Заметки по математическому анализу II

Авторы: Хоружий Кирилл
Примак Евгений

От: *29.05.2020*

Содержание

1 Степенные ряды

1.1 Суммирование абсолютно сходящихся рядов

Def 1.1. *Сумма ряда* — $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Lem 1.1. *Если* $\forall n\ a_n \geqslant 0$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mid \forall n \in \mathbb{N}\right\}$.

CON 1.1. *Сумма ряда из чисел одного знака не меняется при перестановке её элементов.*

Def 1.2. Сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Lem 1.2 (Теорема Фубини)**.** *Пусть сумма* $\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ *сходится абсолютно, тогда* $\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{nm}\right)$.

THR 1.1. *Если суммы рядов последовательностей a_n и b_n абсолютно сходятся, то:*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m = \sum_{s=2}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{s-1} a_n b_{s-n}\right).$$

THR 1.2. *Если $a_n = O(b_n)$ при $n\to\infty$, то из абсолютной сходимости ряда из b_n следует абсолютная сходимость ряда из a_n.*

THR 1.3. *Пусть* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q \in [0,+\infty]$, *тогда при $q>1$ ряд из a_n расходится, при $q<1$ сходится.*

1.2 Равномерная сходимость функциональных последовательностей

Def 1.3. $f_n\colon X\to\mathbb{R} \underset{X}{\rightrightarrows} f_0$ (*сходится равномерно*), если $\sup\{|f_n(x)-f_0(x)| \mid x\in X\}\to 0$, $n\to\infty$.

Def 1.4. Ряд из $u_n\colon X\to\mathbb{R}$ *сходится равномерно на* X, если $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} S$, $(S\colon X\to\mathbb{R})$.

THR 1.4 (Критерий Коши)**.** $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists N(\varepsilon)\colon \forall n,m\geqslant N(\varepsilon) \rightsquigarrow \sup\{|f_n(x)-f_m(x)| \mid x\in X\}<\varepsilon$.

CON 1.2 (Необходимое условие)**.** *Для* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$, ***необходимо***, *чтобы* $u_n \underset{X}{\rightrightarrows} 0$ *при* $n\to\infty$.

THR 1.5 (Признак Вейерштрасса)**.** *Если* $\forall x\in X\,\forall n\in\mathbb{N} \rightsquigarrow |u_n(x)|\leqslant a_n$ ***и*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| \underset{X}{\rightrightarrows}$

THR 1.6. *Пусть* $f_n\colon X\to\mathbb{R} \underset{X}{\rightrightarrows} f$ *и все f_n непрерывны, тогда f тоже непрерывна.*

THR 1.7.

$$\left.\begin{array}{r}\text{дифференцируемые } f_n\colon [a,b]\to\mathbb{R} \text{ сходятся в } x_0\\ \text{последовательность } f_n' \text{ сходится равномерно на } [a,b] \text{ к } g\end{array}\right\} \Longrightarrow (f_n) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f\ (f'=g).$$

CON 1.3.

$$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \underset{X}{\rightrightarrows}\\ \displaystyle\exists x_0\in X : \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) < +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \ \boldsymbol{и}\ \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

1.3 Степенные ряды и радиус сходимости

Def 1.5. Степенной ряд функции – $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

THR 1.8 (Существование радиуса)**.** *Для* $\forall \Sigma\ \exists R \in [0, +\infty]$*, такой, что ряд расходится при* $|x-x_0| > R$ ***и*** *для* $\forall r : (0 < r < R)$ *равномерно и абсолютно сходится при* $|x - x_0| < r$.

Def 1.6. Радиус сходимости: $R = \sup\{|x - x_0| \mid \Sigma \text{ сходится в } x\}$.

THR 1.9 (Ф-ла Коши-Адамара)**.** *Для* R *у степенного ряда верна формула* $\frac{1}{R} = \varlimsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$.

THR 1.10 (Ф-ла Даламбера)**.** *Для* R *у степенного ряда верна формула* $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

THR 1.11. *Радиус сходимости не меняется при взятии поэлементной производной и в степенных рядах можно переставлять суммирование и дифференцирование в пределах области* $|x - x_0| < R$.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}, \ \textbf{\textit{и}}\ R = R'$$

Def 1.7. Ряд Тейлора для $f(x)$ в окр-ти x_0 с $R > 0$ – $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

COM 1.1. *У аналитической функции локально есть первообразная:*
$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(z-z_0)^{n+1}}{n+1}$ $(+const)$

1.4 Ряды Тейлора для элементарных функций

THR 1.12. *Пусть* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ∞*-дифференцируема на* (a,b) ***и*** $\exists C > 0$ *такой, что* $\forall x \in (a,b)\, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \rightsquigarrow |f(x)| \leqslant C^n$. *Тогда* f *раскладывается в ряд*[1] *Тейлора с центром в* $x_0 \in (a,b)$ *и* $R \geqslant min\{|a-x_0|, |b-x_0|\}$.

1.5 Условная сходимость рядов, признаки Абеля и Дирихле

THR 1.13 (Дискретное преобразование Абеля)**.**

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = a_n B_n - a_m B_{m-1} - \sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k, \quad \text{где } B_k = b_m + b_{m+1} + \dots + b_{m+k-1}.$$

THR 1.14. *Если* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *сходится (может и не абсолютно), то* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *непрерывна на* $[0,1]$.

THR 1.15 (Признак Абеля)**.** *Если* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$*, а* $g(x)$ *монотонна и равномерно ограничена,* ***тогда*** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) g_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$.

THR 1.16 (Признак Дирихле $\rightrightarrows$)**.** *Если* $\sum\limits_{k=m}^{n} f_k(x)$ *равномерно ограничен, а монотонная* $g_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$*,* ***тогда*** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) g_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows}$.

THR 1.17 (Признак Лейбница)**.** *Если монотонная по* n $g_k(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0$*, то* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \underset{X}{\rightrightarrows}$.

[1] Теперь явно можно проверить $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

1.6 Приближение кусочно линейными функциями и многочленами

Lem 1.3. *Для непрерывной с компактным носителем* $f(x)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *и* $t_n \to 0$ *при* $n\to\infty$*, последовательность* $f_n(x) = f(x+t_n) \underset{X}{\rightrightarrows} f$.

Lem 1.4. $f(x)=\sqrt{x}$ *можно равномерно приблизить многочленами на любом отрезке* $[0,a]$.

Lem 1.5. $f(x)=|x|$ *можно равномерно приблизить многочленами на любом отрезке* $[-a,a]$.

THR 1.18. *Всякую непрерывную кусочно-линейную на отрезке* $[a,b]$ *функцию можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленом.*

Lem 1.6. *Для непрерывной* $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$*:* $\sum\limits_{k=0}^{m} f(k/m)\varphi_{1/m}(x-k/m) \underset{X}{\rightrightarrows} f$.

THR 1.19. *Всякую* $f\colon [a_1,b_1]\times[a_n,b_n] \to \mathbb{R}$ *можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленом.*

1.7 Приближение тригонометрическими многочленами

THR 1.20 (Теорема Вейерштрасса)**.** *Всякую непрерывную* 2π*-периодичную* $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *можно сколько угодно точно равномерно приблизить* $T(x) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k cos(kx) + b_k sin(kx))$.

Def 1.8. $\mathcal{A}\subseteq C(x)$(− непрерывные на компакте функции) называется *алгеброй*, если она содержит константы ($\mathbb{R}\subseteq\mathcal{A}$) и топологически "замкнута"относительно операций $+$ и $\bullet$.

Def 1.9. *Алгебра разделяющая точки —* $\forall a,b\in\mathbb{R},\ x=y\in X,\ \exists f\in A$ такая что $f(x)=a$, а $f(y)=b$.

THR 1.21 (Стоуна-Вейерштрасса)**.** *Если* X*-метрический компакт, а алгебра* $\mathcal{A}\in C(x)$ *разделяет точки,* ***то*** $\forall f\in C(x)$ *можно сколь угодно точно равномерно приблизить функциями из* $\mathcal{A}$.

2 Интеграл Римана на отрезке

2.1 Интегрирование непрерывных функций через приближения

THR 2.1. *У всякой непрерывной на отрезке функции есть первообразная.*

Def 2.1 (Формула Ньютона-Лейбница)**.** $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$.
Свойства: линейность, монотонность, аддитивность.

Def 2.2. Интеграл непрерывной на компакте $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ определим с помощью повторного интегрирования по всем переменным.

THR 2.2. *Определения интеграла непрерывной функции нескольких переменных с компактным носителем не зависит от порядка интегрирования, линейность, монотонность.*

CON 2.1. $\forall g\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *с компактным носителем и непр* $\frac{\partial g}{\partial x_i}$*:* $\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n = 0$.

2.2 Интеграл Римана

Def 2.3 (Суммы Дарбу)**.** Для $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ и $\tau\vdash[a,b]$ определим:

$$s(f,\tau) = \sum_{\Delta\in\tau}\inf f(x)\mid x\in\Delta|\Delta|,$$

$$S(f,\tau) = \sum_{\Delta\in\tau}\sup f(x)\mid x\in\Delta|\Delta|.$$

Lem 2.1. *Если* $\tau\preccurlyeq\sigma$*, то:* $s(f,\tau)\geqslant s(f,\sigma)$*, а* $S(f,\tau)\leqslant S(f,\sigma)$.

Lem 2.2. *Для двух разбиений* $[a, b]$ *имеет место:* $s(f, \tau) \leqslant S(f, \sigma)$.

Def 2.4 (Верхний и нижний интегралы Римана)**.**

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S(f,\tau) \mid \tau \vdash [a,b,]\},$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{s(f,\tau) \mid \tau \vdash [a,b]\}.$$

Def 2.5. $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — *элементарно ступенчатой*, если $\exists \tau \vdash [a,b]$ такое, что $\forall \Delta \in \tau$ $h\big|_\Delta \equiv \mathrm{const}$.

Def 2.6. Интеграл ступенчатой функции: $\int\limits_a^b h(x)\,dx = \sum\limits_{\Delta\in\tau} f(\Delta)|\Delta|$.

Определение верхнего и нижнего интеграла Римана:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\left\{\int_a^b h(x)\,dx \mid \text{по ступ.} h \geqslant f\right\},$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\left\{\int_a^b h(x)\,dx \mid \text{по ступ.} h \leqslant f\right\}.$$

Проверить монотонность, линейность интеграла ступенчатой функции; монотонность, линейность, аддитивность интеграла Римана.

THR 2.3. *Если* f *интегрируема по Риману на* $[a,b]$*, то она интегрируема на* $\forall [c,d] \subseteq [a,b]$.

