

Конспект к предмету «Линейная алгебра»

Хоружий Кирилл
Примак Евгений
10.06.2020

Содержание

1	Векторные пространства	3
1.1	Начальные понятия	3
1.2	Размерность и базис	3
1.3	Факторпространство	4
2	Линейные отображения	4
2.1	Линейные отображения векторных пространств	4
2.2	Аффинные (точечные) пространства	4
2.3	Евклидовы (точечные) пространства	5
3	Структура линейного преобразования	6
3.1	Алгебра линейных операторов	6
3.2	Алгебра операторов	6
3.3	Инвариантные подпространства и собственные векторы	7
3.3.1	Проекторы	7
3.3.2	Инвариантные подпространства	7
3.3.3	Собственные векторы. Характеристический многочлен	7
3.3.4	Критерий диагонализруемости	8
3.3.5	Существование инвариантных подпространств	8
3.3.6	Сопряженный линейный оператор	9
3.3.7	Фактороператор	9
3.4	Жорданова нормальная форма	9
3.4.1	ЖНФ: формулировка и следствие	9
3.4.2	Случай нильпотентного оператора	9
4	Билинейные и квадратичные формы	10
4.1	Билинейная форма	10
4.2	Симметричные и кососимметричные формы	11
4.3	Ортогональные и невырожденные	11
4.4	Квадратичные формы	12
4.5	Кососимметричные и полуторалинейные формы	13
5	Пространства со скалярным произведением	14
5.1	Евклидово пространство	14
5.1.1	Процесс ортогонализации	14
5.1.2	Изоморфизмы	15
5.1.3	Ортогональные матрицы	15
5.2	Эрмитовы векторные пространства	16
5.2.1	Эрмитовы формы	16
5.2.2	Эрмитово пространство	17
5.2.3	Ортогональность	17
5.2.4	Нормированные векторные пространства	18
5.3	Связь между линейными операторами и θ -линейными формами	18
5.4	Типы линейных операторов	19
5.4.1	Канонический вид эрмитовых операторов	20
5.4.2	Приведение пары квадратичных форм к каноническому виду	20

5.4.3	Нормальные операторы	20
5.4.4	Положительно определенные операторы	21
5.4.5	Полярное разложение	22
5.4.6	Квадратичная функция в аффинном пространстве	22
5.4.7	Квадрики в аффинном пространстве	22
6	Двойственное пространство	23
6.1	Линейные функции	23
6.2	Двойственное пространство	23
6.3	Канонический изоморфизм	23
6.4	Критерий линейной независимости	24
7	Тензоры	24
7.1	Начала тензорного исчисления	24
7.1.1	Понятие о тензорах	24
7.1.2	Произведение тензоров	25
7.1.3	Координаты тензора	25
7.1.4	Переход к другому базису	26
7.1.5	Тензорное произведение пространств	26
7.2	Свёртка, симметризация и альтернирование тензоров	26
7.2.1	Свёртка	26
7.2.2	Симметричные тензоры	26
7.2.3	Кососимметричные тензоры	27
7.3	Внешняя алгебра	27

1 Векторные пространства

1.1 Начальные понятия

Def 1.1. Пусть \mathbb{F} – произвольное поле. **Векторным пространством** над \mathbb{F} называется множество V элементов (векторов), удовлетворяющее следующим аксиомам:

- | | |
|--|---|
| а) На V бинарная операция $V \times V \rightarrow V$: | б) На $\mathbb{F} \times V$ операция $(\lambda, \mathbf{x} \rightarrow \lambda \mathbf{x})$: |
| I. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (коммутативность); | V. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ (унитарность); |
| II. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ (ассоциативность); | VI. $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$ (ассоциативность); |
| III. $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in V$ (нулевой вектор); | VII. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$; |
| IV. $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in V$ (обратный вектор); | VIII. $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$. |

Def 1.2. Пусть V – векторное пространство над \mathbb{F} , $U \subset V$ – его подмножество, аддитивна подгруппа и переходящая в себя при умножении на скаляры. Тогда ограничение на U операций в V делает U векторным пространством. U – **векторное подпространство** V .

Def 1.3. Векторы $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ подпространства V – **линейно зависимы**, если \exists их нетривиальная **ЛК** равная нулю. В противном случае – линейно независимы.

Thr 1.1. Если линейная система векторов линейно независима, то и всякая её подсистема также линейно независима.

Thr 1.2. Если в $V \forall \mathbf{e}_i \in (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s)$ – **ЛК** векторов из $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_t)$, то $s \leq t$.

Con 1.1. \forall две эквивалентные ЛНеЗ системы векторов в V содержат одинаковое число векторов.

1.2 Размерность и базис

Def 1.4. **Ранг** системы векторов – число векторов в любой макс ЛНеЗ подсистеме.

Def 1.5. V , содержащее n ЛНеЗ векторов, в котором не ЛНеЗ систем большего ранга, называется **n-мерным**. $\dim_{\mathbb{F}} V = n$.

Def 1.6. $\dim_{\mathbb{F}} V = n$. Любая система из n независимых векторов называется **базисом** пространства V .

Thr 1.3. $\dim_{\mathbb{F}} V = n$ с $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Тогда: 1) $\forall \mathbf{v} \in V \exists!$ ЛК из векторов базиса; 2) любую систем из $s < n$ ЛНеЗ векторов можно дополнить до базиса.

Def 1.7. $\dim_{\mathbb{F}} V = n$ с $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. $\lambda_i \in \mathbb{F}$ называются **координатами вектора**: $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n$.

Thr 1.4. При переходе $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \rightsquigarrow (\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$, определяемом $A \in M_{nn}$, координаты \mathbf{v} : $\lambda_j^{\text{новые}}$ выражаются через $\lambda_i^{\text{старые}}$ при помощи обратимого линейного преобразования с A^{-1} .

Def 1.8. V и W над \mathbb{F} – **изоморфны**, если \exists биективное $f: V \rightarrow W: f(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v})$.

Thr 1.5. Все V одинаковой $\dim = n$ над \mathbb{F} изоморфны (координатному пространству \mathbb{F}^n).

Thr 1.6. U, W – конечномерные подпространства V . Тогда: $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

Def 1.9. Если $\forall \mathbf{u} \in U$ может быть однозначно представлен в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{u}_m$. То сумма называется **прямой**: $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$.

Thr 1.7. $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$ – прямая $\iff U_i \cap (U_1 + \dots + U_m) = \mathbf{0}$, для $i = 1, \dots, m$.

Thr 1.8. $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$ – прямая $\iff \dim U = \sum_{i=1}^m \dim U_i$.

Thr 1.9. $\forall m$ -мерного $U \subset V$ ($\dim V = n$) $\exists W$ ($\dim W = n - m$): $V = U \oplus W$.

1.3 Факторпространство

К заданному пространству $L \subset V$ существует, вообще говоря, много дополнительных подпространств $M \subset V$, для которых $V = L \oplus M$. Но все такие дополнения изоморфны одному векторному пространству, которое строится по V и L абсолютно инвариантным образом.

Будем смотреть на V и L как на аддитивные абелевы группы. Множество

$$\mathbf{x} + L = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in L\}$$

называется *смежным классом* V по L , вектор \mathbf{x} - представитель смежного класса. Если $\mathbf{0} \neq \mathbf{z} \in (\mathbf{x} + L) \cap (\mathbf{x}' + L)$, то $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x}' + \mathbf{y}' = \mathbf{z}$. Поэтому два смежных класса либо не пересекаются, либо совпадают. При фиксированном L положим $\bar{\mathbf{x}} := \mathbf{x} + L$. Каждый вектор $\mathbf{v} \in V$ попадает в какой-то смежный класс, и если $\bar{V} = V/L$ - множество всех смежных классов V по L , то на \bar{V} устанавливается структура абелевой группы по правилу $\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}}'$. Коммутативность и ассоциативность проверяются непосредственно. Понятно, что $\bar{\mathbf{0}} = L$ - нулевой элемент этой абелевой группы: $\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{x}}$.

Таким образом, $\bar{V} = V/L$ наделено естественным образом структурой векторного пространства, которое и называется *факторпространством*.

Thr 1.10. Пусть $V = L \oplus M$ - прямая сумма подпространств, $L, M \subset V$. Тогда отображение $f: \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u} + L$ ($\mathbf{u} \in M$) является изоморфизмом между M и V/L .

Как следствие, получим оценку размерности факторпространства. Пусть $L \subseteq V$. Тогда

$$\dim V/L = \dim V - \dim L.$$

2 Линейные отображения

2.1 Линейные отображения векторных пространств

Def 2.1. Отображение $f: V \rightarrow W$ называется *линейным*, если

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \quad f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}).$$

С любым линейным отображением $f: V \rightarrow W$ ассоциируются два подпространства:

$$\begin{aligned} \text{ядро:} \quad \text{Ker } f &= \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}, \\ \text{образ:} \quad \text{Im } f &= \{\mathbf{w} \in W \mid \mathbf{w} = f(\mathbf{v}), \mathbf{v} \in V\}. \end{aligned}$$

Thr 2.1. Пусть V над \mathbb{F} , $f: V \rightarrow W$. Тогда $\text{Ker } f$, $\text{Im } f$ конечномерны и

$$\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim V.$$

Δ . Так как $\text{Ker } f \subset V$, то $\dim \text{Ker } f \leq \dim V \leq \infty$. Любой вектор из $\text{Im } f$ имеет вид

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i f(\mathbf{e}_i), \quad \alpha_i \in \mathbb{F}.$$

т.е. векторы $f(\mathbf{e}_{k+1}), \dots, f(\mathbf{e}_n)$ порождают $\text{Im } f$.

Они линейно независимы. Действительно, пусть $\sum_{i=k+1}^n \lambda_i f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{0}$. Тогда $f(\sum_{i=k+1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i) = \mathbf{0}$. Это значит, что $\sum_{i=k+1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i \in \text{Ker } f$. Но всякая линейная зависимость между базисными элементами должна быть тривиальной. \square

2.2 Аффинные (точечные) пространства

Во-первых в этом параграфе введем множество *точек* $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, \dots$. Назовём его \mathbb{A} . Пусть V - векторное пространство над \mathbb{F} . Пара (\mathbb{A}, V) называется *аффинным пространством*, ассоциированным (или связанным) с V , если задано отображение $(\dot{p}, \mathbf{v}) \rightarrow \dot{p} + \mathbf{v}$, такое, что:

- 1) $\dot{p} + \mathbf{0} = \dot{p}$, $(\dot{p} + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = \dot{p} + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$ для $\forall \dot{p} \in \mathbb{A}$ и $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$;
- 2) $\forall \dot{p}, \dot{q} \in \mathbb{A}$, $\exists! \mathbf{v} \in V: \dot{p} + \mathbf{v} = \dot{q}$.

Def 2.2. Пусть \mathbb{A}, \mathbb{A}' - аффинные пространства, ассоциированные с векторными пространствами V, V' над одним и тем же \mathbb{F} . Отображение $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ называется *аффинным* (или *аффинно-линейным*), если $\forall \dot{p} \in \mathbb{A}$, $\mathbf{v} \in V$ выполнено соотношение

$$f(\dot{p} + \mathbf{v}) = f(\dot{p}) + Df \cdot \mathbf{v}, \tag{1}$$

где $Df: V \rightarrow V'$ – линейное отображение векторных пространств. Отображение Df называют иногда *линейной частью* (или *дифференциалом*) отображения f . Для биективного аффинно-линейного отображения f линейная часть Df тоже биективна. В этом случае говорят об изоморфизме между \mathbb{A} и \mathbb{A}' , а при $\mathbb{A}' = \mathbb{A}$ – об *аффинном автоморфизме* пространства \mathbb{A} , реализованном посредством невырожденного аффинного преобразования f .

Из такого определения становится очевидным такой ряд свойств, как сохранение параллельности, отношения между отрезками и т.д. связанного с биективностью отображения. Примером таких преобразований служит поворот, растяжение/сжатие, отражение, перенос.

Def 2.3. *Системой координат* в n -мерном аффинном пространстве (\mathbb{A}, V) называется совокупность $\{\dot{o}; e_1, \dots, e_n\}$ точки $\dot{o} \in \mathbb{A}$ и базиса (e_1, \dots, e_n) в V . Координатами x_1, \dots, x_n точки \dot{p} считаются координаты вектора \overline{op} в базисе (e_1, \dots, e_n) : $\overline{op} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

Def 2.4. Пусть \dot{p} – фиксированная точка n -мерного аффинного пространства (\mathbb{A}, V) и U – векторное подпространство в V . Тогда множество

$$\Pi = \dot{p} + U = \{\dot{p} + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in U\}$$

называется *плоскостью* (или *аффинным подпространством*) в \mathbb{A} размерности $m = \dim U$. Считается, что Π проходит через точку \dot{p} в направлении U .

Проведём некоторое рассуждения, для понимания необходимости этого языка. Пусть $\dot{q} = \dot{p} + \mathbf{u}$, $\dot{r} = \dot{p} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$, то

$$\dot{q} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \dot{p} + \mathbf{u} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \dot{p} + \mathbf{v} = \dot{r}.$$

Тогда $\overline{qr} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, соответственно из $\dot{q}, \dot{r} \in \Pi \implies \overline{qr} \in U$.

