# Заметки по **линейной алгебре** II

**Авторы**: Хоружий Кирилл
Примак Евгений

**От**: *10.06.2020*

## Содержание

# 1 Векторные пространства

## 1.1 Начальные понятия

**Def 1.1.** Пусть $\mathbb{F}$ – произвольное поле. **Векторным пространством** над $\mathbb{F}$ называется множество $V$ элементов (векторов), удовлетворяющее следующим аксиомам:

а) На $V$ бинарная операция $V \times V \to V$:

I. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ (коммутативность);

II. $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$ (ассоциативность);

III. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$, $\forall \boldsymbol{x} \in V$ (нулевой вектор);

IV. $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, $\forall \boldsymbol{x} \in V$ (обратный вектор);

б) На $\mathbb{F} \times V$ операция $(\lambda, \boldsymbol{x} \to \lambda \boldsymbol{x})$:

V. $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ (унитарность);

VI. $(\alpha\beta)\boldsymbol{x} = \alpha(\beta \boldsymbol{x})$ (ассоциативность);

VII. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{x}$;

VIII. $\lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda \boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{y}$.

**Def 1.2.** Пусть $V$ – векторное пространство над $\mathbb{F}$, $U \subset V$ – его подмножество, аддитивна подгруппа и переходящая в себя при умножении на скаляры. Тогда ограничение на $U$ операций в $V$ делает $U$ векторным пространством. $U$ – **векторное подпространство** V.

**Def 1.3.** Векторы $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ подпространства $V$ – **линейно зависимы**, если $\exists$ их нетривиальная **ЛК** равная нулю. В противном случае – линейно независимы.

**Thr 1.4.** *Если линейная система векторов линейно независима, то и всякая её подсистема также линейно независима.*

**Thr 1.5.** *Если в $V$ $\forall \boldsymbol{e}_i \in (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_s)$ – **ЛК** векторов из $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_t)$, **то** $s \leqslant t$.*

**Con 1.6.** *$\forall$две эквивалентные ЛНеЗ системы векторов в $V$ содержат одинаковое число векторов.*

## 1.2 Размерность и базис

**Def 1.7.** **Ранг** системы векторов – число векторов в любой max ЛНеЗ подсистеме.

**Def 1.8.** $V$, содержащее $n$ ЛНеЗ векторов, в котором не ЛНеЗ систем большего ранга, называется **n-мерным**. $\dim_{\mathbb{F}} V = n$.

**Def 1.9.** $\dim_{\mathbb{F}} V = n$. Любая система и $n$ независимых векторов называется **базисом** пространства $V$.

**Thr 1.10.** $\dim_{\mathbb{F}} V = n$ *с* $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. *Тогда: 1) $\forall \boldsymbol{v} \in V$ $\exists!$ ЛК из векторов базиса; 2) любую систем из $s < n$ ЛНеЗ векторов можно дополнить до базиса.*

**Def 1.11.** $\dim_{\mathbb{F}} V = n$ с $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. $\lambda_i \in \mathbb{F}$ называются **координатами вектора**: $\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda \boldsymbol{e}_n$.

**Thr 1.12.** *При переходе $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \rightsquigarrow (\boldsymbol{e'}_1, \ldots, \boldsymbol{e'}_n)$, определяемом $A \in \mathcal{M}_{nn}$, координаты $\boldsymbol{v}$: $\lambda_j^{\text{новые}}$ выражаются через $\lambda_i^{\text{старые}}$ при помощи обратимого линейного преобразования с $A^{-1}$.*

**Def 1.13.** $V$ и $W$ над $\mathbb{F}$ – **изоморфны**, если $\exists$ биективное $f \colon V \to W : f(\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{u}) + \beta f(\boldsymbol{v})$.

**Thr 1.14.** *Все $V$ одинаковой $\dim = n$ над $\mathbb{F}$ изоморфны (координатному пространству $\mathbb{F}^n$).*

**Thr 1.15.** *$U, W$ – конечномерные подпространства $V$. Тогда :* $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

**Def 1.16.** Если $\forall \boldsymbol{u} \in U$ может быть однозначно представлен в виде $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \ldots + \boldsymbol{u}_m$. То сумма называется **прямой**: $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$.

**Thr 1.17.** *$U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ – прямая $\iff U_i \cap (U_1 + \ldots + U_m) = \boldsymbol{0}$, для $i = 1, \ldots, m$.*

**Thr 1.18.** *$U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$ – прямая* $\iff \dim U = \sum\limits_{i=1}^{m} \dim U_i$.

**Thr 1.19.** *$\forall m$-мерного $U \subset V$ $(\dim V = n)$ $\exists W (\dim W = n - m) : V = U \oplus W$.*

### 1.3 Факторпространство

К заданному пространству $L \subset V$ существует, вообще говоря, много дополнительных подпространств $M \subset V$, для которых $V = L \oplus M$. Но все такие дополнения изоморфны одному векторному пространству, которое строится по $V$ и $L$ абсолютно инвариантным образом.

Будем смотреть на $V$ и $L$ как на аддитивные абелевы группы. Множество

$$\boldsymbol{x} + L = \{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} \in L\}$$

называется *смежным классом* $V$ по $L$, вектор $\boldsymbol{x}$ - представитель смежного класса. Если $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{z} \in (\boldsymbol{x} + L) \cap (\boldsymbol{x}' + L)$, то $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{z}$. Поэтому два смежных класса либо не пересекаются, либо совпадают. При фиксированном $L$ положим $\overline{\boldsymbol{x}} := \boldsymbol{x} + L$. Каждый вектор $\boldsymbol{v} \in V$ попадает в какой-то смежный класс, и если $\overline{V} = V/L$ – множество всех смежных классов $V$ по $L$, то на $\overline{V}$ устанавливается структура абелевой группы по правилу $\overline{\boldsymbol{x}} + \overline{\boldsymbol{x}'}$. Коммутативность и ассоциативность проверяются непосредственно. Понятно, что $\overline{\boldsymbol{0}} = L$ – нулевой элемент этой абелевой группы: $\overline{\boldsymbol{x}} + \overline{\boldsymbol{0}} = \overline{\boldsymbol{x}}$.

Таким образом, $\overline{V} = V/L$ наделено естественным образом структурой векторного пространства, которое и называется *факторпространством*.

**Thr 1.20.** *Пусть $V = L \oplus M$ – прямая сумма подпространств, $L, M \subset V$. Тогда отображение $f\colon \boldsymbol{u} \to \boldsymbol{u} + L$ $(\boldsymbol{u} \in M)$ является изоморфизмом между $M$ и $V/L$.*

Как следствие, получим оценку размерности факторпространства. Пусть $L \subseteq V$. Тогда

$$\dim V/L = \dim V - \dim L.$$

# 2 Линейные отображения

## 2.1 Линейные отображения векторных пространств

**Def 2.1.** Отображение $f\colon V \to W$ называется *линейным*, если

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}), \qquad f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x}).$$

С любым линейным отображением $f\colon V \to W$ ассоциируются два подпространства:

*ядро*: $\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = 0\}$,

*образ*: $\operatorname{Im} f = \{\boldsymbol{w} \in W \mid \boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v} \in V\}$.

**Thr 2.2.** *Пусть $V$ над $\mathbb{F}$, $f\colon V \to W$. Тогда $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ конечномеры и*

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V.$$

$\triangle$. Так как $\operatorname{Ker} f \subset V$, то $\dim \operatorname{Ker} f \leqslant \dim V \leqslant \infty$. Любой вектор из $\operatorname{Im} f$ имеет вид

$$f\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{e}_i\right) = \sum\nolimits_{i=k+1}^{n} \alpha_i f(\boldsymbol{e}_i), \qquad \alpha_i \in \mathbb{F}.$$

т.е. векторы $f(\boldsymbol{e}_{k+1}), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)$ порождают $\operatorname{Im} f$.

Они линейно независимы. Действительно, пусть $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i f(\boldsymbol{e}_i) = 0$. Тогда $f(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda \boldsymbol{e}_i) = 0$. Это значит, что $\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i \boldsymbol{e}_i \in \operatorname{Ker} f$. Но всякая линейная зависимость между базисными элементами должна быть тривиальной. $\square$

## 2.2 Аффинные (точечные) пространства

Во-первых в этом параграфе введем множество *точек* $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, \ldots$. Назовём его $\mathbb{A}$. Пусть $V$ – векторное пространство над $\mathbb{F}$. Пара $(\mathbb{A}, V)$ называется *аффинным пространством*, ассоциированным (или связанным) с $V$, если задано отображение $(\dot{p}, \boldsymbol{v}) \to \dot{p} + \boldsymbol{v}$, такое, что:

1) $\dot{p} + \boldsymbol{0} = \dot{p}$, $(\dot{p} + \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{v} = \dot{p} + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$ для $\forall p \in \mathbb{A}$ и $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$;

2) $\forall \dot{p}, \dot{q} \in \mathbb{A}$, $\exists! \boldsymbol{v} \in V : \dot{p} + \boldsymbol{v} = \dot{q}$.

**Def 2.3.** Пусть $\mathbb{A}, \mathbb{A}'$ – аффинные пространства, ассоциированные с векторными пространствами $V, V'$ над одним и тем же $\mathbb{F}$. Отображение $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ называется *аффинным* (или *аффинно-линейным*), если $\forall \dot{p} \in \mathbb{A}$, $\boldsymbol{v} \in V$ выполнено соотношение

$$f(\dot{p} + \boldsymbol{v}) = f(\dot{p}) + Df \cdot \boldsymbol{v}, \tag{1}$$

где $Df\colon V \to V'$ – линейное отображение векторных пространств. Отображение $Df$ называют иногда *линейной частью* (или *дифференциалом*) отображения $f$. Для биективного аффинно-линейного отображения $f$ линейная часть $Df$ тоже биективна. В этом случае говорят об изоморфизме между $\mathbb{A}$ и $\mathbb{A}'$, а при $\mathbb{A}' = \mathbb{A}$ – об *аффинном автоморфизме* пространства $\mathbb{A}$, реализованном посредством *невырожденного аффинного преобразования* $f$.

Из такого определения становится очевидным такой ряд свойств, как сохранение параллельности, отношения между отрезками и т.д. связанного с биективностью отображения. Примером таких преобразований служит поворот, растяжение/сжатие, отражение, перенос.

**Def 2.4.** *Системой координат* в $n$-мерном аффинном пространстве $(\mathbb{A}, V)$ называется совокупность $\{\dot{o}; \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ точки $\dot{o} \in \mathbb{A}$ и базиса $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ в $V$. Координатами $x_1, \ldots, x_n$ точки $\dot{p}$ считаются координаты вектора $\overline{op}$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$: $\overline{op} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$.

**Def 2.5.** Пусть $\dot{p}$ – фиксированная точка $n$-мерного аффинного пространства $(\mathbb{A}, V)$ и $U$ – векторное подпространства в $V$. Тогда множество

$$\Pi = \dot{p} + U = \{\dot{p} + \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} \in U\}$$

называется *плоскостью* (или *афинным подпространством*) в $\mathbb{A}$ размерности $m = \dim U$. Считается, что $\Pi$ проходит через точку $\dot{p}$ в направлении $U$.

Проведём некоторое рассуждения, для понимания необходимости этого языка. Пусть $\dot{q} = \dot{p} + \boldsymbol{u}$, $\dot{r} = \dot{p} + \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$, то

$$\dot{q} + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = \dot{p} + \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = \dot{p} + \boldsymbol{v} = \dot{r}.$$

Тогда $\overline{qr} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$, соответственно из $\dot{q}, \dot{r} \in \Pi \Longrightarrow \overline{qr} \in U$.

**Thr 2.6.** *Всякая плоскость* $\Pi = \dot{p} + U$ *в аффинном пространстве сама является афинным пространством, ассоциированным с* $U$.

**Thr 2.7.** *Подмножество* $\Pi \subset \mathbb{A}$ *тогда, и только тогда является подпространством, когда оно целиком содержит прямую, проходящую через любые две его различные точки.*

**Def 2.8.** Любае две плоскости в направлении одного и того же подпространства $U$ называют параллельными.

Аналогично можно определить аффинный функционал. Отображение $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{F}$ называется аффинно-линейной функцией, если

$$f(\dot{p} + \boldsymbol{v}) = f(\dot{p}) + Df \cdot \boldsymbol{v} \qquad \forall \dot{p} \in \mathbb{A}, \boldsymbol{v} \in V.$$

Выбрав систему координат $\{\dot{o}; \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, выразим значение $f$ в виде

$$f(\dot{p}) = f(\dot{o} + \overline{op}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \alpha_0,$$

где $\alpha_0 = f(\dot{o}), \alpha_i = Df \cdot \boldsymbol{e}_i$, $\overline{op} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$.

**Thr 2.9.** *Пусть* $\mathbb{A}$ *– аффинное пространство размерности* $n$*. Множество точек из* $\mathbb{A}$*, координаты которых удовлетворяют совместной системе линейных уравнений ранга* $r$*, образуют* $(n - r)$*-мерную плоскость* $\Pi \subset \mathbb{A}$*. Любая плоскость в* $\mathbb{A}$ *может быть так получена.*

**Def 2.10.** Пусть $\Pi' = \dot{p} + U'$, $\Pi'' = \dot{q} + U''$ ($U'$, $U''$ — векторные подпространства в $V$ размерностей $k, l$). Говорят, что плоскость $\Pi'$ *параллельна* $\Pi''$, если $U'' \subseteq U'$.

## 2.3 Евклидовы (точечные) пространства

**Def 2.11.** Аффинное пространство $(\mathbb{E}, V)$ называется *евклидовым (точечным) пространством*, если $V$ – евклидово векторное пространство. Или, тройка $(\mathbb{E}, V, \rho)$.

Аналогично раннему, можем посмотреть на расстояния между объектами (см. стр. 191, $\mathbb{K}$).

**Thr 2.12.** *Определитель Грама системы векторов* $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$*, отличен от нуля в точности тогда, когда векторы системы линейно независимы. Всегда выполнено неравенство* $G(\boldsymbol{e}_1, \ldots \boldsymbol{e}_m) \geqslant 0$.

**Thr 2.13.** *При аффинном преобразовании n-мерного евклидова пространства объём параллелепипеда, построенного на n векторах, умножается на модуль определителя преобразования. Другими словами, отношение объёмов параллелепипедов сохраняется.*

**Thr 2.14.** *Всякое невырожденное аффинное преобразование $f$ n-мерного евклидова пространства $(\mathbb{E}, V)$ есть произведение:*

*1) сдвига на некоторый вектор;*

*2) движения, оставляющего неподвижной некоторую точку $\dot{o}$;*

*3) аффинного преобразования $h$, являющегося композицией $n$ сжатий вдоль взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в точке $\dot{o}$.*

# 3 Структура линейного преобразования

## 3.1 Алгебра линейный операторов

При $V = W$ элемент векторного пространства $\mathcal{L}(V)$ называют *линейным оператором* или *линейным преобразованием.*

Примерами являются: нулевой оператор $\mathcal{O}$ (переводит любой вектор $\boldsymbol{v} \in V$ в нулевой), оператор проектирования ($\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$), оператор подобия, дифференцирования, ...

