ТеорМин по математическому анализу II

Авторы: Хоружий Кирилл
Примак Евгений

От: *26.05.2020*

Ряды с неотрицательными членами

Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \ (a_n \geqslant 0, n \in \mathbb{N}) \text{ сходится } \Leftrightarrow \exists M > 0 \colon \forall n \in \mathbb{N} \ \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant M.$$

Интегральный признак сходимости ряда:

Если $f(x)$: $\begin{matrix} \text{неотрицательна} \\ \text{убывает на } [1, +\infty) \end{matrix}$ то $\begin{matrix} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \\ \int_{n=1}^{\infty} f(x)\,dx \end{matrix}$ сходятся и расходятся одновременно.

Признак[1] ***Даламбера***:

$$\text{Если } a_n > 0 \ (n \in \mathbb{N}) \ \textbf{и} \ \exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda, \ \text{ то } \begin{cases} \text{сходится,} & \text{при } \lambda < 1; \\ \text{расходится,} & \text{при } \lambda > 1. \end{cases}$$

Признак Коши:

$$\text{Если } a_n > 0 \ (n \in \mathbb{N}) \ \textbf{и} \ \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda, \ \text{ то } \begin{cases} \text{сходится,} & \text{при } \lambda < 1; \\ \text{расходится,} & \text{при } \lambda > 1. \end{cases}$$

Признак Раабе:

$$\text{Если } a_n > 0 \ (n \in \mathbb{N}) \ \textbf{и} \ \exists \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lambda, \ \text{ то } \begin{cases} \text{сходится,} & \text{при } \lambda < 1; \\ \text{расходится,} & \text{при } \lambda > 1. \end{cases}$$

Признак[2] ***Гаусса***:

$$\text{Если } \ldots \ \textbf{и} \ \frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\delta}}, \ \text{ то } \begin{cases} \text{сход,} & \text{при } \alpha < 1; \\ \text{расход,} & \text{при } \alpha > 1. \end{cases} ; \begin{cases} \text{сход,} & \text{при } \beta > 1; \\ \text{расход,} & \text{при } \beta \leqslant 1. \end{cases}$$

Знакопеременный ряд

Признак Лейбница:

Если ряд $(-1)^n|\ldots|$ **и** члены ряда монотонно убывают $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, то ряд сходится.

Абсолютно и не абсолютно сходящиеся ряды

Признак Дирихле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ сходится, если } \exists M > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \colon \left| \sum_{k=1}^{n} b_k \right| \leqslant M \ \textbf{и} \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Признак Абеля:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ сходится, если } (a_n) \text{ монотонна и ограниченна } \textbf{и} \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится.}$$

[1] Пример для $\lambda = 1$: $a_n = n^{-1}$ и $a_n = n^{-2}$, расходится и сходится соответсвенно.

[2] Поддразумевается $|\gamma_n| < c$, $\delta > 0$. Второй случай верен при $\alpha = 1$.

THR 1 (теорема Римана). *Если ряд сходится условно, то $\forall A$ существует такая перестановка членов ряда, что сумма полученного ряда равна A.*

Сходимость и равномерная сходимость функциональных рядов

DEF 1. *Последовательность функций $f_n\colon X \to \mathbb{R}$* ***сходится равномерно*** *на множестве X к функции f_0, если*

$$\sup\{|f_n(x) - f_0(x)| \mid x \in X\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Также обозначается как $f_n \rightrightarrows_X f_0$.

DEF 2. *Ряд из функций $u_n\colon X \to \mathbb{R}$* ***сходится равномерно***[3] *на X, если последовательность его частичных сумм*

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

сходится равномерно на X к некоторой функции $S\colon X \to \mathbb{R}$.

Критерий Коши (равномерной сходимости **последовательности функций**):

Для последовательности функций $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ выполняется

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n, m \geqslant N(\varepsilon),\ \sup\{|f_n(x) - f_m(x)|\colon x \in X\} < \varepsilon$$

тогда, и только тогда, когда последовательность равномерно на X сходится к некоторой функции.

Критерий Коши (равномерной сходимости **функционального ряда**):

Для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\colon X \to \mathbb{R}$ выполняется

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n, m\colon m \geqslant n > N(\varepsilon),\ \forall x \in E : \left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

тогда, и только тогда, когда функциональный ряд сходится на X равномерно к некоторой функции.

THR 2 (Признак Вейерштрасса). ***Если*** *ряд из функций $u_n : X \to \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $\forall x \in X \forall n \in \mathbb{N}, |u_n(x)| \leqslant a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$,* ***то*** *ряд из функций сходится равномерно и абсолютно на X.*

THR 3 (Непрерывность равномерного предела непрерывных функций). ***Пусть*** *последовательность $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ сходится равномерно на X к функции f и все функции f_n непрерывны.* ***Тогда*** *f тоже непрерывна.*

THR 4. ***Пусть*** *последовательность дифференцируемых функций $f_n\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ сходится в точке x_0, а последовательность производных f_n' сходится равномерно на $[a, b]$ к функции g.* ***Тогда*** *(f_n) равномерно сходится к некоторой f и $f' = g$ на всём отрезке $[a, b]$.*