Thr 2.2. *Всякая плоскость $\Pi = \dot{p} + U$ в аффинном пространстве сама является аффинным пространством, ассоциированным с U .*

Thr 2.3. *Подмножество $\Pi \subset \mathbb{A}$ тогда, и только тогда является подпространством, когда оно целиком содержит прямую, проходящую через любые две его различные точки.*

Def 2.5. Любые две плоскости в направлении одного и того же подпространства U называют параллельными.

Аналогично можно определить аффинный функционал. Отображение $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{F}$ называется аффинно-линейной функцией, если

$$f(\dot{p} + \mathbf{v}) = f(\dot{p}) + Df \cdot \mathbf{v} \quad \forall \dot{p} \in \mathbb{A}, \mathbf{v} \in V.$$

Выбрав систему координат $\{\dot{o}; e_1, \dots, e_n\}$, выразим значение f в виде

$$f(\dot{p}) = f(\dot{o} + \overline{op}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \alpha_0,$$

где $\alpha_0 = f(\dot{o})$, $\alpha_i = Df \cdot e_i$, $\overline{op} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

Thr 2.4. Пусть \mathbb{A} – аффинное пространство размерности n . Множество точек из \mathbb{A} , координаты которых удовлетворяют совместной системе линейных уравнений ранга r , образуют $(n - r)$ -мерную плоскость $\Pi \subset \mathbb{A}$. Любая плоскость в \mathbb{A} может быть так получена.

Def 2.6. Пусть $\Pi' = \dot{p} + U'$, $\Pi'' = \dot{q} + U''$ (U' , U'' – векторные подпространства в V размерностей k, l). Говорят, что плоскость Π' параллельна Π'' , если $U'' \subseteq U'$.

2.3 Евклидовы (точечные) пространства

Def 2.7. Аффинное пространство (\mathbb{E}, V) называется *евклидовым (точечным) пространством*, если V – евклидово векторное пространство. Или, тройка (\mathbb{E}, V, ρ) .

Аналогично раннему, можем посмотреть на расстояния между объектами (см. стр. 191, \mathbb{K}).

Thr 2.5. *Определитель Грама системы векторов e_1, \dots, e_m , отличен от нуля в точности тогда, когда векторы системы линейно независимы. Всегда выполнено неравенство $G(e_1, \dots, e_m) \geq 0$.*

Thr 2.6. *При аффинном преобразовании n -мерного евклидова пространства объём параллелепипеда, построенного на n векторах, умножается на модуль определителя преобразования. Другими словами, отношение объёмов параллелепипедов сохраняется.*

Thr 2.7. *Всякое невырожденное аффинное преобразование f n -мерного евклидова пространства (\mathbb{E}, V) есть произведение:*

- 1) сдвига на некоторый вектор;
- 2) движения, оставляющего неподвижной некоторую точку \dot{o} ;
- 3) аффинного преобразования h , являющегося композицией n сжатий вдоль взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в точке \dot{o} .

3 Структура линейного преобразования

3.1 Алгебра линейных операторов

При $V = W$ элемент векторного пространства $\mathcal{L}(V)$ называют *линейным оператором* или *линейным преобразованием*.

Примерами являются: нулевой оператор \mathcal{O} (переводит любой вектор $v \in V$ в нулевой), оператор проектирования ($\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$), оператор подобия, дифференцирования, ...

3.2 Алгебра операторов

Отдельный интерес представляет **алгебра операторов**. Понятно, что $\mathcal{L}(V)$ – векторное пространство размерности $\dim \mathcal{L}(V) = (\dim V)^2$. Можно по аксиомам проверить, что $\mathcal{L}(V)$ является одновременно векторным пространством над \mathbb{F} .

Def 3.1. Кольцо K является одновременно векторным пространством над \mathbb{F} таким, что $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$, $a, b \in K$, называется *алгеброй* над \mathbb{F} . Размерность K как векторного пространства называется *размерностью алгебры K* над \mathbb{F} . Всякое векторное подпространство $L \subset K$, замкнутое относительно операции умножения в K ($L \cdot L \subseteq L$), называется *подалгеброй* алгебры K .

Нам интересна алгебра $\mathbb{F}[\mathcal{A}]$ – наименьшая алгебра, содержащая \mathcal{A} . Какова её размерность? Далее докажем, что

$$\dim \mathbb{F}[\mathcal{A}] \leq \dim V.$$

Def 3.2. Многочлен $f(t)$ *аннулирует* линейный оператор \mathcal{A} , если $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. Нормализованный многочлен минимальной степени, аннулирующий \mathcal{A} , называется *минимальным многочленом* оператора \mathcal{A} .

Thr 3.1. *Для всякого линейного оператора \mathcal{A} существует $\mu_{\mathcal{A}}(t)$. Оператор \mathcal{A} обратим тогда, и только тогда, когда свободный член μ_m отличен от нуля.*

△. Эксплуатируем тот факт, что делители нуля необратимы. □

Thr 3.2. *Любой аннулирующий многочлен $f(t)$ оператора \mathcal{A} делится без остатка на $\mu_{\mathcal{A}}(t)$.*

Def 3.3. Линейный оператор \mathcal{A} называется *нильпотентным*, если $\mathcal{A}^m = \mathcal{O}$ для некоторого $m > 0$; наименьшее такое натуральное число m называется *индексом nilьпотентности*.

3.3 Инвариантные подпространства и собственные векторы

3.3.1 Проекторы

Пусть $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_m$, тогда $\mathbf{x} \in V$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_m, \quad \mathbf{x}_i \in W_i,$$

а отображение $\mathcal{P}_i: \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_i \in \mathcal{L}(V)$. Наконец,

$$W_i = \mathcal{P}_i V = \{\mathbf{x} \in V \mid \mathcal{P}_i \mathbf{x} = \mathbf{x}\},$$

$$K_i = \text{Ker } \mathcal{P}_i = W_1 + \dots + W_m$$

и \mathcal{P}_i по сути оператор проектирования V на W_i вдоль K_i .

Thr 3.3. $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m: V \rightarrow V$ – конечное множество линейных операторов таких, что

$$\sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i = \mathcal{E}; \quad \mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i, \quad 1 \leq i \leq m; \quad \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \mathcal{O}, \quad i \neq j.$$

Тогда

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_m, \quad \text{где } W_i = \text{Im } \mathcal{P}_i.$$

\triangle . Через разбиение $\forall \mathbf{x} \in V$ получим

$$\mathbf{x} = \mathcal{E} \mathbf{x} = \sum \mathcal{P}_i \mathbf{x} = \mathbf{x}_i + \dots + \mathbf{x}_m, \quad \mathbf{x}_i \in W_i,$$

то есть $V = W_1 + \dots + W_m$. Докажем, что сумма прямая. Пусть $\mathbf{x} \in W_j \cap \left(\sum_{i \neq j} W_i \right)$. Но, $\exists \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$:

$$\mathbf{x} = \mathcal{P}_j(\mathbf{x}_j) = \sum_{i \neq j} \mathcal{P}_i(\mathbf{x}_i).$$

Применим \mathcal{P}_j , получим

$$\mathbf{x} = \mathcal{P}_j^2(\mathbf{x}_j) = \sum_{i \neq j} \mathcal{P}_j \mathcal{P}_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{0}.$$

□

3.3.2 Инвариантные подпространства

Def 3.4. Подпространство $U \subset V$ инвариантно относительно $\mathcal{A}: V \rightarrow V$, если $\mathcal{A}U \subset U$.

Thr 3.4. Пространство V является прямой суммой двух подпространств U, W , инвариантных относительно $\mathcal{A}: V \rightarrow V$, тогда, и только тогда, когда \exists базис такой, что \mathcal{A} принимает блочно диагональный вид.

3.3.3 Собственные векторы. Характеристический многочлен.

Def 3.5. Любой ненулевой вектор из одномерного подпространства, инвариантного относительно \mathcal{A} , называется *собственным вектором* оператора \mathcal{A} . Если \mathbf{x} – собственный вектор, то $\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, $\lambda \in \mathbb{F}$ называется *собственным значением* \mathcal{A} .

Очевидная импликация $\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, $\mathcal{A}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y} \implies \mathcal{A}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \lambda(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})$ даёт основание называть V^λ *собственным подпространством* оператора \mathcal{A} , ассоциированным с λ . Его размерность $\dim V^\lambda$ называется *геометрической кратностью* λ .

Уместно ввести понятие *характеристического многочлена*, ассоциированного с \mathcal{A} . Кратность λ как корня характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ называется *алгебраической кратностью* λ оператора \mathcal{A} .

Thr 3.5. Геометрическая кратность λ не превосходит его алгебраической кратности.

\triangle . Действительно, пусть \mathcal{A}' – ограничение \mathcal{A} на V^λ , тогда $\det(t\mathcal{E}' - \mathcal{A}') = (t - \lambda)^m$, причём $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t - \lambda)^m q(t)$. Пусть λ – корень кратности k многочлена $q(t)$. Тогда алгебраической кратностью λ будет $m + k$. □

3.3.4 Критерий диагонализруемости

Def 3.6. Множество всех собственных значений линейного оператора \mathcal{A} называют *спектром* – $\text{Spec } \mathcal{A}$. Если все точки спектра простые, то и спектр называется *простым*.

Lem 3.1. Собственные векторы, принадлежащие к различным собственным значениям, линейно независимы. Сумма $\sum_{\lambda \in \text{Spec } \mathcal{A}} V^\lambda$ прямая.

\triangle . По индукции докажем ЛНеЗ набора $e_i \in V^{\lambda_i} \forall i$.

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m = \mathbf{0} \quad \mapsto \quad \alpha_1 \lambda_1 e_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m e_m = \mathbf{0}.$$

Умножая на λ_m первое соотношение и вычитая из него второе, приходим к линейной зависимости первых $m - 1$ векторов:

$$\alpha_1(\lambda_m - \lambda_1)e_1 + \dots + \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})e_{m-1} = \mathbf{0}.$$

Но $\alpha_1(\lambda_m - \lambda_1) \neq 0$. По доказанному $V^{\lambda_i} \cap \sum_{j \neq i} V^{\lambda_j} = \mathbf{0}$. \square

Def 3.7. Линейный оператор \mathcal{A} на n -мерном пространстве V называют *диагонализруемым*, если существует базис (e_i) , относительно которого матрица оператора принимает диагональный вид.

Thr 3.6. Линейный оператор \mathcal{A} с простым спектром диагонализруем.

Thr 3.7. Пусть \mathcal{A} – линейный оператор на конечномерном векторном пространстве V над полем \mathbb{F} . Для диагонализруемости \mathcal{A} необходимо и достаточно, чтобы все корни $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ лежат в \mathbb{F} и геометрическая кратность каждого собственного значения λ совпадает с его алгебраической кратностью.

\triangleLeftarrow . Если $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – различные корни многочлена $\chi_{\mathcal{A}}(t)$, а k_1, \dots, k_m – их кратности, то $\dim V^{\lambda_i} = k_i$ и $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. По лемме 3.1 любая совокупность $v_i \in V^{\lambda_i}$ линейно независима, так что

$$V^{\lambda_i} \cap (V^{\lambda_1} + \dots + V^{\lambda_{i-1}} + \dots + V^{\lambda_m}) = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Значит сумма прямая. Взяв за базис объединение базисов в V^{λ_i} , мы придём к *собственному базису*. \square

\triangleRightarrow . Пусть \mathcal{A} диагонализруем. Положим $l_i = \dim V^{\lambda_i}$. Из 2 верно, V имеет собственный базис из элементов V^{λ_i} , соответственно $V^{\lambda_1}, \dots, V^{\lambda_m}$ порождают V . Из равенства для $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ вытекает, что все корни многочлена принадлежат \mathbb{F} , т.е. выполнено первое условие. Также l_i совпадает с алгебраической кратностью λ_i . \square

3.3.5 Существование инвариантных подпространств

Thr 3.8. Всякий комплексный \mathcal{A} имеет одномерное инвариантное подпространство. Всякий вещественный \mathcal{A} имеет одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

\triangle . Так как $\chi_{\mathcal{A}}$ имеет в \mathbb{C} хотя бы один корень.

Для \mathbb{R} рассмотрим $\mu_{\mathcal{A}}$. Его коэффициенты лежат в \mathbb{R} . Если $\mu_{\mathcal{A}}$ имеет вещественный корень, то

$$\mu_{\mathcal{A}} = (t - \alpha)g(t), \quad g(t) \in \mathbb{R}[t].$$

Так как $g(\mathcal{A}) \neq \mathcal{O}$ в силу минимальности $\mu_{\mathcal{A}}$, то $g(\mathcal{A})\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ для некоторого $\mathbf{u} \in V$. Но

$$(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}) = (\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})g(\mathcal{A})\mathbf{u} = \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})\mathbf{u} = \mathbf{0},$$

откуда $\mathcal{A}\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}$, т.е. \mathbf{v} – собственный вектор.

