动力学上，中心力导致二维轨道运动。让我们先尝试在二维中量化这个问题。哈密顿量 $H = \frac{P_r{}^2}{2\ m} + \frac{L^2}{2\ m\ r^2} - \frac{e}{r}$

没有方向角 ϕ 这一维度，L 是运动常数，具有量子化的值 l, 假设

$$< r|p_r{}^2 = -\frac{\hbar^2}{r}\partial_r r \partial_r < r| = (-\hbar^2)(\frac{1}{r}\partial_r + \partial_r{}^2) < r|$$

径向薛定谔方程：

$$[(\frac{-\hbar^2}{2m})(\frac{1}{r}\partial_r + \partial_r{}^2) + \frac{\hbar^2}{2\ m}\frac{l^2}{r^2} - \frac{e}{r} - E]R(r) = 0$$

当 $r \to \infty$ 时，$P_r^2 R \to 0$, $R \to e^{-\lambda r}$; 定义 $\lambda^2 \equiv \frac{-2mE}{\hbar^2}$ (假设 $E < 0$ 为束缚态)

引入物理尺度：$\rho = \lambda r$

用 ρ 表示的径向方程：$(\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial\rho - \frac{l^2}{\rho^2} + \frac{2me}{\hbar^2\lambda}\frac{1}{\rho} - 1)R(\rho) = 0$ 定义 $\gamma = \frac{me}{\hbar^2\lambda}$

假设解的形式为 $\mathcal{R}(\rho) = e^{-\rho}f(\rho)$，代入得到 $f(\rho)$ 的方程：$(f''(\rho) + (\frac{1}{\rho} - 2)f'(\rho) + (\frac{2\gamma-1}{\rho} - \frac{l^2}{\rho^2})f(\rho)) = 0$

假设 $f(\rho)$ 的级数解形式为 $f(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \rho^{s+m}$

代入级数解得到递推关系（未完全写出）: $\sum_m a_m[(s+m)(s+m-1)+(s+m)-l^2]\rho^{s+m-2} - \sum_m a_m[2(s+m) - (2\gamma-1)]\rho^{s+m-1} = 0$. 化简为：

$$a_m = -\frac{2\gamma - (2l+1) - 2(m-1)}{(s+m)^2 - l^2}a_{m-1}$$

分析最低阶的系数：$a_0[s(s-1) + s - l^2] = 0 \Rightarrow s^2 - l^2 = 0$。为了解在 $r = 0$ 处行为良好，取 $s = l$ (假设 $l \geq 0$)。

假设级数在 $m = m_{max}$ 处截断 (为了得到束缚态解)，即 $a_m = 0$ for $m > m_{max}$。

最高阶（或递推关系）给出截断条件，这要求 $\rho^{s+m_{max}-1}$ 项的系数满足 $2(s + m_{max}) - (2\gamma - 1) = 0$ (假设 $a_{m_{max}} \neq 0$ 且 $a_{m_{max}+1} = 0$)。这导致 $\gamma = s + m_{max} + \frac{1}{2}$。

能量 $E = \frac{-\hbar^2}{2\ m}\lambda^2 = \frac{-\hbar^2}{2\ m}(\frac{m\ e}{\hbar^2}\frac{1}{\gamma})^2 = \frac{-me^2}{2\ \hbar^2}\frac{1}{\gamma^2}$。这与实验拟合。$\gamma$ 的可能值（对应 $s = l$ 和 $m_{max} = 0, 1, 2, ...$）：$\gamma = l + m_{max} + 1/2$。

1 作图

假设角向波函数已归一化, 所求的级数形式波函数应当有

$$\int_0^\infty R^2(\rho)\rho d\rho = 1$$

表 1: Integration Result of Function $e^{-2x}x^n$

Function	Value
$e^{-2x}x^1$	$\frac{1}{4}$
$e^{-2x}x^2$	$\frac{1}{4}$
$e^{-2x}x^3$	$\frac{3}{8}$
$e^{-2x}x^4$	$\frac{3}{4}$
$e^{-2x}x^5$	$\frac{15}{8}$

1．基态 ($\boldsymbol{Y}=\mathbf{1/2},\mathbf{I}=\mathbf{0},m_{-}\max=0$) 波函数：

$$R_{1/2}(\rho)=2e^{-\rho}$$

其中，$\rho=\frac{me}{\hbar^2}\cdot\frac{2}{1}r$ ，对应能量 $E=-\frac{me^2}{2\hbar^2}\cdot 4=-\frac{2me^2}{\hbar^2}$ 。

2．第一激发态 ($\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{3/2}$) $\mathrm{I}=0,\ \mathrm{m}_{-}\max=1$ 波函数：

$$R_{3/2}^{(0)}(\rho)=\frac{4}{17}e^{-\rho}(1-4\rho)$$

若 $I=1,m_{-}\max=0$ 波函数：

$$R_{3/2}^{(1)}(\rho)=\frac{8}{3}e^{-\rho}\rho$$

能量均为 $E=-\frac{me^2}{2\hbar^2}\cdot\frac{4}{9}=-\frac{2me^2}{9\hbar^2}$ 。

3．第二激发态 ($\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{5/2}$) $\mathbf{I}=\mathbf{0},\mathbf{m}_{-}\max=\mathbf{2}$ 波函数：

$$R_{5/2}^{(0)}(\rho)=\frac{8}{707}e^{-\rho}\left(1-6\rho+9\rho^2\right)$$

$I=1,m_{-}\max=1$ 波函数：

$$R_{5/2}^{(1)}(\rho)=\frac{24}{5}e^{-\rho}\rho\left(1-\frac{2}{3}\rho\right)$$

$\mathbf{I}=\mathbf{2},\mathbf{m}_{-}\max=\mathbf{0}$ 波函数：

$$R_{5/2}^{(2)}(\rho)=\frac{8}{15}e^{-\rho}\rho^2$$

能量均为 $E=-\frac{me^2}{2\hbar^2}\cdot\frac{4}{25}=-\frac{2me^2}{25\hbar^2}$ 。