Равномерная сходимость несобственных интегралов

DEF 3. *Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x; \alpha)\, dx$, сходящийся для $\forall \alpha \in E$, называют* ***равномерно сходящимся на множестве*** *E, если для $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_\varepsilon : \forall \alpha \in E$* ***и*** *$\xi \geqslant \delta_\varepsilon$ выполняется:*

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x; \alpha)\, dx\right| < \varepsilon.$$

Признак Вейерштрасса

Если на $[\alpha; +\infty)$ $\exists \varphi(x) : |f(x; \alpha)| \leqslant \varphi$ (для $\forall x \in [\alpha, +\infty)$ и $\forall \alpha \in E$), **и** если интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\, dx$ сходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x; \alpha)\, dx$ сходится **абсолютно** и **равномерно** на E.

[3] Или, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall x \in E\colon |S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Признак Дирихле

Интеграл $\int_\alpha^{+\infty} f(x;\alpha)g(x;\alpha)\,dx$ сходится равномерно по α на E, если при каждом фиксированном $\alpha \in E$ функции f, g, g'_x непрерывны по x на $[\alpha; +\infty)$ **и** удовлетворяют следующим условиям:

1. $g(x;\alpha) \to 0$ при $x \to +\infty$ равномерно относительно $\alpha \in E$;
2. $g'_x(x;\alpha)$ для каждого фиксированного $\alpha \in E$ не меняет знака $\forall x \in [\alpha; +\infty)$;
3. $\forall \alpha \in E$ f имеет ограниченную первообразную.

Критерий Коши

$\int_a^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx$ сходится равномерно на $E \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon \in (\alpha; +\infty) : \forall \xi' \in [\delta_\varepsilon; +\infty), \xi'' \in [\delta_\varepsilon; +\infty)$ и $\forall \alpha \in E$ выполняется: $\left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x;\alpha)\,dx\right| < \varepsilon$.

Непрерывность равномерно сходящегося интеграла по параметру

Если $f(x;\alpha)$ непрерывна на множестве и $I(\alpha) = \int_\alpha^{+\infty}$ сходится равномерно по α на $[\alpha_1; \alpha_2]$, **то** $I(\alpha)$ непрерывна на $[\alpha_1; \alpha_2]$.

Свойства интегрируемости

THR 5. *Пусть $g \leqslant 0$, g интегрируема по Лебегу на X. Если $|f| \geqslant g$ почти всюду на $X \Rightarrow f$ интегрируема на X:*

$$\int_X f(x)\,d\mu \leqslant \int_X g(x)\,d\mu$$

THR 6. *Пусть $\mu(X) < +\infty$, $f : X \to \mathbb{R}$ – измерима и ограничена $\Rightarrow f$ интегрируема на X.*

THR 7. *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ – непрерывна на компакте X, $\Rightarrow f$ интегрируема на X.*

THR 8 (Неравенство Чебышёва)**.** *$f\colon X \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу. Тогда $\forall C \in \mathbb{R}\ \exists$ измеримый $X_C = \{x \in X \colon |f(x)| \geqslant C\}$, f интегрируема на X_C. Выполняется неравенство:*

$$\int_X |f(x)|\,d\mu \geqslant \int_{X_C} |f(x)|\,d\mu \geqslant C\mu(X_C)$$

Сходимость интеграла знакопостоянной[4] функции

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \checkmark, & \alpha < 1 \\ \times, & \alpha \geqslant 1 \end{cases} \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \checkmark, & \alpha > 1 \\ \times, & \alpha \leqslant 1 \end{cases} \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{e^{\alpha x}} \begin{cases} \checkmark, & \alpha > 0 \\ \times, & \alpha \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} \checkmark, & \alpha > 1. \\ \times, & \alpha \leqslant 1 \end{cases} \qquad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} \checkmark\times, & \alpha > 1. \\ \checkmark, & \alpha \in (0,1] \\ \times, & \alpha \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{0.5} \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta} \begin{cases} \checkmark, & \alpha < 1, \forall\beta;\ a = 1, \beta > 1 \\ \times, & \alpha > 1, \forall\beta;\ a = 1, \beta \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x} \begin{cases} \checkmark, & \alpha > 1, \forall\beta;\ a = 1, \beta > 1 \\ \times, & \alpha < 1, \forall\beta;\ a = 1, \beta \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^{\alpha} x^\beta} \begin{cases} \checkmark, & \alpha > 0, \forall\beta;\ a = 0, \beta > 1 \\ \times, & \alpha < 0, \forall\beta;\ a = 0, \beta \leqslant 1 \end{cases}$$

Признаки сходимости несобственных интегралов

THR 9 (критерий Коши сходимости несобственного интеграла первого рода)**.** *Для того, чтобы несобственный интеграл сходился, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено (условие Коши): $\forall \varepsilon > 0\ \exists A > a \colon \forall A' > A$ и $\forall A'' > A$ верно:*

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

[4] Кроме средней колонки, там $\checkmark\times$ – условная сходимость.