Если у \mathcal{A} нет собственных векторов, то у $\mu_{\mathcal{A}}$ нет вещественных корней. Однако

$$\mu_{\mathcal{A}}(t) = (t^2 - \alpha t - \beta t)h(t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad h(t) \in \mathbb{R}[t].$$

Снова $\mathbf{v} = h(\mathcal{A})\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ для некоторого $\mathbf{u} \in V$ и

$$\mathcal{A}^2\mathbf{v} - \alpha\mathcal{A}\mathbf{v} - \beta\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Получается, что $\mathcal{A}^2\mathbf{v} = \alpha\mathcal{A}\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$. Так как $\mathcal{A}\mathbf{v} \neq \lambda\mathbf{v}$, то $L = \langle \mathbf{v}, \mathcal{A}\mathbf{v} \rangle$ – двумерное инвариантное подпространство. \square

3.3.6 Сопряженный линейный оператор

Посмотрим на связь оператора и сопряженного пространства. При любом фиксированном элементе $f \in V^*$ отображение $x \mapsto (f, \mathcal{A}x) := f(\mathcal{A}x)$ снова является элементом из V^* , т.е. линейной функцией. Раз это так, то можем положить

$$(\mathcal{A}^* f, x) := (f, \mathcal{A}x). \quad (3)$$

Def 3.8. Линейный оператор \mathcal{A}^* на V^* , заданный соотношением (3), называют оператором, *сопряженным* к $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$.

Thr 3.9. Если в базисе (e_i) пространства V линейный оператор \mathcal{A} имеет матрицу $A = (a_{ij})$, то в дуальном базисе (e^i) пространства V^* сопряженный к \mathcal{A} оператор \mathcal{A}^* имеет транспонированную матрицу A^T : $\mathcal{A}^* = (a_{ij}^*) = A^T$.

Одновременное рассмотрение пар (V, \mathcal{A}) и (V^*, \mathcal{A}^*) часто приводит к практическим результатам. Одним из содержательных примеров является доказательство следующей теоремы.

Thr 3.10. Всякий комплексный линейный оператор на V обладает инвариантной гиперплоскостью.

\triangle . Пусть $\dim V = n$. Как мы знаем, $\dim \text{Ker } f = n - 1$ для любой линейной функции $f \neq 0$ на V . Возьмём в качестве f собственный вектор линейного оператора \mathcal{A}^* на V^* . Тогда $x \in \text{Ker } f \Rightarrow 0 = \lambda(f, x) = (\lambda f, x) = (\mathcal{A}^* f, x) = (f, \mathcal{A}x) \Rightarrow \mathcal{A}x \in \text{Ker } f$. Собственно, $\text{Ker } f$ – искомая гиперплоскость. \square

3.3.7 Фактороператор

Пусть L – подпространство, инвариантное относительно линейного оператора \mathcal{A} , действующего на V . Считая V и L фиксированными, будем обозначать факторпространство V/L , символом \bar{V} , а любой его элемент $x + L$ через \bar{x} .

факторпространство – это ..?

Def 3.9. Соотношением $\bar{\mathcal{A}} \cdot \bar{x} = \overline{\mathcal{A}x}$ на \bar{V} фактороператор. Другими словами, $\bar{\mathcal{A}}(x + L) = \mathcal{A}x + L$.

3.4 Жорданова нормальная форма

3.4.1 ЖНФ: формулировка и следствие

Thr 3.11. Каждая квадратная матрица A порядка n над алгебраически замкнутым полем \mathbb{F} (достаточно, чтобы χ_A раскладывался на линейные сомножители) приводится к жордановой нормальной форме. Именно, $\exists C (\det C \neq 0)$: $C^{-1}AC = J(A) = J$. С точностью до перестановки клеток жорданова нормальная форма матрицы единственна.

\triangle .  (в принципе, всё понятно)  \square

3.4.2 Случай нильпотентного оператора

Далее, положив $\mathcal{N} = \mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}$, мы получим нильпотентный оператор индекса нильпотентности m с нильпотентной матрицей N .

Def 3.10. Линейная оболочка

$$\mathbb{F}[\mathcal{N}]v = \langle v, \mathcal{N}v, \dots, \mathcal{N}^{m'-1}v \rangle$$

называется *циклическим подпространством*, ассоциированным с оператором \mathcal{N} индекса нильпотентности m и вектором v . Предполагается, что $m' \leq m$ – наименьшее натуральное число, для которого $\mathcal{N}^{m'}v = 0$.

Thr 3.12. ЖНФ нильпотентной матрицы N существует (над произвольным \mathbb{F}).

\triangle . Достаточно показать, что V , на котором действует оператор \mathcal{N} , разлагается в прямую сумму циклических подпространств.

По теореме 1 матрица N приводится к верхнему треугольному виду с 0 по диагонали. Это значит, что линейная оболочка U первых $n - 1$ базисных векторов инвариантна относительно \mathcal{N} . По определению $\mathcal{N}V \subset U$, а по предположению индукции а U можно выбрать жорданов базис для \mathcal{N} , или, что то же самое,

$$U = \mathbb{F}[\mathcal{N}]e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{F}[\mathcal{N}]e_s,$$

$$\mathbb{F}[\mathcal{N}]e_i = \langle e_i, \mathcal{N}e_i, \dots, \mathcal{N}^{m_i-1}e_i \rangle, \quad B^{m_i}e_i = 0.$$

Далее, $V = \langle v, U \rangle$, $\mathcal{N}v \in U$ для любого вектора v , не содержащегося в U , так что $\mathcal{N}v = \sum_i \alpha_i e_i + \mathcal{N}u$, $u \in U$. Заменяя v на $v' = v - u$, будем иметь

$$V = \langle v', U \rangle, \quad \mathcal{N}v' = \sum_{i=1}^s \alpha_i e_i.$$

Если $\alpha_i = 0, 1 \leq i \leq s$, то к клеткам Жордана добавится $J_1(0)$, отвечающее циклическому подпространству $\langle v' \rangle$, т.е.

$$N \sim J(N) = \text{diag}(J_{m_1}(0), \dots, J_{m_s}(0), J_1(0))$$

Остаётся рассмотреть случай, когда

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_{r-1} = 0, \quad \mathcal{N}v' = \sum_{i=r}^s \alpha_i e_i, \quad \alpha_r \neq 0$$

для некоторого $r \geq 1$. Положим

$$e'_i = e_i, \quad i \neq r, \quad e'_r = \frac{1}{\alpha_r} v', \quad \beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_r}.$$

Тогда

$$\mathcal{N}e'_r = e_r + \sum_{i=r+q}^s \beta_i e_i := f_r$$

Считая $m_1 \geq \dots \geq m_n$: $\mathcal{N}^{m_r} f_r = 0$. Верно, что $\mathcal{N}^{m_r-1} f_r \neq 0, \forall \beta$. Кроме того, сумма

$$\sum_{i \neq r} \mathbb{F}[\mathcal{N}]e'_i + \mathbb{F}[\mathcal{N}]f_r$$

также является прямой и совпадает с U .

Но $\mathbb{F}[\mathcal{N}]f_r$ расширяется за счёт вектора $e'_r \notin U$: $\mathbb{F}[\mathcal{N}]f_r \subset \mathbb{F}[\mathcal{N}]e'_r$, и получается прямая сумма

$$V = \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{F}[\mathcal{N}]e'_i,$$

отвечающую набору индексов m'_1, \dots, m'_s , где $m'_i = m_i, i \neq r, m'_r = m_r + 1$. Тогда

$$B \sim \text{diag}(J'_{m'_1}(0), \dots, J_{m'_s}(0)).$$

Таким образом, существование базиса для нильпотентного \mathcal{N} доказано. \square

4 Билинейные и квадратичные форма

4.1 Билинейная форма

Def 4.1. Билинейная форма на линейном пространстве V — $b: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$, линейное по \forall аргументу.

Def 4.2. $b \in \mathcal{B}(V)$ ¹, а (e_1, \dots, e_n) — базис в V . Матрица билинейной формы: $B = (b(e_i, e_j))$, $b \xleftrightarrow{e} B$

Для $v, u \in V$: $u \xleftrightarrow{e} x$ и $v \xleftrightarrow{e} y$ — $b(u, v) = x^T B y$. ($B = (b_{ij})$).

Thr 4.1. Пусть e — базис в V ($\dim V = n$), тогда соответствие $\mathcal{B}(V) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{F})$ осуществляет изоморфизм линейных пространств. Следствие: $\dim \mathcal{B}(V) = n^2$.

¹ $\mathcal{B}(V)$ — линейное пространство над \mathbb{F} .

\triangle . Инъективность: $b_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = x^T B y = b_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \Rightarrow b_1 = b_2$;

Сюръективность: определяем $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = x^T B y$, тогда $b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = b_{ij}$, значит $b \xleftrightarrow[e]{\leftarrow} B$. \square

Thr 4.2. $b \in \mathcal{B}(V)$, e и e' — базисы в V , $e' = eS$, $b \xleftrightarrow[e]{\leftarrow} B$ и $b \xleftrightarrow[e']{\leftarrow} B'$. Тогда $B' = S^T B S$.

Def 4.3. Матрицы B и $B' = S^T F S$ с $\det A \neq 0$ — **конгруэнтны**. Ранг B в каком-то базисе соответствующей b называется **рангом** билинейной формы. $\text{rg} b$ инвариантен относительно изменения базиса.

4.2 Симметричные и кососимметричные формы

Def 4.4.	Симметричная билинейная форма.	Кососимметричная билинейная форма.
	$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ $\mathcal{B}^-(V)$ — симметричные формы на V $b \xleftrightarrow[e]{\leftarrow} B, b \in \mathcal{B}^+(V) \Leftrightarrow B^T = B$ $b^+(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} [b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{u})]$	$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V : b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -b(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \Leftarrow b(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ $\mathcal{B}^-(V)$ — кососимметричные формы на V $b \xleftrightarrow[e]{\leftarrow} B, b \in \mathcal{B}^-(V) \Leftrightarrow B^T = -B$ $b^-(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} [b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, \mathbf{u})]$

Thr 4.3. Пусть $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}^+ \oplus \mathcal{B}^-$.

Def 4.5. Пусть $b \in \mathcal{B}^\pm(V)$. Тогда **ядром** формы b называется: $\text{Ker } b := \{\mathbf{v} \in V : \forall \mathbf{u} \in V b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\} = \{\mathbf{u} \in V : \forall \mathbf{v} \in V b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\}$ (соответственно левое и правое ядра).

Thr 4.4. $\dim \text{Ker } b = \dim V - \text{rg } b$.

\triangle . 1) Рассмотрим базис $e = (e_1, \dots, e_n)$, и $b \xleftrightarrow[e]{\leftarrow} B$. Пусть $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \xleftrightarrow[e]{\leftarrow} x$, $\mathbf{v} \in \text{Ker } b \Leftrightarrow \forall \mathbf{u} b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$;

2) Или равносильно: $\forall i b(e_i, \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow EBx = 0 \Leftrightarrow Bx = 0$. Пространство решений это ОСЛУ имеет требуемое равенство: $\dim \text{Ker } b = \dim V - \text{rg } B$. \square

4.3 Ортогональные и невырожденные

Def 4.6. Пусть $b \in \mathcal{B}^\pm(V)$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. \mathbf{u} и \mathbf{v} **ортогональны** относительно b , если $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.

Для $U \subseteq V$, **ортогональное дополнение** $U^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \forall \mathbf{u} \in U b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\}$.

Def 4.7. Пусть $b \in \mathcal{B}^\pm(V)$, форма b — **невырожденная**, если $\text{rg } b = \dim V$.

Thr 4.5. $\dim U^\perp \geq \dim V - \dim U$. А если форма b — невырождена, то $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$

\triangle . 1) Выберем в V базис (e_1, \dots, e_n) так, чтобы первые k векторов были базисом U .

2) Тогда, если $\mathbf{v} \xleftrightarrow[e]{\leftarrow} x$: $\mathbf{v} \in U^\perp \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, k : b(e_i, \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow (E_k | 0) Bx = 0$.

3) ОСЛУ (2) состоит из k строк матрицы B , значит её ранг $\leq k \Rightarrow \dim U^\perp \geq n - k$.

4) Если b — невырождена, то строчки B — ЛНеЗ \Rightarrow ОСЛУ имеет ранг $k \Rightarrow \dim U^\perp = n - k$. \square

Def 4.8. $b \in \mathcal{B}^\pm(V)$, $U \subseteq V$. U — **невырожденное** относительно b , если $b|_U \in \mathcal{B}^\pm(U)$ — невырождена.

Thr 4.6. Пусть $b \in \mathcal{B}^\pm(V)$, $U \subseteq V$. Тогда U — невырождено $\Leftrightarrow V = U \oplus U^\perp$.

\triangle . 1) Базис как в теореме (4.5). Матрица $b|_U$ — это подматрица B стоящая в верхнем левом углу.

2) так как U — невырождено: $\text{rg } B_U = k \Rightarrow$ первые k строк B_U ЛНеЗ, значит $\dim U^\perp = n - k$.

3) Кроме того, $\text{Ker } b|_U = 0$ так как $\dim \text{Ker } b|_U = k - k = 0$. То есть $\forall \mathbf{v} \in U, \mathbf{v} \neq 0 \Rightarrow \exists \mathbf{u} \in U : b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$, что означает, что $U \cap U^\perp = \mathbf{0}$. **Итак**, $U + U^\perp = U \oplus U^\perp$ и $\dim(U + U^\perp) = k + (n - k) = n$. \square

4.4 Квадратичные формы

Def 4.9. $h: V \rightarrow \mathbb{F}$ — **квадратичная форма**, $h(v) = b(v, v) \forall v \in V$, для некоторой $b \in \mathcal{B}(V)$.

Thr 4.7. Если $\text{char}(\mathbb{F}) \neq 2$. Тогда $\forall h \in \mathcal{Q}(V) \exists! b \in \mathcal{B}^+(V) : h(v) = b(v, v)$ ($\mathcal{Q} \cong \mathcal{B}^+(V)$).

