«Введение в турбулентность»

вопрос по выбору

Примак Евгений, Хоружий Кирилл

9 июня 2020 г.

Абстракт

- ✓ Рассмотрены сценарии перехода к турбулентности:
  - сценарий Ландау-Хопфа (Л. Д. Ландау, 1944) (+ эффект синхронизации колебаний);
  - бифуркация разрушения кв. период. режима (1978).
  - сценарий удвоения периода (1978).
- ✓ Решена задача о конвекции в замкнутой петле (1977).
- ✓ Создана рабочая модель водяного колеса (1987).
- ✓ Построен аттрактор Лоренца (Э. Лоренц, 1963).
- ✓ Проанализировано логистическое отображение (1976).

- ✗ Развитая турбулентность (А. Н. Колмогоров, 1941)

Проблема беспорядочных потоков

Уравнение течение вязкой жидкости:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \nu \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f}$$

Для возникновения турбулентного течения число Рейнольда должно превысить некоторое $\mathrm{R}_{\text{крит.}}$

$$\mathrm{R} = \frac{\rho v L}{\eta}$$

Развитие теории возникновения турбулентности

До возникновения же турбулентоного течения последовательное повышение R приводит к движению потоков по следующим сценариям:

стационарное → периодичное → квазипериодичное

Разберём их подробнее.

Определения

Динамическая система (DS) — тройка $\{E, f, T\}$, где $\boldsymbol{E}$ – фазовое пространство, $\boldsymbol{T}$ – множество, характеризующее эволюцию системы во времени; $\boldsymbol{f}$ – дифференцируемеое отображение $T \times E \to E$, или $f^t(x)$, где $t \in T$.

Пространство состояний (фазовое пространство) — каждая точка овтечает распределению скоростей в ней.

Аттрактор — $\boldsymbol{E}$: все траектории из $B \subset \boldsymbol{E}$ стремятся к нему, при $t \to \infty$.

Бифуркация — качественное изменение фазового портрета, при плавном изменении параметров DS.

Определения

Предельный цикл — ЗПТ системы дифференциальных уравнений, изолированная от других ЗПТ **и** ЗПТ: $\forall$ траекторий из некоторой окрестноти периодических траекторий стремится к ней при $t \longrightarrow +\infty$ (установившийся периодический цикл) **или** при $t \longrightarrow -\infty$ (неустановившийся предельный цикл).

Хаотичное отображение — f **хаотично**, если

1) Периодические точки всюду плотны в $\boldsymbol{E}$.

2) Орбиты перемешиваются (почти): $U_1, U_2 \subset \boldsymbol{E}$. $\forall x_0 \in U_1\ \exists N \in \mathbb{N} : f^N(x_0) \in U_2$.

3) f чувствительно к н.у.: $\forall x_0 \in \boldsymbol{E},\ \forall U_\varepsilon(x_0)\ \exists y_0 \in U_\varepsilon, \exists N \in \mathbb{N}\colon |f^n(x_0) - f^n(y_0)| > \beta$.

Мультипликатор

При $> R_{\text{кр}}$ найдём решения для:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{v}_2.$$

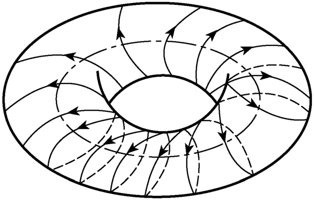
Решение будем искать в виде:

$$\boldsymbol{v}_2 = \Pi(\boldsymbol{r}, t)e^{-i\omega t}, \text{ где } \mu \equiv e^{-i\omega t} \text{ – мультипликатор.}$$

Потеря устойчивости происходит при $\mu \gtrsim 1$.

«Рождение» двумерного тора

Пусть $\mu = \exp\left(\pm 2\pi\alpha i\right)$, где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.



Геометрическим образом этого движения в пространстве состо- яний служит траектория в виде незамкнутой намотки на двумерном торе.

Причины

Предположим, что при $\uparrow$ будут последовательно появляться новые несоизмеримые периоды.

2D тор $\rightsquigarrow$ 3D тор $\rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow$ ND тор $\rightsquigarrow \dots$

Интервалы между числами $_{\text{кр}}$ $\downarrow$,
появляющиеся движения имеют все меньшие масштабы.

