А. А. Арутюнов, А. В. Ершов

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Допущено
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия для студентов вузов
по направлению подготовки «Прикладные математика и физика»

МОСКВА
????
20??

УДК 512.64
ББК 22.143
АXX

Рецензенты:

Арутюнов А. А., Ершов А. В.
АXX Дополнительные задачи по линейной алгебре: учебное пособие / А. А. Арутюнов, А. В. Ершов. – М. : – 214 с.
ISBN XXX-X-XXXX-XXXX-X

Данное издание содержит подборку задач с решениями и теоретическими пояснениями дополняющими курсы “Линейная алгебра” и “Алгебра и Геометрия”, которые изучаются на первых курсах математических специальностей. Многие задачи снабжены комментариями, содержащими дополнительный материал, объясняющий их связи с современной математикой и ее приложениями в физике.

Предназначено для студентов физико-математических специальностей, изучающих линейную алгебру, а также для преподавателей, ведущих занятия по линейной алгебре.

УДК 512.64
ББК 22.143

ISBN XXX-X-XXXX-XXXX-X

Оглавление

Предисловие

Данное пособие адресовано студентам первых курсов факультетов физико-математической направленности, которые планируют изучить алгебру, глубже, чем это предполагается основной программой.

Мы старались, с одной стороны, предложить более современный взгляд на некоторые части стандартной программы (тензоры, действия групп, линейные пространства и т.д.), а с другой — рассмотреть некоторые традиционно не входящие в программу задачи, полезные в других разделах математики (сингулярные разложения, псевдообратные матрицы, теория представлений, графы Кэли и т.д.). Также мы старались указать на взаимосвязь различных разделов современной математики, в частности на различия и схожесть конечномерных и бесконечномерных пространств и другие подобные вопросы.

Мы предполагаем, что читатели будут обращаться к соответствующим главам нашей книги параллельно с изучением основного курса. Мы советуем читателям перед просмотром решения попытаться решить предлагаемые задачи самостоятельно. Наибольшую пользу из работы с данным пособием извлекут те студенты, которые будут обращаться к нему по мере изучения соответствующих разделов в основном курсе, расширяя свой кругозор и математическую эрудицию при помощи предлагаемых нами задач. В пособии можно найти немало задач по своей сложности существенно превышающими традиционные учебные задачи, однако полезных с точки зрения приложений и более глубокого понимания материала. Также читатели смогут найти ответы на вопросы, ответы на которые обычно “не влезают” в стандартные курсы. Кроме того, мы надеемся, что подробное изложение некоторых тем сможет прояснить для студентов те трудности, которые возникают при изучении некоторых разделов линейной алгебры.

Пособие является сборником задач с решениями и необходимыми теоретическими пояснениями, которые делают его доступным для студентов младших курсов. Поскольку изложение в рамках одного параграфа – последовательно, зачастую возникает необходимость обратиться к предшествующим задачам, так что мы рекомендуем изучать заинтересовавшие параграфы с начала.

Книга является существенно переработанной и дополненной версией нашей работы [7]. Условия ряда задач, включенных в текст, были взяты в том числе из следующих источников: [1], [3], [9], [11], [15], [16], [17], [19], [28], [35], [41].

Авторы выражают свою благодарность студентам факультета инноваций и высоких технологий МФТИ, особенно Алексею Волостнову, Александру Зайкову и Андрею Асанову, чьи решения задач на семинарах в ряде случаев позволили усовершенствовать изложение, нашему коллеге Александру Митрофановичу Попову за многочисленные замечания и предложения, студентке 599 группы ФИВТ МФТИ Валерии Немычниковой за поиск опечаток и содержательные комментарии, а также Анне Алексаниной за элегантный рисунок на обложке, выполненный специально для этого издания.

0 Некоторые обозначения и определения

Для удобства читателей в данном разделе мы приведем несколько важных определений, которые будут использоваться в дальнейшем. Этот раздел нужно воспринимать как словарик терминов. Чтобы научиться свободно ими пользоваться, нужно на каждое понятие разобрать по нескольку примеров, которые легко найти в рекомендованных учебниках по алгебре.

0.1. Основные обозначения и соглашения

Мы придерживаемся стандартных обозначений для числовых систем: $\mathbb{N}$ для натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ для целых чисел, $\mathbb{Q}$ для рациональных чисел, $\mathbb{R}$ для действительных чисел, $\mathbb{C}$ для комплексных чисел, $\mathbb{H}$ для кватернионов и $\mathbb{Z}_p$ для поля классов вычетов по модулю простого числа p. Произвольное поле мы обычное обозначаем $\mathbb{K}$ или $\mathbb{F}$. Чаще всего в качестве основного поля будут рассматриваться $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Векторы обычно обозначаются жирными латинскими буквами (например, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$), линейные пространства — заглавными латинскими буквами (например, U, V, W). Координатные столбцы обозначаются $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y} \in \mathbb{K}^n$. Мы не будем различать понятия векторного и линейного пространства.
$\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ обозначает линейную оболочку векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$.

Линейное преобразование – тоже самое, что и линейный оператор.
V^* — пространство, двойственное (или, что то же самое, сопряженное) к V, это пространство линейных функционалов на V со значениями в поле.
$U \subset V$ или $V \supset U$ означает, что U — подмножество (или подпространство) в V, причем не исключается случай $U = V$.
$U \subsetneq V$ или $V \supsetneq U$ означает, что U — *собственное* подмножество (или подпространство) в V, то есть $U \subset V$ и $U \neq V$.

$\natural X$ обозначает мощность множества X.
Пространство (алгебра) линейных операторов действующих на векторном пространстве V над полем $\mathbb{K}$ обозначается $\mathcal{L}(V)$, пространство билинейных отображений $V \times V \to \mathbb{K}$ — $\mathcal{B}(V)$. В главе о тензорных произведениях пространство линейных отображений $W \to L$ мы обозначаем через $\mathcal{L}(W;\, L)$, а пространство билинейных отображений $U \times V \to L$ — $\mathcal{L}(U,\, V;\, L)$.

$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ — пространство (алгебра) квадратных матриц порядка n над полем $\mathbb{K}$. $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ — пространство всех матриц размера $m \times n$ с элементами из поля $\mathbb{K}$.
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ — подмножество всех обратимых матриц в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$.
$\mathbb{K}[x]$ — пространство (алгебра) многочленов от переменной x над полем $\mathbb{K}$.
$\mathbb{K}[\varphi]$, где φ — линейный оператор (или матрица), — алгебра операторов (матриц), представимых в виде многочлена от оператора (матрицы) φ.
E — единичная матрица, т.е. матрица с единицами на главной диагонали.
E_{ij} — матричные единицы (матрицы, у которых единственный ненулевой элемент, равный 1, стоит на пересечении i-й строки и j-го столбца). Размеры соответствующих матриц будут ясны из контекста.

Pr_U^W — оператор проектирования на подпространство $U \subset V$ параллельно подпространству $W \subset V$, отвечающий разложению V в прямую сумму $U \oplus W$ подпространств.

$\dim V$ — размерность векторного пространства V.
$\ker\varphi$ и $\operatorname{im}\varphi$ — соответственно ядро и образ линейного оператора (отображения) φ.
id_V — тождественный оператор на пространстве V.
A^T — матрица, транспонированная к A.
$\mathrm{tr}A$, $\det A$, $\mathrm{rk}A$ — след, определитель и ранг матрицы (оператора) A.
$\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — диагональная матрица с числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на главной диагонали.
$\chi_A(t)$ — характеристический многочлен матрицы (оператора) A.
Спектр оператора — это множество его собственных значений[1].

Значок ":=" означает "по определению", причем определяемое стоит со стороны двоеточия.
Символ "$\cong$" обозначает изоморфизм соответствующих алгебраических структур (каких конкретно — если явно не указано — должно быть ясно из контекста).
Через $f(\cdot)$ мы будем обозначать функцию от некоторого аргумента, который явно не указан.
Дельта-символ Кронекера δ_{ij} определяется следующим образом:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Через $\ell_p, p \geq 1$ мы будем обозначать множество вещественных последовательностей $(x_1, x_2, \dots)$ таких, что $\sum |x_i|^p < \infty$. И будем выделять элементы $e_i := (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots)$.

0.2. Отношение эквивалентности

Определение 0.1. *Декартовым произведением* $X \times Y$ множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар

$$\{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Таким образом, $(x, y) = (x', y') \quad \Leftrightarrow \quad x = x', y = y'$.

Определение 0.2. (*Бинарным*) *соответствием* между множествами X и Y называется произвольное подмножество $R \subset X \times Y$.

Для произвольного соответствия $R \subset X \times Y$ определим *транспонированное соответствие* $R^T \subset Y \times X$ как

$$R^T = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\},$$

то есть пара $(y, x) \in Y \times X$ принадлежит R^T тогда и только тогда, когда пара $(x, y) \in X \times Y$ принадлежит R. Очевидно, что $(R^T)^T = R$.

[1] В дальнейшем, при изучении функционального анализа, понятие спектра будет модифицировано, см. комментарий после задачи 3.59.

Определение 0.3. (*Бинарным*) *отношением* на множестве X называется бинарное соответствие между X и X, то есть произвольное подмножество $R \subset X \times X$.

Например, если X — множество людей, определим отношение R "быть родителем" на X как $R = \{(x,\, y) \mid y — \text{родитель } x\}$. Тогда транспонированное отношение R^T есть отношение "быть ребенком".

Пример. *Диагональ* $\Delta_X := \{(x,\, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ задает *отношение равенства* на X.

Для произвольных соответствий $R_1 \subset X \times Y$ и $R_2 \subset Y \times Z$ определим их *композицию* $R_2 \circ R_1$ как соответствие

$$\{(x,\, z) \in X \times Z \mid \text{существует } \; y \in Y, \; \text{ для которого}$$
$$(x,\, y) \in R_1,\; (y,\, z) \in R_2\} \subset X \times Z.$$

Например, композиция отношения "быть родителем" и отношения "быть братом" на множестве людей X есть отношение "быть дядей", а композиция отношения "быть родителем" с собой — отношение "быть бабушкой или дедушкой".

Нетрудно проверить, что $\Delta_Y \circ R = R = R \circ \Delta_X$ для любого соответствия $R \subset X \times Y$, а также что композиция соответствий ассоциативна, то есть для произвольных

$$R_1 \subset X \times Y, \quad R_2 \subset Y \times Z, \quad R_3 \subset Z \times W$$

соответствия $(R_3 \circ R_2) \circ R_1$ и $R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$ между множествами X и W равны. Также верно равенство $(R_2 \circ R_1)^T = R_1^T \circ R_2^T$.

Для читателей, знакомых с понятием булевой алгебры, будет полезно решить следующую задачу, которая дает еще одну интерпретацию матричного умножения (основная интерпретация последнего для нас — композиция линейных отображений).

Задача 0.4. В случае конечных множеств X и Y придумайте способ задания соответствий между X и Y с помощью матриц так, чтобы отношению равенства отвечала бы единичная матрица, транспонированному соответствию отвечала транспонированная матрица, а композиции соответствий — произведение матриц.

Важнейшим методом познания какой-либо части окружающего мира является нахождение естественной классификации ее объектов. Классификация элементов некоторого множества X — разбиение множества на классы. Любое такое разбиение происходит из (и, в свою очередь, определяет) некоторого отношения эквивалентности на X.

Определение 0.5. Отношение R на X называется *отношением эквивалентности* на множестве X, если оно обладает свойствами:

1) *рефлексивности*: $(x,\, x) \in R$ для любого $x \in X$ (эквивалентно, $\Delta_X \subset R$);
2) *симметричности*: $(x,\, y) \in R \;\Rightarrow\; (y,\, x) \in R$ (эквивалентно, $R = R^T$);

3) *транзитивности*: $(x,\, y) \in R$ и $(y,\, z) \in R \Rightarrow (x,\, z) \in R$ (эквивалентно, $R \circ R \subset R$, где $\circ$ обозначает композицию отношений).

Например, на множестве людей X отношение

$$R_1 = \{(x,\, y) \mid y \text{ знает } x\}$$

не является отношением эквивалентности (например, отсутствует симметричность), отношение

$$R_2 = \{(x,\, y) \mid y \text{ знако́м с } x\}$$

также не является отношением эквивалентности (оно симметрично, но не транзитивно), а отношения "быть родственником" или "жить в одном доме" — отношения эквивалентности.
Пусть R — отношение эквивалентности на множестве X. В этом случае вместо $(x,\, y) \in R$ пишут $x \sim_R y$ или просто $x \sim y$, если ясно, какое отношение эквивалентности имеется в виду.
Пусть X — множество, на котором задано отношение эквивалентности $\sim$. *Классом эквивалентности* элемента $x \in X$ назовем подмножество $[x] \subset X$, состоящее из всех элементов, эквивалентных x, то есть $[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$. Произвольный элемент $y \in [x]$ называется *представителем* класса эквивалентности $[x]$.
Например, для отношения эквивалентности "жить в одном доме" классы эквивалентности — жильцы одного дома. Произвольный жилец дома является представителем такого класса.

Предложение 0.6. $[x] = [x'] \;\Leftrightarrow\; x \sim x'$.

Доказательство. Пусть $[x] = [x']$. Так как $x \sim x$, то $x \in [x] = = [x']$, а значит, $x \sim x'$.
Наоборот, предположим, что $x \sim x'$. Пусть $y \in [x] \;\Rightarrow\; y \sim \sim x \;\Rightarrow\; y \sim x' \;\Rightarrow\; y \in [x']$. Таким образом, $[x] \subset [x']$. Тогда в силу симметричности отношения эквивалентности $[x] = [x']$. ■

Определение 0.7. *Разбиением* множества X называется представление его в виде объединения непересекающихся[2] непустых подмножеств, то есть в виде $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, $\;X_\alpha \subset X$, причем $X_\alpha \bigcap X_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$.

Предложение 0.8. Классы эквивалентности отношения эквивалентности $\sim$ на X образуют разбиение множества X.

Доказательство. Так как $x \in [x]$, то каждый элемент множества X принадлежит некоторому классу эквивалентности. Покажем, что если классы $[x]$, $[x']$ имеют непустое пересечение, то они совпадают. Пусть $y \in [x] \cap [x']$. Тогда $y \sim x \;\Rightarrow\; x \sim y$, а также $y \sim x' \;\Rightarrow\; x \sim x' \;\Rightarrow\; [x] = [x']$. ■

Заметим, что верно и обратное: по любому разбиению $X = = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ множества X определяется единственное отношение эквивалентности на X,

[2] То есть имеющих пустое пересечение.

для которого X_α, $\alpha \in A$, являются классами эквивалентности. То есть *существует естественное взаимно однозначное соответствие между отношениями эквивалентности на множестве X и разбиениями X.*

Теперь заметим, что классы эквивалентности отношения эквивалентности $\sim$ на X сами можно рассматривать как элементы некоторого множества, которое называется *фактормножеством множества X по отношению эквивалентности $\sim$*. Фактормножество множества X по отношению эквивалентности $\sim$ обозначается $X/\sim$.
Рассмотрим примеры. Фактормножество множества людей по отношению эквивалентности "жить в одном доме" — множество домов (мы считаем, что каждый человек живет в доме, причем единственном).

Пример 0.1. (Свободные векторы на плоскости.) *Направленным отрезком* AB на плоскости называется упорядоченная пара точек (A, B) на плоскости. Два направленных отрезка AB и $A'B'$ называются *эквивалентными*, если середины AB' и $A'B$ совпадают. Читателю предлагается убедиться, что это — действительно отношение эквивалентности и что его классы эквивалентности — в точности свободные векторы на плоскости.

Пример 0.2. (Рациональные числа.) Рассмотрим множество упорядоченных пар целых чисел (m, n), $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Определим на данном множестве отношение

$$(m, n) \sim (m', n') \Leftrightarrow mn' = m'n. \tag{1}$$

Рефлексивность и симметричность такого отношения очевидны. Проверим транзитивность. Пусть $(m', n') \sim (m'', n'')$, то есть $m'n'' = m''n'$. Умножая обе части равенства в (1) на n'', а обе части предыдущего равенства — на n, получаем $mn'n'' = m'nn''$; $m'n''n = m''n'n$, откуда, сокращая на n' (и используя $n' \neq 0$), получаем $mn'' = m''n$. Класс эквивалентности этого отношения называется *рациональным числом*. Множество рациональных чисел обозначается $\mathbb{Q}$.

Пример 0.3. Две матрицы $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ назовем *эквивалентными*, если одну в другую можно перевести композицией элементарных преобразований строк. То, что это действительно отношение эквивалентности, легко следует из определения элементарных преобразований (в частности, из их обратимости). Каждый класс эквивалентности содержит единственную матрицу *строгого ступенчатого вида* (такой вид имеют матрицы, у которых самый левый ненулевой элемент каждой строки равен 1, располагается строго правее, чем в предыдущей строке, и является единственным ненулевым элементом своего столбца). Например, все *обратимые* матрицы данного порядка n эквивалентны друг другу (и, в частности, эквивалентны единичной матрице порядка n).

Пример 0.4. В начальном курсе алгебры на множестве систем линейных уравнений от одного числа n неизвестных рассматриваются следующие два отношения эквивалентности:

1) две системы эквивалентны, если их множества решений совпадают (то есть каждое решение первой является решением второй и наоборот);

2) две системы эквивалентны, если каждое уравнение второй системы является линейной комбинацией уравнений первой системы и наоборот.

Важным результатом является теорема, утверждающая, что эти два отношения эквивалентности совпадают на множестве *совместных* систем (в частности, на множестве *однородных* систем). В частности, две совместные системы, состоящие из одинакового числа уравнений, имеют одинаковое множество решений тогда и только тогда, когда существует последовательность элементарных преобразований уравнений (или строк расширенной матрицы) первой системы, переводящая ее во вторую.

Очень похожим по смыслу является следующий пример.

Пример 0.5. Пусть A – квадратная матрица $n \times n$ ранга $k \leq n$. Тогда будем говорить, что два столбца x и y высоты n эквивалентны, если $Ax = Ay$.

Легко понять, что класс эквивалентности $[0]$ — это множество решений однородной системы $Ax = 0$, а класс эквивалентности вектора Ab — множество решений неоднородной системы $Ax = Ab$. В частности, если матрица A имеет максимальный ранг, то отношение эквивалентности совпадает с точным равенством. В данном примере хорошо видно, что выполняется свойство $[x+y] = [x]+[y]$ в том смысле, что $\forall x_1 \in [x], y_1 \in [y]$ имеем $x_1+y_1 \in [x+y]$. А значит мы можем перейти к, как говорят, *факторпространству* $V = \mathbb{R}^n/\sim$ в котором определены все операции линейного пространства. Легко видеть, что $\dim V + k = n$. Геометрически, это значит что если мы все классы эквивалентности "сожмем в точку", то мы получим пространство размерности $n-k$. Например, если мы находимся в трехмерном пространстве, и матрица A имеет ранг 1, то классы эквивалентности это параллельные плоскости. А факторпространство можно понимать как точки пересечения с некоторой фиксированной прямой, протыкающей эти плоскости. Сложение классов эквивалентности, конечно, будет соответствовать сложению точек на ппрямой как обычных векторов.
Впрочем, к идее факторизации мы ещё много раз вернёмся ниже.
Также, некоторое количество нетривиальных примеров отношений эквивалентности изложено в разделе 2.5..

0.3. Группы

Определение 0.9. *Бинарной операцией* φ на множестве X называется произвольное отображение $\varphi\colon X \times X \to X$.

Иногда бывает полезно рассматривать и другие операции, например тернарные (примером такой операции является двойное векторное произведение векторов в $\mathbb{R}^3$). Часто бывают нужны унарные операции, например операция обращения $*^{-1} : g \to g^{-1}$, которая ставит в соответствие элементу g его обратный. Унарную операцию, которая обратна самой себе, называют *инволюцией*.

Определение 0.10. *Группой* называется множество G, на котором задана бинарная операция

$$\mu\colon G \times G \to G, \quad (g_1,\, g_2) \mapsto \mu(g_1,\, g_2),$$

удовлетворяющая следующим условиям ("аксиомам группы"):

1) операция μ ассоциативна: $\mu(g_1,\, \mu(g_2,\, g_3)) = \mu(\mu(g_1,\, g_2),\, g_3)\ \forall g_1,\, g_2,\, g_3 \in G$;
2) существует *нейтральный элемент* (называемый также *единичным элементом* или *единицей*) $e \in G$, то есть такой, что $\mu(g,\, e) = g = \mu(e,\, g)\ \ \forall g \in G$ (в частности, $G \neq \varnothing$);
3) $\forall g \in G$ существует элемент множества G, обозначаемый g^{-1}, удовлетворяющий условию $\mu(g,\, g^{-1}) = e = \mu(g^{-1},\, g)$. Элемент g^{-1} называется *обратным элементом* для $g \in G$.

Простым следствием аксиом группы является единственность единицы e и обратного g^{-1} для каждого $g \in G$.

Определение 0.11. Группа G называется *коммутативной* или *абелевой*, если операция μ наряду со свойствами 1)—3) из определения группы обладает свойством коммутативности: $\mu(g_1,\, g_2) = \mu(g_2,\, g_1)\ \ \forall g_1,\, g_2 \in G$.

Обычно бинарная операция μ записывается как умножение (то есть $\mu(g_1,\, g_2) = g_1 g_2$, "мультипликативная запись") либо как сложение ($\mu(g_1,\, g_2) = g_1 + g_2$, "аддитивная запись"). Почти всегда операцию в некоммутативных группах записывают мультипликативно, а в коммутативных группах — аддитивно (в этом случае нейтральный элемент e обычно обозначают 0, а вместо g^{-1} пишут $-g$).

Простейшими примерами коммутативных групп будут стандартные числовые множества: целые числа $\mathbb{Z}$, рациональные числа $\mathbb{Q}$, вещественные числа $\mathbb{R}$ относительно операции сложения.

Пример 0.6. (Мультипликативная группа поля.) Отметим, что относительно операции умножения рациональные, вещественные числа, или, более общо, элементы произвольного поля[3] $\mathbb{K}$, будут являться группой, только если из них убрать 0. Соответствующая группа называется *мультипликативной группой поля* $\mathbb{K}$ и обозначается $\mathbb{K}^*$.

Пример 0.7. Важным примером некоммутативной группы является группа невырожденных матриц $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ порядка n при $n > 1$ относительно операции умножения.

Сразу же зафиксируем некоторые дополнительные классы матриц, также образующих группы относительно операции умножения. Это группа $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, состоящая из матриц порядка n с единичным определителем, группа $\mathrm{O}(n)$, состоящая из вещественных *ортогональных* матриц, то есть

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = E\},$$

[3] Определение поля мы напоминаем ниже, см. определение 0.18.

и группа $\mathrm{SO}(n)$, состоящая из вещественных ортогональных матриц с определителем единица.
В случае поля $\mathbb{C}$ множество унитарных матриц

$$\mathrm{U}(n) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \overline{A}^T A = E\}$$

и множество унитарных матриц с определителем единица также являются группами, последняя обозначается $\mathrm{SU}(n)$. Проверку того, что указанные множества матриц являются группами, мы оставляем читателю в качестве простого упражнения.

Пример 0.8. Пусть X — произвольное множество, $S(X)$ — множество всех биекций $f\colon X \to X$. На множестве отображений $X \to X$ определена бинарная операция — композиция отображений $(f, g) \mapsto f \circ g$. Так как композиция биекций является биекцией, то $\circ$ определяет бинарную операцию на $S(X)$ (говорят также, что "$S(X)$ замкнуто относительно операции $\circ$"). Кроме того, композиция отображений ассоциативна, тождественное отображение является ее нейтральным элементом, и отображение, обратное к биекции, является биекцией. Таким образом, $S(X)$ является группой. Если $X = \{1, 2, \dots, n\}$, то $S(X)$ обозначается S_n и называется *группой перестановок* на n элементах. Заметим, что порядок (=число элементов) группы S_n есть $n!$. При $n \geq 3$ группа S_n некоммутативна.

Пусть на множестве X одновременно заданы некоторая бинарная операция $\cdot$ и отношение эквивалентности $\sim$.

Определение 0.12. Отношение эквивалентности $\sim$ называется *согласованным* с бинарной операцией $\cdot$, если из $x \sim x'$, $y \sim y'$ следует $x \cdot y \sim x' \cdot y'$.

При выполнении условия согласованности можно определить бинарную операцию $*$ на множестве классов эквивалентности (то есть на фактормножестве $X/\sim$) по формуле $[x] * [y] := [x \cdot y]$. На первый взгляд, определение зависит от выбора представителей x, y классов $[x]$ и $[y]$ (см. Предложение 0.6). Действительно, чтобы получить произведение классов $[x]$ и $[y]$, мы перемножаем их представителей x, y, а затем берем класс их произведения $[x \cdot y]$. Получим ли мы тот же результат, если представим класс $[x]$ в виде $[x']$, где $x' \sim x$, а класс $[y]$ — в виде $[y']$, где $y' \sim y$? Да, это как раз следует из условия согласованности, в чем читатель легко убедится.
Этот простой и общий способ определения операции на фактормножестве постоянно используется в алгебре (при определении факторгрупп, факторпространств, факторколец и т.д.) Заметим еще, что свойства ассоциативности, коммутативности операции $\cdot$, а также наличие единичного или обратного элемента "наследуются" операцией $*$.

Читатель легко убедится, что отношение эквивалентности из примера 0.1 согласовано с операцией сложения направленных отрезков по правилу треугольника, и, таким образом, определяет операцию сложения свободных векторов. То же можно сказать про операцию умножения направленных отрезков на действительные числа.

Аналогично дела обстоят в примере 0.2. Более подробно операции суммы и произведения рациональных чисел определяются на представителях классов эквивалентности как

$$(m_1,\, n_1) + (m_2,\, n_2) = (m_1 n_2 + n_1 m_2,\, n_1 n_2),$$

$$(m_1,\, n_1) \cdot (m_2,\, n_2) = (m_1 m_2,\, n_1 n_2).$$

Читатель легко убедится, что отношение эквивалентности (1) согласовано с этими операциями, и, таким образом, последние определяют операции сложения и умножения рациональных чисел.

Пример 0.9. Фиксируем некоторое целое число $p \geq 0$. На множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ рассмотрим следующее отношение эквивалентности $\sim$: $m \sim n \;\Leftrightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{Z}$ такое, что $n - m = kp$. Читателю предлагается проверить, что отношение эквивалентности $\sim$ согласовано с операцией сложения на $\mathbb{Z}$, и, тем самым, при $p > 0$ мы получаем группу из p элементов, которую далее будем обозначать через $\mathbb{Z}_p$. Если же $p = 0$, то данное отношение эквивалентности — отношение равенства, и все классы состоят из одного элемента. Конструкция этого примера — частный случай конструкции *факторгруппы* (см., например, [15]).

Определение 0.13. *Гомоморфизмом группы G в группу H* называется отображение $\varphi\colon G \to H$ такое, что

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) \quad \forall g_1,\, g_2 \in G.$$

Гомоморфизм φ называется *изоморфизмом*, если он биективен.

Несложными следствиями определения гомоморфизма являются утверждения:

- $\varphi(e_G) = e_H$, где e_G — нейтральный элемент в группе G, а e_H — в H.
- $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1} \;\; \forall\, g \in G$.

Заметим также, что если $\varphi\colon G \to H$ — изоморфизм, то обратное отображение $\varphi^{-1}\colon H \to G$ является гомоморфизмом групп, и, таким образом, тоже изоморфизм, причем

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_G, \quad \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_H$$

(здесь $\mathrm{id}_G,\ \mathrm{id}_H$ — тождественные отображения соответствующих множеств). Каждое отображение множеств $f\colon X \to Y$ задает некоторое отношение эквивалентности на X (два элемента $x,\, x' \in X$ эквивалентны $\Leftrightarrow\; f(x) = f(x')$). В случае гомоморфизмов групп данное отношение эквивалентности имеет простое описание в терминах *ядра гомоморфизма* (см. [15]).

Задача 0.14. Построить изоморфизм групп между аддитивной группой $\mathbb{R}$ и мультипликативной группой $\mathbb{R}_+$ положительных действительных чисел.

Пример 0.10. Определитель

$$\det\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^*, \quad A \mapsto \det A$$

задает гомоморфизм групп, что следует из тождества

$$\det(AB) = \det A \det B \quad \forall A,\ B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}).$$

Пример 0.11. Сопоставление перестановке на n элементах ее знака определяет гомоморфизм $\mathrm{sgn}\colon S_n \to \{\pm 1\}$ из группы S_n в группу из двух элементов $\{\pm 1\}$ (состоящую из 1, $-1 \in \mathbb{Z}$ и рассматриваемую с операцией умножения. Это группа элементов кольца[4] $\mathbb{Z}$, обратимых относительно умножения; ее естественно обозначить $\mathbb{Z}^*$). Это следует из тождества $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$, верного для любых двух перестановок σ, $\tau \in S_n$.

Пример 0.12. Группа $\mathrm{GL}(V)$ обратимых линейных преобразований n-мерного векторного пространства V над полем $\mathbb{K}$ относительно операции композиции изоморфна группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (выбор базиса в V позволяет линейному оператору сопоставить единственную матрицу и, тем самым, задает конкретный изоморфизм между $\mathrm{GL}(V)$ и $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$).

Пример 0.13. Группа изометрий $\mathrm{O}(V)$ евклидова пространства V (т.е. линейных преобразований вещественного векторного пространства, сохраняющих билинейную симметричную положительно определенную форму; такие преобразования называются *ортогональными*) изоморфна $\mathrm{O}(n)$. Действительно, выбор ортонормированного базиса в V задает ее изоморфизм с ортогональной группой $\mathrm{O}(n)$ (ортогональное преобразование в ортонормированном базисе имеет ортогональную матрицу).

0.4. Действия групп

Определение 0.15. *Действием группы G на множестве X* называется произвольный гомоморфизм $\alpha\colon G \to S(X)$ (группа $S(X)$ определена в примере 0.8).

Таким образом, для любого $g \in G$ $\alpha(g)$ — биекция множества X на себя. Запись $\alpha(g)(x)$ (результат применения биекции $\alpha(g)$ к элементу $x \in X$) часто сокращают до gx, если ясно, о каком действии идет речь.

Действие группы G на множестве X называется *тавтологическим*, если группа G по своему определению является подгруппой[5] группы $S(X)$. В этом случае гомоморфизм $\alpha\colon G \to S(X)$ — тождественное вложение (=инъективное отображение).

Например, группы $\mathrm{GL}(V)$, $\mathrm{O}(V)$ и S_n тавтологически действуют на множестве элементов векторного пространства V, евклидова пространства V и $\{1, \ldots, n\}$ соответственно.

Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{K}$. При выборе базиса в V тавтологическое действие группы $\mathrm{GL}(V)$ на V переходит в действие группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ на пространстве $\mathbb{K}^n$ столбцов высоты n с элементами из поля $\mathbb{K}$ умножением (слева) матрицы на столбец.

Группа вращений трехмерного пространства, переводящих правильный многогранник в себя, действует на множествах его вершин, ребер и граней.

[4] Определение кольца дано ниже, см. определение 0.17.

[5] Определение подгруппы см. в любом учебнике алгебры.

Пример 0.14. (Действие сопряжениями.) Определим действие α группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ на множестве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ матриц порядка n с помощью формулы

$$\alpha(C)(X) = CXC^{-1} \quad \forall C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \ \ X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}).$$

Пример 0.15. Определим действие β группы $\mathrm{O}(n)$ на пространстве $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ симметрических матриц над полем $\mathbb{R}$ с помощью формулы

$$\beta(C)(X) = CXC^T \quad \forall C \in \mathrm{O}(n), \ \ X \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}).$$

По действию α группы G на множестве X можно определить следующее отношение эквивалентности $\sim_\alpha$ на X:

$$x \sim_\alpha y \ \Leftrightarrow \ \exists\, g \in G \ \text{ такой, что } \ y = \alpha(g)(x).$$

Из определения действия группы непосредственно следует, что это действительно отношение эквивалентности (читателю предлагается провести несложную проверку).

Определение 0.16. *Орбитой* действия α называется класс эквивалентности отношения $\sim_\alpha$. Действие G на X называется *транзитивным*, если все элементы X между собой эквивалентны, то есть все множество X представляет собой одну орбиту.

Пример 0.16. Чтобы пояснить терминологию, рассмотрим следующий пример. На аффинной (т.е. точечной) евклидовой плоскости V рассмотрим следующее отношение эквивалентности: точки $p \in V$ и $q \in V$ эквивалентны, $p \sim q \Leftrightarrow$ они находятся на одинаковом расстоянии от начала координат O. Классами эквивалентности являются концентрические окружности с центром в O (включая “окружность нулевого радиуса” — саму точку O), они — орбиты действия группы $\mathrm{SO}(2)$ вращениями плоскости V вокруг O. Расстояние от произвольной точки орбиты до начала координат постоянно[6], сопоставление орбите этого расстояния определяет биекцию множества орбит (т.е. фактормножества) с множеством неотрицательных действительных чисел.

Еще примеры. В случае тавтологического действия $\mathrm{GL}(V)$ на V (в случае $V \neq \{\mathbf{0}\}$) имеем две орбиты: одна состоит из всех ненулевых векторов, другая — только из нулевого вектора. Кроме того, $\mathrm{GL}(V)$ транзитивно действует на множестве упорядоченных наборов из фиксированного числа $k \leq n = \dim V$ линейно независимых векторов из V. В частности, $\mathrm{GL}(V)$ транзитивно действует на множестве всех базисов в V.
В случае тавтологического действия $\mathrm{O}(V)$ на евклидовом пространстве V орбиты отвечают неотрицательным вещественным числам: два вектора из V эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую длину. Кроме того, $\mathrm{O}(V)$ транзитивно действует на множестве упорядоченных наборов из фиксированного числа $k \leq n = \dim V$ единичных попарно ортогональных векторов из V. В частности, $\mathrm{O}(V)$ транзитивно действует на множестве всех ортонормированных базисов в V.

[6] Функции, постоянные на орбитах, называются *инвариантами* данного действия.

В случае действия α из примера 0.14 две матрицы $X, Y \in \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ эквивалентны относительно отношения $\sim_\alpha$ тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же оператора в разных базисах. Действительно, если $\varphi\colon V \to V$ имеет матрицу Y в базисе $\{\mathbf{e}\} := \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ и $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ — матрица перехода от базиса $\{\mathbf{e}\}$ к базису $\{\mathbf{e}'\} := \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$, то $X = C^{-1}YC$ — матрица оператора φ в базисе $\{\mathbf{e}'\}$, эквивалентно, $Y = CXC^{-1}$. В случае $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ это эквивалентно тому, что X и Y имеют одну и ту же жорданову нормальную форму.
В случае действия β из примера 0.15 две матрицы $X, Y \in \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ эквивалентны относительно отношения $\sim_\beta$ тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же самосопряженного оператора в евклидовом пространстве в разных ортонормированных базисах. Это эквивалентно тому, что они приводятся к одному и тому же диагональному виду ортогональными заменами базиса.

Пример 0.17. Напомним, что элементарное преобразование строк матрицы A задается ее умножением слева на некоторую обратимую ("элементарную") матрицу, и композиция элементарных преобразований отвечает произведению соответствующих элементарных матриц. Обратно, любую обратимую матрицу можно представить в виде произведения элементарных, и, значит, умножение A на обратимую матрицу слева отвечает композиции элементарных преобразований строк матрицы A. Из этого следует, что отношение эквивалентности, описанное в примере 0.3, совпадает с отношением эквивалентности, определяемым действием группы $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ на $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ умножением слева. То есть две матрицы $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\exists\, C \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ такая, что $B = CA$.

Пример 0.18. В этом примере мы приводим концептуальное доказательство формул Крамера (взятое из [15]), хорошо иллюстрирующее применение идеи инвариантности.
Рассмотрим систему линейных уравнений $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$, где A — невырожденная матрица порядка n, а $\overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ и $\overrightarrow{b} = (b_1, \dots, b_n)^T$ — столбцы неизвестных и правых частей соответственно. Докажем, что данная система имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \ \ \dots, \ \ x_n = \frac{\det A_n}{\det A}, \tag{2}$$

где A_i — матрица, получаемая из матрицы A заменой ее i-го столбца на столбец $\overrightarrow{b}$ правых частей.
Производя элементарные преобразования строк расширенной матрицы, мы будем получать некоторые новые системы, эквивалентные исходной. Так как элементарными преобразованиями строк расширенную матрицу исходной системы можно привести к виду $(E \mid \overrightarrow{b}\,')$, где E — единичная матрица порядка n, а $\overrightarrow{b}\,' = (b'_1, \dots, b'_n)^T$ — некоторый столбец, то исходная система эквивалентна системе $x_1 = b'_1, \dots, x_n = b'_n$. Эта система имеет единственное решение $(b'_1, \dots, b'_n)^T$, значит, то же верно и для исходной системы.
Отношения определителей в правых частях равенств (2) не меняются при элементарных преобразованиях строк расширенной матрицы так же, как не

меняется и решение $(b'_1, \ldots, b'_n)^T$ соответствующих систем. Значит, если для какой-то из этих систем равенства (2) имеют место, то то же верно и для исходной системы (если две функции f и g постоянны на некотором множестве X и их значения совпадают в некоторой точке $x \in X$, то они совпадают на всем множестве X). Для системы с единичной матрицей коэффициентов $A = E$ равенства (2) легко проверяются. Действительно, в числителе стоит определитель матрицы, отличающейся от единичной заменой i-го столбца на столбец $\overrightarrow{b}'$, он равен b'_i, и, значит, формулы (2) верны для системы с единичной матрицей коэффициентов.

Другие примеры отношений эквивалентности, возникающие в линейной алгебре, рассматриваются в разделе 2.5..

