Лекция 7

14.05.2020

Закон больших чисел

2. Понятие о центральной предельной теореме

- В теории вероятностей и математической статистике большое значение имеет ***центральная предельная теорема Ляпунова***, в которой утверждается, что <u>если сложить большое число случайных величин, имеющих один или различные законы распределения, то случайная величина, являющаяся результатом суммы, при некоторых условиях будет иметь нормальный закон распределения</u>.
- Примером *центральной предельной теоремы* (для последовательности независимых случайных величин) является интегральная теорема Муавра-Лапласа.

2. Понятие о центральной предельной теореме

- **Теорема 1.** Пусть производится n независимых опытов, в каждом из которых вероятность наступления события A равна p (не наступления $q = 1 - p$, $p \neq 0$, $p \neq 1$).

Если K – число появлений события A в серии из n испытаний, то при достаточно больших n *СВ* K можно считать нормально распределенной ($M(K)=np$, $\sigma(K) = \sqrt{D(K)} = \sqrt{npq}$):

$$\mathrm{P}(K < \text{к}) \to \mathrm{P}(\mathrm{X} < \mathrm{x}_0) = \int_{-\infty}^{x_2} \varphi(x)\, dx = \frac{1}{2} + \Phi(x_0), \quad (9)$$

где $x_0 = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\Phi(\mathrm{x}_0)$ – функция Лапласа.

2. Понятие о центральной предельной теореме

В более общем случае верна следующая теорема.

- **Теорема 2.** Если случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию, то при $n \to \infty$:

$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < t\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \qquad (10)$$

где $M(X_i) = a$, $\sigma^2 = D(X_i)$; U – нормально распределенная случайная величина, $M(U) = 0$, $D(U) = 1$.

Пример 2. На отрезке [0; 1] случайным образом выбрано 100 чисел, точнее рассматриваются 100 независимых средних X_1, X_2,... X_n, равномерно распределенных на отрезке [0; 1]. Найти вероятность того, что их сумма заключена между 51 и 60, т.е. $P(51 < \sum X_i < 60)$.

Решение. В силу теоремы 2: $\frac{\sum X_i - na}{\sigma\sqrt{n}} = U$, $\quad \sum(X_i) - na = \sigma\sqrt{n}U$.

Из условия, в силу равномерности *СВ* X_i, следует, что

$$M(X_i) = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}, \sigma^2 = \frac{(1-0)^2}{12}.$$

Имеем, $M(\sum X_i) = M(na + \sigma\sqrt{n}U) = na = 100\frac{1}{2} = 50$,

$$D\left(\sum X_i\right) = D(na + \sigma\sqrt{n}U) = na = 100\frac{1}{12} = \frac{100}{12}.$$

Пример 2. На отрезке [0; 1] случайным образом выбрано 100 чисел, точнее рассматриваются 100 независимых средних X_1, X_2,... X_n, равномерно распределенных на отрезке [0; 1]. Найти вероятность того, что их сумма заключена между 51 и 60, т.е. $P(51 < \sum X_i \ < 60)$.

*Решение***.**

Итак, $\sum X_i \in N(na, n\sigma^2)$ – сумма, нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием na=50 и дисперсией $n\sigma^2$=100/12. Отсюда,

$$P(51 \leq \sum X_i \leq 60) = \Phi\left(\frac{60-na}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{51-na}{\sqrt{n}\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{60-50}{\frac{10}{\sqrt{12}}}\right) - \Phi\left(\frac{51-50}{\frac{10}{\sqrt{12}}}\right) = \Phi(\sqrt{12}) -$$

$$- \Phi\left(\frac{\sqrt{12}}{10}\right) = \Phi(3{,}464) - \Phi(0{,}3464) \approx 0{,}49971 - 0{,}1353 = 0{,}3644.$$

То есть вероятность того, что сумма 100 независимых средних X_1, X_2,..., X_n, равномерно распределенных на отрезке [0; 1], заключена между 51 и 60 и равна 0,3644.