2.3 Интегрируемость по Риману разных функций

Def 2.7. *Взвешенная сумма колебаний*: $\Omega = S(f,\tau) - s(f,\tau) = \sum\limits_{\Delta\in\tau} \omega(f,\Delta)|\Delta|$, где $\omega(f,X) = \sup f(X) - \inf f(X)$ — колебание функции на X.

THR 2.4. $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *интегрируемы по Риману,* ***то*** *интегрируемы их модули и их произведение.*

Def 2.8. *Мелкостью разбиения* $\tau \vdash [a,b]$ называется $|\tau| = \max|\Delta|$ по $\Delta \in \tau$.

Def 2.9. *Суммой Римана* для $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, разбиения $\tau \vdash [a,b]$ и системы представителей $\xi = \{\xi(\Delta) \in \Delta\} \mid \Delta \in \tau\}$ называется: $\sigma(f,\tau,\xi) = \sum\limits_{\Delta\in\tau} f(\xi(\Delta))|\Delta|$.

THR 2.5. *Если* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *интегрируема по Риману, то* $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0$ *такая, что* $\forall \tau \vdash [a,b]$, $|\tau| < \delta$, *и* $\forall \xi$ *соответствующей* $\tau \rightsquigarrow |\sigma(f,\tau,\xi) - \int\limits_a^b| < \varepsilon$.

THR 2.6 (Формула Ньютона-Лейбница для интеграла Римана)**.** *Непрерывная функция интегрируема по Риману, кроме того существует первообразная. Монотонная тоже. Если* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \in \mathcal{R}$ *и* $\exists F$ *на* (a,b) *непрерывная на концах* $[a,b]$*, то:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

2.4 Приёмы интегрирования

THR 2.7 (Интегрирование по частям)**.**

$$\left.\begin{array}{ll} f,g \text{ непрерывны на} & [a,b] \\ f,g \text{ дифференцируемы на} & (a,b) \\ f',g' \text{ интегрируемы на} & ([a,b]) \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

THR 2.8 (Замена переменной)**.** *Для непрерывно дифференцируемой* $\varphi\colon [a,b] \to [\varphi(a),\varphi(b)]$ *и непрерывной* f *на* $[\varphi(a),\varphi(b)]$*, выполняется:* $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$.

THR 2.9 (Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме)**.**

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ } n\text{-раз дифференцируема в } (U \ni x_0) \\ f^{(n)}(x) \text{ интегрируема по Риману} \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall x \in U \;\; f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{(n-1)!} f(n)(t)(x-t)^{n-1}\,dt$$

3 Мера Лебега и её свойства

3.1 Элементарные множества и мера Жордана

Назовём *параллелепипедом* $P \supseteq \mathbb{R}^n$ произведение ограниченных промежутков $\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n$ (которые могут быть точками).

THR 3.1 (Корректность определения меры элементарных множеств)**.** *Мера элементарного множества не зависит от его представления в виде объединения параллелепипедов.*

THR 3.2 (Аддитивность меры элементарных множеств)**.** *Для всяких двух элементарных множеств* S *и* T *множества* $S \cap T$*,* $S \cup T$*,* $S \setminus T$ *тоже элементарны и выполняется равенство:*

$$mS + mT = m(S \cup T) + m(S \cap T).$$

Def 3.1 (Нижняя мера Жордана)**.** Нижняя мера Жордана X – точная верхняя грань меры элементарного множества $s \subseteq X$; верхняя мера Жордана X – точная нижняя грань меры элементарного множества: $X \subseteq S$. Множество **измеримо по Жордану** если $\overline{m} = \underline{m}$.

THR 3.3 (Критерий измеримости множества по Жордану)**.** *Множество* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *измеримо по Жордану тогда, и только тогда, когда оно ограничено и* $m(\partial X) = 0$.

3.2 Внешняя мера Лебега и её свойства

Def 3.2. Внешняя мера Лебега множества $X \subset \mathbb{R}^n$ — это точная нижняя грань по всем счётным покрытиям X элементарными множествами

$$\mu^*(X) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu(S_k) \mid X \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right\}.$$

.

Lem 3.1. *Для элементарного* $S \subset \mathbb{R}^n$ *выполняется* $\mu^*(S) = m(S)$.

Lem 3.2 (Счётная субаддитивность внешней меры Лебега)**.** *Для любого счётного сечения множеств* $X_k \subseteq \mathbb{R}^n$*,* $k \in \mathbb{N}$*, выполняется*

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(X_k).$$

3.3 Множества конечной меры Лебега и их свойства

Def 3.3. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ – **измеримо по Лебегу с конечной мерой**,
если $\forall \varepsilon > 0\ \exists S\colon \mu^*(X \triangle S) < \varepsilon$. **Мерой Лебега** X тогда

$$\mu(X) = \mu^*(X) = \lim_{S \to X} \mu^*(S) = \lim_{S \to X} m(S).$$

THR 3.4. *Для измеримых по Лебегу с конечной мерой* $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ *множества* $X \cup Y$*,* $X \cap Y$*,* $X \setminus Y$*,* $Y \setminus X$ *оказываются измеримыми с конечной мерой Лебега и выполняется аддитивность меры*

$$\mu(X) + \mu(Y) = \mu(X \cup Y) + \mu(X \cap Y).$$

THR 3.5 (Счётная аддитивность меры Лебега в случае конечной меры)**.** *Если множества X_k, $k \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются, измеримы по Лебегу с конечной мерой и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k) < +\infty, \quad \text{то их объединение измеримо и} \quad \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k).$$

3.4 Измеримые по Лебегу множества с бесконечной мерой

Def 3.4. Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется **измеримым по Лебегу с бесконечной мерой**, если его можно представить в виде счётного объединения попарно не пересекающихся множеств

$$X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k,$$

каждое из которых измеримо по Лебегу с конченой мерой и $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k) = +\infty$.

THR 3.6. *Измеримость множества по Лебегу сохраняется при взятии конечных объединений, пересечений и разности множеств.*

THR 3.7 (Счётная аддитивность меры Лебега в общем случае)**.** *Если множества $X_k, k \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются и измеримы по Лебегу, то их объединение измеримо по Лебегу и выполняется*

$$\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(X_k).$$

где считаем, что наличие в сумме хотя бы одного бесконечного слагаемого делает сумму бесконечной.

3.5 Измеримость по Лебегу множеств с некоторыми свойствами

THR 3.8. *Объединение и пересечение счётного числа измеримых по Лебегу множеств измеримо.*

THR 3.9 (Непрервность меры Лебега)**.** *Если множество X является объединением возрастающей последовательнсоти измеримых множеств*

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_k \subseteq \ldots,$$

то $lim_{k\to\infty}\mu(X_k) = \mu(X)$, где предел понимается в топологии расширенной числовой прямой.

THR 3.10. *Открытые и замкнутые множества в $\mathbb{R}^n$ измеримы по Лебегу.*

THR 3.11 (Внешняя и внутренняя регулярность меры Лебега)**.** *Измеримое по Лебегу множество X можно сколь угодно точно по мере приблизить содержащим его открытым множеством. Если X имеет конечную меру, то его можно сколь угодно точно по мере приблизить содержащимся в нём компактным множеством.*

3.6 Измеримые по Лебегу и борелевские функции

Def 3.5. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется **измеримой по Лебегу**, если для любого $c \in \mathbb{R}$ множество[2] $\{x \mid f(x) < c\}$ измеримо по Лебегу.

Lem 3.3. *Определение измеримой функции с $<$ эквивалентно $>, \leqslant, \geqslant$.*

THR 3.12. *Поточечное взятие точной верхней или нижней грани последовательности функций не выводит за класс измеримых функций с возможно бесконечными значениями. Поточечный переход к (верхнему или нижнему) пределу также не выводит за класс измеримых функций с возможно бесконечными значениями.*

[2] То же верно для $f(x) \leqslant c$.

Def 3.6. Борелевским множеством в $\mathbb{R}^n$ называется множество, которое можно получить из открытых множеств операциями и разности множеств, счётного объединения и счётного пересечения, а также повторениями этих операций несколько раз. Борелевской функцией называется функция[3] , у которой все множества $\{f(x) < c\}$ борелевские.

THR 3.13. *Всякое измеримое $X \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде объединения борелевского множества и множества меры нуль. Ко всякому измеримому множеству $X \in \mathbb{R}^n$ можно добавить множество меры нуль так, что в объединении получится борелевское множество.*

THR 3.14. *Всякую измеримую функцию $X\colon X \to \mathbb{R}$ можно переопределить на множестве меры нуль (возможно изменив область определения на меру нуль) так, что она станет борелевской.*

THR 3.15. *Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ борелевская тогда, и только тогда, когда пробраз любого борелевского множества $Y \subseteq \mathbb{R}$ тоже является борелевским.*

Def 3.7. Отображение $f\colon X \to Y$ метрических или топологических пространств называется **борелевским**, если прообраз всякого борелевского множества борелевский.

THR 3.16. *Композиция борелевских отображений тоже будет борелевской.*

4 Интеграл Лебега и его свойства

4.1 Интеграл Лебега для ступенчатых и произвольных функций

Def 4.1. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется **счётно ступенчатой**[4], если X разбивается в счётное объединение измеримых множеств $X = \bigsqcup_i X_i$ и на каждом X_i функция равна константе c_i.

Def 4.2. Для ступенчатой функции положим

$$\int_X f(x)dx = \sum_i c_i \mu(X_i),$$

считая $0 \cdot (+\infty) = 0$ и требуя, чтобы сумма абсолютно сходилась.

Lem 4.1. *Определение интеграла от ступенчатой функции корректно, а именно, если функция является ступенчатой относительно двух разных разбиений области определения на основания ступенек, $X = \bigsqcup_i X_i' = \bigsqcup_j X_j''$,то значение интеграла будет одним и тем же для обоих разбиений.*

Lem 4.2. *Для любой измеримой по Лебегу функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ $\exists$ ступенчатые $g, h\colon X \to \mathbb{R}$, такие что $g \leqslant f \leqslant h$ и*

$$\int_X (h - g)\, dx < \varepsilon.$$

Def 4.3. Для измеримой по Лебегу функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ определим **нижний интеграл Лебега** как

$$\underline{\int_X} f(x)\, dx = \sup \int_X g(x)\, dx$$

по интегрируемым ступенчатым $g \leqslant f$. Определим **верхний интеграл Лебега** как

$$\overline{\int_X} f(x)\, dx = \inf \int_X h(x)\, dx$$

по интегрируемым ступенчатым $h \geqslant f$.

[3]Сказанное выше об измеримых по Лебегу функциях относится и к борелевским, их класс замкнут относительно арифметических операций, перехода к точной грани счётного семейства функций или к поточечному пределу.

[4]Далее просто ступенчатая.

