Конспект к предмету «Линейная алгебра»

Хоружий Кирилл
Примак Евгений
10.06.2020

Содержание

1 Векторные пространства

1.1 Начальные понятия

Def 1.1. Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле. **Векторным пространством** над $\mathbb{F}$ называется множество V элементов (векторов), удовлетворяющее следующим аксиомам:

а) На V бинарная операция $V \times V \to V$:

I. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ (коммутативность);

II. $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ (ассоциативность);

III. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$, $\forall \boldsymbol{x} \in V$ (нулевой вектор);

IV. $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$, $\forall \boldsymbol{x} \in V$ (обратный вектор);

б) На $\mathbb{F} \times V$ операция $(\lambda, \boldsymbol{x} \to \lambda \boldsymbol{x})$:

V. $1 \cdot \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ (унитарность);

VI. $(\alpha\beta)\boldsymbol{x}=\alpha(\beta\boldsymbol{x})$ (ассоциативность);

VII. $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$;

VIII. $\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$.

Def 1.2. Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{F}$, $U \subset V$ – его подмножество, аддитивна подгруппа и переходящая в себя при умножении на скаляры. Тогда ограничение на U операций в V делает U векторным пространством. U – **векторное подпространство** V.

Def 1.3. Векторы $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ подпространства V – **линейно зависимы**, если $\exists$ их нетривиальная **ЛК** равная нулю. В противном случае – линейно независимы.

Thr 1.1. *Если линейная система векторов линейно независима, то и всякая её подсистема также линейно независима.*

Thr 1.2. *Если в V $\forall \boldsymbol{e}_i \in (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_s)$ – **ЛК** векторов из $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_t)$, **то** $s \leqslant t$.*

Con 1.1. *$\forall$две эквивалентные ЛНеЗ системы векторов в V содержат одинаковое число векторов.*

1.2 Размерность и базис

Def 1.4. **Ранг** системы векторов – число векторов в любой max ЛНеЗ подсистеме.

Def 1.5. V, содержащее n ЛНеЗ векторов, в котором не ЛНеЗ систем большего ранга, называется **n-мерным**. $\dim_{\mathbb{F}} V = n$.

Def 1.6. $\dim_{\mathbb{F}} V = n$. Любая система и n независимых векторов называется **базисом** пространства V.

Thr 1.3. $\dim_{\mathbb{F}} V = n$ с $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. *Тогда: 1) $\forall \boldsymbol{v} \in V$ $\exists!$ ЛК из векторов базиса; 2) любую систем из $s < n$ ЛНеЗ векторов можно дополнить до базиса.*

Def 1.7. $\dim_{\mathbb{F}} V = n$ с $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. $\lambda_i \in \mathbb{F}$ называются **координатами вектора**: $\boldsymbol{v} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda\boldsymbol{e}_n$.

Thr 1.4. *При переходе $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \rightsquigarrow (\boldsymbol{e'}_1, \ldots, \boldsymbol{e'}_1)$, определяемом $A \in \mathcal{M}_{nn}$, координаты $\boldsymbol{v}$: $\lambda_j^{новые}$ выражаются через $\lambda_i^{старые}$ при помощи обратимого линейного преобразования с A^{-1}.*

Def 1.8. V и W над $\mathbb{F}$ – **изоморфны**, если $\exists$ биективное $f\colon V \to W : f(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{u}) + \beta f(\boldsymbol{v})$.

Thr 1.5. *Все V одинаковой $\dim = n$ над $\mathbb{F}$ изоморфны (координатному пространству $\mathbb{F}^n$).*

Thr 1.6. *U, W – конечномерные подпространства V. Тогда :* $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

Def 1.9. Если $\forall \boldsymbol{u} \in U$ может быть однозначно представлен в виде $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \ldots + \boldsymbol{u}_m$. То сумма называется **прямой**: $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$.

Thr 1.7. *$U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ – прямая $\iff U_i \cap (U_1 + \ldots + U_m) = 0$, для $i = 1, \ldots, m$.*

Thr 1.8. *$U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ – прямая $\iff \dim U = \sum\limits_{i=1}^{m} \dim U_i$.*

Thr 1.9. *$\forall m$-мерного $U \subset V$ $(\dim V = n)$ $\exists W (\dim W = n - m) : V = U \oplus W$.*

1.3 Факторпространство

К заданному пространству $L \subset V$ существует, вообще говоря, много дополнительных подпространств $M \subset V$, для которых $V = L \oplus M$. Но все такие дополнения изоморфны одному векторному пространству, которое строится по V и L абсолютно инвариантным образом.

Будем смотреть на V и L как на аддитивные абелевы группы. Множество

$$\boldsymbol{x} + L = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in L\}$$

называется *смежным классом* V по L, вектор $\boldsymbol{x}$ - представитель смежного класса. Если $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{z} \in (\boldsymbol{x} + L) \cap (\boldsymbol{x}' + L)$, то $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{z}$. Поэтому два смежных класса либо не пересекаются, либо совпадают. При фиксированном L положим $\overline{\boldsymbol{x}} := \boldsymbol{x} + L$. Каждый вектор $\boldsymbol{v} \in V$ попадает в какой-то смежный класс, и если $\overline{V} = V/L$ – множество всех смежных классов V по L, то на $\overline{V}$ устанавливается структура абелевой группы по правилу $\overline{\boldsymbol{x}} + \overline{\boldsymbol{x}'}$. Коммутативность и ассоциативность проверяются непосредственно. Понятно, что $\overline{\mathbf{0}} = L$ – нулевой элемент этой абелевой группы: $\overline{\boldsymbol{x}} + \overline{\mathbf{0}} = \overline{\boldsymbol{x}}$.

Таким образом, $\overline{V} = V/L$ наделено естественным образом структурой векторного пространства, которое и называется *факторпространством.*

Thr 1.10. *Пусть $V = L \oplus M$ – прямая сумма подпространств, $L, M \subset V$. Тогда отображение $f\colon \boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u} + L$ ($\boldsymbol{u} \in M$) является изоморфизмом между M и V/L.*

Как следствие, получим оценку размерности факторпространства. Пусть $L \subseteq V$. Тогда

$$\dim V/L = \dim V - \dim L.$$

2 Линейные отображения

2.1 Линейные отображения векторных пространств

Def 2.1. Отображение $f\colon V \to W$ называется *линейным*, если

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}), \qquad f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x}).$$

С любым линейным отображением $f\colon V \to W$ ассоциируются два подпространства:

$$\textit{ядро:} \qquad \operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = 0\},$$
$$\textit{образ:} \qquad \operatorname{Im} f = \{\boldsymbol{w} \in W \mid \boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} \in V\}.$$

Thr 2.1. *Пусть V над $\mathbb{F}$, $f\colon V \to W$. Тогда* $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ *конечномеры и*

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V.$$

$\triangle$. Так как $\operatorname{Ker} f \subset V$, то $\dim \operatorname{Ker} f \leqslant \dim V \leqslant \infty$. Любой вектор из $\operatorname{Im} f$ имеет вид

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{e}_i\right) = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i f(\boldsymbol{e}_i), \qquad \alpha_i \in \mathbb{F}.$$

т.е. векторы $f(\boldsymbol{e}_{k+1}), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)$ порождают $\operatorname{Im} f$.

Они линейно независимы. Действительно, пусть $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i f(\boldsymbol{e}_i) = 0$. Тогда $f(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda \boldsymbol{e}_i) = 0$. Это значит, что $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{e}_i \in \operatorname{Ker} f$. Но всякая линейная зависимость между базисными элементами должна быть тривиальной. $\square$

2.2 Аффинные (точечные) пространства

Во-первых в этом параграфе введем множество *точек* $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, \ldots$. Назовём его $\mathbb{A}$. Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{F}$. Пара $(\mathbb{A}, V)$ называется *аффинным пространством*, ассоциированным (или связанным) с V, если задано отображение $(\dot{p}, \boldsymbol{v}) \to \dot{p} + \boldsymbol{v}$, такое, что:

1) $\dot{p} + \mathbf{0} = \dot{p}$, $(\dot{p} + \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{v} = \dot{p} + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$ для $\forall p \in \mathbb{A}$ и $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$;

2) $\forall \dot{p}, \dot{q} \in \mathbb{A}$, $\exists! \boldsymbol{v} \in V : \dot{p} + \boldsymbol{v} = \dot{q}$.

Def 2.2. Пусть $\mathbb{A}, \mathbb{A}'$ – аффинные пространства, ассоциированные с векторными пространствами V, V' над одним и тем же $\mathbb{F}$. Отображение $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ называется *аффинным* (или *аффинно-линейным*), если $\forall \dot{p} \in \mathbb{A}$, $\boldsymbol{v} \in V$ выполнено соотношение

$$f(\dot{p} + \boldsymbol{v}) = f(\dot{p}) + Df \cdot \boldsymbol{v}, \tag{1}$$

где $Df\colon V \to V'$ – линейное отображение векторных пространств. Отображение Df называют иногда *линейной частью* (или *дифференциалом*) отображения f. Для биективного аффинно-линейного отображения f линейная часть Df тоже биективна. В этом случае говорят об изоморфизме между $\mathbb{A}$ и $\mathbb{A}'$, а при $\mathbb{A}' = \mathbb{A}$ – об *аффинном автоморфизме* пространства $\mathbb{A}$, реализованном посредством *невырожденного аффинного преобразования* f.

Из такого определения становится очевидным такой ряд свойств, как сохранение параллельности, отношения между отрезками и т.д. связанного с биективностью отображения. Примером таких преобразований служит поворот, растяжение/сжатие, отражение, перенос.

Def 2.3. *Системой координат* в n-мерном аффинном пространстве $(\mathbb{A}, V)$ называется совокупность $\{\dot{o}; \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ точки $\dot{o} \in \mathbb{A}$ и базиса $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ в V. Координатами $x_1, \ldots, x_n$ точки $\dot{p}$ считаются координаты вектора $\overline{op}$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$: $\overline{op} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$.

Def 2.4. Пусть $\dot{p}$ – фиксированная точка n-мерного аффинного пространства $(\mathbb{A}, V)$ и U – векторное подпространства в V. Тогда множество

$$\Pi = \dot{p} + U = \{\dot{p} + \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} \in U\}$$

называется *плоскостью* (или *афинным подпространством*) в $\mathbb{A}$ размерности $m = \dim U$. Считается, что Π проходит через точку $\dot{p}$ в направлении U.

Проведём некоторое рассуждения, для понимания необходимости этого языка. Пусть $\dot{q} = \dot{p} + \boldsymbol{u}$, $\dot{r} = \dot{p} + \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$, то

$$\dot{q} + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = \dot{p} + \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = \dot{p} + \boldsymbol{v} = \dot{r}.$$

Тогда $\overline{qr} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$, соответственно из $\dot{q}, \dot{r} \in \Pi \Longrightarrow \overline{qr} \in U$.

Thr 2.2. *Всякая плоскость* $\Pi = \dot{p} + U$ *в аффинном пространстве сама является афинным пространством, ассоциированным с* U.

Thr 2.3. *Подмножество* $\Pi \subset \mathbb{A}$ *тогда, и только тогда является подпространством, когда оно целиком содержит прямую, проходящую через любые две его различные точки.*

Def 2.5. Любае две плоскости в направлении одного и того же подпространства U называют параллельными.

Аналогично можно определить аффинный функционал. Отображение $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{F}$ называется аффинно-линейной функцией, если

$$f(\dot{p} + \boldsymbol{v}) = f(\dot{p}) + Df \cdot \boldsymbol{v} \qquad \forall \dot{p} \in \mathbb{A}, \boldsymbol{v} \in V.$$

Выбрав систему координат $\{\dot{o}; \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, выразим значение f в виде

$$f(\dot{p}) = f(\dot{o} + \overline{op}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \alpha_0,$$

где $\alpha_0 = f(\dot{o}), \alpha_i = Df \cdot \boldsymbol{e}_i$, $\overline{op} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$.

Thr 2.4. *Пусть* $\mathbb{A}$ *– аффинное пространство размерности* n. *Множество точек из* $\mathbb{A}$, *координаты которых удовлетворяют совместной системе линейных уравнений ранга* r, *образуют* $(n-r)$-*мерную плоскость* $\Pi \subset \mathbb{A}$. *Любая плоскость в* $\mathbb{A}$ *может быть так получена.*

Def 2.6. Пусть $\Pi' = \dot{p} + U'$, $\Pi'' = \dot{q} + U''$ (U', U'' — векторные подпространства в V размерностей k, l). Говорят, что плоскость Π' *параллельна* Π'', если $U'' \subseteq U'$.

2.3 Евклидовы (точечные) пространства

Def 2.7. Аффинное пространство $(\mathbb{E}, V)$ называется *евклидовым (точечным) пространством*, если V – евклидово векторное пространство. Или, тройка $(\mathbb{E}, V, \rho)$.

Аналогично раннему, можем посмотреть на расстояния между объектами (см. стр. 191, $\mathbb{K}$).

Thr 2.5. *Определитель Грама системы векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$, отличен от нуля в точности тогда, когда векторы системы линейно независимы. Всегда выполнено неравенство $G(\boldsymbol{e}_1, \ldots \boldsymbol{e}_m) \geqslant 0$.*

Thr 2.6. *При аффинном преобразовании n-мерного евклидова пространства объём параллелепипеда, построенного на n векторах, умножается на модуль определителя преобразования. Другими словами, отношение объёмов параллелепипедов сохраняется.*

Thr 2.7. *Всякое невырожденное аффинное преобразование f n-мерного евклидова пространства $(\mathbb{E}, V)$ есть произведение:*

1) сдвига на некоторый вектор;

2) движения, оставляющего неподвижной некоторую точку $\dot{o}$;

3) аффинного преобразования h, являющегося композицией n сжатий вдоль взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в точке $\dot{o}$.

3 Структура линейного преобразования

3.1 Алгебра линейный операторов

При $V = W$ элемент векторного пространства $\mathcal{L}(V)$ называют *линейным оператором* или *линейным преобразованием*.

Примерами являются: нулевой оператор $\mathcal{O}$ (переводит любой вектор $\boldsymbol{v} \in V$ в нулевой), оператор проектирования ($\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$), оператор подобия, дифференцирования, ...