0.5. Кольца, поля, линейные пространства и алгебры

Определение 0.17. *Кольцом* R называется аддитивная абелева группа $(R, +)$, в которой есть также операция умножения, которая удовлетворяет свойству дистрибутивности:

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (b + c)a = ba + ca \ \ \forall a,\, b,\, c \in R.$$

Следующие условия являются дополнительными и в произвольном кольце могут не выполняться:

- ассоциативность (мультипликативная) $(ab)c = a(bc)$;
- наличие мультипликативной единицы $\mathbb{1}$, то есть такого элемента, что $a\mathbb{1} = \mathbb{1}a = a$;
- коммутативность $ab = ba$.

Эти условия выделяют специальные классы колец: ассоциативные кольца, кольца с единицей и коммутативные кольца соответственно.

Определение 0.18. *Полем* называется ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, в котором не менее двух элементов, и все ненулевые элементы обратимы.

Легко видеть, что поле является не только абелевой группой по сложению, но, если убрать из него ноль (нейтральный элемент аддитивной группы), также и абелевой группой по умножению. Примерами бесконечных полей являются $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ относительно обычных операций сложения и умножения является коммутативным ассоциативным кольцом с единицей, но не полем.
Отношение эквивалентности $\sim$ из примера 0.9 согласовано не только с операцией сложения, но и с операцией умножения, и поэтому на фактормножестве возникает структура ассоциативного коммутативного кольца с единицей, также обозначаемого $\mathbb{Z}_p$, причем это кольцо является полем тогда и только тогда, когда p простое.
В следующем определении нам понадобится понятие *внешней* бинарной операции, а именно произвольного отображения

$$\varphi\colon K \times L \to L,$$

где $K \neq L$.

Определение 0.19. *Линейным пространством над полем* $\mathbb{K}$ называется множество V вместе с двумя бинарными операциями: внутренней

$$V \times V \to V, \quad (\mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2) \mapsto \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

и внешней

$$\mathbb{K} \times V \to V, \quad (\lambda,\, \mathbf{v}) \mapsto \lambda\mathbf{v},$$

удовлетворяющими условиям:

- $(V,\, +)$ — абелева группа (в частности, $\mathbf{0} \in V$);
- $1\mathbf{v} = \mathbf{v} \ \ \forall \mathbf{v} \in V, \quad \lambda(\mu\mathbf{v}) = (\lambda\mu)\mathbf{v} \ \ \forall\, \lambda,\, \mu \in \mathbb{K},\ \mathbf{v} \in V$;
- $(\lambda+\mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{v},\ \lambda(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = \lambda\mathbf{v}_1+\lambda\mathbf{v}_2 \ \ \forall\, \lambda,\, \mu \in \in \mathbb{K};\ \mathbf{v},\, \mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2 \in V$.

Элементы линейного пространства называются *векторами*, мы их обозначаем жирными буквами.

Определение 0.20. *Алгеброй над полем* $\mathbb{K}$ называется множество A, снабженное тремя бинарными операциями (двумя внутренними и одной внешней):

$$A \times A \to A, \quad (a_1,\, a_2) \mapsto a_1 + a_2, \quad A \times A \to A, \quad (a_1,\, a_2) \mapsto a_1 a_2,$$

$$\mathbb{K} \times A \to A, \quad (\lambda,\, a) \mapsto \lambda a,$$

называемыми соответственно сложением, умножением и умножением на скаляры (=элементы поля $\mathbb{K}$), обладающими следующими свойствами:

- относительно операций сложения и умножения A является кольцом;
- относительно сложения и умножения на скаляры A является векторным пространством;
- $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab) \ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ a,\, b \in A$.

Алгебра называется ассоциативной (коммутативной, с единицей), если соответствующее кольцо ассоциативно (коммутативно, с единицей).
Основным для нас примером ассоциативной алгебры над полем $\mathbb{K}$ будет алгебра линейных операторов на векторном пространстве V над полем $\mathbb{K}$, обозначаемая $\mathcal{L}(V)$. В ней операции сложения, умножения и умножения на скаляры задаются соответственно сложением линейных операторов, их композицией и умножением операторов на скаляры. Выбор базиса в V определяет некоторый изоморфизм $\mathcal{L}(V)$ с алгеброй матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, где $n = \dim V$ (изоморфизм — биекция, сохраняющая все операции). Алгебра $\mathcal{L}(V)$ обладает единицей (тождественным оператором) и некоммутативна при $n > 1$.
Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ является алгеброй над полем $\mathbb{R}$. Более того, если $\mathbb{F}$ — подполе поля $\mathbb{K}$, то $\mathbb{K}$ является $\mathbb{F}$-алгеброй. Ниже мы также встретимся с алгеброй кватернионов $\mathbb{H}$ — ассоциативной некоммутативной алгеброй с единицей над полем $\mathbb{R}$, в которой всякий ненулевой элемент обратим. Таким образом, $\mathbb{H}$ является некоммутативным аналогом поля; такие алгебраические структуры называются *телами*. Можно распространить понятие векторного пространства на случай, когда вместо основного поля рассматривается тело, только в случае тел нужно различать понятия левого и правого векторного пространства.

Примером неассоциативной алгебры является 3-мерное евклидово ориентированное пространство с векторным произведением в качестве умножения. Это пример алгебры из важнейшего класса неассоциативных алгебр — алгебр Ли. О других примерах алгебр очень похожих на "обычные" числа – кватернионах и октавах мы поговорим в разделах 4.2. и 4.4..

0.6. Нормированные пространства и сходимости

Важную роль в математике играют так называемые нормированные векторные пространства.

Определение 0.21. *Нормой* в векторном пространстве V над вещественным или комплексным полем называется функция $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$, обладающая свойствами:

1) $\|\mathbf{v}\| > 0 \ \ \forall\, \mathbf{v} \in V, \ \ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$;
2) $\|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\| \ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\, \mathbf{v} \in V$;
3) $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \ \ \forall\, \mathbf{v},\, \mathbf{w} \in V$ ("неравенство треугольника").

Пара $(V, \|\cdot\|)$, состоящая из векторного пространства и заданной на нем нормы, называется *нормированным пространством.*

Например, длина вектора $|\mathbf{v}|$ евклидова пространства V является нормой. Важный пример нормы для линейных операторов мы приведем в теореме 3.47. Пока же ограничимся несколькими стандартными примерами.

Определение 0.22. Пространством ℓ_p будем называть пространство последовательностей $x = \{x_i\}$ таких, что $\sum\limits_{i=0}^{\infty} |x_i|^p < \infty$. Норма в пространстве ℓ_p вводится следующим образом

$$\|x\|^p := \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p.$$

Важный пример норм это, конечно, случай функциональных пространств.

Определение 0.23. Пространство $L_p(\mathbb{R}^n)$ состоит из таких вещественнозначных функций $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f^p(x)| dx < \infty$. Норма определяется следующим образом

$$\|f(x)\|^p := \int_{-\infty}^{+\infty} |f^p(x)| dx.$$

Отметим, что норма индуцирует метрику, ассоциированную с ней по следующей формуле:

$$\rho(x, y) := \|x - y\|. \tag{3}$$

Сразу отметим, что обратное не имеет места. А именно, если в векторном пространстве есть метрика (даже инвариантная относительно движений пространства), то, вообще говоря, может не существовать такой нормы, что справедлива формула (3).

Определение 0.24. Последовательность $\{\mathbf{v}_n\}$ векторов нормированного пространства $(V, \|\cdot\|)$ называется *сходящейся* к вектору $\mathbf{v} \in V$, если

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В частности, если $\{\mathbf{u}_n\}$ — последовательность векторов пространства $(V, \|\cdot\|)$, то $\mathbf{v}$ есть сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{u}_k$, если последовательность частичных сумм $\mathbf{v}_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k$ сходится к $\mathbf{v}$.

На множестве норм можно задать отношение эквивалентности.

Определение 0.25. Две нормы $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ в одном векторном пространстве V будем называть эквивалентными, если существуют такие положительные константны C_1, C_2, что выполняется соотношение

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1, \quad \forall x \in V. \tag{4}$$

В конечномерных пространствах оказывается, что все нормы эквивалентны. А вот в бесконечномерных – уже появляются многочисленные интересные примеры неэквивалентных норм. Об этом мы поговорим в разделе 3.6..

1 Линейные пространства

1.1. Линейные подпространства, прямые суммы

Задача 1.1. Пусть U, V, W — подпространства некоторого конечномерного векторного пространства.
a) Справедлива ли формула

$$\dim(U+V+W) = \dim U + \dim V + \dim W -$$
$$- \dim(U \cap V) - \dim(V \cap W) - \dim(W \cap U) + \dim(U \cap V \cap W)? \qquad (5)$$

b) Предположим, что выполнены условия

$$U \cap V = V \cap W = W \cap U = \{0\}. \qquad (6)$$

Верно ли тогда, что сумма $U+V+W$ подпространств U, V, W прямая? Если нет, то как нужно изменить условия (6), чтобы это было верно?

Решение. a) Формула (5), вообще говоря, неверна. Для построения соответствующего примера возьмем в качестве U, V, W три попарно различных одномерных подпространства в $\mathbb{R}^2$. Тогда левая часть (5) равна 2, а правая — 3. Однако, например, при условии $(U+V)\cap W = U\cap W + V\cap W$ формула (5) будет верна:

$$\dim((U+V)+W) = \dim(U+V) + \dim W - \dim((U+V)\cap W) =$$
$$= \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) + \dim W -$$
$$-\dim(U \cap W) - \dim(V \cap W) + \dim(U \cap V \cap W).$$

b) Формула, вообще говоря, неверна. Подходит тот же пример, что и в пункте a). Условия (6), чтобы утверждение пункта b) было верно, можно изменить, потребовав выполнения любой пары из более сильных условий:

$$U \cap (V+W) = \{0\}, \;\; V \cap (W+U) = \{0\}, \;\; W \cap (U+V) = \{0\}.$$

Действительно, достаточность следует из того, что если существует нетривиальное представление нулевого вектора $\mathbf{u}+\mathbf{v}+ +\mathbf{w} = \mathbf{0}$ и если, например, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, то $\mathbf{u} = -\mathbf{v} - \mathbf{w}$ и, значит, $U \cap (V+W) \neq \{0\}$. Чтобы доказать необходимость, предположим, например, что $U \cap (V+W) \neq \{0\}$, и тогда получим нетривиальное представление нулевого вектора, а значит, сумма не прямая. ■

Комментарий. Пункт a) призван избавить от заблуждения, возникающего из-за того, что (верная) формула

$$\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$$

по виду похожа на формулу включений и исключений.

Определение 1.2. Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{K}$, $U \subset V$ — его подпространство. Подпространство $W \subset V$ называется *прямым дополнением* к U в V, если $V = U \oplus W$.

Если задано разложение $V = U \oplus W$ пространства V в прямую сумму, то для любого вектора $\mathbf{v} \in V$ существует единственное представление в виде суммы

$$\mathbf{v} = \mathrm{Pr}_U^W(\mathbf{v}) + \mathrm{Pr}_W^U(\mathbf{v}), \quad \text{где} \quad \mathrm{Pr}_U^W(\mathbf{v}) \in U, \ \ \mathrm{Pr}_W^U(\mathbf{v}) \in W.$$

В этом случае $\mathrm{Pr}_U^W(\mathbf{v})$ называется *проекцией* $\mathbf{v}$ *на подпространство* U *параллельно подпространству* W, а $\mathrm{Pr}_W^U(\mathbf{v})$ — *проекцией* $\mathbf{v}$ *на подпространство* W *параллельно* U.

Задача 1.3. Пусть U, V, W — подпространства в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, состоящие соответственно из кососимметрических, симметрических и верхнетреугольных матриц. Доказать, что V и W — различные прямые дополнения к U в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, и найти проекции матричных единиц E_{ij} $(1 \le i, j \le n)$ на U параллельно V и на U параллельно W.

Решение. 1) Докажем, что $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = U \oplus V$. Во-первых, так как любую матрицу $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ можно представить в виде суммы кососимметрической $\frac{A-A^T}{2}$ и симметрической $\frac{A+A^T}{2}$, то $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = U + V$. Единственность такого представления можно вывести непосредственно: пусть $A = B + C$, где $B^T = -B$, $C^T = = C$. Тогда $A^T = -B + C \ \Rightarrow \ A + A^T = 2C$, $A - A^T = 2B$. Иначе можно проверить, что $U \cap V = \{0\}$ (матрица, одновременно симметричная и кососимметричная, нулевая)[7].

2) Докажем, что $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = U \oplus W$. Для произвольной матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ через A_1 обозначим матрицу того же размера, элементы которой ниже главной диагонали совпадают с соответствующими элементами A, а на главной диагонали и выше стоят нули. Тогда $B' := A_1 - A_1^T$ есть кососимметрическая матрица, элементы которой ниже главной диагонали такие же, как и у A. Тогда $C' := A - B'$ — верхнетреугольная матрица. Кроме того, легко видеть, что $U \cap W = \{0\}$ (матрица, одновременно являющаяся кососимметрической и верхнетреугольной, нулевая). Значит, представление $A = B' + C'$ указанного вида единственно.

3) Найдем проекции: $\mathrm{Pr}_U^V(E_{ij}) = \frac{E_{ij} - E_{ji}}{2}$, в то время как $\mathrm{Pr}_U^W(E_{ij}) = 0$ при $i \le j$ и $\mathrm{Pr}_U^W(E_{ij}) = E_{ij} - E_{ji}$ при $i > j$. ∎

Комментарии. 1) Данная задача призвана избавить от двух заблуждений. Первое заключается в том, что прямое дополнение (которое часто путается с ортогональным дополнением) единственно. Второе — в том, что проекция на подпространство зависит только от самого́ подпространства, но не от выбора прямого дополнения (путаница с ортогональным проектированием). См. также задачи 3.5, 3.6 ниже.

2) Пусть $\varphi \colon V \to V$ — линейный оператор, такой, что $\varphi^2 = \mathrm{id}_V$. Тогда существуют φ-инвариантные подпространства $U \subset \subset V$, $W \subset V$ такие,

[7]Заметим, что можно также непосредственно посчитать размерности: $\dim U = \frac{n(n-1)}{2}$, $\dim V = \frac{n(n+1)}{2}$; тогда из тривиальности пересечения следует представление $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ в виде прямой суммы подпространств U и V.

что $V = U \oplus W$ и $\varphi|_U = \mathrm{id}_U$, $\varphi|_W = -\mathrm{id}_W$. Действительно,

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} + \varphi(\mathbf{v})}{2} + \frac{\mathbf{v} - \varphi(\mathbf{v})}{2} \quad \forall\, \mathbf{v} \in V, \tag{7}$$

причем первое слагаемое в правой части принадлежит U, а второе — W. Из определения подпространств U и W очевидно, что $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Заметим, что U (соотв. W) — собственное подпространство оператора φ, отвечающее собственному значению 1 (соотв. -1). Других собственных значений у φ быть не может: из $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda\,\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ и соотношения $\varphi^2 = \mathrm{id}_V$ получаем $\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$, откуда $\lambda^2 = 1$.

Таким образом, оператор φ на вектор $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, где $\mathbf{u} \in \in U$, $\mathbf{w} \in W$, действует следующим образом: $\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} - \mathbf{w}$. Такое преобразование естественно назвать *отражением относительно U параллельно W*.

Примером такого оператора φ является оператор транспонирования $\varphi(A) := A^T$ на пространстве матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, поскольку $(A^T)^T = A\; \forall\, A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Тогда формула (7) снова дает нам представление квадратной матрицы в виде суммы симметричной и кососимметричной, полученное в пункте 1) решения предыдущей задачи.

Другим примером такого оператора φ является оператор четности $\varphi(f)(x) = f(-x)$, действующий на пространстве всех функций на прямой $\mathbb{R}$ (или в каком-либо его инвариантном подпространстве — непрерывных, дифференцируемых и т.д. функций). Тогда формула (7) дает представление произвольной функции f на $\mathbb{R}$ в виде суммы четной и нечетной:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Пусть $V = U \oplus W$. Легко проверить, что проекция $\mathrm{Pr}_U^W(\mathbf{v})$ вектора $\mathbf{v}$ на подпространство U параллельно подпространству W линейно зависит от $\mathbf{v}$, то есть для любых $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2 \in V$ и скаляра λ

$$\mathrm{Pr}_U^W(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathrm{Pr}_U^W(\mathbf{v}_1) + \mathrm{Pr}_U^W(\mathbf{v}_2), \quad \mathrm{Pr}_U^W(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\mathrm{Pr}_U^W(\mathbf{v}).$$

Определение 1.4. *Оператором проектирования на подпространство U параллельно подпространству W* называется линейный оператор $\varphi\colon V \to V$, определенный равенством

$$\varphi(\mathbf{v}) = \mathrm{Pr}_U^W(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Он обозначается Pr_U^W.

Определение 1.5. Линейный оператор $P\colon V \to V$, удовлетворяющий соотношению $P^2 = P$, называется *проектором*.

Так, легко проверить, что оператор Pr_U^W является проектором. Оказывается, что существует естественная биекция между множеством проекторов и множеством упорядоченных пар (U, W) подпространств пространства V таких, что $V = U \oplus W$.

Задача 1.6. Доказать, что отображение

$$P \mapsto (\operatorname{im} P,\, \ker P) \tag{8}$$

является биекцией между множеством проекторов $P\colon V \to V$ и множеством упорядоченных пар $(U,\, W)$ подпространств пространства V таких, что $V = U \oplus W$. Если P отвечает паре $(U,\, W)$, то какой проектор будет отвечать паре $(W,\, U)$?

Решение. Во-первых, покажем, что если $P\colon V \to V$ — проектор, то $V = \ker P \oplus \operatorname{im} P$. Действительно, $V = \ker P + \operatorname{im} P$, так как

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} - P\mathbf{v}) + P\mathbf{v}. \tag{9}$$

С другой стороны, из $\mathbf{w} = P\mathbf{v}$ и $P\mathbf{w} = \mathbf{0}$ следует $\mathbf{0} = P^2\mathbf{v} = P\mathbf{v} = = \mathbf{w}$, так что $\ker P \cap \operatorname{im} P = \{\mathbf{0}\}$, и, значит, $V = \ker P \oplus \operatorname{im} P$.

Во-вторых, покажем, что P совпадает с оператором Pr_U^W проектирования на подпространство $U := \operatorname{im} P \subset V$ параллельно подпространству $W := \ker P \subset V$. Действительно, из (9) имеем

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} - P\mathbf{v}) + P\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in U,\, \mathbf{w} \in W,$$

тогда из единственности представления вектора в виде суммы слагаемых из W и из U получаем $P\mathbf{v} = \mathbf{u}$, $\mathbf{v} - P\mathbf{v} = \mathbf{w}$, и, значит, наш оператор P действует на произвольный вектор $\mathbf{v} \in \in V$, сопоставляя ему его проекцию на U параллельно W[8], то есть $P = \operatorname{Pr}_U^W$.

В-третьих, заметим, что если $\operatorname{Pr}_U^W\colon V \to V$ — оператор проектирования на подпространство U параллельно W для некоторых подпространств $U \subset V$, $W \subset V$ таких, что $U \oplus W = V$, то $U = \operatorname{im} \operatorname{Pr}_U^W$, $W = \ker \operatorname{Pr}_U^W$.

Используя приведенные выше утверждения, легко получаем, что отображения $P \mapsto (\operatorname{im} P,\, \ker P)$ и $(U,\, W) \mapsto \operatorname{Pr}_U^W$ определяют взаимно обратные биекции.

Теперь ясно, что если проектор P отвечает паре $(U,\, W)$, то паре $(W,\, U)$ отвечает проектор $\mathrm{id}_V - P$. Проверим, что это действительно проектор. Имеем

$$(\mathrm{id}_V - P)^2 = \mathrm{id}_V^2 - 2P + P^2 = \mathrm{id}_V - P.$$

Значит, действительно, $(\mathrm{id}_V - P)^2 = \mathrm{id}_V - P$. ■

Комментарий. Более того, для заданного прямого разложения $V = \oplus_{i=1}^n V_i$ определим n проекторов P_i, $1 \le i \le n$ по формуле $P_i(\sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j) = \mathbf{v}_i$. Тогда $\sum_{i=1}^n P_i = \mathrm{Id}_V$, $P_iP_j = 0$ при $i \ne j$. Обратно, имея такое семейство проекторов, определим подпространства $V_i := \operatorname{im} P_i$. Тогда $V = \oplus_{i=1}^n V_i$. Например, разложению $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = U \oplus V$ в прямую сумму подпространств симметрических V и кососимметрических U матриц (см. задачу 1.3) отвечают проекторы $\operatorname{Pr}_V^U(A) = \frac{A+A^T}{2}$, $\operatorname{Pr}_U^V(A) = \frac{A-A^T}{2}$. Подробности см. в [35], гл. 1, §5.

[8] Другое рассуждение: если $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$, $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{u} \in U$, то $\exists \mathbf{v}' \in V$ такой, что $\mathbf{u} = P\mathbf{v}'$, и тогда $P\mathbf{v} = P\mathbf{w} + P\mathbf{u} = P\mathbf{u} = P^2\mathbf{v}' = P\mathbf{v}' = \mathbf{u}$.

1.2. Линейные пространства над конечными полями

Помимо бесконечных полей (таких, как $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) существуют поля, содержащие конечное число элементов — *конечные поля.* Простейшим примером такого поля является $\mathbb{Z}_2$, *поле классов вычетов по модулю* 2, состоящее из двух элементов, которые мы обозначим 0 и 1, с таблицами сложения и умножения:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Заметим в связи с этим, что поле из q элементов существует тогда и только тогда, когда $q = p^m$, где p — простое (называемое *характеристикой* поля), а m — натуральное число, большее 0 (заметим, что конечное поле из p^m элементов единственно с точностью до изоморфизма). Идея доказательства заключается в следующем[9]. Любое конечное поле содержит подполе, изоморфное полю $\mathbb{Z}_p$ классов вычетов по модулю p. Но любое поле $\mathbb{F}$, содержащее подполе $\mathbb{K}$, является векторным пространством над $\mathbb{K}$, ср. задачу 1.11. Далее требуемое утверждение вытекает из пункта a) следующей задачи.

Задача 1.7. Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, состоящим из q элементов. Найти:

a) число векторов в пространстве V;

b) число решений уравнения $AX = 0$, где A — прямоугольная матрица ранга r, X — столбец неизвестных высоты n;

c) число базисов пространства V;

d) число невырожденных матриц порядка n над полем $\mathbb{F}$;

e) число k-мерных подпространств пространства V.

Решение. a) Выбор произвольного базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в пространстве V задает изоморфизм $V \cong \mathbb{F}^n$ между V и n-мерным арифметическим пространством над полем $\mathbb{F}$, то есть множеством всех упорядоченных наборов из n элементов поля $\mathbb{F}$. Этот изоморфизм сопоставляет вектору $\mathbf{v} \in V$ набор его координат в выбранном базисе[10]. Стало быть, мощность множества V есть q^n.

b) Из теории систем линейных уравнений известно, что множество решений однородной системы является векторным подпространством в $\mathbb{F}^n$ размерности $n - r$, поэтому, согласно пункту a), число решений есть q^{n-r}.

[9] Подробнее см., например, [15], гл. 1, § 5.

[10] Заметим, что это верно и при $n = \dim V = 0$: в этом случае базис пуст (мощность произвольного базиса равна размерности, в нульмерном случае базис — пустое множество, не содержащее элементов), линейная комбинация нулевого числа слагаемых есть 0 (объяснение см., например, в статье “Empty sum” в Википедии).

c) Напомним два факта о системах линейно независимых векторов. Любой упорядоченный набор линейно независимых векторов может быть продолжен до базиса (вообще говоря, многими способами). Подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.

Таким образом, в качестве первого базисного вектора можно взять произвольный ненулевой вектор пространства V. Таких векторов $q^n - 1$ штук. Пусть первый вектор $\mathbf{v}_1$ выбран, тогда в качестве второго вектора $\mathbf{v}_2$ базиса можно взять произвольный вектор такой, что система $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ линейно независима, т.е. $\mathbf{v}_2$ — произвольный вектор, неколлинеарный $\mathbf{v}_1$. Векторы, коллинеарные $\mathbf{v}_1$, образуют одномерное подпространство в V, то есть вектор $\mathbf{v}_2$ может быть выбран $q^n - q$ способами.

Предположим, что уже выбрана линейно независимая система $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, тогда в качестве $\mathbf{v}_{k+1}$ можно взять произвольный вектор, не принадлежащий линейной оболочке выбранных k векторов. Последняя имеет размерность k, поэтому число способов, которыми может быть выбран $k+1$-й базисный вектор, есть $q^n - q^k$. В результате получаем, что число базисов есть

$$[B_n]_q := (q^n - 1)(q^n - q)\ldots(q^n - q^{n-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^{n}(q^k - 1).$$

d) Зафиксируем произвольный базис $\{\mathbf{e}\} := \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в V. Тогда мы определяем отображение из множества базисов пространства V в множество обратимых матриц порядка n с элементами из $\mathbb{F}$, ставя в соответствие произвольному базису $\{\mathbf{v}\} := := \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ матрицу перехода $C_{\{\mathbf{e}\}\to\{\mathbf{v}\}}$ от выбранного базиса к базису $\{\mathbf{v}\}$ (например, самому́ базису $\{\mathbf{e}\}$ отвечает единичная матрица). Наоборот, если C — обратимая матрица порядка n с элементами из $\mathbb{F}$, то набор $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ векторов из V, задаваемый равенством $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)C$, является базисом в V. Нетрудно проверить, что построенные отображения — взаимно обратные биекции между указанными множествами.

e) Любой упорядоченный набор $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ из k линейно независимых векторов в V задает k-мерное подпространство $W \subset V$, в котором он является базисом; из пункта c) следует, что таких наборов

$$[A_n^k]_q := (q^n - 1)(q^n - q)\ldots(q^n - q^{k-1}) = q^{\frac{k(k-1)}{2}} \prod_{l=n-k+1}^{n}(q^l - 1)$$

штук. Таким образом, мы получаем отображение из множества таких наборов в множество k-мерных подпространств в V, которое, очевидно, сюръективно. Различных наборов $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$, задающих одно и то же подпространство $W \subset V$, столько же, сколько различных базисов в k-мерном пространстве над полем $\mathbb{F}$, то есть $[B_k]_q$ штук. Пусть число k-мерных подпространств в V есть $[C_n^k]_q$, тогда

$$[C_n^k]_q := \frac{[A_n^k]_q}{[B_k]_q} = \frac{\prod_{l=1}^{n}(q^l - 1)}{\prod_{m=1}^{k}(q^m - 1)\prod_{r=1}^{n-k}(q^r - 1)}. \tag{10}$$

Число $[C_n^k]_q$ называется *q-биномиальным коэффициентом.* ■

Комментарий. Дадим геометрическое истолкование использованного в пункте b) результата из теории систем линейных уравнений. Заметим, что множество решений данной системы линейных однородных уравнений можно интерпретировать как ядро линейного отображения $\varphi\colon V \to W$, где $\dim V = n$, $\dim W = m$, где m равно числу уравнений системы, имеющего матрицу A относительно выбранных базисов в V и W. Выбранные базисы позволяют отождествить V и W с пространствами $\mathbb{F}^n$ и $\mathbb{F}^m$ соответственно. Тогда ранг r матрицы A совпадает с рангом ее системы столбцов, что равно $\dim \operatorname{im} \varphi$ (и, значит, ранг матрицы линейного отображения не зависит от выбора базисов). Тогда из известной формулы $\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi = \dim V$ получаем $\dim \ker \varphi = n - r$.

Наша интуиция о векторных пространствах основана на наглядных образах вещественной прямой, плоскости или трехмерного пространства, но общие теоремы о векторных пространствах можно применять и в общей ситуации, когда основное поле сильно непохоже на вещественное (причем для решения задачи никаких свойств конечного поля, кроме его порядка, знать не нужно). С другой стороны, она показывает наличие связи между линейной алгеброй над конечными полями и комбинаторикой.

В пунктах c) и d) нами фактически посчитан порядок группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, оказавшийся равным $[B_n]_q$. Для знакомых с понятиями теории групп отметим, что этот результат дает другой способ получения формулы из пункта e), используя формулу длины орбиты и транзитивность действия (терминологию действий групп см., например, в [34], гл. 1, § 3) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ на множестве k-мерных подпространств в $\mathbb{F}^n$.

В качестве подсказки, рекомендуем обратим внимание на следующее обстоятельство. Стабилизатор подпространства, являющегося линейной оболочкой k столбцов

$$(1, 0, \ldots, 0)^T,\ (0, 1, 0, \ldots, 0)^T,\ \ldots,\ (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T,$$

образован блочными матрицами вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где A — произвольная обратимая матрица порядка k, а последние $n-k$ столбцов дополняют первые k до базиса в $\mathbb{F}^n$. Иначе говоря, B — произвольная $k \times (n-k)$-матрица, а C — обратимая матрица порядка $n-k$.

Дадим объяснение термину *q-биномиальный коэффициент.* Имеет место следующий q-аналог биномиальной формулы: пусть x и y — переменные, подчиненные соотношению $yx = qxy$. Тогда для всех $n > 0$ имеем

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} [C_n^k]_q \, x^k y^{n-k}.$$

Эта формула показывает, что для q-биномиальных коэффициентов верны q-аналоги формул для обычных биномиальных коэффициентов, которые при этом имеют интерпретацию в терминах геометрии подпространств векторного пространства над конечным полем (см. задачу ниже). Доказательство этой и других q-биномиальных формул можно посмотреть в книге [27], гл.

4, см. также популярную статью [23].
Перепишем формулу (10) в виде

$$[C_n^k]_q = \frac{\prod_{l=1}^{n} \frac{q^l-1}{q-1}}{\prod_{m=1}^{k} \frac{q^m-1}{q-1} \prod_{r=1}^{n-k} \frac{q^r-1}{q-1}}.$$

Рассмотрим формальный предел $[C_n^k]_q$ при $q \to 1$. Тогда оказывается, что

$$\lim_{q\to 1}[C_n^k]_q = C_n^k,$$

где C_n^k — "обычный" биномиальный коэффициент.
Интересной идеей в связи с вышесказанным является нахождение "правильного" определения "поля из одного элемента", геометрия над которым отвечала бы обычной комбинаторике (тогда аналогом линейных групп $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ являлись бы симметрические группы S_n), позволяющего для $q = 1$ получать результаты, аналогичные случаю $q > 1$.

Обычные биномиальные коэффициенты удовлетворяют хорошо известным соотношениям: $C_n^k = C_n^{n-k}$ и $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ (тождество Паскаля). В следующей задаче устанавливаются аналогичные соотношения для $[C_n^k]_q$.

Задача 1.8. Используя интерпретацию числа $[C_n^k]_q$ как количества k-мерных подпространств в n-мерном пространстве V над q-элементным полем $\mathbb{F}$, доказать тождества

1) $[C_n^k]_q = [C_n^{n-k}]_q$,
2) $[C_n^k]_q = [C_{n-1}^{k-1}]_q + q^k[C_{n-1}^k]_q$ ("q-тождество Паскаля").

Решение. 1) Пусть $U \subset V$ — векторные пространства над полем $\mathbb{F}$, $\dim U = k$, $\dim V = n$. Рассмотрим *аннулятор* $Ann(U)$ *подпространства* $U \subset V$ — по определению, это подпространство в V^*, определяемое следующим образом:

$$Ann(U) := \{f \in V^* \mid f(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \ \ \forall \mathbf{u} \in U\}.$$

Легко проверить, что $\dim (Ann(U)) = n - k$. Покажем, что сопоставление

$$U \mapsto Ann(U) \tag{11}$$

задает биекцию между k-мерными подпространствами в V и $(n-k)$-мерными подпространствами в V^*. Действительно, отождествляя V с дважды двойственным $(V^*)^*$ с помощью канонического изоморфизма, мы можем отождествить $Ann(Ann(U))$ с подпространством в V, которое, как легко видеть, совпадает с U, то есть $Ann(Ann(U)) = U$. Таким образом, (11) инъективно. Для доказательства сюръективности (11) возьмем произвольное $(n-k)$-мерное подпространство $W \subset V^*$, положим $U := Ann(W) \subset \subset V$ (здесь мы снова используем канонический изоморфизм V с $(V^*)^*$). Тогда U — k-мерное подпространство в V такое, что $Ann(U) = W$.
Таким образом, существует биекция между k-мерными подпространствами в V и $(n-k)$-мерными подпространствами в V^* (при этом ясно, что $\dim V^* = \dim V = n$). Значит, эти конечные множества подпространств имеют одинаковую мощность, то есть $[C_n^k]_q = [C_n^{n-k}]_q$.

2) Рассмотрим сюръективное линейное отображение $\pi\colon V \to \to V'$, где V' — еще одно векторное пространство над $\mathbb{F}$, $\dim V' = = n - 1$. Пусть $U \subset V$ — некоторое подпространство, $\dim U = k$. Тогда возможно два случая: a) $\dim \pi(U) = k - 1$ и b) $\dim \pi(U) = = k$ (второй случай имеет место тогда и только тогда, когда $U \cap \cap \ker \pi = \{\mathbf{0}\}$). k-мерные подпространства $U \subset V$, для которых реализуется случай a), назовем "подпространствами первого типа", а в случае b) — "подпространствами второго типа" (относительно π). Пусть $U' \subset V'$ — произвольное $(k-1)$-мерное подпространство; тогда $U := \pi^{-1}(U') \subset V$ — единственное k-мерное подпространство в V такое, что $\pi(U) = U'$. Тем самым мы установили биекцию между подпространствами первого типа и $(k- -1)$-мерными подпространствами пространства V'. Значит, число подпространств первого типа есть $[C_{n-1}^{k-1}]_q$.
Пусть теперь $W' \subset V'$ — некоторое k-мерное подпространство в V'. Пусть $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_k\}$ — некоторый базис в W'. Так как отображение сюръективно, то существует набор $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ векторов из V такой, что $\pi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i,\ \ 1 \le i \le k$. Ясно, что набор $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ линейно независим, и поэтому является базисом в некотором k-мерном подпространстве $W \subset V$ таком, что $\pi(W) = W'$. Так как ограничение $\pi|_W$ отображения π на подпространство $W \subset V$ определяет биекцию указанного подпространства с подпространством $W' \subset V'$, то базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ в W такой, что $\pi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i,\ \ 1 \le i \le k$, единственный. Положим $\ker \pi = \langle \mathbf{v} \rangle$. В таком случае набор $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ векторов из V с соотношениями $\pi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i,\ \ 1 \le i \le k$ определяется с точностью до прибавления к каждому из векторов $\mathbf{e}_i$ произвольного элемента из ядра: набор $\{\mathbf{e}_1 + \lambda_1 \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{e}_k + \lambda_k \mathbf{v}\}$ тоже подходит, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — произвольные элементы поля $\mathbb{F}$. Каждый из этих наборов является базисом в k-мерном подпространстве $\widetilde{W} \subset V$ таком, что $\pi(\widetilde{W}) = W'$, причем разные наборы отвечают разным подпространствам. Поэтому в каждое k-мерное подпространство $W' \subset V'$ отображается (под действием π) в точности q^k различных подпространств второго типа. Таким образом, подпространств второго типа $q^k [C_{n-1}^k]_q$ штук.
Каждое k-мерное подпространство в V принадлежит либо к первому, либо ко второму типу, и, значит, их всего $[C_{n-1}^{k-1}]_q + + q^k [C_{n-1}^k]_q$ штук. ■

Используя q-тождество Паскаля из предыдущей задачи, индукцией по n легко доказать, что $[C_n^k]_q$ является многочленом от q с целыми коэффициентами, значение которого в точке $q = 1$ равно "обычному" биномиальному коэффициенту C_n^k. Для этого многочлена есть интересная интерпретация в терминах клеток Шуберта конечного многообразия Грассмана, о которой можно прочитать в [19], с. 138—140.

Напомним, что *симметрической разностью* двух множеств X, Y называется множество

$$X \triangle Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

Задача 1.9. a) В непустой системе $\mathcal{M}$ подмножеств n-элементного множества S вместе с любыми двумя подмножествами A, $B \in \mathcal{M}$ содержится их симметрическая разность $A \triangle B$. Докажите, что количество элементов в $\mathcal{M}$ есть степень двойки.

b) В предыдущем пункте найдите количество таких множеств $\mathcal{M}$ мощности 2^k.

Решение. а) Пусть $A \subset S$ — произвольное подмножество в S. Определим функцию $\chi_A\colon S \to \mathbb{Z}_2$, называемую *характеристической функцией подмножества* A, следующим образом:

$$\chi_A(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s \in A; \\ 0, & \text{если } s \notin A. \end{cases}$$

Заметим, что каждая функция $\psi\colon S \to \mathbb{Z}_2$ является характеристической функцией некоторого подмножества $B_\psi \subset S$, причем легко проверить, что $A \mapsto \chi_A, \ \ \psi \mapsto B_\psi$ — взаимно обратные биекции между функциями $\psi\colon S \to \mathbb{Z}_2$ и подмножествами $A \subset S$. При этом легко проверить, что

$$\chi_{A \triangle B} = \chi_A + \chi_B \tag{12}$$

(учесть, что $1 + 1 = 0$ в $\mathbb{Z}_2$!).
Положим

$$X(\mathcal{M}) := \{\chi_A \mid A \in \mathcal{M}\}.$$

Тогда формула (12) показывает, что отображение $A \mapsto \chi_A$ определяет биекцию множества $\mathcal{M}$ с множеством $X(\mathcal{M})$, отождествляющую операцию симметрической разности на $\mathcal{M}$ с операцией сложения функций из $X(\mathcal{M})$. Но $X(\mathcal{M})$ является абелевой группой относительно операции сложения функций, таким образом, данная биекция — изоморфизм указанных групп.
Чуть более подпробно: операция симметрической разности ассоциативна, то есть

$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C \quad \text{для любых } \ A,\, B,\, C \subset S.$$

Действительно, это прямо вытекает из ассоциативности сложения характеристических функций, которая, в свою очередь, следует из ассоциативности сложения в $\mathbb{Z}_2$. Так как нулевая функция — нейтральный элемент относительно сложения, то

$$A \triangle \varnothing = A = \varnothing \triangle A \quad \forall\, A \subset S,$$

то есть пустое множество $\varnothing \subset S$ играет роль нейтрального элемента относительно операции $\triangle$ на подмножествах. Кроме того, в силу

$$A \triangle A = \varnothing \quad \forall\, A \subset S$$

(эквивалентно, $\chi_A + \chi_A = \chi_\varnothing$), элемент $A \subset S$ сам себе обратен, и если система подмножеств $\mathcal{M}$ непуста, то $\varnothing \in \mathcal{M}$. Из сказанного следует, что $\mathcal{M}$ с операцией $\triangle$ является группой, а так как

$$A \triangle B = B \triangle A \quad \forall\, A,\, B \subset S,$$

то, более того, *абелевой* группой[11].
Заметим теперь, что $X(\mathcal{M})$ является векторным пространством над полем $\mathbb{Z}_2$:

$$0 \cdot \chi_A = \chi_\varnothing, \ \ 1 \cdot \chi_A = \chi_A \quad \forall\, A \in \mathcal{M}.$$

Аксиомы векторного пространства можно проверить и непосредственно: на-

[11] Вообще, легко видеть, что группа, все неединичные элементы которой имеют порядок 2, абелева.