Def 4.4. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ **интегрируема по Лебегу с конечным интегралом**, если её нижний и верхний интеграл Лебега конечны и равны между собой.

Lem 4.3. *Если измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ может быть оценена снизу и сверху, $g_0 \leqslant f \leqslant h_0$ ступенчатыми с конечным интегралом, то она сама имеет конечный интеграл Лебега.*

Def 4.5. Для неотрицатеьной измеримой функции $f\colon X \to \mathbb{R}^+$ будем писать $\int_X f(x)\,dx = +\infty$, если её нижний интеграл Лебега бесконечен.

Lem 4.4. *Если неотрицательная измеримая $f\colon X \to \mathbb{R}^+$ имеет конечный нижний интеграл Лебега, то её верхний интеграл Лебега равен нижнему.*

THR 4.1. *Для измеримой $f\colon X \to \mathbb{R}$ положим*

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geqslant 0; \\ 0, & f(x) \leqslant 0; \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leqslant 0; \\ 0, & f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Интеграл $\int_X f(x)\,dx$ определен и конечен тогда, и только тогда, когда интегралы $\int_X f_+(x)\,dx$ и $\int_X f_-(x)\,dx$ определены и конечны.

THR 4.2. *$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману $\Longleftrightarrow$ f ограничена и $\mu(\{\cdot \text{разрыва}\}) = 0$;*

4.2 Линейность и монотонность интеграла Лебега

THR 4.3. *Если интегралы $\int_X f_1(x)\,dx$ и $\int_X f_2(x)\,dx$ определены и конечны, а $A, B \in \mathbb{R}$, то*

$$\int_X (Af_1 + Bf_2)\,dx = A\int_X f_1\,dx + B\int_X f_2\,dx.$$

THR 4.4. *Если функция $f \geqslant 0 \in \mathcal{L}$ на $X\colon \mu(X) > 0$, то*[5]

$$\int_X f(x)\,dx \geqslant 0.$$

THR 4.5. *$f \in \mathcal{L}_c$ обязана быть измеримой по Лебегу.*

5 Предельный переход в интеграле Лебега

5.1 Приближение интегрируемых функций в среднем

Def 5.1. Функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется **элементарно ступенчатой**, если она является ступенчатой с конечным числом ступенек, каждая из которых либо элементарна, либо функция на этой ступеньке равна нулю.

THR 5.1. *Пусть функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу с конечным интегралом. Тогда f можно сколь угодно близко приблизить в среднем элементарно ступенчатой функцией.*

THR 5.2. *Пусть функция $f\colon X \to \mathbb{R} \in \mathcal{L}_c$. Положим для $M > 0$*

$$f_M(x) = \begin{cases} M, & f(x) \geqslant M; \\ f(x) & |f(x)| \leqslant M; \\ -M, & f(x) \leqslant -M. \end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{M\to+\infty} \int_X f_M(x)\,dx = \int_X f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \lim_{M\to+\infty} \int_X |f(x) - f_M(x)|\,dx = 0.$$

[5] $\int_X f(x)\,dx = 0$ тогда, и только тогда, когда $f(x) = 0$ на всём X, кроме множества лебеговой меры нуль.

5.2 Счётная аддитивность и непрерывность интеграла Лебега по множествам

THR 5.3 (Счётная аддитивность интеграла Лебега по множествам). *Если измеримая функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ неотрицательна или имеет конечный интеграл на множестве X, которое представляется в виде объединения попарно не пересекающихся измеримых по Лебегу множеств как $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} Y_k$, то*

$$\int_X f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{Y_k} f(x)\,dx.$$

THR 5.4 (Непрерывность интеграла Лебега по множествам). *Пусть множества $X_k \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримы по Лебегу и возрастают по включению*

$$X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \dots \subseteq X_k \subseteq X_{k_1} \subseteq \dots.$$

Пусть также $X = \bigcup_K X_k$ и интеграл Лебега $\int_X f(x)\,dx$ конечен или f измерима и неотрицательна. Тогда

$$\int_X f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{X_k} f(x)\,dx.$$

THR 5.5 (Непрерывность интеграла Лебега по убыванию множеств). *Пусть множества $X_k \subseteq \mathbb{R}^n$ измеримы по Лебегу и убывают по включению*

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq \dots \supseteq X_k \supseteq X_{k_1} \supseteq \dots.$$

Пусть также $X = \bigcap_K X_k$ и интеграл Лебега $\int_X f(x)\,dx$ конечен ~~или f измерима и неотрицательна~~. Тогда

$$\int_X f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{X_k} f(x)\,dx.$$

THR 5.6 (Непрерывность[6] интеграла Лебега по верхнему пределу). *Если $f \in \mathcal{L}_c$ на $[a,b]$, то непрерывно зависит от $x \in [a,b]$*

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

5.3 Предельный переход в интеграле Лебега по функциям

THR 5.7 (Теорема о монотонной сходимости). *Пусть $f_k \in \mathcal{L}$ на измеримом X неотрицательны, при этом $\forall x \in X$ $(f_k(x))$ возрастает и стремится к $f(x)$. Тогда*

$$\int_X f_k\,dx \to \int_X f\,dx, \quad k \to \infty$$

THR 5.8 (Счётная аддитивность интеграла Лебега по функциям). *Пусть функции $u_k \in \mathcal{L}$ на измеримом X неотрицательны. Тогда*

$$\int_X \sum_{k=1}^{\infty} u_k\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X u_k\,dx.$$

THR 5.9 (Теорема об ограниченной сходимости). *Пусть неотрицательная $g \in \mathcal{L}_c$ на измеримом X. Пусть $f_k \in \mathcal{L}$ на X, $|f_k| \leqslant g$ $\forall k$ и $f_k \to f$ поточечно на X. Тогда*

$$\int_X f_k\,dx \to \int_X f\,dx, \qquad k \to \infty.$$

5.4 Несобственный интеграл функции одной переменной

Def 5.2. Несобственный интеграл на (a,b) с особенностью в b называется предел

$$\int_a^{*b} f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b-0} \int_a^{\beta} f(x)\,dx$$

[6]Имеет место абсолютная непрерывность интеграла Лебега.

в предположении, что все интегралы $\int_a^\beta f(x)\,dx$ конечны.

В случае существования интеграла Лебега по свойству **непрерывной зависимости** интеграла от верхнего предела несобственный интеграл оказывается равным собственному. При этом в силу свойства **абсолютной сходимости** интеграла Лебега интеграл от $|f|$ также будет конечен. Поэтому содержательный случай несобственного интеграла — это *условная сходимость*.

THR 5.10 (Критерий Коши сходимости несобственного интеграла)**.** *Несобственный интеграл* $\int_a^{*b} f(x)\,dx$ *сходится тогда, и только тогда, когда*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\beta(\varepsilon)\ \forall\xi,\eta \in [\beta(\varepsilon), b),\ \left|\int_\xi^\eta f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

THR 5.11 (Признак Дирихле)**.** *Пусть на* $[a,+\infty]$ $f(x)$ *непрерывна, имеет ограниченную первообразную **и*** $g(x)$ *является монотонной и* $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$*. Тогда*

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx\ \text{— сходится.}$$

THR 5.12 (Признак Абеля)**.** ***Если*** *функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b)$ *и интеграл* $f(x)$ *сходится, **и** функция* $g(x)$ *ограниченна и монотонна на* $[a,b)$*, **то** сходится интеграл* $\int_a^b f(x)g(x)dx$*.*

THR 5.13 (Интегральный признак сходимости числового ряда)**.** *Пусть* $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}^+$ *убывает. Тогда*

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) < +\infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty.$$

5.5 Теорема Фубини и линейная замена переменных в интеграле

Lem 5.1. *Всякая измеримая неотрицательная* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *является счётной суммой характеристических функций измеримых по Лебегу множеств с неотрицательными коэффициентами. Если* f *борелевская, то и характеристические функции борелевские.*

THR 5.14 (Теорема Фубини)**.** *Пусть функция* $f\colon X\times Y \to \mathbb{R}$ *интегрируема на произведении интегрируемых множеств. Тогда*[7]

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,dy\right)\,dx.$$

THR 5.15. *Если множество* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *измеримо и* $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ *измеримо, то* $X\times Y \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ *тоже имеримо и*

$$\mu(X\times Y) = \mu(X)\cdot\mu(Y).$$

THR 5.16. *Пусть функция* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *неотрицательна и измерима. Обозначим*

$$g(y) = \mu\{x\in X \mid f(x) \geqslant y\}$$

Тогда оказывается

$$\int_X f(x)\,dx = \int_0^\infty g(y)\,dy.$$

THR 5.17 (Теорема о линейной замене переменных в интеграле Лебега)**.** *Для интегрируемой* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *и линейного преобразования* $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y} = |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f(A\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}.$$

[7] И, в частности, интеграл в скобках справа существует при $\forall x \in X$ и является измеримой функцией от $x \in X$.

5.6 Примеры применения интеграла Лебега

THR 5.18 (Неравенство Коши-Буняковского)**.** *Пусть функции $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ измеримы по Лебегу и их $|f|^2$, $|g|^2$ имеют конечные интегралы. Тогда*

$$\left(\int_X f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_X |f(x)|^2\,dx\right) \cdot \left(\int_X |g(x)|^2\,dx\right).$$

THR 5.19 (Дифференцирование[8] под знаком интеграла)**.**

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y) \in \mathcal{L}_c^x\ \forall y \in (a,b) \\ f \text{ дифференцируема по } y \\ \forall x \in X, \forall y \in (a,b) |f'_y(x,y)| \leqslant g(x) \\ g \geqslant 0\colon X \to \mathbb{R}^+ \in L_c \text{ на } X \end{array}\right\} \implies \frac{d}{dy}\int_X f(x,y)\,dx = \int_X f'_y(x,y)\,dx.$$

THR 5.20 (Теорема о среднем для интеграла)**.**

$$\left.\begin{array}{l} f\colon X \to \mathbb{R} \text{ непрерывна} \\ f \text{ ограничена на связном } X \\ g \geqslant 0\colon X \to \mathbb{R}^+ \in L_c \text{ на } X \end{array}\right\} \implies \exists \xi \in X\colon \int_X f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_X g(x)\,dx.$$

THR 5.21 (Вторая о среднем для интеграла)**.**

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{L}_c \\ g \text{ монотонна} \\ g \text{ ограничена} \end{array}\right\} \implies \exists \vartheta \in [a,b]\colon \int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a+0)\int_a^{\vartheta} f(x)\,dx + g(b-0)\int_{\vartheta}^b f(x)\,dx.$$

5.7 Объём шара интеграл Пуассона гамма и бета функции

THR 5.22 (Объем шара и интеграл Пуассона)**.** *Рассмотрим единичный шар*

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x||^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 1\}.$$

Тогда

$$\pi^{n/2} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||^2}\,dx = \mu B_n \cdot \Gamma(n/2+1),$$

где

$$\text{Гамма-функция:} \qquad \boxed{\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t}\,dt}.$$

THR 5.23 (Формула понижения)**.**

$$\text{Для } p > 0 \text{ верно } \Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

THR 5.24.

$$\text{Для } n \in \mathbb{Z}^+\ \Gamma(n+1) = n!,\ \ \Gamma(n+1/2) = \sqrt{\pi}\frac{(2n-1)!!}{2^n}$$

Def 5.3.

$$\text{Бета-функция при } p, q > 0\text{:} \qquad \boxed{B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt}.$$

THR 5.25.