Анализ вариационных рядов

Математическая статистика

- *Основная цель математической статистики* - это получение и обработка данных для статистически значимой поддержки процесса принятия решения, например, при решении задач планирования, управления, прогнозирования.
- Методы математической статистики можно разделить на **описательные** и **аналитические**.

Математическая статистика

Описательные методы позволяют описать реальные наблюдения с помощью таблиц, графиков, *характеристик положения* (среднее арифметическое, мода, медиана), *характеристик рассеяния* (среднее линейное отклонение, среднее квадратическое отклонение, дисперсия, коэффициент вариации) и т. д.

Аналитические методы позволяют на основании выборочных наблюдений сделать статистически значимые выводы о наличии закономерностей для всей совокупности.

Две группы методов:

- методы *параметрической статистики*
- методы *непараметрической статистики.*

Вариационные ряды распределения

В реальных социально-экономических системах нельзя проводить активные эксперименты, поэтому данные обычно представляют собой наблюдения за происходящим процессом.

Результаты наблюдений – это, в общем случае, ряд чисел, расположенных в беспорядке, который для изучения необходимо упорядочить (проранжировать).

- Операция, заключенная в расположении значений признака по возрастанию, называется *ранжированием* опытных данных.

Вариационные ряды распределения

- После операции ранжирования опытные данные можно сгруппировать так, чтобы в каждой группе признак принимал одно и то же значение, которое называется *вариантом* (X_i). Число элементов в каждой группе называется *частотой* варианта (n_i).

Размахом вариации называется число

$$W = x_{max} - x_{min},$$

где x_{max} – наибольший вариант, x_{min} – наименьший вариант.

Вариационные ряды распределения

- Сумма всех частот равна определенному числу n, которое называется объемом совокупности:

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n\,. \qquad (1)$$

- Отношение частоты данного варианта к объему совокупности называется *относительной частотой* ($\widehat{p}_i$), или *частостью* этого варианта:

$$\widehat{p}_i = \frac{n_i}{n}, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{k} \widehat{p}_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{n} = \frac{n}{n} = 1 \qquad (3)$$

Вариационные ряды распределения

- Последовательность вариантов, расположенных в возрастающем порядке, называется *вариационным рядом* (вариация - изменение).
- Вариационные ряды бывают дискретными и непрерывными. *Дискретным вариационным рядом* называется ранжированная последовательность вариантов с соответствующими частотами и (или) частостями.

Вариационные ряды распределения

Пример 1. В результате тестирования группа из 24 человек набрала баллы: 4, 0, 3, 4, 1, 0, 3, 1, 0, 4, 0, 0, 3, 1, 0, 1, 1, 3, 2, 3, 1, 2, 1, 2. Построить дискретный вариационный ряд.

Решение. Проранжируем исходный ряд, подсчитаем частоту и частость вариантов:

0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4.

В результате получим дискретный вариационный ряд

Балл, x_i	Число студентов, n_i	Относительная частота, $\widehat{p_i}$
0	6	6/24
1	7	7/24
2	3	3/24
3	5	5/24
4	3	3/24
$\sum$	24	1

Вариационные ряды распределения

- *Построение дискретного вариационного ряда нецелесообразно, если число значений признака велико*.
- В этом случае следует построить *интервальный вариационный ряд* (промежуток изменения признака разбивается на ряд отдельных интервалов и подсчитывается количество значений величины в каждом из них).

Вариационные ряды распределения

- Будем считать, что отдельные (частичные) интервалы имеют одну и ту же длину. Число интервалов (k) в случае нормально распределенной совокупности можно определить по ***формуле Стерджесса***:

$$k = 1+3{,}322\ \lg n \tag{4}$$

или приближенно: $k \in [6;12]$.

- *Длина частичного интервала* определяется по формуле:

$$h = \frac{W}{k} = \frac{x_{max} - x_{min}}{k} = \frac{15-4}{7} \approx 1{,}6. \tag{5}$$

Вариационные ряды распределения

Пример 2. Пусть дан ряд распределения хозяйств по количеству рабочих на 100 га сельскохозяйственных угодий (n=60)

12	6	8	6	10	11	7	10	12	8	7	7	6	7	8	6	11	9	11
9	10	11	9	10	7	8	8	8	11	9	8	7	5	9	7	7	14	11
9	8	7	4	7	5	5	10	7	7	5	8	10	10	15	10	10	13	12
11	15	6																

Построить интервальный вариационный ряд.