пример, из $0 \cdot \chi_A = \chi_\varnothing$, $\chi_A + \chi_A = \chi_\varnothing$ вытекает $(1+1)\cdot\chi_A = \chi_A + \chi_A \quad \forall A \in \mathcal{M}$.

Значит, и $\mathcal{M}$ является векторным пространством над $\mathbb{Z}_2$, если определить умножение на элементы поля $\mathbb{Z}_2$ как $0 \cdot A = \varnothing$, $1 \cdot A = = A$. (Заметим, что до этого момента мы не использовали конечность множества S.) Так как число элементов в $\mathcal{M}$ конечно, то $\mathcal{M}$ является конечномерным векторным пространством над $\mathbb{Z}_2$, а значит, согласно пункту a) предыдущей задачи, число элементов в $\mathcal{M}$ равно 2^k, где $k = \dim \mathcal{M}$. Например, если $\mathcal{M} = 2^S$ (множество всех подмножеств в S), то $\dim \mathcal{M} = n$, и в качестве базиса в $\mathcal{M}$ можно взять одноэлементные подмножества в S.

b) Согласно пункту e) задачи 1.7, это число есть $[C_n^k]_2$. ■

Комментарии. 1) Таким образом, операция симметрической разности множеств отвечает сложению их характеристических функций (со значениями в $\mathbb{Z}_2$), см. (12). Легко видеть, что операции умножения характеристических функций отвечает пересечение множеств: $\chi_{A\cap B} = \chi_A\,\chi_B$. Пусть теперь непустое $\mathcal{M} \subset 2^S$ замкнуто не только относительно операции $\triangle$, но и относительно пересечения.

Во-первых, заметим, что из дистрибутивного закона в $\mathbb{Z}_2$ следуют равенства

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C), \quad (A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C),$$

которые показывают, что $\mathcal{M}$ с операциями симметрической разности и пересечения является коммутативным (в силу $A \cap B = = B \cap A$) кольцом.

Во-вторых, покажем, что $A, B \in \mathcal{M} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \in \mathcal{M}, \quad A \backslash B \in \in \mathcal{M}$. Действительно,

$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B + \chi_A\chi_B = \chi_{A\triangle B} + \chi_{A\cap B} = \chi_{A\triangle B\triangle(A\cap B)},$$

$$\chi_{A\backslash B} = \chi_A + \chi_{A\cap B} = \chi_{A\triangle(A\cap B)}.$$

Отсюда легко видеть, что в семействе подмножеств $\mathcal{M}$ есть единственная минимальная система из некоторого числа k ($0 \le \le k \le n$) непустых непересекающихся подмножеств P_i, $1 \le \le i \le k$, таких, что любое подмножество из $\mathcal{M}$ (единственным) образом представляется в виде объединения каких-то из множеств P_i. В частности, $\mathcal{M}$ есть кольцо с единицей (ее роль играет $\cup_{i=1}^k P_i \in \mathcal{M}$). Ясно, что $\mathcal{M} \cong \mathbb{Z}_2^k$ как $\mathbb{Z}_2$-алгебра. В частности, для $\mathcal{M} = 2^S$ подмножества P_i, $1 \le i \le n$, — все одноэлементные подмножества в S.

2) Интересно еще посмотреть, что происходит, если в качестве S взять счетное множество. Упомянем два случая: (i), когда в качестве $\mathcal{M}$ берется множество всех *конечных* подмножеств в S, и (ii), когда в качестве $\mathcal{M}$ берется множество *всех* подмножеств в S. Ясно, что в обоих случаях получаем семейства подмножеств, замкнутые относительно операций $\triangle$ и $\cap$[12]. В случае (i) элементы $X(\mathcal{M})$ — всевозможные финитные (то есть отличные от 0 только в конечном числе точек) $\mathbb{Z}_2$-значные функции на S, и в качестве базиса в $\mathbb{Z}_2$-векторном пространстве $X(\mathcal{M})$ можно взять дельта-функции одноэлементных подмножеств в S (а в случае векторного пространства $\mathcal{M}$ — сами эти одноэлементные подмножества). В частности, в этом случае пространство $X(\mathcal{M})$ имеет счетную размерность (и само является счетным как

[12]Таким образом, конечные подмножества образуют подкольцо.

множество). В то же время в случае (ii) *счетного* базиса в векторных пространствах $\mathcal{M}$ и $X(\mathcal{M})$ (которые на этот раз как множества имеют мощность континуума) не существует[13], но из леммы Цорна (эквивалентной аксиоме выбора) все равно следует существование некоторого базиса (см. [35]), на этот раз имеющего мощность континуума. Можно показать, что векторное пространство из пункта (ii) изоморфно двойственному к пространству из пункта (i).

3) Установленную в решении задачи связь между подмножествами и их характеристическими функциями удобно использовать для доказательства свойств операций над множествами. Например, рассмотрим множество 2^S всех подмножеств конечного множества S. Докажем, что функция $\rho\colon 2^S \times 2^S \to \mathbb{R}$, определенная равенством $\rho(X, Y) := \natural(X \triangle Y)$ (мощность симметрической разности $X, Y \in 2^S$), есть метрика на 2^S. Действительно, во-первых, $\rho(X, Y) \geq 0$, причем $\rho(X, Y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = Y$. Во-вторых, очевидно, что $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$. В-третьих, для доказательства неравенства треугольника $\rho(X, Z) \leq \rho(X, Y) + \rho(Y, Z)$ докажем включение $X \triangle Z \subset (X \triangle Y) \cup (Y \triangle Z)$. Заметим, что $p \notin (X \triangle Y) \cup (Y \triangle Z)$ равносильно системе

$$\begin{cases} \chi_{X \triangle Y}(p) = 0; \\ \chi_{Y \triangle Z}(p) = 0, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \chi_X(p) + \chi_Y(p) = 0; \\ \chi_Y(p) + \chi_Z(p) = 0. \end{cases}$$

Складывая равенства последней системы (с учетом того, что все слагаемые в них — вычеты по модулю 2), получаем $\chi_X(p) + +\chi_Z(p) = 0$, то есть $\chi_{X \triangle Z}(p) = 0$, что равносильно $p \notin X \triangle Z$. Таким образом, неравенство треугольника доказано.

С использованием того факта, что ρ — метрика, можно дать красивое решение следующей задачи. Пусть $\natural S = 10$, $\mathcal{M} \subset 2^S$ — произвольное семейство из 100 подмножеств в S. Доказать, что в $\mathcal{M}$ найдется пара элементов, мощность симметрической разности которых не превосходит 2. Для этого рассмотрим 2^S как метрическое пространство с метрикой ρ и возьмем 100 замкнутых шаров $B(P) := \{X \subset S \mid \rho(P, X) \leq 1\}$ в 2^S единичного радиуса с центрами во всех элементах P из $\mathcal{M}$. В каждом таком шаре ровно 11 элементов, если бы все эти шары не пересекались, то в 2^S было бы не менее $100 \cdot 11 = 1100$ элементов, что невозможно ($2^{10} = 1024$). Поэтому существует $X \in B(P) \cap B(Q)$ для некоторой пары $P, Q \in \mathcal{M},\ P \neq Q$. Тогда в силу неравенства треугольника $\rho(P, Q) \leq \rho(P, X) + \rho(X, Q) \leq 2$, то есть $\natural(P \triangle Q) \leq 2$.

1.3. Линейные преобразования и их матрицы

Задача 1.10. Найти матрицу линейного преобразования $\varphi_{\mathbf{v}}$ в стандартном базисе $\mathbb{R}^3$, заданного формулой $\varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = [\mathbf{v}, \mathbf{x}]$, где $[\cdot, \cdot]$ обозначает векторное произведение, а $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ — данный вектор.

[13] Базис, построенный в случае (i), не подходит, так как в конечные линейные комбинации по нему раскладываются характеристические функции только *конечных* подмножеств.

Решение. Пусть $\{\mathbf{i},\,\mathbf{j},\,\mathbf{k}\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^3$. Тогда имеем

$$\varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{i}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = v_3\mathbf{j} - v_2\mathbf{k}, \;\; \varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{j}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -v_3\mathbf{i} + v_1\mathbf{k},$$

$$\varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = v_2\mathbf{i} - v_1\mathbf{j}.$$

Получаем, что оператор $\varphi_{\mathbf{v}}$ в указанном базисе имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Комментарий. Полученная матрица оператора $\varphi_{\mathbf{v}}$ кососимметрична. Вообще, легко видеть, что сопоставление $\mathbf{v} \mapsto \varphi_{\mathbf{v}}$ определяет линейный изоморфизм пространства $\mathbb{R}^3$ с подпространством кососимметрических матриц в $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$. Хотелось бы понять инвариантный смысл данного результата. Для этого заметим, что из свойств смешанного произведения следует равенство

$$(\varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}),\,\mathbf{w}) + (\mathbf{x},\,\varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})) = 0 \quad \forall\,\mathbf{v},\,\mathbf{w},\,\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

(здесь внешние круглые скобки обозначают стандартное евклидово скалярное произведение на $\mathbb{R}^3$). Таким образом, $\varphi_{\mathbf{v}}^* = -\varphi_{\mathbf{v}}$ (здесь $*$ обозначает операцию перехода к сопряженному оператору), такие операторы называются *кососимметрическими*. Так как в евклидовом случае матрица сопряженного оператора в ортонормированном базисе является транспонированной к матрице исходного оператора, то мы возвращаемся к полученному результату.

Отметим еще одно интересное свойство построенного изоморфизма $\mathbb{R}^3$ с подпространством кососимметрических матриц в $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$. Во-первых, заметим, что кососимметрические матрицы замкнуты относительно операции взятия *коммутатора*

$$[A,\,B] := AB - BA.$$

Действительно, если $A^T = -A,\; B^T = -B$, то

$$[A,\,B]^T = (AB - BA)^T = B^T A^T - A^T B^T =$$

$$= BA - AB = -[A,\,B].$$

Это означает, что векторное пространство кососимметрических матриц с операцией взятия коммутатора является алгеброй Ли. Тождество Якоби для векторного произведения можно переписать в виде

$$[[\mathbf{v},\,\mathbf{w}],\,\mathbf{x}] = [\mathbf{v},\,[\mathbf{w},\,\mathbf{x}]] - [\mathbf{w},\,[\mathbf{v},\,\mathbf{x}]],$$

откуда следует равенство $\varphi_{[\mathbf{v},\,\mathbf{w}]} = \varphi_{\mathbf{v}}\varphi_{\mathbf{w}} - \varphi_{\mathbf{w}}\varphi_{\mathbf{v}}$. Таким образом, построенный в задаче изоморфизм является не просто изоморфизмом векторных пространств, а *изоморфизмом алгебр Ли*. Более подробному знакомству с алгебрами Ли посвящен раздел 4.5.

Задача 1.11. Рассмотрим поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ как векторное пространство над $\mathbb{R}$ с базисом $\{1, i\}$. Проверьте, что для каждого $z = a+bi \in \mathbb{C}$ отображение $\varphi_z(w) = z \cdot w,\ w \in \mathbb{C}$, определяет линейное преобразование $\mathbb{C}$, и найдите его матрицу в базисе $\{1, i\}$. Покажите, что отображение

$$a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

определяет изоморфизм между полем $\mathbb{C}$ и подалгеброй матриц указанного вида в $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. Какие матрицы при этой биекции соответствуют множеству $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$?

Решение. Используя дистрибутивность умножения, имеем

$$\varphi_z(w_1 + w_2) = z \cdot (w_1 + w_2) = z \cdot w_1 + z \cdot w_2 =$$

$$= \varphi_z(w_1) + \varphi_z(w_2) \quad \forall\, z,\, w_1,\, w_2 \in \mathbb{C}.$$

Аналогично, используя ассоциативность и коммутативность умножения, получаем

$$\varphi_z(\lambda w) = z \cdot (\lambda w) = \lambda z \cdot w = \lambda \varphi_z(w) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ z,\, w \in \mathbb{C}.$$

Значит, для любого $z \in \mathbb{C}$ отображение $\varphi_z \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является $\mathbb{R}$-линейным оператором. Чтобы найти его матрицу в $\mathbb{R}$-базисе $\{1, i\}$, пишем $\varphi_z(1) = z \cdot 1 = a1 + bi \ \Rightarrow$ ее первый столбец есть $(a, b)^T$. Аналогично, $\varphi_z(i) = (a + bi) \cdot i = -b1 + ai \ \Rightarrow$ ее второй столбец есть $(-b, a)^T$.
То, что сопоставление $z \mapsto \varphi_z$ комплексному числу z соответствующего линейного преобразования φ_z сохраняет операции, означает выполнение тождеств

$$\varphi_{z_1+z_2} = \varphi_{z_1} + \varphi_{z_2}, \quad \varphi_{z_1 z_2} = \varphi_{z_1}\varphi_{z_2}, \quad \varphi_{z^{-1}} = (\varphi_z)^{-1}. \tag{13}$$

Их можно проверить непосредственно, перемножая комплексные числа и матрицы. Например, второе из тождеств (13) следует из равенств

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i,$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}.$$

Однако проще заметить, что $\varphi_{a+bi} = aE + bI$, где E — единичная 2×2-матрица, а $I := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, причем $I^2 = -E$ и матрицы E и I коммутируют.
Заметим еще, что

$$|a + bi|^2 = \det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 \geq 0,$$

причем строго больше нуля, если $z \neq 0$. Фактически нами построено вложение поля комплексных чисел в алгебру матриц $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.
Комплексные числа z, $|z| = 1$ имеют вид $z = e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда по формуле Эйлера $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ им отвечают матрицы $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ поворота

на угол α. Тем самым мы получили изоморфизм групп

$$\mathrm{U}(1) \to \mathrm{SO}(2), \tag{14}$$

где $\mathrm{U}(1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ с операцией умножения, а $\mathrm{SO}(2)$ — группа ортогональных 2×2-матриц с единичным определителем (любая такая матрица является матрицей поворота плоскости, и обратно).

Заметим, что матрицы поворота также имеют вид $\exp(I\alpha)$, где $\exp(I\alpha)$ обозначает *экспоненту матрицы* $I\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, определяемую как результат подстановки матрицы в ряд $\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Вычисление в данном случае облегчается тем, что $I^4 = E$ (читателю предлагается его провести).

Кстати, формула сложения для тригонометрических функций — следствие геометрического факта: композиция поворота на угол α с поворотом на угол β есть поворот на угол $\alpha + \beta$ (композиция преобразований отвечает произведению их матриц).

Отметим еще, что аналогом показательной формы $z = re^{i\alpha}$ комплексного числа для матриц рассматриваемого вида является представление[14]

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Заметим также, что комплексное сопряжение тоже может быть задано с помощью операций с матрицами, например, как сопряжение при помощи матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, то есть как

$$\varphi_{\overline{z}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \varphi_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}. \quad \blacksquare$$

Комментарии. Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{R}$. Линейный оператор $I\colon V \to V$, удовлетворяющий условию $I^2 = = -\mathrm{id}_V$, называется *комплексной структурой* на V. Причина такого названия заключается в том, что любой такой оператор I позволяет задать на V структуру векторного пространства над $\mathbb{C}$, определив умножение на комплексные числа формулой

$$(a + bi) \cdot \mathbf{v} := a \cdot \mathbf{v} + b \cdot I(\mathbf{v}).$$

В частности, если на конечномерном вещественном пространстве V существует комплексная структура, то $\dim V = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ (действительно, из $I^2 = -\mathrm{id}_V$ получаем $(\det I)^2 = (-1)^n$, что для нечетного n невозможно, поскольку $\det I$ — действительное число).

[14]То есть так называемое полярное разложение, см. [10], с. 236, а также определение 3.42.

Вложение $\mathbb{C} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, описанное в предыдущей задаче, отвечает комплексной структуре

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

на $\mathbb{R}^2$, которую мы назовем *стандартной.* С другой стороны, эта комплексная структура не единственна: например, легко проверить, что

$$I = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

тоже является комплексной структурой.

Приведенные соображения пригодятся при решении следующей задачи.

Задача 1.12. Описать все комплексные структуры на $V = \mathbb{R}^2$.

Решение. Во-первых, заметим, что любая комплексная структура I сопряжена[15] со стандартной. Действительно, выберем произвольный вектор $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, и положим $\mathbf{v} := I(\mathbf{u})$. Тогда, очевидно, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ — базис в V. В этом базисе матрица I совпадает с матрицей (16) стандартной комплексной структуры.

Следовательно, все комплексные структуры на V имеют вид

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{18}$$

для обратимых матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Производя умножение матриц (18), получаем

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ac + bd & -a^2 - b^2 \\ c^2 + d^2 & -ac - bd \end{pmatrix}.$$

Обозначив векторы-столбцы $\mathbf{u} := (a,\, b)^T$, $\mathbf{v} := (c,\, d)^T$, полученный результат можно переписать в виде

$$\frac{1}{\{\mathbf{u},\, \mathbf{v}\}} \begin{pmatrix} (\mathbf{u},\, \mathbf{v}) & -|\mathbf{u}|^2 \\ |\mathbf{v}|^2 & -(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где $\{\mathbf{u},\, \mathbf{v}\}$ обозначает определитель матрицы, составленной из векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, который называется *псевдоскалярным произведением векторов* $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Его геометрический смысл — ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

Вид полученной матрицы можно еще более упростить, введя угол φ между $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ (измеряемый против часовой стрелки) и положительный параметр

[15] См. пример 0.14.

$\lambda := \frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{v}|}$. Тогда (19) запишется в виде

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} & \frac{-\lambda}{\sin\varphi} \\ \frac{1}{\lambda\sin\varphi} & \frac{-1}{\operatorname{tg}\varphi} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы показали, что множество комплексных структур на $V = \mathbb{R}^2$ является двухпараметрическим. Например, комплексная структура (17) получается при $\lambda = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, стандартная — при $\lambda = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (в этом случае в матрице выше $\frac{1}{\operatorname{tg}}$ нужно заменить на ctg).

Это множество комплексных структур может быть также описано как однородное пространство[16] $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+/\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$. ■

Комментарий. Заметим, что на двумерном векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ евклидова метрика и ориентация однозначно задают некоторую комплексную структуру I, а именно оператор поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ в положительном направлении.

Обратно, пусть I — комплексная структура на V. Пусть $\mathbf{u} \in \in V$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, тогда если $\mathbf{v} := I(\mathbf{u})$, то $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ — базис в V. Объявим его положительным. Мы утверждаем, что если $\mathbf{u}' \in V$ — еще какой-то ненулевой вектор, то базис $\{\mathbf{u}', \mathbf{v}'\}$ (где $\mathbf{v}' := I(\mathbf{u}')$) одинаково ориентирован с $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Действительно, если $\mathbf{u}' = \alpha\mathbf{u} + +\beta\mathbf{v}$, то $\mathbf{v}' = I(\mathbf{u}') = \alpha I(\mathbf{u}) + \beta I(\mathbf{v}) = -\beta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$, и матрица перехода от базиса $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ к базису $\{\mathbf{u}', \mathbf{v}'\}$ есть матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \tag{20}$$

имеющая положительный определитель. Таким образом, мы доказали, что комплексная структура на V задает некоторую ориентацию на V.

Можно ли по комплексной структуре I на V восстановить евклидову метрику на V? Снова выберем ненулевой вектор $\mathbf{u} \in V$ и объявим базис $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ ортонормированным, где $\mathbf{v} := I(\mathbf{u})$. Это полностью фиксирует некоторую евклидову метрику на V (именно ту, матрица Грама которой в базисе $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ единичная). Как мы показали выше, при замене вектора $\mathbf{u}$ другим ненулевым вектором $\mathbf{u}'$ получается базис $\{\mathbf{u}', \mathbf{v}'\}$, связанный с исходным базисом матрицей перехода (20). Последняя отличается от матрицы поворота только положительным множителем (ср. (15)). Отсюда следует, что по комплексной структуре евклидова метрика восстанавливается с точностью до умножения на положительное число. Множество таких пропорциональных метрик называют *конформным классом* евклидовых метрик.

Изложенная выше связь между комплексными структурами, метриками и ориентациями играет важную роль в теории римановых поверхностей (см., например, [42], ч. II, лекция 8).

Заметим, что из равенства

$$\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{im}\varphi = \dim V \tag{21}$$

[16] Объяснение этого понятия см., например, в [34], гл. 1, §3.

для линейного оператора $\varphi\colon V \to V$ *не следует*, что

$$V = \ker\varphi \oplus \operatorname{im}\varphi. \tag{22}$$

Простейший пример к этому дает линейный оператор, имеющий в некотором базисе матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (для него ядро и образ совпадают с линейной оболочкой вектора $(1,\,0)^T$ в $\mathbb{R}^2$). В то же время для проекторов (22) верно. Общая ситуация объясняется следующей задачей.

Задача 1.13. Пусть φ — линейное преобразование конечномерного пространства V. Доказать, что $V = \ker\varphi \oplus \operatorname{im}\varphi \;\Leftrightarrow\Leftrightarrow\; \ker(\varphi^2) = \ker\varphi$.

Решение. Во-первых, заметим, что всегда $\ker\varphi \subset \ker(\varphi^2)$. Пусть имеет место обратное включение $\ker(\varphi^2) \subset \ker\varphi$. Выберем произвольный вектор $\mathbf{v} \in \ker\varphi \cap \operatorname{im}\varphi \;\Rightarrow\; \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ и $\exists \mathbf{u} \in V$ такой, что $\mathbf{v} = \varphi(\mathbf{u}) \;\Rightarrow\; \varphi^2(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Тогда сумма $\ker\varphi$ и $\operatorname{im}\varphi$ прямая, и по соображениям размерности $V = \ker\varphi \oplus \operatorname{im}\varphi$.
Обратно, пусть $\ker\varphi \cap \operatorname{im}\varphi = \{\mathbf{0}\}$. Если $\varphi(\varphi(\mathbf{v})) = \mathbf{0}$, то $\varphi(\mathbf{v}) \in \ker\varphi \cap \operatorname{im}\varphi = \{\mathbf{0}\} \;\Rightarrow\; \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \mathbf{v} \in \ker\varphi \;\Rightarrow\Rightarrow\; \ker(\varphi^2) \subset \ker\varphi$. ■

Комментарий. Например, для проектора (см. задачу 1.6) имеем $\varphi^2 = \varphi$, поэтому $\ker(\varphi^2) = \ker\varphi$, в то время как для оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, квадрат равен нулю, и, значит, $\ker\varphi \subsetneq \ker(\varphi^2)$.

Задача 1.14. Для каких конечномерных пространств V существует линейный оператор $\varphi\colon V \to V$ такой, что $\ker\varphi = \operatorname{im}\varphi$?

Решение. Равенство (21) показывает, что размерность V должна быть четной. Покажем, что это условие является достаточным. Пусть $\dim V = 2k$ и $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{2k}\}$ — некоторый базис в V. Тогда очевидно, что линейное преобразование $\varphi\colon V \to V$, заданное на базисе условиями $\varphi(\mathbf{e}_{2i-1}) = \mathbf{e}_{2i}$, $\varphi(\mathbf{e}_{2i}) = \mathbf{0}$, $1 \le i \le k$, является искомым. В случае поля характеристики 0 можно было бы положить $V = \mathbb{K}[x]_{2k-1}$ (через $\mathbb{K}[x]_n$ обозначается пространство многочленов степени не выше n с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$), а в качестве φ взять $\frac{d^k}{dx^k}$. Тогда $\ker\varphi = \operatorname{im}\varphi = \mathbb{K}[x]_{k-1} \subset \mathbb{K}[x]_{2k-1}$. ■

1.4. Псевдообратная матрица

Как мы знаем, обратная матрица — это решение уравнения $AX = E$, где A — известная квадратная матрица размера $n \times n$, X — неизвестная матрица, а E — единичная. Если определитель матрицы A отличен от нуля, то решение у такого уравнения существует, причем единственное. Обратим внимание читателя, что отсюда отнюдь не следует "автоматически", что эта же матрица будет решением уравнения $XA = E$. Более того, в других алгебраических структурах, отличных от алгебры матриц, левый и правый обратные элементы могут не совпадать. Более того, в некоторых структурах даже левый и правый нейтральный элементы (часто говорят единица) совершенно не обязаны совпадать.

В настоящем разделе мы разберемся, что делать в случае, когда матрица A – не обратима, но обратить её все-таки необходимо.

Задача 1.15. Пусть X_0 — решение уравнения $AX = E$, где A — квадратная невырожденная матрица. Докажите, что X_0 — единственное решение этого уравнения, причем $X_0A = AX_0$.

Решение. Докажем, что если $AX_0 = E$, то $X_0A = E$. Действительно, раз $AX_0 = E$, значит, $(AX_0)A = A$, в силу ассоциативности умножения матриц, следовательно, и $A(X_0A) = A$. Откуда получаем, что

$$A((X_0A) - E) = 0.$$

Обозначим через x_j $j-$й столбец матрицы $X_0A - E$. Полученное матричное равенство распадается в серию равенств столбцов

$$Ax_j = 0,$$

в силу невырожденности матрицы A мы имеем, что $x_j = 0$, значит, $X_0A = E$. Мы умышленно не пользуемся здесь формулой для обращения матриц и пользуемся только самыми элементарными свойствами матриц, так как на самом деле при доказательстве формулы обращения неявно используется утверждение данной задачи.
Теперь докажем единственность. Пусть X_0, X_1 — решения уравнения $AX = E$. В таком случае $A(X_0 - X_1) = 0$, и аналогично с рассуждением из первого пункта получаем, что $X_0 = X_1$. ■
Предлагаем читателю самостоятельно проверить такой "очевидный" факт, что в алгебре матриц только одна правая единица, то есть существует единственная матрица E такая, что $AE = A, \forall A$. Отдельно проверьте, что правая единица совпадает с левой.
Вернемся к уравнению $AX = E$.
Если матрица A имеет нулевой определитель, то решения нет. Если мы избавимся от требования к матрице A быть квадратной и предположим, что A и X — прямоугольные матрицы согласованного размера, то у соответствующего уравнения, вообще говоря, не будет единственного решения. Однако есть способ определить так называемые псевдообратные матрицы, которые, с одной стороны, будут удовлетворять свойствам, похожим на свойства обратной матрицы, а с другой стороны, для них будет верна теорема существования и единственности для всевозможных, в том числе и прямоугольных, матриц A.
Пусть A — некоторая матрица размера $m \times n$.

Определение 1.16. Матрицу A^+ размера $n \times m$ будем называть *псевдообратной матрицей* для A, если выполняются два условия:

$$AA^+A = A \quad \text{и}$$

$$\exists U, V : A^+ = UA^* = A^*V,$$

здесь U, V — матрицы подходящего размера, а $A^* = \overline{A}^T$ — сопряженная матрица.

Первое условие — это следствие уравнения $AX = E$. К сожалению, уравнение $AXA = A$ имеет, вообще говоря, бесконечное множество решений, так что второе условие необходимо для однозначного выбора решения. В силу причин, о которых будет сказано ниже (связь с методом наименьших квадратов), условие выбирается таким образом, что строки и столбцы псевдообратной матрицы должны являться линейными комбинациями строк и столбцов исходной матрицы и сопряженной к ней.

Задача 1.17. Пусть A — квадратная невырожденная матрица. Докажите, что $A^+ = A^{-1}$.

Решение. По условию обратная матрица существует, докажем, что она будет псевдообратной. Начнем с первого условия:

$$AA^+A = AA^{-1}A = EA = A.$$

Проверим второе условие. Нужно подобрать такую матрицу U, что $A^{-1} = UA^*$. Поскольку матрица A была невырожденной, такой же будет и матрица A^*, значит, $U = A^{-1}A^{*-1} = (A^*A)^{-1}$, аналогично находится и матрица V. ■

Естественные вопросы: для каких матриц псевдообратная матрица определена, и если определена, то будет ли она единственной? Следующее утверждение носит название теоремы Мура—Пенроуза.

Задача 1.18. Докажите, что для любой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$ существует, причем единственная псевдообратная матрица A^+.

Решение. Пусть $\mathrm{rk}A = r$. Представим матрицу A в виде произведения $A = BC$, где матрица B имеет размер $m \times r$, матрица C имеет размер $r \times n$. Заметим, что если такое разложение существует, то $\mathrm{rk}B = \mathrm{rk}C = r$. Действительно, с одной стороны, $\mathrm{rk}B \le r$ и $\mathrm{rk}C \le r$, с другой стороны, $\mathrm{rk}(BC) \le \min(\mathrm{rk}B, \mathrm{rk}C)$. Остается проверить, что такое разложение действительно существует (оно, вообще говоря, не единственно). Возьмем в качестве матрицы B какую-нибудь матрицу, r столбцов которой совпадают с r линейно независимыми столбцами исходной матрицы A. Тогда уравнение $A = BC$ означает, что j-й столбец матрицы A равен линейной комбинации этих столбцов с коэффициентами, которые являются элементами j-го столбца матрицы C. Разумеется, такие коэффициенты можно подобрать, так как любой столбец матрицы A должен выражаться как линейная комбинация r линейно независимых столбцов (так как это максимальное количество линейно независимых столбцов в матрице A). Читателю в качестве несложного упражнения предлагается доказать, что таких разложений, вообще говоря, бесконечно много.
Далее, фиксируем разложение $A = BC$. Понятно, что B^*B и CC^* — квадратные матрицы размера $r \times r$. Значит, эти матрицы невырождены, так как в матрицах B и C было по r линейно независимых столбцов[17].

---

[17] Для доказательства невырожденности указанных матриц также можно воспользоваться идеей задачи 3.43.

Логично предположить, что по аналогии с обратными матрицами должно иметь место равенство $A^+ = C^+B^+$, поэтому логично сначала найти B^+ и C^+. Мы знаем, что B^*B — невырожденная матрица. Пусть $L := (B^*B)^{-1}$. Тогда $LB^*B = E$. Домножив слева на B, получаем $B(LB^*)B = B$. Остается проверить, что матрица

$$B^+ = (B^*B)^{-1}B^*$$

удовлетворяет и второму условию для псевдообратной матрицы, то есть должны существовать такие матрицы U, V, что

$$B^+ = UB^* = B^*V.$$

В качестве матрицы U можно взять матрицу L. Найдем матрицу V, удовлетворяющую условию

$$B^+ = B^*V.$$

В качестве матрицы V можно взять $V = B(B^*B)^{-1}B^+$, где B^+ мы определили выше.
Аналогичные рассуждения показывают, что $C^+ = C^*(CC^*)^{-1}$. Проверим теперь нашу гипотезу, что $A^+ = C^+B^+$.
Прежде всего проверим условие $AA^+A = A$. Имеем

$$AA^+A = A(C^+B^+)A = BCC^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*BC = BC = A.$$

Теперь остается проверить, что найдутся такие матрицы U и V, что $A^+ = UA^* = A^*V$. Если преобразовать явное выражение для матрицы A^+, которое мы получили выше, получим

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* =$$
$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}[(CC^*)^{-1}CC^*]B^* = UC^*B^* = UA^*.$$

Аналогично находится и матрица V.
Проверим теперь, что матрица A^+ единственна. Действительно, пусть есть две псевдообратные матрицы $A^+_{1,2}$ такие, что

$$AA^+_jA = A, \quad A^+_j = U_jA^* = A^*V_j, \quad j = 1, 2.$$

Положим $D = A^+_2 - A^+_1$. Мы хотим доказать, что $D = 0$. Легко видеть, что

$$ADA = 0, \quad D = (U_2 - U_1)A^* = A^*(V_2 - V_1).$$

Заметим, что $(DA)^* = A^*D^* = A^*(A^*(V_2 - V_1))^* = A^*V^*A$, где $V = V_2 - V_1$. Значит,

$$(DA)^*DA = A^*V^*ADA = A^*V^*(ADA) = 0.$$

Как следует из результатов пункта 3.4., отсюда мы получаем, что $DA = 0$. С другой стороны,

$$0 = DAU^* = DD^*,$$

где $U := U_2 - U_1$, значит, и $DD^* = 0$, следовательно, окончательно получаем $D = 0$. ■

Теперь перейдем к вопросу о прикладной роли псевдообратной матрицы. Логично предположить, что уравнение $Ax = y$ должно иметь “решение” $x =$

A^+y. Вопрос только, в каком смысле, если система уравнений несовместна или, наоборот, имеет бесконечно много решений. Справедлива следующая теорема (см. например [18], с. 36).

Теорема 1.19. *Вектор* x_0*, определяемый как* $x_0 := A^+y$*, является наилучшим приближенным решением системы* $Ax = y$*, то есть квадратичное отклонение* $|y - Ax|^2$ *достигает минимального значения при* $x = x_0$*, а среди всех векторов* x *таких, что значение квадратичного отклонения минимально, вектор* x_0 *имеет наименьший модуль* $|x_0|$*.*

Таким образом, оказывается, что псевдообратные матрицы при отсутствии единственного решения дают наилучшее решение в смысле метода наименьших квадратов, что и обуславливает важное прикладное значение данного объекта. Заметим, что в настоящем параграфе псевдообратная матрица построена в алгоритмизуемом виде. Вопрос об эффективности данного, явного, алгоритма мы не обсуждаем, и заинтересованного читателя отсылаем к современным работам по вычислительной математике.

2 Линейные операторы

2.1. Структура линейного преобразования

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор, A — его матрица в некотором базисе пространства V.

Определение 2.1. *Характеристическим многочленом* оператора φ называется многочлен
$$\chi_\varphi(t) := \det(tE - A) \in \mathbb{K}[t].$$

Проверим, что характеристический многочлен оператора корректно определен (то есть не зависит от базиса, в котором вычислялась матрица A оператора φ). Действительно, в другом базисе матрица того же оператора будет $A' = C^{-1}AC$, где C — матрица перехода между базисами, и тогда
$$\det(tE - A') = \det(tE - C^{-1}AC) = \det(C^{-1}(tE - A)C) =$$
$$= \det(C^{-1})\det(tE - A)\det C = \det(tE - A).$$
Отметим полезную формулу:
$$\chi_\varphi(t) = t^n - (\operatorname{tr} A)t^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A, \tag{23}$$
где A — матрица оператора φ в произвольном базисе. В частности, след и определитель матрицы оператора не зависят от базиса (и, таким образом, можно говорить про след и определитель оператора; то же, конечно, относится и к другим коэффициентам характеристического многочлена, по поводу их выражения через матрицу A оператора см. текст после леммы 2.36).

Задача 2.2. Пусть P — матрица проектора (см. определение 1.5) в некотором базисе. Докажите, что ранг матрицы P равен ее следу.

Решение. След матрицы линейного оператора, будучи одним из коэффициентов характеристического многочлена, не зависит от базиса[18]. Аналогично, ранг матрицы линейного оператора, будучи равным размерности его образа, также не зависит от базиса. Значит, указанную формулу $\operatorname{rk} P = \operatorname{tr} P$ достаточно доказать в каком-то одном базисе.
Мы знаем (см. задачу 1.6), что проектор $P\colon V \to V$ совпадает с оператором проектирования Pr_U^W на некоторое подпространство $U \subset V$ параллельно некоторому подпространству $W \subset V$ такому, что $V = U \oplus W$, причем $U = \operatorname{im} P$, $W = \ker P$. Выберем базис в V, согласованный с указанным разложением в прямую сумму, то есть такой, что его первые k векторов образуют базис в U, а оставшиеся $n-k$ — базис в W. Легко видеть, что в указанном базисе оператор P имеет диагональную матрицу, в которой на первых k местах на главной диагонали стоят единицы, а на оставшихся $n-k$ — нули. Тогда число единиц есть $k = \dim U = \operatorname{rk} P$, а их сумма есть $\operatorname{tr} P$. ■

[18] Впрочем, инвариантность следа может быть легко доказана и с помощью непосредственно проверяемого тождества $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ $\forall\ A \in \operatorname{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \operatorname{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K})$.

Задача 2.3. Пусть A — матрица (в некотором базисе) поворота трехмерного пространства вокруг некоторой оси на угол α. Выразить α через элементы матрицы A.

Решение. Как и в предшествующей задаче, воспользуемся независимостью следа матрицы оператора от базиса. Выберем в трехмерном пространстве ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, у которого $\mathbf{e}_3$ совпадает с направлением оси поворота, а $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ образуют базис в ортогональной к $\mathbf{e}_3$ плоскости. Тогда матрица поворота имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

или с возможной заменой α на $-\alpha$ (что не влияет на знак диагональных элементов в силу четности функции $\cos\alpha$). Отсюда получаем, что $\cos\alpha = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}$. ■

Последовательность Фибоначчи 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... определяется тем, что каждый следующий член равен сумме двух предыдущих, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, и двумя начальными членами $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

Задача 2.4. Найти явную формулу для a_n.

Решение. 1-й способ. Заметим, что вектор $\mathbf{v}_n := (a_n, a_{n-1})^T$ линейно выражается через $\mathbf{v}_{n-1}$:

$$\mathbf{v}_n = A\mathbf{v}_{n-1}, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

причем $\mathbf{v}_1 = (1, 0)^T$. Поэтому a_n есть первая компонента $A^{n-1}\mathbf{v}_1$.