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

[8]Функция $g\colon X \to \mathbb{R}^+$ и $g \in \mathcal{L}_c$

THR 5.26 (Формула Стирлинга)**.** *Для $x \to +\infty$ имеет место асимптотическая формула*

$$x! = \Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt = \sqrt{2\pi x} \cdot x^x \cdot e^{-x} \cdot (1 + o(1))$$

THR 5.27 (Объём тела вращения)**.** *Пусть функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^+$ измерима, а множество $X \subset \mathbb{R}^3$ задано условием $a \leqslant x \leqslant b$, $y^2 + z^2 \leqslant f(x)^2$. Тогда*

$$\mu(X) = \int_a^b \pi f(x)^2\, dx.$$

THR 5.28 (Интеграл Гаусса)**.** *Пусть $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – положительно определенная квадратичная форма. Тогда*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)}\, dx_1 \dots dx_n = \pi^{n/2} \cdot (\det Q)^{-1/2}.$$

6 Дифференцируемые отображения в $\mathbb{R}^n$

Def 6.1. $U \subset \mathbb{R}^n$-откр, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ -дифф в x_0, if ($Df_{x_0}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – лин. отобр. – произв. f_0 в $x_)$):

$$f(x) = f(x_0) + Df_{x_0}(x - x_0) + \mathrm{o}(|x - x_0|), x \to x_0.$$

Def 6.2. *f – непрерывно дифференцируема на U*, если она дифф. в каждой точке и Df_x непр. по x.

Lem 6.1. *$\forall$ лин. отобр. $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\exists ||A|| : \forall x \in \mathbb{R}^n$ верно $|Ax| \leqslant ||A|| \cdot |x|$.*

THR 6.1. *if f-дифф в точке x_0, а g-дифф в $y_0 = f(x_0) \Rightarrow g \circ f$-дифф в x_0 и $D(g \circ f)_{x_0} = Dg_{y_0} \circ Df_{x_0}$.*

Def 6.3. *Производная по направлению f* по напр. $v \in \mathbb{R}^n$ в x – $\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$.

Lem 6.2. *if f-дифф. в x, то в x: $\partial f / \partial v = df_x(v)$.*

THR 6.2. *Если $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, откр.-$U \subseteq \mathbb{R}^n$: $y_i = f_i(x_1, ..., x_n), i = 1, .., m$;
и f_i имеют непр. произв. на U, **то** f непр. диф. на U.*

Lem 6.3. *Если $f(x,y)$ 2X дифф-ма в $U(x_0, y_0)$, то $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.*

THR 6.3. *Если f непр.дифф m раз в $U_\varepsilon(x)$, то $\forall \xi \in U_\varepsilon(x)$ вып(сумм. по $k_i \geqslant 0$):*

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!i!} \frac{\partial^k f(x_0, y_0)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} (x - x_0)^{k-i} (y - y_0)^i + \mathrm{o}(\rho^m).$$

7 (proof) степенные ряды, интеграл Римана на отрезке

7.1 Суммирование абсолютно сходящихся рядов

lem △ (1.1).
1)$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\left\{\sum_{n=1}^{k} a_n \mid k \in \mathbb{N}\right\}$;
2) возьмём в произв местах эл-ты, макс № - n;
3) $\sum_{k=1}^{n} < \sum$(взятых) $\Rightarrow \sup \leqslant \sum_{k=1}^{n}$, обратное нер-во трив. □

thr △ (1.1).
1) $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|\right)\cdot\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty}|b_m|\right) = \lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{N}|a_n|\right)\cdot\left(\sum\limits_{m=1}^{N}|b_m|\right) = \sum\limits_{n,m=1}^{\infty}|a_n b_m| < +\infty$;
2) Значит тут суммирование абсолютное: $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\right)\cdot\left(\sum\limits_{m=1}^{\infty}b_m\right) = \sum\limits_{n,m=1}^{\infty}a_n b_m$;
3) а также мы можем суммировать в любом порядке... □

lem △ (1.2).
1) Д-м: $\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} x_{n,m} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} x_{n,m}$;
2) Let F - finite $\subset \{1,\ldots,N\}\times\{1,\ldots,N\}$;
3) $x_{n,m}\geqslant 0$: $\sum\limits_{(n,m)\in F} x_{n,m} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{N}\sum\limits_{m=1}^{N} x_{n,m}$;
4) теперь $\geqslant$: $\sum\limits_{(n,m)\in F} x_{n,m} \geqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=1}^{\infty} x_{n,m}$;
5) Достаточно $\sum_{n=1}^{N}\ldots$: fix N, then $\sum_{m=1}^{\infty} = \lim_{m\to\infty}\sum_{m=1}^{M}$;
6) $\forall M : \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} x_{n,m} \leqslant \sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}^{\infty} x_{n,\mu}$. □

thr △ (1.2).
1) Сходимость и абсолютная сходимость ряда не меняется при отбрасывании конечного числа членов в начале ряда;
2)$|a_n|\leqslant C|b_n| \rightsquigarrow \sum\limits_{n=N}^{\infty}|a_n| \leqslant C\cdot\sum\limits_{n+n}^{\infty}|b_n| < +\infty$. □

7.2 Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

thr △ (1.4).
1) $\Rightarrow$: $|f_n - f_m| \leqslant |f_n - f_0| + |f_m - f_0|$, RHS $\to 0$;
2) $\Leftarrow$: $\forall x\in X : f_n(x)\to f_0(x)$, fix n & $m\to\infty$;
3)нер-во в усл: true if $m > N(\varepsilon) \rightsquigarrow \forall\varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$, $\forall n\geqslant N(\varepsilon)\, sup\{|f_n - f_0| \mid x\in X\}\leqslant\varepsilon$.

Следствие: $n+1=m$: $\forall\varepsilon>0\,\exists N(\varepsilon)$, $\forall m\geqslant N$, $sup\{|u_m(x)| \mid x\in X\}\leqslant\varepsilon$ □

thr △ (1.5). 1) По Коши: $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m}u_k\right| \leqslant \left|\sum\limits_{k=n+1}^{m}|u_k|\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{m}a_k$;
2) a_k сх. по Коши с $N(\varepsilon)$ в к-ром $a_n \rightsquigarrow u_n$. □

thr △ (1.6).
1) For $x_0\in X$ и ε: $|f_n - f| < \varepsilon$ на X;
2) $U(x_0)\ni x_0$ тоже; там же: $|f(x)-f(x_0)|\leqslant$
$\leqslant|f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(x_0)| +$
$+|f_n(x_0)-f(x_0)| < 3\varepsilon$. □

thr △ (1.7).
1)Посл. функций (↓), все непр. по формуле и опр. произв. в x_0. $\varphi\to g(x_0)$ при $n\to\infty$;

$$\varphi_n(x) = \begin{cases}\dfrac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}, & x\neq x_0;\\ f_n'(x_0), & x = x_0.\end{cases}$$

2) Коши в др. точ-х: $|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)| = \ldots = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)|$ для $\xi\in(x_0,x)$ по thr. Лагранжа;
3) Получили: крит. Коши для р-ной сх-ти f_n' приоводит к Коши для φ_n для $N(\varepsilon)$;
4) Тогда $\varphi_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} \varphi(x)$, но т.к. $x - x_0$ огр $\rightsquigarrow$: равню пред. в равенстве:
$f_n(x) = f_n(x_0) + (x-x_0)\varphi_n(x) \rightsquigarrow f(x) = f_n(x_0) + (x-x_0)\varphi_n(x)$
Откуда имеем $f'(x_0) = \varphi(x_0) = g(x_0)$ и $f' = g$. □

7.3 Степенные ряды и радиус сходимости

thr △ (1.8).
1) $z_0 = 0$, $a_n z^n \leqslant M$:
$|a_n x^n| \leqslant |a_n| r^n \leqslant \frac{r^n}{|z|^n} M$.
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{|z|^n} M = M \frac{1}{1-r/|z|} < \infty$.
3) $\forall |x| \leqslant r$ – сход по пр Вейерштрасса. □

thr △ (1.9).
1) Пусть $0 < R < \infty$, при $|z - z_0| > R$ б. мн:
$|a_n|^{1/n} > \frac{1}{|z-z_0|} \Rightarrow |a_n|^{1/n} |z - z_0| > 1 \Rightarrow |a_n(z - z_0)^n| > 1$,
2) $|z - z_0| < R$ $\exists r$: $|z - z_0| < r < R$. НСН n:
3)$|a_n|^{1/n} \leqslant \frac{1}{r} \Rightarrow |a_n(z - z_0)^n| \leqslant \left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^n$. □

thr △ (1.11).
1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$,
3) (2)x$(z - z_0)$, $n^{1/n} \to 1$. 4) (1.7) $\boxed{?}$. □

thr △ (1.7).
1) $f(z_0) = a_0$, $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$
из почленного дифференцирования. □

7.4 Ряды Тейлора для элементарных функций

thr △ (1.12).
1) Ост член по Лагранжу:
$|r_{n-1}(x)| = \left|\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}(x)^n\right| \leqslant \frac{C^n |x|^n}{n!} \to 0$
2) $R = \max\{|x_0 - a|, |x_0 - b|\}$ □

thr △ ...
1) ... □

7.5 Условная сходимость рядов, признаки Абеля и Дирихле

thr △ (1.14).
1) $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$, $R_n \to 0$, $a_n = R_n - R_{n+1}$
2) $\sum_{k=n}^{m} (R_k - R_{k+1}) x^k = R_n x^n - R_{m+1} x^m + \sum_{k=n+1}^{m} R_k (x^k - x^{k-1})$.
3) НСН N $|R_k| < \varepsilon$, $m \geqslant n \geqslant N$:
$|\dots| \leqslant \varepsilon x^n + \varepsilon x^m + \varepsilon \dots$
4) (1.4) $\Rightarrow$ ряд $\rightrightarrows_{[0,1]}$ и f непр. □

thr △ (1.16).
1) $F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, $f_n(x) = F_n(x) - F_{n-1}(x)$.
2) $|F_n(x)| \leqslant M$ независ от n, x.
3) $\sum_{k=n}^{m} (F_k - F_{k-1}) g_k = F_m g_m - F_{n-1} g_n + \sum_{k=1}^{m-1} F_k (g_k - g_{k+1})$.
с учётом $\text{sign}(g_k - g_{k+1})$:
4) $\sum_{k=n}^{m-1} |g_k(x) - g_{k+1}(x)| = |g_m(x) - g_n(x)|$. 5) $\left|\sum_{k=n}^{m} (F_k - F_{k-1}) g_k\right| \leqslant M|g_m| + M|g_m - g_n|$.
6) $g \rightrightarrows 0 \Rightarrow$ НСН n $|g_n| < \varepsilon$,
$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k g_k\right| < 2\varepsilon$, $\Rightarrow \rightrightarrows \sum$ по кр Коши. □