Δ . $\textcircled{\Xi}$. Пусть $b \in \mathcal{B}(V) : b = b^+ + b^- \rightsquigarrow h(v) = b(v, v) = b^+(v, v) + b^-(v, v)$. h задаётся b^+ .

$\textcircled{!}$. Пусть $h(v) = b(v, v)$, $b \in \mathcal{B}^+(V)$. Восстановим b по h . Для $u, v \in V$:

$$h(u + v) = b(u + v, u + v) = b(u, u) + b(v, v) + 2b(u, v) \rightsquigarrow b(u, v) = [h(u + v) - h(u) - h(v)]/2$$

Полученная симметричная форма — **билинейная форма полярная к h** . \square

Пусть $b \xleftrightarrow{e} B$, $u \xleftrightarrow{e} x$, $v \xleftrightarrow{e} y$. Имеем $b(u, v) = x^T B y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i y_j$. Тогда квадратичная форма $h(v) = y^T B y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} y_i y_j$. Если b — симметричная, то $b_{ij} = b_{ji}$, а $h(v) = \sum_{i=1}^n b_{ii} y_i^2 + 2 \sum_{i < j} b_{ij} y_i y_j$.

Отныне характеристика нашего поля ни в коем виде не **двойка**.

Def 4.10. $h \in \mathcal{Q}(V)$ с **полярной** $b \in \mathcal{B}(V)$, e — базис. Тогда матрица h — это матрица b в базисе e .

Матрица $h \in \mathcal{Q}(V)$ всегда симметрична. Если $h \xleftrightarrow{e} B$, $v \xleftrightarrow{e} x$, то $h(v) = b(v, v) = x^T B x$.

Thr 4.8. Пусть $h \in \mathcal{Q}(V)$. Тогда $\exists e$ — базис в $V : h$ в этом базисе имеет диагональную матрицу.

Δ . 1) Индукция по $n = \dim V$. Для $n = 1$ доказывать нечего. Для $h = 0$ тоже.

2) $n > 1$: $\exists e_1 : h(e_1) \neq 0$. Тогда $\langle e_1 \rangle$ — невырождена относительно полярной к $h - b$.

3) То есть $V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_1 \rangle^\perp$. По индукции, в $U = \langle e_1 \rangle^\perp$ есть базис (e_2, \dots, e_n) , где $h|_U$ диагональна.

4) Матрица(3) — B' , тогда $h \xleftrightarrow{e} B$ в (e_1, e_2, \dots, e_n) состоит из B' и $h(e_1)$ в верхнем левом углу. \square

Con 4.1. Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{R} \Rightarrow \forall h \in \mathcal{Q}(V)$, $\exists e \in V : h \xleftrightarrow{e} B \in e$ — диагональна с 0, ± 1 на диагонали.

Def 4.11. Над \mathbb{R} $h \in \mathcal{Q}(V)$. Базис, в котором $h \xleftrightarrow{e} B$ — диагональна с 0, ± 1 — **нормальный базис**.

Матрица B — **нормальная форма** для h .

Def 4.12. Пусть $h \in \mathcal{Q}(V)$ над \mathbb{R} (далее всегда $\mathbb{F} = \mathbb{R}$). Тогда h называется:

положительно полуопределенной, если $\forall v \in V h(v) \geq 0 \Leftrightarrow$ на диагонали B только 0, $+1$.

положительно определенной, если $\forall v \neq 0 \in V h(v) > 0 \Leftrightarrow$ на диагонали B только $+1$.

отрицательно определенной или полуопределенной.

В этих случаях полярная к h билинейная форма приобретает те же названия.

Def 4.13. Пусть $h \in \mathcal{Q}(V)$. Её **положительный индекс инерции** $\sigma_+(h)$ — наибольшая размерность подпространства $U \subseteq V$, на которой $h|_U$ — положительно определена. (Отрицательный индекс инерции так же)

Thr 4.9. $\mathcal{Q}(V) \ni h \xleftrightarrow{e} B$ — её **нормальный вид** в e . Тогда на диагонали B стоит ровно $\sigma_+(h)$ единиц и $\sigma_-(h)$ минус единиц.

Δ . 1) Пусть $B = \begin{pmatrix} E_k & & O \\ & 0_l & \\ O & & -E_m \end{pmatrix}$. Тогда, если $U = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$, то матрица $h|_U$ — единичная, то есть $h|_U$ — положительно определена. Для $W = \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$ получаем $h|_W$ — отрицательно полуопределена.

2) Пусть $U' \subseteq V : h|_{U'}$ — положительно определена $\Rightarrow \forall (0 \neq) v \in U' \cap W : 0 < h(v) \leq 0$ — невозможно.

Итак, $U' \cap W = 0 \Rightarrow \dim U' \leq \dim V - \dim W = k$, в итоге $\sigma_+(h) = k$. Аналогично $\sigma_-(h) = m$. \square

Con 4.2 (Закон инерции). *Нормальный вид матрицы $h \in \mathcal{Q}(V)$ определён однозначно с точностью до перестановки элементов диагонали.*

Def 4.14. B — симметричная матрица над \mathbb{R} Она обретает такие же названия, как у квадратичной формы, если она её матрица.

B — положительно определена $\Leftrightarrow \exists$ невырожденная $A : B = A^T A$

Δ . \Rightarrow . У соответствующей h нормальный вид $-E = S^T B S$. Тогда $B = (S^T)^{-1} S^{-1} = (S^{-1})^T S^{-1}$.

\Leftarrow . Если $B = A^T A \Rightarrow \forall (\mathbf{0} \neq) \mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \xleftrightarrow[e]{e} x, h(\mathbf{v}) = x^T B x = x^T A^T A x = (A x)^T A x > 0$.

Note: и также для B – полуопределенной $\Leftrightarrow \exists A : B = A^T A$. \square

Def 4.15. B – симметричная матрица. Её **главный минор** i -порядка $\Delta_i(B)$ – это определитель матрицы $i \times i$ в левом верхнем углу.

Thr 4.10 (Метод Якоби). $\mathcal{Q}(V) \ni h \xleftrightarrow[e]{e} B$, причём $\Delta_i(B) \neq 0, i = 1, \dots, n (= \dim V)$. Тогда $\exists e' = e S$, где S – верхнетреугольная матрица с единицами на диагонали такой,

что $h \xleftrightarrow[e']{e'} \begin{pmatrix} d_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & d_n \end{pmatrix}$, где $d_i = \frac{\Delta_i(B)}{\Delta_{i-1}(B)}$ ($\Delta_0(B) = 1$).

Δ . 1) Индукция по n . При $n = 1$ доказывать нечего. Для $n > 1$ имеем $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1} \rangle$ – невырожденный относительно билинейной формы, полярной к h (так как $\Delta_{n-1}(B) \neq 0$).

2) Значит $V = U \oplus U^\perp$. Разложим $\mathbf{e}_n = \mathbf{u} + \mathbf{e}'_n$ ($\mathbf{u} \in U, \mathbf{e}'_n \in U^\perp$). Тогда по предположению индукции: найдётся замена базиса в U : $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_{n-1}) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}) S$, приводящая $h|_U$ к диагональному.

3) Тогда $\mathbf{e}'_n \in \langle \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_{n-1} \rangle^\perp = U^\perp$. Получаем $h \xleftrightarrow[e']{e'} B' = \left(\begin{array}{ccc|c} d_1 & & & O \\ & \ddots & & \\ & & d_{n-1} & \\ \hline O & & & d_n \end{array} \right) S = \left(\begin{array}{c|c} S' & O \\ \hline O & 1 \end{array} \right)$.

4) Доказав переход индукции осталось вычислить d_i . Заметим, что: $\mathbf{e}'_i \in \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i \rangle (= \langle \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_i \rangle)$.

5) Пусть B_i' – подматрица в B' в левом верхнем углу ($\Delta_i(B) = |B_i|$). Тогда $B'_i = S_i^T B_i S_i$ ($\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i S_i$ и S_i – верхнетреугольная с единицами на диагонали).

6) Значит $\Delta_i(B') = |B'_i| = |S_i^T B_i S_i| = |B_i| |S_i|^2 = |B_i| = \Delta_i(B) (= d_1 \dots d_i) \rightsquigarrow d_i = \frac{|B'_i|}{|B'_{i-1}|} = \frac{\Delta_i(B)}{\Delta_{i-1}(B)}$. \square

Thr 4.11 (Критерий Сильвестра). $\mathcal{Q}(V) \ni h \xleftrightarrow[e]{e} B$.

h – положительно определена $\Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n (= \dim(V)) \Delta_i(B) > 0$.

Δ . \Rightarrow . h – положительно определена $\Leftrightarrow B = A^T A, A$ – невырождена. Тогда $\Delta_n(B) = |B| = |A|^2 > 0$.

\Leftarrow . Из метода Якоби, на диагонали: $\Delta_1, \Delta_2/\Delta_1 \dots$ все $> 0 \Rightarrow h$ – положительно определена. \square

Con 4.3. Если $\forall i = 1, \dots, n : \Delta_i(B) \neq 0 \Rightarrow \sigma_-(h)$ – число перемен знака в $1, \Delta_1(B), \dots, \Delta_n(B)$.

4.5 Кососимметричные и полуторалинейные формы

Thr 4.12. Теперь и далее \mathbb{F} – любое. Пусть $b \in \mathcal{B}^-(V)$. Тогда в $V \exists e$, в котором $b \xleftrightarrow[e]{e} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \boxed{0} \end{pmatrix}$

Δ . 1) Индукция по $n = \dim V$. Если $\text{rg } b = 0$, то доказывать нечего.

2) Иначе $\exists \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 : b(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \neq 0 \Rightarrow \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – ЛНЭЗ и, можно считать, $b(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$.

3) Далее, $U = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ – невырождено относительно b и $b|_U \xleftrightarrow[(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)]{e} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Значит, $V = U \oplus U^\perp$. По предположению индукции к $b|_{U^\perp}$ получаем B_1 в базисе $(\mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n)$.

5) Тогда, для $e = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ имеем: $b \xleftrightarrow[e]{e} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & O \\ -1 & 0 & \\ \hline O & & B_1 \end{array} \right)$. \square

5 Пространства со скалярным произведением

5.1 Евклидово пространство

Def 5.1 (Скалярное произведение).

Отображение $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$:

i)	$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$	$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$;	норма	$\ \mathbf{v}\ = \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$
ii)	$(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}, \mathbf{z})$	$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;	угол	$\cos \alpha_x^y = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) / \ \mathbf{x}\ \ \mathbf{y}\ $
iii)	$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$	$\forall \mathbf{x} \neq 0$.	н-во Коши-Буняк.	$ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \ \mathbf{x}\ \cdot \ \mathbf{y}\ $
			н-во треугольника	$\ \mathbf{x} \pm \mathbf{y}\ \leq \ \mathbf{x}\ + \ \mathbf{y}\ $

Любое евклидово пространство содержит:

Def 5.2. Евклидовым векторным пространством называется вещественное векторное пространство V с выделенной на нём симметричной билинейной формой $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{x}|\mathbf{y})$ такой, что соответствующая квадратичная форма $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}|\mathbf{x})$ положительно определена.

5.1.1 Процесс ортогонализации

Def 5.3. Базис $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ евклидова векторного пространства V называется *ортогональным*, если $(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j) = 0$ при $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \dots, n$. Если, кроме того, $(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_i) = 1$, то базис называется *ортонормированным*.

Факт: любые ненулевые взаимно ортогональные векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m \in V$ линейно независимы. Другой факт: во всяком n -мерном V существуют ортонормированные базисы.

Def 5.4. Скалярное произведение $(\mathbf{x}|\mathbf{e})$, где $\|\mathbf{e}\| = 1$, называют *проекцией* вектора \mathbf{x} на прямую $\langle \mathbf{e} \rangle_{\mathbb{R}}$.

Def 5.5. Множество всех векторов $\mathbf{x} \in V$, ортогональных $U \subset V$, есть подпространство U^\perp , которое называется *ортогональным дополнением* к U .

Thr 5.1 (процесс Грама – Шмидта). Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ – ЛНЗ система $\subset V_m(\mathbb{R})$. Тогда \exists ортонормированная система векторов $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_m$ такая, что $L_i = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i \rangle$ и $L'_i = \langle \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_i \rangle$ совпадают при $i = 1, 2, \dots, m \leq n$.

Δ . Пусть построена система для k векторов. Найдём \mathbf{e}_{k+1} . Верно, что $L_{k+1} = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{v} \rangle$, где

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_{k+1} - \sum \lambda_i \mathbf{e}'_i$$

с произвольными λ . Подберём их так, чтобы $\mathbf{v} \perp L'_k$. Для этого необходимо и достаточно условий

$$0 = (\mathbf{v}|\mathbf{e}'_j) = (\mathbf{e}_{k+1}|\mathbf{e}'_j) - \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{e}'_i |\mathbf{e}'_j \right) = (\mathbf{e}_{k+1}|\mathbf{e}'_j) - \lambda_j, \quad j = 1, \dots, k.$$

Таким образом, при $\lambda_j = (\mathbf{e}_{k+1}|\mathbf{e}'_j)$ получаем вектор $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, ортогональный к L'_k . Полагая $\mathbf{e}'_{k+1} = \mu \mathbf{v}$ придём к ортонормированной системе. \square

Как следствие, всякая ортонормированная система векторов V дополняема до ортонормированного базиса.