Рассмотрим $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ как матрицу некоторого оператора, заданную относительно стандартного базиса в $\mathbb{R}^2$. Характеристический многочлен оператора с матрицей A есть $\chi_A(t) = = t^2 - (\operatorname{tr} A)t + \det A = t^2 - t - 1$; его корни $\alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Поскольку $\alpha \neq \beta$, матрица A диагонализируема. Легко посчитать, что собственные векторы, отвечающие α и β, суть соответственно $\mathbf{u}_1 := (\alpha, 1)^T$, $\mathbf{u}_2 := (\beta, 1)^T$. Тогда наш оператор в базисе $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ имеет диагональную матрицу $\Lambda := \operatorname{diag}(\alpha, \beta)$, и мы имеем $\Lambda = C^{-1}AC$, где $C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица перехода от исходного стандартного базиса к базису $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$. Тогда $A = C\Lambda C^{-1}$ и, значит, для любого натурального $n \geq 1$ $A^{n-1} = C\Lambda^{n-1}C^{-1}$, причем (как легко проверить) возведение диагональной матрицы в степень сводится к возведению в степень ее диагональных элементов. Находим $C^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$, и теперь первая компонента $A^{n-1}\mathbf{v}_1$ легко вычисляется:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right). \quad ■$$

Для полноты приведем два других решения данной задачи.

2-й способ (интерполяционный многочлен). Согласно теореме Гамильтона—Кэли, характеристический многочлен $\chi_A(t)$ аннулирует оператор A. Для произвольного многочлена $P(t) \in \in \mathbb{R}[t]$ существует многочлен $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ степени не выше 1 такой, что $P(A) = p(A)$ (равенство элементов кольца матриц $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$). Чтобы это доказать, поделим $P(t)$ на $\chi_A(t)$ с остатком: $P(t) = = Q(t)\chi_A(t) + p(t)$, где либо $p(t) = 0$, либо $\deg p(t) < \deg \chi_A(t) = = 2$, тогда $P(A) = p(A)$, поскольку $\chi_A(A) = 0$ (нулевой линейный оператор).

Для каждого натурального n рассмотрим многочлен $P_n(t) = = t^n$; согласно предыдущему, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p_n(t) = a_n + b_n t \in \mathbb{R}[t]$ такой, что $P_n(A) = p_n(A)$. Легко видеть, что последнее равенство равносильно системе

$$\begin{cases} P_n(\alpha) = p_n(\alpha) = a_n + b_n\alpha, \\ P_n(\beta) = p_n(\beta) = a_n + b_n\beta. \end{cases}$$

(Действительно, так как A имеет простой спектр, то существует обратимая матрица C такая, что $C^{-1}AC = \Lambda = \mathrm{diag}(\alpha,\, \beta)$; кроме того,

$$C^{-1}P(A)C = P(C^{-1}AC) = P(\Lambda) = \mathrm{diag}(P(\alpha),\, P(\beta)),$$

и аналогично

$$C^{-1}p(A)C = p(C^{-1}AC) = p(\Lambda) = \mathrm{diag}(p(\alpha),\, p(\beta));$$

теперь осталось только заметить, что равенства $P(A) = p(A)$ и $C^{-1}P(A)C = C^{-1}p(A)C$ равносильны.) Таким образом, нам нужно решить (относительно $a_n,\, b_n$) систему

$$\begin{cases} a_n + b_n\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \\[2ex] a_n + b_n\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \end{cases}$$

откуда $2a_n + b_n = \alpha^n + \beta^n,\ \sqrt{5}\, b_n = \alpha^n - \beta^n$. Несложные вычисления приводят к результату

$$P_n(A) = A^n = a_n E + b_n A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) & \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) & \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы приходим к той же формуле для n-го числа Фибоначчи, что и в предыдущем решении. Подробности см. в [15], гл. 6, § 5. ■

3-й способ (метод производящих функций). Здесь удобнее вместо исходной последовательности рассмотреть последовательность $f_0 = 1,\ f_1 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Рассмотрим ее производящую функцию

$$\mathrm{Fib}(s) := f_0 s^0 + f_1 s + f_2 s^2 + \ldots + f_n s^n + \ldots = 1 + s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + \ldots$$

Умножая обе части предыдущего равенства на $s + s^2$ и используя рекуррентное соотношение для последовательности Фибоначчи, получаем равенство в кольце формальных степенных рядов

$$(s+s^2)\,\mathrm{Fib}(s)=\mathrm{Fib}(s)-1,$$

откуда

$$\mathrm{Fib}(s)=\frac{1}{1-s-s^2}.$$

Раскладывая последнее выражение на простейшие дроби, получаем

$$\frac{1}{1-s-s^2}=\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1}{s+\frac{1+\sqrt5}{2}}-\frac{1}{s-\frac{-1+\sqrt5}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1}{\alpha+s}-\frac{1}{\beta+s}\right)=\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1}{\alpha(1-\beta s)}-\frac{1}{\beta(1-\alpha s)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n s^n}{\alpha}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n s^n}{\beta}\right)=\frac{1}{\sqrt5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)s^n,$$

где использовано соотношение $\alpha\beta=-1$. Мы приходим тем самым к полученной выше формуле для a_n (с учетом сделанного сдвига нумерации последовательности). Подробности см., например, в [14], § 11, 12; [36], § 2.2 или в [37], § 2.2. ■

Комментарии. В связи со 2-м способом нам потребовался ответ на следующий вопрос: пусть на n-мерном вещественном пространстве V задан линейный оператор $A\colon V\to V$, тогда для каких многочленов $f(t)$, $g(t)\in\mathbb{R}[t]$ имеет место равенство $f(A)==g(A)$? Очевидно, этот вопрос эквивалентен следующему: когда $f(A)=0$? Ясно, что такие ненулевые многочлены существуют, так как $E=A^0, A, A^2,\dots A^{n^2}$ линейно зависимы, поскольку $\dim(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}))=n^2$.

Например, пусть A имеет простой спектр $\{\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_n\}$, содержащийся в $\mathbb{R}$. Тогда $f(A)=0\ \Leftrightarrow\ f(\lambda_k)=0\ \forall k,\ 1\le k\le n$. Если же жорданова нормальная форма A есть одна клетка $J_n(\lambda)$, $\lambda\in\in\mathbb{R}$, то $f(A)=0\ \Leftrightarrow\ f^{(k)}(\lambda)=0\ \forall k,\ 0\le k\le n-1$. Доказательство последнего утверждения следует из тождества

$$f(J_n(\lambda))=\begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac12 f''(\lambda) & \dots & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\lambda)\\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \dots & \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(\lambda)\\ 0 & 0 & f(\lambda) & \dots & \frac{1}{(n-3)!}f^{(n-3)}(\lambda)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda)\end{pmatrix}. \tag{24}$$

Можно также спросить: чему изоморфна подалгебра $\mathbb{R}[A]\subset\subset\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, порожденная (как алгебра с единицей) оператором A? В случае простого спектра $\{\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_n\}$, содержащегося в $\mathbb{R}$, имеем изоморфизм $\mathbb{R}[A]\cong\mathbb{R}^n$, который задается формулой

$$\mathbb{R}[A]\ni f(A)\mapsto(f(\lambda_1),\,\dots,\,f(\lambda_n))\in\mathbb{R}^n.$$

Другими словами, $\mathbb{R}[A]$ в этом случае — алгебра $\mathbb{R}$-значных функций на спектре оператора A. В случае оператора A с жордановой формой, совпадающей с одной жордановой клеткой $J_n(\lambda)$, алгебра $\mathbb{R}[A]$ изоморфна $\mathbb{R}[t]/(t^n) \cong \mathbb{R}[\varepsilon]$, где ε удовлетворяет единственному соотношению $\varepsilon^n = 0$, причем изоморфизм задается формулой, ср. (24):

$$\mathbb{R}[A] \ni f(A) = f(\lambda)E + \frac{f'(\lambda)}{1}(J_n(\lambda) - \lambda E) +$$

$$+\frac{f''(\lambda)}{2!}(J_n(\lambda) - \lambda E)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}(J_n(\lambda) - \lambda E)^{n-1} \mapsto$$

$$\mapsto f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!}\varepsilon + \frac{f''(\lambda)}{2!}\varepsilon^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}\varepsilon^{n-1} \in \mathbb{R}[\varepsilon].$$

Чему изоморфна алгебра $\mathbb{R}[A]$ в случае, когда спектр не содержится в $\mathbb{R}$? Рассмотрим сюръективный гомоморфизм алгебр $\mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[A]$, ядром которого является (главный) идеал в $\mathbb{R}[t]$, порожденный минимальным многочленом $m_A(t) \in \mathbb{R}[t]$ оператора A. Тогда, согласно теореме о гомоморфизмах колец, $\mathbb{R}[A] \cong \cong \mathbb{R}[t]/(m_A(t))$.
Дадим полный ответ в частном случае $n = 2$, когда возможны варианты: $\mathbb{R}[A] \cong \mathbb{C}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}[\varepsilon]$ (с точностью до изоморфизма, это — все коммутативные ассоциативные двумерные алгебры над $\mathbb{R}$ с единицей), а также $\mathbb{R}$.
Имеет место изоморфизм $\mathbb{R}[A] \cong \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \quad m_A(t)$ — неприводимый над $\mathbb{R}$ многочлен второй степени $\Leftrightarrow \chi_A(t)$ — неприводимый над $\mathbb{R}$ многочлен второй степени[19] $\Leftrightarrow (\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A < 0$, ср. с задачей 1.11. В случае, когда $m_A(t)$ имеет два различных корня в $\mathbb{R}$, факторкольцо $\mathbb{R}[A] \cong \mathbb{R}^2$; в случае, когда $m_A(t)$ имеет кратный корень, $\mathbb{R}[A] \cong \mathbb{R}[\varepsilon]$, $\varepsilon^2 = 0$, в согласии со сказанным выше. Если $\deg(m_A(t)) = 1$, то $\mathbb{R}[A] \cong \mathbb{R}$. Подробности см. в [28], § 5.

Заметим, что формулу Тейлора можно записать в виде формального тождества

$$\exp\left(h\frac{d}{dx}\right) f(x) = T_h(f(x)), \tag{25}$$

где $T_h(f(x)) := f(x+h)$ — оператор сдвига.

Задача 2.5. Проверить формулу (25) для

1) вещественных многочленов степени не выше n;

2) функций на $\mathbb{R}$ из линейной оболочки $\langle \sin x, \cos x \rangle$.

Решение. В этой задаче мы будем вычислять экспоненту конечномерного линейного оператора φ. Она определяется как сумма ряда, получающегося подстановкой матрицы A оператора φ в ряд для экспоненты $\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. При этом получается матрица $\exp A$, являющаяся матрицей линейного оператора $\exp \varphi$. Действительно, если мы выберем другой базис, отвечающий матрице перехода C, то φ будет иметь в нем матрицу $C^{-1}AC$ и из соотношения $\exp(C^{-1}AC) = C^{-1}(\exp A)C$ (доказанное ниже в Замечании

[19] В этом случае он совпадает с $m_A(t)$.

3.75) следует, что $\exp A$ преобразуется как матрица оператора при переходе к новому базису. Обоснование сходимости ряда $\exp A$ для произвольной матрицы A порядка n будет дано в конце § 3.7. (см. также [15], гл. 6, § 5, где помимо прочего приводится пример использования матричной экспоненты для решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами).

1) Пусть $\mathbb{R}[x]_n$ обозначает пространство вещественных многочленов степени не выше n. Рассмотрим базис в $\mathbb{R}[x]_n$, состоящий из мономов $\{1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^n}{n!}\}$. В этом базисе матрица D оператора дифференцирования $\frac{d}{dx}$ есть следующая матрица порядка $n+1$:

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(такая матрица называется *жордановой клеткой порядка* $n+1$ *с собственным значением* 0 и обозначается $J_{n+1}(0)$). В силу соотношения $D^{n+1} = 0$, сумма ряда $\exp(hD)$ есть конечная сумма

$$E + \sum_{k=1}^{n} D^k \frac{h^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} & \dots & \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{h^n}{n!} \\ 0 & 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \dots & \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & h & \dots & \frac{h^{n-3}}{(n-3)!} & \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(для вычисления также можно использовать (24)).

С другой стороны, формула

$$T_h\left(\frac{x^k}{k!}\right) = \frac{(x+h)^k}{k!} = \frac{h^k}{k!} + \frac{h^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{x}{1!} + \frac{h^{k-2}}{(k-2)!} \cdot \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!}$$

показывает, что линейный оператор $T_h \colon \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ имеет ту же самую матрицу в базисе $\{1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \dots, \frac{x^n}{n!}\}$, что и $\exp(h\frac{d}{dx})$. Значит, эти два оператора на пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ равны.

2) Оператор $\frac{d}{dx}$ в базисе $\{\sin x, \cos x\}$ имеет матрицу $D := := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Для вычисления $\exp(hD)$ можно либо воспользоваться задачей 1.11, либо просуммировать ряд из матриц, используя соотношение $D^2 = -E$ и разложения в ряды Маклорена для функций $\sin h$, $\cos h$. В любом случае получается ответ: $\exp(hD) = \begin{pmatrix} \cos h & -\sin h \\ \sin h & \cos h \end{pmatrix}$.

С другой стороны, используя тригонометрические тождества $\sin(x+h) = \cos h \sin x + \sin h \cos x$, $\cos(x+h) = -\sin h \sin x + + \cos h \cos x$ (напомним, что $\sin x$, $\cos x$ — базисные векторы, а $\sin h$ и $\cos h$ — координаты разложения по базису), получаем, что матрица T_h в том же базисе та же самая. $\blacksquare$

Комментарий. Решенная задача подсказывает быстрый способ нахождения экспоненты $\exp(hJ_n(\lambda))$, где $J_n(\lambda)$ — жорданова клетка порядка n с собственным значением λ. Дело в том, что оператор дифференцирования на пространстве квазимногочленов степени, не превосходящей $n-1$, в базисе

$$\left\{e^{\lambda x},\ \frac{x}{1!}e^{\lambda x},\ \frac{x^2}{2!}e^{\lambda x}, \ldots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda x}\right\}$$

как раз имеет матрицу $J_n(\lambda)$. Таким образом, по формуле Тейлора $\exp(hJ_n(\lambda)) = T_h$, где T_h — матрица оператора $f(x) \mapsto f(x+h)$ сдвига на h в том же базисе.

Определение 2.6. Говорят, что две матрицы $A,\ B\colon V \to V$ *коммутируют*, если $AB = BA$. Другими словами, их коммутатор $[A,\ B] = AB - BA$ равен 0.

Задача 2.7. Найти все матрицы в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, коммутирующие с жордановой клеткой $J_n(\lambda)$.

Решение. Во-первых, заметим, что $\forall B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ множество

$$N(B) := \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \mid [A,\ B] = 0\}$$

является векторным пространством[20]. Во-вторых, так как $J_n(\lambda) = = \lambda E + J_n(0)$, а скалярные матрицы коммутируют со всеми матрицами, то достаточно найти пространство матриц, коммутирующих с $J_n := J_n(0)$. Ясно, что алгебра $\mathbb{K}[J_n]$ матриц вида (ср. 24):

$$f(J_n) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{n-2} \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \ldots & \alpha_{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_0 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

где $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_{n-1}t^{n-1} \in \mathbb{K}[t]$, является коммутативной подалгеброй в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ размерности n (поскольку $(J_n)^n = 0$), то есть $\mathbb{K}[J_n] \subset N(J_n)$. Покажем, что в действительности $\mathbb{K}[J_n] = N(J_n)$. Матрица J_n является матрицей оператора φ, действующего в выбранном базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ по формуле $\varphi(\mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_{k-1},\ 2 \le k \le n,\ \varphi(\mathbf{e}_1) = = \mathbf{0}$. Пусть $A \in N(J_n)$. Пусть

$$A\mathbf{e}_n = \alpha_{n-1}\mathbf{e}_1 + \alpha_{n-2}\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_0\mathbf{e}_n,$$

где α_k — некоторые скаляры. Тогда

$$A\mathbf{e}_{n-1} = AJ_n\mathbf{e}_n = J_nA\mathbf{e}_n = \alpha_{n-2}\mathbf{e}_1 + \alpha_{n-3}\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_0\mathbf{e}_{n-1},$$

$$A\mathbf{e}_{n-2} = AJ_n\mathbf{e}_{n-1} = J_nA\mathbf{e}_{n-1} = \alpha_{n-3}\mathbf{e}_1 + \alpha_{n-4}\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_0\mathbf{e}_{n-2}$$

[20] Даже подалгеброй с единицей в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, поскольку $[AC,\ B] = A[C,\ B] + +[A,\ B]C$.

и так далее. Таким образом, оператор A в данном базисе имеет матрицу (26). ■

Векторное пространство квадратных матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ можно отождествить с арифметическим пространством $\mathbb{R}^{n^2}$, например, выбрав в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ базис из матричных единиц E_{ij}. При этом отождествлении матрице $A = (a_{ij})$ сопоставляется набор ее координат — матричных элементов (a_{ij}) (упорядоченных в соответствии с выбранным порядком в базисе из матричных единиц). Пространство $\mathbb{R}^{n^2}$ можно рассматривать как метрическое пространство относительно стандартной метрики, в которой квадрат длины $|\mathbf{a}|^2$ вектора $\mathbf{a} = (a_k)$ выражается формулой $|\mathbf{a}|^2 = = \sum_{k=1}^{n^2} a_k^2$ (в терминах матрицы A это равно $|A|^2 := \mathrm{tr}(A^T A)$[21]).
Таким образом, $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ — метрическое пространство. Напомним, что подмножество $M \subset X$ метрического пространства X называется *плотным* [31], если для любой точки $x \in X$ любая ее окрестность U_x имеет непустое пересечение с M. Равносильное определение: подмножество M плотно в X, если всякая точка $x \in X$ является точкой прикосновения M, или, что эквивалентно, замыкание M совпадает с X.

Задача 2.8. Доказать, что множество обратимых матриц порядка n плотно в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Решение. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ — произвольная матрица. Рассмотрим ее характеристический многочлен $\chi_A(t) = \det(tE - A)$. Многочлен $\chi_A(t)$ ненулевой, поскольку у него коэффициент при t^n равен 1. Ненулевой многочлен степени n имеет не более n корней, поэтому существует проколотая окрестность точки $t = 0$ на прямой, в которой нет корней $\chi_A(t)$. Для любого t, не принадлежащего множеству корней $\chi_A(t)$, матрица $A - tE$ обратима. Таким образом, любая окрестность матрицы A в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ содержит обратимую матрицу. ■

Комментарии. 1) Во-первых, заметим, что в предшествующих рассуждениях поле $\mathbb{R}$ может быть заменено полем $\mathbb{C}$.
2) Множество необратимых матриц порядка n совпадает с множеством нулей

$$\{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 0\}$$

многочлена $\det A$ от n^2 переменных — элементов матрицы A. В частности, оно замкнуто (поскольку многочлен — непрерывная функция), а дополнение к нему — множество обратимых матриц — открыто.
3) Полученный в задаче результат позволяет распространять “по непрерывности” тождества, известные для обратимых матриц, на все матрицы (в случае полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Докажем, например, равенство $\chi_{AB}(t) = \chi_{BA}(t)$ для

[21] Мы предостерегаем читателя от путаницы: здесь и ниже $|A|$ обозначает не определитель, а евклидову длину матрицы A как вектора пространства $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ со скалярным произведением $(A,\, B) = \mathrm{tr}(A^T B)$, см. задачу 3.6.

любых A, $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Если матрица A обратима, то матрицы AB и BA сопряжены: $BA = A^{-1}(AB)A$, и требуемое равенство следует из инвариантности характеристического многочлена оператора относительно замен базиса. Рассмотрим теперь многочлен $f_{AB}(t) := \chi_{AB}(t) - -\chi_{BA}(t)$. Коэффициенты $f_{AB}(t)$, являясь непрерывными функциями (многочленами) матричных элементов A (при фиксированной матрице B), обращаются в 0 на плотном подмножестве в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, состоящем из обратимых матриц. Значит, они равны нулю всюду[22]. Другой пример использования этого метода — распространение полярного разложения на вырожденные матрицы при условии, что оно доказано для невырожденных (см. задачу 3.45).

Задача 2.9. Доказать, что множество диагонализируемых матриц плотно в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.

Решение. Заметим, что произвольную матрицу $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ можно привести к верхнему треугольному виду (см. задачу 2.34, а также [10], гл. VI, § 4), то есть существует такая обратимая матрица $C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, что $C^{-1}AC = T$, где матрица T — верхняя треугольная. На главной диагонали T стоит набор $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ собственных значений матрицы T (и A). Если они попарно различны, то матрица A диагонализируема. Если среди них есть совпадающие, то их можно сколь угодно мало изменить, чтобы сделать попарно различными. Пусть при этом мы получили диагонализируемую матрицу T' с попарно различными собственными значениями $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$, то же можно сказать и про матрицу $A' := CT'C^{-1}$. Выбирая T' сколь угодно мало отличающейся от T, можно сделать A' сколь угодно мало отличающейся от $A = CTC^{-1}$, поскольку матричные элементы A' являются линейными функциями от матричных элементов T', а значит, непрерывны. $\blacksquare$

Комментарий. Достаточным условием диагонализируемости матрицы A над $\mathbb{C}$ является отсутствие кратных корней у ее характеристического многочлена $\chi_A(t)$. Подмножество матриц в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ без кратных корней задается условием, что дискриминант $\Delta(\chi_A(t)) \neq 0$. Заметим, что $\Delta(\chi_A(t))$ — ненулевой многочлен от матричных элементов A (которые мы считаем независимыми переменными), его множество нулей — собственное замкнутое подмножество в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.

Доказанный в задаче результат позволяет распространять “по непрерывности” тождества, известные для диагонализируемых матриц, на все матрицы данного порядка над $\mathbb{C}$. Пример такого доказательства дает следующая задача.

Напомним, что теорема Гамильтона—Кэли утверждает, что характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ аннулирует оператор, то есть $\chi_\varphi(\varphi) = 0$.

Задача 2.10. Используя результат предыдущей задачи, доказать теорему Гамильтона—Кэли для полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

---

[22] Здесь мы используем следующий результат из анализа: непрерывная функция $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, равная нулю на плотном подмножестве $U \subset \mathbb{R}^m$, равна нулю на всем $\mathbb{R}^m$.

Решение. Рассмотрим вначале случай алгебраически замкнутого поля $\mathbb{C}$. Пусть в некотором базисе оператор φ имеет матрицу A. Для диагонализируемых операторов теорема почти очевидна. Действительно, если $A = C\Lambda C^{-1}$, где $\Lambda := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, то

$$\chi_A(t) = \prod_i (t - \lambda_i) \quad \Rightarrow \quad \chi_A(A) = \chi_A(C\Lambda C^{-1}) =$$

$$= C\chi_A(\Lambda)C^{-1} = C\left(\prod_i (\Lambda - \lambda_i E)\right)C^{-1} = 0.$$

Для доказательства в общем случае осталось лишь заметить, что $A \mapsto \chi_A(A)$ — непрерывная функция $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, равная 0 на плотном подмножестве, состоящем из диагонализируемых матриц, следовательно, она тождественно равна нулю на всем множестве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.

Осталось доказать теорему для случая поля $\mathbb{R}$. Пусть $A \in$ $\in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ — матрица оператора, действующего на вещественном векторном пространстве. Матрицу A можно рассматривать и как матрицу из $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, и тогда по доказанному получаем $\chi_A(A) = = 0$. При этом понятно, что характеристический многочлен $\chi_A(t)$ не зависит от того, рассматриваем ли мы матрицу A как матрицу с вещественными или комплексными элементами. ■

Напомним определение *порядка элемента* g группы G. Если существует такое натуральное число $N \geq 1$, что $g^N = e$, то порядком g называется наименьшее из таких натуральных чисел (из алгоритма Евклида легко следует, что порядок g является делителем любого натурального N такого, что $g^N = e$). В противном случае порядок g полагается равным бесконечности.

Задача 2.11. Найдите порядок элемента

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — различные комплексные корни n-й степени из 1.

Решение. Так как матрица A верхняя треугольная с элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на главной диагонали, то ее собственные значения — в точности все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n-й степени из 1. Поэтому характеристический многочлен $\chi_A(t)$ матрицы A равен $t^n - 1$. По теореме Гамильтона-Кэли $A^n = E$, поэтому порядок $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ делит n. С другой стороны, он не может быть меньше n, поскольку при возведении верхней треугольной матрицы в степень k ее диагональные элементы возводятся в степень k, а так как группа корней степени n из 1 является циклической, в ней есть элемент, порядок которого совпадает с порядком (= числом элементов) этой группы, то есть n.

Без использования теоремы Гамильтона-Кэли можно рассуждать так. Из условия следует, что все собственные значения оператора попарно различны и являются всеми корнями n-й степени из 1. Из первого вытекает диагонализируемость оператора, а из второго — что его порядок равен n. ■

Задача 2.12. Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор, $\chi_\varphi(t) = \prod_{i=1}^k (t-\lambda_i)^{r_i}$, $r_i \geq \geq 1$ — его характеристический многочлен, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Доказать, что φ диагонализируем $\Leftrightarrow$ $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq k$ и многочлен $m_\varphi(t) := \prod_{i=1}^k (t-\lambda_i)$ аннулирует φ (на самом деле он совпадает с минимальным многочленом φ).

Решение. Пусть φ диагонализируем. Тогда в V существует базис, состоящий из собственных векторов оператора φ. Так как сумма собственных подпространств, отвечающих разным собственным значениям, является прямой (см. [10], VI, § 4), то

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_l}, \quad l \leq k, \tag{27}$$

где V_{λ_i} — собственное подпространство, отвечающее собственному значению λ_i. Поскольку размерность собственного подпространства V_{λ_i} не превосходит кратности r_i корня λ_i характеристического многочлена (см. [10], VI, § 4), (27) возможно, только если $\dim V_{\lambda_i} = r_i$ и $l = k$. Значит, все $\lambda_i \in \mathbb{K}$. С другой стороны, легко видеть, что ограничение $\varphi - \lambda_i \mathrm{id}$ на V_{λ_i} — нулевой оператор. Тогда $\prod_{i=1}^k (\varphi - \lambda_i \mathrm{id})$ — нулевой оператор на V. Значит, $m_\varphi(t)$ аннулирует φ.
Обратно, пусть $m_\varphi(t)$ аннулирует φ. Определим многочлены $g_i(t) := m_\varphi(t)(t-\lambda_i)^{-1}$, $1 \leq i \leq k$. Очевидно, что

$$L_i := \mathrm{im}(g_i(\varphi)) \subset V_{\lambda_i}.$$

Многочлены $g_1(t), \ldots, g_k(t) \in \mathbb{K}[t]$ взаимно просты в совокупности, поэтому существуют многочлены $h_i(t)$, $1 \leq i \leq k$ такие, что $\sum_{i=1}^k g_i(t)h_i(t) = 1$. Тогда $\sum_{i=1}^k g_i(\varphi)h_i(\varphi) = \mathrm{id}_V$, а следовательно, $V = L_1 + \ldots + L_k$. Так как $L_i \subset V_{\lambda_i}$ и $V_{\lambda_i} \cap (\oplus_{j\neq i} V_{\lambda_j}) = \{\mathbf{0}\}$, то $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$ (и $L_i = V_{\lambda_i}$). ■

Определение 2.13. Линейный оператор $\varphi\colon V \to V$ называется *нильпотентным*, если существует такое натуральное k, что $\varphi^k = = 0$. Наименьшее k с указанным свойством называется *высотой оператора* или *порядком нильпотентности.*

Например, жорданова клетка $J_n(0)$ нильпотентна: $J_n(0)^n = 0$. Следующая задача является важным этапом при доказательстве теоремы о жордановой нормальной форме (ЖНФ).

Задача 2.14. Пусть N — нильпотентный оператор высоты n и $\mathbf{e}$ — такой вектор, что $N^{n-1}\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$. Доказать, что система векторов $\{\mathbf{e},\, N\mathbf{e},\, N^2\mathbf{e}, \ldots,\, N^{n-1}\mathbf{e}\}$ линейно независима.

Решение. Предположим обратное: существуют такие не равные одновременно нулю константы $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$, что

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j N^j \mathbf{e} = \mathbf{0}.$$

Пусть k — номер первого ненулевого коэффициента $\alpha_k \neq 0$. В таком случае после применения к левой и правой частям последней формулы оператора N^{n-k-1} получим

$$\alpha_k N^{n-1}\mathbf{e} + \alpha_{k+1} N^n \mathbf{e} + \cdots = \mathbf{0}.$$

Все слагаемые, кроме первого, по определению нильпотентного оператора нулевые. Значит, в силу выбора вектора $\mathbf{e}$ получаем, что $\alpha_k = 0$. Следовательно, все коэффициенты α_j равны нулю. Значит, наша система линейно независима. ■

Комментарий. Отметим, что полученная система линейно независима, но совсем не обязана быть базисом. Проверьте, что примером такого оператора является оператор, ЖНФ которого состоит из нескольких жордановых клеток с нулевым собственным значением.

Задача 2.15. Рассмотрим нильпотентный оператор $N : V \to \to V$. Доказать, что порядок нильпотентности оператора N не может превышать $\dim V$.

Решение. Предположим обратное. Значит, существует такой вектор $\mathbf{e} \in V$, что $N^n\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$, причем $n > \dim V$. Как было показано в задаче 2.14, система векторов $\{\mathbf{e}, N\mathbf{e}, \ldots, N^n\mathbf{e}\}$ линейно независима, чего не может быть, так как $n > \dim V$. ■

Отсюда, например, следует, что не существует решений уравнения $x^3 = 0$, которые не были бы решениями уравнения $x^2 = 0$ среди квадратных матриц $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{K})$.

Задача 2.16. Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор на V. Предположим, что все корни характеристического многочлена[23] φ равны 0 (в случае алгебраически замкнутого основного поля $\mathbb{K}$ это эквивалентно равенству нулю всех собственных значений φ). Доказать, что тогда φ нильпотентен.

Решение. Характеристический многочлен φ имеет только нулевой корень, значит, $\chi_\varphi(t) = t^n$, где $n = \dim V$. По теореме Гамильтона—Кэли, $\varphi^n = 0$. Кстати, заметим, что для наименьшего k такого, что $\varphi^k = 0$, мы еще раз получили оценку $k \leq \leq \dim V$, причем все случаи $1 \leq k \leq n$ реализуются (взять в левом верхнем углу жорданову клетку $J_k(0)$ и дополнить нулями, если $k < n$). ■

Комментарий. Заметим, что если линейный оператор φ на векторном пространстве V нильпотентен, то все его собственные значения равны 0. Действительно, предположим, что у нильпотентного оператора φ степени нильпотентности n есть собственное значение λ. Тогда существует $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ такой, что $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} \;\Rightarrow\; \mathbf{0} = \varphi^n(\mathbf{v}) = \lambda^n\mathbf{v} \;\Rightarrow\; \lambda^n = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 0$. Кроме того, 0 является собственным значением φ. Действительно, $\varphi^{n-1} \neq 0$, значит, существует $\mathbf{u} \in V$ такой, что $\varphi^{n-1}(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$, но $\varphi^n(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Полагая $\mathbf{w} := \varphi^{n-1}(\mathbf{u})$, имеем $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, но $\varphi(\mathbf{w}) = = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; 0$ является собственным значением φ.

[23] В алгебраическом замыкании $\mathbb{K}$.

Более того, верно утверждение, обратное доказанному в предшествующей задаче: все корни характеристического многочлена нильпотентного оператора φ равны 0. Для алгебраически замкнутого основного поля $\mathbb{K}$ это следует из предыдущего: в этом случае все корни характеристического многочлена являются собственными значениями. Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то для доказательства можно использовать комплексификацию V (см. ниже), а в общем случае — расширение поля скаляров (см. [35]). Доказательство в случае произвольного поля $\mathbb{K}$ можно также получить, используя задачу 2.35.

Задача 2.17. Доказать, что симметричная нильпотентная матрица A с вещественными элементами нулевая.

Решение. Вещественная симметричная матрица A обязательно диагонализируема, то есть существует невырожденная матрица C такая, что матрица $\Lambda = C^{-1}AC$ диагональна, причем на ее главной диагонали стоят собственные значения матрицы A, которые, согласно вышесказанному, равны нулю. ■

Комментарий. Заметим, что для матриц с комплексными элементами утверждение задачи неверно. Контрпример дает, например, матрица $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$, подобная над $\mathbb{C}$ матрице $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (последнее следует из теории жордановой формы). Вообще, можно показать, что любая комплексная матрица подобна симметричной.

"Правильным" комплексным аналогом вещественных симметричных матриц являются эрмитово симметричные матрицы, то есть такие матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, для которых $\overline{A}^T = A$, где черта означает комплексное сопряжение (такая матрица с вещественными элементами симметрична). Дело в том, что симметричные и эрмитово симметричные матрицы являются матрицами самосопряженных операторов в ортонормированных базисах в евклидовом и унитарном пространстве соответственно.

Задача 2.18. Доказать, что если квадратные матрицы A и B порядка n над полем $\mathbb{K}$ характеристики 0 удовлетворяют соотношению $AB - BA = B$, то матрица B нильпотентна.

Решение. Докажем индукцией по k, что $AB^k - B^kA = kB^k$ $\forall k \in \in \mathbb{N}$. При $k = 0$ равенство очевидно, случай $k = 1$ следует из условия. Пусть $k > 1$. Тогда

$$AB^k - B^kA = (BA + B)B^{k-1} - BB^{k-1}A =$$
$$= B(AB^{k-1} - B^{k-1}A) + B^k = (k-1)B^k + B^k = kB^k.$$

Рассмотрим линейный оператор

$$\Phi_A \colon \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}), \quad \Phi_A(X) := AX - XA.$$

Если матрица B не нильпотентна, то матрицы B^k, $k \in \mathbb{N}$ являются собственными векторами оператора Φ_A, отвечающими собственным значениям k. Это невозможно, так как собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы, а пространство $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ конечномерно. ■

Задача 2.19. Пусть f — ненулевая линейная функция на векторном пространстве V (не обязательно конечномерном) над (произвольным) полем $\mathbb{K}$, $U = \ker(f)$. Доказать, что

a) U — *максимальное* подпространство V, т.е. оно не содержится ни в каком другом подпространстве в V, отличном от V;

b) $V = U \oplus \langle \mathbf{v} \rangle$ для любого $\mathbf{v} \notin U$;

c) если g — еще одна линейная функция на V и $\ker g = \ker f$, то существует такой $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$, что $g = \alpha f$.

Решение. Напомним, что $\ker f := \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = 0\}$ — *ядро* линейной функции f.
Пусть дано подпространство $W \subset V$ такое, что $U \subsetneq W \subset V$; нужно доказать, что $W = V$. Выберем $\mathbf{w} \in W,\ \mathbf{w} \notin U \ \Rightarrow\ f(\mathbf{w}) \neq \neq \mathbf{0}$. Возьмем произвольный $\mathbf{v} \in V \ \Rightarrow\ \mathbf{v} - \frac{f(\mathbf{v})}{f(\mathbf{w})}\mathbf{w} \in U \ \Rightarrow\ \mathbf{v} \in \in W \ \Rightarrow\ W = V$. Тем самым пункт a) доказан.
$f \neq 0 \ \Rightarrow\ \exists \mathbf{v} \in V$ такой, что $f(\mathbf{v}) \neq 0$. Выберем произвольный $\mathbf{v}' \in V \ \Rightarrow$ $\mathbf{v}' - \frac{f(\mathbf{v}')}{f(\mathbf{v})}\mathbf{v} \in U \ \Rightarrow\ V = U \oplus \langle \mathbf{v} \rangle$. Тем самым пункт b) доказан.
Выберем $\mathbf{v} \in V,\ \mathbf{v} \notin \ker f = \ker g \ \Rightarrow\ \exists \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha \neq 0$, такой, что $g(\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$. Рассмотрим линейную функцию $h := g - \alpha f$. Имеем $h(\mathbf{v}) = 0,\ h|_U = 0$; но, в силу пункта b), $V = U \oplus \langle \mathbf{v} \rangle \ \Rightarrow \Rightarrow\ h = 0$. Тем самым пункт c) доказан. ∎

Комментарий. Полезность данной задачи заключается в демонстрации того, как можно работать с линейными пространствами без условия конечномерности и использования базисов.

Задача 2.20. Пусть V — линейное пространство размерности n, а $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор. Доказать, что все $n-1$-мерные φ-инвариантные подпространства в V имеют вид $\ker f$ для некоторого собственного вектора f оператора φ^*. Обратно, доказать, что любое подпространство вида $\ker f$, где f — некоторый собственный вектор оператора φ^*, инвариантно относительно φ.

Решение. Напомним, что для линейного пространства V над полем $\mathbb{K}$ через V^* обозначается *двойственное пространство*

$$V^* := \{f\colon V \to \mathbb{K} \mid f \text{ линейно над } \mathbb{K}\},$$

то есть пространство всех линейных функционалов на V. Если V конечномерно, то V^* тоже конечномерно, причем имеет ту же размерность, что и V. Для каждого линейного отображения $\varphi\colon V \to W$ имеем линейное отображение $\varphi^*\colon W^* \to V^*$, которое произвольный линейный функционал $f \in W^*$ переводит в линейный функционал $\varphi^*(f) \in V^*$, однозначно определяемый условием, что на произвольном векторе $\mathbf{v} \in V$ он принимает значение $f(\varphi(\mathbf{v}))$, то есть определяемое формулой $\varphi^*(f)(\mathbf{v}) = = f(\varphi(\mathbf{v}))\ \forall\, \mathbf{v} \in V,\ f \in W^*$[24]. В частности, для линейного оператора $\varphi\colon V \to V$ имеем линейный оператор $\varphi^*\colon V^* \to V^*$.