3.2 Алгебра операторов

Отдельный интерес представляет **алгебра операторов**. Понятно, что $\mathcal{L}(V)$ – векторное пространство размерности $\dim \mathcal{L}(V) = (\dim V)^2$. Можно по аксиомам проверить, что $\mathcal{L}(V)$ является одновременно векторным пространством над $\mathbb{F}$.

Def 3.1. Кольцо K является одновременно векторным пространством над $\mathbb{F}$ таким, что $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$ для всех $\lambda \in \mathbb{F},\ a, b \in K$, называется *алгеброй* над $\mathbb{F}$. Размерность K как векторного пространства называется *размерностью алгебры* K над $\mathbb{F}$. Всякое векторное подпространство $L \subset K$, замкнутое относительно операции умножения в $K (L \cdot L \subseteq L)$, называется *подалгеброй* алгебры K.

Нам интересна алгебра $\mathbb{F}[\mathcal{A}]$ – наименьшая алгебра, содержащая $\mathcal{A}$. Какова её размерность? Далее докажем, что

$$\dim \mathbb{F}[\mathcal{A}] \leqslant \dim V.$$

Def 3.2. Многочлен $f(t)$ *аннулирует* линейный оператор $\mathcal{A}$, если $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. Нормализованный многочлен минимальной степени, аннулирующий $\mathcal{A}$, называется *минимальным многочленом* оператора $\mathcal{A}$.

Thr 3.1. *Для всякого линейного оператора $\mathcal{A}$ существует $\mu_{\mathcal{A}}(t)$. Оператор $\mathcal{A}$ обратим тогда, и только тогда, когда свободный слен μ_m отличен от нуля.*

$\triangle$. Эксплуатируем тот факт, что делители нуля необратимы. $\square$

Thr 3.2. *Любой аннулирующий многочлен $f(t)$ оператора $\mathcal{A}$ делится без остатка на $\mu_{\mathcal{A}}(t)$.*

Def 3.3. Линейный оператор $\mathcal{A}$ называется *нильпотентным*, если $\mathcal{A}^m = \mathcal{O}$ для некоторого $m > 0$; наименьшее такое натуральное число m называется *индексом нильпотентности*.

3.3 Инвариантные подпространства и собственные векторы

3.3.1 Проекторы

Пусть $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_m$, тогда $\boldsymbol{x} \in V$:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \boldsymbol{x}_m, \qquad x_i \in W_i,$$

а отображение $\mathcal{P}_i \colon \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}_i \in \mathcal{L}(V)$. Наконец,

$$W_i = \mathcal{P}_i V = \{\boldsymbol{x} \in V \mid \mathcal{P}_i \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\},$$
$$K_i = \operatorname{Ker} \mathcal{P}_i = W_1 + \ldots + W_m$$

и $\mathcal{P}_i$ по сути оператор проектирования V на W_i вдоль K_i.

Thr 3.3. $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_m \colon V \to V$ *– конечное множество линейных операторов таких, что*

$$\sum_{i=1}^{m} \mathcal{P}_i = \mathcal{E}; \qquad \mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m; \qquad \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \mathcal{O},\ i \neq j.$$

Тогда

$$V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_m,\ \textit{где}\ {}_i = \operatorname{Im} \mathcal{P}_i.$$

$\triangle$. Через разбиение $\forall \boldsymbol{x} \in V$ получим

$$\boldsymbol{x} = \mathcal{E}\boldsymbol{x} = \sum \mathcal{P}_i \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_i + \ldots + \boldsymbol{x}_m, \qquad \boldsymbol{x}_i \in W_i,$$

тоесть $V = W_1 + \ldots + W_m$. Докажем, что сумма прямая. Пусть $\boldsymbol{x} \in W_j \cap \left(\sum_{i \neq j} W_i\right)$. Но, $\exists \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$:

$$x = \mathcal{P}_j(\boldsymbol{x}_j) = \sum_{i \neq j} \mathcal{P}_i(\boldsymbol{x}_i).$$

Применим $\mathcal{P}_j$, получим

$$\boldsymbol{x} = \mathcal{P}_j^2(\boldsymbol{x}_j) = \sum_{i \neq j} \mathcal{P}_j \mathcal{P}_i(\boldsymbol{x}_i) = \mathbf{0}.$$

$\square$

3.3.2 Инвариантные подпространства

Def 3.4. Подпространство $U \subset V$ *инвариантно* относительно $\mathcal{A} \colon V \to V$, если $\mathcal{A}U \subset U$.

Thr 3.4. *Пространство V является прямой суммой двух подпространств U, W, инвариантных относительно $\mathcal{A} \colon V \to V$, тогда, и только тогда, когда $\exists$ базис такой, что $\mathcal{A}$ принимает блочно диагональный вид.*

3.3.3 Собственные векторы. Характеристический многочлен.

Def 3.5. Любой ненулевой вектор из одномерного подпространства, инвариантного относительно $\mathcal{A}$, называется *собственным вектором* оператора $\mathcal{A}$. Если $\boldsymbol{x}$ – собственный вектор, то $\mathcal{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$, $\lambda \in \mathbb{F}$ называется *собственным значением* $\mathcal{A}$.

Очевидная импликация $\mathcal{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x},\ \mathcal{A}\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{y} \implies \mathcal{A}(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \lambda(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y})$ даёт основание называть V^λ *собственным подпространством* оператора $\mathcal{A}$, ассоциированным с λ. Его размерность $\dim V^\lambda$ называется *геометрической кратностью* λ.

Уместно ввести понятие *характеристического многочлена*, ассоциированного с $\mathcal{A}$. Кратность λ как корня характеристического многочлена $\xi_{\mathcal{A}}(t)$ называется *алгебраической кратностью* λ оператора $\mathcal{A}$.

Thr 3.5. *Геометрическая кратность λ не превосходит его алгебраической кратности.*

$\triangle$. Действительно, пусть $\mathcal{A}'$ – ограничение $\mathcal{A}$ на V^λ, тогда $\det(t\mathcal{E}' - \mathcal{A}') = (t-\lambda)^m$, причём $\xi_{\mathcal{A}}(t) = (t-\lambda)^m q(t)$. Пусть λ – корень кратности k многочлена $q(t)$. Тогда алгебраической кратностью λ будет $m + k$. $\square$

3.3.4 Критерий диагонализируемости

Def 3.6. Множество всех собственных значений линейного оператора $\mathcal{A}$ называют *спектром* – $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$. Еси все точки спектра простые, то и спектр называется *простым.*

Lem 3.1. *Собственные векторы, принадлежащие к различным собственным значениям, линейно независимы. Сумма* $\sum_{\lambda\in\operatorname{Spec}\mathcal{A}} V^\lambda$ *прямая.*

$\triangle$. По индукции докажем ЛНеЗ набора $e_i \in V^{\lambda_i}$ $\forall i$.

$$\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha \boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{0} \quad \mapsto \quad \alpha_1\lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_m\lambda_m\boldsymbol{e}_m = 0.$$

Умножая на λ_m первое соотношение и вычитая из него второе, приходим к линейной зависимости первых $m-1$ векторов:

$$\alpha_1(\lambda_m - \lambda_1)\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\boldsymbol{e}_{m-1} = \boldsymbol{0}.$$

Но $\alpha_1(\lambda_m - \lambda_1) \neq 0$. По доказанному $V^{\lambda_i} \cap \sum_{j\neq i} V^{\lambda_j} = \boldsymbol{0}$. $\square$

Def 3.7. Линейный оператор $\mathcal{A}$ на n-мерном пространстве V называют *диагонализируемым*, если существует базис $(\boldsymbol{e}_i)$, относительно которого матрица оператора принимает диагональный вид.

Thr 3.6. *Линейный оператор $\mathcal{A}$ с простым спектром диагонализируем.*

Thr 3.7. *Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор на конечномерном векторном пространстве V над полем $\mathbb{F}$. Для диагонализируемости $\mathcal{A}$ необходимо и достаточно, чтобы все корни $\xi_{\mathcal{A}}(t)$ лежат в $\mathbb{F}$* ***и*** *геометрическая кратность каждого собственного значения λ совпадает с его алгебраической кратностью.*

$\triangle_{\Leftarrow}$. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – различные корни многочлена $\xi_{\mathcal{A}}(t)$, а $k_1, \ldots, k_m$ – их кратности, то $\dim V^{\lambda_i} = k_i$ и $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. По лемме 3.1 любая совокупность $\boldsymbol{v}_i \in V^{\lambda_i}$ линейно независима, так что

$$V^{\lambda_i} \cap \left(V^{\lambda_1} + \ldots + \cancel{V^{\lambda_i}} + \ldots + V^{\lambda_m}\right) = \boldsymbol{0}. \tag{2}$$

Значит сумма прямая. Взяв за базис объединение базисов в V^{λ_i}, мы придём к *собственному базису.* $\square$

$\triangle_{\Rightarrow}$. Пусть $\mathcal{A}$ диагонализируем. Положим $l_i = \dim V^{\lambda_i}$. Из 2 верно, V имеет собственный базис из элементов V^{λ_i}, соотвественно $V^{\lambda_1}, \ldots, V^{\lambda_m}$ порождают V. Из равенства для $\xi_{\mathcal{A}}(t)$ вытекает, что все корни многочлена принадлежат $\mathbb{F}$, т.е. выполнено первое условие. Также l_i совпадает с алгебраической кратностью λ_i. $\square$

3.3.5 Существование инвариантных подпространств

Thr 3.8. *Всякий комплексный $\mathcal{A}$ имеет одномерное инвариантное подпространство. Всякий вещественный $\mathcal{A}$ имеет одномерное или двумерное инвариантное подпространство.*

$\triangle$. Так как $\xi_{\mathcal{A}}$ имеет в $\mathbb{C}$ хотя бы один корень.

Для $\mathbb{R}$ рассмотрим $\mu_{\mathcal{A}}$. Его коэффициенты лежат в $\mathbb{R}$. Если $\mu_{\mathcal{A}}$ имеет вещественный корень, то

$$\mu_{\mathcal{A}} = (t-\alpha)g(t), \quad g(t) \in \mathbb{R}[t].$$

Так как $g(\mathcal{A}) \neq \mathcal{O}$ в силу минимальности $\mu_{\mathcal{A}}$, то $g(\mathcal{A})\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ для некоторого $\boldsymbol{u} \in V$. Но

$$(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}) = (\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})g(\mathcal{A})\boldsymbol{u} = \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0},$$

откуда $\mathcal{A}\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v}$, т.е. $\boldsymbol{v}$ – собственный вектор.

Если у $\mathcal{A}$ нет собственных векторов, то у $\mu_{\mathcal{A}}$ нет вещественных корней. Однако

$$\mu_{\mathcal{A}}(t) = (t^2 - \alpha t - \beta t)h(t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad h(t) \in \mathbb{R}[t].$$

Снова $\boldsymbol{v} = h(\mathcal{A})\boldsymbol{u} \neq 0$ для некоторого $\boldsymbol{u} \in V$и

$$\mathcal{A}^2\boldsymbol{v} - \alpha\mathcal{A}\boldsymbol{v} - \beta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

Получается, что $\mathcal{A}^2\boldsymbol{v} = \alpha\mathcal{A}\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}$. Так как $\mathcal{A}\boldsymbol{v} \neq \lambda\boldsymbol{v}$, то $L = \langle \boldsymbol{v}, \mathcal{A}\boldsymbol{v}\rangle$ – двумерное инвариантное подпространство. $\square$

3.3.6 Сопряженный линейный оператор

Посмотрим на связь оператора и сопряженного пространства. При любом фиксированном элементе $f \in V^*$ отображение $x \mapsto (f, \mathcal{A}\boldsymbol{x}) := f(\mathcal{A}\boldsymbol{x})$ снова является элементом из V^*, т.е. линейной функцией. Раз это так, то можем положить

$$(\mathcal{A}^* f, x) := (f, \mathcal{A}\boldsymbol{x}). \tag{3}$$

Def 3.8. Линейный оператор $\mathcal{A}^*$ на V^*, заданный соотношением (3), называют оператором, *сопряженным* к $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$.

Thr 3.9. *Если в базисе* $(\boldsymbol{e}_i)$ *пространства* V *линейный оператор* $\mathcal{A}$ *имеет матрицу* $A = (a_{ij})$*, то в дуальном базисе* (e^i) *пространства* V^* *сопряженный к* $\mathcal{A}$ *оператор* $\mathcal{A}^*$ *имеет транспонированную матрицу* A^T: $A^* = (a^*_{ij}) = A^T$.

Одновременное рассмотрение пар $(V, \mathcal{A})$ и $(V^*, \mathcal{A}^*)$ часто приводит к практическим результатам. Одним из содержательных примеров является доказательство следующей теоремы.

Thr 3.10. *Всякий комплексный линейный оператор на* V *обладает инвариантной гиперплоскостью.*

$\triangle$. Пусть $\dim V = n$. Как мы знаем, $\dim \operatorname{Ker} f = n - 1$ для любой линейной функции $f \neq 0$ на V. Возьмём в качетсве f собственный вектор линейного оператора $\mathcal{A}^*$ на V^*. Тогда $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow 0 = \lambda(f, \boldsymbol{x}) = (\lambda f, \boldsymbol{x}) = (\mathcal{A}^* f, \boldsymbol{x}) = (f, \mathcal{A}\boldsymbol{x}) \Rightarrow \mathcal{A}\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f$. Собственно, $\operatorname{Ker} f$ – искомая гиперплоскость. $\square$

3.3.7 Фактороператор

Пусть L – подпространство, инвариантное относительно линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего на V. Считая V и L фиксированными, будем обозначать факторпространство V/L, символом $\overline{V}$, а любой его элемент $\boldsymbol{x} + L$ через $\overline{\boldsymbol{x}}$.

факторпространство – это ..?