## 3.2 Алгебра операторов

Отдельный интерес представляет **алгебра операторов**. Понятно, что $\mathcal{L}(V)$ – векторное пространство размерности $\dim \mathcal{L}(V) = (\dim V)^2$. Можно по аксиомам проверить, что $\mathcal{L}(V)$ является одновременно векторным пространством над $\mathbb{F}$.

**Def 3.1.** Кольцо $K$ является одновременно векторным пространством над $\mathbb{F}$ таким, что $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$ для всех $\lambda \in \mathbb{F},\ a, b \in K$, называется *алгеброй* над $\mathbb{F}$. Размерность $K$ как векторного пространства называется *размерностью алгебры* $K$ над $\mathbb{F}$. Всякое векторное подпространство $L \subset K$, замкнутое относительно операции умножения в $K (L \cdot L \subseteq L)$, называется *подалгеброй* алгебры $K$.

Нам интересна алгебра $\mathbb{F}[\mathcal{A}]$ – наименьшая алгебра, содержащая $\mathcal{A}$. Какова её размерность? Далее докажем, что

$$\dim \mathbb{F}[\mathcal{A}] \leqslant \dim V.$$

**Def 3.2.** Многочлен $f(t)$ *аннулирует* линейный оператор $\mathcal{A}$, если $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. Нормализованный многочлен минимальной степени, аннулирующий $\mathcal{A}$, называется *минимальным многочленом* оператора $\mathcal{A}$.

**Thr 3.3.** *Для всякого линейного оператора $\mathcal{A}$ существует $\mu_{\mathcal{A}}(t)$. Оператор $\mathcal{A}$ обратим тогда, и только тогда, когда свободный член $\mu_m$ отличен от нуля.*

$\triangle$. Эксплуатируем тот факт, что делители нуля необратимы. $\square$

**Thr 3.4.** *Любой аннулирующий многочлен $f(t)$ оператора $\mathcal{A}$ делится без остатка на $\mu_{\mathcal{A}}(t)$.*

**Def 3.5.** Линейный оператор $\mathcal{A}$ называется *нильпотентным*, если $\mathcal{A}^m = \mathcal{O}$ для некоторого $m > 0$; наименьшее такое натуральное число $m$ называется *индексом нильпотентности.*

## 3.3 Инвариантные подпространства и собственные векторы

### 3.3.1 Проекторы

Пусть $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_m$, тогда $\boldsymbol{x} \in V$:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \boldsymbol{x}_m, \qquad x_i \in W_i,$$

а отображение $\mathcal{P}_i \colon \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}_i \in \mathcal{L}(V)$. Наконец,

$$W_i = \mathcal{P}_i V = \{\boldsymbol{x} \in V \mid \mathcal{P}_i \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\},$$
$$K_i = \operatorname{Ker} \mathcal{P}_i = W_1 + \ldots + W_m$$

и $\mathcal{P}_i$ по сути оператор проектирования $V$ на $W_i$ вдоль $K_i$.

**Thr 3.6.** $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_m : V \to V$ *– конечное множество линейных операторов таких, что*

$$\sum_{i=1}^{m} \mathcal{P}_i = \mathcal{E}; \quad \mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m; \quad \mathcal{P}_i \mathcal{P}_j = \mathcal{O},\ i \neq j.$$

*Тогда*

$$V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_m,\ \text{где}\ _i = \operatorname{Im} \mathcal{P}_i.$$

$\triangle$. Через разбиение $\forall \boldsymbol{x} \in V$ получим

$$\boldsymbol{x} = \mathcal{E}\boldsymbol{x} = \sum \mathcal{P}_i \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_i + \ldots + \boldsymbol{x}_m, \quad \boldsymbol{x}_i \in W_i,$$

тоесть $V = W_1 + \ldots + W_m$. Докажем, что сумма прямая. Пусть $\boldsymbol{x} \in W_j \cap \left(\sum_{i \neq j} W_i\right)$. Но, $\exists \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$:

$$x = \mathcal{P}_j(\boldsymbol{x}_j) = \sum_{i \neq j} \mathcal{P}_i(\boldsymbol{x}_i).$$

Применим $\mathcal{P}_j$, получим

$$\boldsymbol{x} = \mathcal{P}_j^2(\boldsymbol{x}_j) = \sum_{i \neq j} \mathcal{P}_j \mathcal{P}_i(\boldsymbol{x}_i) = \mathbf{0}.$$

$\square$

### 3.3.2 Инвариантные подпространства

**Def 3.7.** Подпространство $U \subset V$ *инвариантно* относительно $\mathcal{A} : V \to V$, если $\mathcal{A}U \subset U$.

**Thr 3.8.** *Пространство $V$ является прямой суммой двух подпространств $U, W$, инвариантных относительно $\mathcal{A} : V \to V$, тогда, и только тогда, когда $\exists$ базис такой, что $\mathcal{A}$ принимает блочно диагональный вид.*

### 3.3.3 Собственные векторы. Характеристический многочлен.

**Def 3.9.** Любой ненулевой вектор из одномерного подпространства, инвариантного относительно $\mathcal{A}$, называется *собственным вектором* оператора $\mathcal{A}$. Если $\boldsymbol{x}$ – собственный вектор, то $\mathcal{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$, $\lambda \in \mathbb{F}$ называется *собственным значением* $\mathcal{A}$.

Очевидная импликация $\mathcal{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x},\ \mathcal{A}\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{y} \Longrightarrow \mathcal{A}(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \lambda(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y})$ даёт основание называть $V^\lambda$ *собственным подпространством* оператора $\mathcal{A}$, ассоциированным с $\lambda$. Его размерность $\dim V^\lambda$ называется *геометрической кратностью* $\lambda$.

Уместно ввести понятие *характеристического многочлена*, ассоциированного с $\mathcal{A}$. Кратность $\lambda$ как корня характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ называется *алгебраической кратностью* $\lambda$ оператора $\mathcal{A}$.

**Thr 3.10.** *Геометрическая кратность $\lambda$ не превосходит его алгебраической кратности.*

$\triangle$. Действительно, пусть $\mathcal{A}'$ – ограничение $\mathcal{A}$ на $V^\lambda$, тогда $\det(t\mathcal{E}' - \mathcal{A}') = (t-\lambda)^m$, причём $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t-\lambda)^m q(t)$. Пусть $\lambda$ – корень кратности $k$ многочлена $q(t)$. Тогда алгебраической кратностью $\lambda$ будет $m + k$. $\square$

### 3.3.4 Критерий диагонализируемости

**Def 3.11.** Множество всех собственных значений линейного оператора $\mathcal{A}$ называют *спектром* – $\operatorname{Spec} \mathcal{A}$. Еси все точки спектра простые, то и спектр называется *простым*.

**Lem 3.12.** *Собственные векторы, принадлежащие к различным собственным значениям, линейно независимы. Сумма $\sum_{\lambda \in \operatorname{Spec} \mathcal{A}} V^\lambda$ прямая.*

$\triangle$. По индукции докажем ЛНеЗ набора $e_i \in V^{\lambda_i}\ \forall i$.

$$\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha \boldsymbol{e}_m = \mathbf{0} \quad \mapsto \quad \alpha_1 \lambda_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_m \lambda_m \boldsymbol{e}_m = 0.$$

Умножая на $\lambda_m$ первое соотношение и вычитая из него второе, приходим к линейной зависимости первых $m - 1$ векторов:

$$\alpha_1(\lambda_m - \lambda_1)\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})\boldsymbol{e}_{m-1} = \mathbf{0}.$$

Но $\alpha_1(\lambda_m - \lambda_1) \neq 0$. По доказанному $V^{\lambda_i} \cap \sum_{j \neq i} V^{\lambda_j} = \mathbf{0}$. $\square$

**Def 3.13.** Линейный оператор $\mathcal{A}$ на $n$-мерном пространстве $V$ называют *диагонализируемым*, если существует базис $(\boldsymbol{e}_i)$, относительно которого матрица оператора принимает диагональный вид.

**Thr 3.14.** *Линейный оператор $\mathcal{A}$ с простым спектром диагонализируем.*

**Thr 3.15.** *Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор на конечномерном векторном пространстве $V$ над полем $\mathbb{F}$. Для диагонализируемости $\mathcal{A}$ необходимо и достаточно, чтобы все корни $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ лежат в $\mathbb{F}$* **и** *геометрическая кратность каждого собственного значения $\lambda$ совпадает с его алгебраической кратностью.*

$\triangle_{\Leftarrow}$. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – различные корни многочлена $\chi_{\mathcal{A}}(t)$, а $k_1, \ldots, k_m$ – их кратности, то $\dim V^{\lambda_i} = k_i$ и $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. По лемме 3.12 любая совокупность $\boldsymbol{v}_i \in V^{\lambda_i}$ линейно независима, так что

$$V^{\lambda_i} \cap \left(V^{\lambda_1} + \ldots + \cancel{V^{\lambda_i}} + \ldots + V^{\lambda_m}\right) = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Значит сумма прямая. Взяв за базис объединение базисов в $V^{\lambda_i}$, мы придём к *собственному базису.* $\square$

$\triangle_{\Rightarrow}$. Пусть $\mathcal{A}$ диагонализируем. Положим $l_i = \dim V^{\lambda_i}$. Из 2 верно, $V$ имеет собственный базис из элементов $V^{\lambda_i}$, соотвественно $V^{\lambda_1}, \ldots, V^{\lambda_m}$ порождают $V$. Из равенства для $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ вытекает, что все корни многочлена принадлежат $\mathbb{F}$, т.е. выполнено первое условие. Также $l_i$ совпадает с алгебраической кратностью $\lambda_i$. $\square$

### 3.3.5 Существование инвариантных подпространств

**Thr 3.16.** *Всякий комплексный $\mathcal{A}$ имеет одномерное инвариантное подпространство. Всякий вещественный $\mathcal{A}$ имеет одномерное или двумерное инвариантное подпространство.*

$\triangle$. Так как $\chi_{\mathcal{A}}$ имеет в $\mathbb{C}$ хотя бы один корень.

Для $\mathbb{R}$ рассмотрим $\mu_{\mathcal{A}}$. Его коэффициенты лежат в $\mathbb{R}$. Если $\mu_{\mathcal{A}}$ имеет вещественный корень, то

$$\mu_{\mathcal{A}} = (t - \alpha)g(t), \qquad g(t) \in \mathbb{R}[t].$$

Так как $g(\mathcal{A}) \neq \mathcal{O}$ в силу минимальности $\mu_{\mathcal{A}}$, то $g(\mathcal{A})\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ для некоторого $\boldsymbol{u} \in V$. Но

$$(\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}) = (\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E})g(\mathcal{A})\boldsymbol{u} = \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})\boldsymbol{u} = \mathbf{0},$$

откуда $\mathcal{A}\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v}$, т.е. $\boldsymbol{v}$ – собственный вектор.

Если у $\mathcal{A}$ нет собственных векторов, то у $\mu_{\mathcal{A}}$ нет вещественных корней. Однако

$$\mu_{\mathcal{A}}(t) = (t^2 - \alpha t - \beta t)h(t), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad h(t) \in \mathbb{R}[t].$$

Снова $\boldsymbol{v} = h(\mathcal{A})\boldsymbol{u} \neq 0$ для некоторого $\boldsymbol{u} \in V$ и

$$\mathcal{A}^2\boldsymbol{v} - \alpha\mathcal{A}\boldsymbol{v} - \beta\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

Получается, что $\mathcal{A}^2\boldsymbol{v} = \alpha\mathcal{A}\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}$. Так как $\mathcal{A}\boldsymbol{v} \neq \lambda\boldsymbol{v}$, то $L = \langle \boldsymbol{v}, \mathcal{A}\boldsymbol{v} \rangle$ – двумерное инвариантное подпространство. $\square$

### 3.3.6 Сопряженный линейный оператор

Посмотрим на связь оператора и сопряженного пространства. При любом фиксированном элементе $f \in V^*$ отображение $x \mapsto (f, \mathcal{A}\boldsymbol{x}) := f(\mathcal{A}\boldsymbol{x})$ снова является элементом из $V^*$, т.е. линейной функцией. Раз это так, то можем положить

$$(\mathcal{A}^* f, x) := (f, \mathcal{A}\boldsymbol{x}). \tag{3}$$

**Def 3.17.** Линейный оператор $\mathcal{A}^*$ на $V^*$, заданный соотношением (3), называют оператором, *сопряженным* к $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$.

**Thr 3.18.** *Если в базисе $(\boldsymbol{e}_i)$ пространства $V$ линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $A = (a_{ij})$, то в дуальном базисе $(e^i)$ пространства $V^*$ сопряженный к $\mathcal{A}$ оператор $\mathcal{A}^*$ имеет транспонированную матрицу $A^T$: $A^* = (a^*_{ij}) = A^T$.*

Одновременное рассмотрение пар $(V, \mathcal{A})$ и $(V^*, \mathcal{A}^*)$ часто приводит к практическим результатам. Одним из содержательных примеров является доказательство следующей теоремы.

**Thr 3.19.** *Всякий комплексный линейный оператор на $V$ обладает инвариантной гиперплоскостью.*

$\triangle$. Пусть $\dim V = n$. Как мы знаем, $\dim \operatorname{Ker} f = n - 1$ для любой линейной функции $f \neq 0$ на $V$. Возьмём в качетсве $f$ собственный вектор линейного оператора $\mathcal{A}^*$ на $V^*$. Тогда $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow 0 = \lambda(f, \boldsymbol{x}) = (\lambda f, \boldsymbol{x}) = (\mathcal{A}^* f, \boldsymbol{x}) = (f, \mathcal{A}\boldsymbol{x}) \Rightarrow \mathcal{A}\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f$. Собственно, $\operatorname{Ker} f$ – искомая гиперплоскость. $\square$

### 3.3.7 Фактороператор

Пусть $L$ – подпространство, инвариантное относительно линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего на $V$. Считая $V$ и $L$ фиксированными, будем обозначать факторпространство $V/L$, символом $\overline{V}$, а любой его элемент $\boldsymbol{x}+L$ через $\overline{\boldsymbol{x}}$.

**факторпространство – это ..?**

**Def 3.20.** Соотношением $\overline{\mathcal{A}}\cdot\overline{\boldsymbol{x}}=\overline{\mathcal{A}\boldsymbol{x}}$ на $\overline{V}$ *фактороператор*. Другими словами, $\overline{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x}+L)=\mathcal{A}\boldsymbol{x}+L$.

## 3.4 Жорданова нормальная форма

### 3.4.1 Теорема Гамильтона-Кэли

**Thr 3.21.** *Матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$ всегда можно привести (в смысле подобия) к треугольному виду.*

$\triangle$. Выберем $n-1$-мерную инвариантную гиперплоскость. По индукции придём к верхнетреугольному виду. $\square$

**Thr 3.22** (теорема Гамильтона-Кэли)**.** *Линейный оператор $\mathcal{A}$ и соответсвующая ему матрица $A$ аннулируются своим характеричтическим многочленом $\chi_{\mathcal{A}}(t)$, т.е.*

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})=\mathcal{O}.$$

### 3.4.2 ЖНФ: формулировка и следствие

**Thr 3.23.** *Каждая квадратная матрица $A$ порядка $n$ над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ (достаточно, чтобы $\chi_A$ раскладывался на линейные сомножители) приводится к жордановой нормальной форме. Именно, $\exists C(\det C\neq 0)\colon C^{-1}AC=J(A)=J$. С точностью до перестановки клеток жорданова нормальная форма матрицы единственна.*

$\triangle$.      (в принципе, всё понятно)    $\square$

### 3.4.3 Случай нильпотентного оператора

Далее, положив $\mathcal{N}=\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}$ , мы получим нильпотентный оператор индекса нильпотентности $m$ с нильпотентной матрицей $N$.