[24]Нетрудно показать, что * определяет контравариантный функтор из категории линейных пространств над полем $\mathbb{K}$ в себя, см. [35], гл. 1, § 13.

Пусть $U \subset V$ — φ-инвариантное подпространство в V, $\dim U = = n-1$. Тогда $\exists\, f \in V^*$ такой, что $U = \ker f := \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = 0\}$ (очевидно, что $f \neq 0$). Из предыдущей задачи следует, что такой f определен однозначно с точностью до умножения на ненулевой скаляр $\alpha \in \mathbb{K}$. Кроме того, если для некоторого $g \in V^*$ из $\mathbf{u} \in U$ следует $g(\mathbf{u}) = 0$, то $g = \lambda f$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Последнее как раз верно для $g = \varphi^*(f)$:

$$\forall\, \mathbf{u} \in U \;\; \varphi^*(f)(\mathbf{u}) = f(\varphi(\mathbf{u})) = 0,$$

следовательно, $\varphi^*(f) = \lambda f$, то есть $f \in V^*$ — собственный вектор оператора φ^*.

Обратно, пусть $\varphi^*(f) = \lambda f$. Тогда из $\mathbf{u} \in U$ следует $\varphi^*(f)(\mathbf{u}) = = \lambda f(\mathbf{u}) = 0$, значит, $f(\varphi(\mathbf{u})) = 0\; \forall \mathbf{u} \in U \;\Rightarrow\; \varphi(\mathbf{u}) \in U$, поскольку $U = \ker f$. ■

Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор, $U \subset V$ — инвариантное относительно φ подпространство, то есть $\varphi(U) \subset U$. Тогда определено *ограничение* $\varphi|_U$ оператора φ на подпространство U, которое является оператором на пространстве U, задаваемым формулой

$$\varphi|_U(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}) \quad \forall\, \mathbf{u} \in U.$$

Для краткости обозначим $\psi := \varphi|_U$. Выберем базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ в $U \subset V$ и дополним его до базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n\}$ всего V, в нем оператор φ имеет матрицу $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где A — матрица ψ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$[25]. Из этого легко видеть, что характеристический многочлен $\chi_\psi(t)$ ограничения $\psi = \varphi|_U$ делит характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ оператора φ.

Задача 2.21. Пусть φ — линейный оператор на V, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ — набор его различных собственных значений, принадлежащих основному полю, $V_{\lambda_j} \subset V$ — соответствующие собственные подпространства. Пусть $U \subset V$ — φ-инвариантное подпространство. Доказать, что если для $\mathbf{u} \in U$ существует представление

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_k, \tag{28}$$

где $\mathbf{v}_j \in V_{\lambda_j}$, то $\mathbf{v}_j \in U \;\; \forall\, j,\; 1 \leq j \leq k$.

Решение. Воспользуемся индукцией по числу l ненулевых слагаемых в разложении (28). Для $l = 1$ утверждение очевидно. Допустим, что требуемое утверждение верно для разложений вида (28) с числом ненулевых компонент $\mathbf{v}_j$, не превосходящим $l-1$, докажем, что тогда утверждение верно для разложений с l ненулевыми компонентами. Без ограничения общности можно считать, что ненулевыми являются первые l компонент в (28). Пусть

$$U \ni \mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_l, \tag{29}$$

где все $\mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}$. Тогда $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_l \mathbf{v}_l$. Вычитая из последнего тождества равенство, полученное умножением обеих частей (29) на λ_l, имеем

$$\varphi(\mathbf{u}) - \lambda_l \mathbf{u} = (\lambda_1 - \lambda_l)\mathbf{v}_1 + \ldots + (\lambda_{l-1} - \lambda_l)\mathbf{v}_{l-1}.$$

[25] Блок C также имеет интерпретацию — это матрица *фактороператора*, он определен перед задачей 2.33.

Мы получили разложение вида (28), содержащее $l-1$ ненулевую компоненту, следовательно, по предположению индукции, $\mathbf{v}_j \in \in U \cap V_{\lambda_j}$, $1 \le j \le l-1$. Но тогда из (29) и $\mathbf{v}_l \in U$, что и требовалось доказать.
Приведем также вариант доказательства (в предположении бесконечности основного поля) без использования индукции. Подействуем на $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_k \in U$ оператором φ, получим

$$\varphi(\mathbf{u}) = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_k \mathbf{v}_k \in U.$$

Далее,

$$\varphi^2(\mathbf{u}) = \lambda_1^2 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_k^2 \mathbf{v}_k \in U, \ \ldots,$$
$$\varphi^{k-1}(\mathbf{u}) = \lambda_1^{k-1} \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_k^{k-1} \mathbf{v}_k \in U.$$

Переписывая полученные равенства в матричном виде, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_k^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \\ \ldots \\ \mathbf{v}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \ldots \\ \mathbf{u}_k \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{u}_j := \varphi^{j-1}(\mathbf{u}) \in U$, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$. Матрица слева — матрица Вандермонда, при $\lambda_i \ne \lambda_j$ она обратима $\Rightarrow$ все $\mathbf{v}_j$ также лежат в U. ■
Положив в условии предыдущей задачи $U = \{\mathbf{0}\}$, в качестве следствия получим следующее важное утверждение: *собственные векторы, отвечающие разным собственным значениям, линейно независимы.*

Задача 2.22. Доказать, что если оператор $\varphi\colon V \to V$ диагонализируем, то и его ограничение $\varphi|_U$ на любое инвариантное подпространство $U \subset V$ диагонализируемо.

Решение. Очевидно, что оператор φ диагонализируем $\Leftrightarrow$ $V = = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$. В предыдущей задаче доказано, что если подпространство $U \subset V$ φ-инвариантно, то для представления произвольного вектора $\mathbf{u} \in U$ вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_k,$$

где $\mathbf{v}_j \in V_{\lambda_j}$, следует $\mathbf{v}_j \in U$ $\forall j$. Другими словами, $U = (U \cap V_{\lambda_1}) \oplus \oplus \ldots \oplus (U \cap V_{\lambda_k})$. Отсюда следует диагонализируемость оператора $\varphi|_U$, так как $U \cap V_{\lambda_j}$ — его собственные подпространства.
Другое решение задачи можно получить, используя задачу 2.12 и тот факт, что если $f(t) \in \mathbb{K}[t]$, $U \subset V$ — φ-инвариантное подпространство, то $f(\varphi|_U) = f(\varphi)|_U$, а значит, минимальный многочлен оператора $\varphi|_U$ делит минимальный многочлен φ (такое решение приведено в [15], гл. 6, § 5). ■

Задача 2.23. Пусть оператор $\varphi\colon V \to V$ диагонализируем. Тогда любое его φ-инвариантное подпространство $U \subset V$ имеет φ-инвариантное прямое дополнение $W \subset V$, то есть такое φ-инвариантное подпространство $W \subset V$, что $V = U \oplus W$.

Решение. В предыдущих обозначениях пусть

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}, \quad U = (U \cap V_{\lambda_1}) \oplus \ldots \oplus (U \cap V_{\lambda_k}).$$

Для каждого подпространства $U \cap V_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}$ выберем произвольное прямое дополнение $W_i \subset V_{\lambda_i}$. Тогда подпространство $W = = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k \subset V$ является φ-инвариантным и $V = U \oplus W$. ■

Задача 2.24. Пусть V — векторное пространство над бесконечным полем, $\dim V = n$.

a) Пусть оператор $\varphi\colon V \to V$ диагонализируем. Тогда собственные значения φ попарно различны тогда и только тогда, когда φ имеет циклический вектор, то есть такой вектор $\mathbf{v} \in V$, что $\mathbf{v}$, $\varphi(\mathbf{v}), \ldots, \varphi^{n-1}(\mathbf{v})$ порождают все пространство V.

b) Пусть степень минимального многочлена оператора φ равна n. Тогда φ имеет циклический вектор.

Решение. a) Предположим, что собственные значения φ попарно различны; пусть $\mathbf{v}_i$ — собственный вектор с собственным значением λ_i, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ — базис в V. Положим $\mathbf{v} := \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_n$. Тогда

$$\varphi(\mathbf{v}) = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n,\ \ldots,\ \varphi^{n-1}(\mathbf{v}) = \lambda_1^{n-1}\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n^{n-1}\mathbf{v}_n$$

и матрицей перехода от базиса $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ к системе векторов

$$\{\mathbf{v},\, \varphi(\mathbf{v}),\, \varphi^2(\mathbf{v}),\, \ldots,\, \varphi^{n-1}(\mathbf{v})\} \tag{30}$$

является матрица Вандермонда, которая обратима и поэтому вторая система — тоже базис в V.

Обратно, пусть $\mathbf{v}$ — циклический вектор. Тогда система векторов (30) линейно независима, откуда следует, что минимальный многочлен $m_\varphi(t)$ оператора φ имеет степень n и совпадает с характеристическим, значит (в силу диагонализируемости φ), все собственные значения φ попарно различны.

b) Предположим противное, что система (30) линейно зависима для $\forall \mathbf{v} \in V$. Для каждого вектора $\mathbf{v} \in V$ существует наибольшее $k = k(\mathbf{v})$, $0 \le k < n$ такое, что система

$$\{\mathbf{v},\, \varphi(\mathbf{v}),\, \varphi^2(\mathbf{v}),\, \ldots,\, \varphi^{k-1}(\mathbf{v})\}$$

линейно независима. Линейную оболочку последней системы обозначим $U_\mathbf{v}$. То есть каждый вектор $\mathbf{v} \in V$ содержится в φ-инвариантном подпространстве $U_\mathbf{v} \subsetneq V$.

Пусть $\psi_\mathbf{v} := \varphi|_{U_\mathbf{v}}$. Тогда $\deg \chi_{\psi_\mathbf{v}}(t) = k < n$. Кроме того, по теореме Гамильтона-Кэли $U_\mathbf{v} \subset \ker \chi_{\psi_\mathbf{v}}(\varphi) \subsetneq V$ (последнее потому что степень минимального многочлена φ равна $n > k$ по условию). Каждый из многочленов $\chi_{\psi_\mathbf{v}}(t)$ является делителем $\chi_\varphi(t)$ (см текст перед Задачей 2.21). Следовательно их конечное число, а также конечно число подпространств в V вида $\ker \chi_{\psi_\mathbf{v}}(\varphi)$. Таким образом, векторное пространство V над бесконечным полем покрывается конечным числом собственных подпространств, что, очевидно, невозможно. Действительно, предположив противное, для каждого такого подпространства рассмотрим ненулевую линейную функцию, обращающуюся на нем в нуль, тогда их произведение обратится в нуль на всем пространстве, будучи в координатах ненулевым однородным многочленом. Полученное противоречие доказывает пункт b). ■

Задача 2.25. Доказать, что если линейный оператор $\varphi\colon V \to V$ коммутирует с нильпотентным оператором $\eta\colon V \to V$, то собственные значения φ и $\varphi + \eta$ совпадают.

Решение. Пусть λ — собственное значение φ и $V_\lambda \subset V$ — соответствующее собственное подпространство. Для произвольного $\mathbf{v} \in V_\lambda$ имеем

$$\varphi(\eta(\mathbf{v})) = \eta(\varphi(\mathbf{v})) = \lambda\,\eta(\mathbf{v}) \;\;\Rightarrow\;\; \eta(V_\lambda) \subset V_\lambda.$$

Так как оператор η нильпотентен, то $\eta(V_\lambda) \neq V_\lambda$, то есть существует $\mathbf{v} \in V_\lambda$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ такой, что $\eta(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Тогда

$$(\varphi + \eta)(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}) = \lambda\,\mathbf{v},$$

то есть $\mathbf{v}$ — собственный вектор оператора $\varphi+\eta$ с собственным значением λ. Таким образом, каждое собственное значение φ является также собственным значением $\varphi + \eta$. Обратное теперь также очевидно. ■

Комментарий. Пример матриц $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ показывает, что условие коммутирования φ и η нельзя отбросить.

Задача 2.26. 1) Доказать, что два диагонализируемых оператора $\varphi,\,\psi\colon V \to V$ коммутируют тогда и только тогда, когда они имеют общий базис из собственных векторов.
2) Распространить этот результат на произвольное множество коммутирующих диагонализируемых операторов.

Решение. 1) Тождество $\varphi\psi = \psi\varphi$ влечет $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})\psi = \psi(\varphi- -\lambda\,\mathrm{id})$ для любого скаляра λ. Значит, произвольное собственное подпространство V_λ оператора φ является ψ-инвариантным. По условию ψ диагонализируемо, значит, согласно задаче 2.22, его ограничение на V_λ диагонализируемо, то есть для $\psi|_{V_\lambda}$ есть базис из собственных векторов, которые, очевидно, собственные также и для φ (с собственным значением λ). Поскольку $V = V_{\lambda_1} \oplus \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — все попарно различные собственные значения оператора φ, и в каждом V_{λ_j} есть общий собственный базис для $\psi|_{V_{\lambda_j}}$ и $\varphi|_{V_{\lambda_j}}$, то объединение таких базисов по всем j, $1 \le j \le k$, даст требуемый базис во всем V.
Таким образом, из $[\varphi,\, \psi] = 0$ следует существование общего базиса из собственных векторов. Обратное утверждение очевидно.
2) Пусть у нас есть три коммутирующих диагонализируемых оператора φ, ψ, χ. Пусть V_λ и W_μ — собственные подпространства операторов φ и ψ соответственно. Тогда, как установлено ранее, подпространство $V_\lambda \cap W_\mu$ является χ-инвариантным.
Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — набор всех различных собственных значений оператора φ и $\mu_1, \ldots, \mu_l$ — аналогичный набор для ψ. Пусть $V_{ij} := V_{\lambda_i} \cap W_{\mu_j}$. Из предыдущего пункта следует, что сумма подпространств $V_{ij} \subset V$ совпадает с V (так как содержит базис). Кроме того, покажем, что эти подпространства линейно независимы, то есть из $\sum \mathbf{v}_{ij} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{v}_{ij} \in V_{ij}$, следует, что все

$\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{0}$. Для этого рассмотрим систему равенств

$$\sum_i \left(\sum_j \mathbf{v}_{ij}\right) = \mathbf{0}, \qquad \sum_i \lambda_i \left(\sum_j \mathbf{v}_{ij}\right) = \mathbf{0}, \quad \ldots,$$

$$\sum_i \lambda_i^{k-1} \left(\sum_j \mathbf{v}_{ij}\right) = \mathbf{0},$$

получающуюся из первого последовательным применением φ. Далее, рассуждая, как во втором способе в решении задачи 2.21, получаем, что $\sum_j \mathbf{v}_{ij} = \mathbf{0} \ \forall\, i$. Применяя теперь к последнему равенству ψ, получаем $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{0} \ \forall\, i,\, j$. Далее ограничиваем χ на каждое ненулевое подпространство вида V_{ij} и замечаем, что пространство V по доказанному представляется в виде их прямой суммы. Снова применяя задачу 2.22, получаем, что ограничение χ на все V_{ij} диагонализируемо. Теперь уже очевидно, как, используя индукцию, доказать требуемый результат для любого конечного множества коммутирующих диагонализируемых операторов. Для того чтобы распространить его на произвольные множества, достаточно заметить, что для конечномерного пространства V пространство операторов на нем конечномерно, поэтому среди произвольного множества операторов только конечное число линейно независимых. ■

Задача 2.27. Пусть $\varphi\colon V \to V$ — диагонализируемый оператор с простым спектром. Доказать, что любой оператор $\psi\colon V \to V$ такой, что $\varphi\psi = \psi\varphi$, может быть представлен в виде многочлена от φ. Верно ли это, если спектр оператора φ не прост?

Решение. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в V, состоящий из общих собственных векторов операторов φ и ψ, существование которого было доказано в предыдущей задаче. То есть $\varphi(\mathbf{e}_i) = = \lambda_i \mathbf{e}_i$, $\psi(\mathbf{e}_i) = \mu_i \mathbf{e}_i$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Заметим, что существует многочлен $f(t)$ степени не выше $n-1$ такой, что

$$f(\lambda_i) = \mu_i, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{31}$$

Тогда для матриц операторов φ и ψ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ имеем равенство $f(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Отсюда и для операторов $f(\varphi) = \psi$.
Дадим "линейно-алгебраическое" доказательство существования многочлена $f(t)$ степени не выше $n-1$, удовлетворяющего системе (31).
Пусть $W := \mathbb{K}[x]_{n-1}$ — пространство многочленов степени не выше $n-1$. Мы знаем, что $\dim W = n$. Пусть $\theta_i \in W^*$ — набор линейных функционалов, задаваемых формулой

$$\theta_i(h) := h(\lambda_i) \; \forall h \in W.$$

Покажем, что $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ образуют базис в W^*. Так как $\dim W^* = = \dim W = n$, достаточно доказать линейную независимость.
Пусть $\sum_{i=1}^n \alpha_i \theta_i = 0$ — равенство нулю линейного функционала. Применяя его к элементам базиса $\{1,\, x, \ldots, x^{n-1}\}$ в W, получаем, что $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — решение системы линейных однородных уравнений с матрицей Вандермонда, отвечающей $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Поскольку $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, эта система имеет только тривиальное решение. Тем самым линейная независимость $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ доказана.

Пусть $\{g_1, \dots g_n\}$ — биортогональный (=взаимный) базис в $W \cong W^{**}$ к базису $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ в W^*, то есть

$$\theta_i(g_j) = g_j(\lambda_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Тогда $\forall\, h \in W$ имеем

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i(h) g_i(t) = \sum_{i=1}^{n} h(\lambda_i) g_i(t)$$

(эта формула называется *интерполяционной формулой Лагранжа*) — формула, задающая многочлен степени не выше $n-1$, принимающий в точках $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ значения $h(\lambda_1), \dots, h(\lambda_n)$, которые могут быть произвольными. В частности, задав значения (31), получим требуемый многочлен $f(t)$.
Нетрудно получить следующий явный вид многочленов g_i:

$$g_i(t) = \frac{\prod_{j \neq i}(t - \lambda_j)}{\prod_{j \neq i}(\lambda_i - \lambda_j)}. \quad \blacksquare$$

2.2. Комплексификация

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Рассмотрим векторное пространство $V \oplus V$ над $\mathbb{R}$, элементами которого являются упорядоченные пары векторов из V с покомпонентными операциями сложения и умножения на вещественные числа. То есть

$$V \oplus V = \{(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) \mid \mathbf{u},\, \mathbf{v} \in V\},$$

$$(\mathbf{u}_1,\, \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}_2,\, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2,\, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2),$$
$$\alpha(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{u},\, \alpha\mathbf{v}) \;\; \forall\, \mathbf{u},\, \mathbf{v} \in V,\; \alpha \in \mathbb{R}.$$

Легко проверить, что если $\dim V = n$, то $\dim(V \oplus V) = 2n$, и если $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в V, то $\{(\mathbf{e}_1,\, \mathbf{0}),\, (\mathbf{0},\, \mathbf{e}_1),\, (\mathbf{e}_2,\, \mathbf{0}),\, (\mathbf{0},\, \mathbf{e}_2), \dots, (\mathbf{e}_n,\, \mathbf{0}),\, (\mathbf{0},\, \mathbf{e}_n)\}$ — базис в $V \oplus V$.
Сейчас мы определим умножение элементов $V \oplus V$ на элементы поля $\mathbb{C}$, продолжающее умножение на $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, которое задаст на $V \oplus V$ структуру векторного пространства над $\mathbb{C}$. Из комментария к задаче 1.11 мы знаем, что для этого нужно задать комплексную структуру на $V \oplus V$, то есть такой линейный оператор $I\colon V \oplus V \to V \oplus V$, что $I^2 = -\mathrm{id}$ (такой I играет роль “умножения на i”). А именно, положим

$$I(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = (-\mathbf{v},\, \mathbf{u}).$$

Линейность I очевидна. Кроме того,

$$I^2(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = I(-\mathbf{v},\, \mathbf{u}) = (-\mathbf{u},\, -\mathbf{v}) = -\mathrm{id}(\mathbf{u},\, \mathbf{v}).$$

Пусть $z := \alpha + \beta i$, α, $\beta \in \mathbb{R}$ — комплексное число, тогда

$$(\alpha + \beta i)(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = (\alpha\mathrm{id} + \beta I)(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) =$$

$$= (\alpha\mathbf{u},\, \alpha\mathbf{v}) + (-\beta\mathbf{v},\, \beta\mathbf{u}) = (\alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v},\, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{u}).$$

Из определения I следует, что $I(\mathbf{v},\, \mathbf{0}) = (\mathbf{0},\, \mathbf{v})$. Чтобы упростить обозначения, обозначим $(\mathbf{u},\, \mathbf{0})$ через $\mathbf{u}$, тогда $(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = \mathbf{u}+ +i\mathbf{v}$, и в этих обозначениях умножение на комплексные числа запишется в виде

$$(\alpha + \beta i)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v} + i(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{u}). \tag{32}$$

Легко проверить, что это определяет на $V \oplus V$ структуру векторного пространства над $\mathbb{C}$, которое мы обозначим $V^{\mathbb{C}}$ и назовем *комплексификацией* вещественного векторного пространства V. Если $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в V (как векторном пространстве над $\mathbb{R}$), то $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ (то есть $\{(\mathbf{e}_1,\, \mathbf{0}),\, (\mathbf{e}_2,\, \mathbf{0}), \ldots, (\mathbf{e}_n,\, \mathbf{0})\}$) — базис в $V^{\mathbb{C}}$ (как в векторном пространстве над $\mathbb{C}$).

Заметим, что для каждого подпространства $W \subset V^{\mathbb{C}}$ определено его комплексное сопряжение $\overline{W} \subset V^{\mathbb{C}}$, задаваемое условием $(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) \in W \quad\Leftrightarrow\quad (\mathbf{u},\, -\mathbf{v}) \in \overline{W}$.

Задача 2.28. Доказать, что подпространство $W \subset V^{\mathbb{C}}$ является комплексификацией некоторого подпространства $U \subset V$ тогда и только тогда, когда $W = \overline{W}$.

Решение. Пусть $W = \overline{W}$, тогда $\{(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) \in W \quad\Leftrightarrow\quad (\mathbf{u},\, -\mathbf{v}) \in \in W\} \quad\Leftrightarrow$ $\{(\mathbf{u},\, \mathbf{0}) \in W,\; (\mathbf{0},\, \mathbf{v}) \in W\}$. В других обозначениях, $\mathbf{u} + i\mathbf{v} \in W \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{u},\, i\mathbf{v} \in W$. Кроме того, так как W является векторным пространством над $\mathbb{C}$, то $\mathbf{u} \in W \quad\Leftrightarrow\quad i\mathbf{u} \in W$. Теперь легко видеть, что W является комплексификацией подпространства $U \subset V$, состоящего из таких $\mathbf{u} \in V$, что $(\mathbf{u},\, \mathbf{0}) \in W$.
Обратная импликация очевидна. ■

Пусть $\varphi\colon V \to V$ — $\mathbb{R}$-линейный оператор. Определим отображение $\varphi^{\mathbb{C}}\colon V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ формулой $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = (\varphi(\mathbf{u}),\, \varphi(\mathbf{v}))$, то есть $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{u}+i\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + i\varphi(\mathbf{v})$. Его линейность над $\mathbb{C}$, то есть тождество

$$\varphi^{\mathbb{C}}((\alpha + i\beta)(\mathbf{u} + i\mathbf{v})) = (\alpha + i\beta)\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{u} + i\mathbf{v}),$$

проверяется непосредственно. Таким образом, $\varphi^{\mathbb{C}}$ — $\mathbb{C}$-линейный оператор на $V^{\mathbb{C}}$. Заметим, что $\varphi^{\mathbb{C}}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $V^{\mathbb{C}}$ имеет ту же матрицу, что и φ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в V. В частности, их характеристические многочлены совпадают.
У оператора $\varphi\colon V \to V$, где V — векторное пространство над $\mathbb{R}$, может не оказаться ни одного собственного вектора. Причина этого состоит в том, что характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ может не иметь вещественных корней (в случае, когда размерность V четна). После комплексификации для каждого корня (в том числе комплексного) собственные векторы оператора $\varphi^{\mathbb{C}}$ в $V^{\mathbb{C}}$ будут существовать.

Задача 2.29. Найти собственные векторы комплексификации $\varphi^{\mathbb{C}}$ оператора φ поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ в комплексификации $V^{\mathbb{C}}$ евклидовой плоскости V.

Решение. В правом ортонормированном базисе в V оператор φ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Его характеристический многочлен $\chi_\varphi(t) = t^2 + 1$ имеет корни $\pm i$. Соответствующие собственные векторы можно найти стандартным способом, решая системы линейных уравнений, но можно также воспользоваться следующими соображениями. Заметим, что такую же матрицу имеет оператор дифференцирования в базисе $\{\sin x, \cos x\}$ линейной оболочки $\langle \sin x, \cos x\rangle$ функций на $\mathbb{R}$ (см. задачу 2.5). Из анализа известно (см. также задачу 2.45), что собственными функциями оператора дифференцирования являются экспоненты: общее решение дифференциального уравнения $f'(x) = \lambda f(x)$, где $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, имеет вид $C \exp(\lambda x)$, где $C \in \mathbb{C}$. Беря линейные комбинации функций $\sin x$, $\cos x$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$, экспоненту не получить, другое дело — комплексные линейные комбинации. По формуле Эйлера, $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$, значит, собственный вектор, отвечающий собственному значению i, имеет координатный столбец $(i, 1)^T$, а собственный вектор, отвечающий собственному значению $t = -i$, — столбец $(-i, 1)^T$. ■

Задача 2.30. Доказать, что у любого линейного оператора φ на векторном пространстве V над $\mathbb{R}$, $\dim V \geq 1$, есть 1- или 2-мерное инвариантное подпространство.

Решение. Если характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ имеет корень $\lambda \in \mathbb{R}$, то ему отвечает собственный вектор $\mathbf{v} \in V$ и одномерное подпространство $\langle \mathbf{v}\rangle \subset V$ является φ-инвариантным.
Пусть $\chi_\varphi(t)$ не имеет вещественных корней (в частности, размерность V четна). Пусть $\lambda = \mu + i\nu$ — комплексный корень $\chi_\varphi(t)$. Рассмотрим $\mathbb{C}$-линейный оператор $\varphi^{\mathbb{C}}\colon V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$. Тогда λ является корнем $\chi_{\varphi^{\mathbb{C}}}(t) = \chi_\varphi(t)$ и существует собственный вектор оператора $\varphi^{\mathbb{C}}$ с собственным значением λ, то есть ненулевой вектор $\mathbf{w} \in V^{\mathbb{C}}$ такой, что $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{w}) = \lambda\mathbf{w}$. Пусть $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$, где $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Тогда

$$\begin{gathered}\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{w}) = \lambda\mathbf{w} = (\mu + i\nu)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = \\ = \mu\mathbf{u} - \nu\mathbf{v} + i(\nu\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + i\varphi(\mathbf{v})\end{gathered}$$

(где мы использовали (32) и определение $\varphi^{\mathbb{C}}$). Отсюда легко получить, что $\varphi(\mathbf{u}) = \mu\mathbf{u} - \nu\mathbf{v}$, $\varphi(\mathbf{v}) = \nu\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$. Также легко проверяется, что $\mathbf{u} - i\mathbf{v}$ — собственный вектор оператора $\varphi^{\mathbb{C}}$ с собственным значением $\mu - i\nu = \overline{\lambda}$. Так как $\lambda \neq \overline{\lambda}$ при $\lambda \notin \mathbb{R}$, то векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ линейно независимы. Значит, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \subset V$ — φ-инвариантная плоскость. ■
Заметим, что ограничение φ на инвариантное подпространство $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \subset V$ в базисе $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix}$.

Задача 2.31. Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор на пространстве V над некоторым полем $\mathbb{K}$, A — его матрица в некотором базисе. Пусть $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ — многочлен степени d такой, что $p(A)$ — вырожденная матрица. Докажите, что у φ найдется нетривиальное инвариантное подпространство, размерность которого не превосходит d.

Решение. Пусть $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \ker p(\varphi) \neq 0$. Рассмотрим

$$U := \langle \mathbf{v}, \varphi(\mathbf{v}), \ldots, \varphi^{d-1}(\mathbf{v})\rangle \subset V.$$

Используя p, получаем $\varphi^d(\mathbf{v}) \in U$, то есть U φ-инвариантно, при этом $\dim V \le d$. ■

Используя предыдущую задачу можно дать другое решение Задачи 2.30. А именно, пусть $\chi_\varphi(t) \in \mathbb{R}[t]$ — характеристический многочлен φ. Мы знаем, что он является произведением неприводимых вещественных многочленов степеней 1 или 2. Если у него есть множитель степени 1, то у $\chi_\varphi(t)$ есть вещественный корень — собственное значение φ, а значит и одномерное инвариантное подпространство (порожденное любым собственным вектором). Если линейных множителей у $\chi_\varphi(t)$ нет (что может быть только в четномерном случае), то рассмотрим неприводимый множитель $p(t) = t^2 + pt + q = (t-\lambda)(t-\overline{\lambda})$ степени 2. Его (комплексные) корни λ, $\overline{\lambda}$ — собственные значения комплексификации $\varphi^{\mathbb{C}}$, и значит если A — матрица φ, то $p(A) = (A-\lambda E)(A-\overline{\lambda}E)$ — вырожденная матрица. Осталось применить заключение предыдущей задачи.

2.3. Факторпространство и фактороператор

Пусть V — векторное пространство над некоторым полем $\mathbb{K}$, $U \subset V$ — его подпространство. Определим следующее отношение эквивалентности на V. По определению

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{v}' \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v}' - \mathbf{v} \in U.$$

Проверим, что это — действительно отношение эквивалентности. 1) Рефлексивность: $\forall \mathbf{v} \in V$ $\mathbf{v} \sim \mathbf{v}$. Действительно, $\mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \in U$ (любое подпространство содержит нулевой вектор). 2) Симметричность: $\mathbf{v} \sim \mathbf{v}' \;\Rightarrow\; \mathbf{v}' \sim \mathbf{v}$. Действительно, если $\mathbf{v}' - \mathbf{v} \in U$, то $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in U$ (подпространство вместе с каждым вектором содержит его противоположный). 3) Транзитивность: $\mathbf{v} \sim \mathbf{v}'$, $\mathbf{v}' \sim \sim \mathbf{v}'' \;\Rightarrow\; \mathbf{v} \sim \mathbf{v}''$. Действительно, если $\mathbf{v}' - \mathbf{v} \in U$, $\mathbf{v}'' - \mathbf{v}' \in U$, то $\mathbf{v}'' - \mathbf{v} = (\mathbf{v}'' - \mathbf{v}') + (\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \in U$ (подпространство вместе с каждой парой векторов содержит их сумму).

Обозначим через $[\mathbf{v}]$ класс эквивалентности $\mathbf{v} \in V$, то есть $[\mathbf{v}] := \{\mathbf{v}' \in V \mid \mathbf{v}' \sim \mathbf{v}\}$. Таким образом, $[\mathbf{v}]$ — подмножество V, а произвольный элемент $\mathbf{v}' \in [\mathbf{v}]$ — *представитель* класса $[\mathbf{v}]$. Другое его описание: $[\mathbf{v}] = \{\mathbf{v} + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in U\}$. В частности, $[\mathbf{0}] = U$. Заметим, что

$$[\mathbf{v}_1] = [\mathbf{v}_2] \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \in U \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}, \text{ где } \mathbf{u} \in U.$$

Рассмотрим новое множество, элементами которого являются классы эквивалентности векторов $\mathbf{v} \in V$. Обозначим его V/U. Таким образом, $[\mathbf{v}] \in V/U$. Превратим множество V/U в векторное пространство над $\mathbb{K}$. Для этого нужно определить сумму элементов вида $[\mathbf{v}]$, их умножение на скаляры из $\mathbb{K}$ и проверить выполнение аксиом векторного пространства. Положим по определению

$$[\mathbf{v}_1] + [\mathbf{v}_2] := [\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2], \quad \lambda[\mathbf{v}] := [\lambda \mathbf{v}].$$

Ключевой момент заключается в проверке корректности введенных операций сложения и умножения на скаляры (см. определение 0.12). Дело в том, что сумму *классов* $[\mathbf{v}_1]$ и $[\mathbf{v}_2]$ мы определили как класс суммы их конкретных *представителей* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$. Нужно проверить, что последний не зависит от выбора этих представителей. То же для умножения на скаляры.

Таким образом, нужно проверить, что если $[\mathbf{v}_1'] = [\mathbf{v}_1]$, $[\mathbf{v}_2'] = = [\mathbf{v}_2]$, то $[\mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2'] = [\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2]$, а также если $[\mathbf{v}'] = [\mathbf{v}]$, то $[\lambda\mathbf{v}'] = = [\lambda\mathbf{v}]$.
Итак, проверим корректность операции сложения. Если $[\mathbf{v}_1'] = = [\mathbf{v}_1]$, то $\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1 \in U$, аналогично из $[\mathbf{v}_2'] = [\mathbf{v}_2]$ вытекает $\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_2 \in U$. Тогда $(\mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2') - (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1) + (\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_2) \in U$, то есть $[\mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2'] = [\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2]$.
Проверка корректности умножения на скаляры:

$$[\mathbf{v}'] = [\mathbf{v}] \;\Rightarrow\; \mathbf{v}' - \mathbf{v} \in U \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \lambda\mathbf{v}' - \lambda\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \in U \;\Rightarrow\; [\lambda\mathbf{v}'] = [\lambda\mathbf{v}].$$

Аксиомы векторного пространства над полем $\mathbb{K}$ для множества V/U с введенными операциями сложения и умножения на скаляры следуют из соответствующих аксиом для V (в частности, роль нулевого вектора в V/U играет $[\mathbf{0}]$, противоположного к $[\mathbf{v}]$ — $[-\mathbf{v}]$, и т.д.). Таким образом, V/U само является векторным пространством над полем $\mathbb{K}$, которое называется *факторпространством* пространства V по подпространству U.

Задача 2.32. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — базис в подпространстве $U \subset V$. Тогда $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в $V \Leftrightarrow \{[\mathbf{e}_{k+1}], \ldots, [\mathbf{e}_n]\}$ — базис в V/U.

Решение. $\boxed{\Rightarrow}$ Имеем

$$\sum_{j=k+1}^{n} \beta_j[\mathbf{e}_j] = [\mathbf{0}] \;\;\Leftrightarrow\;\; \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j\mathbf{e}_j \in U \;\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\;\; \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\mathbf{e}_i \;\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\;\; \beta_j = 0,\;\; k+1 \le j \le n,\;\; \alpha_i = 0,\;\; 1 \le i \le k,$$

поскольку система векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейно независима.
Пусть теперь $\mathbf{v} \in V$ — произвольный вектор. Тогда

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\mathbf{e}_i \;\;\Rightarrow\;\; [\mathbf{v}] = \sum_{j=k+1}^{n} \mu_j[\mathbf{e}_j].$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Так как $\{[\mathbf{e}_{k+1}], \ldots, [\mathbf{e}_n]\}$ — базис в V/U, то

$$\sum_{j=k+1}^{n} \beta_j[\mathbf{e}_j] = [\mathbf{0}] \quad\Leftrightarrow\quad \beta_j = 0,\;\; k+1 \le j \le n.$$

То есть

$$\sum_{j=k+1}^{n} \beta_j\mathbf{e}_j \in U \quad\Leftrightarrow\quad \beta_j = 0,\;\; k+1 \le j \le n. \tag{33}$$

Пусть

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\mathbf{e}_i = \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j\mathbf{e}_j.$$

Тогда из (33) следует, что $\beta_j = 0,\ \ k+1 \le j \le n$. Тогда $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{e}_i = 0$, и так как $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$ — базис в U, то $\alpha_i = 0,\ \ 1 \le \le i \le k$. Тем самым доказана линейная независимость векторов $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.
Пусть $\mathbf{v} \in V$ — произвольный вектор. Тогда $[\mathbf{v}] = \sum_{j=k+1}^{n} \mu_j [\mathbf{e}_j]$. Значит,

$$\mathbf{v} - \sum_{j=k+1}^{n} \mu_j \mathbf{e}_j \in U \ \ \Rightarrow\ \ \mathbf{v} - \sum_{j=k+1}^{n} \mu_j \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \mathbf{e}_i.$$

Таким образом, любой вектор $\mathbf{v} \in V$ раскладывается по системе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. ■

Заметим, что из предыдущей задачи следует, что $\dim V/U = = \dim V - \dim U$. (Другое доказательство этого факта: имеем сюръективное линейное отображение (“каноническую проекцию”)

$$\pi\colon V \to V/U, \quad \pi(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}],$$

причем, как легко видеть, $\ker \pi = U$. Тогда по известной формуле $\dim\ker\pi + \dim \operatorname{im} \pi = \dim V$ имеем $\dim U + \dim V/U = \dim V$.)
Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор, $U \subset V$ — его инвариантное подпространство, то есть $\varphi(U) \subset U$. Тогда формула $\overline{\varphi}([\mathbf{v}]) = [\varphi(\mathbf{v})]$ определяет линейный оператор $\overline{\varphi}\colon V/U \to V/U$, называемый *фактороператором.*
Проверим корректность определения фактороператора (в терминологии вводной главы, согласованность отношения эквивалентности с оператором как унарной операцией). То есть нужно проверить импликацию

$$[\mathbf{v}'] = [\mathbf{v}] \ \ \Rightarrow\ \ [\varphi(\mathbf{v}')] = [\varphi(\mathbf{v})].$$

Действительно, используя φ-инвариантность U, имеем

$$[\mathbf{v}'] = [\mathbf{v}] \ \ \Rightarrow\ \ \mathbf{v}' - \mathbf{v} \in U \ \ \Rightarrow\ \ \varphi(\mathbf{v}') - \varphi(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \in U \ \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \ [\varphi(\mathbf{v}')] = [\varphi(\mathbf{v})].$$

Линейность $\overline{\varphi}$ следует из линейности φ, например,

$$\overline{\varphi}([\mathbf{v}_1] + [\mathbf{v}_2]) = \overline{\varphi}([\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2]) = [\varphi(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)] = [\varphi(\mathbf{v}_1) + \varphi(\mathbf{v}_2)] =$$

$$= [\varphi(\mathbf{v}_1)] + [\varphi(\mathbf{v}_2)] = \overline{\varphi}([\mathbf{v}_1]) + \overline{\varphi}([\mathbf{v}_2]).$$

Задача 2.33. Пусть оператор $\varphi\colon V \to V$ диагонализируем, $U \subset \subset V$ — φ-инвариантное подпространство. Тогда фактороператор $\overline{\varphi}\colon V/U \to V/U$ тоже диагонализируем.