7.6 Интегрирование непрерывных функций через приближения

thr △ (2.1).
1) Сдвинем $[a, b]$, так, чтобы $a = 0$, у $p(x) = a_0 \dots$, есть $P(x)$;
2) можно с найти $(p_n) \rightrightarrows f$ на $[a, b]$;
3) $P_n'(x) = p_n(x)$, $P(0) \equiv 0$, по (1.7) $P_n \rightrightarrows F$ и $F'(x) = f(x)$ на (a, b) и на концах. □

def △ (2.1).
1) Линейность: $AF(x) + BG(x) \sim Af(x) + Bg(x)$;
2) Монотонность: $h = f - g \geqslant 0$ то $\int_a^b h\,dx = H(b) - H(a) = h(\xi)(b - a) \geqslant 0$ по thr. Лагрнажа;
3) Аддитивность: $F(c) - F(a) = F(c) - F(b) + F(b) - F(a)$. □

thr △ (2.2).
1) Лин. и мон. очев. по индукции;
2) Порядок интегрирования: рас-м $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которая тожд 0 за кубом $[-D, D]^n$;
3) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x_1, , x_n)\,dx_1 ... dx_n = \int\limits_{-D}^{D} \cdots \int\limits_{-D}^{D} f()\,dx_n ... dx_1$;
4) f прибл. многчл. неск. пер. с ε, $\int f$ с $(2D)^n \varepsilon$;
5) Осталось док. для мономов $x_1^{k_1} ... x_n^{k_n}$;
6) $\int$ от монома по нашему кубу:
$\left(\frac{D^{k_1+1}}{k_1+1} - \frac{(-D)^{k_1+1}}{k_1+1}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{D^{k_n+1}}{k_n+1} - \frac{(-D)^{k_n+1}}{k_n+1}\right)$ □

thr △ ... □

7.7 Интеграл Римана на отрезке и элементарно ступенчатые функции

lem △ (2.1).
1) Получ.разб.мельче: $\Delta = \Delta' \sqcup \Delta''$;
2) $\inf\{f(x) \mid x \in \Delta'\} \geqslant \inf\{f(x) \mid x \in \Delta\}$
3) $\sup\{f(x) \mid x \in \Delta'\} \leqslant \sup\{f(x) \mid x \in \Delta\}$
4) same для Δ'', $|\Delta| = |\Delta'| + |\Delta''| \Rightarrow \ldots$ □

lem △ (2.2). 1) из (2.1):
$s(f,\tau) \leqslant s(f, \tau \vee \sigma) \leqslant S(f, \tau \vee \sigma) \leqslant S(f, \sigma)$. □

lem △ (2.3).
1) По опр. инт. Римана: оценим на $[a,b]$ с ε:
$g \leqslant f \leqslant h$ и $\int_a^b (h-g)\,dx < \varepsilon$;
2) но тогда, $\int_c^d (h-g)\,dx < \varepsilon$, что и озн.
□

def △ (2.6).
Ступ. функ:
I) Монотонность:
1)f, g ступ. на τ, σ, тогда они ступ. на $\varphi = \tau \vee \sigma$;
2) Из адд. длины промежутка: инт. не изменится при измельчении.
II) Линейность: 1) опять φ, а на одном разбиении лин. очевидна.

Инт. Римана:
I) Монотонность: по опр. сумм Дарбу.
II) Линейность:
1) $h_f \leqslant f \leqslant H_f$, $h_g \leqslant g \leqslant H_g$, где $\int H - g < \varepsilon$;
2) $\int_a^b ((AH_f + BH_g) - (Ah_f + Bh_g)) \leqslant (A+B)\varepsilon$;
3) тогда огранив $Af + Bg$ ступ, и проинт, получим схождение.
III) Аддитивность по отр.
1) Пусть на $[a,b] : g_1 \leqslant f \leqslant h_1$;
2) на $[b,c]$: $g_2 \leqslant f \leqslant h_2$: $\int_b^c (h_2 - g_2)\,dx < \varepsilon$;
3) конкат: $g_1 + g_2 = g$, $h \ldots \rightsquigarrow g \leqslant f \leqslant h$;
4) $\int_a^c (h-g)\,dx < 2\varepsilon$, зажимающие $f \ldots$
□

7.8 Интегрируемость по Риману разных функций

thr △ (2.4).
1) $\tau \vdash [a,b]$, $\Omega(f,\tau) < \varepsilon$.
2) $\omega(f,\Delta) = \sup\{|f(x') - f(x'')| \mid x', x'' \in \Delta\}$,
3) $||A| - |B|| \leqslant |A - B| \rightsquigarrow \omega(|f|,\Delta) \leqslant \omega(f,\Delta)$.
4) $\Omega(|f|,\tau) \leqslant \Omega(f,\tau) < \varepsilon \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}$.
5) Пусть $f, g \leqslant M$. If $\Omega(f,\tau) < \varepsilon, \Omega(g,\tau) < \varepsilon$, то $|AB - CD| \leqslant |B| \cdot |A - C| + |C| \cdot |B - D| \Rightarrow$ $\Omega(fg,\tau) \leqslant M\Omega(f,\tau) + M\Omega(g,\tau) \leqslant 2M\varepsilon$. □

thr △ (2.6) *ф-ла Н-Л.*
1) Пусть $\tau : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$;
2) по thr Лагранжа:
$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^N F(x_k) - F(x_{k-1}) =$
$= \sum_{k=1}^N f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^N f(\xi)|\Delta_k|$. □

thr △ (2.5).
1) Для ступ. Пусть $|h| \leqslant M$ и $\exists N$ ступ.
2) По адд $\int$ $\forall \tau$:
$\int_a^b h(x)\,dx = \sum_{\Delta \in \tau} \int_\Delta h(x)\,dx$,
$\int_a^b h\,dx - \sigma(h,\tau,\xi) = \sum_{\Delta \in \tau} \int_\Delta (h(x) - h(\xi(\Delta)))\,dx$.
3) При $|\tau| < \delta$ слаг $< 2M\delta$. $\Rightarrow$
откл не более $2MN\delta$ $\forall \xi$. $MN \equiv MN(h) \neq (\Delta)$, то для ступ Q.E.D.
4) $f \sim g \leqslant f$ и $\int_a^b g\,dx \geqslant \int_a^b f\,dx - \varepsilon/2$.
5) Пусть $g \leqslant M_g$ и имеет N_g разрывов.
при $|\tau| < \frac{\varepsilon}{M_g N_g}$ в силу мон σ:
$\sigma(f,\tau,\xi) \geqslant \sigma(g,\tau,\xi) > \int_a^b g\,dx - \varepsilon/2 \geqslant \int_a^b f\,dx - \varepsilon$. Аналогично для $h \geqslant f$. □

thr $\triangle$ (2.6) *int – первообразная.*
1) $\Omega(f,\tau) = \sum_{\Delta\in\tau}\omega(f,\Delta)|\Delta| \leqslant \omega_f(|\tau|)\sum_{\Delta\in\tau}|\Delta| = \omega_f(|\tau|)(b-a)$.
2) $\omega_f(|\tau|)\to 0$ при $|\tau|\to 0$ по равн непр.
3) адд, лин $\rightsquigarrow$
$F(x+u) - F(x) = \int_x^{x+u} f(t)\,dt = f(x)u + \int_x^{x+u}(f(t)-f(x))\,dt$.
4) $|f(t)-f(x)| \leqslant \omega_f(|u|) \Rightarrow$
$\left|\int_x^{x+u} f(t) - f(x)\,dt\right| \leqslant \left|\int_x^{x+u}\omega_f(|u|)\,dt\right| \leqslant \omega_f(|u|)|u| \to 0$. $\square$

thr $\triangle$ (2.6)*мон* $\to \in \mathcal{R}$.
1) $f \leqslant M$,
2) $\sum_{\Delta\in\tau}\omega(f,\Delta) \leqslant \omega(f,[a,b]) = |f(b)-f(a)|$.
3) $\Omega(f,\tau) = \sum_{\Delta\in\tau}\omega(f,\Delta)|\Delta| \leqslant |\tau|\sum_{\Delta\in\tau}\omega(f,\Delta) \leqslant |\tau|\cdot|f(b)-f(a)| \to 0$. $\square$

7.9 Приёмы интегрирования

thr $\triangle$ (2.7).
1) $F = fg$ – непр на $[a,b]$ и дифф на (a,b).
$F' = f'g + fg' \in \mathcal{R}$ как $\int\cdot$. $\square$

thr $\triangle$ (2.8).
1) Если $F' = f$, то $(F(\varphi))' = f(\varphi)\varphi'$.
2) всё непр. $\Rightarrow$ по Н-Л ... $\square$

thr $\triangle$ (2.9).
1) $n = 1$: $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'\,dt$.
2) $\int_{x_0}^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\,dt = -\int_{x_0}^x \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}\,d\frac{(x-t)^n}{n} = -\int_{x_0}^x \frac{f^{(n)}(t)}{n!}\,d(x-t)^n =$
$= -\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt = -\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-x_0)^n + \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$. $\square$

8 (proof) мера Лебега и её свойства

8.1 Элементарные множества и мера Жордана

$\triangle$ *thr* (3.1).
1) $S = \bigsqcup_{i,j} P_i\cap Q_j$; 2) $\forall i\; mP_i = \sum_i P_i\cap Q_j$;
3) $P = P'\cup P''$, $Q_i = Q_i'\cup Q_i''$
4) По индукции $mP = mP' + mP''$ $\square$

$\triangle$ *thr* (3.2).
1) $Q \supset (S\cup T)$; 2) $\sigma: \forall\, int q_i \not\supset \partial S\cup\partial T$. $\square$