**Def 3.24.** Линейная оболочка

$$\mathbb{F}[\mathcal{N}]\boldsymbol{v}=\langle\boldsymbol{v},\mathcal{N}\boldsymbol{v},\ldots,\mathcal{N}^{m'-1}\boldsymbol{v}\rangle$$

называется *циклическим подпространством*, ассоциированным с оператором $\mathcal{N}$ индекса нильпотентности $m$ и вектором $\boldsymbol{v}$. Предполагается, что $m' \leqslant m$ – наименьшее натуральное число, для которого $\mathcal{N}^{m'}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$.

**Thr 3.25.** *ЖНФ нильпотентной матрицы $N$ существует (над произвольным $\mathbb{F}$).*

$\triangle$. Достаточно показать, что $V$ , на котором действует оператор $\mathcal{N}$, разлагается в прямую сумму циклических подпространств.

По теореме 1 матрица $N$ приводится к верхнему треугольному виду с 0 по диагонали. Это значит, что линейная оболочка $U$ первых $n-1$ базисных векторов инвариантна относительно $\mathcal{N}$. По определению $\mathcal{N}V\subset U$ , а по предположению индукции а $U$ можно выбрать жорданов базис для $\mathcal{N}$ , или, что то же самое,

$$U=\mathbb{F}[\mathcal{N}]\boldsymbol{e}_1\oplus\ldots\oplus\mathbb{F}[\mathcal{N}]\boldsymbol{e}_s,$$

$$\mathbb{F}[\mathcal{N}]\boldsymbol{e}_i=\langle\boldsymbol{e}_i,\mathcal{N}\boldsymbol{e}_i,\ldots,\mathcal{N}^{m_i-1}\boldsymbol{e}_i\rangle,\qquad B^{m_i}\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0}.$$

Далее, $V=\langle\boldsymbol{v},U\rangle$, $\mathcal{N}\boldsymbol{v}\in U$ для любого вектора $\boldsymbol{v}$, не содержащегося в $U$ , так что $\mathcal{N}\boldsymbol{v}=\sum_i\alpha\boldsymbol{e}_i+\mathcal{N}\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\in U$. Заменяя $\boldsymbol{v}$ на $\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$, будем иметь

$$V=\langle\boldsymbol{v}',U\rangle,\qquad\mathcal{N}\boldsymbol{v}'=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\boldsymbol{e}_i.$$

Если $\alpha_i=0, 1\leqslant i\leqslant s$, то к клеткам Жордана добавится $J_1(0)$ , отвечающее циклическому подпространству $\langle\boldsymbol{v}'\rangle$ , т.е.

$$N\sim J(N)=\operatorname{diag}\left(J_{m_1}(0),\ldots,J_{m_s}(0),J_1(0)\right)$$

Остаётся рассмотреть случай, когда

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_{r-1} = 0, \quad \mathcal{N}\boldsymbol{v}' = \sum_{i=r}^{s} \alpha_i \boldsymbol{e}_i, \quad \alpha_r \neq 0$$

для некоторого $r \geqslant 1$. Положим

$$\boldsymbol{e}_i' = \boldsymbol{e}_i, \quad i \neq r, \quad \boldsymbol{e}_r' = \frac{1}{\alpha_r}\boldsymbol{v}', \quad \beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_r}.$$

Тогда

$$\mathcal{N}\boldsymbol{e}_r' = \boldsymbol{e}_r + \sum_{i=r+q}^{s} \beta_i \boldsymbol{e}_i := \boldsymbol{f}_r$$

Считая $m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_n$: $\mathcal{N}^{m_r}\boldsymbol{f}_r = \boldsymbol{0}$. Верно, что $\mathcal{N}^{m_{r-1}}\boldsymbol{f}_r \neq \boldsymbol{0}$, $\forall \beta$. Кроме того, сумма

$$\sum_{i \neq r} \mathbb{F}[\mathcal{N}]\boldsymbol{e}_i' + \mathbb{F}[\mathcal{N}]\boldsymbol{f}_r$$

также является прямой и совпадает с $U$ .

Но $\mathbb{F}[\mathcal{N}]\boldsymbol{f}_r$ расширяется за счёт вектора $\boldsymbol{e}_r' \notin U$: $\mathbb{F}[\mathcal{N}]\boldsymbol{f}_r \subset \mathbb{F}[\mathcal{N}]\boldsymbol{e}_r'$, и получается прямая сумма

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbb{F}[\mathcal{N}]\boldsymbol{e}_i',$$

отвечающую набору индексов $m_1', \ldots, m_s'$, где $m_i' = m_i$, $i \neq r$, $m_r' = m_r + 1$. Тогда

$$B \sim \operatorname{diag}\left(J_{m_1}'(0), \ldots, J_{m_s'}(0)\right).$$

Таким образом, существование базиса для нильпотентного $\mathcal{N}$ доказано. $\square$

# 4 Билинейные и квадратичные форма

## 4.1 Билинейная форма

**Def 4.1.** **Билинейная форма** на линейном пространстве $V$ – $b\colon V \times V \to \mathbb{F}$, линейное по $\forall$ аргументу.

**Def 4.2.** $b \in \mathcal{B}(V)$[1], а $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ – базис в $V$. **Матрица билинейной формы**: $B = (b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j))$, $b \underset{e}{\longleftrightarrow} B$

Для $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V$: $\boldsymbol{u} \underset{e}{\longleftrightarrow} x$ и $\boldsymbol{v} \underset{e}{\longleftrightarrow} y$ — $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = x^T B y$. $(B = (b_{ij}))$.

**Thr 4.3.** *Пусть $e$ – базис в $V$ $(\dim V = n)$, тогда соответствие $\mathcal{B}(V) \to M_{n\times n}(\mathbb{F})$ осуществляет изоморфизм линейных пространств. Следствие:* $\dim \mathcal{B}(V) = n^2$.

$\triangle$. Инъективность: $b_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = x^T B y = b_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \Rightarrow b_1 = b_2$;

Сюръективность: определяем $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = x^T B y$, тогда $b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = b_{ij}$, значит $b \underset{e}{\longleftrightarrow} B$. $\square$

**Thr 4.4.** *$b \in \mathcal{B}(V)$, $e$ и $e'$ – базисы в $V$, $e' = eS$, $b \underset{e}{\longleftrightarrow} B$ и $b \underset{e'}{\longleftrightarrow} B'$. Тогда $B' = S^T B S$.*

**Def 4.5.** Матрицы $B$ и $B' = S^T F S$ с $\det A \neq 0$ — **конгруэнтны**. Ранг $B$ в каком-то базисе соответствующей $b$ называется **рангом** билинейной формы. rg$b$ инвариантен относительно изменения базиса.

## 4.2 Симметричные и кососимметричные формы

**Def 4.6.**

| Симметричная билинейная форма. | Кососимметричная билинейная форма. |
|---|---|
| $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V:\ b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ | $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V:\ b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = -b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \Leftarrow b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0$ |
| $\mathcal{B}^-(V)$ — **симметричные** формы на $V$ | $\mathcal{B}^-(V)$ — **кососимметричные** формы на $V$ |
| $b \underset{e}{\longleftrightarrow} B$, $b \in \mathcal{B}^+(V) \Leftrightarrow B^T = B$ | $b \underset{e}{\longleftrightarrow} B$, $b \in \mathcal{B}^-(V) \Leftrightarrow B^T = -B$ |
| $b^+(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\left[b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\right]$ | $b^-(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\left[b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\right]$ |

[1] $\mathcal{B}(V)$ — линейное пространство над $\mathbb{F}$.

**Thr 4.7.** *Пусть* $char(\mathbb{F}) \neq 2$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}^+ \oplus \mathcal{B}^-$.

**Def 4.8.** Пусть $b \in \mathcal{B}^\pm(V)$. Тогда **ядром** формы $b$ называется: $\operatorname{Ker} b := \{\boldsymbol{v} \in V : \forall \boldsymbol{u} \in V\ b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0\} = \{\boldsymbol{u} \in V : \forall \boldsymbol{v} \in V\ b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0\}$ (соответственно левое и правое ядра).

**Thr 4.9.** $\dim \operatorname{Ker} b = \dim V - \operatorname{rg} b$.

$\triangle$. 1) Рассмотрим базис $e = (\boldsymbol{e}, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, и $b \underset{e}{\longleftrightarrow} B$. Пусть $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{v} \underset{e}{\longleftrightarrow} x$, $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} b \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{u}\, b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$;

2) Или равносильно: $\forall i\ b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{v}) = 0 \Leftrightarrow EBX = 0 \Leftrightarrow BX = 0$. Пространство решений это ОСЛУ имеет требуемое равенство: $\dim \operatorname{Ker} b = \dim V - \operatorname{rg} B$. $\square$

## 4.3 Ортогональные и невырожденные

**Def 4.10.** Пусть $b \in \mathcal{B}^\pm(V)$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$. $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ **ортогональны** относительно $b$, если $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$.
Для $U \subseteq V$, **ортогональное дополнение** $U$ – $U^\perp\ \{\boldsymbol{v} \in V : \forall \boldsymbol{u} \in U\ b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0\}$.

**Def 4.11.** Пусть $b \in \mathcal{B}^\pm(V)$, форма $b$ — **невырожденная**, если $\operatorname{rg} b = \dim V$.

**Thr 4.12.** $\dim U^\perp \geqslant \dim V - \dim U$. *А если форма $b$ – невырождена, то* $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$

$\triangle$. 1) Выберем в $V$ базис $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ так, чтобы первые $k$ векторов были базисом $U$.
2) Тогда, если $\boldsymbol{v} \underset{e}{\longleftrightarrow} x$: $\boldsymbol{v} \in U^\perp \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, k :\ b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{v}) = 0 \Leftrightarrow (E_k|0)\, Bx = 0$.
3) ОСЛУ (2) состоит из $k$ строк матрицы $B$, значит её ранг $\leqslant k \Longrightarrow \dim U^\perp \geqslant n - k$.
4)Если $b$ – невырождена, то строчки $B$ – ЛНеЗ $\Longrightarrow$ ОСлу имеет ранг $k \Longrightarrow \dim U^\perp = n - k$. $\square$

**Def 4.13.** $b \in \mathcal{B}^\pm(V)$, $U \subseteq V$. $U$ — **невырожденное** относительно $b$, если $b\big|_U \in \mathcal{B}^\pm(U)$ – невырождена.

**Thr 4.14.** *Пусть* $b \in \mathcal{B}^\pm(V)$, $U \subseteq V$. *Тогда* $U$ *– невырождено* $\Longleftrightarrow V = U \oplus U^\perp$.

$\triangle$. 1) Базис как в теореме (4.12). Матрица $b\big|_U$ – это подматрица $B$ стоящая в верхнем левом углу.
2) так как $U$ – невырождено: $\operatorname{rg} B_U = k \Rightarrow$ первые $k$ строк $B_U$ ЛНеЗ, значит $\dim U^\perp = n - k$.
3) Кроме того, $\operatorname{Ker} b\big|_U = 0$ так как $\dim \operatorname{Ker} b\big|_U = k - k = 0$. То есть $\forall \boldsymbol{v} \in U$, $\boldsymbol{v} \neq 0 => \exists \boldsymbol{u} \in U :\ b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$, что означает, что $U \cap U^\perp = \mathbf{0}$. **Итак**, $U + U^\perp = U \oplus U^\perp$ и $\dim(U + U^\perp) = k + (n - k) = n$. $\square$

## 4.4 Квадратичные формы

**Def 4.15.** $h : V \to \mathbb{F}$ — **квадратичная форма**, $h(\boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})\ \forall \boldsymbol{v} \in V$, для некоторой $b \in \mathcal{B}(V)$.

**Thr 4.16.** *Если* $char(\mathbb{F}) \neq 2$. *Тогда* $\forall h \in \mathcal{Q}(V)\ \exists! b \in \mathcal{B}^+(V) :\ h(\boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ $(\mathcal{Q} \cong \mathcal{B}^+(V))$.

$\triangle$. $\exists$. Пусть $b \in \mathcal{B}(V) :\ b = b^+ + b^- \rightsquigarrow h(\boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = b^+(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + \cancel{b^-(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}$. $h$ задаётся $b^+$.
!. Пусть $h(\boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$, $b \in \mathcal{B}^+(V)$. Восстановим $b$ по $h$. Для $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$:
$h(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + 2b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \rightsquigarrow b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \big[h(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) - h(\boldsymbol{u}) - h(\boldsymbol{v})\big]/2$
Полученная симметричная форма — **билинейная форма полярная к** $h$. $\square$

Пусть $b \underset{e}{\longleftrightarrow} B$, $\boldsymbol{u} \underset{e}{\longleftrightarrow} x$, $\boldsymbol{v} \underset{e}{\longleftrightarrow} y$. Имеем $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = x^T B y = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} x_i, y_j$. Тогда квадратичная форма $h(\boldsymbol{v}) = y^T B y = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} y_i y_j$. Если $b$ – симметричная, то $b_{ij} = b_{ji}$, а $h(\boldsymbol{v}) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii} y_i^2 + 2 \sum\limits_{i<j}^{n} b_{ij} y_i y_j$.

Отныне характеристика нашего поля ни в коем виде не **двойка**.

**Def 4.17.** $h \in \mathcal{Q}(V)$ с **полярной** $b \in \mathcal{B}(V)$, $e$ – базис. Тогда матрица $h$ – это матрица $b$ в базисе $e$.
Матрица $h \in \mathcal{Q}(V)$ всегда симметрична. Если $h \underset{e}{\longleftrightarrow} B$, $\boldsymbol{v} \underset{e}{\longleftrightarrow} x$, то $h(\boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = x^T B x$.

**Thr 4.18.** *Пусть* $h \in \mathcal{Q}(V)$. *Тогда* $\exists e$ *– базис в* $V$ : $h$ *в этом базисе имеет диагональную матрицу.*

$\triangle$. 1) Индукция по $n = \dim V$. Для $n = 1$ доказывать нечего. Для $h = 0$ тоже.
2) $n > 1$: $\exists \boldsymbol{e}_1 :\ h(\boldsymbol{e}_1) \neq 0$. Тогда $\langle \boldsymbol{e}_1 \rangle$ – невырождена относительно полярной к $h$ – $b$.
3) То есть $V = \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle^\perp$. По индукции, в $U = \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle^\perp$ есть базис $(\boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, где $h\big|_U$ диагональна.
4) Матрица(3) – $B'$, тогда $h \underset{e}{\longleftrightarrow} B$ в $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ состоит из $B'$ и $h(\boldsymbol{e}_1)$ в верхнем левом углу. $\square$

**Con 4.19.** *Пусть* $\mathbb{F} = \mathbb{R} \Rightarrow \forall h \in \mathcal{Q}(V)$, $\exists e \in V : \ h \underset{e}{\longleftrightarrow} B \in e$ *– диагональна с* $0, \pm 1$ *на диагонали.*

**Def 4.20.** Над $\mathbb{R}$ $h \in \mathcal{Q}(V)$. Базис, в котором $h \underset{e}{\longleftrightarrow} B$ – диагональна с $0, \pm 1$ — **нормальный базис**. Матрица $B$ — **нормальная форма** для $h$.