Движение приобретает сложный характер — **турбулентный**.

Реализация

Общий вид функции:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) = \sum \boldsymbol{A}_{p_1 p_2 \dots p_N}(\boldsymbol{r}) \exp\left(-i \sum_{i=1}^{N} p_i \varphi_i\right),$$

Интересное нам время:

$$t = \frac{\alpha - \beta_1}{\omega_1} + 2\pi s \frac{1}{\omega}.$$

Значение φ_2:

$$\varphi_2 = \beta_2 + \frac{\omega_2}{\omega_1}\left(\alpha - \beta_1 + 2\pi s\right).$$

Время возврата, растет с увеличением N и становится столь большим, что никакого следа периодичности не остается.

Проблема (синхронизация колебаний)

1) Пусть возмущенное решение содержит 2 независимые ω.
2) Возмущение на $\omega_1 \in U(_{\text{кр}2})$ интенсивно
$\Rightarrow$ возмущение на $\omega_1 \equiv$ при $\in U(_{\text{кр}2})$.
3) В некотором приближении получим, что φ_2 вращается с постоянной скоростью. С учетом надкритичесого поведения, перейдём к уравнению с возмущением.
4) В общем случае оно имеет стационарные решение $\varphi_2 = \varphi_2^0$, но также мы получаем, что **на торе существует предельный цикл – траектория через** m_1 **оборотов замыкается.**

Проблема (синхронизация колебаний)

Рождение предельного цикла $\Rightarrow$ синхронизация колебаний (исчезновение квазипериодического режима)

Таким образом **вероятность реального осуществления сценария Ландау- Хопфа мала.**

Конечное число «опасных» мультипликаторов

Рассмотрим $\mu \sim 1$: $\mathrm{card}\{\mu_i\} < +\infty$. Получим систему вида

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}).$$

Система диссипативна, так что:

$$\mathrm{div}\ \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \mathrm{div}\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \equiv \partial F^{(i)} / \partial x^{(i)}.$$

«Странность» аттрактора

Стремиться к предельному циклу или к незамкнутой намотке на торе? А может быть и по-другому..

- ✓ Рассмотрим внутри ограниченного объема траектори в предположении, что **они все неустойчивы**.
- ✓ Две сокль угодно близкие точки пространства состояний в дальнейшем разойдутся.
- ✓ Незамкнутая траектория может подойти к самой себе сколь угодно близко.

$\rightsquigarrow$ **турбулентное движение жидкости.**

Бифуркация разрушения квазипериодического режима

Сколь угодно малая нелинейность может **разрушить намотку на торе**, создав на торе **странный аттрактор** *(D. Ruelle, F. Tokens, 1971)*.

Но, по теореме Пуанкаре-Бендиксона на двумерной поверхности невозможно существование хаотического режима.

На третьей бифуркации возникновение странного аттрактора становится возможным *(D. Ruelle, F. Tokens, 1978)*.

Структура (канторовость) странного аттрактора

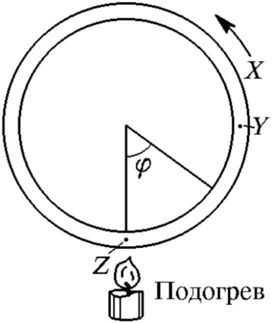
- ✓ Элемент объёма в окрестности седловой траектории в одном из направлений растягивается, в другом сжимается.
- ✓ Ввиду диссипативности объёмы должны уменьшаться.
- ✓ По ходу траекторий направления должны меняться.

$\Rightarrow$ уменьшение по площади и изгиб формы.

$\Rightarrow$ система вложенных полос, разделенных пустотами.

$\Rightarrow$ канторовость странного аттрактора (характерное свойство).

Постановка задачи о конвекции



Зарождение квазипериодических потоков можно пронаблюдать на примере задачи о конвекции в замкнутой петле.

При достаточно большой интенсивности подогрева возможно возникновение конвекционного течения в трубе.