Решение. Для определения числа групп подставим значение n=60 в формулу Стерджесса: k=l + 3,322lg60 ≈ 6,907; k = 7.

Группы хозяйств по численности работников на 100 га с/х угодий	Число хозяйств в группе (n_i)	Накопленное число хозяйств (Si)	Относительная частота ($\hat{p}_i$)
4-5,6	5	5	5/60.
5,61-7,2	17	22	17/60
7,21-8,8	9	31	9/60
8,81-10,4	15	46	15/60
10,41 -12,0	10	56	10/60
12,01 -13,6	1	57	1/60
13,61-15,2	3	60	3/60
Итого:	60	-	1

Графическое изображение вариационных рядов

Вариационные ряды изображают графически с помощью полигона и гистограммы.

- *Полигон частот* - это ломаная, отрезки которой соединяют точки $(x_1; n_1), (x_2; n_2), \ldots, (x_k; n_k)$.
- *Полигон относительных частот* - это ломаная, отрезки которой соединяют точки: $(x_1; \frac{n_1}{n}), (x_2; \frac{n_2}{n}), \ldots, (x_k; \frac{n_k}{n})$.
- *Гистограммой частот* называется фигура, состоящая из прямоугольников с основанием h и высотами n_i. Для *гистограммы относительных частот* в качестве высоты рассматривают n_i/n.
- Гистограмма относительных частот является аналогом дифференциальной функции случайной величины.

Числовые характеристики вариационных рядов

- Вариационные ряды позволяют получить первое представление об изучаемом распределении.
- Далее необходимо исследовать ***числовые характеристики распределения*** (аналогичные характеристикам распределения теории вероятностей):
  - *характеристики положения* (средняя арифметическая, мода, медиана);
  - *характеристики рассеяния* (дисперсия, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации);
  - *характеристики меры скошенности* (коэффициент асимметрии) и островершинности (эксцесс) распределения.

Числовые характеристики вариационных рядов

Характеристики положения вариационного ряда

- ***Средней арифметической*** *(X)* дискретного вариационного ряда называется отношение суммы произведений вариантов на соответствующие частоты к объему совокупности:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n} = \frac{\sum x_i n_i}{n}.$$

- Средняя арифметическая имеет те же единицы измерения, что и варианты.

Числовые характеристики вариационных рядов

Характеристики положения вариационного ряда

- ***Свойства средней арифметической***

1) Средняя арифметическая суммы соответствующих друг другу значений, принадлежащих двум группам наблюдений, равна алгебраической сумме средних арифметических этих групп:

$$\overline{X \pm Y} = \bar{X} \pm \bar{Y}.$$

2) Если ряд наблюдений состоит из двух непересекающихся групп наблюдений, то средняя арифметическая $\bar{Z}$ всего ряда наблюдений равна взвешенной средней арифметической групповых средних $\bar{X}$ и $\bar{Y}$, причем весами являются объемы групп $n_1 = \sum n_i, n_2 = \sum m_j$ соответственно

$$\overline{X \pm Y} = \frac{\sum x_i n_i + \sum y_j m_j}{n_1 + n_2}$$

Числовые характеристики вариационных рядов

Характеристики положения вариационного ряда

Свойства средней арифметической

3) Средняя арифметическая постоянной равна самой постоянной

$$\bar{C} = C.$$

4) Если все результаты наблюдений умножить на одно и то же число, то имеет место равенство:

$$\bar{Z} = \overline{CX} = C\bar{X}$$

5) Сумма отклонений результатов наблюдений от их средней, взвешенная с соответствующими частотами, равна нулю

$$\sum (x_i - \bar{X}) n_i = 0.$$

Числовые характеристики вариационных рядов

Характеристики положения вариационного ряда

Свойства средней арифметической

6) Если все результаты наблюдений увеличить (уменьшить) на одно и то же число, то средняя арифметическая увеличится (уменьшится) на то же число, т. е.:

$$\bar{Z} = \overline{X \pm C} = \bar{X} \pm C.$$

7) Если все частоты вариантов умножить на одно и то же число, то средняя арифметическая не изменится.