Def 3.9. Соотношением $\overline{\mathcal{A}} \cdot \overline{\boldsymbol{x}} = \overline{\mathcal{A}\boldsymbol{x}}$ на $\overline{V}$ *фактороператор.* Другими словами, $\overline{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x} + L) = \mathcal{A}\boldsymbol{x} + L$.

$$\boldsymbol{v} - \infty + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + x_3 - y_7 - \boldsymbol{y} +$$

3.4 ✗ Жорданова нормальная форма

3.4.1 ЖНФ: формулировка и следствие

Thr 3.11. *Каждая квадратная матрица* A *порядка* n *над алгебраически замкнутым полем* $\mathbb{F}$ *(достаточно, чтобы* ξ_A *раскладывался на линейные сомножители) приводится к жордановой нормальной форме. Именно,* $\exists C(\det C \neq 0)\colon C^{-1}AC = J(A) = J$*. С точностью до перестановки клеток жорданова нормальная форма матрицы единственна.*

3.4.2 Случай нильпотентного оператора

Далее, положив $\mathcal{N} = \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$, мы получим нильпотентный оператор индекса нильпотентности m с нильпотентной матрицей N.

Def 3.10. Линейная оболочка

$$\mathbb{F}[\mathcal{N}]\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{v}, \mathcal{N}\boldsymbol{v}, \ldots, \mathcal{N}^{m'-1}\boldsymbol{v} \rangle$$

называется *циклическим подпространством*, ассоциированным с оператором $\mathcal{N}$ индекса нильпотентности m и вектором $\boldsymbol{v}$. Предполагается, что m‘ $\leqslant m$ – наименьшее натуральное число, для которого $\mathcal{N}^{m‘}\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

Thr 3.12. *ЖНФ нильпотентной матрицы* N *существует (над произвольным* $\mathbb{F}$*).*

$\triangle$. Достаточно показать, что V, на котором действует оператор $\mathcal{N}$, разлагается в прямую сумму циклических подпространств.

По теореме 1 матрица N приводится к верхнему треугольному виду с 0 по диагонали. Это значит, что линейная оболочка U первых $n-1$ базисных векторов инвариантна относительно $\mathcal{N}$. По определению $\mathcal{N}V \subset U$, а по предположению индукции а U можно выбрать жорданов базис для $\mathcal{N}$, или, что то же самое,

$$U = \mathbb{F}[\mathcal{N}]\boldsymbol{e}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{F}[\mathcal{N}]\boldsymbol{e}_s,$$
$$\mathbb{F}[\mathcal{N}]\boldsymbol{e}_i = \langle \boldsymbol{e}_i, \mathcal{N}\boldsymbol{e}_i, \ldots, \mathcal{N}^{m_i-1}\boldsymbol{e}_i\rangle, \qquad B^{m_i}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0}.$$

Далее, $V = \langle \boldsymbol{v}, U\rangle$, $\mathcal{N}\boldsymbol{v} \in U$ для любого вектора $\boldsymbol{v}$, не содержащегося в U, так что $\mathcal{N}\boldsymbol{v} = \sum_i \alpha \boldsymbol{e}_i + \mathcal{N}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in U$. Заменяя $\boldsymbol{v}$ на $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$, будем иметь

$$V = \langle \boldsymbol{v}', U\rangle, \qquad \mathcal{N}\boldsymbol{v}' = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \boldsymbol{e}_i.$$

Если $\alpha_i = 0, 1 \leqslant i \leqslant s$, то к клеткам Жордана добавится $J_1(0)$, отвечающее циклическому подпространству $\langle \boldsymbol{v}'\rangle$, т.е.

$$N \sim J(N) = \operatorname{diag}\left(J_{m_1}(0), \ldots, J_{m_s}(0), J_1(0)\right)$$

Остаётся рассмотреть случай, когда

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_{r-1} = 0, \qquad \mathcal{N}\boldsymbol{v}' = \sum_{i=r}^{s} \alpha_i \boldsymbol{e}_i, \qquad \alpha_r \neq 0$$

для некоторого $r \geqslant 1$. Положим

$$\boldsymbol{e}_i' = \boldsymbol{e}_i, \qquad i \neq r, \qquad \boldsymbol{e}_r' = \frac{1}{\alpha_r}\boldsymbol{v}', \qquad \beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_r}.$$

Тогда

$$\mathcal{N}\boldsymbol{e}_r' = \boldsymbol{e}_r + \sum_{i=r+q}^{s} \beta_i \boldsymbol{e}_i := \boldsymbol{f}_r$$

Считая $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_n$: $\mathcal{N}^{m_r}\boldsymbol{f}_r = \boldsymbol{0}$. Верно, что $\mathcal{N}^{m_{r-1}}\boldsymbol{f}_r \neq \boldsymbol{0}$, $\forall \beta$. Кроме того, сумма

$$\sum_{i \neq r} \mathbb{F}[\mathcal{N}]\boldsymbol{e}_i' + \mathbb{F}[\mathcal{N}]\boldsymbol{f}_r$$

также является прямой и совпадает с U.

Но $\mathbb{F}[\mathcal{N}]\boldsymbol{f}_r$ расширяется за счёт вектора $\boldsymbol{e}_r' \notin U$: $\mathbb{F}[\mathcal{N}]\boldsymbol{f}_r \subset \mathbb{F}[\mathcal{N}]\boldsymbol{e}_r'$, и получается прямая сумма

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbb{F}[\mathcal{N}]\boldsymbol{e}_i',$$

отвечающую набору индексов $m_1', \ldots, m_s'$, где $m_i' = m_i$, $i \neq r$, $m_r' = m_r + 1$. Тогда

$$B \sim \operatorname{diag}\left(J_{m_1}'(0), \ldots, J_{m_s'}(0)\right).$$

Таким образом, существование базиса для нильпотентного $\mathcal{N}$ доказано. $\square$

4 Билинейные и квадратичные форма

4.1 Билинейная форма

Def 4.1. Билинейная форма на линейном пространстве V – $b\colon V \times V \to \mathbb{F}$, линейное по $\forall$ аргументу.

Def 4.2. $b \in \mathcal{B}(V)$[1], а $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ – базис в V. **Матрица билинейной формы**: $B = (b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j))$, $b \underset{e}{\longleftrightarrow} B$

Для $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V$: $\boldsymbol{u} \underset{e}{\longleftrightarrow} x$ и $\boldsymbol{v} \underset{e}{\longleftrightarrow} y$ — $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = x^T B y$. $(B = (b_{ij}))$.

Thr 4.1. *Пусть e – базис в V $(\dim V = n)$, тогда соответствие $\mathcal{B}(V) \to M_{n\times n}(\mathbb{F})$ осуществляет изоморфизм линейных пространств. Следствие: $\dim \mathcal{B}(V) = n^2$.*

[1] $\mathcal{B}(V)$ — линейное пространство над $\mathbb{F}$.

△. Инъективность: $b_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = x^T By = b_2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \Rightarrow b_1 = b_2$;
Сюръективность: определяем $b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = x^T By$, тогда $b(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = b_{ij}$, значит $b \underset{e}{\longleftrightarrow} B$. □

Thr 4.2. *$b \in \mathcal{B}(V)$, e и e' – базисы в V, $e' = eS$, $b \underset{e}{\longleftrightarrow} B$ и $b \underset{e'}{\longleftrightarrow} B'$. Тогда $B' = S^T BS$.*

Def 4.3. Матрицы B и $B' = S^T FS$ с $\det A \neq 0$ — **конгруэнтны**. Ранг B в каком-то базисе соответствующей b называется **рангом** билинейной формы. $\mathrm{rg} b$ инвариантен относительно изменения базиса.

4.2 Симметричные и кососимметричные формы

Def 4.4.

Симметричная билинейная форма.	Кососимметричная билинейная форма.
$\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V:\ b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$	$\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V:\ b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = -b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) \Leftarrow b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = 0$
$\mathcal{B}^-(V)$ — **симметричные** формы на V	$\mathcal{B}^-(V)$ — **кососимметричные** формы на V
$b \underset{e}{\longleftrightarrow} B$, $b \in \mathcal{B}^+(V) \Leftrightarrow B^T = B$	$b \underset{e}{\longleftrightarrow} B$, $b \in \mathcal{B}^-(V) \Leftrightarrow B^T = -B$
$b^+(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\left[b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\right]$	$b^-(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\left[b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\right]$

Thr 4.3. *Пусть $char(\mathbb{F}) \neq 2$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}^+ \oplus \mathcal{B}^-$.*

Def 4.5. Пусть $b \in \mathcal{B}^{\pm}(V)$. Тогда **ядром** формы b называется: $\mathrm{Ker}\, b := \{\boldsymbol{v} \in V : \forall \boldsymbol{u} \in V\ b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0\} = \{\boldsymbol{u} \in V : \forall \boldsymbol{v} \in V\ b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0\}$ (соответственно левое и правое ядра).

Thr 4.4. $\dim \mathrm{Ker}\, b = \dim V - \mathrm{rg}\, b$.

△. 1) Рассмотрим базис $e = (\boldsymbol{e},\dots,\boldsymbol{e}_n)$, и $b \underset{e}{\longleftrightarrow} B$. Пусть $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{v} \underset{e}{\longleftrightarrow} x$, $\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}\, b \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{u}\, b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0$;
2) Или равносильно: $\forall i\ b(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{v}) = 0 \Leftrightarrow EBX = 0 \Leftrightarrow BX = 0$. Пространство решений это ОСЛУ имеет требуемое равенство: $\dim \mathrm{Ker}\, b = \dim V - \mathrm{rg}\, B$. □

4.3 Ортогональные и невырожденные

Def 4.6. Пусть $b \in \mathcal{B}^{\pm}(V)$, $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V$. $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ **ортогональны** относительно b, если $b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0$.
Для $U \subseteq V$, **ортогональное дополнение** U – $U^{\perp}$ $\{\boldsymbol{v} \in V : \forall \boldsymbol{u} \in U\ b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0\}$.

Def 4.7. Пусть $b \in \mathcal{B}^{\pm}(V)$, форма b — **невырожденная**, если $\mathrm{rg}\, b = \dim V$.

Thr 4.5. $\dim U^{\perp} \geqslant \dim V - \dim U$. *А если форма b – невырождена, то* $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$

△. 1) Выберем в V базис $(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)$ так, чтобы первые k векторов были базисом U.
2) Тогда, если $\boldsymbol{v} \underset{e}{\longleftrightarrow} x$: $\boldsymbol{v} \in U^{\perp} \Leftrightarrow \forall i = 1,\dots,k:\ b(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{v}) = 0 \Leftrightarrow (E_k|0)\, Bx = 0$.
3) ОСЛУ (2) состоит из k строк матрицы B, значит её ранг $\leqslant k \Longrightarrow \dim U^{\perp} = n - k$.
4)Если b – невырождена, то строчки B – ЛНеЗ $\Longrightarrow$ ОСлу имеет ранг $k \Longrightarrow \dim U^{\perp} = n - k$. □

Def 4.8. $b \in \mathcal{B}^{\pm}(V)$, $U \subseteq V$. U — **невырожденное** относительно b, если $b\big|_U \in \mathcal{B}^{\pm}(U)$ – невырождена.

Thr 4.6. *Пусть $b \in \mathcal{B}^{\pm}(V)$, $U \subseteq V$. Тогда U – невырождено <==> $V = U \oplus U^{\perp}$.*

△. 1) Базис как в теореме (4.5). Матрица $b\big|_U$ – это подматрица B стоящая в верхнем левом углу.
2) так как U – невырождено: $\mathrm{rg}\, B_U = k \Rightarrow$ первые k строк B_U ЛНеЗ, значит $\dim U^{\perp} = n - k$.
3) Кроме того, $\mathrm{Ker}\, b\big|_U = 0$ так как $\dim \mathrm{Ker}\, b\big|_U = k - k = 0$. То есть $\forall \boldsymbol{v} \in U$, $\boldsymbol{v} \neq 0 \Rightarrow \exists \boldsymbol{u} \in U$: $b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0$, что означает, что $U \cap U^{\perp} = \mathbf{0}$. **Итак,** $U + U^{\perp} = U \oplus U^{\perp}$ и $\dim(U + U^{\perp}) = k + (n-k) = n$. □

4.4 Квадратичные формы

Def 4.9. $h\colon V \to \mathbb{F}$ — **квадратичная форма**, $h(\boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})\ \forall \boldsymbol{v} \in V$, для некоторой $b \in \mathcal{B}(V)$.

Thr 4.7. *Если $char(\mathbb{F}) \neq 2$. Тогда $\forall h \in \mathcal{Q}(V)\ \exists! b \in \mathcal{B}^+(V) :\ h(\boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ $(\mathcal{Q} \cong \mathcal{B}^+(V))$.*

$\triangle$. $\exists$. Пусть $b \in \mathcal{B}(V) :\ b = b^+ + b^- \rightsquigarrow h(\boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = b^+(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + \cancel{b^-(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}$. h задаётся b^+.
$!$. Пусть $h(\boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$, $b \in \mathcal{B}^+(V)$. Восстановим b по h. Для $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$:
$h(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + 2b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \rightsquigarrow b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \big[h(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) - h(\boldsymbol{u}) - h(\boldsymbol{v})\big]/2$
Полученная симметричная форма — **билинейная форма полярная к** h. $\square$

Пусть $b \underset{e}{\longleftrightarrow} B$, $\boldsymbol{u} \underset{e}{\longleftrightarrow} x$, $\boldsymbol{v} \underset{e}{\longleftrightarrow} y$. Имеем $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = x^T B y = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} x_i, y_j$. Тогда квадратичная форма $h(\boldsymbol{v}) = y^T B y = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} y_i y_j$. Если b – симметричная, то $b_{ij} = b_{ji}$, а $h(\boldsymbol{v}) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii} y_i^2 + 2 \sum\limits_{i<j}^{n} b_{ij} y_i y_j$.

Отныне характеристика нашего поля ни в коем виде не **двойка**.

Def 4.10. $h \in \mathcal{Q}(V)$ с **полярной** $b \in \mathcal{B}(V)$, e – базис. Тогда матрица h – это матрица b в базисе e.
Матрица $h \in \mathcal{Q}(V)$ всегда симметрична. Если $h \underset{e}{\longleftrightarrow} B$, $\boldsymbol{v} \underset{e}{\longleftrightarrow} x$, то $h(\boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = x^T B x$.