**Def 4.21.** Пусть $h \in \mathcal{Q}(V)$ над $\mathbb{R}$ (далее всегда $\mathbb{F} = \mathbb{R}$). Тогда $h$ называется:
**положительно полуопределенной**, если $\forall \boldsymbol{v} \in V$ $h(\boldsymbol{v}) \geqslant 0 \Leftrightarrow$ на диагонали $B$ только $0, +1$.
**положительно определенной**, если $\forall \boldsymbol{o} \neq \boldsymbol{v} \in V$ $h(\boldsymbol{v}) > 0 \Leftrightarrow$ на диагонали $B$ только $+1$.
**отрицательно определенной или полуопределенной**.
В этих случаях полярная к $h$ билинейная форма приобретает те же названия.

**Def 4.22.** Пусть $h \in \mathcal{Q}(V)$. Её **положительный индекс инерции** $\sigma_+(h)$ — наибольшая размерность подпространства $U \subseteq V$, на которой $h\big|_U$ – положительно определена. (Отрицательный индекс инерции так же)

**Thr 4.23.** $\mathcal{Q}(V) \ni h \underset{e}{\longleftrightarrow} B$ *– её нормальный вид в* $e$*. Тогда на диагонали* $B$ *стоит ровно* $\sigma_+(h)$ *единиц и* $\sigma_-(h)$ *минус единиц.*

$\triangle$. 1) Пусть $B = \begin{pmatrix} E_k & & O \\ & 0_l & \\ O & & -E_m \end{pmatrix}$. Тогда, если $U = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k \rangle$, то матрица $h\big|_U$ – единичная, то есть $h\big|_U$ – положительно определена. Для $W = \langle \boldsymbol{e}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ получаем $h\big|_U$ – отрицательно полуопределена.

2) Пусть $U' \subseteq V : \ h\big|_{U'}$ – положительно определена $\Rightarrow \forall (\boldsymbol{0} \neq) \boldsymbol{v} \in U' \cap W : \ 0 < h(\boldsymbol{v}) \leqslant 0$ – невозможно. **Итак**, $U' \cap W = 0 \Rightarrow \dim U' \leqslant \dim V - \dim W = k$, в итоге $\sigma_+(h) = k$. Аналогично $\sigma_-(h) = m$. $\square$

**Con 4.24** (Закон инерции)**.** *Нормальный вид матрицы* $h \in \mathcal{Q}(V)$ *определён однозначно с точностью до перестановки элементов диагонали.*

**Def 4.25.** $B$ – симметричная матрица над $\mathbb{R}$ Она обретает такие же названия, как у квадратичной формы, если она её матрица.
$B$ – положительно определена $\Leftrightarrow \exists$ невырожденная $A : \ B = A^T A$

$\triangle$. $(\Rightarrow)$. У соответствующей $h$ нормальный вид – $E = S^T B S$. Тогда $B = (S^T)^{-1} S^{-1} = (S^{-1})^T S^{-1}$.
$(\Leftarrow)$. Если $B = A^T A \Rightarrow \forall (\boldsymbol{0} \neq) \boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{v} \underset{e}{\longleftrightarrow} x$, $h(\boldsymbol{v}) = x^T B x = x^T A^T A x = (Ax)^T A x > 0$.
*Note*: и также для $B$ – полуопределенной $\Leftrightarrow \exists A : \ B = A^T A$. $\square$

**Def 4.26.** $B$ – симметричная матрица. Её **главный минор** $i$-порядка $\Delta_i(B)$ — это определитель матрицы $i \times i$ в левом верхнем углу.

**Thr 4.27** (Метод Якоби)**.** $\mathcal{Q}(V) \ni h \underset{e}{\longleftrightarrow} B$*, причём* $\Delta_i(B) \neq 0$, $i = 1, \ldots, n (= \dim V)$*. Тогда* $\exists e' = eS$*, где* $S$ *– верхнетреугольная матрица с единицами на диагонали такой,*

*что* $h \underset{e'}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} d_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & d_n \end{pmatrix}$*, где* $d_i = \frac{\Delta_i(B)}{\Delta_{i-1}(B)}$ $(\Delta_0(B) = 1)$*.*

$\triangle$. 1) Индукция по $n$. При $n = 1$ доказывать нечего. Для $n > 1$ имеем $\langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, e_{n-1} \rangle$ - невырожденный относительно билинейной формы, полярной к $h$ (так как $\Delta_{n-1}(B) \neq 0$)).

2) Значит $V = U \oplus U^\perp$. Разложим $\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{e}'_n$ ($u \in U$, $\boldsymbol{o} \neq \boldsymbol{e}'_n \in U^\perp$). Тогда по предположению индукции: найдётся замена базиса в $U$: $(\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_{n-1}) = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n-1}) S$, приводящая $h\big|_U$ к диагональному.

3) Тогда $\boldsymbol{e}'_n \in \langle \boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_{n-1} \rangle^\perp = U^\perp$. Получаем $h \underset{e'}{\longleftrightarrow} B' = \left(\begin{array}{ccc|c} d_1 & & & \\ & \ddots & & O \\ & & d_{n-1} & \\ \hline & O & & d_n \end{array}\right)$ $S = \left(\begin{array}{c|c} S' & O \\ \hline O & 1 \end{array}\right)$.

4) Доказав переход индукции осталось вычислить $d_i$. Заметим, что: $\boldsymbol{e}'_i \in \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i \rangle (= \langle \boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_i \rangle)$.

5) Пусть $B_i(')$ – подматрица в $B(')$ в левом верхнем углу ($\Delta_i(B) = |B_i|$). Тогда $B'_i = S_i^T B_i S_i$ ($e'_i = e_i S_i$ и $S_i$ – верхнетреугольная с единицами на диагонали).

6) Значит $\Delta_i(B') = |B'_i| = |S_i^T B_i S_i| = |B_i||S_i|^2 = |B_i| = \Delta_i(B) (= d_1 \ldots d_i) \rightsquigarrow d_i = \frac{|B'_i|}{|B'_{i-1}|} = \frac{\Delta_i(B)}{\Delta_{i-1}(B)}$. $\square$

**Thr 4.28** (Критерий Сильвестра)**.** $\mathcal{Q}(V) \ni h \underset{e}{\longleftrightarrow} B$.

*$h$ – положительно определена* $\Longleftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n (= \dim(V))\ \Delta_i(B) > 0$.

△. (⇒). $h$ – положительно определена ⇔ $B = A^T A$, $A$ – невырождена. Тогда $\Delta_n(B) = |B| = |A|^2 > 0$.

(⇐). Из метода Якоби, на диагонали: $\Delta_1$, $\Delta_2/\Delta_1 \ldots$ все $> 0 \Rightarrow h$ – положительно определена. □

**Con 4.29.** *Если* $\forall i = 1, \ldots, n:\ \Delta_i(B) \neq 0 \Rightarrow \sigma_-(h)$ *– число перемен знака в* $1, \Delta_1(B), \ldots, \Delta_n(B)$.

### 4.5 Кососимметричные и полуторалинейные формы

**Thr 4.30.** *Теперь и далее* $\mathbb{F}$ *– любое. Пусть* $b \in \mathcal{B}^-(V)$*. Тогда в* $V\ \exists e$*, в котором* $b \underset{e}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \boxed{0} \end{pmatrix}$

△. 1) Индукция по $n = \dim V$. Если $\operatorname{rg} b = 0$, то доказывать нечего.

2)Иначе $\exists \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 :\ b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ – ЛНеЗ и, можно считать, $b(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1$.

3) Далее, $U = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$ – невырождено относительно $b$ и $b\big|_U \underset{(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)}{\longleftrightarrow} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Значит, $V = U \oplus U^\perp$. По предположению индукции к $b\big|_U^\perp$ получаем $B_1$ в базисе $(\boldsymbol{e}_3, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$.

5) Тогда, для $e = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ имеем: $b \underset{e}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \multirow{2}{*}{$O$} \\ -1 & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{O} & B_1 \end{array}\right)$. □

# 5 Пространства со скалярным произведением

## 5.1 Евклидово пространство

**Def 5.1** (**Скалярное произведение**)**.**
Отображение $V \times V \to \mathbb{R}$:

| | | |
|---|---|---|
| i) | $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ | $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$; |
| ii) | $(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \beta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ | $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$; |
| iii) | $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$ | $\forall \boldsymbol{x} \neq 0$. |

Любое евклидово пространство содержит:

| | |
|---|---|
| *норма* | $\|\|\boldsymbol{v}\|\| = \sqrt{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})}$ |
| *угол* | $\cos \alpha_x^y = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})/\|\|\boldsymbol{x}\|\|/\|\|\boldsymbol{y}\|\|$ |
| *н-во Коши-Буняк.* | $\|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\| \leqslant \\|\boldsymbol{x}\\| \cdot \\|\boldsymbol{y}\\|$ |
| *н-во треугольника* | $\|\|\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y}\|\| \leqslant \\|\boldsymbol{x}\\| + \\|\boldsymbol{y}\\|$ |

**Def 5.2.** *Евклидовым векторным пространством* называется вещественное векторное пространство $V$ с выделенной на нём симметричной билинейной формой $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$ такой, что соответствующая квадратичная форма $\boldsymbol{x} \mapsto (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x})$ положительна определена.

### 5.1.1 Процесс ортогонализации

**Def 5.3.** Базис $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ евклидова векторного пространства $V$ называется *ортогональным*, если $(\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_j) = 0$ при $i \neq f$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Если, кроме того, $(\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_i) = 1$, то базис называется *ортонормированным*.

Факт: любые ненулевые взаимно ортогональные векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m \in V$ линейно независимы. Другой факт: во всяком $n$-мерном $V$ существуют ортонормированные базисы.

**Def 5.4.** Скалярное произведение $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e})$, где $\|\boldsymbol{e}\| = 1$, называют *проекцией* вектора $\boldsymbol{x}$ на прямую $\langle \boldsymbol{e} \rangle_{\mathbb{R}}$.

**Def 5.5.** Множество всех векторов $\boldsymbol{x} \in V$, ортогональных $U \subset V$, есть подпространство $U^\perp$, которое называется *ортогональным дополнением к* $U$.

**Thr 5.6** (процесс Грама – Шмидта)**.** ***Пусть*** $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ *– ЛНеЗ система* $\subset V_m(\mathbb{R})$. ***Тогда*** $\exists$ *ортонормированная система векторов* $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_m$ *такая, что* $L_i = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i \rangle$ *и* $L'_i = \langle \boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_i \rangle$ *совпадают при* $i = 1, 2, \ldots, m \leqslant n$.

$\triangle$. Пусть построена система для $k$ векторов. Найдём $\boldsymbol{e}_{k+1}$. Верно, что $L_{k+1} = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{v} \rangle$, где

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_{k+1} - \sum \lambda_i \boldsymbol{e}'_i$$

с произвольными $\lambda$. Подберём их так, чтобы $\boldsymbol{v} \perp L'_k$. Для этого необходимо и достаточно условий

$$0 = (\boldsymbol{v}|\boldsymbol{e}'_j) = (\boldsymbol{e}_{k+1}|\boldsymbol{e}'_j) - \left( \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \boldsymbol{e}'_i | \boldsymbol{e}_j \right) = (\boldsymbol{e}_{k+1}|\boldsymbol{e}'_j) - \lambda_j, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Таким образом, при $\lambda_j = (\boldsymbol{e}_{k+1}|\boldsymbol{e}'_j)$ получаем вектор $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, ортогональный к $L'_k$. Полагая $\boldsymbol{e}'_{k+1} = \mu \boldsymbol{v}$ придём к ортонормированной системе. $\square$

Как следствие, всякая ортонормированная система векторов $V$ дополняема до ортонормированного базиса.

**Thr 5.7.** ***П****усть $L$ – подпространство конечномерного евклидова пространства $V$, $L^{\perp}$ – его ортогональное дополнение.* ***Т****огда*

$$V = L \oplus L^{\perp}, \qquad L^{\perp\perp} = L. \tag{4}$$

$\triangle$. Возьмем в $L$ какой-нибудь ортонормированный базис $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m)$. Пусть $\boldsymbol{w} \in V$. Рассмотрим вектор

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} - \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{w}|\boldsymbol{e}_i) \boldsymbol{e}_i.$$

Так как $(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{e}_j) - \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{w}|\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{w}|\boldsymbol{e}_j) - (\boldsymbol{w}|\boldsymbol{e}_j) \cdot 1 = 0 \;\; \forall j \leqslant n$. Получается $\boldsymbol{v}$ ортогонален $L$. Это значит, что $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{m} (\boldsymbol{w}|\boldsymbol{e}_i) \boldsymbol{e}_i \in L$ и $\boldsymbol{v} \in L^{\perp}$. Итак, $V = L + L^{\perp}$.

Пусть $\boldsymbol{x} \in L \cap L^{\perp}$. Так как $\boldsymbol{x} \in L$, то $(\boldsymbol{x}|L^{\perp}) = 0$. Но и $\boldsymbol{x} \in L^{\perp}$, так что $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = 0$.

Бонус. Из разложения $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ легко получить, что $L^{\perp\perp} = L$. $\square$

### 5.1.2 Изоморфизмы

**Thr 5.8.** *Любые евклидовы пространства $V$, $V'$ одинаковой конечной размерности изоморфны. Существует изоморфизма $f \colon V \to V'$, сохраняющий скалярное произведение, т.е.*

$$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))' \tag{5}$$

$\triangle$. Достаточно рассмотреть два ОНБ в $V$ и $V'$. Соответсвие

$$f \colon \boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n \boldsymbol{e}_n \quad \mapsto \quad \boldsymbol{x}' = x_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n \boldsymbol{e}'_n,$$

очевидно, биективно. По аксиомам проверяем, что $f$ – изоморфизм. Далее вспоминаем, как выглядит в ОНБ скалярное произведение и успех. $\square$

Рассмотрим пространство $V^*$. Очевидно, что отображение $\boldsymbol{x} \mapsto (\boldsymbol{v}|\boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{v} \in V$ определяет линейную форму

$$\Phi_{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{v}|*) \colon V \to \mathbb{R},$$

т.е. $(\boldsymbol{v}|*) \in V^*$.

**Thr 5.9.** *Отображение $\Phi \colon \boldsymbol{v} \to (\boldsymbol{v}|*) \equiv \Phi_v$ – естественный изоморфизм $V$ и $V^*$. При этом $\Phi$ ОНБ $V$ отождествляется с* ***дуальным*** *к нему базисом $f_1, \ldots, f_n$ пространства $V^*$.*

$\triangle$. Так как скалярное произведние $(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{x})$ линейно по $\boldsymbol{v}$, то отображение $\Phi$ линейно.