Числовые характеристики вариационных рядов

Характеристики положения вариационного ряда

- *Модой* (M_0^* (X)) дискретного вариационного ряда называется вариант, имеющий наибольшую частоту.
- *Медианой* ($\mathrm{M}_e^*(\mathrm{X})$) дискретного вариационного ряда называется вариант, делящий ряд на две равные части.
  - Если дискретный вариационный ряд имеет $2n$ членов в ранжированной совокупности: $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$, то

$$M_e^*(X) = \frac{x_n + x_{n+1}}{2} \qquad (6)$$

Числовые характеристики вариационных рядов

Характеристики положения вариационного ряда

- Если дискретный вариационный ряд в ранжированной совокупности имеет $2n+1$ членов: $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n+1}$, то

$$M_e^*(X) = x_{n+1} \qquad (7)$$

В примере 1:

$$\bar{X} = \frac{0 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3}{24} = \frac{40}{24} = \frac{5}{3} = 1{,}67;$$

$$M_0^*(X) = 1, \qquad M_e^*(X) = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Числовые характеристики вариационных рядов

Характеристики положения вариационного ряда

Для **интервальных вариационных рядов** имеют место формулы:

а) медианы: $M_e^*(X) = x_{Me} + h \cdot \frac{0{,}5n - S_{Me-1}}{n_{Me}}$, (8)

где x_{Me} - начало медианного интервала,

h - длина частичного интервала, n - объем совокупности,

$S_{Me\text{-}1}$ - накопленная частота интервала, предшествующего медианному,

n_{Me} - частота медианного интервала;

б) моды: $M_0^*(X) = x_{Mo} + h \cdot \frac{(n_{Mo} - n_{Mo-1})}{(n_{Mo} - n_{Mo-1}) + (n_{Mo} - n_{Mo+1})}$, (9)

где x_{Mo} - начало модального интервала,

h - длина частичного интервала, n_{Mo} - частота модального интервала,

$n_{Mo\text{-}1}$ - частота предмодального интервала,

n_{Mo+1} - частота послемодального интервала;

Числовые характеристики вариационных рядов

Характеристики положения вариационного ряда

в) средней арифметической, совпадающей с формулой (6) для дискретного вариационного ряда, причем в качестве вариантов x_i принимаются середины соответствующих интервалов.

Мода и медиана используются в качестве характеристики среднего положения в случае, если границы ряда нечеткие или если ряд не симметричен.

Числовые характеристики вариационных рядов

Показатели вариации

Показатели центральной тенденции (M_0, M_e, $\overline{X}$) не исчерпывают всех свойств распределения. В одних случаях значения признака концентрируются тесно около среднего значения, в других наблюдается значительное рассеяние.

Для изучения степени изменчивости признака вводят *показатели вариации*:

1) $W = x_{\max} - x_{\min}$ - *размах вариации*;

2) значения x_i имеют свойство концентрироваться около $\overline{X}$, поэтому вводят следующие характеристики

(т. к $\sum(x_i - \overline{X})n_i = 0$):

Числовые характеристики вариационных рядов

Показатели вариации

- *Дисперсия* дискретного ряда распределения:

$$D^* = \frac{\sum(x_i - \bar{X})^2 n_i}{n} \qquad (10)$$

характеризует средний квадрат отклонения x_i, от $\bar{x}$.

- *Среднее квадратическое отклонение* дискретного ряда распределения

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{X})^2 n_i}{n}} \qquad (11)$$

выражается в тех же единицах, что и x_i.

Числовые характеристики вариационных рядов

Показатели вариации

- *Среднее линейное отклонение:*

$$L(X) = \frac{\sum|x_i - \bar{X}|n_i}{n} \tag{12}$$

- *Коэффициент вариации:*

$$V^* = \frac{\sigma^*}{\bar{X}} \cdot 100\%, \tag{13}$$

характеризует относительное значение среднего квадратического отклонения и обычно служит для сравнения колеблемости несоизмеримых показателей.