Thr 4.8. *Пусть $h \in \mathcal{Q}(V)$. Тогда $\exists e$ – базис в V : h в этом базисе имеет диагональную матрицу.*

$\triangle$. 1) Индукция по $n = \dim V$. Для $n = 1$ доказывать нечего. Для $h = 0$ тоже.
2) $n > 1$: $\exists \boldsymbol{e}_1 :\ h(\boldsymbol{e}_1) \neq 0$. Тогда $\langle \boldsymbol{e}_1 \rangle$ – невырождена относительно полярной к h – b.
3) То есть $V = \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle^{\perp}$. По индукции, в $U = \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle^{\perp}$ есть базис $(\boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, где $h\big|_U$ диагональна.
4) Матрица(3) – B', тогда $h \underset{e}{\longleftrightarrow} B$ в $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ состоит из B' и $h(\boldsymbol{e}_1)$ в верхнем левом углу. $\square$

Con 4.1. *Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{R} \Rightarrow \forall h \in \mathcal{Q}(V)$, $\exists e \in V :\ h \underset{e}{\longleftrightarrow} B \in e$ – диагональна с $0, \pm 1$ на диагонали.*

Def 4.11. Над $\mathbb{R}$ $h \in \mathcal{Q}(V)$. Базис, в котором $h \underset{e}{\longleftrightarrow} B$ – диагональна с $0, \pm 1$ — **нормальный базис**. Матрица B — **нормальная форма** для h.

Def 4.12. Пусть $h \in \mathcal{Q}(V)$ над $\mathbb{R}$ (далее всегда $\mathbb{F} = \mathbb{R}$). Тогда h называется:
положительно полуопределенной, если $\forall \boldsymbol{v} \in V\ h(\boldsymbol{v}) \geqslant 0 \Leftrightarrow$ на диагонали B только $0, +1$.
положительно определенной, если $\forall \boldsymbol{o} \neq \boldsymbol{v} \in V\ h(\boldsymbol{v}) > 0 \Leftrightarrow$ на диагонали B только $+1$.
отрицательно определенной или полуопределенной.
В этих случаях полярная к h билинейная форма приобретает те же названия.

Def 4.13. Пусть $h \in \mathcal{Q}(V)$. Её **положительный индекс инерции** $\sigma_+(h)$ — наибольшая размерность подпространства $U \subseteq V$, на которой $h\big|_U$ – положительно определена. (Отрицательный индекс инерции так же)

Thr 4.9. *$\mathcal{Q}(V) \ni h \underset{e}{\longleftrightarrow} B$ – её нормальный вид в e. Тогда на диагонали B стоит ровно $\sigma_+(h)$ единиц и $\sigma_-(h)$ минус единиц.*

$\triangle$. 1) Пусть $B = \begin{pmatrix} E_k & & O \\ & 0_l & \\ O & & -E_m \end{pmatrix}$. Тогда, если $U = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k \rangle$, то матрица $h\big|_U$ – единичная, то есть $h\big|_U$ – положительно определена. Для $W = \langle \boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ получаем $h\big|_U$ – отрицательно полуопределена.
2) Пусть $U' \subseteq V : h\big|_{U'}$ – положительно определена $\Rightarrow \forall (\boldsymbol{0} \neq) \boldsymbol{v} \in U' \cap W : 0 < h(\boldsymbol{v}) \leqslant 0$ – невозможно.
Итак, $U' \cap W = 0 \Rightarrow \dim U' \leqslant \dim V - \dim W = k$, в итоге $\sigma_+(h) = k$. Аналогично $\sigma_-(h) = m$. $\square$

Con 4.2 (Закон инерции)**.** *Нормальный вид матрицы $h \in \mathcal{Q}(V)$ определён однозначно с точностью до перестановки элементов диагонали.*

Def 4.14. B – симметричная матрица над $\mathbb{R}$ Она обретает такие же названия, как у квадратичной формы, если она её матрица.
B – положительно определена $\Leftrightarrow \exists$ невырожденная $A :\ B = A^T A$

$\triangle$. $\Rightarrow$. У соответствующей h нормальный вид – $E = S^TBS$. Тогда $B = (S^T)^{-1}S^{-1} = (S^{-1})^TS^{-1}$.

$\Leftarrow$. Если $B = A^TA \Rightarrow \forall(\mathbf{0} \neq)\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{v} \underset{e}{\longleftrightarrow} x$, $h(\boldsymbol{v}) = x^TBx = x^TA^TAx = (Ax)^TAx > 0$.

Note: и также для B – полуопределенной $\Leftrightarrow \exists A:\ B = A^TA$. $\square$

Def 4.15. B – симметричная матрица. Её **главный минор** i-порядка $\Delta_i(B)$ — это определитель матрицы $i \times i$ в левом верхнем углу.

Thr 4.10 (Метод Якоби)**.** *$\mathcal{Q}(V) \ni h \underset{e}{\longleftrightarrow} B$, причём $\Delta_i(B) \neq 0$, $i = 1, \ldots, n(= \dim V)$. Тогда $\exists e' = eS$, где S – верхнетреугольная матрица с единицами на диагонали такой,*

что $h \underset{e'}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} d_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & d_n \end{pmatrix}$, где $d_i = \frac{\Delta_i(B)}{\Delta_{i-1}(B)}$ $(\Delta_0(B) = 1)$.

$\triangle$. 1) Индукция по n. При $n = 1$ доказывать нечего. Для $n > 1$ имеем $\langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, e_{n-1} \rangle$ - невырожденный относительно билинейной формы, полярной к h (так как $\Delta_{n-1}(B) \neq 0$)).

2) Значит $V = U \oplus U^{\perp}$. Разложим $\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{e}'_n$ ($u \in U$, $\boldsymbol{o} \neq \boldsymbol{e}'_n \in U^{\perp}$). Тогда по предположению индукции: найдётся замена базиса в U: $(\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_{n-1}) = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1})S$, приводящая $h\big|_U$ к диагональному.

3) Тогда $\boldsymbol{e}'_n \in \langle \boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_{n-1} \rangle^{\perp} = U^{\perp}$. Получаем $h \underset{e'}{\longleftrightarrow} B' = \left(\begin{array}{ccc|c} d_1 & & & \\ & \ddots & & O \\ & & d_{n-1} & \\ \hline & O & & d_n \end{array}\right)$ $S = \left(\begin{array}{c|c} S' & O \\ \hline O & 1 \end{array}\right)$.

4) Доказав переход индукции осталось вычислить d_i. Заметим, что: $\boldsymbol{e}'_i \in \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i \rangle (= \langle \boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_i \rangle)$.

5) Пусть $B_i(')$ – подматрица в $B(')$ в левом верхнем углу ($\Delta_i(B) = |B_i|$). Тогда $B'_i = S_i^TB_iS_i$ ($e'_i = e_iS_i$ и S_i – верхнетреугольная с единицами на диагонали).

6) Значит $\Delta_i(B') = |B'_i| = |S_i^TB_iS_i| = |B_i||S_i|^2 = |B_i| = \Delta_i(B)(= d_1 \ldots d_i) \rightsquigarrow d_i = \frac{|B'_i|}{|B'_{i-1}|} = \frac{\Delta_i(B)}{\Delta_{i-1}(B)}$. $\square$

Thr 4.11 (Критерий Сильвестра)**.** *$\mathcal{Q}(V) \ni h \underset{e}{\longleftrightarrow} B$.*

h – положительно определена $\Longleftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n(= \dim(V))$ $\Delta_i(B) > 0$.

$\triangle$. $\Rightarrow$. h – положительно определена $\Leftrightarrow B = A^TA$, A – невырождена. Тогда $\Delta_n(B) = |B| = |A|^2 > 0$.

$\Leftarrow$. Из метода Якоби, на диагонали: Δ_1, $\Delta_2/\Delta_1 \ldots$ все $> 0 \Rightarrow h$ – положительно определена. $\square$

Con 4.3. *Если $\forall i = 1, \ldots, n:\ \Delta_i(B) \neq 0 \Rightarrow \sigma_-(h)$ – число перемен знака в $1, \Delta_1(B), \ldots, \Delta_n(B)$.*

4.5 Кососимметричные и полуторалинейные формы

Thr 4.12. *Теперь и далее $\mathbb{F}$ – любое. Пусть $b \in \mathcal{B}^-(V)$. Тогда в V $\exists e$, в котором $b \underset{e}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \boxed{0} \end{pmatrix}$*

$\triangle$. 1) Индукция по $n = \dim V$. Если $\operatorname{rg} b = 0$, то доказывать нечего.

2)Иначе $\exists \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2:\ b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ – ЛНеЗ и, можно считать, $b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1$.

3) Далее, $U = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ – невырождено относительно b и $b\big|_U \underset{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)}{\longleftrightarrow} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Значит, $V = U \oplus U^{\perp}$. По предположению индукции к $b\big|_U^{\perp}$ получаем B_1 в базисе $(\boldsymbol{e}_3, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$.

5) Тогда, для $e = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ имеем: $b \underset{e}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & O \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{O} & B_1 \end{array}\right)$. $\square$

5 Пространства со скалярным произведением

5.1 Евклидово пространство

Def 5.1 (Скалярное произведение).
Отображение $V \times V \to \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{r|ll} \text{i)} & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) & \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V; \\ \text{ii)} & (\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) + \beta(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) & \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}; \\ \text{iii)} & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) > 0 & \forall \boldsymbol{x} \neq 0. \end{array}$$

Любое евклидово пространство содержит:

$$\begin{array}{rl} \textit{норма} & ||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})} \\ \textit{угол} & \cos\alpha_x^y = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})/||\boldsymbol{x}||/||\boldsymbol{y}|| \\ \textit{н-во Коши-Буняк.} & |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| \\ \textit{н-во треугольника} & ||\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y}|| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\| \end{array}$$

Def 5.2. *Евклидовым векторным пространством* называется вещественное векторное пространство V с выделенной на нём симметричной билинейной формой $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mapsto (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$ такой, что соответствующая квадратичная форма $\boldsymbol{x} \mapsto (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x})$ положительна определена.

5.1.1 Процесс ортогонализации

Def 5.3. Базис $(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)$ евклидова векторного пространства V называется *ортогональным*, если $(\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_j) = 0$ при $i \neq f$; $i,j = 1,2,\dots,n$. Если, кроме того, $(\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_i) = 1$, то базис называется *ортонормированным.*

Факт: любые ненулевые взаимно ортогональные векторы $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_m \in V$ линейно независимы. Другой факт: во всяком n-мерном V существуют ортонормированные базисы.

Def 5.4. Скалярное произведение $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e})$, где $\|\boldsymbol{e}\| = 1$, называют *проекцией* вектора $\boldsymbol{x}$ на прямую $\langle \boldsymbol{e}\rangle_{\mathbb{R}}$.

Def 5.5. Множество всех векторов $\boldsymbol{x} \in V$, ортогональных $U \subset V$, есть подпространство $U^\perp$, которое называется *ортогональным дополнением к* U.

Thr 5.1 (процесс Грама – Шмидта). ***Пусть*** *$\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_m$ – ЛНеЗ система $\subset V_m(\mathbb{R})$.* ***Тогда*** *$\exists$ ортонормированная система векторов $\boldsymbol{e}'_1,\dots,\boldsymbol{e}'_m$ такая, что $L_i = \langle \boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_i\rangle$ и $L'_i = \langle \boldsymbol{e}'_1,\dots,\boldsymbol{e}'_i\rangle$ совпадают при $i = 1,2,\dots,m \leqslant n$.*

$\triangle$. Пусть построена система для k векторов. Найдём $\boldsymbol{e}_{k+1}$. Верно, что $L_{k+1} = \langle \boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{v}\rangle$, где

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_{k+1} - \sum \lambda_i \boldsymbol{e}'_i$$

с произвольными λ. Подберём их так, чтобы $\boldsymbol{v} \perp L'_k$. Для этого необходимо и достаточно условий

$$0 = (\boldsymbol{v}|\boldsymbol{e}'_j) = (\boldsymbol{e}_{k+1}|\boldsymbol{e}'_j) - \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{e}'_i|\boldsymbol{e}_j\right) = (\boldsymbol{e}_{k+1}|\boldsymbol{e}'_j) - \lambda_j, \qquad j = 1,\dots,k.$$

Таким образом, при $\lambda_j = (\boldsymbol{e}_{k+1}|\boldsymbol{e}'_j)$ получаем вектор $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, ортогональный к L'_k. Полагая $\boldsymbol{e}'_{k+1} = \mu\boldsymbol{v}$ придём к ортонормированной системе. $\square$

Как следствие, всякая ортонормированная система векторов V дополняема до ортонормированного базиса.

Thr 5.2. ***Пусть*** *L – подпространство конечномерного евклидова пространства V, $L^\perp$ – его ортогональное дополнение.* ***Тогда***

$$V = L \oplus L^\perp, \qquad L^{\perp\perp} = L. \tag{4}$$

$\triangle$. Возьмем в L какой-нибудь ортонормированный базис $(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_m)$. Пусть $\boldsymbol{w} \in V$. Рассмотрим вектор

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} - \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{w}|\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i.$$

Так как $(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{e}_j) - \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{w}|\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{w}|\boldsymbol{e}_j) - (\boldsymbol{w}|\boldsymbol{e}_j)\cdot 1 = 0 \ \ \forall j \leqslant n$. Получается $\boldsymbol{v}$ ортогонален L. Это значит, что $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{w}|\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i \in L$ и $\boldsymbol{v} \in L^\perp$. Итак, $V = L + L^\perp$.

Пусть $\boldsymbol{x} \in L \cap L^\perp$. Так как $\boldsymbol{x} \in L$, то $(\boldsymbol{x}|L^\perp) = 0$. Но и $\boldsymbol{x} \in L^\perp$, так что $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = 0$.

Бонус. Из разложения $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ легко получить, что $L^{\perp\perp} = L$. $\square$

5.1.2 Изоморфизмы

Thr 5.3. *Любые евклидовы пространства V, V' одинаковой конечной размерности изоморфны. Существует изоморфизма $f\colon V \to V'$, сохраняющий скалярное произведение, т.е.*

$$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))' \tag{5}$$

$\triangle$. Достаточно рассмотреть два ОНБ в V и V'. Соответсвие

$$f\colon \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n \quad \mapsto \quad \boldsymbol{x}' = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}'_n,$$

очевидно, биективно. По аксиомам проверяем, что f – изоморфизм. Далее вспоминаем, как выглядит в ОНБ скалярное произведение и успех. $\square$

Рассмотрим пространство V^*. Очевидно, что отображение $\boldsymbol{x} \mapsto (\boldsymbol{v}|\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{v} \in V$ определяет линейную форму

$$\Phi_{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{v}|*)\colon V \to \mathbb{R},$$

т.е. $(\boldsymbol{v}|*) \in V^*$.