Метод решения

Ограничившись разложением уравнения $T(\varphi)$ в ряд Фурье только до первой гармоники:

$$T(\varphi) = T_0(1 + Y\sin\varphi + Z\cos\varphi)$$

Исходя из качественных соотношений составим уравнения для динамических переменных X, Y, Z, подставляя их в выражение для $T(\varphi)$, получим их в виде.

$$\dot{X} = cY - \beta X, \qquad \dot{Y} = XZ - DY, \qquad \dot{Z} = A - XY - DZ$$

Пояснения

Предположим, что имеет место течение с постоянной скоростью, $\dot{\varphi} = X$. Тогда можно записать:

$$T = f(\varphi - Xt) = T_0(1 + Y\sin(\varphi - Xt) + Z\cos(\varphi - Xt))$$

Введя обозначение $\varphi' = \varphi - Xt$:

$$\dot{T} = T_0(Y\dot{\varphi}'\cos\varphi' - Z\dot{\varphi}'\sin\varphi') = T_0(-XY\cos\varphi' + ZX\sin\varphi').$$

Решение

Далее, производя замену переменных для уравнений для X, Y, Z:

$$X = Dx, \qquad Y = \frac{\beta D y}{c}, \qquad Z = -\frac{\beta D z}{c}, \qquad t = Dt,$$

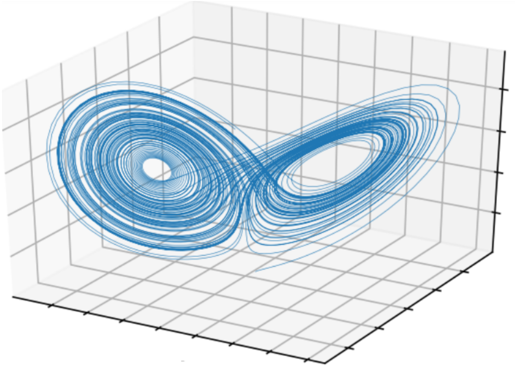
получаем уравнения Лоренца:

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \qquad \dot{y} = rx - y - xz, \qquad \dot{z} = -bz + xy$$

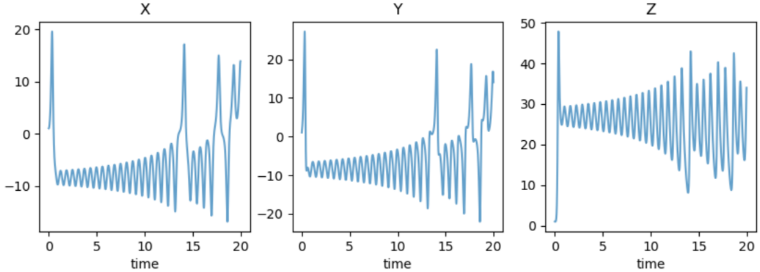
решение которых сводится к решению системы дифференциальных уравнений.

Исследование решения

Промоделируем полученное решение с помощью *Python*.

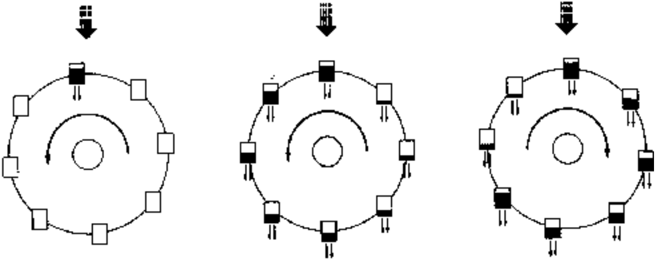


Также в проекции на каждую ось действительно наблюдается хаотичное поведение.

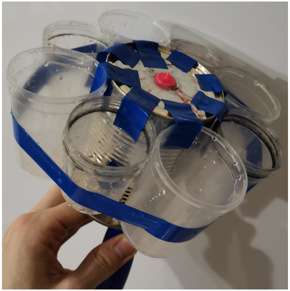


Механическая аналогия

Так называемое Водяное колесо Лоренца имеет в своей сущности чисто механические уравнения, однако их решения сводится всё к той же системе уравнений Лоренца.



Неудавшийся эксперимент



Был проделан эксперимент, в ходе которого было замечено непериодическое движение колеса.
Однако при попытке снять экспериментальные точки обнаружилась невозможность это проделать из-за неисправности установки.

