

# ЗАМЕТКИ ПО ВОПРОСУ ВЫБОРУ «ВВЕДЕНИЕ В ТУРБУЛЕНТНОСТЬ»

---

Авторы: Хоружий Кирилл  
Примаков Евгений

От: 06.06.2020

## Содержание

Абстракт	2
Термины	2
<b>1 Квазипериодическое движение (§30)</b>	<b>3</b>
1.1 Мультипликатор	3
1.2 «Рождение» двумерного тора	3
1.3 Сценарий Ландау-Хопфа	4
1.4 Синхронизация колебаний	4
<b>2 Странный аттрактор (§31)</b>	<b>5</b>
2.1 Конечное число «опасных» мультипликаторов	5
2.2 «Странность» аттрактора	5
2.3 Бифуркация разрушения квазипериодического режима	6
2.4 Структура (канторовость) странного аттрактора	6
2.5 Показатель Ляпунова	6
<b>3 Практическая часть</b>	<b>7</b>
3.1 Конвекция в замкнутой петле	7
3.2 Водяное колесо Лоренца	8
<b>4 Переход к турбулентности путем удвоения периодов (§32)</b>	<b>8</b>
4.1 Отображение Пуанкаре	9
4.2 Бифуркация удвоения периода	9
4.3 Логистическое отображение	10
<b>5 Из теории динамических систем</b>	<b>11</b>
5.1 Теорема Пуанкаре-Бендиксона	11
5.2 Определение динамического хаоса	11
5.3 Отображение Пуанкаре	12
5.4 Устойчивость по линейному приближению	12
5.5 Экспонента Ляпунова	12
<b>Литература</b>	<b>13</b>

## Абстракт

В настоящей работе обзревается проблема турбулентности. На основе §30, §31, §32 из [1] и [2], рассмотрены некоторые сценарии перехода к турбулентности. Разобран сценарий Ландау-Хопфа и рассмотрен эффект синхронизации колебаний. На основе [3] решена **задача о конвекции в замкнутой петле**. Для развития темы **странного аттрактора** совершена попытка повторить эксперимент с водяным колесом из [4], но в связи с техническими трудностями (установка сломалась до снятия данных), результат ограничен численным моделированием системы в *Python*. Построен аттрактор Лоренца. В рамках развития темы **сценария удвоения периода** в *Wolfram Mathematica* построена модель логистического отображения. Рассчитана зависимость показателя Ляпунова от параметра. Аналогично проанализировано отображение Гаусса.

## Термины

**Динамическая система (DS)** — тройка<sup>1</sup>  $\{E, f, T\}$ , где  $E$  — фазовое пространство,  $T$  — множество, характеризующее эволюцию<sup>2</sup> системы во времени;  $f$  — дифференцируемое отображение  $T \times E \rightarrow E$ , или  $f^t(x)$ , где  $t \in T$ .

**Пространство состояний (фазовое пространство)** — пространство, каждая точка которого отвечает определенному распределению скоростей в ней. Состояниям в близкие моменты времени соответствуют при этом близкие точки.

**Аттрактор** — компактное подмножество  $E$  такое, что все траектории из  $B \subset E$  стремятся к нему, при  $t \rightarrow \infty$ .  $B$  — бассейн аттрактора.

**Бифуркация** — качественное изменение фазового портрета, при плавном изменении параметров DS.

**Предельный цикл** — замкнутая периодическая траектория (ЗПТ) системы дифференциальных уравнений, изолированная от других ЗПТ и ЗПТ:  $\forall$  траекторий из некоторой окрестности периодических траекторий стремится к ней при  $t \rightarrow +\infty$  (установившийся периодический цикл) **или** при  $t \rightarrow -\infty$  (неустановившийся предельный цикл).

**Число Рейнольдса  $R$**  — безразмерная величина, характеризующая отношение инерционных сил к силам вязкого трения в вязких жидкостях и газах.

**Турбулентный поток** — перемещение газа или жидкости под влиянием внешних сил, при котором молекулярные слои совершают неупорядоченные движения по сложным траекториям, что приводит к интенсивному перемещению и значительным потерям энергии на внутреннее трение.

**Ламинарный поток** — перемещение газа или жидкости при котором отсутствует перемешивание слоёв и резких изменений скорости течения или давления.

<sup>1</sup>Более строго говоря это скорее  $E$ , наделенное семейством гладких функций  $f$ .

<sup>2</sup>При  $T \subseteq \mathbb{R}$ , DS — flow, при  $T \subseteq \mathbb{N}$ , DS — отображение (map).

## 1 Квазипериодическое движение (§30)

Образом стационарного движения служит точка, образом периодического – замкнутая траектория (предельная точка или предельный цикл).

### 1.1 Мультипликатор

При  $R > R_{кр}$  возможны различные устойчивые режимы. Роль невозмущенного движения играет периодическое  $v_0(r, t)$ . Уравнение движения –  $v = v_0 + v_2$ , где  $v_2$  – малая поправка.

Но  $v_2$  функция не только координат, но и времени, причем по времени эти коэффициенты представляют периодические функции с периодом  $T_1 = 2\pi/\omega_1$ . Решение такого уравнения ищется в виде:

$$v_2 = \Pi(r, t)e^{-i\omega t}, \quad (1)$$

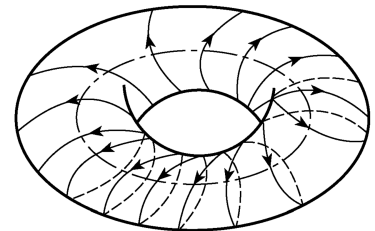
где  $\Pi(r, t)$  – периодическая функция времени. Неустойчивость возникает при появлении частоты  $\omega = \omega_2 + i\gamma_2$ , с  $\text{Im} = \gamma_2 > 0$ , а  $\text{Re} = \omega_2$  определяет новую частоту.