Thr 5.4. *Отображение $\Phi\colon \boldsymbol{v} \to (\boldsymbol{v}|*) \equiv \Phi_v$ – естественный изоморфизм V и V^*. При этом Φ ОНБ V отождествляется с* ***дуальным*** *к нему базисом $f_1, \ldots, f_n$ пространства V^*.*

$\triangle$. Так как скалярное произведние $(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{x})$ линейно по $\boldsymbol{v}$, то отображение Φ линейно.

Далее, $\operatorname{Ker}\Phi = \boldsymbol{0}$, поскольку $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}\Phi \implies (\boldsymbol{v}|\boldsymbol{x}) = 0\ \forall \boldsymbol{x} \in V$ и $(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}) = 0$.

Как всякий элемент пространства V^*, линейная форма $(\boldsymbol{v}|*)$ линейно выражается через двойственный базис.

$$\Phi_{\boldsymbol{e}_i} = (\boldsymbol{e}_i|*) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e^j, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Так как $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ – ОНБ, то

$$\boxed{a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}e^k\boldsymbol{e}_j = (\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}},$$

откуда

$$(\boldsymbol{e}_i|*) = e^i.$$

Из этого следует сюръективность Φ. $\square$

5.1.3 Ортогональные матрицы

Посмотри на переход от одного ОНБ к другому. Запишем

$$\boldsymbol{e}_j = a_j\boldsymbol{e}_1 + a_{2j}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{nj}\boldsymbol{e}_n, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

мы получаем матрицу перехода $A = (a_{ij})$, в k-м столбце которой стоят координаты вектора $\boldsymbol{e}'_k$ относительно базиса $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. Из ортонормаированности получим:

$$\delta_{ij} = (\boldsymbol{e}'_i|\boldsymbol{e}'_j) = \left(\sum_k a_{ki}\boldsymbol{e}_k \middle| \sum_l a_{lj}\boldsymbol{e}_l\right) = \sum_{k,l} a_{ki}a_{lj}(\boldsymbol{e}_k|\boldsymbol{e}_l) = \sum_k a_{ki}a_{kj}.$$

Итак,

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \ldots + a_{ni}a_{nj} = \begin{cases} 0 \text{ при } i = j \\ 1 \text{ при } i \neq j \end{cases} \tag{6}$$

Или, кратко, запишем в виде

$$A^{\mathrm{T}} \cdot A = E. \tag{7}$$

Def 5.6. Квадратная матрица, удоволетворяющая одному из вышеприведенных условий (6) или (7), называется *ортогональной*. Множество всех ортогональных матриц порядка n обозначается $O(n)$.

Thr 5.5. *Матрица перехода от одного ОНБ к другому ортогональна, всякая ортогональная матрица может быть матрицей такого перехода.*

5.2 Эрмитовы векторные пространства

5.2.1 Эрмитовы формы

Пусть отныне $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, V – линейное пространство над $\mathbb{F}$.

Def 5.7. $b\colon V \times V \to \mathbb{F}$ — **полуторалинейная форма**, если она:

1) Линейная по первому аргументу: $\begin{cases} b(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) \\ \forall \lambda \in \mathbb{C}:\ b(\lambda \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \lambda b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \end{cases}$

2) Сопряженно линейная по второму аргументу: $\begin{cases} b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2) \\ \forall \lambda \in \mathbb{C}:\ b(\boldsymbol{u}, \lambda \boldsymbol{v}) = \overline{\lambda} b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \end{cases}$

Def 5.8. Матрица полуторалинейной формы в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ — это $b \underset{e}{\longleftrightarrow} B = (b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j))$.

Если $\boldsymbol{u} \underset{e}{\longleftrightarrow} x$, $\boldsymbol{v} \underset{e}{\longleftrightarrow} y$, то $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = x^T B \overline{y}$.

Thr 5.6. *Пространство полуторалинейных форм $S(V) \cong M_{n\times n}(\mathbb{C})$). Переход: $e' = eS$, $B' = S^T B \overline{S}$.*

Доказательство. $|B'| = |S^T| \cdot |B| \cdot |\overline{S}| = |B| \cdot |\det S|^2$ □

Con 5.1. $\operatorname{rg} B (= \operatorname{rg} b)$ *и* $\arg \det B$ *не зависят от выбора базиса.*

Def 5.9. Пусть $b \in S(V)$. b называется **эрмитовой формой**, если $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \overline{b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})}$.

Lem 5.1. *Пусть $S(V) \ni b \underset{e}{\longleftrightarrow} B$. Тогда b – эрмитова $\iff B^T = \overline{B}$.*

Def 5.10. $B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ — **эрмитова**, если $B = \overline{B^T}$. $B^* = \overline{B^T}$ — **эрмитово сопряженной** к B.

Def 5.11. Пусть b – эрмитова форма на V. Тогда $h\colon V \to \mathbb{C}$, $h(\boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ — **эрмитова квадратичная форма** соответствующая b. (b полярна к h)

Lem 5.2. *Если b – эрмитова форма, то 1) $b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}$; 2) $b \underset{e}{\longleftrightarrow} B : |B| \in \mathbb{R}$. Следствие: h принимает значения лишь из $\mathbb{R}$.*

Lem 5.3. *Если $b_1 \neq b_2$ – эрмитовы формы, то соответствующие $h_1 \neq h_2$.*

△. Восстановим b по h: $h(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = h(\boldsymbol{u}) + h(\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = h(\boldsymbol{u}) + h(\boldsymbol{v}) + 2\operatorname{Re}(b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) \Rightarrow$
$\operatorname{Re}(b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = [h(\boldsymbol{u}, +\boldsymbol{v}) - h(\boldsymbol{u}) - h(\boldsymbol{v})]/2$,
$b(\boldsymbol{u}, i\boldsymbol{v}) = -ib(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \Rightarrow \operatorname{Im}(b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = \operatorname{Re}(-ib(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = \operatorname{Re}(b(\boldsymbol{u}, i\boldsymbol{v})) = [h(\boldsymbol{u}, +i\boldsymbol{v}) - h(\boldsymbol{u}) - h(i\boldsymbol{v})]/2$
Следствие: Соответствие между эрмитовыми и квадратичными эрмитовыми формами биективно и $\mathbb{R}$-линейно □

Значит линейные вещественные пространства эрмитовых и эрмитовых квадратичных форм изоморфны.

Пусть b – эрмитова форма. $\operatorname{Ker} b = \{\boldsymbol{u} \colon \forall \boldsymbol{v} \in V\ b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0\} = \{\boldsymbol{v} \colon \forall \boldsymbol{u} \in V\ b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0\}$.
$\dim U^\perp \geqslant \dim V - \dim U$, если b – невырождена $\Longrightarrow \dim U^\perp = \dim V - \dim U$.
$V = U \oplus U^\perp \iff U$ – невырождено относительно b (то есть $b\big|_U$ – невырождена).

Thr 5.7. *Пусть h – эрмитова квадратичная форма, тогда $\exists e:\ h \underset{e}{\longleftrightarrow} B$ – диагональна с $\{0, \pm 1\}$*

△. 1)Приведём к диагональному виду индукцией: $h(\boldsymbol{e}_1) \neq 0 :\ \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle$ – невырождена относительно $b \Longrightarrow$
2) $V = \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle^\perp$ применим индукцию: $h \underset{e}{\longleftrightarrow} \operatorname{diag}(\alpha_i)$.
3) Нормируем векторы: $\boldsymbol{e}_i = \frac{\boldsymbol{e}_i}{\sqrt{|h(\boldsymbol{e}_i)|}}$, если $h(\boldsymbol{e}_1) \neq 0$. □

Def 5.12. Пусть h – эрмитова квадратичная форма. h — **положительно (полу)определена**, если $\forall v:\ h(\boldsymbol{v}) > 0 (\geqslant)$. Аналогично с **отрицательной** (полу)определенностью.

Def 5.13. Положительный/отрицательный индекс инерции $\sigma_+(h), \sigma_-(h)$ — как и раньше.
Закон инерции: В нормальном виде формы b ровно $\sigma_+(h)$ единиц и $\sigma_-(h)$ минус единиц.

Thr 5.8 (Метод Якоби и Критерий Сильвестра)**.** *АНАЛОГИЧНО СИММЕТРИЧНЫМ*

5.2.2 Эрмитово пространство

Def 5.14. Конечномерное V над $\mathbb{C}$, с положительно определенной эрмитовой формой $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) := f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, называется **эрмитовым**(унитарным) пространством.

Комплексное число $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — **скалярное произведение**(внутреннее) векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.

В новых обозначениях теперь имеем: $\begin{matrix} (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}, & (\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}) = \alpha(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}) + \beta(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}) \\ (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) \geqslant 0; & (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = 0 \text{ лишь при } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \end{matrix}$

Def 5.15. Определим **Длину вектора** $\boldsymbol{v} \in V$ — $||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v})}$.

С помощью длин можно выразить: $2(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}) = ||\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}||^2 + i||\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}||^2 - (1+i)\{||\boldsymbol{u}||^2 + ||\boldsymbol{v}||^2\}$

Эрмитово пространство позволяет проводить множество параллелей с евклидовым, будь то свойство нормы: $||\lambda\boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\lambda\boldsymbol{x}|\lambda\boldsymbol{x})} = \sqrt{|\lambda|^2(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x})} = |\lambda|\sqrt{(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x})}$. Также можно записать...

Thr 5.9 (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца)**.** $|(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})| \leqslant ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||$. *(Равенство при $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y}$)*

$\triangle$. 1)$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = |(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}|e^{i\varphi})$, $\varphi \in \mathbb{R}$, и $\forall t \in \mathbb{R}$ выполняется: $||\boldsymbol{x}||^2t^2 + [(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})t^{-i\varphi} + \overline{(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})}e^{i\varphi}]t + ||\boldsymbol{y}||^2 = (\boldsymbol{x}t + \boldsymbol{y}e^{i\varphi}|\boldsymbol{x}t + \boldsymbol{y}e^{i\varphi}) \geqslant 0$

2) Так как $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})e^{-i\varphi} = |(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})| = \overline{(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})e^{i\varphi}}$, то (1) переписывается: $||\boldsymbol{x}||^2t^2 + 2|(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})|t + ||\boldsymbol{y}||^2 \geqslant 0$. $\square$

Как следствие из предыдущей теоремы можно сразу получить неравенство треугольника:

$$||\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y}|| \leqslant ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}|| \qquad ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}|| \leqslant ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| + ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}||$$

Также с помощью доказанного неравенство можно утверждать, что существует единственный угол $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, для которого: $\cos\varphi = \frac{|(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})|}{||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||}$.

5.2.3 Ортогональность

Def 5.16. Набор $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ эрмитова пространства называется **ортонормированным**, если $(\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$. Этот набор векторов ЛНеЗ и дополняем до ортонормированного базиса пространства V(метод Грама-Шмидта).

Thr 5.10. $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ *– ортонормированный базис эрмитова векторного пространства* $(V, (*|*))$.

i) $\boldsymbol{x} = \sum\limits_i (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i, \forall \boldsymbol{x} \in V$.

ii) $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \sum\limits_i (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{y}), \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ *(Равенство Персеваля)*

iii) $\boldsymbol{x} \in V \Longrightarrow ||\boldsymbol{x}||^2 = \sum\limits_i |(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_i)|^2$.

В теореме выше для $\forall \boldsymbol{x} \in V: \ \boldsymbol{x} = \sum\limits_i x_i\boldsymbol{e}_i$, ввиду линейности скалярного произведения по первому аргументу: $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_j) = \left(\sum\limits_i x_i\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_j\right) = \sum\limits_i x_i(\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_j) = x_j$

Таким образом получена линейная форма $f_i = (*|\boldsymbol{e}_j) \colon V \to \mathbb{C}$, сопоставляющая каждому $\boldsymbol{x} = \sum\limits_i x_i\boldsymbol{e}_i$ его j-ю координату относительно $(\boldsymbol{e}_i)$. Теперь если взять ещё такой $\boldsymbol{y} = \sum\limits_j y_j\boldsymbol{e}_j$, то

$$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \sum_{i,j} x_i\overline{y_j}(\boldsymbol{e}_i|e_j) = x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n}$$

Def 5.17. Пусть f – линейная форма на комплексном векторном пространстве V. **Сопряженной** к f (полу)линейной формой на V называется $\overline{f} \colon V \to \mathbb{C}$, которая сопряженно линейна по своему аргументу.

Если $(V, (*|*))$ – эрмитово пространство, то $f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a})$ для некоторого однозначно определенного вектора $\boldsymbol{a} = \sum\limits_i \overline{f}(\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i$. Тогда для любого $\boldsymbol{x}$ будем иметь соотношение:

$$(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{x}) = \sum_i \left(\boldsymbol{e}_i \middle| \sum_j x_j \boldsymbol{e}_j\right) = \sum_i \overline{f}(\boldsymbol{e}_i)\overline{x_i} = \overline{f}(\boldsymbol{x}) \qquad \overline{f}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}|\boldsymbol{x}) = \overline{(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a})} = \overline{f(\boldsymbol{x})}$$

5.2.4 Нормированные векторные пространства

Def 5.18. Пусть E – множество точек и $d\colon E \times E \to \setminus$ – отображение, сопоставляющем любым двум точкам $u, v \in E$ неотрицательное $d(u, v) \in \mathbb{R}$(aka расстояние) и обладающее следующими свойствами:

i) $d(u, v) = d(v, u)$ (симметрия);

ii) $d(u, v) = 0 \Longleftrightarrow u = v$;

iii) $d(u, w) \leqslant d(u, v) + d(v, w)$ (неравенство треугольника)

Функция d с такими свойствами называется — **метрикой**, а пара (E, d) — **метрическое пространство**. Ещё как в матане можно определить открытый шар, замкнутый шар и сферу и прочие радости жизни.