Числовые характеристики вариационных рядов

Показатели вариации

Свойства дисперсии:

1) Дисперсия постоянной величины равна 0

$$D^*(C) = 0.$$

2) Если все результаты наблюдений увеличить (уменьшить) на одно и то же число C, то дисперсия и среднее квадратическое отклонение не изменятся, т. е.

$$D^*(X \pm C) = D^*(X), \sigma^*(\mathrm{X} \pm \mathrm{C}) = \sigma^*(\mathrm{X}).$$

3) Если все результаты наблюдений умножить на одно и то же число, то имеет место равенство:

$$D^*(CX) = C^2 D(X), \qquad \sigma^*(\mathrm{CX}) = |\mathrm{C}|\sigma^*(\mathrm{X}).$$

Числовые характеристики вариационных рядов

Показатели вариации

Свойства дисперсии:

4) Если все частоты вариантов умножить на одно и то же число, то дисперсия и среднее квадратическое отклонение не изменятся.

5) Свойство минимальности дисперсии.

$$\frac{\sum(x_i - C)^2 n_i}{n} \to \min \text{ при } C = \bar{X}.$$

- *Следствие 1*. Средний квадрат отклонений значений x_i от их средней арифметической равен среднему квадрату отклонений x_i от произвольной постоянной a минус квадрат разности между средней арифметической ($\bar{X}$) и этой произвольной постоянной.

Пусть $\sigma^{*2} = \frac{\sum(x_i - \bar{X})^2 n_i}{n}$, $\sigma_a^{*2} = \frac{\sum(x_i - a)^2 n_i}{n}$, тогда

$$\sigma_x^{*2} = \sigma_a^{*2} - (\bar{X} - a)^2.$$

Числовые характеристики вариационных рядов

Показатели вариации

- *Следствие 2*. Дисперсия равна средней арифметической из квадратов значений признака минус квадрат средней арифметической:

$$\sigma_x^{*2} = \overline{X^2} - (\bar{X})^2.$$

6) *Правило сложения дисперсий.*

Если объединяются несколько распределений в одно, то общая дисперсия σ_0^{*2} нового распределения равна средней арифметической из дисперсий объединяемых распределений, сложенной с дисперсией частных средних относительно общей средней нового распределения.

Числовые характеристики вариационных рядов

Показатели вариации

Правило сложения дисперсий

Иначе говоря, общая дисперсия равна сумме внутригрупповой и межгрупповой дисперсий:

$$\sigma_0^{*2} = \overline{\sigma^{*2}} + \delta_0^{*2}, (14) \quad \text{или} \quad \sigma_0^{*2} = \frac{\sum_{i,j}(x_{ij} - \overline{X_0})^2 \cdot n_{ij}}{N} = \frac{\sum x_j^2 N_j}{N} - (\overline{X_0})^2,$$

где n_{ij} – частота j-го варианта i-го частного распределения

(j=1,..., m; i=1,2,...,k),

x_{ij} - j-й вариант i-го частного распределения

(j=1,..., m; i=1, 2,..., k),

n_i - объем i-го частного распределения,

$N_j = \sum_i n_{ij}$ - частота j-го варианта нового распределения,

N - объем нового распределения,

$\overline{X_i} = \frac{\sum_j n_{ij} x_i}{n_i}$ - средняя арифметическая

(i-го частного распределения, (i=1,…, к),

$\overline{X_0} = \frac{\sum x_j N_j}{N}$ - средняя арифметическая нового распределения,

j / i	x_1	x_2	…	x_m	Σ
1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1m}	n_1
2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2m}	n_2
3	n_{31}	n_{32}	…	n_{3m}	n_3
…	...	…	…	…	…
k	n_{k1}	n_{k2}		n_{km}	n_m
Σ	N_{11}	N_2		N_m	N

$\sigma_i^2 = \frac{\sum_j x_{ij}^2 n_{ij}}{n_i} - (\overline{X_i})^2$ - дисперсия i-го частного распределения

$\overline{\sigma^{*2}} = \frac{\sum \sigma_i^2 n_i}{N}$ - внутригрупповая дисперсия,

$\delta^{*2} = \frac{\sum(\overline{X_i} - \overline{X_0})^2}{N}$ - межгрупповая дисперсия.