За период  $T_1$  возмущение меняется  $\mu \equiv e^{-i\omega T_1}$  раз. Этот множитель – **мультипликатор** периодического движения, характеристика усиления или затухания возмущений этого движения.

Потеря устойчивости происходит при числе  $R_{кр2}$ , при котором один или более мультипликаторов по модулю становятся равными 1. Ввиду вещественности уравнений мультипликаторы проходят окружность или парами, или в точках  $\pm 1$ . Потеря устойчивости периодическим движением сопровождается определенной качественной перестройкой поведения траекторий в пространстве состояний в окрестности ставшего неустойчивым предельного цикла – локальной **бифуркацией**<sup>3</sup>.

### 1.2 «Рождение» двумерного тора

Рассмотрим бифуркацию пересечения единичной окружности мультипликаторов вида  $\mu = \exp(\pm 2\pi\alpha i)$ , где  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Это приводит к появлению вторичного течения с новой независимой частотой  $\omega_2 = \alpha\omega_1$ , т.е. в результате возникает некоторое **квазипериодическое движение**, характеризующееся двумя несоизмеримыми частотами. Геометрическим образом этого движения в пространстве состояний служит траектория в виде незамкнутой намотки на двумерном торе, причём ставший неустойчивым предельный цикл служит образующей тора:  $\omega_1$  – вращение по образующей,  $\omega_2$  – вращение на торе. Получается переход от движения с одной степенью свободы к движению с двумя.



Рассмотрим **гипотетическую** картину усложнения течения, возникшего в результате такой бифуркации, при дальнейшем увеличении  $R$ ,  $R > R_{кр2}$ . Естественно было бы предположить что при последующем увеличении  $R$  будут последовательно появляться все новые периоды. Это означает потерю устойчивости двумерным о тором с возникновением в его окрестности трехмерного тора, затем в результате очередной бифуркации ему на смену придет 4-мерный тор и т.д. Интервалы между числами Рейнольдса соответствующими появлению новых частот, быстро падают, а появляющиеся движения имеют все меньшие масштабы. Таким образом движение быстро приобретает сложный характер – турбулентный.

Такая **гипотетически** возможная модель перехода к турбулентности была предложена Л.Д. Ландау (1944) и, независимо, Э. Хопфом (1948).

<sup>3</sup>Характер бифуркации в значительной степени определяется именно тем, в каких точках единичной окружности мультипликаторы её пересекают.

### 1.3 Сценарий Ландау-Хопфа

Напишем общий вид функции  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ , зависимость которой от времени определяется некоторым  $N$  различных частот. Искомая функция может быть представлена в виде ряда

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \sum \mathbf{A}_{p_1 p_2 \dots p_N}(\mathbf{r}) \exp \left( -i \sum_{i=1}^N p_i \varphi_i \right), \quad (2)$$

Все различные фазы лежат в интервале  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Рассмотрим пару фаз. Пусть в некоторый момент времени  $\varphi_1$  имеет значение  $\alpha$ . Тогда «одинаковые» с  $\alpha$  значения фаза  $\varphi_1$  будет иметь и во все моменты времени

$$t = \frac{\alpha - \beta_1}{\omega_1} + 2\pi s \frac{1}{\omega}.$$

Фаза  $\varphi_2$  в эти моменты имеет значения

$$\varphi_2 = \beta_2 + \frac{\omega_2}{\omega_1} (\alpha - \beta_1 + 2\pi s).$$

Но различные частоты несоизмеримы друг с другом, так что  $\omega_2/\omega_1$  – иррациональное число. Приводя каждый раз посредством вычитания должного кратного от  $2\pi$  значение  $\varphi_2$  к интервалу, мы получим для  $\varphi_2$  значения сколь угодно близкие к любой паре наперед заданных значений.

Таким образом в рассматриваемой модели турбулентности в течение достаточно долгого времени жидкость проходит через состояния, сколь угодно близкие к любому наперед заданному состоянию. Время возврата, однако, растет с увеличением  $N$  и становится столь большим, что никакого следа периодичности не остается.

Стоит подчеркнуть, что рассмотренный путь возникновения турбулентности базируется на **линейных** представлениях. Фактически предполагалось, что при появлении в результате неустойчивости новых периодических решений уже имевшиеся периодические решения не только не исчезают, но и почти не меняются. В данной модели турбулентное движение есть просто суперпозиция большого числа таких не изменяющихся решений. В общем же случае характер решений изменяется. Возмущения взаимодействуют друг с другом, причём это может привести как к упрощению движения, так и к его усложнению.