Thr 5.2. Пусть L – подпространство конечномерного евклидова пространства V , L^\perp – его ортогональное дополнение. Тогда

$$V = L \oplus L^\perp, \quad L^{\perp\perp} = L. \quad (4)$$

Δ . Возьмем в L какой-нибудь ортонормированный базис $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$. Пусть $\mathbf{w} \in V$. Рассмотрим вектор

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} - \sum_{i=1}^m (\mathbf{w}|\mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i.$$

Так как $(\mathbf{v}|\mathbf{e}_j) = (\mathbf{w}|\mathbf{e}_j) - \sum_{i=1}^m (\mathbf{w}|\mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j) = (\mathbf{w}|\mathbf{e}_j) - (\mathbf{w}|\mathbf{e}_j) \cdot 1 = 0 \quad \forall j \leq m$. Получается \mathbf{v} ортогонален L . Это значит, что $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, где $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m (\mathbf{w}|\mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i \in L$ и $\mathbf{v} \in L^\perp$. Итак, $V = L + L^\perp$.

Пусть $\mathbf{x} \in L \cap L^\perp$. Так как $\mathbf{x} \in L$, то $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0$. Но и $\mathbf{x} \in L^\perp$, так что $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0$.

Бонус. Из разложения $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ легко получить, что $L^{\perp\perp} = L$. \square

5.1.2 Изоморфизмы

Thr 5.3. Любые евклидовы пространства V , V' одинаковой конечной размерности изоморфны. Существует изоморфизм $f: V \rightarrow V'$, сохраняющий скалярное произведение, т.е.

$$(x|y) = (f(x), f(y))' \quad (5)$$

△. Достаточно рассмотреть два ОНБ в V и V' . Соответствие

$$f: x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \mapsto x' = x_1 e'_1 + \dots + x_n e'_n,$$

очевидно, биективно. По аксиомам проверяем, что f – изоморфизм. Далее вспоминаем, как выглядит в ОНБ скалярное произведение и успех. \square

Рассмотрим пространство V^* . Очевидно, что отображение $x \mapsto (v|x)$, $\forall v \in V$ определяет линейную форму

$$\Phi_v = (v|*): V \rightarrow \mathbb{R},$$

т.е. $(v|*) \in V^*$.

Thr 5.4. Отображение $\Phi: v \rightarrow (v|*) \equiv \Phi_v$ – естественный изоморфизм V и V^* . При этом Φ ОНБ V отождествляется с дуальным к нему базисом f_1, \dots, f_n пространства V^* .

△. Так как скалярное произведение $(v|x)$ линейно по v , то отображение Φ линейно.

Далее, $\text{Ker } \Phi = \mathbf{0}$, поскольку $v \in \text{Ker } \Phi \implies (v|x) = 0 \forall x \in V$ и $(v|v) = 0$.

Как всякий элемент пространства V^* , линейная форма $(v|*)$ линейно выражается через двойственный базис.

$$\Phi_{e_i} = (e_i|*) = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j^*, \quad i = 1, \dots, n.$$

Так как (e_1, \dots, e_n) – ОНБ, то

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ik} e_k^*(e_j) = (e_i|e_j) = \delta_{ij},$$

откуда

$$(e_i|*) = e_i^*.$$

Из этого следует сюръективность Φ . \square

5.1.3 Ортогональные матрицы

Посмотри на переход от одного ОНБ к другому. Запишем

$$e_j = a_{j1} e_1 + a_{j2} e_2 + \dots + a_{jn} e_n, \quad 1 \leq j \leq n,$$

мы получаем матрицу перехода $A = (a_{ij})$, в k -м столбце которой стоят координаты вектора e'_k относительно базиса (e_1, \dots, e_n) . Из ортонормированности получим:

$$\delta_{ij} = (e'_i|e'_j) = \left(\sum_k a_{ki} e_k \middle| \sum_l a_{lj} e_l \right) = \sum_{k,l} a_{ki} a_{lj} (e_k|e_l) = \sum_k a_{ki} a_{kj}.$$

Итак,

$$a_{1i} a_{1j} + a_{2i} a_{2j} + \dots + a_{ni} a_{nj} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ 1 & \text{при } i = j \end{cases} \quad (6)$$

Или, кратко, запишем в виде

$$A^T \cdot A = E. \quad (7)$$

Def 5.6. Квадратная матрица, удовлетворяющая одному из вышеприведенных условий (6) или (7), называется *ортогональной*. Множество всех ортогональных матриц порядка n обозначается $O(n)$.

Thr 5.5. Матрица перехода от одного ОНБ к другому ортогональна, всякая ортогональная матрица может быть матрицей такого перехода.

5.2 Эрмитовы векторные пространства

5.2.1 Эрмитовы формы

Пусть отныне $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, V — линейное пространство над \mathbb{F} .

Def 5.7. $b: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ — **полуторалинейная форма**, если она:

- 1) Линейная по первому аргументу:
$$\begin{cases} b(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = b(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) \\ \forall \lambda \in \mathbb{C} : b(\lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{cases}$$
- 2) Сопряженно линейная по второму аргументу:
$$\begin{cases} b(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2) \\ \forall \lambda \in \mathbb{C} : b(\mathbf{u}, \lambda \mathbf{v}) = \bar{\lambda} b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{cases}$$

Def 5.8. Матрица полуторалинейной формы в базисе $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ — это $b \xleftrightarrow[e]{} B = (b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))$.

Если $\mathbf{u} \xleftrightarrow[e]{} x$, $\mathbf{v} \xleftrightarrow[e]{} y$, то $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = x^T B \bar{y}$.

Thr 5.6. Пространство полуторалинейных форм $S(V) \cong M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Переход: $e' = eS$, $B' = S^T B \bar{S}$.

Доказательство. $|B'| = |S^T| \cdot |B| \cdot |\bar{S}| = |B| \cdot |\det S|^2$ □

Con 5.1. $\text{rg } B = (\text{rg } b)$ и $\arg \det B$ не зависят от выбора базиса.

Def 5.9. Пусть $b \in S(V)$. b называется **эрмитовой формой**, если $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{b(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$.

Lem 5.1. Пусть $S(V) \ni b \xleftrightarrow[e]{} B$. Тогда b — эрмитова $\iff B^T = \bar{B}$.

Def 5.10. $B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ — **эрмитова**, если $B = \bar{B}^T$. $B^* = \bar{B}^T$ — **эрмитово сопряженной** к B .

Def 5.11. Пусть b — эрмитова форма на V . Тогда $h: V \rightarrow \mathbb{C}$, $h(\mathbf{v}) = b(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ — **эрмитова квадратичная форма** соответствующая b . (b полярна к h)

Lem 5.2. Если b — эрмитова форма, то 1) $b(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}$; 2) $b \xleftrightarrow[e]{} B : |B| \in \mathbb{R}$. Следствие: h принимает значения лишь из \mathbb{R} .

Lem 5.3. Если $b_1 \neq b_2$ — эрмитовы формы, то соответствующие $h_1 \neq h_2$.

Δ . Восстановим b по h : $h(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = h(\mathbf{u}) + h(\mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = h(\mathbf{u}) + h(\mathbf{v}) + 2\text{Re}(b(\mathbf{u}, \mathbf{v})) \Rightarrow$

$$\text{Re}(b(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = [h(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - h(\mathbf{u}) - h(\mathbf{v})]/2,$$

$$b(\mathbf{u}, i\mathbf{v}) = -ib(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \Rightarrow \text{Im}(b(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \text{Re}(-ib(\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \text{Re}(b(\mathbf{u}, i\mathbf{v})) = [h(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) - h(\mathbf{u}) - h(i\mathbf{v})]/2$$

Следствие: Соответствие между эрмитовыми и квадратичными эрмитовыми формами биетивно и \mathbb{R} -линейно □

Значит линейные вещественные пространства эрмитовых и эрмитовых квадратичных форм изоморфны.

Пусть b — эрмитова форма. $\text{Ker } b = \{\mathbf{u} : \forall \mathbf{v} \in V b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\} = \{\mathbf{v} : \forall \mathbf{u} \in V b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0\}$.

$\dim U^\perp \geq \dim V - \dim U$, если b — невырождена $\implies \dim U^\perp = \dim V - \dim U$.

$V = U \oplus U^\perp \iff U$ — невырождено относительно b (то есть $b|_U$ — невырождена).

Thr 5.7. Пусть h — эрмитова квадратичная форма, тогда $\exists e : h \xleftrightarrow[e]{} B$ — диагональна с $\{0, \pm 1\}$

Δ . 1) Приведём к диагональному виду индукцией: $h(\mathbf{e}_1) \neq 0 : \langle \mathbf{e}_1 \rangle$ — невырождена относительно $b \implies$

2) $V = \langle \mathbf{e}_1 \rangle \oplus \langle \mathbf{e}_1 \rangle^\perp$ применим индукцию: $h \xleftrightarrow[e]{} \text{diag}(\alpha_i)$.

3) Нормируем векторы: $\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{|h(\mathbf{e}_i)|}}$, если $h(\mathbf{e}_1) \neq 0$. □

Def 5.12. Пусть h — эрмитова квадратичная форма. h — **положительно (полу)определена**, если $\forall \mathbf{v} : h(\mathbf{v}) > 0 (\geq)$. Аналогично с **отрицательной** (полу)определенностью.

Def 5.13. Положительный/отрицательный индекс инерции $\sigma_+(h), \sigma_-(h)$ — как и раньше.

Закон инерции: В нормальном виде формы b ровно $\sigma_+(h)$ единиц и $\sigma_-(h)$ минус единиц.

Thr 5.8 (Метод Якоби и Критерий Сильвестра). АНАЛОГИЧНО СИММЕТРИЧНЫМ

5.2.2 Эрмитово пространство

Def 5.14. Конечномерное V над \mathbb{C} , с положительно определенной эрмитовой формой $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) := f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, называется **эрмитовым** (унитарным) пространством.

Комплексное число (\mathbf{x}, \mathbf{y}) — **скалярное произведение** (внутреннее) векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

$$\begin{aligned} \text{В новых обозначениях теперь имеем: } (\mathbf{x}|\mathbf{y}) &= \overline{(\mathbf{y}|\mathbf{x})}, & (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}|\mathbf{z}) &= \alpha(\mathbf{x}|\mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}|\mathbf{z}) \\ (\mathbf{x}|\mathbf{x}) &\geq 0; & (\mathbf{x}|\mathbf{x}) &= 0 \text{ лишь при } \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Def 5.15. Определим **Длину вектора** $\mathbf{v} \in V$ — $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{v}|\mathbf{v})}$.

С помощью длин можно выразить: $2(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + i\|\mathbf{u} + i\mathbf{v}\|^2 - (1+i)\{\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2\}$

Эрмитово пространство позволяет проводить множество параллелей с евклидовым, будь то свойство нормы: $\|\lambda\mathbf{x}\| = \sqrt{(\lambda\mathbf{x}|\lambda\mathbf{x})} = \sqrt{|\lambda|^2(\mathbf{x}|\mathbf{x})} = |\lambda|\sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})}$. Также можно записать...

Thr 5.9 (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца). $|(\mathbf{x}|\mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$. (Равенство при $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$)

Δ . 1) $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = |(\mathbf{x}|\mathbf{y})e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, и $\forall t \in \mathbb{R}$ выполняется: $\|\mathbf{x}\|^2 t^2 + [(\mathbf{x}|\mathbf{y})t^{-i\varphi} + \overline{(\mathbf{x}|\mathbf{y})}e^{i\varphi}]t + \|\mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x}t + \mathbf{y}e^{i\varphi}|\mathbf{x}t + \mathbf{y}e^{i\varphi}) \geq 0$

2) Так как $(\mathbf{x}|\mathbf{y})e^{-i\varphi} = |(\mathbf{x}|\mathbf{y})| = \overline{(\mathbf{x}|\mathbf{y})e^{i\varphi}}$, то (1) переписывается: $\|\mathbf{x}\|^2 t^2 + 2|(\mathbf{x}|\mathbf{y})|t + \|\mathbf{y}\|^2 \geq 0$. \square

Как следствие из предыдущей теоремы можно сразу получить неравенство треугольника:

$$\|\mathbf{x} \pm \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|$$

Также с помощью доказанного неравенства можно утверждать, что существует единственный угол $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, для которого: $\cos \varphi = \frac{|(\mathbf{x}|\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}$.

5.2.3 Ортогональность

Def 5.16. Набор $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ эрмитова пространства называется **ортонормированным**, если $(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$. Этот набор векторов ЛНеЗ и дополняем до ортонормированного базиса пространства V (метод Грама-Шмидта).

Thr 5.10. $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ — ортонормированный базис эрмитова векторного пространства $(V, (*|*))$.

$$i) \quad \mathbf{x} = \sum_i (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i, \forall \mathbf{x} \in V.$$

$$ii) \quad (\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \sum_i (\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i|\mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad (\text{Равенство Персеваля})$$

$$iii) \quad \mathbf{x} \in V \implies \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_i |(\mathbf{x}|\mathbf{e}_i)|^2.$$

В теореме выше для $\forall \mathbf{x} \in V$: $\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i$, ввиду линейности скалярного произведения по первому аргументу: $(\mathbf{x}|\mathbf{e}_j) = \left(\sum_i x_i \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j \right) = \sum_i x_i (\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j) = x_j$

Таким образом получена линейная форма $f_i = (*|\mathbf{e}_j): V \rightarrow \mathbb{C}$, сопоставляющая каждому $\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i$ его j -ю координату относительно (\mathbf{e}_i) . Теперь если взять ещё такой $\mathbf{y} = \sum_j y_j \mathbf{e}_j$, то

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \sum_{i,j} x_i \overline{y_j} (\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j) = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}$$

Def 5.17. Пусть f — линейная форма на комплексном векторном пространстве V . **Сопряженной** к f (полу)линейной формой на V называется $\overline{f}: V \rightarrow \mathbb{C}$, которая сопряженно линейна по своему аргументу.