Решение. Используя решение задачи 2.23, найдем базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$ в V из собственных векторов оператора φ, $\varphi(\mathbf{e}_i) = = \mu_i \mathbf{e}_i$ (при этом μ_i не предполагаются попарно различными) такой, что $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$ — базис в U, а $\{\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в φ-инвариантном прямом дополнении W, $V = U \oplus W$. Из задачи 2.32 мы знаем, что $\{[\mathbf{e}_{k+1}], \dots, [\mathbf{e}_n]\}$ — базис в V/U. Тогда $\overline{\varphi}([\mathbf{e}_j]) = \mu_j [\mathbf{e}_j],\ k+1 \le j \le n$. ■

В частности, если блочная матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где A и C — квадратные подматрицы, диагонализируема, то и матрицы A и C диагонализируемы (поскольку являются матрицами ограничения оператора и фактороператора в соответствующих базисах). Обратное, конечно, неверно.

Используя понятия факторпространства и фактороператора, докажем следующий полезный результат.

Задача 2.34. Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{C}$, $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор. Тогда в V существует такой базис, в котором матрица оператора φ является верхнетреугольной.

Решение. Воспользуемся индукцией по $n = \dim V$. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для пространств размерности, не превосходящей $n-1$, докажем тогда его справедливость для n.
Любой линейный оператор над $\mathbb{C}$ имеет собственный вектор. Некоторый собственный вектор оператора φ обозначим $\mathbf{e}_1$. То есть $\mathbf{e}_1 \neq \mathbf{0}$, $\varphi(\mathbf{e}_1) = \lambda\mathbf{e}_1$. Подпространство $U := \langle \mathbf{e}_1 \rangle$ является инвариантным относительно φ. Рассмотрим фактороператор $\overline{\varphi}\colon V/U \to V/U$. Так как $\dim V/U = \dim V - \dim U = n-1$, то по предположению индукции существует базис $\{[\mathbf{e}_2], \ldots, [\mathbf{e}_n]\}$ в V/U, в котором $\overline{\varphi}$ имеет верхнюю треугольную матрицу. Последнее означает, что

$$\overline{\varphi}([\mathbf{e}_k]) = a_{2k}[\mathbf{e}_2] + \ldots + a_{kk}[\mathbf{e}_k] \quad \text{при всех } \ 2 \leq k \leq n. \tag{34}$$

Равенство (34) можно записать как $[\varphi(\mathbf{e}_k)] = [a_{2k}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{kk}\mathbf{e}_k]$, что эквивалентно тому, что $\varphi(\mathbf{e}_k) - (a_{2k}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{kk}\mathbf{e}_k) \in U$, то есть $\varphi(\mathbf{e}_k) = a_{1k}\mathbf{e}_1 + a_{2k}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{kk}\mathbf{e}_k$ для некоторых $a_{1k} \in$ $\in \mathbb{C}$ при $2 \leq k \leq n$. Кроме того, $\varphi(\mathbf{e}_1) = \lambda\mathbf{e}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1$. Тогда в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ (см. задачу 2.32) пространства V оператор φ имеет верхнюю треугольную матрицу.
Другой способ решения этой задачи — воспользоваться существованием $n-1$-мерного инвариантного подпространства, которое следует из задачи 2.20, и снова использовать индукцию по n. Вот еще один способ доказательства существования $n-1$-мерного инвариантного подпространства. Заметим, что $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$ такое, что $\ker(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V) \neq \{\mathbf{0}\}$. Тогда $\dim(\mathrm{im}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V)) \leq n-1$. Пусть U — произвольное $n-1$-мерное подпространство в V, содержащее $\mathrm{im}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V)$. Тогда U является φ-инвариантным. Действительно, $\forall \mathbf{u} \in U$ $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}) - \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} \in U$, поскольку $\varphi(\mathbf{u}) - \lambda\mathbf{u} \in U$ и $\lambda\mathbf{u} \in U$. ■

Задача 2.35. Пусть $\varphi\colon V \to V$ — нильпотентный линейный оператор на конечномерном пространстве V над полем $\mathbb{K}$. Тогда в V существует такой базис, в котором матрица оператора φ является верхней нильтреугольной.

Решение. Так же, как и в предыдущей задаче, используем индукцию по $n := \dim V$. Для $n = 1$ φ — нулевой оператор. Пусть утверждение верно для операторов на пространствах V, $\dim V \leq \leq n-1$. Если φ нильпотентен, то $\ker\varphi \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \ \exists \mathbf{e}_1 \neq \mathbf{0}$ такой, что $\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}$. Очевидно, что подпространство $\langle \mathbf{e}_1 \rangle \subset V$ φ-инвариантно. Рассмотрим фактороператор $\overline{\varphi}\colon V/U \to V/U$, из его определения $\overline{\varphi}([\mathbf{v}]) = [\varphi(\mathbf{v})]$ $\forall \mathbf{v} \in V$ легко следует, что он также нильпотентен. Поскольку $\dim V/U = n-1$, то по предположению индукции существует базис $\{[\mathbf{e}_2], \ldots, [\mathbf{e}_n]\}$ в V/U, в котором матрица $\overline{\varphi}$ является верхней нильтреугольной. Последнее означает, что

$$\overline{\varphi}([\mathbf{e}_k]) = a_{2k}[\mathbf{e}_2] + \ldots + a_{k-1k}[\mathbf{e}_{k-1}] \quad \text{при всех } \ 2 \le k \le n. \tag{35}$$

Равенство (35) можно записать как

$$[\varphi(\mathbf{e}_k)] = [a_{2k}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{k-1k}\mathbf{e}_{k-1}],$$

что эквивалентно тому, что $\varphi(\mathbf{e}_k) - (a_{2k}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{k-1k}\mathbf{e}_{k-1}) \in U$, то есть $\varphi(\mathbf{e}_k) = a_{1k}\mathbf{e}_1 + a_{2k}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{k-1k}\mathbf{e}_{k-1}$ для некоторых $a_{1k} \in \mathbb{K}$ при $2 \le k \le n$. Кроме того, $\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}$. Тогда в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ (см. задачу 2.32) пространства V оператор φ имеет верхнюю нильтреугольную матрицу. В частности, все собственные значения нильпотентного оператора равны 0.

Другой способ решения этой задачи — применить предположение индукции к φ-инвариантному подпространству $V_1 := := \varphi(V) \subsetneq V$. Если $V_1 = 0$, то все доказано. В противном случае пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — базис V_1, в котором матрица ограничения (которое является нильпотентным оператором) нильтреугольна. Продолжим его до базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в V. Легко видеть, что в нем матрица φ имеет требуемый вид, поскольку $\forall j \ \ \varphi(\mathbf{e}_j) \in V_1$. ■

Читатель, желающий потренироваться в проведении доказательств индукцией по размерности с использованием факторпространств, может попробовать доказать этим способом теорему Гамильтона—Кэли для алгебраически замкнутого поля (такое доказательство дано в [35], ч. 1, § 8).

Опишем способ получения явных выражений для коэффициентов характеристического многочлена (23) через матрицу A оператора $\varphi\colon V \to V$ (где V — векторное пространство над $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$). Пока мы знаем явные выражения только для двух коэффициентов — перед λ^{n-1} (а именно $-\mathrm{tr}\, A$) и свободного члена (а именно $(-1)^n \det A$).

Докажем предварительно один результат о симметрических многочленах[26]. Пусть $\sigma_r(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n], \ 1 \le r \le n$ — элементарные симметрические многочлены, определяемые формулами

$$\sigma_r(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}.$$

Определим также симметрические многочлены

$$s_r(x_1, \ldots, x_n) := x_1^r + x_2^r + \ldots + x_n^r.$$

Лемма 2.36. *Для любых $1 \le k \le n$ имеет место соотношение*

$$s_k(x_1, \ldots, x_n) - \sigma_1(x_1, \ldots, x_n) s_{k-1}(x_1, \ldots, x_n) + \ldots +$$
$$+ (-1)^k k \sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{36}$$

[26] По поводу определения и свойств симметрических многочленов см. [15], гл. 3, § 8 или [32], гл. 6, § 2.

Доказательство. Имеет место тождество

$$\prod_{i=1}^{k}(x-x_i) = x^k - \sigma_1(x_1,\ldots,x_k)x^{k-1} + \ldots + (-1)^k\sigma_k(x_1,\ldots,x_k).$$

Подставим в него $x = x_i$, $1 \le i \le k$ и просуммируем полученные равенства, получим

$$0 = s_k(x_1,\ldots,x_k) - \sigma_1(x_1,\ldots,x_k)s_{k-1}(x_1,\ldots,x_k) + \ldots +$$

$$+(-1)^k k\sigma_k(x_1,\ldots,x_k),$$

тем самым требуемая формула (36) доказана в случае $k = n$.
Далее воспользуемся индукцией по $l = n-k$. При $l = 0$ справедливость тождества установлена. Предположим, что тождество верно для всех $0 \le l < n-k$, покажем, что тогда оно верно для $n-k$. Многочлен, стоящий в левой части (36), — симметрический многочлен от $x_1,\ldots,x_n$. Положим в нем $x_n = 0$. Так как при $r \le n-1$

$$\sigma_r(x_1,\ldots,x_{n-1},0) = \sigma_r(x_1,\ldots,x_{n-1}),$$

$$s_r(x_1,\ldots x_{n-1},0) = s_r(x_1,\ldots x_{n-1}),$$

то при $x_n = 0$ многочлен, стоящий в левой части (36), равен нулю по предположению индукции. Значит, он делится на x_n, а поскольку он симметрический, и на $\sigma_n(x_1,\ldots,x_n)$. Так как его степень есть $k < n$, то он равен нулю. ■

Пользуясь результатом задачи 2.34, найдем базис, в котором матрица A оператора φ верхняя треугольная (предварительно комплексифицировав V в случае поля $\mathbb{R}$). Тогда на ее главной диагонали стоят $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ — собственные значения φ (с учетом кратности). По формуле Виета:

$$\chi_\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i) = \lambda^n - \sigma_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\lambda^{n-1} +$$

$$+\sigma_2(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^n\sigma_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_n), \qquad (37)$$

где $\sigma_r(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ — r-й элементарный симметрический многочлен от переменных $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, который равен

$$\sigma_r(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_r\le n} \lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r},$$

причем $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sigma_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i = = \sigma_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.
Таким образом, нам нужно найти выражения остальных элементарных симметрических многочленов от собственных значений через матрицу A.
Поскольку матрица A верхняя треугольная, очевидно равенство

$$\operatorname{tr}(A^r) = \lambda_1^r + \ldots + \lambda_n^r = s_r(\lambda_1,\ldots,\lambda_n).$$

Используя это наблюдение и формулу (36), мы можем получить выражения для всех коэффициентов характеристического многочлена (37) через $\operatorname{tr}(A^r)$, $1 \le r \le n$.

Заметим, что числа $\mathrm{tr}\,(A^r)$ не зависят от базиса в V, в котором записана матрица A оператора φ. Действительно, если $A' = C^{-1}AC$, то $\mathrm{tr}\,(A'^r) = \mathrm{tr}\,(C^{-1}A^rC) = \mathrm{tr}\,(A^r)$.
Вот несколько первых коэффициентов $\chi_\varphi(\lambda)$:

$$\sigma_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \mathrm{tr}\,A, \quad \sigma_2(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \frac{1}{2}((\mathrm{tr}\,A)^2 - \mathrm{tr}\,(A^2)),$$

$$\sigma_3(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \frac{1}{6}((\mathrm{tr}\,A)^3 - 3\mathrm{tr}\,(A)\mathrm{tr}\,(A^2) + 2\mathrm{tr}\,(A^3))$$

и т.д. Кстати, определитель $\sigma_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \det A$ также может быть выражен через $\mathrm{tr}\,(A^r)$, $1 \le r \le n$.
Из сказанного выше легко получить, например, такой результат (для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$): если $\mathrm{tr}\,A = \mathrm{tr}\,A^2 = \ldots = \mathrm{tr}\,A^n = 0$, то матрица A нильпотентна.
Отметим еще, что, согласно основной теореме о симметрических многочленах, произвольный симметрический многочлен $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ единственным образом представляется в виде многочлена с целыми коэффициентами от элементарных симметрических многочленов $\sigma_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \sigma_n(x_1, \ldots, x_n)$ (то есть подкольцо симметрических многочленов в $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ само есть кольцо многочленов от n переменных $\mathbb{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$). В частности, это верно для $s_r(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, $1 \le r \le n$. В свою очередь, многочлены $\sigma_r(x_1, \ldots, x_n)$, $1 \le r \le n$ тоже могут быть представлены как многочлены от $s_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, s_n(x_1, \ldots, x_n)$, но *только уже с рациональными коэффициентами* (то есть подкольцо симметрических многочленов в кольце $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ есть $\mathbb{Q}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] = \mathbb{Q}[s_1, \ldots, s_n]$) — отсюда знаменатели в приведенных выше формулах.

2.4. Жорданова нормальная форма

Даже в случае векторного пространства V над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ не для всякого оператора $\varphi\colon V \to V$ существует базис в V, состоящий из собственных векторов оператора φ. Простейшим примером является оператор на двумерном пространстве с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Его единственным собственным значением является 0, и соответствующее собственное подпространство, совпадающее с ядром, есть линейная оболочка вектора $(1,\,0)^T$. Таким образом, оператор с такой матрицей не приводится к диагональному виду, иными словами, не существует обратимой матрицы $C \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ такой, что $C^{-1}AC = \Lambda$, где матрица Λ диагональна.

Определение 2.37. *Жордановой матрицей* называется блочно-диагональная матрица с жордановыми клетками $J_k(\lambda)$ (вообще говоря, с разными собственными значениями λ) в качестве диагональных блоков. *Жордановым базисом* для оператора $\varphi\colon V \to V$ называется такой базис в V, в котором φ имеет жорданову матрицу. Последняя называется *жордановой нормальной формой* оператора φ.

Теорема 2.38. *Для любого линейного оператора $\varphi\colon V \to V$ на конечномерном пространстве V над полем $\mathbb{C}$ существует жорданов базис. Жорданова нормальная форма оператора φ определена однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток.*

Заметим, что диагональный вид — частный случай жордановой нормальной формы, когда все жордановы клетки имеют размер 1.

Задача 2.39. Напишите возможные ЖНФ оператора φ, зная его характеристический $\chi_\varphi(t) = t^4(t-1)^3$ и минимальный $m_\varphi(t) = = t^2(t-1)^2$ многочлены.

Решение. Характеристический многочлен показывает, что φ имеет собственные значения 0 и 1, причем сумма порядков отвечающих им клеток равна соответственно 4 и 3. Из минимального многочлена мы получаем максимальный порядок жордановых клеток: для обоих собственных значений он равен 2. Для собственного значения 1 это оставляет единственную возможность $2+1$, а для собственного значения 0 — два варианта $2+2$ или $2+1+1$. ■

Если оператор φ нильпотентен, то все его жордановы клетки отвечают $\lambda = 0$, и обратно (см. задачу 2.16 и комментарий к ней).

Задача 2.40. Доказать существование жорданова базиса для нильпотентного оператора $\varphi\colon V \to V$.

В более развернутом виде нам нужно доказать следующее. Если $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор на конечномерном векторном пространстве V такой, что $\varphi^m = 0$ для некоторого $m \geq 1$, то в V существует такой набор векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ и отвечающий им набор натуральных чисел $k_1, \ldots, k_r$, что система векторов

$$\varphi^{k_1-1}(\mathbf{v}_1), \varphi^{k_1-2}(\mathbf{v}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_1, \ \ldots\ , \varphi^{k_r-1}(\mathbf{v}_r),$$

$$\varphi^{k_r-2}(\mathbf{v}_r), \ldots, \varphi(\mathbf{v}_r), \mathbf{v}_r$$

где $\varphi^{k_i}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$ для всех $1 \leq i \leq r$, является базисом в V[27]. Легко видеть, что это — жорданов базис для φ, и обратно, любой жорданов базис имеет такой вид.

Данную задачу можно решить разными способами, например, их можно найти в [15] и [33]. Ниже приведено доказательство, основанное на работе [53].

Решение задачи 2.40. Воспользуемся индукцией по $\dim V$. Если $\dim V = 1$, то $\varphi = 0$ и требуемый результат, очевидно, верен. Для доказательства шага индукции предположим, что $\dim V \geq 2$. Ясно, что $\varphi(V) := \operatorname{im}\varphi \subset V$, но при этом $\varphi(V) \neq V$, ибо тогда $\varphi^m(V) = \varphi^{m-1}(V) = \ldots = \varphi(V) = V$, что противоречит равенству $\varphi^m = 0$. Кроме того, в случае $\varphi = 0$ требуемый результат тривиален. Таким образом, мы можем предположить, что

$$0 \subsetneq \varphi(V) \subsetneq V.$$

По предположению индукции (примененному к пространству $U := \varphi(V)$ и ограничению на него оператора φ) в U существует набор векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_l$ такой, что

$$\mathbf{u}_1, \varphi(\mathbf{u}_1), \ldots, \varphi^{l_1-1}(\mathbf{u}_1), \ \ldots\ , \mathbf{u}_s, \varphi(\mathbf{u}_s), \ldots, \varphi^{l_s-1}(\mathbf{u}_s) \tag{38}$$

[27]Заметим, что порядок нильпотентности φ тогда равен $\max_{1\leq i\leq r}(k_i)$.

— базис в U и $\varphi^{l_i}(\mathbf{u}_i) = \mathbf{0}$ для $1 \le i \le s$.
Для $1 \le i \le s$ выберем такие векторы $\mathbf{v}_i \in V$, что $\varphi(\mathbf{v}_i) = \mathbf{u}_i$ (такие $\mathbf{v}_i$ существуют, поскольку $\mathbf{u}_i \in \varphi(V)$). Подпространство $\ker \varphi \subset V$ содержит линейно независимые векторы $\varphi^{l_1-1}(\mathbf{u}_1), \ldots, \varphi^{l_s-1}(\mathbf{u}_s)$. Дополним эти векторы до базиса в $\ker \varphi$ векторами $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_p$. Мы докажем, что

$$\mathbf{v}_1, \varphi(\mathbf{v}_1), \ldots, \varphi^{l_1}(\mathbf{v}_1), \ \ldots \ , \mathbf{v}_s, \varphi(\mathbf{v}_s), \ldots, \varphi^{l_s}(\mathbf{v}_s), \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_p \tag{39}$$

— требуемый (с точностью до перестановки векторов) базис в V.
Для доказательства линейной независимости системы (39) применим φ к произвольной линейной комбинации указанных векторов, равной нулю. Тогда в силу линейной независимости системы (38) получим, что коэффициенты перед векторами

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \varphi^{l_1-1}(\mathbf{v}_1), \ \ldots \ , \mathbf{v}_s, \ldots, \varphi^{l_s-1}(\mathbf{v}_s)$$

равны нулю. Теперь линейная независимость (39) следует из того, что

$$\varphi^{l_1}(\mathbf{v}_1), \ldots, \varphi^{l_s}(\mathbf{v}_s), \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_p$$

— базис в $\ker \varphi$.
Проверим теперь, что число векторов в (39) равно $\dim V$. Действительно, из (38) $\dim \operatorname{im} \varphi = l_1 + \ldots + l_s$; кроме того, $\dim \ker \varphi = = s + p$. Тогда

$$\dim V = \dim \operatorname{im} \varphi + \dim \ker \varphi = (l_1 + 1) \ldots + (l_s + 1) + p,$$

а это — в точности число элементов в системе (39). ■

Задача 2.41. Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$, $\varphi \colon V \to V$ — линейный оператор такой, что $\varphi^k = = \mathrm{id}_V$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Доказать, что φ диагонализируем.

Решение. 1-й способ. Пусть J — жорданова нормальная форма оператора φ. Она определена однозначно с точностью до перестановки клеток. Пусть она не является диагональной, это означает, что хотя бы одна клетка $J_r(\lambda)$ имеет размер $r > 1$. Заметим еще, что $\lambda \ne 0$, поскольку φ обратим.
Заметим теперь, что если $r \ge 2$, то ни в какой натуральной степени $J_r(\lambda)$ не может быть диагональной матрицей. Действительно, $J_r(\lambda) = \lambda E + J_r$ (где $J_r := J_r(0)$) и матрицы E и J_r коммутируют, поэтому по формуле бинома имеем

$$J_r(\lambda)^k = \lambda^k E + k\lambda^{k-1} J_r + \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} J_r^2 + \ldots + J_r^k$$

(если $k \ge r$, то несколько последних слагаемых равны 0). С другой стороны, если $\varphi^k = \mathrm{id}_V$, то $J^k = E$, поскольку id_V имеет единичную матрицу E в любом базисе. Противоречие.

2-й способ. Многочлен $f(\lambda) = \lambda^k - 1$ является аннулирующим для оператора φ, причем все его корни простые (то есть не кратные), так как он взаимно прост с производной $f'(\lambda) = k\lambda^{k-1}$. Следовательно, минимальный многочлен, будучи его делителем, тоже не имеет кратных корней. В то же время легко видеть, что кратность r_i корня λ_i минимального многочлена линейного оператора ψ над полем $\mathbb{C}$ равна максимальному размеру жордановой клетки, отвечающей собственному значению λ_i. Значит, в жордановой форме оператора φ все клетки размера 1. ■

Заметим, что в случае даже алгебраически замкнутого поля положительной характеристики результат предыдущей задачи неверен: контрпример дает матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

чья p-я степень над полем характеристики p равна единичной матрице.

Две квадратные матрицы $A,\ B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ называются *подобными*, если найдется обратимая матрица $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ такая, что $B = C^{-1}AC$ (см. примеры 0.14 и 4) из § 2.5.). Подобие — отношение эквивалентности на множестве квадратных матриц данного порядка. Другое его описание: две матрицы порядка n подобны, если они являются матрицами одного и того же линейного оператора на n-мерном пространстве V над полем $\mathbb{K}$.

Задача 2.42. Доказать, что любая квадратная матрица над полем $\mathbb{C}$ подобна своей транспонированной.

Решение. Теорема о ЖНФ утверждает, что если поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто (например, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), то любая матрица $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ подобна жордановой матрице J_A, причем для каждого корня λ характеристического многочлена $\chi_A(t)$ число и размер жордановых клеток в J_A однозначно определяются самой матрицей A (другими словами, J_A определена однозначно с точностью до перестановок жордановых клеток).
Из того, что A подобна J_A, следует, что A^T подобна J_A^T. Поскольку подобие является отношением эквивалентности, для решения задачи достаточно доказать, что J_A подобна J_A^T. Для этого, в свою очередь, достаточно установить, что жорданова клетка $J_k(\lambda)$ подобна $J_k(\lambda)^T$. Так как матрица $J_k(\lambda)^T$ получается из $J_k(\lambda)$ центральной симметрией, то является матрицей того же преобразования, записанного в базисе, перенумерованном "задом наперед", откуда следует подобие указанных матриц.
Для полноты приведем другое доказательство подобия матриц $J_k(\lambda)$ и $J_k(\lambda)^T$. Из того, что $J_k(\lambda) = \lambda E + {} + J_k,\ J_k(\lambda)^T = {} = \lambda E + J_k^T$ (где $J_k := J_k(0)$), легко следует, что достаточно установить подобие матриц J_k и J_k^T. (Действительно, если $J_k^T = C^{-1}J_kC$, то $J_k(\lambda)^T = \lambda E + J_k^T = C^{-1}(\lambda E + J_k)C = {} = C^{-1}J_k(\lambda)C$). Так как $\mathrm{rk}((J_k^T)^m) = \mathrm{rk}(J_k^m)^T = \mathrm{rk}(J_k^m)\ \ \forall m \in \mathbb{N}$, то жорданова нормальная форма J_k^T есть J_k, откуда следует требуемое.
Другой, еще более короткий, способ решения основан на том, что $\chi_A(t) = \chi_{A^T}(t)$ и для любого корня λ характеристического многочлена и для любого натурального m

$$\mathrm{rk}((A - \lambda E)^m) = \mathrm{rk}((A - \lambda E)^m)^T = \mathrm{rk}((A^T - \lambda E)^m),$$

откуда следует, что жордановы нормальные формы матриц A и A^T совпадают, поскольку число и размер жордановых клеток для данного λ полностью определяются набором указанных рангов. ■

Задача 2.43. Найти жорданову нормальную форму и жорданов базис для оператора, имеющего матрицу J_n^2.

Решение. Заметим, что матрицу J_n имеет оператор $\frac{d}{dx}$ на пространстве $\mathbb{R}[x]_{n-1}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, где $\mathbf{e}_k := \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$. Значит, матрицу J_n^2 в том же базисе имеет оператор $\varphi := \frac{d^2}{dx^2}$. Так как $\dim\ker\varphi = 2$, то ЖНФ оператора φ состоит из двух клеток, причем обе с собственным значением 0. Для $n = 2m$ имеем две жордановы цепочки

$$\mathbf{e}_n \mapsto \mathbf{e}_{n-2} \mapsto \ldots \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{0},$$

$$\mathbf{e}_{n-1} \mapsto \mathbf{e}_{n-3} \mapsto \ldots \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{0},$$

а для $n = 2m + 1$ — тоже две жордановы цепочки

$$\mathbf{e}_n \mapsto \mathbf{e}_{n-2} \mapsto \ldots \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{0},$$

$$\mathbf{e}_{n-1} \mapsto \mathbf{e}_{n-3} \mapsto \ldots \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{0}.$$

Значит, для четного n имеем две клетки порядка $n/2$, я для нечетного n — клетки порядков $(n+1)/2$ и $(n-1)/2$. ∎

Задача 2.44. Найти жорданову нормальную форму и жорданов базис оператора $D = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ на пространстве $\mathbb{R}[x,\, y]_4$ многочленов степени не выше 4 от переменных x, y.

Решение. Во-первых, заметим, что оператор D нильпотентен $\Rightarrow$ все жордановы клетки будут иметь собственное значение 0. Проще всего решать эту задачу, сделав замену переменных $u := := \frac{x+y}{2}$, $v := \frac{x-y}{2}$. Тогда $D = \frac{\partial}{\partial u}$; кроме того, $\mathbb{R}[x,\, y]_4 = \mathbb{R}[u,\, v]_4$. Тогда имеем жордановы цепочки (вертикальная цепочка — набор базисных векторов, отвечающих одной жордановой клетке):

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{u^4}{4!} & \frac{u^3v}{3!} & \frac{u^2v^2}{2!} & uv^3 & v^4 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\frac{u^3}{3!} & \frac{u^2v}{2!} & uv^2 & v^3 & 0 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\frac{u^2}{2!} & uv & v^2 & 0 & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
u & v & 0 & & \\
\downarrow & \downarrow & & & \\
1 & 0 & & & \\
\downarrow & & & & \\
0. & & & &
\end{array}$$

Горизонтальные строки отвечают подпространствам V_k однородных многочленов в $\mathbb{R}[u,\, v]_4$ степени k, $0 \leq k \leq 4$, при этом $\dim V_k = k + 1$. Видно, что ограничение $D|_{V_k}$ отображает V_k на V_{k-1}, причем $\dim\ker D|_{V_k} = 1$. Таким образом, в жордановой нормальной форме D имеется по одной жордановой клетке размера от 1 до 5, а жорданов базис получается, например, если выбрать базис в $\mathbb{R}[x,\, y]_4$ из мономов в диаграмме выше, упорядоченных снизу вверх в каждой цепочке (сначала — собственный вектор, потом корневой вектор высоты 2, ...), а сами цепочки — слева направо (это будет отвечать упорядочению жордановых клеток по убыванию). То есть жорданова нормальная форма тогда имеет вид

$$\begin{pmatrix} J_5 & & & & \\ & J_4 & & & \\ & & J_3 & & \\ & & & J_2 & \\ & & & & J_1 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Задача 2.45. [35] Пусть L — конечномерное пространство комплекснозначных дифференцируемых функций вещественной переменной x, обладающее тем свойством, что если $f \in L$, то $\frac{df}{dx} \in L$. Доказать, что существуют такие комплексные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ и целые числа $r_1, \ldots,\ r_s \geq 1$, что $L = \oplus L_i$, где L_i — пространство функций вида $e^{\lambda_i x} P(x)$, где $P(x)$ — произвольный многочлен степени $\leq r_i - 1$.

Решение. Так как пространство L инвариантно относительно $\frac{d}{dx}$, то этот оператор можно ограничить на L (причем поскольку $\frac{d}{dx}$ к функциям из L можно применять неограниченное число раз, все функции из L бесконечно дифференцируемы). Идея заключается в том, чтобы рассмотреть жорданов базис для оператора $\frac{d}{dx}$ на L и последовательно вычислить вид входящих в него функций, начиная с нижней строки его диаграммы (образованной собственными векторами).

А именно, предположим что линейный оператор $\frac{d}{dx}$ на комплексном пространстве L имеет жорданову форму с клетками, отвечающими собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ размеров $r_1, \ldots, r_s$ и рассмотрим соответствующие жордановы цепочки

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{e}^1_{r_1} & \xrightarrow{\frac{d}{dx} - \lambda_1 \mathrm{id}} & \mathbf{e}^1_{r_1 - 1} & \to & \ldots & \to & \mathbf{e}^1_1 & \xrightarrow{\frac{d}{dx} - \lambda_1 \mathrm{id}} & 0 \\
\mathbf{e}^2_{r_2} & \xrightarrow{\frac{d}{dx} - \lambda_2 \mathrm{id}} & \mathbf{e}^2_{r_2 - 1} & \to & \ldots & \to & \mathbf{e}^2_1 & \xrightarrow{\frac{d}{dx} - \lambda_2 \mathrm{id}} & 0 \\
\multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\
\mathbf{e}^s_{r_s} & \xrightarrow{\frac{d}{dx} - \lambda_s \mathrm{id}} & \mathbf{e}^s_{r_s - 1} & \to & \ldots & \to & \mathbf{e}^s_1 & \xrightarrow{\frac{d}{dx} - \lambda_s \mathrm{id}} & 0
\end{array}$$

Тогда можно положить $\mathbf{e}^i_1 = e^{\lambda_i x}$. Действительно, это — ненулевое (поскольку собственный вектор) решение дифференциального уравнения $\frac{df}{dx} = \lambda_i f$, которое определено однозначно с точностью до умножения на ненулевое число. (В самом деле, если f — решение указанного уравнения, то дифференцирование выражения $f e^{-\lambda_i x}$ дает 0, то есть это — некоторая константа). В частности, мы видим, что $\lambda_i,\ 1 \leq i \leq s$, попарно различны. В следующей строчке стоят решения уравнений $\frac{df}{dx} - \lambda_i f = e^{\lambda_i x}$ (для тех i, для которых $r_i > 1$). Произвольное решение линейного неоднородного уравнения является суммой его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Легко видеть, что в качестве частного решения подходит $\frac{x}{1!} e^{\lambda_i x}$. Поэтому положим $\mathbf{e}^i_2 = \frac{x}{1!} e^{\lambda_i x}$ для i таких, что $r_i > 1$.

Далее положим по индукции $\mathbf{e}^i_k = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda_i x}$ при $1 \leq k < r_i$. Тогда $\frac{x^k}{k!} e^{\lambda_i x}$ является решением уравнения $\frac{df}{dx} - \lambda_i f = \mathbf{e}^i_k$, что доказывает индуктивное предположение. Очевидно, что линейная оболочка векторов $\mathbf{e}_1^i, \ldots, \mathbf{e}_{r_i}^i$ совпадает с пространством, состоящим из всех функций $P(x)e^{\lambda_i x}$, где $\deg P(x) \le r_i - 1$. ■

Комментарий. Предыдущая задача объясняет роль квазимногочленов (то есть функций вида $P(x)e^{\lambda x}$, где $P(x)$ —многочлен) в теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Действительно, если $y(x)$ — функция вещественной переменной x, являющаяся решением однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^i y}{dx^i} = 0, \quad a_i \in \mathbb{C}, \tag{40}$$

то $y(x)$ как минимум n раз дифференцируема и индукция, использующая выражение (40) n-й производной через производные меньшего порядка показывает, что на самом деле она бесконечно дифференцируема, а также что линейная оболочка функций $\frac{d^i y}{dx^i}$, $i \ge 0$, конечномерна и оператор $\frac{d}{dx}$ переводит ее в себя. Из этого вытекает, что $y(x)$ представляется в виде $\sum P_i(x)e^{\lambda_i x}$, где $P_i(x)$ — многочлены.
По уравнению (40) определим многочлен $f(t) := t^n + \sum a_i t^i$. Очевидно, что $f(t)$ — аннулирующий многочлен оператора $\frac{d}{dx}$ на пространстве L всех решений уравнения (40).

Задача 2.46. Доказать, что $f(t)$ является характеристическим и минимальным многочленом оператора $\frac{d}{dx}$ на пространстве L всех решений уравнения (40). В частности, $\dim L = n$ и λ_i — его корни кратностей r_i, $\sum_i r_i = n$.

Решение. Если L бесконечномерно, то тем не менее произвольный его элемент принадлежит конечномерному $\frac{d}{dx}$-инвариантному подпространству. Любое такое подпространство представляется в виде прямой суммы корневых подпространств оператора $\frac{d}{dx}$, в которых (как мы видели в предыдущей задаче) квазиодночлены $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, \frac{x^k}{k!}e^{\lambda x}\}$ (для некоторого k) образуют базис. Подставляя $e^{\lambda x}$ в (40) получаем, что λ — корень $f(t)$.
Пусть $f(t) = \prod_{i=1}^s (t - \lambda_i)^{r_i}$, причем $\lambda_i \ne \lambda_j$ при $i \ne j$. Поскольку оператор $\frac{d}{dx} - \lambda_i \mathrm{id}_L$ понижает степень $\frac{x^k}{k!}e^{\lambda_i x}$, $k \ge 1$ на 1 и определяет изоморфизм при ограничении на пространство квазимногочленов с $\lambda \ne \lambda_i$ мы видим, что для каждого корня λ_i многочлена $f(t)$ в L имеется r_i-мерное корневое подпространство оператора $\frac{d}{dx}$ и все L является их прямой суммой. В частности, многочлен $f(t)$ является минимальным многочленом оператора $\frac{d}{dx}$. ■

Комментарий. Таким образом, пространство решений уравнения (40) является линейной оболочкой квазимногочленов

$$P_i(x)e^{\lambda_i x}, \ \deg P_i(x) \le r_i - 1.$$

Задача 2.47. Найти все решения дифференциального уравнения

$$y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$t^3 + 2t^2 - 4t - 8 = (t+2)(t^2 - 4) = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 2$ кратности 1 и $\lambda_2 = -2$ кратности 2. Таким образом, функции e^{2x}, e^{-2x}, xe^{-2x} образуют базис в пространстве решений. ■

2.5. Ещё об отношениях эквивалентности

Изученные нами выше задачи делают естественным рассмотрение еще нескольких примеров отношений эквивалентности, возникающих в линейной алгебре. Легкая проверка того, что это — действительно отношения эквивалентности, оставляется читателю.

1) Пусть $X = \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$, два элемента A, $A' \in X$ эквивалентны $\Leftrightarrow \exists\, D \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ такие, что $A' = DAC^{-1}$. Другими словами, две матрицы A, A' эквивалентны $\Leftrightarrow$ они являются матрицами одного и того же линейного отображения $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ в разных базисах.
Данное отношение эквивалентности имеет единственный инвариант[28] — ранг матрицы (= размерность образа линейного отображения). Более того, две $m\times n$-матрицы A, A' с элементами из поля $\mathbb{K}$ эквивалентны $\Leftrightarrow$ их ранги равны. Значит, классов эквивалентности всего $\min(m,\, n) + 1$ штук. Канонический представитель класса, отвечающего r, $0 \le r \le \min(m,\, n)$, — матрица, имеющая вид $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1') Пусть $X = \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$, два элемента A, $A' \in X$ эквивалентны $\Leftrightarrow$ существует последовательность элементарных преобразований строк и столбцов, превращающая A в A'. Данное отношение эквивалентности совпадает с отношением п. 1).
2) Пусть $X = \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, два элемента A, $A' \in X$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют ортогональные матрицы $D \in \mathrm{O}(m)$, $C \in \mathrm{O}(n)$[29] такие, что $A' = DAC^T$. Другими словами, две матрицы A, A' эквивалентны, если и только если они являются матрицами одного и того же линейного отображения $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ в разных ортонормированных базисах.
Это отношение более тонкое, чем в пункте 1), поэтому неудивительно, что появляются дополнительные инварианты. Любая матрица $A \in X$ представляется в виде (ср. (52)) $A = U\Lambda V$, где U и V — ортогональные матрицы порядков m и n соответственно, а $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in X$, где $\Lambda_r = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, причем все $\sigma_i > 0$. По существу, это аналог рассмотренного выше сингулярного разложения, но только не для операторов, а для линейных отображений между евклидовыми пространствами. Классы эквивалентности взаимно однозначно соответствуют наборам вещественных чисел $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ при условии $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \ldots \ge \sigma_r$.

[28] Инвариант — функция на X, постоянная на классах эквивалентности.

[29] Напомним, что $\mathrm{O}(n)$ обозначает группу ортогональных матриц порядка n, то есть вещественных матриц таких, что $C^TC = E$.