8.2 Внешняя мера Лебега и её свойства

$\triangle$ *lem* (3.1).
1) Очев. $\mu^*(S) \leqslant m(S)$;
2) ! $\geqslant$: $\sum_{k=1}^\infty m(S_k) < m(S)$;
3) $S \to S_{\text{комп}} (\supseteq S), m(S) - m(S_{\text{комп}}) < \varepsilon$;
4) $S_k \to S_k^{\text{откр}} : m(S_k^{\text{откр}}) - m(S_k) < \varepsilon/2^k$;
5) $S_{\text{комп}} \subseteq \cup_{k=1}^N S_k^{\text{откр}}$ прот. (3.2). $\square$

$\triangle$ *lem* (3.2).
1) $X_k \subseteq \bigcup_{m=1}^\infty S_{k,m}$;
2) $\varepsilon > 0$ $\sum_{k,m=1}^\infty m(S_{k,m}) \leqslant \mu^*(X_k) + \varepsilon/2^k$;
3) Def: $\mu^*(X) \leqslant \sum_{k,m=1}^\infty m(S_{k,m})$;
4) (2), (3) $\Rightarrow \mu^*(X) \leqslant \sum_k \mu^*(X_k) + \varepsilon$. $\square$

8.3 Множества конечной меры Лебега и их свойства

$\triangle$ *thr* (3.4).
1) $S_k \to X$, $T_k \to Y \Rightarrow S_k\cup T_k \to X\cup Y$
т.к.
$(S_k\cup T_k)\triangle(X\cup Y) \subseteq (S_k\triangle X)\cup(T_k\triangle Y)$, $\square$

$\triangle$ *thr* (3.5).
1) сход, (3.2) $\Rightarrow \mu^*\left(\bigsqcup_k^\infty X_k\right) \leqslant \sum_l^\infty \mu(X_k) < \varepsilon$.
2) Тогда $\mu(X) \leqslant \sum_{k=1}^\infty \mu(X_k)$;
3) $\mu(X) \geqslant \mu\left(\bigsqcup_{k=1}^l X_k\right) = \sum_{k=1}^l \mu(X_k)$, т.к. μ монотонна и конечн. аддитивна. $\square$

8.4 Измеримые по Лебегу множества с бесконечной мерой

$\triangle$ *thr* (3.6).
1) $X \cap Y = \bigsqcup_{k,l=1}^{\infty} X_k \cap Y_l$;
2) $X \cup Y = \bigcup_{m=1}^{\infty} Z_m,\ Z_m = \bigsqcup_{k=1}^{m} X_k \cup \bigsqcup_{l=1}^{m} Y_l$;
3) $X \cup Y = \bigsqcup_{m=1}^{\infty} Z_m \setminus Z_{m-1},\ Z_0 = \emptyset$;
4) $X \setminus Y = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (X_k \setminus \bigsqcup_{l=1}^{\infty} (Y_l \cap X_k))$. $\square$

$\triangle$ *thr* (3.7).
1) $\mu(X) \overset{(2)}{=} \sum\limits_{k,l=1}^{\infty} \mu(X_{k,l}) \overset{(2)}{=} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(X_k)$;
2) if $\mu(x) < \infty \rightsquigarrow$ по 3.5, else по 3.4. $\square$

8.5 Измеримость по Лебегу множеств с некоторыми свойствами

$\triangle$ *thr* (3.8).
1) $Y_k = \bigcup_{i=1}^{k} X_i$, или $\left(Y_k = \bigcap_{i=1}^{k} X_i\right)$
2_1) $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \ldots$, 2_1) $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots$,
3_1) $\bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (Y_k \setminus Y_{k-1})$
3_2) $\bigcap_{k=1}^{\infty} Y_k = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i = I$
4_1) По (3.5) ... ($\Rightarrow 4_2$: $X_1 = I \cup (\bigcup Y_k \setminus Y_{k-1})$) $\square$

$\triangle$ *thr* (3.9).
1) $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k \setminus X_{k-1}$
2) $\mu(X) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu(X_k) - \mu(X_{k-1}))$
3) $\mu(X_m) \to \mu(X)$ $\square$

$\triangle$ *thr* (3.10).
1) $\left[\frac{m_1}{2^k}, \frac{m_1+1}{2^k}\right) \times \cdots \times \left[\frac{m_n}{2^k}, \frac{m_n+1}{2^k}\right)$, где $m \in \mathbb{Z}$
2) $S_k = \{q \mid q \in U,\ q \in [-k,k]^n\}$, $U = \bigcup_k S_k$
3) Для замкнут $\Leftarrow$ (3.6), для откр $\Leftarrow$ (3.8). $\square$

$\triangle$ *thr* (3.11).
1) Пусть $\mu(X) = +\infty$: $X = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} X_k$;
$X_k \in U_k \rightsquigarrow U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$: $\mu(U \setminus X) < \varepsilon$.
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists S$: $\mu(X \triangle S) < \varepsilon$;
$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \supset X \triangle S$;
$S_k \overset{+\varepsilon/2^k}{\to} S_k^{\text{откр}}$, $S \overset{+\varepsilon}{\to} S^{\text{откр}}$,
$U = S \cup D \supseteq X$ и $\mu(U \setminus X) < 3\varepsilon$.
3) $S \overset{-\varepsilon}{\to} S^{\text{комп}}$;
$F = S \setminus D \subseteq X$ и $\mu(U \setminus X) < 3\varepsilon$. $\square$

8.6 Измеримые по Лебегу и борелевские функции

$\triangle$ *thr* (3.12).
1) $\{x \mid \inf\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\} < c\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \mid f_n(x) < c\}$;
2) $\sup\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\ = -\inf\{-f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$;
3) $\left\{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ f_n(x) < c\right\} = \bigcup\limits_{s\in\mathbb{Q}, s>0} \bigcup\limits_{N\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{n\geqslant N} \{f_n(x) < c - s\}$;
4) $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) = -\overline{\lim}_{n\to infty}(-f_n(x))$. $\square$

$\triangle$ *lem* (3.3).
1) $\{x \mid f(x) \leqslant c\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \{x \mid f(x) < 1 + 1/k\}$. $\square$

$\triangle$ *thr* (3.13).
1) I $\Rightarrow$ II по $\mathbb{R}^n \setminus X$.
2) Дост док для X_k :
(3.11) $\Rightarrow X \supseteq F_n^{\text{комп}}$: $\mu(X \setminus F_n) < 1/n$;
$\bigcup_n F_n = Y^{\text{бор}} \subseteq X$: $\mu(X \setminus Y) < 1/n\ \forall n$. $\square$

$\triangle$ *thr* (3.14).
1) 1)$\forall r \in \mathbb{Q}:\ X_r = \{x\ inX \mid f(x) < r\}$;
2)$f(x) = \inf\{r \in \mathbb{Q} \mid x \in X\}$;
3) $X_r \to Y_r^{\text{бор}}$, $Y_r \subseteq X_r$ $\mu(X_r \setminus Y_r) = 0$;
4)$g(x) = \inf\{r \in \mathbb{Q} \mid x \in Y_r\}$;
5) бор. $g(x)$ и $f(x)$ отл. на мн. $\mu = 0$. $\square$

$\triangle_{\Rightarrow}$ *thr* (3.15).
1) def $\Rightarrow f^{-1}(-\infty, c) \in \mathcal{B}$
2) $[a,b]$ и $(a,b) \in \mathcal{B}$; 3) (3.3) $\Rightarrow f^{-1}(-\infty, c] \in \mathcal{B}$
4) $U = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \max I(r) \Rightarrow U \in \mathcal{B}$. $\square$

$\triangle$ *thr* (3.16).
1)$\forall b \in \mathcal{B}\ f^{-1}(g^{-1}(b)) \in \mathcal{B}$ $\square$

8.7 Интеграл Лебега для ступенчатых и произвольных функций

lem $\triangle$ (4.1).
1) $\sigma(X') = X''$, $f(X_i') = c_i'$ и $f(X_j'') = c_j''$;
2) $\sum_i c_i' \mu(X_i') = \sum_{i,j} c_i' \mu(X_i' \cap X_j'') =$
$\sum_{i,j} c_j'' \mu(X_i' \cap X_j'') = \sum_j c_j'' X_j''$;
3)$\sum \sum < \infty : \sum_+ + \sum_-$;
4)thr. Фубини для каждой. $\square$

lem$\triangle$ (4.2).
1) $\mu(X) < \infty$: $X_i = \{x \in X \mid \varepsilon i \leqslant f(x) < \varepsilon(i+1)\}$;
2) $g(X_i) = \varepsilon i$, $h(X_i) = \varepsilon(i+1)$;
3) Очев. $g \leqslant f \leqslant h$ и $\int_X (h(x) - g(x))\, dx = \varepsilon \mu(X)$;
4) $\mu(X) \to \infty$: $X \overset{2^{-i}\varepsilon}{\to} Y_i$(счёт), $\mu(Y_i) < \infty$. $\square$

lem △ (4.3).
1) $\forall\varepsilon > 0$, по (4.2), $\exists g \leqslant f \leqslant h$: $\int_X (h-g)\,dx < \varepsilon$.
2) $g^* = \max\{g_0, g\}$, $h^* = \min\{h_0, h\}$
3) $h^* - g^* \leqslant h - g$, $g_0 \leqslant g^* \leqslant f \leqslant h^* \leqslant h_0$
4) $\int_X h^*\,dx < \int_X g^*\,dx + \varepsilon$. □

thr △ (4.1).
1) $\Rightarrow$: прибл. ступ $g \leqslant f \leqslant h$, $\therefore\ \forall x \in X$: $f_+(x) \leqslant h_+(x)$, и $f_-(x) \geqslant g_-(x)$;
2) из (1.2) $\int_X f_+(x)\,dx \leqslant \int_X h_+(x)\,dx < +\infty$ и $\int_X f_-(x)\,dx \geqslant \int_X g_-(x)\,dx > -\infty$;
3) $\Leftarrow$: сост-ть f из прибл. ступ. f_- и f_+. □

lem △ (4.4).
1) $\forall\varepsilon > 0$, по (4.2), $\exists g \leqslant f \leqslant h$: $\int_X (h-g)\,dx < \varepsilon$.
2) if $\int g = +\infty$ — противоречие, else:
$h = g + (h-g) \Rightarrow (\forall\varepsilon)\ \overline{\int} = \underline{\int}$. □

thr △ (4.2).
1) $\boxed{\Rightarrow}$. $Z \in \bigcup_{A_n}$, где $A_n = \{x \in I \mid \omega(f,x) \geqslant \frac{1}{n}\}$
2) Дост $\mu(A_n) = 0$. fix $\delta > 0$. $\forall A_n\ \exists\{Q_i\}$: $A_n \in \bigcup_i^N Q_i$ $\sum_i \mu(Q_i^*) < \delta$; $\Rightarrow \mu(A_n) = 0 \Rightarrow \mu(Z) = 0$.
3) $\boxed{\Leftarrow}$. $\mu(Z) = 0 \Rightarrow \exists\{Q_i\}$: $\sum_i \mu(Q_i) < \varepsilon_1$
4) $X \backslash \bigcup_i Q_i \subseteq X \backslash Z \Rightarrow \forall x \in X \backslash \bigcup_i Q_i\ \omega(f,x) < \varepsilon_2$;
5) $\exists Q(x)$: $\omega(f,Q) < \varepsilon_3$; 6) $\exists\mathcal{B}$ – кон. покр. X. 7) $\sum_j \omega(f,D_j)\cdot\xi_{D_J}(x) = \varphi(x)$. □