### 1.4 Синхронизация колебаний

Рассмотрим простой случай: возмущенное решение содержит две независимые частоты. Возмущение на частоте  $\omega_1$  (от  $R = R_{кр1}$ ), естественно считать в окрестности числа  $R = R_{кр2}$  более интенсивным и поэтому полагать его неизменным при относительно небольших изменениях числа  $R$  в этой окрестности. Имея это в виду для описания эволюции возмущения с частотой  $\omega_2$  на фоне периодического движения частоты  $\omega_1$  введем новую переменную

$$a_2(t) = |a_2(t)| e^{-i\varphi_2(t)}; \quad (3)$$

модуль  $|a_2|$  – кратчайшее расстояние до образующей тора, а  $\varphi_2$  – его фаза. Рассмотрим поведение  $a_2$  в дискретные моменты времени. За время одного периода возмущения частоты  $\omega_2$  меняется в  $\mu$  раз, где:

$$\mu = |\mu| \exp(-2\pi i \omega_2 / \omega_1)$$

– его мультипликатор. Далее рассмотрим уравнения относительно дискретной переменной числа прошедших периодов ( $a_2$ )  $\tau$ . Можем прийти к уравнению

$$\frac{da_2}{d\tau} = \ln \mu \cdot a_2 - \beta_2 a_2 \cdot |a_2|^2.$$

Вещественная часть уравнения определяет стационарное значение модуля, мнимая – уравнение для фазы:

$$\frac{d\varphi_2}{d\tau} = 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_2} + \text{Im } \beta_2 \cdot |a_2|^2 \quad (4)$$

Согласно этому фаза  $\varphi_2$  вращается с постоянной скоростью (связано с приближением). С ростом надкритичности равномерность нарушается и скорость вращения по тору становится функцией  $\varphi_2$ . Чтобы это учесть, добавим в (4) малое возмущение  $\Phi$ . Далее аппроксимируем иррациональное отношение  $\omega_2/\omega_1$  рациональной дробью  $m_2/m_1$ . Так получим уравнение:

$$\frac{1}{m_1} \frac{d\varphi}{d\bar{\tau}} \sim \text{Im } \beta_2 \cdot |a_2|^2 + \Phi. \quad (5)$$

В общем случае уравнение (5) имеет стационарные решение  $\varphi_2 = \varphi_2^0$ , но также мы получаем, что **на торе существует предельный цикл – траектория через  $m_1$  оборотов замыкается**.

Рождение устойчивого предельного цикла на торе означает **синхронизацию** колебаний – исчезновение квазипериодического и установление нового режима. Это явление препятствует возникновению режима, представляющего собой суперпозицию движений с большим числом несоизмеримых частот. В этом смысле можно сказать, что **вероятность реального осуществления сценария Ландау-Хопфа мала**.

Но, например, в [5] рассматриваются системы поведение которых близко к описанному сценарию.

## 2 Странный аттрактор (§31)

Исчерпывающей теории возникновения турбулентности в различных типах гидродинамических течениях ещё не существует.

### 2.1 Конечное число «опасных» мультипликаторов

При анализе устойчивости движения интересны мультипликаторы, по модулю близкие к 1. Для течения вязкой жидкости число таких опасных мультипликаторов **конечно**. Допускаемые различные возмущения обладают разными длинами расстояний, на которых существенно меняется скорость  $v_2$ . Чем меньше масштаб движения, тем больше градиенты скорости в нем и тем сильнее оно тормозится вязкостью. Если расположить допустимые моды в порядке убывания их масштабов, то опасным может оказаться только некоторое конечное число из них. Таким образом выяснение возможных сценариев потери устойчивости может быть сведено к конечному числу переменных<sup>4</sup>. Соответственно переходим к конечномерному пространству состояний.

Речь об исследовании эволюции системы, описываемой уравнениями вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (6)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  – вектор в пространстве  $n$  величин  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ . Для диссипативной системы дивергенция  $\dot{\mathbf{x}}$  в  $\mathbf{x}$ -пространстве отрицательна, что соответствует сокращению объёмов  $\mathbf{x}$ -пространства при движении<sup>5</sup>:

$$\text{div } \dot{\mathbf{x}}(t) = \text{div } \mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv \partial F^{(i)} / \partial x^{(i)} \quad (7)$$

### 2.2 «Странность» аттрактора

Явление синхронизации упрощает движение. Раннее подразумевалось, что при потере устойчивости периодическим движением возникает другое периодическое движение. *Это не обязательно*. Ограниченность амплитуд пульсаций скорости обеспечивает лишь ограниченность объема пространства состояний. Траектории могут стремиться к предельному циклу, или к незамкнутой намотке на торе, но может быть и по-другому.

Рассмотрим внутри ограниченного объема траектории в предположении, что они все неустойчивы. Две сколь угодно близкие точки пространства состояний в дальнейшем разойдутся (**см. показатель Ляпунова**). Ввиду ограниченности траектории незамкнутая траектория может подойти к самой себе сколь угодно близко. Именно такое нерегулярное поведение ассоциируется с турбулентным движением жидкости (**см. определение динамического хаоса**).

<sup>4</sup>Например, амплитуды компонент разложения поля скоростей в ряд Фурье по координатам.

<sup>5</sup>По теореме Лиувилля для гамильтоновой системы дивергенция равна нулю.

Важный аспект такой системы – чувствительность к начальным условиям. При неустойчивости движения исходная неточность со временем нарастает и дальнейшее состояние системы непредсказуемо.

Притягивающее множество неустойчивых траекторий в пространстве состояний может существовать (Э. Лоренц, 1963)<sup>6</sup>; его принято называть **странным аттрактором**.

Важно понимать, что траектории могут быть неустойчивыми по одним направлениям и устойчивыми по другим. Такие траектории называют седловыми и именно множество таких траекторий составляет странный аттрактор.