3) Пусть $X = \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$, два элемента A, $A' \in X$ эквивалентны $\Leftrightarrow \exists\, D \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ такая, что $A' = DA$. Данное отношение эквивалентности совпадает со следующим, более знакомым по теории систем линейных уравнений.
3') Пусть $X = \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$, два элемента A, $A' \in X$ эквивалентны $\Leftrightarrow$ существует последовательность элементарных преобразований строк, превращающая A в A'. Другими словами, матрицы A, A' эквивалентны $\Leftrightarrow$ они задают эквивалентные системы из m линейных однородных уравнений.
Ранг является инвариантом данного отношения. Более того, каждый класс эквивалентности содержит единственную строгую ступенчатую матрицу, то есть ступенчатую матрицу, в которой главным переменным отвечает единичная подматрица. Существует также биекция между классами эквивалентности и линейными подпространствами в $\mathbb{K}^n$, которые могут быть заданы системой из не более чем m уравнений. Если ввести подмножество X_r в X, состоящее из матриц ранга r, $0 \le r \le \min(m, n)$, то классы эквивалентности элементов X_r будут отвечать множеству, состоящему из всех $k := n - r$-мерных подпространств в $\mathbb{K}^n$, то есть множеству точек грассманиана $\mathrm{Gr}(k, n)$ над полем $\mathbb{K}$. Подробнее см. [19], гл. 3, § 8.
4) Пусть $X = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, два элемента A, $A' \in X$ эквивалентны $\Leftrightarrow \exists\, C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ такая, что $A' = CAC^{-1}$. Другими словами, две матрицы A, A' эквивалентны $\Leftrightarrow$ они являются матрицами одного и того же линейного оператора $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ в разных базисах.
Инварианты: ранг, характеристический многочлен (в частности, след и определитель). Две матрицы эквивалентны $\Leftrightarrow$ они имеют одинаковую жорданову нормальную форму (с точностью до перестановки жордановых клеток). Классов столько же, сколько различных жордановых нормальных форм для матриц порядка n (мы не различаем жордановы формы, отличающиеся только перестановкой клеток). В частности, если $n \ne 0$, то классы эквивалентности образуют континуальное множество.
5) Пусть $X = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ — подпространство симметрических матриц в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ (такая матрица определяет билинейную симметричную форму); два элемента A, $A' \in X$ эквивалентны, если существует такая обратимая матрица $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, что $A' = = CAC^T$. Другими словами, две матрицы эквивалентны $\Leftrightarrow$ они являются матрицами одной и той же билинейной симметричной формы в разных базисах. Канонический представитель класса — диагональная матрица с числами 1, -1 и 0 на главной диагонали (таким образом, классов — конечное число). Инвариант — сигнатура (r_+, r_-, r_0).
6) Пусть X — снова подпространство $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ симметрических матриц в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ (теперь интерпретируем такую матрицу как матрицу самосопряженного оператора в ортонормированном базисе); два элемента A, $A' \in X$ эквивалентны $\Leftrightarrow \exists\, C \in \mathrm{O}(n)$ такая, что $A' = CAC^T$. Другими словами, две такие матрицы эквивалентны $\Leftrightarrow$ они являются матрицами одного и того же самосопряженного оператора в разных ортонормированных базисах. Инвариантом является характеристический многочлен. Канонический вид: диагональная матрица с вещественными числами на главной диагонали (набор собственных значений определен однозначно с точностью до перестановки).

Рассмотренные выше примеры 1) — 6) отношений эквивалентности возникают из разбиений множеств с заданным действием групп на орбиты (детали оставляем читателю).

3 Евклидовы и эрмитовы пространства

3.1. Билинейные и квадратичные функции

Определение 3.1. *Квадратичной формой* q на векторном пространстве V над полем $\mathbb{K}$ называется отображение $q\colon V \to \mathbb{K}$, для которого существует билинейная форма $h\colon V \times V \to \mathbb{K}$ со свойством

$$q(\mathbf{v}) = h(\mathbf{v},\, \mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in V.$$

Если характеристика поля $\mathbb{K}$ не равна 2, то для всякой квадратичной формы q существует *единственная симметричная* билинейная форма g со свойством $q(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v},\, \mathbf{v})$, называемая *поляризацией* q. Нетрудно показать, что поляризация может быть найдена по формуле

$$g(\mathbf{v},\, \mathbf{w}) = 1/2\,[q(\mathbf{v}+\mathbf{w}) - q(\mathbf{v}) - q(\mathbf{w})] \quad \forall \mathbf{v},\, \mathbf{w} \in V. \tag{41}$$

В произвольном базисе квадратичная форма задается однородным многочленом второй степени от координат векторов. Обратно, всякий такой многочлен является выражением некоторой квадратичной формы в заданном базисе.

Задача 3.2. Убедитесь, что функция $A \mapsto \det A$ является квадратичной формой на пространстве $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, и покажите, что ее поляризация равна $\widetilde{\det}(A,\, B) := \mathrm{tr}(A\widehat{B})/2$, где $\widehat{B}$ — присоединенная к B матрица[30]. Какова сигнатура этой формы?

Решение. По определению, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, последнее выражение — однородный многочлен второй степени от матричных элементов a_{ij}, то есть от координат матрицы A в базисе из матричных единиц E_{ij}. Таким образом, определитель — квадратичная форма на пространстве $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. Найдем ее поляризацию, применяя (41):

$$\det(A+B) - \det A - \det B = a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} + a_{22}b_{11} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{21} \\ b_{22} \end{pmatrix}.$$

Прямым вычислением легко убедиться, что полученная билинейная функция совпадает с $\mathrm{tr}(A\widehat{B})$. Приведение к сумме квадратов с помощью элементарных преобразований или методом Лагранжа показывает, что сигнатура этой формы $(2,\, 2)$.

Эту задачу (без пункта о сигнатуре) можно решить и по-другому. Во-первых, покажем, что $(A,\, B) \mapsto \mathrm{tr}(A\widehat{B})/2$ — билинейная форма на $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ такая, что $\det A = \mathrm{tr}(A\widehat{A})/2$. Отсюда будет следовать, что $A \mapsto \det A$ — квадратичная форма на $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. А поскольку билинейная форма $(A,\, B) \mapsto \mathrm{tr}(A\widehat{B})/2$ симметрична, то она — поляризация $\det A$.

[30] То есть транспонированная к матрице, состоящей из алгебраических дополнений матрицы B.

Линейность функции $\mathrm{tr}(A\widehat{B})$ как функции от первого аргумента A при фиксированном втором очевидна; линейность относительно второго аргумента следует из линейности отображения $B \mapsto \widehat{B}$. Отсюда следует билинейность $\widetilde{\det}(A, B)$. Легко проверяемое тождество $\mathrm{tr}(A\widehat{A})/2 = \det A$ означает равенство $\widetilde{\det}(A, A) = \det A$. Значит, $A \mapsto \det A$ — квадратичная форма.

Симметричность $\widetilde{\det}(A, B)$ вытекает из проверяемого прямым вычислением тождества $\mathrm{tr}(A\widehat{B}) = \mathrm{tr}(B\widehat{A})$. Это и означает, что симметричная билинейная форма $\mathrm{tr}(A\widehat{B})/2$ является поляризацией квадратичной формы $A \mapsto \det A$. ■

Задача 3.3. Может ли матрица

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

быть матрицей Грама некоторого базиса евклидова пространства?

Решение. Нет, не может. Для доказательства проще всего воспользоваться критерием Сильвестра, но можно рассуждать и непосредственно с помощью неравенства Коши—Буняковского: подматрица, стоящая на пересечении 1-й и 2-й строк и 1-го и 2-го столбцов матрицы G, показывает, что

$$|\mathbf{e}_1|^2|\mathbf{e}_2|^2 - (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)^2 = -3 < 0$$

(где $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ — базис, в котором записана матрица Грама G), что в евклидовом пространстве невозможно. ■

Комментарий. С помощью приведения квадратичной формы к сумме квадратов (по методу Лагранжа, с помощью элементарных преобразований или по методу Якоби, см. [15], гл. 5, § 4) легко проверить, что сигнатура формы, имеющей (в некотором базисе) матрицу Грама G, есть $(2, 1)$, то есть найдется базис, в котором матрица Грама имеет диагональный вид $\mathrm{diag}(1, 1, -1)$, или, эквивалентно, найдется невырожденная матрица C такая, что $C^T G C = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$.

Задача 3.4. Пусть угловые миноры квадратичной формы q на трехмерном вещественном пространстве V удовлетворяют условиям $\delta_1 = \delta_2 = 0$, $\delta_3 > 0$. Какие могут быть положительный r_+ и отрицательный r_- индексы инерции q?

Решение. Ясно, что $r_+ + r_- = 3$, но при этом r_+ и r_- больше нуля (поскольку в противном случае q была бы знакоопределенной, но по условию она не удовлетворяет критерию Сильвестра). Если $r_+ = 2$, то существует двумерное подпространство $U \subset V$ такое, что $q|_U$ положительно определена. Перейдем к базису в V, первые два вектора которого образуют базис в U, в нем $\delta_1' > 0$, $\delta_2' > 0$ и δ_3' имеет тот же знак что и δ_3, то есть тоже больше нуля. Тогда по критерию Сильвестра q должна быть положительно определена, что противоречит условию. Значит, единственная возможность $r_+ = 1$, $r_- = 2$. Она действительно реализуется (можно взять матрицу с единственными ненулевыми элементами $1, -1, 1$ на побочной диагонали).

Любопытно, что набору $\delta_1 = \delta_2 = 0$, $\delta_3 < 0$ отвечает сигнатура $r_+ = 2$, $r_- = 1$. ■

Пусть V — евклидово пространство, $U \subset V$ — его подпространство. Тогда $V = U \oplus U^\perp$, где $U^\perp := \{\mathbf{v} \in V \mid (\mathbf{v}, \mathbf{u}) = = 0\ \forall \mathbf{u} \in U\}$, — *ортогональное дополнение* к U в V. Следовательно, $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$ и $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

Задача 3.5. Пусть V — конечномерное пространство над $\mathbb{R}$, $U \subset V$, $W \subset V$ — его подпространства, причем $V = U \oplus W$. Доказать, что существует скалярное произведение $(\cdot\,,\,\cdot)$ (= евклидова структура) на V такое, что $W = U^\perp$ (и, таким образом, приведенное выше прямое разложение есть $V = U \oplus U^\perp$). Единственно ли оно?

Решение. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ — базис в U, $\{\mathbf{e}_{k+1}, \ldots \mathbf{e}_n\}$ — базис в W, тогда их объединение $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис в V. Объявим его ортонормированным; тогда, очевидно, $W = U^\perp$.
Если базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ ортонормирован для евклидовой структуры $(\cdot\,,\,\cdot)$, то ортонормированы и все базисы, получающиеся из него ортогональной заменой, и только они (см. комментарий к задаче 3.12 ниже). Отсюда легко видеть, что, за исключением тривиального случая $V = \{\mathbf{0}\}$, требуемая евклидова структура не единственна. ■

Задача 3.6. Доказать, что пространство $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ с билинейной функцией $(A, B) := \mathrm{tr}(A^T B)$ является евклидовым пространством. Найти ортогональное дополнение в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ к подпространствам V симметрических и W верхнетреугольных матриц.

Решение. Во-первых, нужно проверить билинейность, симметричность и положительную определенность данной билинейной функции. Линейность по первому аргументу:

$$(A + A', B) = \mathrm{tr}((A + A')^T B) = \mathrm{tr}((A^T + A'^T)B) =$$

$$= \mathrm{tr}(A^T B + A'^T B) = \mathrm{tr}(A^T B) + \mathrm{tr}(A'^T B) = (A, B) + (A', B),$$

$$(\lambda A, B) = \mathrm{tr}((\lambda A)^T B) = \mathrm{tr}(\lambda A^T B) = \lambda\,\mathrm{tr}(A^T B) = \lambda(A, B),$$

и аналогично для второго аргумента. Симметричность:

$$(A, B) = \mathrm{tr}(A^T B) = \mathrm{tr}((A^T B)^T) = \mathrm{tr}(B^T A) = (B, A).$$

Положительная определенность следует из формулы $\mathrm{tr}(A^T A) = = \sum_{i,\,j=1}^n a_{ij}^2$. Таким образом, $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ со скалярным произведением $(\cdot\,,\,\cdot)$ — n^2-мерное евклидово пространство.
Для нахождения ортогонального дополнения к подпространству W верхнетреугольных матриц воспользуемся следующим легко проверяемым утверждением: если $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — ортонормированный базис в евклидовом пространстве V, то для произвольного подмножества $I := \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ ортогональным дополнением к линейной оболочке векторов $\{\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k}\}$ является линейная оболочка векторов $\{\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_{n-k}}\}$, где $\{j_1, \ldots, j_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\} \backslash I$.

Легко проверить, что матричные единицы $\{E_{ij} \mid 1 \le i,\, j \le n\}$ (при выбранном упорядочивании) образуют в евклидовом пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ ортонормированный базис. Подпространство W совпадает с линейной оболочкой матриц $\{E_{ij} \mid 1 \le i \le j \le \le n\}$, поэтому ортогональным дополнением $W^\perp$ является линейная оболочка матриц $\{E_{ij} \mid 1 \le j < i \le n\}$, то есть подпространство *нижних нильтреугольных матриц* (матриц, у которых нули на главной диагонали и выше).
Чтобы найти ортогональное дополнение к подпространству симметрических матриц V, для начала заметим, что $\mathrm{tr}(A^T B) = = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$. Если B ортогональна симметрическим матрицам, то, в частности, она ортогональна матрицам $E_{ii},\ i = 1, \ldots, n$. Отсюда $b_{ii} = 0,\ \ i = 1, \ldots, n$. Кроме того, B ортогональна всем матрицам вида $E_{ij} + E_{ji}$, откуда $b_{ij} + b_{ji} = 0,\ \ 1 \le i < j \le n$. Значит, матрица B кососимметрична.
С другой стороны, если $A = A^T$, а $B = -B^T$, то

$$(A,\, B) = \mathrm{tr}(A^T B) = \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) =$$

$$= \mathrm{tr}(A^T B^T) = -\mathrm{tr}(A^T B) = -(A,\, B),$$

откуда $(A,\, B) = 0$. Объединяя этот результат с предыдущим, получаем, что $V^\perp$ совпадает с подпространством кососимметрических матриц.
Результат про $V^\perp$ можно доказать и по-другому, если заметить, что оператор транспонирования

$$T\colon \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}), \quad T(A) = A^T$$

самосопряжен относительно скалярного произведения $(A,\, B) = = \mathrm{tr}(A^T B)$:

$$(T(A),\, B) = (A^T,\, B) = \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) =$$

$$= \mathrm{tr}(A^T B^T) = (A,\, B^T) = (A,\, T(B))$$

(здесь мы воспользовались известным свойством следа $\mathrm{tr}(AB) = = \mathrm{tr}(BA)$, см. задачу 2.2). Собственные подпространства самосопряженного оператора, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны. Подпространства симметричных и кососимметричных операторов в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ — собственные подпространства, отвечающие собственным значениям 1 и -1. ∎

Задача 3.7. Доказать, что любая линейная функция f на пространстве матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ имеет вид $f(X) = \mathrm{tr}\,(AX)$, где $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, причем матрица $A = A_f$ функцией f определяется однозначно.

Решение. Хорошо известно (и легко доказывается), что для всякого линейного функционала f на евклидовом пространстве V со скалярным произведением g существует такой единственный вектор $\mathbf{u} \in V$, что $f(\mathbf{v}) = g(\mathbf{u},\, \mathbf{v})\ \forall \mathbf{v} \in V$. Отсюда и из предыдущей задачи получаем, что всякий линейный функционал на $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ имеет вид $f(X) = \mathrm{tr}(B^T X)$ для некоторой однозначно определенной матрицы $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Полагая $A = B^T$, получаем требуемое. ∎

Задача 3.8. Доказать, что функция $q(A) := \mathrm{tr}\,(A^2)$ является квадратичной формой на пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, и найти ее сигнатуру.

Решение. Легко видеть, что $g(A, B) := \mathrm{tr}\,(AB)$ — билинейная форма на $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ такая, что $q(A) = g(A, A)$. Таким образом, q — квадратичная форма на $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Кстати, ввиду тождества $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$, билинейная форма g симметрична.
Пусть $A^T = A$. Тогда, в силу предыдущей задачи, $\mathrm{tr}\,(A^2) = = \mathrm{tr}\,(A^T A) > 0\ \forall A \neq 0$. Таким образом, на подпространстве $V \subset \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ симметрических матриц q положительно определена.
Пусть $B^T = -B$. Тогда, в силу предыдущей задачи, $\mathrm{tr}\,(B^2) = = -\mathrm{tr}\,(B^T B) < 0\ \forall B \neq 0$. Таким образом, на подпространстве $U \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ кососимметрических матриц q отрицательно определена.
Приведем два варианта дальнейших рассуждений. Во-первых, легко заметить, что U и V ортогональны относительно g: для симметрической и кососимметрической матриц A, B имеем

$$g(A, B) = \mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(B^T A^T) = -\mathrm{tr}\,(BA) =$$

$$= -\mathrm{tr}\,(AB) = -g(A, B) \quad \Rightarrow \quad g(A, B) = 0.$$

Объединяя ортонормированные базисы в V и U, получаем ортонормированный базис в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, в котором $\dim V = \frac{n(n+1)}{2}$ элементов имеют скалярный квадрат 1 и $\dim U = \frac{n(n-1)}{2}$ элементов — скалярный квадрат -1.
Во-вторых, можно воспользоваться следующим соображением: если в пространстве L с квадратичной формой q есть k-мерное подпространство $W \subset L$, ограничение q на которое положительно (отрицательно) определено, то положительный (отрицательный) индекс инерции q не меньше k. Действительно, W невырождено, поэтому $L = W \oplus W^{\perp}$. Возвращаясь к нашей задаче, мы видим, что положительный индекс инерции q не меньше $\frac{n(n+1)}{2}$, а отрицательный индекс инерции — не меньше $\frac{n(n-1)}{2}$, причем сумма этих чисел равна $n^2 = \dim \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Отсюда следует, что индексы инерции в точности равны указанным числам. ∎

Задача 3.9. Предположим, что вещественное векторное пространство V, на котором задана квадратичная форма $q\colon V \to \mathbb{R}$, разложено в прямую сумму $V = U \oplus W$ своих подпространств, причем ограничения $q|_U$ и $q|_W$ положительно определены. Следует ли отсюда, что сама q положительно определена?[31]

Решение. Ответ отрицательный, причем для построения контрпримера достаточно рассмотреть случай, когда двумерное пространство V разложено в прямую сумму одномерных подпространств. Рассуждать при построении контрпримера можно следующим образом. Выберем базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в V такой, что $U = \langle \mathbf{e}_1 \rangle$, $W = \langle \mathbf{e}_2 \rangle$. То, что ограничения q на указанные подпространства положительно определены означает, что на главной диагонали в матрице q в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ стоят положительные числа, скажем, равные 1. Требуется выбрать элементы вне главной диагонали так, чтобы полученная симметричная матрица не была положительно определенной, чего, конечно, легко добиться, положив эти элементы равными произвольному числу больше либо равному 1.

[31]задача сообщена авторам О.К. Подлипским.

Другой вариант рассуждения использует аргумент “по непрерывности”. А именно, пусть ограничение q на $\langle \mathbf{e}_1 \rangle$ положительно определено. Рассмотрим вектор $\mathbf{e}_2' := \mathbf{e}_1 + \varepsilon \mathbf{e}_2$, где положительное число ε достаточно мало. Ясно, что линейная оболочка $\langle \mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2' \rangle$ совпадает с $V = \langle \mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2 \rangle$, в то же время из непрерывности q и $q(\mathbf{e}_1) > 0$ следует, что и $q(\mathbf{e}_2') > 0$ при достаточно малых ε. ■

Задача 3.10. Доказать, что формула $(f,\, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\, dt$ определяет скалярное произведение на линейном пространстве вещественнозначных функций, непрерывных на отрезке $[-1,\, 1]$.

Решение. Билинейность следует из свойства линейности интеграла (см. [39], теорема 12.10 на с. 117), симметричность — из коммутативности умножения функций. Докажем положительную определенность. Если функция f тождественно не равна нулю на отрезке $[-1,\, 1]$, найдется точка $\alpha \in [-1,\, 1]$ такая, что $f(\alpha) \neq 0$. Тогда (здесь используется непрерывность) для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется ε-окрестность $U_\varepsilon(\alpha)$ точки α (односторонняя в случае, когда α совпадает с одним из концов отрезка) такая, что $|f(x)| \geq |f(\alpha)|/2\ \forall x \in U_\varepsilon(\alpha)$. Тогда $(f,\, f) = \int_{-1}^{1} f(t)^2\, dt \geq \geq f(\alpha)^2 \varepsilon/4$. Подробности см., например, в [39], теорема 12.15 на с. 121. ■

Комментарий. Заметим, что данное пространство функций бесконечномерно. Так, например, мономы $\{1,\, x,\, x^2, \ldots, x^n\}$ линейно независимы как функции на $[-1,\, 1]$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Однако мономы не образуют ортонормированного базиса. Можно при помощи процесса Грама—Шмидта построить ортогональную систему из многочленов. Тогда мы придем к системе многочленов Лежандра (см., например, [35]), известны и другие системы ортогональных многочленов. Впрочем, есть и простой пример ортогональной (даже нормированной) системы функций на $[-1,\, 1]$: это система из тригонометрических функций

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos k\pi x,\ \sin k\pi x \mid k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Разложение функции по такому базису приводит к понятию *ряда Фурье*. Обратим внимание читателя, что многие вопросы, которые не являются сложными для конечномерных пространств, в случае пространств бесконечномерных уже могут быть непростыми. Так, например, не очевиден ответ на вопрос, является ли в пространстве бесконечно дифференцируемых функций указанный базис из тригонометрических функций максимальной линейно независимой системой векторов. Подробнее об этом можно прочитать, например, в [31] (см. также добавление 3.6. в конце пособия).

Задача 3.11. Доказать, что матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

положительно определена.

Решение. В пространстве многочленов $\mathbb{R}[x]_{n-1}$ степени не выше $n-1$ введем скалярное произведение $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. Очевидно, форма $(\cdot\,,\cdot)$ билинейна, симметрична и положительно определена, значит, пространство $\mathbb{R}[x]_{n-1}$, снабженное данной билинейной формой, является n-мерным евклидовым пространством.
Рассмотрим базис $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$ в $\mathbb{R}[x]_{n-1}$. Нетрудно проверить, что приведенная в условии матрица является матрицей Грама этого базиса. ■

Комментарий. Указанная в условии задачи матрица называется *матрицей Гильберта* и является классическим примером плохо обусловленной матрицы, то есть если A_n — матрица Гильберта n-го порядка, то число обусловленности $\|A_n\| \times \|A_n^{-1}\|$ — велико. Вообще, матрица Гильберта является хорошей тестовой матрицей для проверки алгоритмов решения систем линейных уравнений и алгоритмов точного нахождения определителей матриц, наглядно демонстрируя даже на матрицах небольшого размера, какие проблемы возникают в вычислительной математике. Попробуйте, например, при помощи классического метода Гаусса на компьютере обратить матрицу Гильберта размера 5×5.

Задача 3.12. Доказать, что квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда ее матрица A представляется в виде $A = C^TC$ для некоторой невырожденной верхней треугольной матрицы C.

Решение. То, что существует такая *невырожденная* матрица C, очевидно. Действительно, для положительно определенной квадратичной формы существует ортонормированный базис, то есть базис, в котором она имеет единичную матрицу E. Если Q — матрица перехода от исходного базиса к данному ортонормированному, то $E = Q^TAQ$, тогда можно положить $C = Q^{-1}$. То, что, обратно, квадратичная форма с матрицей $A = C^TC$ положительно определена, тоже очевидно, так как условие положительной определенности не зависит от базиса, а для такой квадратичной формы найдется базис, в котором ее матрица есть E (и она сама есть сумма квадратов).
Однако доказательство существования невырожденной *верхней треугольной* матрицы C с указанным свойством требует чуть более тонкого исследования. А именно, вспомним, что ортонормированный базис можно строить из исходного с помощью алгоритма Грама—Шмидта. Точнее, пусть исходный базис (в котором матрица квадратичной формы была A) есть $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$. Тогда ортогональный базис $\{\mathbf{e}''_1, \ldots, \mathbf{e}''_n\}$ строится по индукции: в качестве $\mathbf{e}''_1$ возьмем $\mathbf{e}'_1$, и, если $\mathbf{e}''_1, \ldots, \mathbf{e}''_{i-1}$ уже построены, $\mathbf{e}''_i$ ищем в виде $\mathbf{e}''_i = \mathbf{e}'_i - \sum_{j=1}^{i-1} x_j\mathbf{e}'_j$, где скаляры x_j находятся из условия ортогональности $\mathbf{e}''_i$ к векторам $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_{i-1}$. Такой набор $\{x_j\}$ существует и единствен, поскольку является решением квадратной системы линейных уравнений, матрицей коэффициентов которой является матрица Грама системы линейно независимых векторов $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_{i-1}\}$, которая в силу положительной определенности квадратичной формы невырождена.
Легко видеть, что матрица перехода от базиса $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ к его ортогонализации $\{\mathbf{e}''_1, \ldots, \mathbf{e}''_n\}$ верхняя треугольная с единицами на главной диагонали. Затем при построении орто*нормированного* базиса мы каждый столбец

умножаем на величину, обратную длине соответствующего базисного вектора ортогонального базиса (что равносильно умножению матрицы перехода справа на диагональную матрицу). Это дает искомую верхнетреугольную матрицу. Заметим еще, что на главной диагонали этой матрицы стоят положительные числа. ■

Комментарий. Заметим, что из приведенного рассуждения легко выводится, что для произвольной невырожденной матрицы $C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ существует, причем единственная, пара, состоящая из ортогональной матрицы Q и верхней треугольной матрицы с положительными диагональными элементами R такая, что $C = QR$ (так называемое “QR-разложение” [10], гл. VII, § 1, п. 9).

Кстати, данный результат позволяет описать множество всех структур евклидова пространства на вещественном векторном n-мерном пространстве V. Действительно, пусть $\mathcal{E}$ — структура евклидова пространства на V, для которой базис $\{\mathbf{e}\} := \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ является ортонормированным (ясно, что выбор ортонормированного базиса определяет евклидову структуру однозначно; обратно, базис определяется евклидовой структурой с точностью до ортогональной замены). Тогда если $\mathcal{E}'$ — еще одна структура евклидова пространства на V с некоторым ортонормированным базисом $\{\mathbf{e}'\} := \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$, то существует единственная матрица $C_{\{\mathbf{e}\}\to\{\mathbf{e}'\}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (матрица перехода). Таким образом, на множестве евклидовых структур на V группа $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ действует транзитивно, причем стабилизатором точки является ортогональная подгруппа $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Тогда множество евклидовых структур есть однородное пространство $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$, которое QR-разложение позволяет отождествить с множеством верхних треугольных матриц с положительными элементами на главной диагонали.

Задача 3.13. Множество положительно определенных квадратичных форм в $\mathbb{R}^n$ открыто в линейном пространстве всех квадратичных форм $\mathbb{R}^{n(n+1)}$.

Решение. Согласно критерию Сильвестра, подмножество положительно определенных форм в $\mathbb{R}^n$ совпадает с пересечением n открытых подмножеств в $\mathbb{R}^{n(n+1)}$, задаваемых условиями положительности главных миноров их матриц. ■

Комментарий. Более того, можно доказать, что множество невырожденных квадратичных форм с данной сигнатурой открыто в $\mathbb{R}^{n(n+1)}$. Например, пространство квадратичных форм $ax^2 + bxy + cy^2$ от двух переменных — это трехмерное пространство с координатами (a, b, c). Конус $b^2 = 4ac$ делит это пространство на три открытые части соответственно сигнатурам.

Задача 3.14. Пусть V — двумерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, снабженное билинейной симметричной формой h сигнатуры $(1, 1)$. Найти группу изометрий (V, h).

Решение. Выберем ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в V, в котором матрица Грама формы h имеет вид $H := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а значит, сама билинейная форма $h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = x_1y_1 - x_2y_2$, где $\mathbf{u} = (x_1, x_2)^T$, $\mathbf{v} = (y_1, y_2)^T$.

Линейное преобразование $\varphi\colon V \to V$ является изометрией тогда и только тогда, когда $h(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) = h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Если $A = A_\varphi$ — матрица преобразования φ в выбранном базисе, то это эквивалентно равенству $(A\mathbf{u})^T H(A\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T H\mathbf{v} \;\; \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, откуда

$$A^T HA = H. \tag{42}$$

То есть наша задача — найти все матрицы A, удовлетворяющие (42). Равенство (42) можно переписать в эквивалентном виде $A^T H = HA^{-1}$. Заметим, что из (42) следует, что $\det A = \pm 1$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, тогда если $\det A = 1$, то $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, и мы получаем систему $a = d$, $b = c$, $a^2 - b^2 = 1$, то есть $A = = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, причем $a^2 - b^2 = 1$. Последнее равенство — уравнение гиперболы, одну ее ветвь можно параметризовать, положив $a = \operatorname{ch}\vartheta$, $b = \operatorname{sh}\vartheta$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, другую — $a = -\operatorname{ch}\vartheta$, $b = -\operatorname{sh}\vartheta$, $\vartheta \in \mathbb{R}$. Первая ветвь отвечает множеству матриц

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\vartheta & \operatorname{sh}\vartheta \\ \operatorname{sh}\vartheta & \operatorname{ch}\vartheta \end{pmatrix}, \tag{43}$$

содержащему единичный элемент (при $\vartheta = 0$). Легко проверить, что это — подгруппа в группе $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ (даже в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$).

Пусть $\det A = -1$, в этом случае $A^{-1} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, тогда из (42) получаем систему $a = -d$, $b = -c$, кроме того, из $\det A = = -1$ получаем $a^2 - b^2 = 1$. В этом случае мы также имеем два семейства: $a = \operatorname{ch}\vartheta$, $b = \operatorname{sh}\vartheta$ и $a = -\operatorname{ch}\vartheta$, $b = -\operatorname{sh}\vartheta$.

Таким образом, группа изометрий (V, h) в выбранном базисе состоит из матриц, принадлежащих четырем семействам:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\vartheta & \operatorname{sh}\vartheta \\ \operatorname{sh}\vartheta & \operatorname{ch}\vartheta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\vartheta & -\operatorname{sh}\vartheta \\ -\operatorname{sh}\vartheta & -\operatorname{ch}\vartheta \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\vartheta & \operatorname{sh}\vartheta \\ -\operatorname{sh}\vartheta & -\operatorname{ch}\vartheta \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\vartheta & -\operatorname{sh}\vartheta \\ \operatorname{sh}\vartheta & \operatorname{ch}\vartheta \end{pmatrix}, \quad \text{где } \vartheta \in \mathbb{R},$$

причем первое семейство является подгруппой (“связной компонентой единицы”). ■

Комментарий. Матрицы (43) похожи на матрицы поворота плоскости, правда, в них участвуют гиперболические функции вместо тригонометрических. Действительно, матрицы (43) сохраняют квадратичную форму $x_1^2 - x_2^2$, в то время как “обычные” матрицы поворота — форму $x_1^2 + x_2^2$. Матрицы вида (43) определяют так называемые *гиперболические повороты*, при которых концы векторов, отложенных от начала координат, движутся по равнобочной гиперболе (в то время как в случае обычных поворотов — по окружности).

Гиперболические повороты дают геометрическое описание так называемых бустов (переходов к новой инерциальной системе отсчета) в специальной теории относительности (СТО). Поясним это.

Пространство-время в СТО — четырехмерное вещественное линейное пространство V, снабженное квадратичной формой сигнатуры (1, 3) ("метрикой Минковского"). Выбирая ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, отождествим V с $\mathbb{R}^4$, при этом квадратичная форма примет вид $c^2t^2-x^2-y^2-z^2$, где t — временна́я, x, y, z — пространственные координаты, а c — физическая постоянная, имеющая физическую размерность скорости (скорость света в вакууме). Заметим, что выбор базиса фиксирует некоторую инерциальную систему отсчета, для которой ортогональное дополнение $\langle \mathbf{e}_0 \rangle^\perp$ к временно́й оси t (то есть трехмерное подпространство в V с базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$) — пространство одновременных событий для соответствующего наблюдателя. Изометрии пространства-времени образуют так называемую *группу Лоренца*[32]. Они включают в себя помимо обычных вращений в трехмерном пространстве $\langle \mathbf{e}_0 \rangle^\perp$ гиперболические повороты в плоскостях с ортонормированными базисами вида $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}\}$ (гиперболические, так как ограничение формы $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ на такую плоскость имеет сигнатуру (1, 1)), "перемешивающие" временну́ю и пространственную координаты. Например, пусть $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1$. Тогда гиперболический поворот в этой плоскости — то же, что буст в направлении оси x.

Более подробно: к матрице (43) добавим справа внизу единичную матрицу порядка 2, дополнив нулями до матрицы порядка 4, и полученную матрицу интерпретируем как матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ к новому ортонормированному базису $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (т.е. матрицу A в формуле (42) мы интерпретируем как матрицу перехода, это соответствует интерпретации A как пассивного преобразования). Тогда старые и новые координаты окажутся связанными формулой

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\vartheta & \operatorname{sh}\vartheta & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\vartheta & \operatorname{ch}\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

В СТО безразмерная величина $\operatorname{th}\vartheta$ интерпретируется как v/c, где v — скорость новой системы отсчета, связанной с базисом $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ относительно старой системы отсчета, связанной с базисом $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. То есть формулы перехода к новой системе отсчета, движущейся относительно старой со скоростью v в направлении оси x, имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}, \quad y = y', \;\; z = z'.$$

Таким образом, буст в направлении оси x записывается формулами

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \;\; x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \;\; y = y', \; z = z'.$$

Заметим, что при $v/c \to 0$ приведенные выше формулы переходят в *преобразование Галилея* $t = t'$, $x = x' + vt'$, $y = y'$, $z = z'$. Еще одно простое

[32] Впервые описанную А. Пуанкаре.

следствие: композиция двух бустов на гиперболические углы ϑ и ϕ в направлении оси x есть буст на гиперболический угол $\vartheta + \phi$ в направлении оси x, и тогда из формулы $\operatorname{th}(\vartheta + \phi) = \frac{\operatorname{th}\vartheta + \operatorname{th}\phi}{1 + \operatorname{th}\vartheta \operatorname{th}\phi}$ получаем релятивистский закон сложения скоростей $v'' = \frac{v+v'}{1+\frac{vv'}{c^2}}$.

О некоторых интересных свойствах геометрии пространства-времени (например, о неравенстве Коши—Буняковского—Шварца для времениподобных векторов, обращенном в другую сторону, что приводит к "парадоксу" близнецов) и их физических следствиях можно прочитать в [35], ч. 2, § 12.

Задача 3.15. Квадратичная форма q на n-мерном вещественном пространстве V имеет матрицу, все диагональные элементы которой равны нулю. Определите наибольшую возможную размерность подпространства $U \subset V$ такого, что на нем данная квадратичная форма положительно определена.

Решение. Размерность U — положительный индекс инерции q. Ясно, что $\dim U \leq n-1$. Покажем, что существует q с положительным индексом инерции, равным $n-1$, и при этом имеющая в некотором базисе матрицу с нулевыми элементами на главной диагонали. Пусть $q(x) := -x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ в некотором базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Для доказательства достаточно заметить, что "изотропный конус" $\{\mathbf{x} \in V \mid q(\mathbf{x}) = 0\} \subset V$ содержит некоторый базис пространства V, поскольку в таком базисе матрица q имеет требуемый вид. Действительно, векторы $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ принадлежат изотропному конусу и через них выражается $\mathbf{e}_1$. Далее, поскольку векторы $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_k,\ 2 \leq k \leq n$ принадлежат изотропному конусу, то через них и через $\mathbf{e}_1$ выражаются оставшиеся векторы $\mathbf{e}_k,\ 2 \leq k \leq n$. ■

Задача 3.16. Извлечь квадратный корень[33] из квадратичной формы $q(\mathbf{v}) = x_1^2 + x_2^2$ в $\mathbb{R}^2$, где $\mathbf{v} = (x_1,\, x_2)^T$.

Решение. Запишем формально

$$q(\mathbf{v}) = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 e_1 + x_2 e_2)^2 = x_1^2 e_1^2 + x_1 x_2 (e_1 e_2 + e_2 e_1) + x_2^2 e_2^2. \qquad (44)$$

Попробуем интерпретировать e_1, e_2 как матрицы из $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, интерпретируя, кроме того, левую часть (44) как скалярную матрицу $q(\mathbf{v})E = (x_1^2 + x_2^2)E$. Тогда из (44) получаем систему матричных уравнений

$$\begin{cases} e_1^2 = E = e_2^2, \\ e_1 e_2 + e_2 e_1 = 0. \end{cases} \qquad (45)$$

Эти соотношения удовлетворяются, например, матрицами

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(знаки "$-$" во второй матрице — дань традиции, см. уравнения (46) ниже).

[33] Точный смысл этого выяснится по ходу решения.

Теперь можно сформулировать, в каком смысле нам удалось извлечь квадратный корень из $q(\mathbf{v}) = x_1^2 + x_2^2$. Именно, для пространства $\mathbb{R}^2$ с квадратичной формой $q(\mathbf{v}) = x_1^2 + x_2^2$ мы нашли такую алгебру (конкретно $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$) с единицей ($E$) и такое линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ (конкретно, $\varphi(\mathbf{v}) = x_1e_1 + +x_2e_2$, где $\mathbf{v} = (x_1, x_2)^T$), что $q(\mathbf{v})E = \varphi(\mathbf{v})^2 \ \ \forall\, \mathbf{v} = (x_1, x_2)^T \in \in \mathbb{R}^2$. ■

Комментарии. 1) Интересно, что ту же идею можно применить, чтобы извлечь квадратный корень D из дифференциального оператора 2-го порядка, например из оператора Лапласа $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Тогда

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Применяя полученный оператор к столбцу $(u, v)^T$ функций от x, y и приравнивая результат нулю, получаем систему уравнений Коши—Римана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{46}$$

комплексной дифференцируемости функции $f(x+iy) = u(x, y) + +iv(x, y)$. В частности, вещественная $u(x, y)$ и мнимая $v(x, y)$ части голоморфной функции $f(z)$, $z := x + iy$, удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta(u) = 0 = \Delta(v)$, то есть являются гармоническими. Подробности см. в [47], § 8, с. 95—100 и в [35], гл. 2, § 15.