8.8 Линейность и монотонность интеграла Лебега

thr △ (4.3).
1) $g_1 \leqslant f_1 \leqslant h_1$, $g_2 \leqslant f_2 \leqslant h_2$, при $A, B \geqslant 0$
2) $A\int g_1\,dx + B\int g_2\,dx \overset{*\downarrow}{\leqslant} A\int h_1\,dx + B\int h_2\,dx$
3) $* = \int(Af_1 + Bf_2)\,dx = A\int f_1\,dx + B\int f_2\,dx$. □

△ *thr* (4.4).
1) $g(x) \equiv 0$: $g \leqslant f$.
2) Пусть $X_+ = \{x \in X \mid f(x) > 0\}$: $\mu(X_+) > 0$.
$X_n = \{x \mid f(x) > 1/n\} \Rightarrow \exists X_n : \mu(X_n) > 0$.
$\int_X f(x)\,dx \geqslant \int_X \frac{1}{n}\chi_{X_n}(x)\,dx = \frac{\mu(X_n)}{n} > 0$. □

thr △ (4.5).
1) $\exists g_n \leqslant f$, $h_n \geqslant f$: $\int_X h_n\,dx \to \int_X f\,dx$ и $\int_X g_n\,dx \to \int_X f\,dx$.
2) $g(x) = \sup\{g_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$, $h(x) = \inf\{h_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $g_n \leqslant g \leqslant f \leqslant h \leqslant h_n \rightsquigarrow \int \ldots$
3) При $n \to \infty$ $\int g\,dx = \int h\,dx \Rightarrow h = g$ на $Y \subset X$: $\mu(X \setminus Y) = 0$.
на Y $g = f = h \Rightarrow$ f измерима. □

8.9 Приближение интегрируемых функций в среднем

thr △ (5.1).
1)$f \overset{\varepsilon}{\to} g$-ступ, if $\exists\ \mu$(ст-ка)$\to \infty \rightsquigarrow$ сч.ст-нек;
2) h-кон.ступ, $\mu(X_k) < \infty$, $h(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k\chi_{X_k}(x)$;
3) $\int_{\mathbb{R}^n} |f - h|\,dx \leqslant \int |f-g|\,dx + \int |g-h|\,dx < 2\varepsilon$;
4) $M = \sum_{k=1}^N |a_k|$, $X_k \to S_k$:
$\mu(S_k \triangle X_k) = \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{X_k}(x) - \chi_{S_k}(x)| < \varepsilon/M$;
5) $\varphi(x) = \sum_{k=1}^N \chi_{S_k}(x)$, тогда по (3):
$\int |h - \varphi|\,dx < \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} |a_k||\chi_{X_k}(x) - \chi_{S_k}(x)|\,dx < \varepsilon'$. □

thr △ (5.2).
1) (5.1, $\varphi \rightsquigarrow g$) $f \to g$: $M > \sup\{|g| \mid x \in X\}$;
2)для таких M : $|f_M - g| = |f_M - g_M| \leqslant |f - g|$;
3)$\forall\cdot$: $|f_M - f| \leqslant |f_M - g| + |g - f| =$
$|f_M - g_M| - |g - f| \leqslant 2|f - g|$;
4)$\int(3)$: $\int_X |f_M - f|\,dx \leqslant 2\int_X |f - g|\,dx < 2\varepsilon$. □

8.10 Счётная аддитивность и непрерывность интеграла Лебега по множествам

thr △ (5.3).
1) Для ступ $\{X_i\}$, $f(X_i) = c_i$, по счёт адд Л:
2) $\mu(X_i) = \sum_{k=1}^\infty \mu(X_i \cap Y_k)$
3) Для $\forall f$: $\exists g \leqslant f \leqslant h$:
$\int_X g\,dx = \sum_{k=1}^\infty \int_{Y_k} g(x)\,dx \leqslant \underline{\int} \ldots \leqslant$
$\leqslant \overline{\int} \ldots \leqslant \sum_{k=1}^\infty \int_{Y_k} h(x)\,dx = \int_X h\,dx$
4) При $g \to h$: $f \in \mathcal{L}$ на Y_k $\forall k$. □

thr △ (5.4).
1) Как в (3.9) $X = \bigsqcup_{k=1}^\infty X_k \setminus X_{k-1}$.
2) По счёт адд $\mu(X) = \sum_{k=1}^\infty (\mu(X_k) - \mu(X_{k-1}))$
3) $\sum_1^m \cdots = \mu(X_m) \Rightarrow \mu(X_m) \to \mu(X)$. □

thr △ (5.5).
1) $X_k' = X_1 \setminus X_k$
2) $\int_{X_1} = \int_{X_1 \setminus X} + \int_X$ □

thr △ (5.6).
1) По Гейне $x_n \to x \rightsquigarrow g(x_n) \to g(x)$.
2) При $x_n \uparrow$ (5.4), при $x_n \downarrow$ (5.5). □

8.11 Предельный переход в интеграле Лебега по функциям

thr △ (5.7).
1) (3.12) $\Rightarrow f \in \mathcal{L}$; из абс $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int_X f_k\,dx \leqslant \int_X f\,dx$. Далее пусть $f_k \geqslant 0$, $f > 0$.
4) Пусть $f(x) = +\infty$ на мн $\mu = 0$. fix $\varepsilon > 0$. $X_k = \{x \in X \mid f_k(x) \geqslant (1-\varepsilon)f(x)\}$
(3.12) $\Rightarrow X = \bigcup_k X_k$ и $X_i \subset X_{i+1}$, НСН k $\int_{X_k} f(x)\,dx \geqslant \int_X f(x)\,dx - \varepsilon$.
5) $\int_X f_k(x)\,dx \geqslant \int_{X_k} f_k(x)\,dx \geqslant (1-\varepsilon)\int_{X_k} f(x)\,dx \geqslant (1-\varepsilon)\left(\int_X f(x)\,dx - \varepsilon\right)$.
6) Пусть $f(x) = +\infty$ на мн $\mu \neq 0$. Тогда дост док $\int_X f_k\,dx \to \infty$. $X_k = \{x \in X \mid f_k(x) \geqslant 1/\varepsilon\}$.
НСН k $\mu(X_k) \geqslant 1/2\mu(X)$ и $\int_X f_k(x)\,dx \geqslant \int_{X_k} f_k(x)\,dx \geqslant \frac{1}{\varepsilon}\mu(X_k) \geqslant \frac{1}{2\varepsilon}\mu(X)$. □

thr △ (5.9).
1) выкинем точки: $g = 0$ и $g = +\infty$.
2) (3.12), $|f| \leqslant g$, f изм $\Rightarrow f \in \mathcal{L}_c$.
3) fix $\varepsilon > 0$, $X_k = \{x \in X \mid \forall l \geqslant k,\ |f_l(x) - f(x)| \leqslant g(x)\}$, из поточ сх $X = \bigcup_k X_k$.
4) (5.4), $\int g$ непр, $\Rightarrow$ НСН k $\int_{X_k} g(x)\,dx \geqslant \int_X g(x)\,dx - \varepsilon \Rightarrow \int_{X\setminus X_k} g(x)\,dx \leqslant \varepsilon$.
5) $\int_X |f_k - f|\,dx \leqslant \int_{X_k} \varepsilon g\,dx + \int_{X\setminus X_k} 2g\,dx \leqslant \varepsilon\int_X g\,dx + 2\varepsilon$.

□

8.12 Примеры применения интеграла Лебега

thr △ (5.18).
1) При $\int_X |f(x)|^2\,dx = 0$ △ . . . □.
2) $f, g \rightsquigarrow \int |f|^2\,dx = \int |g|^2\,dx = 1$.
3) $|fg| \leqslant |f|^2/2 + |g|^2/2$.
4) $\int(3) \rightsquigarrow \int_X |fg|\,dx \leqslant 1 \Rightarrow \left|\int_X fg\,dx\right| \leqslant 1$. □

thr △ (5.19).
1) $\left(\int\right)' - \lim +$ линейность:
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_X f(x, y+h)\,dx - \int_X f(x,y)\,dx\right) =$
$= \lim\limits_{h\to 0} \int_X \frac{1}{h}\left(f(x,y+h) - f(x,y)\right)\,dx$.
*) Поточ к lim под $\int$+thr об огр.сход, т.к. (2).
2) $\left|\frac{1}{h}\left(f(x,y+h) - f(x,y)\right)\right| =$
$= |f'_y(x, y + \vartheta(x)h)| \leqslant g(x)$. □

thr △ (5.20).
1) Let $g > 0$, $m = \inf\{f \mid x \in X\}$, $M = \sup\ldots$;
2)инт-м $m \leqslant f(x) \leqslant M$:
$m\int_X g(x)\,dx \leqslant \int_X f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_X g(x)\,dx$;
3) f-непр на связном X, $\operatorname{Im} f \supset (m, M)$;
4) $<$ у (2): $\xi : f(\xi)\int_X g(x)\,dx = \int_X f(x)g(x)\,dx$
5) $=$(2): $\int_X (f(x) - m)g\,dx = 0 \rightsquigarrow \xi : f(\xi) = m$;
□

thr △ (5.21). 1) $g(a+0) := g(a)$, $g(b-0) = g(b)$;
2) $f \to f_n$ в ср.непр.диф. f_n: $\int_a^b |f - f_n|\,dx < \frac{1}{n}$;
3) для f_n доказанно из огр. $g \leqslant M$, $\iiint < \frac{3M}{n}$:
$\left|\int_a^b fq\,dx - g(a)\int_a^{\vartheta_n} f\,dx - g(b)\int_{\vartheta_n}^b f\,dx\right| < 3M/n$;
4) по th.Больц-Вей $\vartheta_n \to \vartheta$, $n \to \infty$ для равенства в пределе;
Теперь f ограничена, проделаем то же самое с g:
5) как и с f: $\int_a^b |g(x) - g_n(x)|\,dx < \frac{1}{n}$, $g_n(a) \to g(a)$;
6) В итоге требуется док. для непр.диф. f_n, g_n;
7) Начнём: $g(b) = 0 \rightsquigarrow \int_a^b fg\,dx = g(a)\int_a^{\vartheta} f\,dx$?;
8)$F = \int_a^x f\,dt, \int_a^b fg\,dx = -\int_a^b Fg'\,dx (F(a), g(b) = 0)$;
9)Let $g' \leqslant 0$ (5.20) $\exists\vartheta : \int_a^b F(-g')\,dx = F(\vartheta)g(a)$;
10) В общ.лучае $g \to g(x) - g(b)$:

$$\int_a^b fg\,dx = \int_a^b f(g(x) - g(b))\,dx + \int_a^b fg(b)\,dx =$$
$$= (g(a) - g(b))\int_a^{\vartheta} f\,dx + g(b)\int_a^b f\,dx =$$
$$= g(a)\int_a^{\vartheta} f\,dx + g(b)\int_{\vartheta}^b f\,dx.$$