## 2.3 Бифуркация разрушения квазипериодического режима

Сколь угодно малая нелинейность может разрушить квазипериодический режим (намотку на торе), создав на торе странный аттрактор (D. Ruelle, F. Tokens, 1971). На второй бифуркации, как уже говорилось, появляется незамкнутая обмотка на торе. **Учёт малой нелинейности не разрушает тора**, так что странный аттрактор должен был бы быть расположен на нем. Но на двумерной поверхности невозможно существование **хаотического режима** (см. теорему Пуанкаре-Бендиксона).

**Пересечение в пространстве состояний траекторий противоречило бы причинности поведения классических систем.** Состояние системы в каждый момент времени однозначно определяет ее поведение в следующие моменты. На двумерной поверхности невозможность пересечений настолько упорядочивает поток траекторией, что его хаотизация невозможна.

На третьей бифуркации возникновение странного аттрактора становится возможным (хотя и не обязательным). Такой аттрактор, приходящий на смену трёхчастотному периодическому режиму расположен на трёхмерном торе (D. Ruelle, F. Tokens, 1978).

## 2.4 Структура (канторовость) странного аттрактора

Некоторые суждения следуют из неустойчивости траекторий седлового типа и диссипативности системы.

Рассмотрим пучок траекторий на пути к аттрактору (переходный режим движения к установлению турбулентности). В поперечном сечении пучка траектории заполняют определенную площадь.

Элемент объёма в окрестности седловой траектории в одном из направлений растягивается, в другом сжимается. Ввиду диссипативности объёмы должны уменьшаться. По ходу траекторий направления должны меняться.

Это приводит к уменьшению по площади и изгибу формы. Это происходит с каждым элементом по площади. В результате сечение разбивается на систему вложенных полос, разделенных пустотами.

Возникающей в пределе  $t \rightarrow \infty$  аттрактор представляет собой несчётное множество не касающихся друг друга слоёв – поверхностей, на которых располагаются седловые траектории. Каждая из траекторий аттрактора блуждает по всем слоям и по прошествии достаточно большого времени пройдёт достаточно близко к любой точке аттрактора (свойство **эргодичности**).

В математической терминологии такие множества относятся к категории **канторовых**. Именно канторовость (соответственно, **самоподобие**) является наиболее характерным свойством аттрактора.

## 2.5 Показатель Ляпунова

Ввиду эргодичности средние характеристики движения на странном аттракторе могут быть установлены путём анализа движения уже вдоль одной неустойчивой траектории в пространстве состояний.

Пусть  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t)$  – уравнение траектории. Рассмотрим деформацию «сферического» объёма при его перемещении вдоль этой траектории. Она определяется уравнениями, линеаризованными по разности  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)$  – отклонение траекторий, соседних с данной. Эти уравнения имеют вид

$$\dot{\xi}^{(i)} = A_{ik}(t)\xi^{(k)}, \quad A_{ik}(t) = \left. \frac{\partial F^{(i)}}{\partial x^{(k)}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0(t)} \quad (8)$$

<sup>6</sup>Рассмотрено движение воздушных потоков в плоском слое жидкости постоянной толщины при разложении скорости течения и температуры в двойные ряды Фурье с последующем усечением до первых-вторых гармоник.

По мере движения длины осей ( $l_s(t)$ ) эллипсоида меняются. **Ляпуновскими характеристическими показателями** называют предельные значения (см. **показатель Ляпунова**).

### 3 Практическая часть

#### 3.1 Конвекция в замкнутой петле

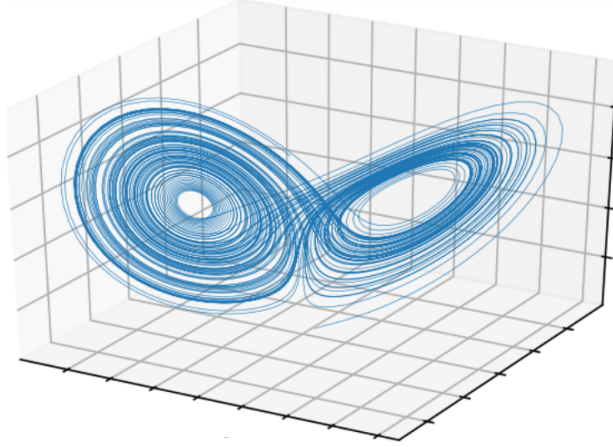


Рис. 1: Визуализация численного моделирования аттрактора Лоренца (3D)

Пусть имеем замкнутую в кольцо (ось кольца параллельна земле) трубку, заполненную жидкостью. Трубка подогревается снизу и охлаждается сверху. При достаточно большой интенсивности подогрева возможно возникновение конвекционного течения. Угловую координату  $\varphi$ , отсчитываемую от направленного вниз радиуса против часовой стрелки. Зависимость температуры от угла  $T = T(\varphi)$  имеет период  $2\pi$  и её можно представить в виде ряда Фурье, ограничимся учетом только первой гармоники:

$$T(\varphi) = T_0(1 + Y \sin \varphi + Z \cos \varphi)$$

Из уравнения можно увидеть, что  $Z$  в нашей модели отвечает за отклонение температуры от среднего значения в нижней точки трубы,  $Y$  за крайние  $\varphi = \pi/2$ . Через  $X$  обозначим скорость течения, которая не зависит от  $\varphi$  в силу несжимаемости жидкости.