Если $(V, (*|*))$ – эрмитово пространство, то $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}|\mathbf{a})$ для некоторого однозначно определенного вектора $\mathbf{a} = \sum_i \bar{f}(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i$. Тогда для любого \mathbf{x} будем иметь соотношение:

$$(\mathbf{a}|\mathbf{x}) = \sum_i \left(\mathbf{e}_i \left| \sum_j x_j \mathbf{e}_j \right. \right) = \sum_i \bar{f}(\mathbf{e}_i) \bar{x}_i = \bar{f}(\mathbf{x}) \quad \bar{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}|\mathbf{x}) = \overline{(\mathbf{x}|\mathbf{a})} = \overline{f(\mathbf{x})}$$

5.2.4 Нормированные векторные пространства

Def 5.18. Пусть E – множество точек и $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ – отображение, сопоставляющее любым двум точкам $u, v \in E$ неотрицательное $d(u, v) \in \mathbb{R}$ (ака расстояние) и обладающее следующими свойствами:

- i) $d(u, v) = d(v, u)$ (симметрия);
- ii) $d(u, v) = 0 \iff u = v$;
- iii) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (неравенство треугольника)

Функция d с такими свойствами называется — **метрикой**, а пара (E, d) — **метрическое пространство**. Ещё как в матане можно определить открытый шар, замкнутый шар и сферу и прочие радости жизни.

Итак, V – вещественное или комплексное пространство с метрикой d . Особо важным является случай, когда d удовлетворяет двум дополнительным условиям: а) инвариантность относительно сдвига; б) умножение на скаляр λ увеличивает расстояние в $|\lambda|$ раз.

Def 5.19. Назовём **нормой** вектора $\mathbf{x} \in V$ относительно метрики d с (а,б) число $d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) =: \|\mathbf{x}\|$.

Нужно убедиться, что выполняются следующие свойства нормы:

- 1. $\|\mathbf{0}\| = 0$; $\|\mathbf{x}\| > 0$, если $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
- 2. $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbf{x} \in V$;
- 3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Def 5.20. V , снабженное функцией нормы $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям выше называется **нормированным**. Полное нормированное векторное пространство называется **банаховым**.

5.3 Связь между линейными операторами и θ -линейными формами

Положим $\theta = 2$, если V – евклидово пространство и $\theta = 3/2$, если V – эрмитово.

Будем считать теперь V евклидовым(эрмитовым) пространством над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ со скалярным произведением $(*, *)$, φ – линейный оператор на V .

Определим: $f_\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v})$, где f_φ – θ -линейная форма, $f_\varphi \in \mathcal{B}_\theta(V)$.

Lem 5.4. Пусть e – ОНБ в V , $\mathcal{L}(V) \ni \varphi \xleftrightarrow[e]{\quad} A$, $f_\varphi \xleftrightarrow[e]{\quad} B \implies B = A^T$

\triangle . Если $\mathbf{u} \xleftrightarrow[e]{\quad} x$, $\mathbf{v} \xleftrightarrow[e]{\quad} y$, то $\varphi(\mathbf{u}) = Ax$, $f_\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = (Ax)^T \bar{y} = x^T Ay$. И есть $f_\varphi \xleftrightarrow[e]{\quad} A^T$. \square

Как следствие получаем, что сопоставление $\varphi \xleftrightarrow{\quad} f_\varphi$ – изоморфизм $\mathcal{L}(V) \xleftrightarrow{\quad} \mathcal{B}_\theta(V)$

Thr 5.11 (Теорема Фредгольма). $\text{Ker } \varphi^* = (\text{Im } \varphi)^\perp$

\triangle . 1) $\mathbf{v} \in \text{Ker } \varphi^* \implies \varphi^*(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

2) $\forall \mathbf{u} \in V: 0 = (\mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{v})) = (\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}) \implies \mathbf{v} \in (\text{Im } \varphi)^\perp$.

3) Пусть $n = \dim V$, $d = \text{rg } \varphi = \text{rg } \varphi^*: d = \dim \text{Im } \varphi = \dim \varphi^* = n - \dim \text{Ker } \varphi^*$.

4) Из (3): $\dim \text{Ker } \varphi^* = n - \dim \text{Im } \varphi = \dim (\text{Im } \varphi)^\perp \implies \text{Ker } \varphi^* = (\text{Im } \varphi)^\perp$. \square

Thr 5.12. Пусть V – векторное пространство со скалярным произведением $(*|*)$. Тогда любая из формул: $f_A(x, y) = (Ax|y) = (x|A^*y)$ устанавливает биективное соответствие между θ -линейными формами и линейными операторами на V . А вместе определяют линейный оператор $A^*: V \rightarrow V$, сопряженный к A .

В ОНБ матрица оператора A^* получается из матрица оператора A путём транспонирования и комплексного сопряжения.

Выпишем свойства отображения $A \mapsto A^*$: $A + B^* = A^* + B^*$, $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$, $(AB)^* = B^* A^*$, $A^{**} = A$.

5.4 Типы линейных операторов

Все линейные операторы на V со скалярным произведением разбиваются на классы в зависимости от поведения по отношению к операции $*$.

Def 5.21. Линейный оператор A называется **эрмитовым** (самосопряженным), если $A^* = A$. В евклидовом случае его ещё называют симметричным.

Самосопряженность оператора A эквивалентна условию эрмитовости θ -линейной формы $(Ax|y)$. Условие самосопряженности записывается в виде: $(Ax|y) = (x|Ay)$, а условие эрмитовости формы f_A – в виде: $(Ax|y) = f_A(x, y) = f_A(y, x) = \overline{(Ay|x)}$.

Так как $(*|*)$ – эрмитова форма, то $\overline{(Ay|x)} = (x|Ay)$.

Def 5.22. Линейный оператор A – **косоэрмитов**, если $A^* = -A$.

Так как $\forall A \in \mathcal{L}(V) : A^{**} = A$, то оператор $A + A^*$ эрмитов, а $A - A^*$ косоэрмитов.

Thr 5.13. Каждый линейный оператор Z на эрмитовом пространстве записывается в виде: $Z = A + B$, где A – эрмитов, а B – косоэрмитов оператор. Кроме того, $Z = \mathcal{X} + i\mathcal{Y}$, где \mathcal{X}, \mathcal{Y} – эрмитовы линейные операторы.

Thr 5.14. Произведение AB эрмитовых операторов является эрмитовым $\iff AB = BA$

Thr 5.15 (Критерий тривиальности A). Пусть $(Ax|x) = 0, \forall x \in V$, и пусть выполнено одно из условий: 1) V – эрмитово пространство; 2) V – евклидово пространство и A – симметричный оператор. Тогда $A = \mathcal{O}$.

Δ . 1) Из двух тождеств с нулевыми (по предположению) правыми частями приходим к системе двух линейных однородных уравнений:

$$\begin{aligned} (Ax|y) + (Ay|x) &= (A(x+y)|x+y) - (Ax|x) - (Ay|y), \\ (Ax|y) - (Ay|x) &= -i(A(ix+y)|ix+y) + i(A(ix)|ix) + i(Ay|y) \end{aligned}$$

Из равенства нулю правых частей получаем: $(Ax|y) = 0, \forall x, y \in V$, это эквивалентно $A = \mathcal{O}$.

2) Применяем условие симметричности к верхнему тождеству в пункте (1). \square

Def 5.23. Линейный оператор A на векторном пространстве со скалярным произведением называется **унитарным** (в евклидовом – ортогональным), если $A^* \cdot A = \mathcal{E} = A \cdot A^*$.

Def 5.24. Линейный оператор $A: V \rightarrow V$, сохраняющий метрику, то есть такой, что $\|Ax - Ay\| = \|x - y\|, \forall x, y \in V$, называется **изометрией**.

Так как $Ax - Ay = A(x - y)$, то очевидно, A – изометрия на V тогда, когда $\|Ax\| = \|x\|, \forall x \in V$. Далее,

$$\|Ax\| = \|x\| \iff (Ax|Ax) = (x|x) \iff (A^*Ax|x) = (x|x) \implies ((A^*A - \mathcal{E})x|x) = 0, \forall x \in V.$$

Оператор $A^*A - \mathcal{E}$ – самосопряжён, поэтому, согласно последней теореме в эрмитовом (евклидовом) пространстве из только что записанного тождества вытекает, что $A^*A - \mathcal{E} = \mathcal{O}$. Откуда получаем:

Thr 5.16. Унитарные линейные операторы на векторном пространстве V с метрикой, и только они, являются изометриями на V .

5.4.1 Канонический вид эрмитовых операторов

Lem 5.5. Собственные значения эрмитова оператора вещественны.

△. Пусть $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ – эрмитов оператор, λ – его собственное значение, отвечающее собственному вектору $e \in V$. По определению:

$$\lambda(e|e) = (\lambda e|e) = (\mathcal{A}e|e) = (e|\mathcal{A}^*e) = (e|\mathcal{A}e) = (e|\lambda e) = \bar{\lambda}(e|e), \quad \text{так как } (e|e) \neq 0, \Rightarrow \bar{\lambda} = \lambda.$$

□

Lem 5.6. У каждого симметричного линейного оператора \mathcal{A} существует собственный вектор.

△. 1) \mathcal{A} обладает одномерным или двумерным собственным подпространством. Существование одномерного инвариантного подпространства совпадает с утверждением леммы.

2) Рассмотрим L – двумерное инвариантное подпространство. Оператор \mathcal{A} индуцирует на L симметричный линейный оператор \mathcal{A}_L .

3) Выберем в L ОНБ (e_1, e_2) . Матрице оператора $\mathcal{A}_L = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, с $\chi(t) = t^2 - (a+d)t + (ad-b^2)$.

4) $D_\chi = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$, так что $\chi(t)$ имеет вещественный корень, а A – собственный вектор. □

Lem 5.7. Пусть \mathcal{A} – самосопряженный линейный оператор на векторном пространстве со скалярным произведением $(\cdot|\cdot)$, L – подпространство, инвариантное относительно \mathcal{A} . Тогда ортогональное дополнение L^\perp к L также инвариантно относительно \mathcal{A} .

Thr 5.17. Существует ортонормированный базис пространства V со скалярным произведением, в котором матрице самосопряженного оператора \mathcal{A} диагональна, причём $\text{Spec}(\mathcal{A})$ вещественный.

△. 1) По первым двум леммам раздела у \mathcal{A} имеется собственный вектор $\|e_1\| = 1$ с $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

2) $\dim \langle e_1 \rangle^\perp = \dim V - 1$ и по последней лемме инвариантно относительно \mathcal{A} .

3) Рассмотрим $\mathcal{A}|_{V'}$, находим собственный вектор $e_2: \mathcal{A}e_2 = \lambda_2 e_2$, $\|e_2\| = 1$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

4) $\langle e_1, e_2 \rangle$ инвариантна относительно \mathcal{A} , поэтому инвариантно $\langle e_1, e_2 \rangle^\perp$.

5) Рассуждая так и дальше по индукции найдём требуемые $\dim V$ взаимно ортогональных векторов. □

5.4.2 Приведение пары квадратичных форм к каноническому виду

Thr 5.18. Пусть на векторном пространстве V размерности n над $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ заданы две эрмитовы квадратичные формы $q(x)$ и $r(x)$, причём формы $r(x)$ положительно определена.

Тогда в V существует базис, в котором обе формы записываются в каноническом виде.

△. Пусть $g(x, y)$ – эрмитова θ -линейная форма, отвечающая квадратичной форме $r(x)$. Определим на V скалярное произведение, полагая

$$(x|y) := g(x, y).$$

В V с указанной метрикой найдётся ОНБ (e_1, \dots, e_n) , в котором $q(x)$ принимает канонический вид. Итак, в базисе (e_i) обе квадратичные формы приняли канонический вид. □

5.4.3 Нормальные операторы

Эрмитовы и унитарные операторы входят в естественный, более широкий класс, диагонализированных операторов.

Def 5.25. Пусть V – эрмитово пространство. Линейный оператор $\mathcal{A}: V \rightarrow V$, обладающий свойством

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^* = \mathcal{A}^* \cdot \mathcal{A},$$

называется *нормальным*. Его матрица в любом базисе также называется нормальной.

Оператор \mathcal{A} нормален вместе с $\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}$. Из нормальности \mathcal{A} вытекает, что

$$\|\mathcal{A}x\|^2 = \|\mathcal{A}^*x\|^2.$$

Заменяя \mathcal{A} на $\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}$, получаем, что

$$\mathcal{A}x = \lambda x \iff \mathcal{A}^* = \bar{\lambda}x \quad (8)$$

Определение нормального оператора переносится на бесконечномерные гильбертовы пространства и находит там многочисленны применения. Постараемся опичать класс диагонализиремых операторов на эрмитовом пространстве.