THR 10 (н&д условие сходимости несобственного интеграла от неотрицательной функции)**.** *Если $f(x) \geqslant 0$ на $[a, +\infty)$, то для сходимости н&д, чтобы функция*

$$\Phi(A) = \int_a^A f(x)\,dx$$

была огарниченной на $A \in [a, +\infty)$.

Признак Дирихле:

Пусть на $[a, +\infty]$ $f(x)$ непрерывна, имеет ограниченную первообразную **и** $g(x)$ является монотонной, непрерывно дифференцируемой на $[a, \infty)$ и $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Тогда

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx \text{ — сходится.}$$

Признак Абеля:

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b)$ и интеграл $f(x)$ сходится, **и** функция $g(x)$ ограниченна, непрерывно дифференицруема и монотонна на $[a, b)$, **то** сходится интеграл $\int_a^b f(x)g(x)dx$.

Вычисление объёмов тел и площадей поверхности

Для вращения относительно Ox непрерывной функции, с непрерывной неотрицательной производной $f(t)$ (для II случая), верно, что:

	V	S
$y(x)$	$\pi \int_a^b y^2(x)\,dx$	$2\pi \int_a^b \lvert y(x)\rvert\sqrt{1 + y'^2(x)}dx$
$x(t), y(t)$	$\pi \int_a^b y^2(x)\,dx$	$2\pi \int_\alpha^\beta \lvert y(t)\rvert\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$

Площадь, при вращении вокруг полярного луча кривой $r = r(\varphi)$, $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \pi/2$:

$$S = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\cos\varphi\,d\varphi.$$

Дифференцируемые функции нескольких переменных

DEF 4. *Функция $f : U(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0), если она представима в виде:*

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + \mathrm{o}(\rho)$$

$$df_(x_0, y_0) := A\Delta x + B\Delta y = A\,dx + B\,dy$$

THR 11. *Если f дифференцируема в точке (x_0, y_0) и $df(x_0, y_0) = A\,dx + B\,dy$,* ***то*** *в этой точке существуют частные производные функции: $f'_x = A$; $f'_y = B$.*

THR 12 (Достаточное условие)**.** *Частные производные f существуют и непрерывны в точке (x_0, y_0) $\Rightarrow$ f дифференцируема в этой точке.*

Алгоритм исследования функции на дифференцируемость в особой точке (x_0, y_0) (не попадающей под теорему 12):

1. Ищем в (x_0, y_0) частные производные. Если $\nexists \Rightarrow f$ не дифференцируема;
2. Ищем[5] $\lim_{\rho\to 0}\left(\frac{1}{\rho}\left|f(x, y) - f(x_0, y_0) - f'_x\big|_{(x_0,y_0)}(x - x_0) - f'_y\big|_{(x_0,y_0)}(y - y_0)\right|\right)$, если предел существует и равен нулю, **то** f дифференцируема, **иначе** нет.

[5] Что то же самое, что и $f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \rightrightarrows A$.

Ряд Тейлора

Таблица 1: Формулы Маклорена для элементарных функций

e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\operatorname{tg} x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \ldots$
$\operatorname{sh} x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\operatorname{ch} x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\arcsin x$	$x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1) x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \ldots (2n)(2n+1)} + o(x^{2n+2})$
$\operatorname{arctg} x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n)$
$ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n)$

Формула Коши-Адамара:

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}, \qquad \left(R = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \text{ если существует} \right)$$

Формула Тейлора для $f(x,y)$:

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!i!} \frac{\partial^k f(x_0,y_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} (x-x_0)^{k-i} (y-y_0)^i + o(\rho^m),$$

где

$$\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad x \to x_0, \quad y \to y_0.$$

В частности:

$$f(x,y) = f + f'_x x + f'_y y + \frac{1}{2} \left(f''_{xx} x^2 + 2 f''_{xy} xy + f''_{yy} \right)$$

Бонус

Интеграл неразложимой рациональной функции:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+2px+q} \, dx = \frac{A}{2} \ln \left(x^2 + 2px + q \right) + \frac{B - Ap}{\sqrt{q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{x+p}{q-p^2}$$

Неравенство с логарифмом:

$$\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

Примеры

Ступенчатый ответ

Пусть f и g интегрируемы на отрезке $[1, a]$ для любого числа $a > 1$. Обозначим
$I_1 = \int_1^\infty f(x)dx,$
$I_2 = \int_1^\infty g(x)dx,$
$I_3 = \int_1^\infty g(x)f(x)dx.$
Возможно, что:

$$\Delta_n = \left[n, n + \frac{1}{n^4}\right]; \quad \Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty};$$

$$f(x) = \begin{cases} n^2, & x \in \Delta_n; \\ 0, & x \in R \setminus \Delta; \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} (-1)^n n, & x \in \Delta_n; \\ 0, & x \in R \setminus \Delta; \end{cases}$$

$$\checkmark I_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2};$$

$$\checkmark I_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3};$$

$$\checkmark\text{✗} I_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Бонус:

$$\frac{\sin x}{x}\checkmark\text{✗} \qquad \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\checkmark\text{✗} \qquad \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\checkmark\text{✗} \qquad x^3 \sin(x^5)\checkmark\text{✗}$$