Исходя из качественных соотношений составим уравнения для динамических переменных  $X, Y, Z$ .

Изменения скорости течения вызывается силой, которая пропорциональна  $Y$ , и течение тормозится силой вязкого трения, которая пропорциональна  $X$ . Таким образом имеем первое уравнение:  $\dot{X} = cY - \beta X$ .

Предположим, что имеет место течение с постоянной скоростью,  $\dot{\varphi} = X$ . Тогда можно записать:

$$T = f(\varphi - Xt) = T_0(1 + Y \sin(\varphi - Xt) + Z \cos(\varphi - Xt))$$

Введя обозначение  $\varphi' = \varphi - Xt$ :

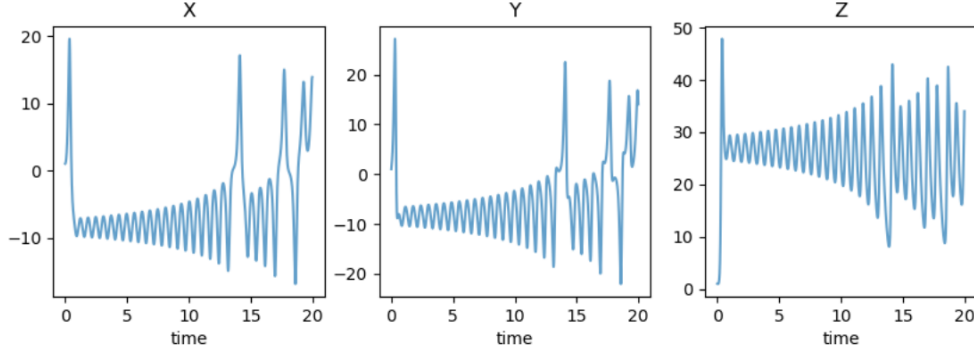
$$\dot{T} = T_0(Y\dot{\varphi}' \cos \varphi' - Z\dot{\varphi}' \sin \varphi') = T_0(-XY \cos \varphi' + ZX \sin \varphi').$$

Отсюда видно, что перенос температуры потоком жидкости учитывается членом вида  $XZ$  в уравнении для  $Y$  и членом  $(-XY)$  в уравнении для  $Z$ . В оба уравнения следует добавить члены, учитывающие релаксацию, которые будут иметь вид, соответственно,  $(-DY)$  и  $(-DZ)$ , где  $D$  – константа, а также учесть подогрев добавлением постоянного члена  $A$  в уравнение для  $Z$ . Итого имеем:

$$\dot{Y} = XZ - DY, \quad \dot{Z} = A - XY - DZ$$

Далее, производя замену переменных для уравнений для  $X, Y, Z$ :

$$X = Dx, \quad Y = \frac{\beta Dy}{c}, \quad Z = -\frac{\beta Dz}{c}, \quad t = Dt,$$

Рис. 2: Визуализация численного моделирования аттрактора Лоренца ( $xyz$ )

получаем уравнения Лоренца:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (9)$$

где  $\sigma = \frac{\beta}{D}$ ,  $r = \frac{cA}{\beta D^2}$ ,  $b = 1$ .

Система (9) была численно решена в *Python*. Данные визуализации представлены на рис. 1 и рис. 2.

### 3.2 Водяное колесо Лоренца

Имеем колесо с прикрепленными к нему корзинами, в которые льётся вода, и под действием силы тяжести колесо начинает вращаться. При слабом потоке оно будет стоять, а при очень сильном будет наблюдаться хаотическое движение с периодической сменой направления.

Как видно данная система, пусть и является механической и более понятной в техническом плане, представляет собой предыдущую задачу перевернутую "вверх тормашками".

Была предпринята попытка воссоздать систему с колесом. В качестве колеса изначально решено было взять пустую консервную банку, а по периметру её с помощью синей изолянтной ленты прикрепить пластмассовые стаканчики, с проделанными сверлом в дне отверстиями. Изначально кручение обеспечивал подвес за приклеенную к банке игрушку "спинер" однако, в силу некачественности последней, установка сломалась, спинер развалился.

После поломки было решено уже снизу приклеить по центру к банке чистящую липучку для одежды, которая, при смазывании маслом, тоже обеспечивала достаточно свободное вращение системы.

Под струёй воды удалось на короткое время поймать квазипериодичное (на глаз) покачивание колеса то по, то против часовой стрелки, однако данные сняты не были, так как при контрольном запуске обнаружилось, что валик разбух и мешал крутиться системе. При его устранении система теряла устойчивость.

В связи с вышеперечисленными трудностями было решено промоделировать систему с помощью *Wolfram Mathematica* и довольствоваться искусственными данными.

## 4 Переход к турбулентности путем удвоения периодов (§32)

Отдельно можно рассмотреть потерю устойчивости периодическим движением путём прохождения мультипликатора через значения  $-1$  или  $+1$ .

