad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

- *Вероятность того, что распределённая по показательному закону НСВ попадёт в интервал* (a; b) при условии $0<a<b$

вычисляется по формуле

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=e^{-a\lambda}-e^{-b\lambda}$$

5. Законы распределения НСВ

- Показательный закон распределения играет большую роль в *теории массового обслуживания* и *теории надежности*.
- Так, например, интервал времени T между двумя соседними событиями в простейшем потоке имеет показательное распределение с параметром λ - интенсивностью потока.

5. Законы распределения НСВ

- ***Нормальный закон распределения***

Нормальный закон распределения наиболее часто встречается на практике.

Главная особенность, выделяющая его среди других законов, состоит в том, что он является *предельным* законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях

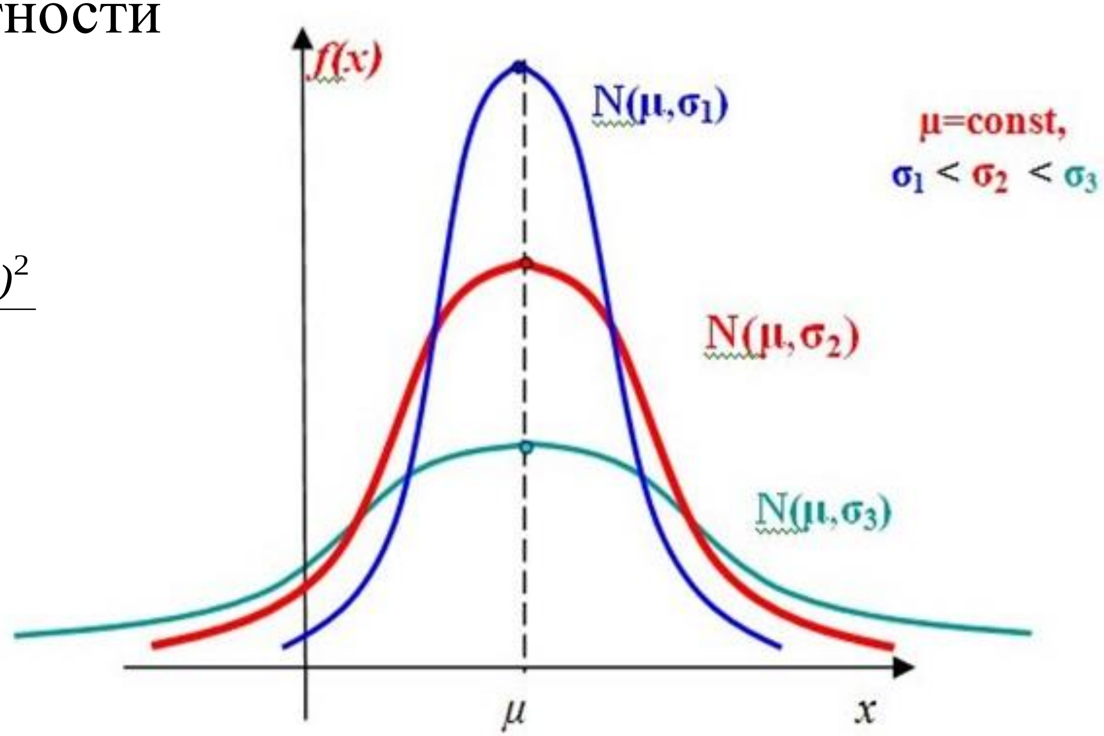
5. Законы распределения НСВ

• ***Нормальный закон распределения***

Определение. Непрерывная случайная величина X имеет нормальный закон распределения (закон Гаусса) с параметрами μ и σ, если ее плотность вероятности имеет вид:

Кривую нормального закона распределения называют нормальной или гауссовой кривой.

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



5. Законы распределения НСВ

- *Интегральная функция нормального распределения* имеет вид

$$F(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

- *При μ= 0, σ = 1 нормальная кривая называется нормированной и НСВ X имеет стандартное или нормированное распределение.*

- Числовые характеристики НСВ X, распределенной по нормальному закону

$$M(X) = \mu \qquad D(X) = \sigma^2$$

5. Законы распределения НСВ

- Вероятность того, что нормально распределенная величина попадёт в промежуток (c; d)

$$P(c < X < d) = \Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)$$

где *Ф(x) функция Лапласа*, которая задаётся формулой

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

5. Законы распределения НСВ

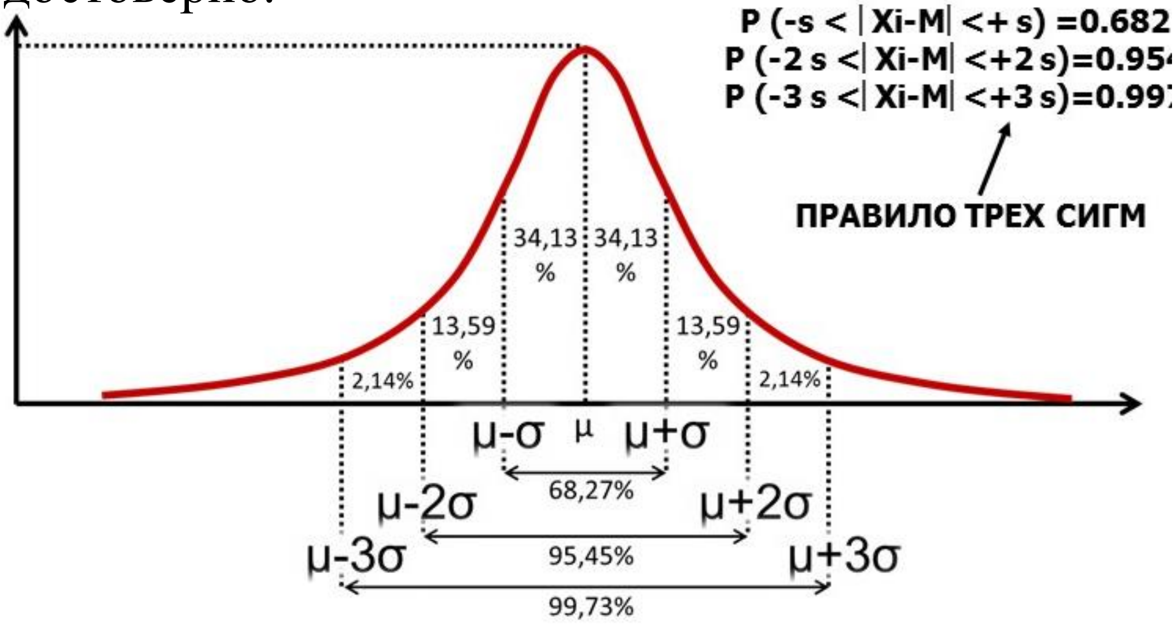
- Для вычисления вероятности отклонения нормально распределенной СВ от своего математического ожидания μ на наперед заданную величину δ используют формулу

$$P(|X-\mu|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Правило трёх сигм: Если СВ X распределена нормально, то вероятность того, что абсолютная величина отклонения *X* от математического ожидания стремится к нулю, то есть событие

$$|X-\mu|<3\sigma$$

практически достоверно.



5. Законы распределения НСВ

Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

На практике: если распределение случайной величины неизвестно, но условие, указанное в данном правиле выполняется, то есть основание предполагать, что *случайная величина распределена нормально*.