Thr 5.19. Эквивалентны следующие условия:

- а) $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ – оператор, диагонализиремый в ортонормированном базисе пространства V ;
- б) \mathcal{A} – нормальный оператор.

Δ . Докажем, что б) \implies а). Выберем собственное значение λ оператора \mathcal{A} и положим $V^\lambda = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = \lambda x\}$. Из (8) следует, что

$$\mathcal{A}^*(V^\lambda) \subseteq V^\lambda.$$

Так как $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$, то изсимметрии подпространство $(V^\lambda)^\perp$ также \mathcal{A}^* -инвариантно. Ограничения операторов коммутируют. Применяя индукцию по размерности $n = \dim V$, мы можем считать, что \mathcal{A} диагонализуется. Для V^λ это верно по определению, а поскольку $V = V^\lambda \oplus (V^\lambda)^\perp$, то всё доказано. \square

Thr 5.20. Каждому нормальному оператору \mathcal{A} на конечномерном пространстве V отвечают попарно различные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, $1 \leq m \leq n = \dim V$, и взаимно ортогональные проекторы $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m$, отличные от \mathcal{O} и такие, что:

- а) $\sum_j \mathcal{P}_j = \mathcal{E}$; б) $\sum_j \lambda_j \mathcal{P}_j = \mathcal{A}$ – спектральное разложение оператора \mathcal{A} , так что $\lambda_j \in \text{Spec}(\mathcal{A})$;
- в) разложение б) единственно; г) существуют многочлены $f_1(t), \dots, f_m(t)$, такие, что $f_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$ и $f_i(\mathcal{A}) = \mathcal{P}_i$.

Δ . потом : (\square

Lem 5.8. Пусть \mathcal{A}, \mathcal{B} – коммутирующие операторы на $V^\mathbb{C}$. Тогда \mathcal{A} и \mathcal{B} имеют общий собственный вектор.

Δ \square

Thr 5.21. Два эрмитовых оператора \mathcal{A}, \mathcal{B} или две изометрии \mathcal{A}, \mathcal{B} на n -мерном эрмитовом пространстве V одновременно приводятся к диагональному виду в некотором ортонормированном базисе тогда, и только тогда, когда они перестановочны.

Δ . Из диагонализиремости в некотором базисе следует перестановочность операторов.

Обратно, пусть $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$. Тогда у них есть общий собственный вектор e_1 . Подпространство $W = \langle e_1 \rangle^\perp$ размерности $n - 1$ инвариантно относительно \mathcal{A} и относительно \mathcal{B} в силу их эрмитовости или унитарности. Ограничения \mathcal{A} и \mathcal{B} на W будут перестановочными эрмитовыми (соответственно унитарными) операторами. Индукция по размерности приводит к явной конструкции ОНБ, в котором \mathcal{A} и \mathcal{B} запишутся в диагональной форме. \square

Стоит заметить, что перестановочность эрмитовых операторов \mathcal{A}, \mathcal{B} эквивалентна эрмитовости оператора $\mathcal{A}\mathcal{B}$.

5.4.4 Положительно определенные операторы

Def 5.26. Эрмитов (или линейный симметричный) оператор \mathcal{A} называется *положительно определенным*, если $(\mathcal{A}x|x) > 0$ для $\forall x \neq 0$ из V .

Thr 5.22. Пусть V – пространство со скалярным произведением $(*|*)$. Следующие свойства линейных операторов на V эквивалентны:

- 1) $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$, $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$;
- 2) $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{C}^*$;
- 3) $(\mathcal{A}x|x) \geq 0$.

5.4.5 Полярное разложение

Параллелизм между линейными операторами и комплексными числами простирается дальше, вплоть до $z = |z|e^{i\varphi} = \sqrt{z\bar{z}}e^{i\varphi}$.

Thr 5.23. *Всякий невырожденный линейный оператор A на эрмитовом (или евклидовом) векторном пространстве V может быть представлен в виде*

$$A = PQ, \quad (9)$$

где P – положительно определенный оператор, а Q – изометрия (унитарный или ортогональный оператор). Разложение единственно и называется полярным разложением оператора A .

Δ . Во-первых $AA^* = P^2$, где P – положительно определенный оператор, являющийся единственным квадратным корнем из AA^* . Очевидно, что P – обратим. Положим $Q = P^{-1}A$, получим выражение (9).

Убедимся, что Q – изометрия. Действительно, так как $P^* = P$ и $PP^{-1} = E = E^* \iff (P^{-1})^* = (P^*)^{-1} = P^{-1}$, то

$$QQ^* = P^{-1}AA^*(P^{-1})^* = P^{-1}P^2P^{-1} = E.$$

Если предположить, что разложения два, то $Q^*P = Q_1^*P_1$. Поэтому $PQ \cdot Q^*P =$ □

Квадрики

5.4.6 Квадратичная функция в аффинном пространстве

Def 5.27. Положим $Q(\dot{0} + x) = q(x) = 2l(x) + \varphi_0$

Def 5.28. Точку $\dot{p} \in A$ назовём *центром* (или *центральной точкой*) для квадратичной функции Q , если

$$Q(\dot{p} + y) = Q(\dot{p}) + q(y) \quad \forall y \in V.$$

Thr 5.24. Пусть Q – квадратичная функция ранга r на n -мерном аффинном пространстве A над \mathbb{F} . Если множество $C(Q)$ пусто и, значит $r < n$, то путем надлежащего выбора системы координат $\{\dot{0}; e_1, \dots, e_n\}$ функция Q приводится к виду

$$Q(\dot{0} + x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_r x_r^2 + 2x_{r+1}$$

с ненулевыми скалярами $\alpha_1, \dots, \alpha_r$; в этом случае $\text{Ker } q$ есть подпространство решений системы $x_1 = \dots = x_r = 0$, где q – квадратичная форма, связанная с Q .

Если Q центральна, то выбором надлежащей системы координат с началом в центральной точке $\dot{0}$ её можно привести к виду

$$Q(\dot{0} + x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_r x_r^2 + \varphi_0;$$

в этом случае $Q(\dot{0}') = \varphi_0 \quad \forall \dot{0}' \in C(Q)$. Вышеупомянутые функции аффинно неэквивалентны.

Как следствие, над \mathbb{R} всякая квадратичная функция Q может быть приведена, причём единственным образом, к одному из канонических видов:

$$Q(\dot{0} + x) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2 + 2x_{r+1}; \quad Q(\dot{0} + x) = x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2 + \varphi_0. \quad (10)$$

Или, что эквивалентно, две квадратичные функции аффинно эквивалентны тогда, и только тогда, когда, когда они имеют одинаковые ранги и одинаковые сигнатуры и когда они обе либо нецентральны, либо центральны с одинаковыми значениями на соответствующих точках.

5.4.7 Квадрики в аффинном пространстве

Def 5.29. Каждой квадратичной функции Q на A ставится в соответствие пространственная конфигурация точек S_Q , называемая *квадрикой* (или *гиперповерхностью второго порядка*) – "геометрическое место" всех точек $\dot{p} \in A : Q(\dot{p}) = 0$.

Любые две не гиперплоскости равны с точностью до множителя. Также понимаем, что такое центр квадрики.

Thr 5.25 (Канонические типы квадрик). *Случай центральной квадрики с центром симметрии в начале координат исчерпывается типами*

$$I_{s,r}: x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2 = 1, \quad 0 < s \leq r; I'_{s,r}: x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2 = 0, \quad r/2 \leq s \leq r.$$

Случай нецентральной квадрики исчерпывается типами

$$II'_{s,r}: x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_r^2 = -2x_{r+1}, \quad r/2 \leq s \leq r.$$

Def 5.30. Квадрика типа $I_{n,n}$ называется *эллипсоидом*, типа $I_{s,n}$, $s < n$, – *гиперболидом*, типа $II_{n-1,n-1}$ – *эллиптическим параболоидом*, типа $II_{s,n-1}$ – *гиперболическим параболоидом*. Все эти квадрики *невыврожденные*.

Квадрики типа $I_{s,r}$, $I'_{s,r}$ при $r < n$ и типа $II_{s,r}$ при $r < n-1$ называются *цилиндрами*, а квадрики типа $I'_{s,n}$ – *конусами*. Это *вырожденные* квадрики.

6 Двойственное пространство

6.1 Линейные функции

Def 6.1. $f: V \rightarrow \mathbb{F}: f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ – **линейная функция** (форма/функционал) на V .

Выберем в V (e_1, \dots, e_n) , тогда для $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$: $f(x) = \lambda_1 \beta_1 + \dots + \lambda_n \beta_n$, где $f(e_i) = \beta_i$. Базисные векторы и коэффициенты линейной формы при замене базиса меняются по одним и тем же формулам (*согласовано ака когреддиентно*).

6.2 Двойственное пространство

Def 6.2. Относительно введенных $+$ и \times (на скаляры) линейные функции составляют векторное пространство $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$, **двойственное** (сопряженное или дуальное) к V .

При одновременном рассмотрении пространства и дуального к нему, векторы из V^* называют *ковариантными векторами*, а элементы из V – *контрвариантными векторами*.

Thr 6.1. $\dim_{\mathbb{F}} V = n$, **тогда** $\dim V^* = n$. Для базисов в этих пространствах:

$$(e_1, \dots, e_n) - \text{базис } V, (e^1, \dots, e^n) - \text{линейные функции: } e^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

\triangle . 1) В заданном базисе пространства V есть однозначное соответствие $\Phi: f \mapsto (\beta_1, \dots, \beta_n)$ – изоморфизм векторных пространств V^* и \mathbb{F}^n , $\dim V^* = \dim \mathbb{F}^n = n$.

2) Задав $\beta_j = 0$ для $j \neq i$, и $\beta_i = 1$, и положив $e^i(e_j) = \delta_{ij}$, определим линейную функцию $e^i \in V^*$: $e^i\left(\sum \lambda_j e_j\right) = \sum \lambda_j e^i(e_j) = \sum \lambda_j \beta_j = \lambda_i$. □

Def 6.3. Базис (e^1, \dots, e^n) пространства V^* – **двойственный** для данного (e_1, \dots, e_n) в V .

Условимся писать $f(x) \rightsquigarrow (f, x)$, тем самым определяется отображение $V^* \times V \rightarrow \mathbb{F}$ линейное по каждому аргументу.

Отображения $V \times W \rightarrow \mathbb{F}$ с таким свойством принято называть **билинейным**, а также спариванием между пространствами V и W . Спаривание между V^* и V – **каноническое**.

6.3 Канонический изоморфизм

Thr 6.2. \exists **канонический изоморфизм**:

$$\varepsilon: V \rightarrow V^{**}: \varepsilon(x) = \varepsilon_x, \varepsilon_x(f) = f(x), \text{ для } x \in V, f \in V^*, \varepsilon_x \in V^{**}$$

- △. 1) Линейность: непосредственно $\varepsilon_{\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}}(f) = f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})$, то есть $\varepsilon(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\varepsilon(\mathbf{x}) + \beta\varepsilon(\mathbf{y})$.
 2) Биективность: выберем $V = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ и $V^* = \langle e^1, \dots, e^n \rangle$. Тогда $\varepsilon_{\mathbf{e}_j}(e^i) = e^i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$.
 3) Аппелируя к (6.1): $V^{**} = \langle \varepsilon_{\mathbf{e}_1}, \dots, \varepsilon_{\mathbf{e}_n} \rangle$, то есть двойственный к (e^i) . Сюръективность и инъективность ε очевидны. Каноничность заключена в определении. \square

Def 6.4. Наличие естественного изоморфизма V и V^{**} наделяет их свойством – **рефлексивность**.

Отождествив пространства V и V^{**} , можно считать V пространством линейных функций на V^* . Тогда формулы спаривания: $x(f) = (f, x) = f(x)$. В частности, $\forall V^* : \exists!$ двойственный ему базис в V .

6.4 Критерий линейной независимости

Lem 6.1. (i – номер строки, j – номер столбца)

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \text{ – линейно зависимые векторы из } V \\ f_1, \dots, f_m \text{ – произвольные линейные функции на } V \end{array} \right\} \Rightarrow \det(f_i(\mathbf{a}_j)) = 0, 1 \leq i, j \leq m.$$

- △. 1) В силу ЛЗ выберем из всех $\mathbf{a}_m = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \alpha_{m-1} \mathbf{a}_{m-1}$.
 2) В $\det(f_i(\mathbf{a}_j))$ вычтем из последнего столбца первый $\cdot \alpha_1$, потом второй и т.д.
 3) Сам определитель не изменится, а на i -том месте последнего столбца будет стоять ноль по (1). \square

Lem 6.2. Если $\langle f_1, \dots, f_n \rangle = V^*$, то $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in V$ – независимы $\iff \det(f_i(\mathbf{a}_j)) \neq 0, 1 \leq i, j \leq n$.

- △. 1) по предыдущей лемме \Rightarrow .
 2) (\mathbf{a}_i) – ЛНЗ, $V = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$. Обозначим (\mathbf{e}_i) – базис в V , с двойственным из (f_i) , а через α_{ij} – координаты \mathbf{a}_j в этом базисе. Тогда получим матрицу перехода из таких α .
 3) Матрица перехода по (1.4) обратима, а значит и $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$, но $\alpha_{ij} = f_i(\mathbf{a}_j)$, что и значит. \square

Thr 6.3. (f_1, \dots, f_n) – базис V^* . Тогда ранг системы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k \in V$ равен наибольшему порядку отличного от нуля определителя вида $\det(f_i(\mathbf{a}_j)), 1 \leq i = i_1, \dots, i_m \leq n; 1 \leq j = j_1, \dots, j_m \leq k$.