В  $n$ -мерном пространстве состояний  $n - 1$  мультипликаторов определяют поведение траекторий в  $n - 1$  различных направлениях в окрестности рассматриваемой периодической траектории (отличных от направления касательной в каждой точке самой этой траектории). Пусть близкий к  $\pm 1$  мультипликатор отвечает некоторому 1-му направлению. Остальные  $n - 2$  мультипликаторов малы по модулю; поэтому по соответствующим им  $n - 2$  направлениям все траектории будут со временем прижиматься к некоторой двумерной поверхности (назовем ее  $\Sigma$ ), которой принадлежат 1-е направление и направление



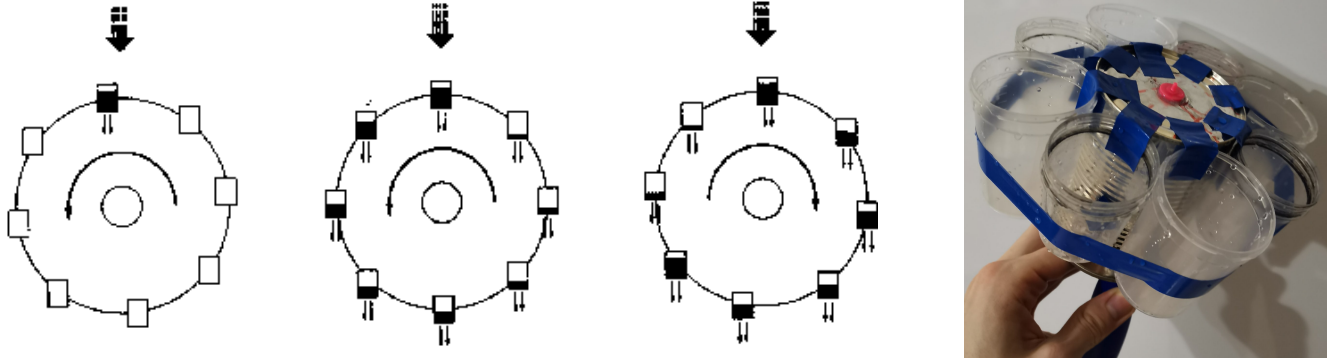


Рис. 3: Схема установки и то, что получилось

указанных касательных. Можно сказать, что в окрестности предельного цикла пространство состояний при  $t \rightarrow \infty$  оказывается почти двумерным (строго двумерным оно не может быть – траектории могут располагаться по обе стороны  $S$  и переходить с одной стороны поверхности на другую).

#### 4.1 Отображение Пуанкаре

Разрежем поток траекторий вблизи  $S$  некоторой секущей поверхностью  $\sigma$ . Каждая траектория, повторно пересекая  $\sigma$ , ставит в соответствие исходной точке пересечения (назовем ее  $x_j$ ) точку пересечения в момент следующего возврата  $x_{j+1}$ . Связь  $x_{j+1} = f(x_j; R)$  называют **отображением Пуанкаре** (или отображением последования); она зависит от параметра  $R$  (в данном случае – числа Рейнольдса), значение которого определяет степень близости к бифуркации – потере устойчивости периодическим движением. Поскольку все траектории тесно прижаты к поверхности  $\Sigma$ , множество точек пересечения поверхности  $\sigma$  траекториями оказывается почти одномерным, и его можно приближенно аппроксимировать линией; отображение Пуанкаре станет одномерным преобразованием:  $x_{j+1} = f(x_j; R)$ , причём  $x$  будет просто координатой на указанной линии. Дискретная переменная  $j$  играет роль времени, измеряемого в единицах периода движения.

Одномерное отображение Пуанкаре дает альтернативный способ определения характера течения вблизи бифуркации. Самому периодическому движению отвечает **неподвижная точка** – значение  $x_j = x_*$ , не меняющееся при отображении, то есть для которого  $x_{j+1} = x_j$ . Роль мультипликатора играет производная  $\mu = dx_{j+1}/dx_j$ , взятая в неподвижной точке. Точки  $x_j = x_* + \xi$  в окрестности  $x_*$  в результате отображения переходят в  $x_{j+1} \approx x_* + \mu\xi$ . Неподвижная точка устойчива (и является аттрактором отображения), если  $|\mu| < 1$ : повторно применяя отображение и начав с какой-либо точки в окрестности точки  $x_*$ , мы будем асимптотически приближаться к последней (по закону  $\mu^j$ , где  $j$  – число итераций). Напротив, при  $|\mu| > 1$  неподвижная точка неустойчива.

#### 4.2 Бифуркация удвоения периода

Рассмотрим потерю устойчивости периодическим движением при переходе мультипликатора через  $-1$ . Равенство  $\mu = -1$  означает, что начальное возмущение через интервал времени  $T_0$  меняет знак, не меняясь по абсолютной величине: еще через период  $T_0$  возмущение перейдет само в себя. Таким образом, при переходе  $\mu$  через значение  $-1$  в окрестности предельного цикла с периодом  $T_0$  возникает новый предельный цикл с периодом  $2T_0$  – бифуркация удвоения периода.

Если принять условно неподвижную точку отображения Пуанкаре за точку  $x = 0$ , то вблизи нее отображение, описывающее бифуркацию удвоения периода можно представить в виде разложения:

$$x_{j+1} = -[1 + (R - R_1)]x_j + x_j^2 + \beta x_j^3,$$

где  $\beta > 0$ . При  $R < R_1$  неподвижная точка  $x_* = 0$  устойчива, а при  $R > R_1$  – неустойчива. Чтобы увидеть, как происходит удвоение периода, надо итерировать последнее отображение дважды, то есть рассмотреть его за два шага и определить неподвижные точки вновь полученного отображения; если они устойчивы, то они отвечают циклу удвоенного периода.