Далее, $\operatorname{Ker} \Phi = \boldsymbol{0}$, поскольку $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} \Phi \implies (\boldsymbol{v}|\boldsymbol{x}) = 0 \; \forall \boldsymbol{x} \in V$ и $(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}) = 0$.

Как всякий элемент пространства $V^*$, линейная форма $(\boldsymbol{v}|*)$ линейно выражается через двойственный базис.

$$\Phi_{\boldsymbol{e}_i} = (\boldsymbol{e}_i|*) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e^j, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Так как $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ – ОНБ, то

$$\boxed{a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \delta_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e^k \boldsymbol{e}_j = (\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}},$$

откуда

$$(\boldsymbol{e}_i|*) = e^i.$$

Из этого следует сюръективность $\Phi$. $\square$

### 5.1.3 Ортогональные матрицы

Посмотри на переход от одного ОНБ к другому. Запишем

$$\boldsymbol{e}_j = a_j\boldsymbol{e}_1 + a_{2j}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_{nj}\boldsymbol{e}_n, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

мы получаем матрицу перехода $A = (a_{ij})$, в $k$-м столбце которой стоят координаты вектора $\boldsymbol{e}'_k$ относительно базиса $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. Из ортонормаированности получим:

$$\delta_{ij} = (\boldsymbol{e}'_i|\boldsymbol{e}'_j) = \left(\sum_k a_{ki}\boldsymbol{e}_k \middle| \sum_l a_{lj}\boldsymbol{e}_l\right) = \sum_{k,l} a_{ki}a_{lj}(\boldsymbol{e}_k|\boldsymbol{e}_l) = \sum_k a_{ki}a_{kj}.$$

Итак,

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \ldots + a_{ni}a_{nj} = \begin{cases} 0 \text{ при } i = j \\ 1 \text{ при } i \neq j \end{cases} \tag{6}$$

Или, кратко, запишем в виде

$$A^{\mathrm{T}} \cdot A = E. \tag{7}$$

**Def 5.10.** Квадратная матрица, удоволетворяющая одному из вышеприведенных условий (6) или (7), называется *ортогональной.* Множество всех ортогональных матриц порядка $n$ обозначается $O(n)$.

**Thr 5.11.** *Матрица перехода от одного ОНБ к другому ортогональна, всякая ортогональная матрица может быть матрицей такого перехода.*

## 5.2 Эрмитовы векторные пространства

### 5.2.1 Эрмитовы формы

Пусть отныне $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $V$ – линейное пространство над $\mathbb{F}$.

**Def 5.12.** $b\colon V \times V \to \mathbb{F}$ — **полуторалинейная форма**, если она:

1) Линейная по первому аргументу: $\begin{cases} b(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) \\ \qquad \forall\lambda \in \mathbb{C}:\ b(\lambda\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \lambda b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \end{cases}$

2) Сопряженно линейная по второму аргументу: $\begin{cases} b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2) \\ \qquad \forall\lambda \in \mathbb{C}:\ b(\boldsymbol{u}, \lambda\boldsymbol{v}) = \overline{\lambda} b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \end{cases}$

**Def 5.13.** **Матрица полуторалинейной формы** в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ — это $b \underset{e}{\longleftrightarrow} B = (b(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j))$.

Если $\boldsymbol{u} \underset{e}{\longleftrightarrow} x$, $\boldsymbol{v} \underset{e}{\longleftrightarrow} y$, то $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = x^T B \overline{y}$.

**Thr 5.14.** *Пространство полуторалинейных форм $S(V) \cong M_{n\times n}(\mathbb{C}))$. Переход: $e' = eS$, $B' = S^T B \overline{S}$.*

*Доказательство.* $|B'| = |S^T| \cdot |B| \cdot |\overline{S}| = |B| \cdot |\det S|^2$ □

**Con 5.15.** $\operatorname{rg} B (= \operatorname{rg} b)$ *и* $\arg \det B$ *не зависят от выбора базиса.*

**Def 5.16.** Пусть $b \in S(V)$. $b$ называется **эрмитовой формой**, если $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \overline{b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})}$.

**Lem 5.17.** *Пусть $S(V) \ni b \underset{e}{\longleftrightarrow} B$. Тогда $b$ – эрмитова $\Longleftrightarrow B^T = \overline{B}$.*

**Def 5.18.** $B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ — **эрмитова**, если $B = \overline{B^T}$. $B^* = \overline{B^T}$ — **эрмитово сопряженной** к $B$.

**Def 5.19.** Пусть $b$ – эрмитова форма на $V$. Тогда $h\colon V \to \mathbb{C}$, $h(\boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ — **эрмитова квадратичная форма** соответствующая $b$. ($b$ полярна к $h$)

**Lem 5.20.** *Если $b$ – эрмитова форма, то 1) $b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}$; 2) $b \underset{e}{\longleftrightarrow} B$ : $|B| \in \mathbb{R}$. Следствие: $h$ принимает значения лишь из $\mathbb{R}$.*

**Lem 5.21.** *Если $b_1 \neq b_2$ – эрмитовы формы, то соответствующие $h_1 \neq h_2$.*

$\triangle$. Восстановим $b$ по $h$: $h(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = h(\boldsymbol{u}) + h(\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) = h(\boldsymbol{u}) + h(\boldsymbol{v}) + 2\operatorname{Re}(b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})) \Rightarrow$
$\operatorname{Re}(b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})) = [h(\boldsymbol{u},+\boldsymbol{v}) - h(\boldsymbol{u}) - h(\boldsymbol{v})]/2$,
$b(\boldsymbol{u},i\boldsymbol{v}) = -ib(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \Rightarrow \operatorname{Im}(b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})) = \operatorname{Re}(-ib(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})) = \operatorname{Re}(b(\boldsymbol{u},i\boldsymbol{v})) = [h(\boldsymbol{u},+i\boldsymbol{v}) - h(\boldsymbol{u}) - h(i\boldsymbol{v})]/2$
Следствие: Соответствие между эрмитовыми и квадратичными эрмитовыми формами биеткивно и $\mathbb{R}$-линейно $\square$

Значит линейные вещественные пространства эрмитовых и эрмитовых квадратичных форм изоморфны.
Пусть $b$ – эрмитова форма. $\operatorname{Ker} b = \{\boldsymbol{u} : \forall \boldsymbol{v} \in V\ b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0\} = \{\boldsymbol{v} : \forall \boldsymbol{u} \in V\ b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0\}$.
$\dim U^{\perp} \geqslant \dim V - \dim U$, если $b$ – невырождена $\Longrightarrow \dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$.
$V = U \oplus U^{\perp} \Longleftrightarrow U$ – невырождено относительно $b$ (то есть $b\big|_U$ – невырождена).

**Thr 5.22.** *Пусть $h$ – эрмитова квадратичная форма, тогда $\exists e:\ h \underset{e}{\longleftrightarrow} B$ – диагональна с $\{0, \pm 1\}$*

$\triangle$. 1)Приведём к диагональному виду индукцией: $h(\boldsymbol{e}_1) \neq 0 :\ \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle$ – невырождена относительно $b \Longrightarrow$
2) $V = \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle \oplus \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle^{\perp}$ применим индукцию: $h \underset{e}{\longleftrightarrow} \operatorname{diag}(\alpha_i)$.
3) Нормируем векторы: $\boldsymbol{e}_i = \frac{\boldsymbol{e}_i}{\sqrt{|h(\boldsymbol{e}_i)|}}$, если $h(\boldsymbol{e}_1) \neq 0$. $\square$

**Def 5.23.** Пусть $h$ – эрмитова квадратичная форма. $h$ — **положительно (полу)определена**, если $\forall v$ : $h(\boldsymbol{v}) > 0 (\geqslant)$. Аналогично с **отрицательной** (полу)определенностью.

**Def 5.24. Положительный/отрицательный индекс инерции** $\sigma_+(h), \sigma_-(h)$ — как и раньше.
**Закон инерции**: В нормальном виде формы $b$ ровно $\sigma_+(h)$ единиц и $\sigma_-(h)$ минус единиц.

**Thr 5.25** (Метод Якоби и Критерий Сильвестра)**.** *АНАЛОГИЧНО СИММЕТРИЧНЫМ*

### 5.2.2 Эрмитово пространство

**Def 5.26.** Конечномерное $V$ над $\mathbb{C}$, с положительно определенной эрмитовой формой $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) := f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, называется **эрмитовым**(унитарным) пространством.
Комплексное число $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ — **скалярное произведение**(внутреннее) векторов $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$.

В новых обозначениях теперь имеем: $\begin{array}{ll} (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}, & (\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}) = \alpha(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}) + \beta(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}) \\ (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) \geqslant 0; & (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = 0 \text{ лишь при } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \end{array}$

**Def 5.27.** Определим **Длину вектора** $\boldsymbol{v} \in V$ — $||\boldsymbol{v}|| = \sqrt{(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v})}$.
С помощью длин можно выразить: $2(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}) = ||\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}||^2 + i||\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}||^2 - (1+i)\{||\boldsymbol{u}||^2 + ||\boldsymbol{v}||^2\}$

Эрмитово пространство позволяет проводить множество параллелей с евклидовым, будь то свойство нормы: $||\lambda\boldsymbol{x}|| = \sqrt{(\lambda\boldsymbol{x}|\lambda\boldsymbol{x})} = \sqrt{|\lambda|^2(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x})} = |\lambda|\sqrt{(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x})}$. Также можно записать...

**Thr 5.28** (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца)**.** $|(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})| \leqslant ||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||$. *(Равенство при $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y}$)*

$\triangle$. 1)$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = |(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}|e^{i\varphi})$, $\varphi \in \mathbb{R}$, и $\forall t \in \mathbb{R}$ выполняется: $||\boldsymbol{x}||^2 t^2 + [(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})t^{-i\varphi} + \overline{(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})}e^{i\varphi}]t + ||\boldsymbol{y}||^2 = (\boldsymbol{x}t + \boldsymbol{y}e^{i\varphi}|\boldsymbol{x}t + \boldsymbol{y}e^{i\varphi}) \geqslant 0$
2) Так как $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})e^{-i\varphi} = |(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})| = \overline{(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})e^{i\varphi}}$, то (1) переписывается: $||\boldsymbol{x}||^2 t^2 + 2|(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})|t + ||\boldsymbol{y}||^2 \geqslant 0$. $\square$

Как следствие из предыдущей теоремы можно сразу получить неравенство треугольника:

$$||\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y}|| \leqslant ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}|| \qquad ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}|| \leqslant ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|| + ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}||$$

Также с помощью доказанного неравенство можно утверждать, что существует единственный угол $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, для которого: $\cos\varphi = \frac{|(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})|}{||\boldsymbol{x}|| \cdot ||\boldsymbol{y}||}$.

### 5.2.3 Ортогональность

**Def 5.29.** Набор $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ эрмитова пространства называется **ортонормированным**, если $(\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$. Этот набор векторов ЛНеЗ и дополняем до ортонормированного базиса пространства $V$(метод Грама-Шмидта).

**Thr 5.30.** $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ *– ортонормированный базис эрмитова векторного пространства $(V, (*|*))$.*

*i)* $\boldsymbol{x} = \sum\limits_i (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i, \forall \boldsymbol{x} \in V$.

*ii)* $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \sum\limits_i (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{y}),\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ *(Равенство Персеваля)*

*iii)* $\boldsymbol{x} \in V \Longrightarrow ||\boldsymbol{x}||^2 = \sum\limits_i |(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_i)|^2$.

В теореме выше для $\forall \boldsymbol{x} \in V\ :\ \boldsymbol{x} = \sum\limits_i x_i \boldsymbol{e}_i$, ввиду линейности скалярного произведения по первому аргументу: $(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{e}_j) = \left(\sum\limits_i x_i \boldsymbol{e}_i | \boldsymbol{e}_j\right) = \sum\limits_i x_i (\boldsymbol{e}_i|\boldsymbol{e}_j) = x_j$

Таким образом получена линейная форма $f_i = (*|\boldsymbol{e}_j) \colon V \to \mathbb{C}$, сопоставляющая каждому $\boldsymbol{x} = \sum\limits_i x_i \boldsymbol{e}_i$ его $j$-ю координату относительно $(\boldsymbol{e}_i)$. Теперь если взять ещё такой $\boldsymbol{y} = \sum\limits_j y_j \boldsymbol{e}_j$, то

$$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \sum_{i,j} x_i \overline{y_j} (\boldsymbol{e}_i|e_j) = x_1 \overline{y_1} + \ldots + x_n \overline{y_n}$$

**Def 5.31.** Пусть $f$ – линейная форма на комплексном векторном пространстве $V$. **Сопряженной** к $f$ (полу)линейной формой на $V$ называется $\overline{f} \colon V \to \mathbb{C}$, которая сопряженно линейна по своему аргументу.

Если $(V, (*|*))$ – эрмитово пространство, то $f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a})$ для некоторого однозначно определенного вектора $\boldsymbol{a} = \sum\limits_i \overline{f}(\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i$. Тогда для любого $\boldsymbol{x}$ будем иметь соотношение:

$$(\boldsymbol{a}|\boldsymbol{x}) = \sum_i \left(\boldsymbol{e}_i \middle| \sum_j x_j \boldsymbol{e}_j\right) = \sum_i \overline{f}(\boldsymbol{e}_i)\overline{x_i} = \overline{f}(\boldsymbol{x}) \qquad \overline{f}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}|\boldsymbol{x}) = \overline{(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a})} = \overline{f(\boldsymbol{x})}$$

### 5.2.4 Нормированные векторные пространства

**Def 5.32.** Пусть $E$ – множество точек и $d \colon E \times E \to \setminus$ – отображение, сопоставляющем любым двум точкам $u, v \in E$ неотрицательное $d(u, v) \in \mathbb{R}$(aka расстояние) и обладающее следующими свойствами:

i) $d(u, v) = d(v, u)$ (симметрия);

ii) $d(u, v) = 0 \Longleftrightarrow u = v$;

iii) $d(u, w) \leqslant d(u, v) + d(v, w)$ (неравенство треугольника)

Функция $d$ с такими свойствами называется — **метрикой**, а пара $(E, d)$ — **метрическое пространство**. Ещё как в матане можно определить открытый шар, замкнутый шар и сферу и прочие радости жизни.

Итак, $V$ – вещественное или комплексное пространство с метрикой $d$. Особо важным является случай, когда $d$ удовлетворяет двум дополнительным условиям: а)инвариантность относительно сдвига; б) умножение на скаляр $\lambda$ увеличивает расстояние в $\lambda$ раз.

**Def 5.33.** Назовём **нормой** вектора $\boldsymbol{x} \in V$ относительно метрики $d$ с (а,б) число $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) =: ||x||$.

Нужно убедиться, что выполняются следующие свойства нормы:

1. $||\boldsymbol{0}|| = 0;\ ||\boldsymbol{x}|| > 0,$ если $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$;

2. $||\lambda \boldsymbol{x}|| = |\lambda| ||\boldsymbol{x}||$ для всех $\lambda \in \mathbb{C},\ \boldsymbol{x} \in V$;

3. $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|| \leqslant ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}|| \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.

**Def 5.34.** $V$, снабженное функцией нормы $||*|| \colon V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей условиям выше называется **нормированным**. Полное нормированное векторное пространство называется **банаховым**.