Итак, V – вещественное или комплексное пространство с метрикой d. Особо важным является случай, когда d удовлетворяет двум дополнительным условиям: а)инвариантность относительно сдвига; б) умножение на скаляр λ увеличивает расстояние в λ раз.

Def 5.19. Назовём **нормой** вектора $\boldsymbol{x} \in V$ относительно метрики d с (а,б) число $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) =: ||x||$.

Нужно убедиться, что выполняются следующие свойства нормы:

1. $||\boldsymbol{0}|| = 0$; $||\boldsymbol{x}|| > 0$, если $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$;
2. $||\lambda\boldsymbol{x}|| = |\lambda|||\boldsymbol{x}||$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{x} \in V$;
3. $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| \leqslant ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}|| \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.

Def 5.20. V, снабженное функцией нормы $||*||\colon V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям выше называется **нормированным**. Полное нормированное векторное пространство называется **банаховым**.

5.3 Связь между линейными операторами и θ-линейными формами

Положим $\theta = 2$, если V – евклидово пространство и $\theta = 3/2$, если V – эрмитово.

Будем считать теперь V евклидовым(эрмитовым) пространством над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ со скалярным произведением (*,*), φ – линейный оператор на V.

Определим: $f_\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\varphi(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v})$, где f_φ – θ-линейная форма, $f_\varphi \in \mathcal{B}_\theta(V)$.

Lem 5.4. *Пусть e – ОНБ в V, $\mathcal{L}(V) \ni \varphi \underset{e}{\longleftrightarrow} A$, $f_\varphi \underset{e}{\longleftrightarrow} B \Longrightarrow B = A^T$*

$\triangle$. Если $\boldsymbol{u} \underset{e}{\longleftrightarrow} x$, $\boldsymbol{v} \underset{e}{\longleftrightarrow} y$, то $\varphi(\boldsymbol{u}) = Ax$, $f_\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\varphi(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}) = (Ax)^T\overline{y} = x^T Ay$. И есть $f_\varphi \underset{e}{\longleftrightarrow} A^T$. $\square$

Как следствие получаем, что сопоставление $\varphi \longleftrightarrow f_\varphi$ – изоморфизм $\mathcal{L}(V) \longleftrightarrow \mathcal{B}_\theta(V)$

Thr 5.11. *Пусть V – векторное пространство со скалярным произведением $(*|*)$. Тогда любая из формул: $f_\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}|\mathcal{A}^*\boldsymbol{y})$ устанавливает биективное соответствие между θ-линейными формами и линейными операторами на V. А вместе определяют линейный оператор $\mathcal{A}^*\colon V \to V$, сопряженный к $\mathcal{A}$.*

В ОНБ матрица оператора $\mathcal{A}^*$ получается из матрица оператора $\mathcal{A}$ путём транспонирования и комплексного сопряжения.

Выпишем свойства отображения $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^*$: $\mathcal{A} + \mathcal{B}^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$, $(\alpha\mathcal{A})^* = \bar{\alpha}\mathcal{A}^*$, $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$, $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$.

5.4 Типы линейных операторов

Все линейные операторы на V со скалярным произведением разбиваются на классы в зависимости от поведения по отношению к операции "*".

Def 5.21. Линейный оператор $\mathcal{A}$ называется **эрмитовым**(самосопряженным), если $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. В евклидовом случае его ещё называют симметричным.

Самосопряженность оператора $\mathcal{A}$ эквивалентна условию эрмитовости θ-линейной формы $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$. Условие самосопряженности записывается в виде: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}|\mathcal{A}\boldsymbol{y})$, а условие эрмитовости формы $f_\mathcal{A}$ – в виде: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = f_\mathcal{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \overline{f_\mathcal{A}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})} = \overline{(\mathcal{A}\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}$.

Так как $(*|*)$ – эрмитова форма, то $\overline{(\mathcal{A}\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})} = (\boldsymbol{x}|\mathcal{A}\boldsymbol{y})$.

Def 5.22. Линейный оператор $\mathcal{A}$ — **косоэрмитов**, если $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$.

Так как $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V) : \mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$, то оператор $\mathcal{A} + \mathcal{A}^*$ эрмитов, а $\mathcal{A} - \mathcal{A}^*$ косоэрмитов.

Thr 5.12. *Каждый линейный оператор $\mathcal{Z}$ на эрмитовом пространстве записывается в виде: $\mathcal{Z} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, где $\mathcal{A}$ – эрмитов, а $\mathcal{B}$ – косоэрмитов оператор. Кроме того, $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + i\mathcal{Y}$, где $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ – эрмитовы линейные операторы.*

Thr 5.13. *Произведение $\mathcal{AB}$ эрмитовых операторов является эрмитовым $\Longleftrightarrow \mathcal{AB} = \mathcal{BA}$*

Thr 5.14 (Критерий тривиальности $\mathcal{A}$)**.** *Пусть $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = 0$, $\forall \boldsymbol{x} \in V$, и пусть выполнено одно из условий: 1) V – эрмитово пространство; 2) V –евклидово пространство и $\mathcal{A}$ – симметричный оператор.* ***Тогда*** *$\mathcal{A} = /$.*

$\triangle$. **1)** Из двух тождеств с нулевыми (по предположению) правыми частями приходим к системе двух линейных однородных уравнений:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) + (\mathcal{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}) &= (\mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - (\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) - (\mathcal{A}\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y}),\\ (\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) - (\mathcal{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}) &= -i(\mathcal{A}(i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + i(\mathcal{A}(i\boldsymbol{x})|i\boldsymbol{x}) + i(\mathcal{A}\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

Из равенства нулю правых частей получаем: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = 0$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, это эквивалентно $\mathcal{A} = \mathcal{O}$.

2) Применяем условие симметричности к верхнему тождеству в пункте (1). $\square$

Def 5.23. Линейный оператор $\mathcal{A}$ на векторном пространстве со скалярным произведением называется **унитарным** (в евклидовом – ортогональным), если $\mathcal{A}^* \cdot \mathcal{A} = \mathcal{E} = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^*$.

Def 5.24. Линейный оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$, сохраняющий метрику, то есть такой, что $||\mathcal{A}\boldsymbol{x} - \mathcal{A}\boldsymbol{y}|| = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, называется **изометрией**.

Так как $\mathcal{A}\boldsymbol{x} - \mathcal{A}\boldsymbol{y} = \mathcal{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$, то очевидно, $\mathcal{A}$ – изометрия на V тогда, когда $||\mathcal{A}\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{x}||$, $\forall \boldsymbol{x} \in V$. Далее,

$$||\mathcal{A}\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{x}|| \Longleftrightarrow (\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\mathcal{A}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) \Longleftrightarrow (\mathcal{A}^*\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) \Longrightarrow ((\mathcal{A}^*\mathcal{A} - \mathcal{E})\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = 0, \ \forall \boldsymbol{x} \in V.$$

Оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A} - \mathcal{E}$ – самосопряжён, поэтому, согласно последней теореме в эрмитовом(евклидовом) пространстве из только что записанного тождества вытекает, что $\mathcal{A}^*\mathcal{A} - \mathcal{E} = \mathcal{O}$. Откуда получаем:

Thr 5.15. *Унитарные линейные операторы на векторном пространстве V с метрикой, и только они, являются изометриями на V.*

5.4.1 Канонический вид эрмитовых операторов

Lem 5.5. *Собственные значения эрмитова оператора вещественны.*

$\triangle$. Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ – эрмитов оператор, λ – его собственное значение, отвечающее собственному вектору $\boldsymbol{e} \in V$. По определению:

$$\lambda(\boldsymbol{e}|\boldsymbol{e}) = (\lambda\boldsymbol{e}|\boldsymbol{e}) = (\mathcal{A}\boldsymbol{e}|\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e}|\mathcal{A}^*\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e}|\mathcal{A}\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e}|\lambda\boldsymbol{e}) = \overline{\lambda}(\boldsymbol{e}|\boldsymbol{e}), \quad \text{так как } (\boldsymbol{e}|\boldsymbol{e}) \neq 0, \Rightarrow \overline{\lambda} = \lambda.$$

$\square$

Lem 5.6. *У каждого симметричного линейного оператора $\mathcal{A}$ существует собственный вектор.*

$\triangle$. 1) $\mathcal{A}$ обладает одномерным или двумерным собственным подпространством. Существование одномерного инвариантного подпространства совпадает с утверждением леммы.

2) Рассмотрим L – двумерное инвариантное подпространство. Оператор $\mathcal{A}$ индуцирует на L симметричный линейный оператор $\mathcal{A}_L$.

3) Выберем в L ОНБ $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$. Матрице оператора $\mathcal{A}_L = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, с $\chi(t) = t^2 - (a-d)t + (ad - b^2)$.

4) $D_\chi = (a-d)^2 + 4b^2 \geqslant 0$,так что $\chi(t)$ имеет вещественный корень, а A – собственный вектор. $\square$

Lem 5.7. *Пусть $\mathcal{A}$ – самосопряженный линейный оператор на векторном пространстве со скалярным произведением $(*|*)$, L – подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$. Тогда ортогональное дополнение $L^\perp$ к L также инвариантно относительно $\mathcal{A}$.*

Thr 5.16. *Существует ортонормированный базис пространства V со скалярным произведением, в котором матрице самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ диагональна, причём Spec$(\mathcal{A})$ вещественный.*

$\triangle$. 1) По первым двум леммам раздела у $\mathcal{A}$ имеется собственный вектор $||\boldsymbol{e}_1|| = 1$ с $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.
2) $\dim\langle \boldsymbol{e}_1 \rangle^\perp = \dim V - 1$ и по последней лемме инвариантно относительно $\mathcal{A}$.
3) Рассмотрим $\mathcal{A}\big|_{V'}$ находим собственный вектор $\boldsymbol{e}_2$: $\mathcal{A}\boldsymbol{e}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{e}_2$, $||\boldsymbol{e}_2|| = 1$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.
4) $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ инвариантна относительно $\mathcal{A}$, поэтому инвариантно $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle^\perp$.
5) Рассуждая так и дальше по индукции найдём требуемые $\dim V$ взаимно ортогональных векторов. $\square$

5.4.2 Приведение пары квадратичных форм к каноническому виду

Thr 5.17. *Пусть на векторном пространстве V размерности n над $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ заданы две эрмитовы квадратичные формы $q(\boldsymbol{x})$ и $r(\boldsymbol{x})$, причём формы $r(\boldsymbol{x})$ положительно определена.*

Тогда в V существует базис, в котором обе формы записываются в каноническом виде.

$\triangle$. Пусть $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ – эрмитова θ-линейнвя форма, отвечающая квадратичной форме $r(\boldsymbol{x})$. Определим на V скалярное произведение, полагая

$$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) := g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

В V с указанной метрикой найдётся ОНБ $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, в котором $q(\boldsymbol{x})$ принимает канонический вид. Итак, в базисе $(\boldsymbol{e}_i)$ обе квадратничные формы приняли канонический вид. $\square$

5.4.3 Нормальные операторы

Эрмитовы и унитарные операторы входят в естественный, более широкий класс, диагонализируемых операторов.

Def 5.25. Пусть V – эрмитово пространство. Линейный оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$, обладающий свойством

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^* = \mathcal{A}^* \cdot \mathcal{A},$$

называется *нормальным.* Его матрица в любом базисе также называется нормальной.

Оператор $\mathcal{A}$ нормален вместе с $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$. Из нормальности $\mathcal{A}$ вытекает, что

$$\|\mathcal{A}\boldsymbol{x}\|^2 = \|\mathcal{A}^*\boldsymbol{x}\|^2.$$

Заменяя $\mathcal{A}$ на $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$, получаем, что

$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \iff \mathcal{A}^* = \overline{\lambda}\boldsymbol{x} \tag{8}$$

Определение нормального оператора переностися на бесконечномерные гильбертовы пространства и находит там многочисленны применения. Постараемся опичать класс диагонализируемых операторов на эрмитовом пространстве.

Thr 5.18. *Эквивалентны следующие условия:*
а) $\mathcal{A}\colon V \to V$ – оператор, диагонализируемый в ортонормированном базисе пространства V;
б) $\mathcal{A}$ – нормальный оператор.

$\triangle$. Докажем, что б) $\Longrightarrow$ а). Выберем собственное значение λ оператора $\mathcal{A}$ и положим $V^\lambda = \{\boldsymbol{x} \in V \mid \mathcal{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$. Из (8) следует, что

$$\mathcal{A}^*(V^\lambda) \subseteq V^\lambda.$$

Так как $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$, то изсимметрии подпространство $(V^\lambda)^\perp$ также $\mathcal{A}^*$-инвариантно. Ограничения операторов коммутируют. Применяя индукцию по размерности $n = \dim V$, мы можем считать, что $\mathcal{A}$ диагонализируется. Для V^λ это верно по определению, а поскольку $V = V^\lambda \oplus \left(V^\lambda\right)^\perp$, то всё доказано. $\square$

Thr 5.19. *Каждому нормалному оператору $\mathcal{A}$ на конечномерном пространств V отвечают попарно различные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, $1 \leqslant m \leqslant n = \dim V$, и взаимно ортогональные проекторы $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m$, отличные от $\mathcal{O}$ и такие, что:*

а) $\sum_j \mathcal{P}_j = \mathcal{E}$; б) $\sum_j \lambda_j \mathcal{P}_j = \mathcal{A}$ – спектральное разложение оператора $\mathcal{A}$, так что $\lambda_j \in Spec(\mathcal{A})$; в) разложение б) единственно; г) сущесвтуют многочлены $f_1(t), \dots, f_m(t)$, такие, что $f_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$ и $f_i(\mathcal{A}) = \mathcal{P}_i$.

$\triangle$. потом :($\square$

Lem 5.8. *Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – коммутирующие операторы на $V^\mathbb{C}$. Тогда $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют общий собственный вектор.*

$\triangle$. ... $\square$

Thr 5.20. *Два эрмитовых оператора $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ или две изометрии $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ на n-мерном эрмитовом пространстве V одновременно приводятся к диагональному виду в некотором ортонормированном базисе тогда, и только тогда, когда они перестановочны.*

$\triangle$. Из диагонализируемости в некотором базисе следует перестановочность операторов.