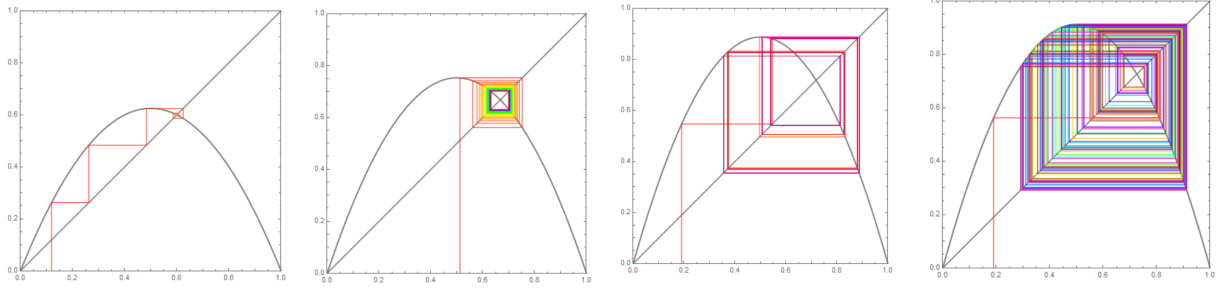


Рис. 4: Эволюция динамической системы при характерных значениях параметра

Двукратная же итерация того же преобразования приводит (с нужной точностью по малым величинам  $x_j$  и  $R - R_1$ ) к отображению:

$$x_{j+2} = x_j + 2(R - R_1)x_j - 2(1 + \beta)x_j^3.$$

Оно всегда имеет неподвижную точку  $x_* = 0$ . При  $R < R_1$  эта точка единственна и устойчива (мультипликатор  $|dx_{j+2}/dx_{x_j}| < 1$ ); для движения с периодом 1 (в единицах  $T_0$ ) интервал времени 2 – тоже период. При  $R = R_1$  мультипликатор обращается в +1 и при  $R > R_1$  точка  $x_* = 0$  становится неустойчивой. В этот момент рождается пара устойчивых неподвижных точек  $x_*^{(1),(2)} = \pm \left[ \frac{R - R_1}{1 + \beta} \right]^{1/2}$ , которые и соответствуют устойчивому предельному циклу удвоенного периода.

Вблизи бифуркации движение остается ещё "почти периодическим" с периодом 1: точки последовательных возвратов траектории  $x_*^{(1)}$  и  $x_*^{(2)}$  близки друг к другу. Интервал  $x_*^{(1)} - x_*^{(2)}$  между ними является мерой амплитуды колебаний с периодом 2; она растёт с надкритичностью как  $(R - R_1)^{1/2}$  – аналогично закону возрастания амплитуды периодического движения после его возникновения в точке потери устойчивости стационарным движением.

Многократное повторение бифуркаций удвоения периода открывает один из возможных путей возникновения турбулентности. В этом сценарии число бифуркаций бесконечно, причем они следуют друг за другом (по мере увеличения  $R$ ) через все убывающие интервалы; последовательность критических значений  $R_1, R_2, \dots$  стремится к конечному пределу, за которым периодичность исчезает вовсе и в пространстве возникает сложный аperiodический аттрактор, ассоциируемый в этом сценарии с возникновением турбулентности. Мы увидим, что этот сценарий обладает замечательными свойствами универсальности и масштабной инвариантности (М.Дж. Фейгенбаум, 1978).

Излагаемая ниже количественная теория исходит из предпосылки, что бифуркации следуют друг за другом (при увеличении  $R$ ) настолько быстро, что даже в промежутках между ними занимаемая множеством траекторий область пространства состояний остается почти двумерной, и вся последовательность бифуркаций может быть описана одномерным отображением Пуанкаре, зависящим от одного параметра.

Простейший вид такого отображения выражается функцией с одним максимумом или логистическим отображением.

### 4.3 Логистическое отображение

В частности, модель популяции вида при ограниченных ресурсах принимает вид такой функции:

$$x_{n+1} = \lambda x_n \left( 1 - \frac{x_n}{M} \right), \quad (10)$$

где  $M$  – максимум популяции при данных ресурсах, тогда изменим наше возрастание так, чтобы популяция при превышении этого максимума начинала вымирать.

Упростим выражение, обозначив за  $x$  выражение  $x \cdot M$ , тогда имеем **логистического отображение**:  $x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$ .

Не будем здесь углубляться в подробный анализ этой динамической системы, ограничимся численным моделированием. Удобным представлением эволюции является лестница Ламерея, см. рис. 4. Для

данного отображения в *Python* была рассчитана зависимость показателя Ляпунова от параметра. Результат визуализации в представлен на рис. 5. Заметны характерные окна периодичности (см. переход к турбулентности через перемежаемость).

Стоит заметить общность использованного подхода. Так же была рассчитана аналогичная зависимость для отображения Гаусса, характеризуемого двумя параметрами. Цветом показаны значения показателя Ляпунова (см. рис. ).