## 5.3 Связь между линейными операторами и $\theta$-линейными формами

Положим $\theta = 2$, если $V$ – евклидово пространство и $\theta = 3/2$, если $V$ – эрмитово.

Будем считать теперь $V$ евклидовым(эрмитовым) пространством над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ со скалярным произведением (*,*), $\varphi$ – линейный оператор на $V$.

Определим: $f_\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\varphi(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v})$, где $f_\varphi$ – $\theta$-линейная форма, $f_\varphi \in \mathcal{B}_\theta(V)$.

**Lem 5.35.** *Пусть $e$ – ОНБ в $V$, $\mathcal{L}(V) \ni \varphi \underset{e}{\longleftrightarrow} A$, $f_\varphi \underset{e}{\longleftrightarrow} B \Longrightarrow B = A^T$*

$\triangle$. Если $\boldsymbol{u} \underset{e}{\longleftrightarrow} x$, $\boldsymbol{v} \underset{e}{\longleftrightarrow} y$, то $\varphi(\boldsymbol{u}) = Ax$, $f_\varphi(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\varphi(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v}) = (Ax)^T\overline{y} = x^TAy$. И есть $f_\varphi \underset{e}{\longleftrightarrow} A^T$. $\square$

Как следствие получаем, что сопоставление $\varphi \longleftrightarrow f_\varphi$ – изоморфизм $\mathcal{L}(V) \longleftrightarrow \mathcal{B}_\theta(V)$

**Thr 5.36** (Теорема Фредгольма)**.** $\operatorname{Ker}\varphi^* = (\operatorname{Im}\varphi)^\perp$

$\triangle$. 1) $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker}\varphi^* \Longrightarrow \varphi^*(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$.

2) $\forall \boldsymbol{u} \in V:\ 0 = (\boldsymbol{u},\varphi^*(\boldsymbol{v})) = (\varphi(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{v}) \Longrightarrow \boldsymbol{v} \in (\operatorname{Im}\varphi)^\perp$.

3) Пусть $n = \dim V$, $d = \operatorname{rg}\varphi = \operatorname{rg}\varphi^*:\ d = \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim\varphi^* = n - \dim\operatorname{Ker}\varphi^*$.

4) Из (3): $\dim\operatorname{Ker}\varphi^* = n - \dim\operatorname{Im}\varphi = \dim(\operatorname{Im}\varphi)^\perp \Longrightarrow \operatorname{Ker}\varphi^* = (\operatorname{Im}\varphi)^\perp$. $\square$

**Thr 5.37.** *Пусть $V$ – векторное пространство со скалярным произведением $(*|*)$. Тогда любая из формул: $f_\mathcal{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}|\mathcal{A}^*\boldsymbol{y})$ устанавливает биективное соответствие между $\theta$-линейными формами и линейными операторами на $V$. А вместе определяют линейный оператор $\mathcal{A}^*\colon V \to V$, сопряженный к $\mathcal{A}$.*

*В ОНБ матрица оператора $\mathcal{A}^*$ получается из матрица оператора $\mathcal{A}$ путём транспонирования и комплексного сопряжения.*

Выпишем свойства отображения $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^*$: $\mathcal{A} + \mathcal{B}^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$, $(\alpha\mathcal{A})^* = \bar{\alpha}\mathcal{A}^*$, $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$, $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$.

## 5.4 Типы линейных операторов

Все линейные операторы на $V$ со скалярным произведением разбиваются на классы в зависимости от поведения по отношению к операции "*".

**Def 5.38.** Линейный оператор $\mathcal{A}$ называется **эрмитовым**(самосопряженным), если $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. В евклидовом случае его ещё называют симметричным.

Самосопряженность оператора $\mathcal{A}$ эквивалентна условию эрмитовости $\theta$-линейной формы $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y})$. Условие самосопряженности записывается в виде: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}|\mathcal{A}\boldsymbol{y})$, а условие эрмитовости формы $f_\mathcal{A}$ – в виде: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = f_\mathcal{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \overline{f_\mathcal{A}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})} = \overline{(\mathcal{A}\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})}$.

Так как $(*|*)$ – эрмитова форма, то $\overline{(\mathcal{A}\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x})} = (\boldsymbol{x}|\mathcal{A}\boldsymbol{y})$.

**Def 5.39.** Линейный оператор $\mathcal{A}$ — **косоэрмитов**, если $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$.

Так как $\forall\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V):\ \mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$, то оператор $\mathcal{A} + \mathcal{A}^*$ эрмитов, а $\mathcal{A} - \mathcal{A}^*$ косоэрмитов.

**Thr 5.40.** *Каждый линейный оператор $\mathcal{Z}$ на эрмитовом пространстве записывается в виде: $\mathcal{Z} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, где $\mathcal{A}$ – эрмитов, а $\mathcal{B}$ – косоэрмитов оператор. Кроме того, $\mathcal{Z} = \mathcal{X} + i\mathcal{Y}$, где $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ – эрмитовы линейные операторы.*

**Thr 5.41.** *Произведение $\mathcal{A}\mathcal{B}$ эрмитовых операторов является эрмитовым $\Longleftrightarrow \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$*

**Thr 5.42** (Критерий тривиальности $\mathcal{A}$)**.** *Пусть $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = 0$, $\forall\boldsymbol{x} \in V$, и пусть выполнено одно из условий: 1) $V$ – эрмитово пространство; 2) $V$ –евклидово пространство и $\mathcal{A}$ – симметричный оператор.* ***Тогда*** *$\mathcal{A} = \mathcal{O}$.*

$\triangle$. **1)** Из двух тождеств с нулевыми (по предположению) правыми частями приходим к системе двух линейных однородных уравнений: $\begin{aligned} (\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) + (\mathcal{A}\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) &= \quad (\mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - (\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) - (\mathcal{A}\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y}),\\ (\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) - (\mathcal{A}\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) &= -i(\mathcal{A}(i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) + i(\mathcal{A}(i\boldsymbol{x})|i\boldsymbol{x}) + i(\mathcal{A}\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y}) \end{aligned}$

Из равенства нулю правых частей получаем: $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = 0$, $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$, это эквивалентно $\mathcal{A} = \mathcal{O}$.

**2)** Применяем условие симметричности к верхнему тождеству в пункте (1). $\square$

**Def 5.43.** Линейный оператор $\mathcal{A}$ на векторном пространстве со скалярным произведением называется **унитарным** (в евклидовом – ортогональным), если $\mathcal{A}^*\cdot\mathcal{A} = \mathcal{E} = \mathcal{A}\cdot\mathcal{A}^*$.

**Def 5.44.** Линейный оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$, сохраняющий метрику, то есть такой, что $||\mathcal{A}\boldsymbol{x} - \mathcal{A}\boldsymbol{y}|| = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, называется **изометрией**.

Так как $\mathcal{A}\boldsymbol{x} - \mathcal{A}\boldsymbol{y} = \mathcal{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$, то очевидно, $\mathcal{A}$ – изометрия на $V$ тогда, когда $||\mathcal{A}\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{x}||$, $\forall \boldsymbol{x} \in V$. Далее,

$$||\mathcal{A}\boldsymbol{x}|| = ||\boldsymbol{x}|| \Longleftrightarrow (\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\mathcal{A}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) \Longleftrightarrow (\mathcal{A}^*\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) \Longrightarrow ((\mathcal{A}^*\mathcal{A} - \mathcal{E})\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in V.$$

Оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A} - \mathcal{E}$ – самосопряжён, поэтому, согласно последней теореме в эрмитовом(евклидовом) пространстве из только что записанного тождества вытекает, что $\mathcal{A}^*\mathcal{A} - \mathcal{E} = \mathcal{O}$. Откуда получаем:

**Thr 5.45.** *Унитарные линейные операторы на векторном пространстве $V$ с метрикой, и только они, являются изометриями на $V$.*

### 5.4.1 Канонический вид эрмитовых операторов

**Lem 5.46.** *Собственные значения эрмитова оператора вещественны.*

$\triangle$. Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ – эрмитов оператор, $\lambda$ – его собственное значение, отвечающее собственному вектору $\boldsymbol{e} \in V$. По определению:

$$\lambda(\boldsymbol{e}|\boldsymbol{e}) = (\lambda\boldsymbol{e}|\boldsymbol{e}) = (\mathcal{A}\boldsymbol{e}|\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e}|\mathcal{A}^*\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e}|\mathcal{A}\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{e}|\lambda\boldsymbol{e}) = \overline{\lambda}(\boldsymbol{e}|\boldsymbol{e}), \quad \text{так как } (\boldsymbol{e}|\boldsymbol{e}) \neq 0, \Rightarrow \overline{\lambda} = \lambda.$$

$\square$

**Lem 5.47.** *У каждого симметричного линейного оператора $\mathcal{A}$ существует собственный вектор.*

$\triangle$. 1) $\mathcal{A}$ обладает одномерным или двумерным собственным подпространством. Существование одномерного инвариантного подпространства совпадает с утверждением леммы.

2) Рассмотрим $L$ – двумерное инвариантное подпространство. Оператор $\mathcal{A}$ индуцирует на $L$ симметричный линейный оператор $\mathcal{A}_L$.

3) Выберем в $L$ ОНБ $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$. Матрице оператора $\mathcal{A}_L = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, с $\chi(t) = t^2 - (a-d)t + (ad - b^2)$.

4) $D_\chi = (a-d)^2 + 4b^2 \geqslant 0$,так что $\chi(t)$ имеет вещественный корень, а $A$ – собственный вектор. $\square$

**Lem 5.48.** *Пусть $\mathcal{A}$ – самосопряженный линейный оператор на векторном пространстве со скалярным произведением $(*|*)$, $L$ – подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$. Тогда ортогональное дополнение $L^\perp$ к $L$ также инвариантно относительно $\mathcal{A}$.*

**Thr 5.49.** *Существует ортонормированный базис пространства $V$ со скалярным произведением, в котором матрице самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ диагональна, причём Spec$(\mathcal{A})$ вещественный.*

$\triangle$. 1) По первым двум леммам раздела у $\mathcal{A}$ имеется собственный вектор $||\boldsymbol{e}_1|| = 1$ с $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.

2) $\dim\langle \boldsymbol{e}_1\rangle^\perp = \dim V - 1$ и по последней лемме инвариантно относительно $\mathcal{A}$.

3) Рассмотрим $\mathcal{A}\big|_{V'}$, находим собственный вектор $\boldsymbol{e}_2\colon \mathcal{A}\boldsymbol{e}_2 = \lambda_2\boldsymbol{e}_2$, $||\boldsymbol{e}_2|| = 1$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

4) $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\rangle$ инвариантна относительно $\mathcal{A}$, поэтому инвариантно $\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\rangle^\perp$.

5) Рассуждая так и дальше по индукции найдём требуемые $\dim V$ взаимно ортогональных векторов. $\square$

### 5.4.2 Приведение пары квадратичных форм к каноническому виду

**Thr 5.50.** *Пусть на векторном пространстве $V$ размерности $n$ над $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ заданы две эрмитовы квадратичные формы $q(\boldsymbol{x})$ и $r(\boldsymbol{x})$, причём формы $r(\boldsymbol{x})$ положительно определена.*

*Тогда в $V$ существует базис, в котором обе формы записываются в каноническом виде.*

$\triangle$. Пусть $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ – эрмитова $\theta$-линейнвя форма, отвечающая квадратичной форме $r(\boldsymbol{x})$. Определим на $V$ скалярное произведение, полагая

$$(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) := g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

В $V$ с указанной метрикой найдётся ОНБ $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, в котором $q(\boldsymbol{x})$ принимает канонический вид. Итак, в базисе $(\boldsymbol{e}_i)$ обе квадратничные формы приняли канонический вид. $\square$

### 5.4.3 Нормальные операторы

Эрмитовы и унитарные операторы входят в естественный, более широкий класс, диагонализируемых операторов.

**Def 5.51.** Пусть $V$ – эрмитово пространство. Линейный оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$, обладающий свойством
$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^* = \mathcal{A}^* \cdot \mathcal{A},$$
называется *нормальным*. Его матрица в любом базисе также называется нормальной.

Оператор $\mathcal{A}$ нормален вместе с $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$. Из нормальности $\mathcal{A}$ вытекает, что
$$\|\mathcal{A}\boldsymbol{x}\|^2 = \|\mathcal{A}^*\boldsymbol{x}\|^2.$$
Заменяя $\mathcal{A}$ на $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$, получаем, что
$$\mathcal{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \iff \mathcal{A}^* = \overline{\lambda}\boldsymbol{x} \tag{8}$$

Определение нормального оператора переностися на бесконечномерные гильбертовы пространства и находит там многочисленны применения. Постараемся опичать класс диагонализируемых операторов на эрмитовом пространстве.

**Thr 5.52.** *Эквивалентны следующие условия:*

*а) $\mathcal{A}\colon V \to V$ – оператор, диагонализируемый в ортонормированном базисе пространства $V$;*

*б) $\mathcal{A}$ – нормальный оператор.*

$\triangle$. Докажем, что б) $\Longrightarrow$ а). Выберем собственное значение $\lambda$ оператора $\mathcal{A}$ и положим $V^\lambda = \{\boldsymbol{x} \in V \mid \mathcal{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\}$. Из (8) следует, что
$$\mathcal{A}^*(V^\lambda) \subseteq V^\lambda.$$
Так как $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$, то изсимметрии подпространство $(V^\lambda)^\perp$ также $\mathcal{A}^*$-инвариантно. Ограничения операторов коммутируют. Применяя индукцию по размерности $n = \dim V$, мы можем считать, что $\mathcal{A}$ диагонализируется. Для $V^\lambda$ это верно по определению, а поскольку $V = V^\lambda \oplus \left(V^\lambda\right)^\perp$, то всё доказано. $\square$

**Thr 5.53.** *Каждому нормалному оператору $\mathcal{A}$ на конечномерном пространств $V$ отвечают попарно различные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, $1 \leqslant m \leqslant n = \dim V$, и взаимно ортогональные проекторы $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_m$, отличные от $\mathcal{O}$ и такие, что:*

*а) $\sum_j \mathcal{P}_j = \mathcal{E}$; б) $\sum_j \lambda_j \mathcal{P}_j = \mathcal{A}$ – спектральное разложение оператора $\mathcal{A}$, так что $\lambda_j \in Spec(\mathcal{A})$; в) разложение б) единственно; г) сущесвтуют многочлены $f_1(t), \ldots, f_m(t)$, такие, что $f_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$ и $f_i(\mathcal{A}) = \mathcal{P}_i$.*

$\triangle$. потом :( $\square$

**Lem 5.54.** *Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – коммутирующие операторы на $V^{\mathbb{C}}$. Тогда $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют общий собственный вектор.*

$\triangle$. ... $\square$

**Thr 5.55.** *Два эрмитовых оператора $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ или две изометрии $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ на $n$-мерном эрмитовом пространстве $V$ одновременно приводятся к диагональному виду в некотором ортонормированном базисе тогда, и только тогда, когда они перестановочны.*

$\triangle$. Из диагонализируемости в некотором базисе следует перестановочность операторов.