Обратно, пусть $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$. Тогда у них есть общий собственный вектор $\boldsymbol{e}_1$. Подпространство $W = \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle^\perp$ размерности $n-1$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$ и отсносительно $\mathcal{B}$ в силу их эрмитовости или унитарности. Ограничения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ на W будут перестановочными эрмитовыми (соответсвенно унитарными) операторами. Индукция по размерности приводит к явной конструкции ОНБ, в котором $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ запишутся в диагональной форме. $\square$

Стоит заметить, что перестановочность эрмитовых операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ эквивалентна эрмитовости оператора $\mathcal{AB}$.

5.4.4 Положительно определенные операторы

Def 5.26. Эрмитов (или линейный симметричный) оператор $\mathcal{A}$ называется *положительно определенным*, если $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) > 0$ для $\forall x \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ из V.

Thr 5.21. *Пусть V – пространство со скалярном произведением $(*|*)$. Следующие свойства линейных операторов на V эквиваентны:*

1) $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$, $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$;
2) $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{C}^*$;
3) $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) \geqslant 0$.

5.4.5 Полярное разложение

Параллелизм между линейными операторами и комплексными числами простирается дальше, вплоть до $z = |z|e^{i\varphi} = \sqrt{z\bar{z}}e^{i\varphi}$.

Thr 5.22. *Всякий невырожденный линейный оператор $\mathcal{A}$ на эрмитовом (или евклидовом) векторном пространстве V может быть представлен в виде*

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{Q}, \tag{9}$$

где $\mathcal{P}$ – положительно определенный оператор, а $\mathcal{Q}$ – изометрия (унитарный или ортогональный оператор). Разложение единственно и называется полярным разложением оператора $\mathcal{A}$.

$\triangle$. Во-первых $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{P}^2$, где $\mathcal{P}$ – положительно определенный оператор, являющийся единственным квадратным корнем из $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Очевидно, что $\mathcal{P}$ – обратим. Положим $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}$, получим выражение (9).

Убедимся, что $\mathcal{Q}$ – изометрия. Действительно, так как $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$ и $\mathcal{P}\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{E} = \mathcal{E}^* \iff \left(\mathcal{P}^{-1}\right)^* = \left(\mathcal{P}^*\right)^{-1} = \mathcal{P}^{-1}$, то

$$\mathcal{Q}\mathcal{Q}^* = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{A}^*\left(\mathcal{P}^{-1}\right)^* = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}^2\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{E}.$$

Если предположить, что разложения два, то $\mathcal{Q}^*\mathcal{P} = \mathcal{Q}_1^*\mathcal{P}_1$. Поэтому $\mathcal{P}\mathcal{Q}\cdot\mathcal{Q}^*\mathcal{P} =$ $\square$

Квадрики

5.4.6 Квадратичная функция в афинном пространстве

Def 5.27. Положим $Q(\dot{0} + \boldsymbol{x}) = q(\boldsymbol{x}) = 2l(\boldsymbol{x}) + \varphi_0$

Def 5.28. Точку $\dot{p} \in A$ назовём *центром* (или *центральной точкой*) для квадратичной функции Q, если

$$Q(\dot{p} + \boldsymbol{y}) = Q(\dot{p}) + q(\boldsymbol{y}) \qquad \forall \boldsymbol{y} \in V.$$

Thr 5.23. *Пусть Q – квадратичная функция ранга r на n-мерном аффинном пространве $\mathbb{A}$ над $\mathbb{F}$. Если множество $C(Q)$ пусто и, значит $r < n$, то путем надлежащего выбора системы координат $\{\dot{o}; \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ функция Q приводистя к виду*

$$Q(\dot{0} + \boldsymbol{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_r \boldsymbol{x}_r^2 + 2x_{r+1}$$

с ненулевыми скалярами $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$; в этом случае $\operatorname{Ker} q$ *есть подпространство решений системы $x_1 = \ldots = x_r = 0$, где q – квадратичная форма, связанная с Q.*

Если Q центральна, то выбором надлежащей системы координат с началом в центральной точке $\dot{o}$ её можно привести к виду

$$Q(\dot{o} + \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_r x_r^2 + \varphi_0;$$

в этом случае $Q(]doto') = \varphi_0 \ \forall \dot{o}' \in C(Q)$. Вышеупомянутые функции аффинно неэквивалентны.

Как следствие, над $\mathbb{R}$ всякая квадратичная функция Q может быть приведена, причём единственым образом, к одному из канонических видов:

$$Q(\dot{o} + \boldsymbol{x}) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 2x_{r+1}; Q(\dot{o} + \boldsymbol{x}) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + \varphi_0. \tag{10}$$

Или, что эквивалентно, *две квадратичные функции аффинно эквиваленты тогда, и только тогда, когда, когда они имеют одинковые ранги и одинаковые сигнатуры и когда они обе либо нецентралььн, либо центральны с одинаковыми значенями на соответсвующих точках.*

5.4.7 Квадрики в аффинном пространстве

Def 5.29. Каждой квадратичной функции Q на $\mathbb{A}$ ставится в соотвествие пространственная конфигурация точек S_Q, называемая *квадрикой* (или *гиперповерхностью второго порядка*) – "геометрическое место"всех точек $\dot{p} \in \mathbb{A} : Q(\dot{p}) = 0$.

Любые две не гиперплоскости равны с точностью до множителя. Также понимаем, что такое центр квадрики.

Thr 5.24 (Канонические типы квадрик). *Случай центральной квадрикис центром симметрии в начале координат исчерпывается типами*

$I_{s,r}\colon x_1^2 + \ldots + x_2^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 1, \quad 0 < s \leqslant r; I'_{s,r}\colon x_1^2 + \ldots + x_2^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0, \quad r/2 \leqslant s \leqslant r.$

Случай нецентральной квадрики исчерпывается типами

$$II'_{s,r}\colon x_1^2 + \ldots + x_2^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = -2x_{r+1}, \qquad r/2 \leqslant s \leqslant r.$$

Def 5.30. Квадрика типа $I_{n,n}$ называется *эллипсоидом*, типа $I_{s,n}, s < n$, – *гиперболидом*, типа $II_{n-1,n-1}$ – *эллиптическим парабалоидом*, типа $II_{s,n-1}$ – *гиперболическим параболоидом*. Все эти квадрики *невырожденные*.

Квадрики типа $I_{s,r}, I'_{s,r}$ при $r < n$ и типа $II_{s,r}$ при $r < n-1$ называются *цилиндро*, а квадрики типа $I'_{s,n}$ – *конусами*. Это *вырожденные* квадрики.

6 Двойственное пространство

6.1 Линейные функции

Def 6.1. $f\colon V \to \varkappa : f(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{y})$ – **линейная функция** (*форма/функционал*) на V.

Выберем в V $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, тогда для $\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{e}_n$: $f(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 \beta_1 + \ldots + \lambda_n \beta_n$, где $f(\boldsymbol{e}_i) = \beta_i$. Базисные векторы и коэффициенты линейной формы при замене базиса меняются по одним и тем же формулам (*согласовано* aka *когредиентно*).

6.2 Двойственное пространство

Def 6.2. Относительно введенных $+$ и $\times$(на скаляры) линейные функции составляют векторное пространство $V^* = \mathcal{L}(V, F)$, **двойственное** (*сопряженное* или *дуальное*) к V.

При одновременном рассмотрении пространства и дуального к нему, векторы из V^* называют *ковариантными векторами*, а элементы из V – *контрвариантными векторами.*

Thr 6.1. $\dim_{\mathbb{F}} V = n$, ***тогда*** $\dim V^* = n$. *Для базисов в этих пространствах:*

$$(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \text{ – базис } V,\ (\boldsymbol{e}^1, \ldots, \boldsymbol{e}^n) \text{ – линейные функции: } e^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

$\triangle$. 1)В заданном базисе пространства V есть однозначное соответствие $\Phi\colon f \mapsto (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ – изоморфизм векторных пространств V^* и $\mathbb{F}^n$, $\dim V^* = \dim \mathbb{F}^n = n$.

2)Задав $\beta_j = 0$ для $j \neq i$, и $\beta_i = 1$, и положив $\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$, определим линейную функцию $e^i \in V^*$: $e^i \left(\sum \lambda_j \boldsymbol{e}_j \right) = \sum \lambda_j e^i(\boldsymbol{e}_j) = \sum \lambda_j \beta_j = \lambda_i$. $\square$

Def 6.3. Базис $(e^1, \ldots, e^n)$ пространства V^* – **двойственный** для данного $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ в V.

Условимся писать $f(\boldsymbol{x}) \rightsquigarrow (f, \boldsymbol{x})$, тем самым определяется отображение $V^* \times V \to \mathbb{F}$ линейное по каждому аргументу.

Отображения $V \times W \to \mathbb{F}$ с таким свойством принято называть **билинейным**, а также спариванием между пространствами V и W. Спаривание между V^* и V – **каноническое**.

6.3 Канонический изоморфизм

Thr 6.2. $\exists$ ***канонический изоморфизм:***
$\varepsilon\colon V \to V^{**} : \varepsilon(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_{\boldsymbol{x}},\ \varepsilon_{\boldsymbol{x}}(f) = f(\boldsymbol{x}),$ *для* $\boldsymbol{x} \in V,\ f \in V^*,\ \varepsilon_{\boldsymbol{x}} \in V^{**}$

$\triangle$. 1)Линейность: непосредственно $\varepsilon_{\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}}(f) = f(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y})$, то есть $\varepsilon(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}) = \alpha \varepsilon(\boldsymbol{x}) + \beta \varepsilon(\boldsymbol{y})$.

2)Биективность: выберем $V = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ и $V^* = \langle e^1, \ldots, e^n \rangle$. Тогда $\varepsilon_{\boldsymbol{e}_j}(e^i) = e^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$.

3) Апеллируя к (6.1): $V^{**} = \langle \varepsilon_{\boldsymbol{e}_1}, \ldots, \varepsilon_{\boldsymbol{e}_n} \rangle$, то есть двойственный к (e^i). Сюръективность и инъективность ε очевидны. Каноничность заключена в определении. $\square$

Def 6.4. Наличие естественного изоморфизма V и V^{**} наделяет их свойством – **рефлексивность**.

Отождествив пространства V и V^{**}, можно считать V пространством линейных функций на V^*. Тогда формулы спаривания: $x(f) = (f, x) = f(x)$. В частности, $\forall V^* :\ \exists!$ двойственный ему базис в V.

6.4 Критерий линейной независимости

Lem 6.1. *(i — номер строки, j — номер столбца)*

$$\left.\begin{array}{ll} \boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_m & \text{– линейно зависимые векторы из } V \\ f_1,\ldots,f_m & \text{– произвольные линейные функции на } V \end{array}\right\} \Rightarrow \det\left(f_i(\boldsymbol{a}_j)\right) = 0,\ 1 \leqslant i,j \leqslant m.$$

$\triangle$. 1) В силу ЛЗ выберем из всех $\boldsymbol{a}_m = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_{m-1}\boldsymbol{a}_{m-1}$.

2) В $\det(f_i(\boldsymbol{a}_j))$ вычтем из последнего столбца первый $\cdot\alpha_1$, потом второй и т.д.

3)Сам определитель не изменится, а на i-том месте последнего столбца будет стоять нуль по (1). $\square$

Lem 6.2. *Если $\langle f_1,\ldots,f_n\rangle = V^*$, **то** $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n \in V$ – независимы $\Longleftrightarrow \det\left(f_i(\boldsymbol{a}_j)\right) \neq 0,\ 1 \leqslant i,j \leqslant n$.*

$\triangle$. 1) по предыдущей лемме $\Rightarrow$.

2) $(\boldsymbol{a}_i)$ – ЛНеЗ, $V = \langle \boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n\rangle$. Обозначим $(\boldsymbol{e}_i)$ – базис в V, с двойственным из (f_i), а через α_{ij} – координаты $\boldsymbol{a}_j$ в этом базисе. Тогда получим матрицу перехода из таких α.

3) Матрица перехода по (1.4) обратима, а значит и $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$, но $\alpha_{ij} = f_i(\boldsymbol{a}_j)$, что и значит. $\square$

Thr 6.3. $(f_1,\ldots,f_n)$ – *базис V^*. Тогда ранг системы $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k \in V$ равен наибольшему порядку отличного от нуля определителя вида $\det\left(f_i(\boldsymbol{a}_j)\right)$, $1 \leqslant i = i_1,\ldots,i_m \leqslant n$; $1 \leqslant j = j_1,\ldots,j_m \leqslant k$.*

$\triangle$. 1) r – ранг $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k$. Любые $m > r$ векторов – ЛЗ, по лемме выше $\det = 0$ порядка $(m > r)$.

2) Остаётся док-ть, что $\exists \det \neq 0$ порядка r, для этого обозначим $\overline{f_i} := f_1\big|_U$ $(U = \langle \boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n\rangle)$.

3) Докажем, что $\langle\overline{f_1},\ldots,\overline{f_n}\rangle = U^*$:

а) $\langle\overline{f_1},\ldots,\overline{f_n}\rangle \subseteq U^*$ – очевидно;

б) $\tilde{f} \in U^*$, $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_r)$ – базис в U, а $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_r,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ его дополнение до V.

Возьмём $f \in V^*$, которая $f(\boldsymbol{e}_i) = \tilde{f}(\boldsymbol{e}_i)$, $i = 1,\ldots,r$, $f(\boldsymbol{e}_i) = 0$, $i = r+1,\ldots,n$.