Числовые характеристики вариационных рядов

- *Моменты* для вариационных рядов в математической статистике находятся по формулам, аналогичным формулам для ДСВ:

$a_s^* = \frac{\sum x_i^s n_i}{n}$ - начальный момент s-го порядка,

$\mu_s^* = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^s n_i}{n}$ - центральный момент s-го порядка,

$r_s^* = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^s n_i}{n \sigma_x^{*s}}$ - основной момент s-го порядка,

$r_{s,h}^* = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^s \cdot (y_i - \bar{y})^h n_i}{n \sigma_x^{*s} \cdot \sigma_y^{*h}}$ - основной момент порядка s,h.

- Соотношения между начальными и центральными моментами в математической статистике соответствуют таким формулам для ДСВ.
- *Коэффициент асимметрии:* $Sk^* = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^3 n_i}{n \sigma^{*3}}$.
- *Эксцесс:* $Ex^* = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^4 n_i}{n \sigma^{*4}} - 3$.

Числовые характеристики вариационных рядов

- Рассчитаем среднюю арифметическую, дисперсию, коэффициенты асимметрии и эксцесса для примера 2.

Среднее значение признака:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i n_i}{\sum n_i} = \frac{516{,}18}{60} = 8{,}613.$$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение:

$$D^* = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^2 n_i}{n} = \frac{358{,}869}{60} = 5{,}981,$$

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2 n_i}{n}} = \sqrt{5{,}981} = 2{,}446.$$

Коэффициент вариации:

$$V^* = \frac{\sigma^*}{\bar{X}} \cdot 100\% = \frac{2{,}446}{8{,}613} \cdot 100\% = 28{,}4\%.$$

Числовые характеристики вариационных рядов

- Рассчитаем среднюю арифметическую, дисперсию, коэффициенты асимметрии и эксцесса для примера 2.

Вспомогательная таблица для расчета числовых характеристик ряда распределения

Группы предприятий по численности работников на 100 га сельхозугодий, чел	Среднее значение интервала (X_i)	Число хозяйств в группе (n_i)	$x_i n_i$	$x_i - \bar{X}$	$(x_i - \bar{X})^2 n_i$	$\frac{x_i - \bar{X}}{\sigma^*}$	$\left(\frac{x_i - \bar{X}}{\sigma^*}\right)^3 n_i$	$\left(\frac{x_i - \bar{X}}{\sigma^*}\right)^4 n_i$
4-5,6	4,8	5	24	-3,813	72,708	-1,559	-18.954	29,554
5,61 - 7,2	6,4	17	108,8	-2,213	83,280	-0,905	-12,601	11,404
7,21-8,8	8	9	72	-0,613	3,386	-0,251	-0,142	0,036
8,81-10,4	9,6	15	144	0,987	14,603	0,403	0,985	0,397
10,41-12	11,2	10	112	2,587	66.908	1,058	11,832	12,514
12,01-13,6	12,8	1	12,8	4,187	17,528	1,712	5,017	8,588
13,61-15,2	14,4	3	43,2	5,787	100,457	2,366	39.740	94,030
итого	-	**60**	**516,8**	-	**358,869**	-	**25,876**	**156,523**

Числовые характеристики вариационных рядов

- *Коэффициент асимметрии:* $Sk^* = \frac{\sum(x_i - \bar{X})^3 n_i}{n\sigma^{*3}} = \frac{25,876}{60} = 0,43.$
- *Эксцесс:* $Ex^* = \frac{\sum(x_i - \bar{X})^4 n_i}{n\sigma^{*4}} - 3 = \frac{156,523}{60} - 3 = -0,39.$

Выводы: Плотность работников -

$\bar{X} \pm \sigma^* = 8,61 \pm 2,45,$ то есть от 6,16 до 11,06 чел. на 100га с/х угодий.

Коэффициент асимметрии недостаточно близко к нулю => распределение не симметрично.

Эксцесс $Ex^* \neq 0$ => возможно распределение отлично от нормального.