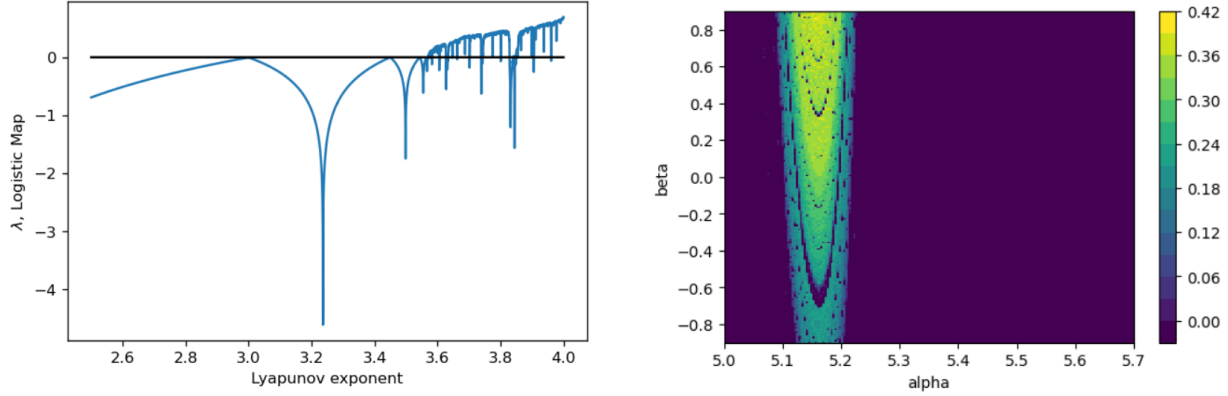


Рис. 5: Численный расчёт показателя Ляпунова для логистического отображения и отображения Гаусса

Отдельного упоминания, бесспорно заслуживает теория развитой турбулентности, особенно работы А. Н. Колмогорова (1941), А. М. Обухова (1941), но в связи с ограничениями по времени и некоторой отстраненностью темы она, к сожалению, была оставлена за рамками этой работы.

## 5 Из теории динамических систем

### 5.1 Теорема Пуанкаре-Бендиксона

**Thr 5.1.** Пусть выполняются следующие условия:

1.  $X$  – замкнутое, ограниченное множество в  $E^2$ .
2.  $DS$  задаёт непрерывно-дифференцируемое векторное поле на открытом множестве, содержащем  $R$ .
3.  $X$  не содержит неподвижных точек ( $\dot{x} \neq 0$ ).
4. Существует траектория  $S \subseteq X$ .

Тогда  $S$  – либо **замкнутая траектория**, либо **накручивается на замкнутую траекторию**<sup>7</sup>. В любом случае  $X$  содержит замкнутую орбиту.

### 5.2 Определение динамического хаоса

Отображение  $f$  **хаотично**, если

- 1) Периодические точки всюду плотны в  $E$ .
- 2) Орбиты перемешиваются (почти): пусть  $U_1, U_2 \subset E$ .  $\forall x_0 \in U_1 \exists N \in \mathbb{N} : f^N(x_0) \in U_2$ .
- 3)  $f$  чувствительно к н.у.:  $\forall x_0 \in E, \forall U_\varepsilon(x_0) \exists y_0 \in U_\varepsilon, \exists N \in \mathbb{N} : |f^N(x_0) - f^N(y_0)| > \beta$ <sup>8</sup>.

<sup>7</sup>Что соответствует существованию **предельного цикла**.

<sup>8</sup> $\beta$  – константа чувствительности.

### 5.3 Отображение Пуанкаре

Пусть  $T = \mathbb{R}$ . Расположим<sup>9</sup> в фазовом пространстве двумерную площадку  $S$  и зададим на ней некоторую систему координат  $(X, Y)$ .

Так получается динамическая система  $\{S, f_N, T_N\}$ , где  $T_N \subseteq \mathbb{N}$ . Функция  $f_N$  такая, что  $f_N(r) = \{f^t(r) \mid \min t \neq 0 : f^t(r) \in S\}$ . **Отображение Пуанкаре:**

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_N(x_n, y_n)_x, \\ y_{n+1} &= f_N(x_n, y_n)_y. \end{aligned}$$

Именно через *сечение Пуанкаре* можно анализировать становление регулярного или хаотического режима.

### 5.4 Устойчивость по линейному приближению

Рассмотрим устойчивость по линейному приближению системы:  $\dot{x} = A(x)$ ,  $\dot{x} = 0$  – положение равновесия и разложим  $A(x)$ :

$$\dot{x} = A(0) + \frac{\partial A(0)}{\partial x^T} x + \dots \approx \frac{\partial f(0)}{\partial x^T} x = \mathbb{J}x. \quad (11)$$

### 5.5 Экспонента Ляпунова

Определим **показатель Ляпунова** как  $\lambda(f, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |(f^n)'(x)|$ , где  $(f^n)'$  – производная  $n$ -ой итерации. Возможно, что предел не существует. Тогда в зависимости от ваших нужд можете рассмотреть  $\underline{\lim}$  или  $\overline{\lim}$ . Корректнее рассматривать  $\underline{\lim}$ , но за  $\overline{\lim}$  вас не осудят.

Можно проще. Воспользуемся тем, что  $(f^n)'(x) = f'(x_{n-1}) \dots f'(x_1) f'(x_0)$ , тогда

$$\lambda(f, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log |f'(x_k)|. \quad (12)$$

---

<sup>9</sup>Так, чтобы интересные фазовые траектории многократно пересекали  $S$  и были бы исключены касания.

## Список литературы

- [1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теоретическая физика. (т. 6) – Наука. – ISBN 5-9221-0055-6.
- [2] W. Hirsch, S. Smale, Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos 3rd Edition. – ISBN: 9780123820112.
- [3] С. П. Кузнецов, Динамический хаос (курс лекций). – М: Физматлит, 2001.
- [4] J. Gleick, Chaos, – Penguin books, 1987.
- [5] Rus. J. Nonlin. Dyn., 2012, vol. 8, no. 5, pp. 863–873 (Russian)