Отображение Пуанкаре

Введём в пространстве плоскость вдоль направления одного из мультипликаторов. Тогда оставшиеся оставшиеся траектории других будут прижиматься к плоскости. Разрежем поток траекторий вблизи этой плоскости некоторой секущей поверхностью. Каждая траектория повторно пересекая эту поверхность ставит в соответствие $x_j \rightsquigarrow x_{j+1}$.

Связь $\boldsymbol{x}_{j+1} = f(\boldsymbol{x}_j : R)$ называют **отображением Пуанкаре** (или отображением последования) Дискретная о играет роль времени.

К одномерному случаю

Одномерное отображение Пуанкаре дает альтернативный способ определения характера течения вблизи бифуркации.

Самому периодическому движению отвечает **неподвижная точка** – значение $x_j = x_*$, не меняющееся при отображении. Неподвижная точка также может быть устойчивой и нет, в зависимости от $|\mu|$.

Бифуркация удвоения периода

Рассмотрим переход μ через значение -1 в окрестности предельного цикла с периодом T_0, вследствие которого возникает новый предельный цикл с периодом $2T_0$ – бифуркация удвоения периода.

Вблизи $x = 0$ отображение, описывающее бифуркацию удвоения периода:

$$x_{j+1} = -[1 + (R - R_1)]x_j + x_j^2 + \beta x_j^3,$$

Путь в возникновение турбулентности

Двукратная же итерация того же преобразования приводит к отображению:

$$x_{j+2} = x_j + 2(R - R_1)x_j - 2(1+\beta)x_j^3.$$

При $R > R_1$ точка $x_* = 0$ становится неустойчивой. В этот момент рождается пара устойчивых неподвижных точек $x_*^{(1),(2)} = \pm\left[\frac{R-R_1}{1+\beta}\right]^{1/2}$, которые и соответствуют устойчивому предельному циклу удвоенного периода.

Логистическое отображение

Простейшим примером отображения Пуанкаре является **логистическое отображение**.

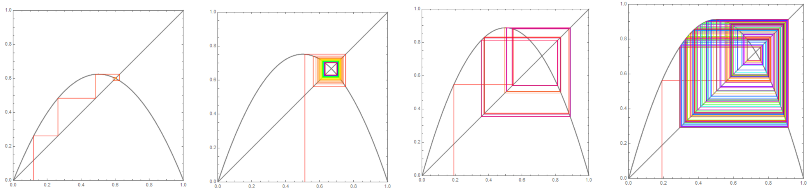
В частности модель популяции вида с ограниченными ресурсами принимает такой вид:

$$x_{n+1} = \lambda x_n \left(1 - \frac{x_n}{M}\right),$$

Построение

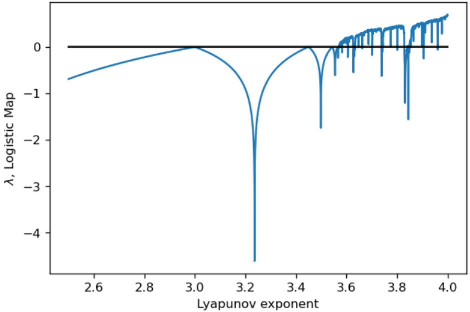
Упростим выражение, обозначив за x выражение $x \cdot M$, тогда имеем **логистического отображение**:

$$x_{n+1} = \lambda x_n \left(1 - x_n\right).$$



Интересные значения

Для данного отображения в *Python* была рассчитана зависимость показателя Ляпунова от параметра:



Литература

- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теоретическая физика. (т. 6) – Наука. – ISBN 5-9221-0055-6.
- W. Hirsch, S. Smale, Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos 3rd Edition. – ISBN: 9780123820112.
- С. П. Кузнецов, Динамический хаос (курс лекций). – М: Физматлит, 2001.
- J. Gleick, Chaos, – Penguin books, 1987.
- Rus. J. Nonlin. Dyn., 2012, vol. 8, no. 5, pp. 863–873 (Russian)

В итоге в ходе работы была изучена подходы к возникновению энтропии, изучена теория, относящаяся к ним.
С помощью компьютерных програм были рассчитаны и построены решения получившихся систем.
Также решена задача и предпринята попытка экспериментально воссоздать условия зарождения хаотичного движения.
Прочитаны статьи на связанные темы.

Спасибо за внимание!