Обратно, пусть $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$. Тогда у них есть общий собственный вектор $\boldsymbol{e}_1$. Подпространство $W = \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle^\perp$ размерности $n-1$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$ и отсносительно $\mathcal{B}$ в силу их эрмитовости или унитарности. Ограничения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ на $W$ будут перестановочными эрмитовыми (соответсвенно унитарными) операторами. Индукция по размерности приводит к явной конструкции ОНБ, в котором $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ запишутся в диагональной форме. $\square$

Стоит заметить, что перестановочность эрмитовых операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ эквивалентна эрмитовости оператора $\mathcal{A}\mathcal{B}$.

### 5.4.4 Положительно определенные операторы

**Def 5.56.** Эрмитов (или линейный симметричный) оператор $\mathcal{A}$ называется *положительно определенным*, если $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) > 0$ для $\forall x\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ из $V$.

**Thr 5.57.** *Пусть $V$ – пространство со скалярном произведением $(*|*)$. Следующие свойства линейных операторов на $V$ эквиваентны:*
*1) $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$, $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$;*
*2) $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{C}^*$;*
*3) $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) \geqslant 0$.*

### 5.4.5 Положительно определенные операторы

**Def 5.58.** Эрмитов (или линейный симметричный) оператор $\mathcal{A}$ называется *положительно определенным*, если $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) > 0 \ \forall \boldsymbol{x} \neq 0$.

**Lem 5.59.** *Всякий положительно определенный оператор $\mathcal{A}$ записывается в виде квадрата некоторого другого положительного оператора: $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$, причём выражение корня $\mathcal{B} := \sqrt{\mathcal{A}}$ единственно.*

**Lem 5.60.** *Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – перестановочные операторы на комплексном пространстве $V$. Тогда $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ имеют общий собственный вектор.*

$\triangle$. Достаточно привести $\mathcal{A}$ к диагональному виду и получить, что $\mathcal{A}^2 = \mathcal{B}^2$.

Единственность $\mathcal{B}$ следует из возможности спектрального разложения положительно определенного оператора. $\square$

**Lem 5.61.** *Пусть $\mathcal{C}$ – произвольный невырожденный линейный оператор на пространстве со скалярным произведением. Тогда произведение $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{C}^*$ (или $C^*C$) является невырожденным положительно определенным оператором.*

$\triangle$. Невырожденность и эрмитовость оператора очевидны. Далее, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} \Longrightarrow C^*\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, поэтому по определению сопряженного оператора имеем

$$(\mathcal{C}\mathcal{C}^*\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) = (\mathcal{C}^*\boldsymbol{x}|\mathcal{C}^*\boldsymbol{x}) > 0 \qquad \forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}.$$

Это и значит, что $\mathcal{A} = CC^*$ – положительно определенный оператор. То же относится и к произведению $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$. $\square$

**Thr 5.62.** *Пусть $V$ – пространство со скалярным произведением. Следующий свойства линейных операторов на $V$ эквивалентны:*
*1) $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$, $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$;*
*2) $\mathcal{A} = \mathcal{C}\mathcal{C}^*$;*
*3) $(\mathcal{A}\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}) \geqslant 0$.*

В одномерном комплексном пространстве свойства характеизуют неотрицательные вещественные числа $z \geqslant 0$, означает возможность как записи $z = \lambda^2, \lambda \in \mathbb{R}$, так и $z = z'\overline{z'}$.

### 5.4.6 Полярное разложение

Параллелизм между линейными операторами и комплексными числами простирается дальше, вплоть до $z = |z|e^{i\varphi} = \sqrt{z\overline{z}}e^{i\varphi}$.

**Thr 5.63.** *Всякий невырожденный линейный оператор $\mathcal{A}$ на эрмитовом (или евклидовом) векторном пространстве $V$ может быть представлен в виде*

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathcal{Q}, \tag{9}$$

*где $\mathcal{P}$ – положительно определенный оператор, а $\mathcal{Q}$ – изометрия (унитарный или ортогональный оператор). Разложение единственно и называется полярным разложением оператора $\mathcal{A}$.*

$\triangle$. Во-первых $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{P}^2$, где $\mathcal{P}$ – положительно определенный оператор, являющийся единственным квадратным корнем из $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Очевидно, что $\mathcal{P}$ – обратим. Положим $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}$, получим выражение (9).

Убедимся, что $\mathcal{Q}$ – изометрия. Действительно, так как $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}$ и $\mathcal{P}\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{E} = \mathcal{E}^* \Longleftrightarrow \left(\mathcal{P}^{-1}\right)^* = \left(\mathcal{P}^*\right)^{-1} = \mathcal{P}^{-1}$, то

$$\mathcal{Q}\mathcal{Q}^* = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{A}^*\left(\mathcal{P}^{-1}\right)^* = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}^2\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{E}.$$

Если предположить, что разложения два, то $\mathcal{Q}^*\mathcal{P} = \mathcal{Q}_1^*\mathcal{P}_1$. Поэтому $\mathcal{P}\mathcal{Q} \cdot \mathcal{Q}^*\mathcal{P} =$ $\square$

## Квадрики

### 5.4.7 Квадратичная функция в афинном пространстве

**Def 5.64.** Положим $Q(\dot{0}+\boldsymbol{x}) = q(\boldsymbol{x}) = 2l(\boldsymbol{x}) + \varphi_0$

**Def 5.65.** Точку $\dot{p} \in A$ назовём *центром* (или *центральной точкой*) для квадратичной функции $Q$, если

$$Q(\dot{p}+\boldsymbol{y}) = Q(\dot{p}) + q(\boldsymbol{y}) \qquad \forall \boldsymbol{y} \in V.$$

**Thr 5.66.** *Пусть $Q$ – квадратичная функция ранга $r$ на $n$-мерном аффинном простране $\mathbb{A}$ над $\mathbb{F}$. Если множество $C(Q)$ пусто и, значит $r < n$, то путем надлежащего выбора системы координат $\{\dot{o}; \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ функция $Q$ приводистя к виду*

$$Q(\dot{0}+\boldsymbol{x}) = \alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_r \boldsymbol{x}_r^2 + 2x_{r+1}$$

*с ненулевыми скалярами $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$; в этом случае $\operatorname{Ker} q$ есть подпространство решений системы $x_1 = \ldots = x_r = 0$, где $q$ – квадратичная форма, связанная с $Q$.*

*Если $Q$ центральна, то выбором надлежащей системы координат с началом в центральной точке $\dot{o}$ её можно привести к виду*

$$Q(\dot{o}+\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_r x_r^2 + \varphi_0;$$

*в этом случае $Q(]doto') = \varphi_0 \;\; \forall \dot{o}' \in C(Q)$. Вышеупомянутые функции аффинно неэквивалентны.*

Как следствие, над $\mathbb{R}$ всякая квадратичная функция $Q$ может быть приведена, причём единственым образом, к одному из канонических видов:

$$Q(\dot{o}+\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + 2x_{r+1}; Q(\dot{o}+\boldsymbol{x}) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 + \varphi_0. \tag{10}$$

Или, что эквивалентно, *две квадратичные функции аффинно эквиваленты тогда, и только тогда, когда, когда они имеют одинковые ранги и одинаковые сигнатуры и когда они обе либо нецентральн, либо центральны с одинаковыми значенями на соответсвующих точках.*

### 5.4.8 Квадрики в аффинном пространстве

**Def 5.67.** Каждой квадратичной функции $Q$ на $\mathbb{A}$ ставится в соотвествие пространственная конфигурация точек $S_Q$, называемая *квадрикой* (или *гиперповерхностью второго порядка*) – "геометрическое место"всех точек $\dot{p} \in \mathbb{A} : Q(\dot{p}) = 0$.

Любые две не гиперплоскости равны с точностью до множителя. Также понимаем, что такое центр квадрики.

**Thr 5.68** (Канонические типы квадрик)**.** *Случай центральной квадрикис центром симметрии в начале координат исчерпывается типами*

$$I_{s,r} \colon x_1^2 + \ldots + x_2^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 1, \quad 0 < s \leqslant r; I'_{s,r} \colon x_1^2 + \ldots + x_2^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = 0, \quad r/2 \leqslant s \leqslant r.$$

*Случай нецентральной квадрики исчерпывается типами*

$$II'_{s,r} \colon x_1^2 + \ldots + x_2^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2 = -2x_{r+1}, \quad r/2 \leqslant s \leqslant r.$$

**Def 5.69.** Квадрика типа $I_{n,n}$ называется *эллипсоидом*, типа $I_{s,n}, s < n$, – *гиперболидом*, типа $II_{n-1,n-1}$ – *эллиптическим парабалоидом*, типа $II_{s,n-1}$ – *гиперболическим параболоидом.* Все эти квадрики *невырожденные.*

Квадрики типа $I_{s,r}, I'_{s,r}$ при $r < n$ и типа $II_{s,r}$ при $r < n-1$ называются *цилиндро*, а квадрики типа $I'_{s,n}$ – *конусами.* Это *вырожденные* квадрики.

# 6 Двойственное пространство

## 6.1 Линейные функции

**Def 6.1.** $f \colon V \to \mathbb{F} : f(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{y})$ – **линейная функция** (*форма/функционал*) на $V$.

Выберем в $V$ $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, тогда для $\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{e}_n$: $f(\boldsymbol{x}) = \lambda_1\beta_1 + \ldots + \lambda_n\beta_n$, где $f(\boldsymbol{e}_i) = \beta_i$. Базисные векторы и коэффициенты линейной формы при замене базиса меняются по одним и тем же формулам (*согласовано* aka *когредиентно*).

## 6.2 Двойственное пространство

**Def 6.2.** Относительно введенных $+$ и $\times$(на скаляры) линейные функции составляют векторное пространство $V^* = \mathcal{L}(V, F)$, **двойственное** (*сопряженное* или *дуальное*) к $V$.

При одновременном рассмотрении пространства и дуального к нему, векторы из $V^*$ называют *ковариантными векторами*, а элементы из $V$ – *контрвариантными векторами.*

**Thr 6.3.** $\dim_{\mathbb{F}} V = n$, ***тогда*** $\dim V^* = n$. *Для базисов в этих пространствах:*

$$(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \text{ – базис } V,\ (\boldsymbol{e}^1, \ldots, \boldsymbol{e}^n) \text{ – линейные функции: } e^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

$\triangle$. 1)В заданном базисе пространства $V$ есть однозначное соответствие $\Phi\colon f \mapsto (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ – изоморфизм векторных пространств $V^*$ и $\mathbb{F}^n$, $\dim V^* = \dim \mathbb{F}^n = n$.

2)Задав $\beta_j = 0$ для $j \neq i$, и $\beta_i = 1$, и положив $\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$, определим линейную функцию $e^i \in V^*$ : $e^i\left(\sum \lambda_j \boldsymbol{e}_j\right) = \sum \lambda_j e^i(\boldsymbol{e}_j) = \sum \lambda_j \beta_j = \lambda_i$. $\square$

**Def 6.4.** Базис $(e^1, \ldots, e^n)$ пространства $V^*$ – **двойственный** для данного $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ в $V$.

Условимся писать $f(\boldsymbol{x}) \rightsquigarrow (f, \boldsymbol{x})$, тем самым определяется отображение $V^* \times V \to \mathbb{F}$ линейное по каждому аргументу.

Отображения $V \times W \to \mathbb{F}$ с таким свойством принято называть **билинейным**, а также спариванием между пространствами $V$ и $W$. Спаривание между $V^*$ и $V$ – **каноническое**.

## 6.3 Канонический изоморфизм

**Thr 6.5.** $\exists$ ***канонический изоморфизм:***
$\varepsilon\colon V \to V^{**} : \varepsilon(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_{\boldsymbol{x}},\ \varepsilon_{\boldsymbol{x}}(f) = f(\boldsymbol{x})$, *для* $\boldsymbol{x} \in V$, $f \in V^*$, $\varepsilon_{\boldsymbol{x}} \in V^{**}$

$\triangle$. 1)Линейность: непосредственно $\varepsilon_{\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}}(f) = f(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y})$, то есть $\varepsilon(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\varepsilon(\boldsymbol{x}) + \beta\varepsilon(\boldsymbol{y})$.

2)Биективность: выберем $V = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ и $V^* = \langle e^1, \ldots, e^n \rangle$. Тогда $\varepsilon_{\boldsymbol{e}_j}(e^i) = e^i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$.

3) Апеллируя к (6.3): $V^{**} = \langle \varepsilon_{\boldsymbol{e}_1}, \ldots, \varepsilon_{\boldsymbol{e}_n} \rangle$, то есть двойственный к $(e^i)$. Сюръективность и инъективность $\varepsilon$ очевидны. Каноничность заключена в определении. $\square$

**Def 6.6.** Наличие естественного изоморфизма $V$ и $V^{**}$ наделяет их свойством – **рефлексивность**.

Отождествив пространства $V$ и $V^{**}$, можно считать $V$ пространством линейных функций на $V^*$. Тогда формулы спаривания: $x(f) = (f, x) = f(x)$. В частности, $\forall V^* : \exists!$ двойственный ему базис в $V$.

## 6.4 Критерий линейной независимости

**Lem 6.7.** *($i$ — номер строки, $j$ — номер столбца)*

$$\left.\begin{array}{ll} \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m & \text{– линейно зависимые векторы из } V \\ f_1, \ldots, f_m & \text{– произвольные линейные функции на } V \end{array}\right\} \Rightarrow \det\left(f_i(\boldsymbol{a}_j)\right) = 0,\ 1 \leqslant i, j \leqslant m.$$

$\triangle$. 1) В силу ЛЗ выберем из всех $\boldsymbol{a}_m = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_{m-1}\boldsymbol{a}_{m-1}$.

2) В $\det(f_i(\boldsymbol{a}_j))$ вычтем из последнего столбца первый $\cdot\alpha_1$, потом второй и т.д.

3)Сам определитель не изменится, а на $i$-том месте последнего столбца будет стоять нуль по (1). $\square$

**Lem 6.8.** *Если* $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle = V^*$, ***то*** $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in V$ *– независимы* $\Longleftrightarrow \det\left(f_i(\boldsymbol{a}_j)\right) \neq 0,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n.$

$\triangle$. 1) по предыдущей лемме $\Rightarrow$.

2) $(\boldsymbol{a}_i)$ – ЛНеЗ, $V = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$. Обозначим $(\boldsymbol{e}_i)$ – базис в $V$, с двойственным из $(f_i)$, а через $\alpha_{ij}$ – координаты $\boldsymbol{a}_j$ в этом базисе. Тогда получим матрицу перехода из таких $\alpha$.

3) Матрица перехода по (1.12) обратима, а значит и $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$, но $\alpha_{ij} = f_i(\boldsymbol{a}_j)$, что и значит. $\square$

**Thr 6.9.** $(f_1, \ldots, f_n)$ *– базис* $V^*$. *Тогда ранг системы* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in V$ *равен наибольшему порядку отличного от нуля определителя вида* $\det\left(f_i(\boldsymbol{a}_j)\right)$, $1 \leqslant i = i_1, \ldots, i_m \leqslant n$; $1 \leqslant j = j_1, \ldots, j_m \leqslant k$.

△. 1) $r$ – ранг $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$. Любые $m > r$ векторов – ЛЗ, по лемме выше $\det = 0$ порядка $(m > r)$.

2) Остаётся док-ть, что $\exists \det \neq 0$ порядка $r$, для этого обозначим $\overline{f_i} := f_1\big|_U$ $(U = \langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \rangle)$.