- △. 1) r – ранг $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$. Любые $m > r$ векторов – ЛЗ, по лемме выше $\det = 0$ порядка $(m > r)$.
 2) Остаётся док-ть, что $\exists \det \neq 0$ порядка r , для этого обозначим $\bar{f}_i := f_i|_U$ ($U = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$).
 3) Докажем, что $\langle \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n \rangle = U^*$:
 а) $\langle \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n \rangle \subseteq U^*$ – очевидно;
 б) $\tilde{f} \in U^*$, $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r)$ – базис в U , а $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_n)$ его дополнение до V .
 Возьмём $f \in V^*$, которая $f(\mathbf{e}_i) = \tilde{f}(\mathbf{e}_i), i = 1, \dots, r, f(\mathbf{e}_i) = 0, i = r+1, \dots, n$.
 Очевидно, что $\bar{f} = f|_U = \tilde{f}$, поскольку f и \tilde{f} принимают одинаковые значения на базисных векторах U . $\Rightarrow \tilde{f} \in \langle \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n \rangle$, то есть $U^* \subseteq \langle \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n \rangle$
 4) Выберем r ЛНЗ векторов среди $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ и $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n$. Они составляют базисы в U, U^* , и по лемме выше: $\det(\bar{f}_i(\mathbf{a}_j)) \neq 0, i = i_1, \dots, i_r; j = j_1, \dots, j_r$, и $\bar{f}_i(\mathbf{a}_j) = f_i(\mathbf{a}_j)$. \square

7 Тензоры

7.1 Начала тензорного исчисления

7.1.1 Понятие о тензорах

Def 7.1 (Понятие тензора). Пусть \mathbb{F} – поле, $V(\mathbb{F})$ – векторное пространство, V^* – сопряженное к V , p и q – целые числа ≥ 0 . Всякое $(p+q)$ -линейное отображение

$$f: V^p \times (V^*)^q \rightarrow \mathbb{F} \quad (11)$$

называется **тензором на V типа (p, q)** и валентности (или ранга) $p+q$.

7.1.2 Произведение тензоров

Def 7.2. Пусть $f: V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow \mathbb{F}$, $g: W_1 \times \dots \times W_s \rightarrow \mathbb{F}$. Под *тензорным произведением* f и g понимают отображение

$$f \otimes g: V_1 \times \dots \times V_r \times W_1 \times \dots \times W_s \rightarrow \mathbb{F}, \quad (12)$$

определенное формулой

$$(f \otimes g)(v_1, \dots, v_r; w_1, \dots, w_s) = f(v_1, \dots, v_r) \cdot g(w_1, \dots, w_s) \quad (13)$$

Некоторые свойства тензорного произведения:

p/q	0	1	2
0	const	f	$b(x, y)$
1	x	$L \in \mathcal{L}(V)$	
2	$b^*(f, g)$		

- 1) $\otimes: \mathbb{T}_q^p \times \mathbb{T}_{q'}^{p'} \rightarrow \mathbb{T}_{q+q'}^{p+p'}$;
- 2) ассоциативность \checkmark
- дистрибутивность \checkmark
- коммутативность \times

Базис в V и V^* выбирается:

$$(e_i, e^j) = \delta_i^j = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases} \quad (14)$$

$$f(x) = (f, x) = \sum_i \alpha^i \beta_i = \alpha^i \beta_i.$$

7.1.3 Координаты тензора

Def 7.3 (Компоненты тензора). Значения тензора обозначаются в виде:

$$T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} := T(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e^{j_1}, \dots, e^{j_q}). \quad (15)$$

Числа $T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$ называются **координатами** тензора T в базисе (e_1, \dots, e_n)

Thr 7.1. Тензоры типа (p, q) на V составляют $\mathbb{T}_p^q(V)$ размерности n^{p+q} с базисными векторами

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}, \quad (16)$$

При том $\exists! T$ с координатами $T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$.

\triangle . Достаточно построить *разложимый* тензор. Далее воспользуемся равенством:

$$(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q})(e_{i'_1}, \dots, e_{i'_p}, e^{j'_1}, \dots, e^{j'_q}) = \delta_{i'_1}^{i_1} \dots \delta_{i'_p}^{i_p} \delta_{j'_1}^{j_1} \dots \delta_{j'_q}^{j_q}.$$

Построим тензор

$$T_1 = \sum_{i, j} T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} (e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}),$$

просто линейную комбинацию с некоторой индексацией. Теперь получим

$$T_1(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e^{j_1}, \dots, e^{j_q}) = T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q},$$

и воспользуемся тем, что тензор T полностью определяется своими координатами. Почему?

В силу полилинейности для произвольных векторов

$$x_1 = \sum_{i_1} \xi^{i_1} e_{i_1}, \quad \dots, \quad x_p = \sum_{i_p} \rho^{i_p} e_{i_p}$$

и линейных форм

$$u^1 = \sum_{j_1} \sigma_{j_1} e^{j_1}, \quad \dots, \quad u^p = \sum_{j_p} \tau_{j_p} e^{j_p}$$

имеем

$$T(x_1, \dots, x_p, u^1, \dots, u^p) = \sum_{i, j} T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} \xi^{i_1} \dots \rho^{i_p} \sigma_{j_1} \dots \tau_{j_q}.$$

Далее остается показать, что разложимые тензоры, отвечающие различным наборам индексов линейно независимы. Это следует из правила вычисления их значений. Пусть они ЛЗ

$$\sum \lambda_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} \xi^{i_1} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q} = 0,$$

где $\lambda_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_p} \in \mathbb{F}$. Аналогично с T_1 можем подставить элемент базиса, свести к работе с символами Кронекера.

□

7.1.4 Переход к другому базису

Thr 7.2. При переходе от дуальных базисов (e_i) , (e^i) пространств V и V^* к новым дуальным базисам тех же пространств:

$$e'_k = a_k^i e_i, \quad e'^k = b_i^k e^i, \quad \text{где } (a_{ij})^{-1} = (b_{ij}), \quad (17)$$

координаты тензора T преобразуются по формулам

$$T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_p} = \sum_{i'_1, \dots, i'_p} b_{i'_1, \dots, i'_p}^{i_1, \dots, i_p} \cdot T'_{i'_1, \dots, i'_p}^{j_1, \dots, j_p} \cdot a_{j'_1, \dots, j'_p}^{j_1, \dots, j_p} \quad (18)$$

7.1.5 Тензорное произведение пространств

Thr 7.3. Пусть V, W — векторные пространства над полем \mathbb{F} . Тогда существует векторное пространство T над \mathbb{F} и билинейное отображение $b: V \times W \rightarrow T$, удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned} (T1) & \left| \begin{array}{l} \text{если } v_1, \dots, v_k \in V \text{ ЛНЭЗ и } w_1, \dots, w_k \in W, \quad \text{то } \sum_{i=1}^k b(v_i, w_i) = 0 \implies w_1 = \dots = w_k = 0; \\ (T2) \left| \begin{array}{l} \text{если } w_1, \dots, w_k \in W \text{ ЛНЭЗ и } v_1, \dots, v_k \in V, \quad \text{то } \sum_{i=1}^k b(v_i, w_i) = 0 \implies v_1 = \dots = v_k = 0; \\ (T3) \left| \begin{array}{l} b - \text{сюръективно, т.е. } T = \langle b(v, w) \mid v \in V, w \in W \rangle_{\mathbb{F}}. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Кроме того, пара (b, T) универсальна в том смысле, что какова ни была пара (b', T') , состоящая из векторного пространства T' и билинейного отображения $b': V \times W \rightarrow T'$, найдётся единственное линейное отображение $\sigma: T \rightarrow T'$, для которого $b'(v, w) = \sigma(b(v, w))$, $v \in V$, $w \in W$.

Def 7.4. Пару (b, T) , однозначно определенную с точностью до изоморфизма по заданным векторным пространствам V, W , называют *тензорным произведением* этих пространств.

Def 7.5. Пусть $\mathcal{A}: V \rightarrow V, \mathcal{B}: W \rightarrow W$ — линейные операторы. Их *тензорным произведением* называется линейный оператор

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}: V \otimes W \rightarrow V \otimes W,$$

действующий по правилу

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(v \otimes w) = \mathcal{A}v \otimes \mathcal{B}w$$

(далее по линейности $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(\sum (v_i \otimes w_i)) = \sum \mathcal{A}v_i \otimes \mathcal{B}w_i$).

7.2 Свёртка, симметризация и альтернирование тензоров

7.2.1 Свёртка

Def 7.6 (свёртка). Зафиксировав все переменные кроме x_r и u_s , получим билинейную форму:

$$f(x_r, u_s) := T(\dots, x_r, \dots, u_s, \dots). \quad (19)$$

Тогда **инвариантная** сумма вида $\bar{T} = f(e_k, e^k)$ называется **свёрткой тензора** T по r -му ковариантному и s -му контрвариантному индексам.

Если обозначить свёртку по индексам r, s символом tr_r^s , то tr_r^s — линейное отображение:

$$\text{tr}_r^s: \mathbb{T}_p^q(V) \rightarrow \mathbb{T}_{p-1}^{q-1}(V). \quad (20)$$

Thr 7.4. Свёртка вида tr_r^s тензора $T \in \mathbb{T}_p^q$ является тензором $\bar{T} \in \mathbb{T}_{p-1}^{q-1}$ с координатами

$$\bar{T}_{i_1, \dots, i_{r-1}, i_{r+1}, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_{s-1}, j_{s+1}, \dots, j_q} = \sum_k T_{i_1, \dots, i_{r-1}, k, i_{r+1}, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_{s-1}, k, j_{s+1}, \dots, j_q} \quad (21)$$

7.2.2 Симметричные тензоры

Для любой перестановки $\pi \in S_p$ положим

$$f_\pi(T)(x_1, \dots, x_p) = T(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(p)}) \quad (22)$$

$ST^p(V)$

Def 7.7. Тензор T типа $(p, 0)$ называется **симметричным**, если $\forall \pi \in S_p \ f_\pi(T) = T$. **Симметризацией** $T \in \mathbb{T}_p^0(V)$ называется отображение

$$S(T) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} f_\pi(T): \mathbb{T}_p^0(V) \rightarrow \mathbb{T}_p^0(V). \quad (23)$$

ЗФ: Подпространство сим. тензоров типа $\mathbb{T}_p^0(V)$ обозначим $\mathbb{T}_p^+(V)$. Действие S : 1) $S^2 = S$, $\text{Im } S = \mathbb{T}_p^+(V)$. Пространства $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]_p$ и $\mathbb{T}_p^+(V)$ биективны. Тогда

$$\dim \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]_p = \dim \mathbb{T}_p^+(V) = \binom{n+p-1}{p} \quad (24)$$

Def 7.8. Ассоциативная и коммутативная **симметрическая алгебра** пространства V :

$$S(V) = \oplus_{p=0}^{\infty} S\mathbb{T}^p(V), \quad (25)$$

где \vee выступает в качестве умножения.

7.2.3 Кососимметричные тензоры

Def 7.9. Назовём тензор T кососимметричным, если

$$f_\pi(T) = \text{sign}(\pi) \cdot T \quad \forall \pi \in S_p. \quad (26)$$

Def 7.10. **Альтерированием** называется отображение

$$A(T) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \text{sign}(\pi) \cdot f_\pi(T): \mathbb{T}_p^0(V) \rightarrow \mathbb{T}_p^0(V). \quad (27)$$

Действие A : 1) $A^2 = A$, 2) $\text{Im } A = \Lambda_p^+(V)$, 3) $A(f_\sigma(T)) = \text{sign}(\sigma)A(T)$.

7.3 Внешняя алгебра

Def 7.11. Зададим **операцию внешнего умножения**

$$\wedge: \Lambda(V) \times \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(V), \quad (28)$$

полагая $Q \wedge R = A(Q \otimes R)$ для любого q -вектора Q и любого r -вектора R .

Def 7.12 (алгебра Грассмана). Алгебра $\Lambda(V)$ над \mathbb{F} называется **внешней алгеброй** пространства V :

$$\Lambda(V) = \oplus_p^n \Lambda^p(V) \quad (29)$$

Thr 7.5. *Внешняя алгебра ассоциативна.*

\Rightarrow . Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$ – произвольные векторы из V . Тогда²

$$\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_p = A(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_p). \quad (30)$$

Thr 7.6. Пусть $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ – базис V . Тогда

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_p, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n \quad (31)$$

образуют базис пространства $\Lambda^p(V)$.

\Rightarrow . Внешняя алгебра $\Lambda(V)$ пространства V имеет размерность 2^n . При этом

$$\dim \Lambda^p(V) = \binom{n}{p}. \quad (32)$$

Базис пространства $\Lambda^n(V)$ состоит из одного n -вектора

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_p.$$

Внешняя алгебра V **антикоммутативна**:

$$Q \in \Lambda^q(V), R \in \Lambda^r(V) \Rightarrow Q \wedge R = (-1)^{qr} R \wedge Q. \quad (33)$$

связь с определителями

векторные подпространства и p -векторы

условия разложимости p -векторов

²с. 287, Кострикин.