□

8.13 Несобственный интеграл функции одной переменной

thr △ (5.8). (свой среди чужих)

1) $f_k = \sum_{l=1}^{k} u_l$ + (5.7). □

thr △ (5.11).
1) в крит. Коши(5.11) II.thr.О среднем(5.21):

$$\left|\int_\xi^\eta f(x)q(x)\,dx\right| \leqslant |g(\xi)|\left|\int_\xi^\vartheta f(x)\,dx\right| +$$

$$+|g(\eta)|\left|\int_\vartheta^\eta f(x)\,dx\right| \leqslant 2M(|g(\xi)|+|g(\eta)|);$$

2)$g(x) \overset{x\to b-0}{\to} 0 \rightsquigarrow \beta_0(\varepsilon) \in (a,b)$:
при $\xi,\eta \geqslant \beta_0(\varepsilon)$: $2M(|g(\xi)|+|g(\eta)|) \leqslant 4M\varepsilon$. □

thr △ (5.10).
1)$\forall\varepsilon>0\,\exists U(b)\,\forall\xi,\eta\in U(b)\cap(X\setminus\{a\}) \Rightarrow$
$|\int_a^\xi f(x)\,dx - \int_a^\eta f(x)| < \varepsilon\ldots$ □

thr △ (5.12).
1)Пусть $|g(x)| \leqslant M$; Коши(5.11), II.thr.О среднем(5.21) (как в proof/5.11):

$$\left|\int_\xi^\eta f(x)q(x)\,dx\right| \leqslant M\left|\int_\xi^\vartheta f(x)\,dx\right| + M\left|\int_\vartheta^\eta f(x)\,dx\right|;$$

2) Всё будет не более $2M\varepsilon$. □

thr △ (5.13).
1)$X_i = [i, i+1)$; $h = \{f(i) \mid x \in X_i\}$, $g = \{f(i+1) \mid x \in X_i\} \rightsquigarrow g \leqslant f \leqslant h$;
2) инт-м $\rightsquigarrow$ требуемые выражения для сумм. □

8.14 Теорема Фубини и линейная замена переменных в интеграле

△ *thr* (5.15).
1) Докажем для S_i;
2) $\forall A,B \in \mathcal{L}_c$: $\mu^*(A\times B) \leqslant \mu^*(A)\cdot\mu^*(B)$;
3) $A_k \to A$, $B_k \to B \Rightarrow A_k \times B_k \to A\times B$. □

△ *thr* (5.17).
1) инт Л инв отн сдвига + (5.14)
2) метод Гаусса; 3) diag $\rightsquigarrow I\cdot|\det A|$ □

△ *thr* (5.16).
1) $S = \{(x,y)\in X\times[0,+\infty] \mid f(x)\geqslant y\geqslant 0\}$;
2) $S = \bigcup_i X_i \times [0, c_i]$;
3) Док $S\in\mathcal{L}$ для ступ f_k ($f_k \to f$);
4) $\int_{X,Y}\chi_S\,dx\,dy$ по th. Фубини (x,y) и (y,x); □

8.15 Объём шара интеграл Пуассона гамма и бета функции

thr △ (5.22).
1) $f_n(x) = \exp\left(-||x||^2\right), x\in\mathbb{R}^n$
2) (5.14) $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f_n\,d\mu = \left(\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu\right)^n$
3) (5.16) $\Rightarrow I_n = \int_0^1 \mu\{||x||^2 \leqslant -\ln y\}\,dy$
4) (5.17) $\Rightarrow I_n = \mu B^n \int_0^1 (-\ln y)^{n/2}\,dy$
5) (5.4) $\Rightarrow -\ln y = t \Rightarrow I_n = \mu B^n\Gamma(n/2+1)$
6) (5.23) $\Rightarrow \mu B^2 = \pi \Rightarrow I = \sqrt{\pi}$ □

thr △ (5.23).
1) $\frac{1}{p}\Gamma(P+1) = \int_0^{+\infty}\frac{1}{p}t^p e^{-t}\,dt$
2) $\frac{t^p}{p} = \int_0^t u^{p-1}\,du$
3) $\frac{1}{p}\Gamma(P+1) = \int_0^{+\infty} u^{p-1}\left(\int_u^{+\infty} e^{-t}\,dt\right)\,du$
4) $\int_0^{+\infty} u^{p-1}e^{-u}\,du = \Gamma(p)$. □

thr △ (5.25).
1) (5.14), (5.17) $\Rightarrow \int_{x,y\geqslant 0}\ldots\,dx\,dy$
2) $(x,y) \to (x, s = x+y) \rightsquigarrow \Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^s x^{p-1}(s-x)^{q-1}\,dx\right)e^{-s}\,ds$.
3) $x = ts, 0\leqslant t\leqslant 1$
4) (5.14) $\Rightarrow \Gamma(p)\Gamma(q) = B(p,q)\Gamma(p+q)$. □

thr △ (5.26).
1) $t = sx$, $x! = x^{x+1}e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-x\varphi(s)}\,ds$
2) $\varphi(s) = s - \ln s - 1 = 0 + \left(\frac{1}{2}\varphi''(1) + o(1)\right)(s-1)^2$, при $s\to 1$.
3) На $[0,a],[b,2] - \varphi >$ const
4) На $[2,+\infty)$ $\varphi(s) \geqslant 1 - \ln 2 + (s-2)/2$
5) (5.22) $\Rightarrow I(x) \in \left[\sqrt{\frac{2\pi}{x(1+2\varepsilon)}}, \sqrt{\frac{2\pi}{x(1-2\varepsilon)}}\right]$. □

9 (proof) дифференцируемые отображения

9.1 Дифференцируемые отображения открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$

lem △ (6.1).
1)$\sum$ модулей координат Ax можно оценить как $\sum a_{ij}(\in A)\cdot|x_k|_{max}$;
2) Заметим $|x_k|_{max} \leqslant \mathbf{x} \leqslant \sum x_i$;
3) (2) $\Rightarrow \sum a_{ij}(\in A)$ сгодится в качестве $||A||$ в требуемом неравенстве.

□

thr △ (6.2). 1) Дост. для $m=1$;
2) fix $x \in U$, р-м $\xi \in U_\delta(x) \subseteq U$. двигаясь по координатным осям можно дойти $x \to \xi$;
3) из (2): $f(\xi) - f(x) = f(\xi_1, ..., \xi_n) - f(\xi_1, ..., x_n) + ...$;
4) по thr.Лагр: $f(\xi) - f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) + \mathrm{o}(1)\right)(\xi_n - x_n) + ...$;
5) (4) и даёт непр. по опр., а Df_x предст. в виде $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)$ □

thr △ (6.1). 1)$g(f(x)) =$

$$=g(y_0) + Dg_{y_0}(f(x) - f(x_0)) + \mathrm{o}(|f(x) - f(x_0)|) =$$
$$= g(y_0) + Dg_{y_0} \circ Df_{x_0}(x - x_0) + Dg_{y_0}\,\mathrm{o}(|x - x_0|) +$$
$$+ \mathrm{o}(\mathrm{O}(|x - x_0|)) = g(y_0) + Dg_{y_0} \circ Df_{x_0}(x - x_0) + \mathrm{o}(|x - x_0|)$$

* Используя оценки из (6.1) $|Ax| = \mathrm{O}(|x|)$ и $f(x) - f(x_0) = \mathrm{O}(x - x_0)$. □

lem △ (6.2).
1)Подставим $x + tv$ в опр. дифф-ла:
2) $f(x + tv) - f(x) = df_x(tv) + \mathrm{o}(|t||v|) = t(\,df_x(v) + \mathrm{o}(1))$;
3) Поделим на t и перейдём к пределу.

□

10 Примеры

Функция Римана имеет счётное количество точек разрыва.

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \text{ и } x = \dfrac{m}{n}, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Из (4.2) $\Rightarrow$, что $\mathcal{R}(x)$ интегрируема по Риману.

Функция Дирихле не интегрируема по Риману.

10.1 Иррациональность e

Пусть $e = p/q$, $p(q-1)! = eq \cdot (q-1)!$. Тогда:

$$p(q-1)! = eq! = q!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = \sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{q!}{n!} + \sum_{n=0}^{q}\frac{q!}{n!}.$$

Также

$$\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{q!}{n!} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(q+1)\dots(q+m} < \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(q+1)^m}$$

Бонус: e трансцендентно.

10.2 Ряд Тейлора

10.3 Непрерывная недифференцируемая всюду функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}^k\right)\varphi(4^k x),$$

где $\varphi(x)$ – кусочно линейная с периодом 2 функция.

Таблица 1: Формулы Маклорена для элементарных функций

e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\operatorname{tg} x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \ldots$
$\operatorname{sh} x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\operatorname{ch} x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\arcsin x$	$x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\ldots(2n)(2n+1)} + o(x^{2n+2})$
$\operatorname{arctg} x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n)$
$ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n)$

10.4 Формула Тейлора для функции нескольких переменных

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{k_1+\ldots+k_n<m} \frac{1}{k_1!\ldots k_n!} \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} \cdot (\xi_1 - x_1)^{k_1}\ldots(\xi_n - x_n)^{k_n} + \\
&+ \sum_{k_1+\ldots+k_n=m} \frac{1}{k_1!\ldots k_n!} \frac{\partial^m f(\boldsymbol{x} + \vartheta(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}))}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} \cdot (\xi_1 - x_1)^{k_1}\ldots(\xi_n - x_n)^{k_n} = \\
&= \sum_{k_1+\ldots+k_n\leqslant m} \frac{1}{k_1!\ldots k_n!} \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} \cdot (\xi_1 - x_1)^{k_1}\ldots(\xi_n - x_n)^{k_n} + o(|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}|^m)
\end{aligned} \tag{1}$$