3) Докажем, что $\langle \overline{f_1}, \dots, \overline{f_n} \rangle = U^*$:

а) $\langle \overline{f_1}, \dots, \overline{f_n} \rangle \subseteq U^*$ – очевидно;

б) $\tilde{f} \in U^*$, $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_r)$ – базис в $U$, а $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_r, \dots, \boldsymbol{e}_n)$ его дополнение до $V$.
Возьмём $f \in V^*$, которая $f(\boldsymbol{e}_i) = \tilde{f}(\boldsymbol{e}_i)$, $i = 1, \dots, r$, $f(\boldsymbol{e}_i) = 0$, $i = r+1, \dots, n$.
Очевидно, что $\overline{f} = f\big|_U = \tilde{f}$, поскольку $f$ и $\tilde{f}$ принимают одинаковые значения на базисных векторах $U$.
$\Rightarrow \tilde{f} \in \langle \overline{f}_1, \dots, \overline{f}_n \rangle$, то есть $U^* \subseteq \langle \overline{f}_1, \dots, \overline{f}_n \rangle$

4) Выберем $r$ ЛНеЗ векторов среди $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ и $\overline{f}_1, \dots, \overline{f}_n$. Они составляют базисы в $U, U^*$, и по лемме выше: $\det\big(\overline{f}_i(\boldsymbol{a}_j)\big) \neq 0$, $i = i_1, \dots, i_r$; $j = j_1, \dots, j_r$, и $\overline{f}_i(\boldsymbol{a}_j) = f_i(\boldsymbol{a}_j)$. □

# 7 Тензоры

## 7.1 Начала тензорного исчисления

### 7.1.1 Понятие о тензорах

**Def 7.1** (Понятие тензора)**.** Пусть $\mathbb{F}$ – поле, $V(\mathbb{F})$ - векторное пространство, $V^*$ – сопряженное к $V$, $p$ и $q$ – целые числа $\geqslant 0$. Всякое $(p+q)$-линейное отображение
$$f\colon V^p \times (V^*)^q \to \mathbb{F} \tag{11}$$
называется **тензором на $V$ типа** $(p, q)$ и валентности (или ранга) $p + q$.

### 7.1.2 Произведение тензоров

**Def 7.2.** Пусть $f\colon V_1 \times \dots \times V_r \to \mathbb{F}$, $g\colon W_1 \times \dots \times W_s \to \mathbb{F}$. Под *тензорным произведением* $f$ и $g$ понимают отображение
$$f \otimes g\colon V_1 \times \dots \times V_r \times W_1 \times \dots \times W_s \to \mathbb{F}, \tag{12}$$
определенное формулой
$$(f \otimes g)(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r; \boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_s) = f(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r) \cdot g(\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_s) \tag{13}$$

Некоторые свойства тензорного произведения:

| $p/q$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | const | $f$ | $b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ |
| 1 | $\boldsymbol{x}$ | $L \in \mathcal{L}(V)$ | |
| 2 | $b^*(f, g)$ | | |

1) $\otimes\colon \mathbb{T}^p_q \times \mathbb{T}^{p'}_{q'} \to \mathbb{T}^{p+p'}_{q+q'}$;
2) ассоциативность ✓
дистрибутивность ✓
~~коммутативность~~ ✗

Базис в $V$ и $V^*$ выбирается:
$$(\boldsymbol{e}_i, e^j) = \delta_i^j = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases} \qquad f(\boldsymbol{x}) = (f, \boldsymbol{x}) = \sum\nolimits_i \alpha^i \beta_i = \alpha^i \beta_i. \tag{14}$$

### 7.1.3 Координаты тензора

**Def 7.3** (Компоненты тензора)**.** Значения тензора обозначаются в виде:
$$T^{j_1, \dots, j_p}_{i_1, \dots, i_p} := T(\boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_p}, e^{j_1}, \dots, e^{j_q}). \tag{15}$$
Числа $T^{j_1, \dots, j_q}_{i_1, \dots, i_p}$ называются **координатами** тензора $T$ в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n)$

**Thr 7.4.** *Тензоры типа $(p, q)$ на $V$ составляют $\mathbb{T}^q_p(V)$ размерности $n^{p+q}$ с базисными векторами*
$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{e}_{j_q}, \tag{16}$$
*При том $\exists! T$ с координатами $T^{j_1, \dots, j_q}_{i_1, \dots, i_p}$.*

$\triangle$. Достаточно построить *разложимый* тензор. Далее воспользуемся равенством:

$$(e^{i_1} \otimes \ldots e^{i_p} \otimes \boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}_{j_q})(\boldsymbol{e}_{i_1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_p'}, e^{j_1'}, \ldots, e^{j_q'}) = \delta^{i_1}_{i_1'} \ldots \delta^{i_p}_{i_p'} \delta^{j_1}_{j_1'} \ldots \delta^{j_q}_{j_q'}.$$

Построим тензор

$$T_1 = \sum_{i,j} T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} (e^{i_1} \otimes \ldots e^{i_p} \otimes \boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}_{j_q}),$$

просто линейную комбинацию с некоторой индексацией. Теперь получим

$$T_1(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_p}, e^{j_1}, \ldots, e^{j_p}) = T^{j_1, \ldots, j_q}_{i_1, \ldots, i_p},$$

и воспользуемся тем, что тензор $T$ полностью определяется своими координатами. Почему?

В силу полилинейности для произвольных векторов

$$\boldsymbol{x}_1 = \sum\nolimits_{i_1} \xi^{i_1} \boldsymbol{e}_{i_1}, \ \ldots, \ \boldsymbol{x}_p = \sum\nolimits_{i_p} \rho^{i_p} \boldsymbol{e}_{i_p}$$

и линейных форм

$$u^1 = \sum\nolimits_{j_1} \sigma_{j_1} e^{j_1}, \ \ldots, \ u^p = \sum\nolimits_{j_p} \tau_{j_q} e^{j_q}$$

имеем

$$T(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p, u^1, \ldots, u^p) = \sum\nolimits_{i,\,j} T^{j_1, \ldots, j_q}_{i_1, \ldots, i_p} \xi^{i_1} \ldots \rho^{i_p} \sigma_{j_1} \ldots \tau_{j_q}.$$

Далее остается показать, что разложимые тензоры, отвечающие различным наборам индексов линейно независимы. Это следует из правила вычисления их значений. Пусть они ЛЗ

$$\sum \lambda^{j_1, \ldots, j_p}_{i_1, \ldots, i_p} \xi^{i_1} e^{i_1} \otimes \ldots e^{i_p} \otimes \boldsymbol{e}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{e}_{j_q} = 0,$$

где $\lambda^{j_1, \ldots, j_p}_{i_1, \ldots, i_p} \in \mathbb{F}$. Аналогично с $T_1$ можем подставить элемент базиса, свести к работе с символами Кронекера.

$\square$

### 7.1.4 Переход к другому базису

**Thr 7.5.** *При переходе от дуальных базисов $(\boldsymbol{e}_i)$, $(e^i)$ пространств $V$ и $V^*$ к новым дуальным базисам тех же пространств:*

$$\boldsymbol{e}'_k = a^i_k \boldsymbol{e}_i, \qquad e'^k = b^k_i e^i, \ \text{где } (a_{ij})^{-1}) = (b_{ij}), \tag{17}$$

*координаты тензора $T$ преобразуются по формулам*

$$T^{j_1, \ldots, j_q}_{i_1, \ldots, i_p} = \sum_{i', j'} b^{i_1, \ldots, i_p}_{i_1', \ldots, i_p'} \cdot T'^{\,j_1, \ldots, j_p}_{\,i_1, \ldots, i_p} \cdot a^{j_1 \ldots j_p}_{j_1' \ldots j_p'} \tag{18}$$

### 7.1.5 Тензорное произведение пространств

**Thr 7.6.** *Пусть $V, W$ — векторные пространства над полем $\mathbb{F}$ . Тогда существует векторное пространство $T$ над $\mathbb{F}$ и билинейное отображение $b\colon V \times W \to T$, удовлетворяющее условиям:*

| | |
|---|---|
| *(T1)* | *если $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ ЛНеЗ и $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k \in W$, то $\sum_{i=1}^k b(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_i) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{w}_1 = \ldots = \boldsymbol{w}_k = 0$;* |
| *(T2)* | *если $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k \in W$ ЛНеЗ и $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$, то $\sum_{i=1}^k b(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_i) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \ldots = \boldsymbol{v}_k = 0$;* |
| *(T3)* | *$b$ – сюръективно, т.е. $T = \langle b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mid \boldsymbol{v} \in V, \ \boldsymbol{w} \in W \rangle_{\mathbb{F}}$.* |

*Кроме того, пара $(b, T)$ универсальна в том смысле, что какова ни была пара $(b', T')$, состоящая из векторного пространства $T'$ и билинейного отображения $b'\colon V \times W \to T'$, найдётся единственное линейное отображение $\sigma\colon T \to T'$, для которого $b'(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \sigma(b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}))$, $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{w} \in W$.*

**Def 7.7.** Пару $(b, T)$, однозначно определенную с точностью до изоморфизма по заданным векторным пространствам $V$, $W$, называют *тензорным произведением* этих пространств.

**Def 7.8.** Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V, \mathcal{B}\colon W \to W$ – линейный операторы. Их *тензорным произведением* называется линейный оператор

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}\colon V \otimes W \to V \otimes W,$$

действующий по правилу

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})\,(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}) = \mathcal{A}\boldsymbol{v} \otimes \mathcal{B}\boldsymbol{w}$$

(далее по линейности $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})\,(\sum(\boldsymbol{v}_i \otimes \boldsymbol{w}_i)) = \sum \mathcal{A}\boldsymbol{v}_i \otimes \mathcal{B}\boldsymbol{w}_i$).

## 7.2 Свёртка, симметризация и альтернирование тензоров

### 7.2.1 Свёртка

**Def 7.9** (свёртка)**.** Зафиксировав все переменные кроме $\boldsymbol{x}_r$ и $u_s$, получим билинейную форму:

$$f(\boldsymbol{x}_r, u_s) := T(\ldots, \boldsymbol{x}_r, \ldots, u_s, \ldots). \tag{19}$$

Тогда **инвариантная** сумма вида $\overline{T} = f(\boldsymbol{e}_k, e^k)$ называется **свёрткой тензора** $T$ по $r$-му ковариантному и $s$-му контрвариантному индексу.

Если обозначить свёртку по индексам $r$, $s$ символом $\mathrm{tr}_r^s$, то $\mathrm{tr}_r^s$ – линейное отображение:

$$\mathrm{tr}_r^s : \mathbb{T}_p^q(V) \to \mathbb{T}_{p-1}^{q-1}(V). \tag{20}$$

**Thr 7.10.** *Свёртка вида $tr_r^s$ тензора $T \in \mathbb{T}_p^q$ является тензор $\overline{T} \in \mathbb{T}_{p-1}^{q-1}$ с координатами*

$$\overline{T}^{j_1,\ldots,j_{s-1},j_{s+1},\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_{r-1},i_{r+1},\ldots,i_p} = \sum_k T^{j_1,\ldots,j_{s-1},k,j_{s+1},\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_{r-1},k,i_{r+1},\ldots,i_p} \tag{21}$$

### 7.2.2 Симметричные тензоры

Для любой перестановки $\pi \in S_p$ положим

$$f_\pi(T)(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p) = T(\boldsymbol{x}_{\pi(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\pi(p)}) \tag{22}$$

**Def 7.11.** Тензор $T$ типа $(p, 0)$ называется **симметричным**, если $\forall \pi \in S_p$ $f_\pi(T) = T$. **Симметризацией** $T \in \mathbb{T}_p^0(V)$ называется отображение

$$S(T) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} f_\pi(T) \colon \mathbb{T}_p^0(V) \to \mathbb{T}_p^0(V). \tag{23}$$

ЗФ: Подпространство сим. тензоров типа $\mathbb{T}_p^0(V)$ обозначим $\mathbb{T}_p^+(V)$. Действие $S$: 1) $S^2 = S$, $\operatorname{Im} S = \mathbb{T}_p^+(V)$. Пространства $\mathbb{F}[X_1, \ldots, X_n]_p$ и $\mathbb{T}_p^+(V)$ биективны. Тогда

$$\dim \mathbb{F}[X_1, \ldots, X_n]_p = \dim \mathbb{T}_p^+(V) = \binom{n+p-1}{p} \tag{24}$$

**Def 7.12.** Ассоциативная и коммутативная **симметрическая алгебра** пространства $V$:

$$S(V) = \oplus_{p=0}^{\infty} S\mathbb{T}^p(V), \tag{25}$$

где $\vee$ выступает в качестве умножения.

### 7.2.3 Кососимметричные тензоры

**Def 7.13.** Назовём тензор $T$ кососимметричным, если

$$f_\pi(T) = \mathrm{sign}(\pi) \cdot T \qquad \forall \pi \in S_p. \tag{26}$$

**Def 7.14. Альтерированием** называется отображение

$$A(T) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \mathrm{sign}(\pi) \cdot f_\pi(T) \colon \mathbb{T}_p^0(V) \to \mathbb{T}_p^0(V). \tag{27}$$

Действие $A$: 1) $A^2 = A$, 2) $\operatorname{Im} A = \Lambda_p^+(V)$, 3) $A(f_\sigma(T)) = \mathrm{sign}(\sigma) A(T)$.

## 7.3 Внешняя алгебра

**Def 7.15.** Зададим **операцию внешнего умножения**

$$\wedge \colon \Lambda(V) \times \Lambda(V) \to \Lambda(V), \tag{28}$$

полагая $Q \wedge R = A(Q \otimes R)$ для любого $q$-вектора $Q$ и любого $r$-вектора $R$.

**Def 7.16** (алгебра Грассмана)**.** Алгебра $\Lambda(V)$ над $\mathbb{F}$ называется **внешней алгеброй** пространства $V$:

$$\Lambda(V) = \oplus_p^n \Lambda^p(V) \tag{29}$$

**Thr 7.17.** *Внешняя алгебра ассоциативна.*

$\boxed{\Rightarrow}$. Пусть $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_p$ – произвольные векторы из $V$. Тогда[2]

$$\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_p = A(\boldsymbol{x}_1 \otimes \boldsymbol{x}_2 \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}_p). \tag{30}$$

**Thr 7.18.** *Пусть* $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_p)$ *– базис* $V$*. Тогда*

$$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_p, \qquad 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n \tag{31}$$

*образуют базис пространства* $\Lambda^p(V)$*.*

$\boxed{\Rightarrow}$. Внешняя алгебра $\Lambda(V)$ пространства $V$ имеет размерность $2^n$. При этом

$$\dim \Lambda^p(V) = \binom{n}{p}. \tag{32}$$

Базис пространства $\Lambda^n(V)$ состоит из одного $n-$вектора

$$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_p.$$

Внешняя алгебра $V$ **антикоммутативна**:

$$Q \in \Lambda^q(V), R \in \Lambda^r(V) \Rightarrow Q \wedge R = (-1)^{qr} R \wedge Q. \tag{33}$$

# связь с определителями
# векторные подпространства и $p$-векторы
# условия разложимости $p$-векторов

[2] с. 287, Кострикин.