

homework14

2025 年 4 月 25 日

Calculate

$$\int_{-1}^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

using guass-legendre quadrature.

```
[6]: import numpy as np
from scipy.integrate import quad
from numpy.polynomial.legendre import leggauss

def integrand(x):
    return np.exp(-x**2 / 2)

exact, _ = quad(integrand, -1, 1)
print(f"精确值: {exact}\n")

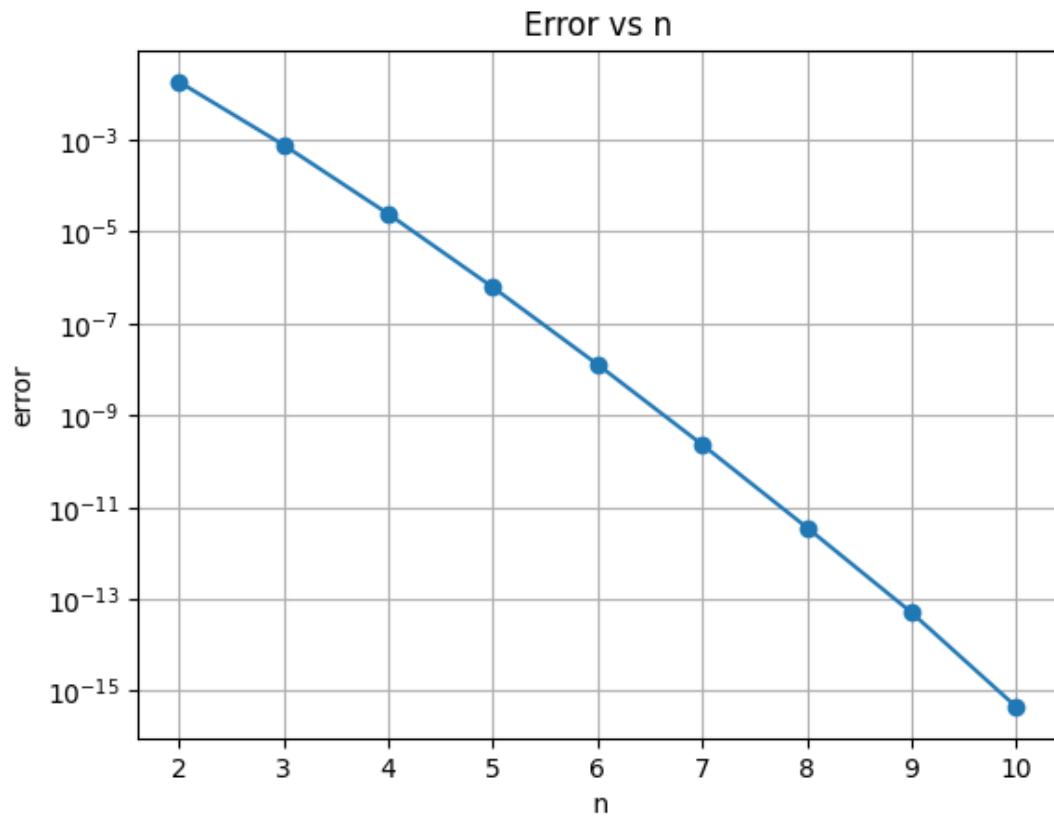
error=[]
for n in range(2, 11):
    nodes, weights = leggauss(n)
    approx = np.dot(weights, integrand(nodes))
    thiserror = abs(approx - exact)
    error.append(thiserror)
    print(f"阶数{n:2d} 近似值: {approx:.10f}, 误差: {thiserror:.5e}")

import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(range(2, 11), error, marker='o')
plt.yscale('log')
plt.xlabel(' n')
plt.ylabel('error')
plt.title('Error vs n')
```

```
plt.grid(True)
plt.show()
```

精确值：1.7112487837842973

阶数 2 近似值：1.6929634498, 误差：1.82853e-02
阶数 3 近似值：1.7120202452, 误差：7.71461e-04
阶数 4 近似值：1.7112245046, 误差：2.42792e-05
阶数 5 近似值：1.7112493935, 误差：6.09740e-07
阶数 6 近似值：1.7112487710, 误差：1.27429e-08
阶数 7 近似值：1.7112487840, 误差：2.28078e-10
阶数 8 近似值：1.7112487838, 误差：3.57026e-12
阶数 9 近似值：1.7112487838, 误差：5.01821e-14
阶数 10 近似值：1.7112487838, 误差：4.44089e-16



$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2, y(0) = 1, \text{ find } y(1)$$

```
[ ]: def f(x, y):
    return x**2 - y**2

def euler(f, x0, y0, x_end, n_steps):
    h = (x_end - x0) / n_steps
    x, y = x0, y0
    for _ in range(n_steps):
        y += h * f(x, y)
        x += h
    return y

y_euler = euler(f, 0, 1, 1, 10000000)
print(f"正向欧拉法结果 y(1): {y_euler:.6f}")
```

正向欧拉法结果 y(1): 0.750016

```
[13]: def f(x, y):
    return x**2 - y**2

def rk2(f, x0, y0, x_end, n_steps):
    h = (x_end - x0) / n_steps
    x, y = x0, y0
    for _ in range(n_steps):
        k1 = f(x, y)
        k2 = f(x + h/2, y + (h/2)*k1)
        y += h * k2
        x += h
    return y

y_rk2 = rk2(f, 0, 1, 1, 100)
print(f"二阶龙格库塔法结果 y(1): {y_rk2:.6f}")
```

二阶龙格库塔法结果 y(1): 0.750030