Очевидно, что $\overline{f} = f\big|_U = \tilde{f}$, поскольку f и $\tilde{f}$ принимают одинаковые значения на базисных векторах U. $\Rightarrow \tilde{f} \in \langle\overline{f}_1,\ldots,\overline{f}_n\rangle$, то есть $U^* \subseteq \langle\overline{f}_1,\ldots,\overline{f}_n\rangle$

4) Выберем r ЛНеЗ векторов среди $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k$ и $\overline{f}_1,\ldots,\overline{f}_n$. Они составляют базисы в U, U^*, и по лемме выше: $\det\left(\overline{f}_i(\boldsymbol{a}_j)\right) \neq 0$, $i = i_1,\ldots,i_r$; $j = j_1,\ldots,j_r$, и $\overline{f}_i(\boldsymbol{a}_j) = f_i(\boldsymbol{a}_j)$. $\square$

7 Тензоры

7.1 Начала тензорного исчисления

7.1.1 Понятие о тензорах

Def 7.1 (Понятие тензора). Пусть $\mathbb{F}$ – поле, $V(\mathbb{F})$ - векторное пространство, V^* – сопряженное к V, p и q – целые числа $\geqslant 0$. Всякое $(p+q)$-линейное отображение

$$f\colon V^p \times (V^*)^q \to \mathbb{F} \tag{11}$$

называется **тензором на V типа** (p,q) и валентности (или ранга) $p+q$.

7.1.2 Произведение тензоров

Def 7.2. Пусть $f\colon V_1 \times \cdots \times V_r \to \mathbb{F}$, $g\colon W_1 \times \cdots \times W_s \to \mathbb{F}$. Под *тензорным произведением* f и g понимают отображение

$$f \otimes g\colon V_1 \times \cdots \times V_r \times W_1 \times \cdots \times W_s \to \mathbb{F}, \tag{12}$$

определенное формулой

$$(f \otimes g)(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_r;\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_s) = f(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_r)\cdot g(\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_s) \tag{13}$$

p/q	0	1	2
0	const	f	$b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$
1	$\boldsymbol{x}$	$L\in\mathcal{L}(V)$	
2	$b^*(f,g)$		

1) $\otimes\colon \mathbb{T}^p_q\times\mathbb{T}^{p'}_{q'}\to\mathbb{T}^{p+p'}_{q+q'}$;
2) ассоциативность ✓
   дистрибутивность ✓
   ~~коммутативность~~ ✗

Некоторые свойства тензорного произведения:

Базис в V и V^* выбирается:

$$(\boldsymbol{e}_i,e^j)=\delta_i^j=\begin{cases}0, & \text{если } i\neq j,\\ 1, & \text{если } i=j,\end{cases}\qquad f(\boldsymbol{x})=(f,\boldsymbol{x})=\sum\nolimits_i\alpha^i\beta_i=\alpha^i\beta_i. \tag{14}$$

7.1.3 Координаты тензора

Def 7.3 (Компоненты тензора)**.** Значения тензора обозначаются в виде:

$$T^{j_1,\dots,j_p}_{i_1,\dots,i_p}:=T(\boldsymbol{e}_{i_1},\dots,\boldsymbol{e}_{i_p},e^{j_1},\dots,e^{j_q}). \tag{15}$$

Числа $T^{j_1,\dots,j_p}_{i_1,\dots,i_p}$ называются **координатами** тензора T в базисе $(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)$

Thr 7.1. *Тензоры типа (p,q) на V составляют $\mathbb{T}^q_p(V)$ размерности n^{p+q} с базисными векторами*

$$e^{i_1}\otimes\dots\otimes e^{i_p}\otimes\boldsymbol{e}_{j_1}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{e}_{j_q}, \tag{16}$$

При том $\exists! T$ с координатами $T^{j_1,\dots,j_p}_{i_1,\dots,i_p}$.

$\triangle$. Достаточно построить *разложимый* тензор. Далее воспользуемся равенством:

$$(e^{i_1}\otimes\dots e^{i_p}\otimes\boldsymbol{e}_{j_1}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{e}_{j_q})(\boldsymbol{e}_{i'_1},\dots,\boldsymbol{e}_{i'_p},e^{j'_1},\dots,e^{j'_q})=\delta^{i_1}_{i'_1}\dots\delta^{i_p}_{i'_p}\delta^{j_1}_{j'_1}\dots\delta^{j_q}_{j'_q}.$$

Построим тензор

$$T_1=\sum_{i,j}T^{j_1\dots j_q}_{i_1\dots i_p}(e^{i_1}\otimes\dots e^{i_p}\otimes\boldsymbol{e}_{j_1}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{e}_{j_q}),$$

просто линейную комбинацию с некоторой индексацией. Теперь получим

$$T_1(\boldsymbol{e}_{i_1},\dots,\boldsymbol{e}_{i_p},e^{j_1},\dots,e^{j_p})=T^{j_1,\dots,j_p}_{i_1,\dots,i_p},$$

и воспользуемся тем, что тензор T полностью определяется своими координатами. Почему?

В силу полилинейности для произвольных векторов

$$\boldsymbol{x}_1=\sum\nolimits_{i_1}\xi^{i_1}\boldsymbol{e}_{i_1},\ \dots,\ \boldsymbol{x}_p=\sum\nolimits_{i_p}\rho^{i_p}\boldsymbol{e}_{i_p}$$

и линейных форм

$$u^1=\sum\nolimits_{j_1}\sigma_{j_1}e^{j_1},\ \dots,\ u^p=\sum\nolimits_{j_p}\tau_{j_q}e^{j_q}$$

имеем

$$T(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_p,u^1,\dots,u^p)=\sum\nolimits_{i,\,j}T^{j_1,\dots,j_p}_{i_1,\dots,i_p}\xi^{i_1}\dots\rho^{i_p}\sigma_{j_1}\dots\tau_{j_q}.$$

Далее остается показать, что разложимые тензоры, отвечающие различным наборам индексов линейно независимы. Это следует из правила вычисления их значений. Пусть они ЛЗ

$$\sum\lambda^{j_1,\dots,j_p}_{i_1,\dots,i_p}\xi^{i_1}e^{i_1}\otimes\dots e^{i_p}\otimes\boldsymbol{e}_{j_1}\otimes\dots\otimes\boldsymbol{e}_{j_q}=0,$$

где $\lambda^{j_1,\dots,j_p}_{i_1,\dots,i_p}\in\mathbb{F}$. Аналогично с T_1 можем подставить элемент базиса, свести к работе с символами Кронекера.

$\square$

7.1.4 Переход к другому базису

Thr 7.2. *При переходе от дуальных базисов $(\boldsymbol{e}_i)$, (e^i) пространств V и V^* к новым дуальным базисам тех же пространств:*

$$\boldsymbol{e}'_k=a^i_k\boldsymbol{e}_i,\qquad {e'}^k=b^k_ie^i,\ \text{где } (a_{ij})^{-1})=(b_{ij}), \tag{17}$$

координаты тензора T преобразуются по формулам

$$T^{j_1,\dots,j_p}_{i_1,\dots,i_p} = \sum_{i',j'} b^{i_1,\dots,i_p}_{i'_1,\dots,i'_p} \cdot T'^{\,j_1,\dots,j_p}_{\,i_1,\dots,i_p} \cdot a^{j_1\dots j_p}_{j'_1\dots j'_p} \tag{18}$$

7.1.5 Тензорное произведение пространств

Thr 7.3. *Пусть V, W — векторные пространства над полем $\mathbb{F}$. Тогда существует векторное пространство T над $\mathbb{F}$ и билинейное отображение $b\colon V\times W\to T$, удовлетворяющее условиям:*

(T1)	*если $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k\in V$ ЛНеЗ и $\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_k\in W$, то $\sum_{i=1}^k b(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{w}_i)=0\Longrightarrow \boldsymbol{w}_1=\ldots=\boldsymbol{w}_k=0$;*
(T2)	*если $\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_k\in W$ ЛНеЗ и $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_k\in V$, то $\sum_{i=1}^k b(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{w}_i)=0\Longrightarrow \boldsymbol{v}_1=\ldots=\boldsymbol{v}_k=0$;*
(T3)	*b – сюръективно, т.е. $T=\langle b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\mid \boldsymbol{v}\in V,\ \boldsymbol{w}\in W\rangle_{\mathbb{F}}$.*

Кроме того, пара (b,T) универсальна в том смысле, что какова ни была пара (b',T'), состоящая из векторного пространства T' и билинейного отображения $b'\colon V\times W\to T'$, найдётся единственное линейное отображение $\sigma\colon T\to T'$, для которого $b'(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\sigma(b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}))$, $\boldsymbol{v}\in V$, $\boldsymbol{w}\in W$.

Def 7.4. Пару (b,T), однозначно определенную с точностью до изоморфизма по заданным векторным пространствам V, W, называют *тензорным произведением* этих пространств.

Def 7.5. Пусть $\mathcal{A}\colon V\to V, \mathcal{B}\colon W\to W$ – линейный операторы. Их *тензорным произведением* называется линейный оператор

$$\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\colon V\otimes W\to V\otimes W,$$

действующий по правилу

$$(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})\,(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})=\mathcal{A}\boldsymbol{v}\otimes\mathcal{B}\boldsymbol{w}$$

(далее по линейности $(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})\left(\sum(\boldsymbol{v}_i\otimes\boldsymbol{w}_i)\right)=\sum\mathcal{A}\boldsymbol{v}_i\otimes\mathcal{B}\boldsymbol{w}_i$).

7.2 Свёртка, симметризация и альтернирование тензоров

7.2.1 Свёртка

Def 7.6 (свёртка)**.** Зафиксировав все переменные кроме $\boldsymbol{x}_r$ и u_s, получим билинейную форму:

$$f(\boldsymbol{x}_r,u_s):=T(\dots,\boldsymbol{x}_r,\dots,u_s,\dots). \tag{19}$$

Тогда **инвариантная** сумма вида $\overline{T}=f(\boldsymbol{e}_k,e^k)$ называется **свёрткой тензора** T по r-му ковариантному и s-му контрвариантному индексу.

Если обозначить свёртку по индексам r, s символом tr^s_r, то tr^s_r – линейное отображение:

$$\mathrm{tr}^s_r:\mathbb{T}^q_p(V)\to\mathbb{T}^{q-1}_{p-1}(V). \tag{20}$$

Thr 7.4. *Свёртка вида tr^s_r тензора $T\in\mathbb{T}^q_p$ является тензор $\overline{T}\in\mathbb{T}^{q-1}_{p-1}$ с координатами*

$$\overline{T}^{j_1,\dots,j_{s-1},j_{s+1},\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_{r-1},i_{r+1},\dots,i_p}=\sum_k T^{j_1,\dots,j_{s-1},k,j_{s+1},\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_{r-1},k,i_{r+1},\dots,i_p} \tag{21}$$

7.2.2 Симметричные тензоры

$S\mathbb{T}^p(V)$

Для любой перестановки $\pi\in S_p$ положим

$$f_\pi(T)(\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_p)=T(\boldsymbol{x}_{\pi(1)},\dots,\boldsymbol{x}_{\pi(p)}) \tag{22}$$

Def 7.7. Тензор T типа $(p,0)$ называется **симметричным**, если $\forall\pi\in S_p$ $f_\pi(T)=T$. **Симметризацией** $T\in\mathbb{T}^0_p(V)$ называется отображение

$$S(T)=\frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p}f_\pi(T)\colon\mathbb{T}^0_p(V)\to\mathbb{T}^0_p(V). \tag{23}$$

ЗФ: Подпространство сим. тензоров типа $\mathbb{T}^0_p(V)$ обозначим $\mathbb{T}^+_p(V)$. Действие S: 1) $S^2=S$, $\operatorname{Im}S=\mathbb{T}^+_p(V)$. Пространства $\mathbb{F}[X_1,\dots,X_n]_p$ и $\mathbb{T}^+_p(V)$ биективны. Тогда

$$\dim\mathbb{F}[X_1,\dots,X_n]_p=\dim\mathbb{T}^+_p(V)=\binom{n+p-1}{p} \tag{24}$$

Def 7.8. Ассоциативная и коммутативная **симметрическая алгебра** пространства V:

$$S(V) = \oplus_{p=0}^{\infty} S\mathbb{T}^p(V), \tag{25}$$

где $\vee$ выступает в качестве умножения.

7.2.3 Кососимметричные тензоры

Def 7.9. Назовём тензор T кососимметричным, если

$$f_\pi(T) = \operatorname{sign}(\pi) \cdot T \qquad \forall \pi \in S_p. \tag{26}$$

Def 7.10. **Альтерированием** называется отображение

$$A(T) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \operatorname{sign}(\pi) \cdot f_\pi(T)\colon \mathbb{T}_p^0(V) \to \mathbb{T}_p^0(V). \tag{27}$$

Действие A: 1) $A^2 = A$, 2) $\operatorname{Im} A = \Lambda_p^+(V)$, 3) $A(f_\sigma(T)) = \operatorname{sign}(\sigma) A(T)$.

7.3 Внешняя алгебра

Def 7.11. Зададим **операцию внешнего умножения**

$$\wedge\colon \Lambda(V) \times \Lambda(V) \to \Lambda(V), \tag{28}$$

полагая $Q \wedge R = A(Q \otimes R)$ для любого q-вектора Q и любого r-вектора R.

Def 7.12 (алгебра Грассмана)**.** Алгебра $\Lambda(V)$ над $\mathbb{F}$ называется **внешней алгеброй** пространства V:

$$\Lambda(V) = \oplus_p^n \Lambda^p(V) \tag{29}$$

Thr 7.5. *Внешняя алгебра ассоциативна.*

$\boxed{\Rightarrow}$. Пусть $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_p$ – произвольные векторы из V. Тогда[2]

$$\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_p = A(\boldsymbol{x}_1 \otimes \boldsymbol{x}_2 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_p). \tag{30}$$

Thr 7.6. *Пусть* $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$ *– базис* V*. Тогда*

$$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_p, \qquad 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n \tag{31}$$

образуют базис пространства $\Lambda^p(V)$*.*

$\boxed{\Rightarrow}$. Внешняя алгебра $\Lambda(V)$ пространства V имеет размерность 2^n. При этом

$$\dim \Lambda^p(V) = \binom{n}{p}. \tag{32}$$

Базис пространства $\Lambda^n(V)$ состоит из одного $n-$вектора

$$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_p.$$

Внешняя алгебра V **антикоммутативна**:

$$Q \in \Lambda^q(V), R \in \Lambda^r(V) \Rightarrow Q \wedge R = (-1)^{qr} R \wedge Q. \tag{33}$$

\# связь с определителями
\# векторные подпространства и p-векторы
\# условия разложимости p-векторов

[2] с. 287, Кострикин.