2) Легко проверить, что построенная нами алгебра $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ как алгебра над $\mathbb{R}$ порождается матрицами e_1, e_2, которые связаны соотношениями (45). Она называется *алгеброй Клиффорда* пары $(\mathbb{R}^2, q)$, где q — рассмотренная нами квадратичная форма. Многие интересные алгебры являются алгебрами Клиффорда квадратичных форм: например, внешняя алгебра является алгеброй Клиффорда нулевой формы, а алгебра кватернионов — квадратичной формы $q(\mathbf{v}) = -x_1^2 - x_2^2$ на $\mathbb{R}^2$ (см. (64)).
Алгебры Клиффорда — очень интересный математический объект, объединяющий алгебру, топологию и анализ. Кроме того, они играют важную роль в релятивистской квантовой механике. По существу, П. Дирак переоткрыл это понятие (открытое на полвека раньше математиком У. К. Клиффордом), когда написал свое знаменитое уравнение, описывающее релятивистский электрон.

В следующей задаче предполагаются известными гауссов интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ и формула замены переменных в кратном интеграле, которую легко найти в любом учебнике анализа.

Задача 3.17. [41] Пусть $q(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{x}, A\overrightarrow{x})$ — положительно определенная квадратичная форма на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, где матрица A симметрична. Доказать равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-q(\overrightarrow{x})}\, d\,\overrightarrow{x} = \pi^{n/2}(\det A)^{-1/2}.$$

Решение. Заметим, что слева стоит n-кратный интеграл от функции n переменных, причем $d\,\overrightarrow{x} := dx_1 \dots dx_n$.
Так как по условию q положительно определена и A симметрична, то существует $U \in \mathrm{O}(n)$, $\det U = 1$ такая, что $\Lambda = = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n) = UAU^T$, причем $\lambda_i > 0$ при $1 \le i \le n$. Сделаем замену $\overrightarrow{y} = U\overrightarrow{x}$, тогда $(\overrightarrow{x}, A\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{y}, \Lambda\overrightarrow{y})$. Действительно,

$$\overrightarrow{y}^T \Lambda \overrightarrow{y} = (U\overrightarrow{x})^T \Lambda U \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^T U^T \Lambda U \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^T A \overrightarrow{x}.$$

Кроме того, $dy_1 \dots dy_n = dx_1 \dots dx_n$, так как якобиан замены $\det U = 1$. Тогда имеем (см. теорему 3.33; подробное обоснование из теории кратных несобственных интегралов см. в [22], гл. XI, § 6):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\overrightarrow{x},\, A\overrightarrow{x})} d\,\overrightarrow{x} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\overrightarrow{y},\, \Lambda\overrightarrow{y})} d\,\overrightarrow{y} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_1 y_1^2 - \dots - \lambda_n y_n^2} dy_1 \dots dy_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_1 y_1^2} dy_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_n y_n^2} dy_n =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} = \pi^{n/2}(\det A)^{-1/2}. \quad \blacksquare$$

Комментарий. Доказанное равенство (точнее, его обобщения) играют важную роль в современной теоретической физике, особенно в квантовой теории поля.

Следующая задача решается методами анализа, а не линейной алгебры, хотя результат имеет непосредственное отношение к геометрии евклидова пространства (и к тому же представляет независимый интерес).

Задача 3.18. Пусть S^n — сфера единичного радиуса в евклидовом пространстве V, $\dim V = n+1$. Вычислить объем $\mathrm{vol}(S^n)$.

Решение. В ортонормированном базисе сфера $S^n(R) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ радиуса R задается уравнением $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = R^2$. Пусть r — длина радиус-вектора точки с координатами $(x_1, \dots, x_{n+1})$, тогда $r^2 = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$. Посчитаем интеграл

$$I_{n+1} := \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-r^2} dx_1 \dots dx_{n+1}$$

двумя способами. С одной стороны, согласно предыдущей задаче, $I_{n+1} = \pi^{\frac{n+1}{2}}$. С другой стороны, расслаивая пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ на сферические слои и замечая, что объем слоя, заключенного между сферами радиусов r и $r + dr$ (при малом dr), приближенно равен $\mathrm{vol}(S^n(r))\,dr$, получим, что

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} e^{-r^2}\mathrm{vol}(S^n(r))\,dr.$$

Используя очевидное равенство

$$\mathrm{vol}(S^n(r)) = r^n\mathrm{vol}(S^n(1)) = r^n\mathrm{vol}(S^n),$$

имеем

$$\mathrm{vol}(S^n)\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^n\,dr = \pi^{\frac{n+1}{2}}.$$

Интеграл в последнем равенстве выражается через Г-функцию, точнее, он равен $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{n+1}{2})$. Окончательно,

$$\mathrm{vol}(S^n) = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

Используя функциональное уравнение $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, справедливое для любого $x > 0$ и значения $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$, легко посчитать объем n-мерной сферы для любого натурального n. ∎

3.2. Линейные преобразования евклидовых пространств

Задача 3.19. Пусть V — евклидово пространство, $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор.

1) Доказать, что если φ диагонализируем, то и его сопряженный оператор φ^* диагонализируем.

2) Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — базис из собственных векторов оператора φ. Доказать, что биортогональный, или, как говорят, взаимный, базис $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ состоит из собственных векторов сопряженного оператора φ^*.

Решение. 1) В любом евклидовом пространстве есть ортонормированный базис, и в нем матрица сопряженного оператора φ^* является транспонированной к матрице A оператора φ. Поэтому если $A = CDC^{-1}$, где D — диагональная матрица, то $A^T = (C^T)^{-1}DC^T$.

Можно привести также другое решение. Для начала заметим, что характеристические многочлены $\chi_{\varphi^*}(t)$ и $\chi_\varphi(t)$ совпадают. Воспользуемся критерием диагонализируемости из задачи 2.12. Если $m(t) \in \mathbb{R}[t]$ — произвольный аннулирующий многочлен для оператора φ, то он также аннулирует и φ^*. Действительно,

$$m(\varphi^*) = (m(\varphi))^* = 0^* = 0.$$

Значит, φ^* диагонализируем.

2) Пусть $\varphi(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i,\ 1 \le i \le n$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}(\varphi^*(\mathbf{e}'_i),\, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}'_i,\, \varphi(\mathbf{e}_j)) = \lambda_j(\mathbf{e}'_i,\, \mathbf{e}_j) = \\ = \lambda_j \delta_{ij} = (\lambda_i \mathbf{e}'_i,\, \mathbf{e}_j) \quad \forall\, j,\ 1 \le j \le n.\end{aligned}$$

Поэтому $\varphi^*(\mathbf{e}'_i) = \lambda_i \mathbf{e}'_i$. Заметим, что это дает еще одно доказательство утверждения пункта 1). ■

Задача 3.20. Пусть V — евклидово n-мерное пространство, $\varphi\colon V \to \to V$ — линейный оператор.

1) Доказать, что если $U \subset V$ инвариантно относительно φ, то $U^\perp$ инвариантно относительно φ^*.
2) Пусть φ имеет собственное значение $\lambda \in \mathbb{R}$. Доказать, что у φ тогда есть $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство. Верно ли обратное утверждение?
3) Пусть все корни характеристического многочлена $\chi_\varphi(t)$ оператора φ вещественны. Доказать, что найдется такой ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ верхняя треугольная.

Решение. 1) Пусть $\mathbf{v} \in U^\perp$, тогда, используя инвариантность U, имеем

$$(\varphi^*(\mathbf{v}),\, \mathbf{u}) = (\mathbf{v},\, \varphi(\mathbf{u})) = (\mathbf{v},\, \mathbf{u}') = 0 \quad \forall\, \mathbf{u} \in U \quad \Rightarrow \quad \varphi^*(\mathbf{v}) \in U^\perp.$$

2) Рассмотрим линейный оператор $\psi := \varphi - \lambda\,\mathrm{id}\colon V \to V$. Так как $\ker\psi \ne \{\mathbf{0}\}$, то $\dim\operatorname{im}\psi \le n-1$. Пусть $U \subset V$ — произвольное подпространство размерности $(n-1)$ такое, что $\operatorname{im}\psi \subset U$. Покажем, что U является φ-инвариантным. Пусть $\mathbf{u} \in U$ — произвольный вектор, тогда

$$\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}) - \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} \in \operatorname{im}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}) + U = U.$$

Обратно, пусть $U \subset V$ — $(n-1)$-мерное φ-инвариантное подпространство. Тогда $U^\perp$ — 1-мерное φ^*-инвариантное подпространство $\Rightarrow$ $U^\perp = \langle\mathbf{v}\rangle$, где $\mathbf{v}$ — собственный вектор оператора φ^*. Согласно уже доказанному, у φ^* есть $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство $W \subset V$, тогда по пункту 1) одномерное подпространство $W^\perp$ является $\varphi^{**} = \varphi$-инвариантным, тогда $W^\perp = \langle\mathbf{w}\rangle$, где $\mathbf{w}$ — собственный вектор оператора φ, который отвечает некоторому вещественному собственному значению φ.

Дадим другое доказательство этого пункта. Во всяком евклидовом пространстве есть ортонормированный базис. В ортонормированном базисе матрица A_{φ^*} сопряженного оператора является транспонированной к матрице A_φ. Отсюда легко видеть, что характеристические многочлены, а значит, и наборы их корней, для операторов φ и φ^* совпадают. Поэтому существует $\mathbf{v} \in V,\ \mathbf{v} \ne \mathbf{0}$ такой, что $\varphi^*(\mathbf{v}) = \lambda\,\mathbf{v}$. Из невырожденности ограничения скалярного произведения на $\langle\mathbf{v}\rangle$ следует, что $\dim(\langle\mathbf{v}\rangle^\perp) = n-1$, а из предыдущего пункта — что $\langle\mathbf{v}\rangle^\perp$ инвариантно относительно $\varphi^{**} = \varphi$.

Обратно, пусть U — инвариантное $(n-1)$-мерное подпространство для φ. Тогда по предыдущему пункту $U^\perp$ инвариантно относительно φ^*, причем, поскольку оно одномерно, $U^\perp = \langle\mathbf{v}\rangle$. Тогда $\mathbf{v}$ — собственный вектор оператора φ^* с собственным значением $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда, как объяснено выше, λ также является собственным значением φ.

3) Воспользуемся индукцией по $n = \dim V$. Для $n = 1$ утверждение, очевидно, верно. Пусть оно верно для операторов на евклидовых пространствах размерности $\leq n-1$. Пусть V — евклидово пространство размерности n. Тогда по предыдущему пункту у $\varphi\colon V \to V$ есть инвариантное подпространство $U \subset V$ размерности $(n-1)$. Пусть $\psi := \varphi|_U$. Тогда $\chi_\psi(t) \mid \chi_\varphi(t) \;\; \Rightarrow$ все корни характеристического многочлена $\chi_\psi(t)$ также вещественны. По предположению индукции для $\psi\colon U \to U$ существует ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}\}$, в котором матрица ψ верхняя треугольная. Добавляя к нему единичный вектор $\mathbf{e}_n$ из $U^\perp$, получим искомый ортонормированный базис для φ. ■

Комментарий. Внимательный читатель, наверное, заметил, что пункт 2) данной задачи тесно связан с задачей 2.20. Точнее, в задаче 2.20 для линейного оператора $\varphi\colon V \to V$ рассматривался линейный оператор $\varphi^*\colon V^* \to V^*$ на двойственном (сопряженном) пространстве V^*. Однако наличие невырожденной билинейной формы g на V определяет линейный изоморфизм

$$\widetilde{g}\colon V \to V^*, \;\; g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\widetilde{g}(\mathbf{u}), \mathbf{v}) \;\; \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

где круглые скобки справа — каноническое билинейное отображение $V^* \times V \to \mathbb{R}$. (Эквивалентное определение: $\widetilde{g}$ отображает произвольный вектор $\mathbf{u} \in V$ в линейный функционал $\widetilde{g}(\mathbf{u}) = = g(\mathbf{u}, \cdot)$ на V.) Это позволяет определить оператор

$$\varphi_g^* := \widetilde{g}^{-1} \circ \varphi^* \circ \widetilde{g}\colon V \to V,$$

который в случае, когда g есть евклидово скалярное произведение на V, совпадает с оператором, сопряженным к φ в использованном выше смысле. Действительно,

$$\begin{gathered} g(\varphi_g^*(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = g(\widetilde{g}^{-1}(\varphi^*(\widetilde{g}(\mathbf{u}))), \mathbf{v}) = \\ = (\varphi^*(\widetilde{g}(\mathbf{u})), \mathbf{v}) = (\widetilde{g}(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) = g(\mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v})). \end{gathered}$$

(Подробности см. в [35], ч. 2.8.) Пусть $f \in V^*$ — собственный вектор для φ^*, $\varphi^*(f) = \lambda f$, как в задаче 2.20. Тогда $f = \widetilde{g}(\mathbf{v})$ для единственного $\mathbf{v} \in V$. Имеем

$$\varphi_g^*(\mathbf{v}) = \widetilde{g}^{-1}(\varphi^*(\widetilde{g}(\mathbf{v}))) = \widetilde{g}^{-1}(\varphi^*(f)) = \widetilde{g}^{-1}(\lambda f) = \lambda \widetilde{g}^{-1}(f) = \lambda \mathbf{v},$$

то есть $\mathbf{v}$ — собственный вектор φ_g^*, как в п. 2 задачи 3.20. Кроме того, $\ker f = \langle \mathbf{v} \rangle^\perp$ — $(n-1)$-мерное φ-инвариантное подпространство в V.

Пункт 3) данной задачи также тесно связан с задачей 2.34 (с единственным уточнением, что строится *ортонормированный* базис). Немного другой путь решения состоит в том, чтобы, используя существование $(n-1)$-мерного инвариантного подпространства, доказать существование какого-то (не обязательно ортонормированного) базиса, в котором матрица φ верхняя треугольная, а затем ортонормировать его при помощи алгоритма Грама–Шмидта.

Задача 3.21. Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор на евклидовом пространстве V. Доказать, что $\ker \varphi = (\operatorname{im} \varphi^*)^\perp$.

Решение. Для произвольных $\mathbf{u} \in \ker\varphi$, $\mathbf{v} \in V$ имеем

$$(\varphi^*(\mathbf{v}),\, \mathbf{u}) = (\mathbf{v},\, \varphi(\mathbf{u})) = 0,$$

следовательно, $\mathbf{u} \in (\operatorname{im}\varphi^*)^\perp$, то есть $\ker\varphi \subset (\operatorname{im}\varphi^*)^\perp$.
Обратно, если $\mathbf{u} \in (\operatorname{im}\varphi^*)^\perp$, то для произвольного $\mathbf{v} \in V$ получаем

$$0 = (\varphi^*(\mathbf{v}),\, \mathbf{u}) = (\mathbf{v},\, \varphi(\mathbf{u})).$$

Последнее означает, что $\varphi(\mathbf{u})$ ортогонален всем векторам из V; так как скалярное произведение невырождено, то $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, то есть $\mathbf{u} \in \ker\varphi$. Значит, $(\operatorname{im}\varphi^*)^\perp \subset \ker\varphi$. ■

Задача 3.22. Пусть $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор на евклидовом пространстве V. Доказать, что $\ker(\varphi^*\varphi) = \ker\varphi$ и $\operatorname{im}(\varphi^*\varphi) = \operatorname{im}\varphi^*$.

Решение. Ясно, что всегда $\ker\varphi \subset \ker(\varphi^*\varphi)$. Докажем обратное включение. Пусть $\varphi^*\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, тогда в силу невырожденности скалярного произведения

$$0 = (\varphi^*\varphi(\mathbf{u}),\, \mathbf{u}) = (\varphi(\mathbf{u}),\, \varphi(\mathbf{u})) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Таким образом, $\ker(\varphi^*\varphi) = \ker\varphi$.
Для доказательства второго равенства возьмем ортогональные дополнения к обеим частям доказанного равенства. В силу предыдущей задачи, $(\ker\varphi)^\perp = \operatorname{im}\varphi^*$ и $(\ker(\varphi^*\varphi))^\perp = \operatorname{im}(\varphi^*\varphi)$, так как оператор $\varphi^*\varphi$ самосопряжен (см. задачу 3.43). ■

Задача 3.23. a) Выяснить, может ли матрица A являться матрицей самосопряженного оператора в евклидовом пространстве в некотором, не обязательно ортонормированном, базисе, если

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 2)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad 3)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) В случае положительного ответа предъявить (хотя бы одно) скалярное произведение, относительно которого оператор самосопряжен.

Решение. а) Если бы в условии речь шла про ортонормированный базис, то никакая из указанных матриц не могла бы быть матрицей самосопряженного оператора, поскольку в этом случае она должна быть симметричной. Однако в условии речь идет про произвольный базис. Согласно известной теореме, оператор $f\colon V \to V$ на евклидовом пространстве V самосопряжен $\Leftrightarrow$ он диагонализируется в ортонормированном базисе (состоящем из собственных векторов) и имеет вещественный спектр. То есть если оператор самосопряжен, то его матрица имеет вещественный спектр и диагонализируема (существует базис пространства из ее собственных векторов).
В случае 1) характеристический многочлен

$$\chi_A(t) = t^2 - (\operatorname{tr} A)\, t + \det A = t^2 - 2t + 2$$

имеет отрицательный дискриминант, поэтому собственные значения оператора с матрицей п. 1) не являются вещественными.

В случае 2) характеристический многочлен

$$\chi_A(t) = t^2 - (\operatorname{tr} A)\, t + \det A = t^2 - 6t + 9 = (t-3)^2$$

имеет кратный корень; поэтому не выполнено достаточное условие диагонализируемости (что спектр оператора прост), и простое вычисление показывает, что размерность собственного подпространства равна 1, значит, не существует базиса двумерного пространства V, состоящего из собственных векторов, следовательно оператор не диагонализируем.
В случае 3) характеристический многочлен

$$\chi_A(t) = t^2 - (\operatorname{tr} A)\, t + \det A = t^2 - t - 2 = (t+1)(t-2)$$

имеет два различных вещественных корня, следовательно, он диагонализируем и имеет вещественный спектр. Таким образом, матрица п. 3) может быть матрицей самосопряженного оператора.
b) Чтобы найти скалярное произведение, относительно которого матрица A из п. 3) является матрицей самосопряженного оператора, найдем некоторый базис из собственных векторов и объявим его ортонормированным (ясно, что этим скалярное произведение будет однозначно определено). Например, в качестве такого базиса можно взять $\{\mathbf{v}\} := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, где $\mathbf{v}_1 = (1, -1)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2)^T$. ■

Комментарий. Для лучшего понимания полезно провести независимую проверку ответа пункта b). По определению, матрица Грама полученного скалярного произведения в базисе $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ есть единичная матрица E. Матрица перехода $C := C_{\{\mathbf{e}\}\to\{\mathbf{v}\}}$ от стандартного базиса $\{\mathbf{e}\} := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$ (относительно которого задана исходная матрица A) к базису $\{\mathbf{v}\}$ есть $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Таким образом, матрица Грама G относительно стандартного базиса $\{\mathbf{e}\}$ есть

$$G = (C^{-1})^T C^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Простое вычисление теперь показывает, что матричное равенство $A^T G = GA$ действительно выполняется, а оно как раз и говорит о том, что матрица A является матрицей самосопряженного оператора относительно скалярного произведения с матрицей Грама G. ■

Задача 3.24. Описать самосопряженные проекторы.

Решение. В задаче 1.6 было показано, что всякий проектор, то есть оператор $P\colon V \to V$, удовлетворяющий соотношению $P^2 = P$, является оператором проектирования на подпространство $U := \operatorname{im} P$ параллельно подпространству $W := \ker P$. Одновременно подпространства U и W (в случае, если они ненулевые) являются собственными подпространствами оператора P с собственными значениями соответственно 1 и 0. Так как собственные подпространства самосопряженного оператора, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны, то необходимым условием самосопряженности проектора является ортогональность U и W, то есть $W = U^{\perp}$. В этом случае проектор есть оператор ортогонального проектирования на подпространство $U \subset V$. Это условие является также достаточным: действительно, если оператор диагонализируется в ортонормированном базисе и имеет вещественный спектр, то он самосопряжен. ■

Комментарий. Важная роль ортогональных проекторов (особенно в функциональном анализе) связана с тем, что любой самосопряженный оператор в определенном смысле по ним раскладывается. Опишем такое разложение (как по умолчанию принято в этом тексте) в конечномерном случае. А именно, пусть $f\colon V \to V$ — самосопряженный оператор, $\mathrm{Spec}(f)$ — его спектр (набор собственных значений), V_λ, $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$ — соответствующие собственные подпространства, $P_\lambda\colon V \to V$ — операторы ортогонального проектирования на V_λ. Тогда имеет место *формула спектрального разложения* оператора f:

$$f = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} \lambda\, P_\lambda.$$

Подробности см. в [35], гл. 2, § 8, п. 9.

Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Понятие самосопряженного оператора, вообще говоря, зависит от выбора структуры евклидова пространства на V (то есть билинейной симметричной положительно определенной формы, задающей скалярное произведение). Однако очевидно, что, например, тождественный оператор id_V самосопряжен относительно любого скалярного произведения на V.

Задача 3.25. Описать линейные операторы на V, которые являются самосопряженными относительно любого скалярного произведения на V.

Решение. Ясно, что операторы вида $\lambda\,\mathrm{id}_V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяют условию. С другой стороны, пусть у диагонализируемого оператора φ на V есть два различных собственных значения $\lambda \neq \mu$ и пусть V_λ, V_μ — соответствующие собственные подпространства. Для того чтобы φ был самосопряжен относительно скалярного произведения $(\cdot\,,\cdot)$, необходимо, чтобы V_λ и V_μ были ортогональны относительно $(\cdot\,,\cdot)$. Но ясно, что, меняя скалярное произведение в V, можно добиться того, чтобы два ненулевых подпространства V_λ, V_μ, $V_\lambda \cap V_\mu = \{\mathbf{0}\}$, были бы не ортогональны. Значит, линейный оператор, имеющий более одного собственного значения, не может быть самосопряжен относительно произвольного скалярного произведения. ■

Задача 3.26. Доказать, что два самосопряженных оператора A, B в евклидовом пространстве V коммутируют тогда и только тогда, когда они имеют общий ортонормированный базис из собственных векторов (ср. задачу 2.26).

Решение. Легко видеть, что если оператор $B\colon V \to V$ самосопряжен, то его ограничение $B|_U$ на любое инвариантное подпространство $U \subset V$ также самосопряжено.
Если $AB = BA$, то $B(A - \lambda\,\mathrm{id}) = (A - \lambda\,\mathrm{id})B$ для любого скаляра λ, следовательно, собственные подпространства оператора A инвариантны относительно B. Значит, ограничение $B|_{V_\lambda}$ на собственное подпространство V_λ

оператора A самосопряжено $\Rightarrow$ для него в V_λ существует ортонормированный базис из собственных векторов, которые, очевидно, являются также собственными и для A. Поскольку собственные подпространства, отвечающие разным собственным значениям самосопряженного оператора, ортогональны, объединение базисов в собственных подпространствах даст искомый базис в V, ср. с доказательством задачи 2.26.
Таким образом, из $[A, B] = 0$ следует существование общего ортонормированного базиса из собственных векторов. Обратное утверждение очевидно.
Приведем еще вариант доказательства с использованием индукции по $n = \dim V$. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно верно для евклидовых пространств V размерности, не превосходящей $n-1$. Пусть $\dim V = n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ — некоторое собственное значение $A\colon V \to V$. Рассмотрим соответствующее собственное подпространство $V_\lambda = \ker(A - \lambda\,\mathrm{id}) \subset V$. Оно является B-инвариантным, так как

$$\forall\, \mathbf{v} \in V_\lambda \quad A(B\mathbf{v}) = B(A\mathbf{v}) = \lambda B\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad B\mathbf{v} \in V_\lambda.$$

Так как ограничение $B|_{V_\lambda}$ на V_λ является самосопряженным оператором, то у $B|_{V_\lambda}$ есть собственный вектор $\mathbf{w} \in V_\lambda$, который, поскольку лежит в V_λ, является также собственным для оператора A. Подпространство $\langle \mathbf{w} \rangle \subset V$ является A и B-инвариантным, поэтому его ортогональное дополнение $U := \langle \mathbf{w} \rangle^\perp \subset V$ также A и B-инвариантно (см. п. 1, задачи 3.20) и имеет размерность $n-1$. По предположению индукции в U есть ортонормированный базис из общих собственных векторов для $A|_U$ и $B|_U$, дополняя его вектором $\frac{1}{|\mathbf{w}|}\mathbf{w}$, получим ортонормированный базис в V, состоящий из общих собственных векторов операторов A и B. $\blacksquare$

Комментарий. В квантовой механике коммутирующим самосопряженным операторам отвечают совместные наблюдаемые.

Задача 3.27. Доказать, что в трехмерном евклидовом пространстве любое ортогональное преобразование, сохраняющее ориентацию, является вращением относительно некоторой оси.

Это утверждение также называется теоремой Эйлера.
Решение. Пусть $f\colon V \to V$ — данное ортогональное преобразование. A priori его определитель может быть либо 1, либо -1, но так как по условию f сохраняет ориентацию, то $\det f > 0$, то есть $\det f = 1$. Определитель есть произведение собственных значений, которые являются корнями характеристического многочлена $\chi_f(t) \in \mathbb{R}[t]$, $\deg \chi_f(t) = 3$. Всякий такой многочлен имеет (хотя бы один) вещественный корень $\alpha \in \mathbb{R}$. Пусть $\mathbf{u}$ — соответствующий собственный вектор, $f(\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{u}$. Так как f ортогонален, то $\alpha = \pm 1$ (действительно, $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (f(\mathbf{u}), f(\mathbf{u})) = \alpha^2(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \neq 0$). Если $\chi_f(t)$ имеет также комплексный корень λ, то $\overline{\lambda}$ также является корнем, и $1 = \det f = \alpha|\lambda|^2$, откуда $\alpha = 1$ (и $|\lambda| = 1$). Если же все три корня вещественные, то предшествующие рассуждения показывают, что возможны два случая: $\{1, -1, -1\}$ и $\{1, 1, 1\}$. В любом случае f имеет собственное значение 1.
В случае, когда есть пара комплексно-сопряженных корней или набор $\{1, -1, -1\}$, покажем, что ортогональное дополнение $U^\perp$ к собственному подпространству $U \subset V$, отвечающему собственному значению 1 (ясно, что $\dim U = 1$ $\Rightarrow$

$\dim U^{\perp} = = 2$), является f-инвариантным. Действительно, если $\mathbf{w} \in U^{\perp}$, то $0 = \ (\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (f(\mathbf{u}), f(\mathbf{w})) = (\mathbf{u}, f(\mathbf{w}))\ \forall \mathbf{u} \in U \ \ \Rightarrow f(\mathbf{w}) \in U^{\perp}$. Тогда f индуцирует ортогональное преобразование плоскости $U^{\perp} \subset V$ с определителем 1, которое, очевидно, является вращением (на некоторый угол $\neq \pi$ в случае комплексных корней и на угол π в случае вещественных). Тогда и само $f\colon V \to V$ является вращением вокруг оси с направляющим вектором $\mathbf{u}$.
В случае корней $\{1,\,1,\,1\}$ имеем тождественное преобразование, которое является вращением (вокруг произвольной оси) на нулевой угол. ■

Комментарий. Теорема Эйлера означает, что какое бы сложное движение твердое тело с неподвижной точкой не совершало, конечное его положение получается из начального вращением вокруг некоторой оси.
Легко понять, что для пространств четной размерности утверждение, аналогичное теореме Эйлера, не имеет места. Четномерное пространство можно представить в виде прямой суммы ортогональных плоскостей, попарно пересекающихся только в начале координат. Движение, которое сохраняет только начало координат, — это композиция поворотов в этих плоскостях. Более аккуратно это утверждение выводится из общей теоремы, описывающей канонический вид ортогональных операторов и утверждающей, что для ортогональности оператора f в евклидовом пространстве необходимо и достаточно, чтобы в некотором ортонормированном базисе его матрица имела блочно-диагональный вид с блоками размера 2×2 вида $A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ (вообще говоря, с разными φ) и размера 1 вида ± 1. Подробности см. в [35], гл. 2, § 7.

Задача 3.28. Пусть оператор в некотором ортонормированном базисе евклидовой плоскости имеет матрицу

$$B(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

для некоторого $\varphi \in \mathbb{R}$. Выяснить его геометрический смысл и найти его канонический вид.

Решение. На первый взгляд, данная матрица напоминает матрицу поворота, однако $\det B(\varphi) = -1$, значит, в отличие от поворота этот оператор меняет ориентацию. Тем не менее ясно, что преобразование, заданное матрицей $B(\varphi)$, ортогонально. С другой стороны, так как матрица $B(\varphi)$ симметрична, то соответствующий оператор является самосопряженным. Значит, его собственные значения вещественны, а так как собственные значения ортогонального оператора по модулю равны 1, то они принадлежат множеству $\{\pm 1\}$. Так как след $\operatorname{tr} B(\varphi)$ равен 0, то $B(\varphi)$ имеет два *разных* собственных значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ (это также следует из того, что если бы собственные значения совпадали, то матрица $B(\varphi)$ была бы скалярной, что не так).
Каждому из собственных значений $1,\ -1$ соответствует одномерное собственное подпространство, причем эти собственные подпространства взаимно ортогональны, так как оператор самосопряжен. Следовательно, геометрический смысл данного преобразования — это так называемое *ортогональное*

отражение относительно одномерного подпространства с направляющим вектором $(\cos(\varphi/2), \sin(\varphi/2))^T$ (это собственный вектор с собственным значением 1), а канонический вид — диагональная матрица с числами 1 и -1 на главной диагонали. Прямым вычислением можно проверить, что $B(\varphi)^2 = E$. ■

В разделе 2.2. мы уже определили комплексификацию $V^{\mathbb{C}}$ вещественного векторного пространства V, которая есть комплексное векторное пространство той же размерности. В случае, когда V — евклидово пространство со скалярным произведением g, на пространстве $V^{\mathbb{C}}$ можно определить эрмитово скалярное произведение $g^{\mathbb{C}}$, превращающее $V^{\mathbb{C}}$ в унитарное пространство. Более общо, пусть g — билинейная форма на V. Определим функцию $g^{\mathbb{C}}\colon V^{\mathbb{C}}\times V^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ следующим образом:

$$g^{\mathbb{C}}(\mathbf{u}_1 + i\mathbf{v}_1,\, \mathbf{u}_2 + i\mathbf{v}_2) =$$

$$= g(\mathbf{u}_1,\, \mathbf{u}_2) + g(\mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2) + i(g(\mathbf{v}_1,\, \mathbf{u}_2) - g(\mathbf{u}_1,\, \mathbf{v}_2)),$$

где $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2 \in V$. Нетрудно проверить, что $g^{\mathbb{C}}$ — полуторалинейная форма на $V^{\mathbb{C}}$. Более того, если g симметрична, то $g^{\mathbb{C}}$ эрмитово симметрична. Теперь легко убедиться, что если (V, g) — евклидово пространство, то $(V^{\mathbb{C}}, g^{\mathbb{C}})$ — унитарное пространство.
Например, если применить данную конструкцию к пространству $C[-1, 1]$ вещественнозначных непрерывных функций на отрезке $[-1, 1]$ со скалярным произведением из задачи 3.10, получим пространство непрерывных функций $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{C}$ с эрмитовым скалярным произведением $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g}(x)\,dx$.
Мы приведем два примера использования комплексификации евклидова пространства.

Задача 3.29. Доказать, что все корни характеристического многочлена самосопряженного оператора в евклидовом или унитарном пространстве вещественны.

Решение. Пусть сначала V — унитарное пространство с эрмитовым скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)$, а $\varphi\colon V \to V$ — самосопряженный оператор. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ — произвольный корень многочлена $\chi_\varphi(t)$. Тогда $\exists\, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ такой, что $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Имеем

$$(\varphi(\mathbf{v}),\, \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{v},\, \mathbf{v}) = (\mathbf{v},\, \varphi(\mathbf{v})) = \overline{\lambda}(\mathbf{v},\, \mathbf{v}) \quad\Rightarrow\quad \lambda = \overline{\lambda}$$

(где мы использовали $(\mathbf{v},\, \mathbf{v}) \neq 0$).
Случай, когда V — евклидово пространство, а φ — самосопряженный оператор на V, сводится к предыдущему с помощью комплексификации. А именно, пусть $V^{\mathbb{C}}$ — определенная выше унитарная комплексификация V, $\varphi^{\mathbb{C}}\colon V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ — комплексификация оператора φ (см. раздел 2.2.). Тогда легко видеть, что $\varphi^{\mathbb{C}}$ — самосопряженный оператор на унитарном пространстве $V^{\mathbb{C}}$ (такие операторы еще называются *эрмитовыми*). Действительно,

$$g^{\mathbb{C}}(\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{u}_1 + i\mathbf{v}_1),\, \mathbf{u}_2 + i\mathbf{v}_2) = g^{\mathbb{C}}(\varphi(\mathbf{u}_1) + i\varphi(\mathbf{v}_1),\, \mathbf{u}_2 + i\mathbf{v}_2) =$$

$$= g(\varphi(\mathbf{u}_1),\, \mathbf{u}_2) + g(\varphi(\mathbf{v}_1),\, \mathbf{v}_2) + i(g(\varphi(\mathbf{v}_1),\, \mathbf{u}_2) - g(\varphi(\mathbf{u}_1),\, \mathbf{v}_2)) =$$

$$= g(\mathbf{u}_1,\, \varphi(\mathbf{u}_2)) + g(\mathbf{v}_1,\, \varphi(\mathbf{v}_2)) + i(g(\mathbf{v}_1,\, \varphi(\mathbf{u}_2)) - g(\mathbf{u}_1,\, \varphi(\mathbf{v}_2))) =$$
$$= g^{\mathbb{C}}(\mathbf{u}_1 + i\mathbf{v}_1,\, \varphi(\mathbf{u}_2) + i\varphi(\mathbf{v}_2)) = g^{\mathbb{C}}(\mathbf{u}_1 + i\mathbf{v}_1,\, \varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{u}_2 + i\mathbf{v}_2)).$$

(Вместо предыдущей выкладки можно было бы заметить, что ортонормированный базис $\mathbf{e}$ в V остается ортонормированным в $V^{\mathbb{C}}$, а матрица $\varphi^{\mathbb{C}}$ в нем, совпадающая с матрицей φ в $\mathbf{e}$, является вещественной и симметричной $\Rightarrow$ эрмитовой). Из первой части доказательства следует, что для оператора $\varphi^{\mathbb{C}}$ требуемое утверждение верно. Для завершения доказательства остается заметить, что $\chi_{\varphi}(t) = \chi_{\varphi^{\mathbb{C}}}(t)$ (см. раздел 2.2.). ■

В решении предыдущей задачи доказано, что комплексификация самосопряженного оператора является самосопряженным (эрмитовым) оператором. Аналогично, комплексификация ортогонального оператора является унитарным оператором.

Действительно, пусть $\varphi\colon V \to V$ — ортогональный оператор на евклидовом пространстве V, то есть $g(\varphi(\mathbf{u}),\, \varphi(\mathbf{v})) = g(\mathbf{u},\, \mathbf{v})$ для всех $\mathbf{u},\, \mathbf{v} \in V$. Тогда для $\varphi^{\mathbb{C}}\colon V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ получаем

$$g^{\mathbb{C}}(\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{u}_1 + i\mathbf{v}_1),\, \varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{u}_2 + i\mathbf{v}_2)) =$$
$$= g^{\mathbb{C}}(\varphi(\mathbf{u}_1) + i\varphi(\mathbf{v}_1),\, \varphi(\mathbf{u}_2) + i\varphi(\mathbf{v}_2)) =$$
$$= g(\varphi(\mathbf{u}_1),\, \varphi(\mathbf{u}_2)) + g(\varphi(\mathbf{v}_1),\, \varphi(\mathbf{v}_2)) +$$
$$+ i(g(\varphi(\mathbf{v}_1),\, \varphi(\mathbf{u}_2)) - g(\varphi(\mathbf{u}_1),\, \varphi(\mathbf{v}_2))) =$$
$$= g(\mathbf{u}_1,\, \mathbf{u}_2) + g(\mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2) + i(g(\mathbf{v}_1,\, \mathbf{u}_2) - g(\mathbf{u}_1,\, \mathbf{v}_2)) =$$
$$= g^{\mathbb{C}}(\mathbf{u}_1 + i\mathbf{v}_1,\, \mathbf{u}_2 + i\mathbf{v}_2).$$

(Вместо предыдущей выкладки можно было бы заметить, что ортонормированный базис $\mathbf{e}$ в V остается ортонормированным в $V^{\mathbb{C}}$, а матрица $\varphi^{\mathbb{C}}$ в нем, совпадающая с матрицей φ в $\mathbf{e}$, является вещественной и ортогональной $\Rightarrow$ унитарной). Если V — унитарное пространство, а $\varphi\colon V \to V$ — унитарный оператор на V, то модуль всех собственных значений φ равен 1. Действительно, если $\mathbf{v} \in V,\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ и $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, то

$$(\mathbf{v},\, \mathbf{v}) = (\varphi(\mathbf{v}),\, \varphi(\mathbf{v})) = \lambda\overline{\lambda}(\mathbf{v},\, \mathbf{v}) \quad\Rightarrow\quad |\lambda| = 1.$$

Таким образом, из предыдущего получаем, что все корни характеристического многочлена ортогонального оператора лежат на единичной окружности в $\mathbb{C}$.

Кроме того, если $\mathbf{v},\, \mathbf{w} \in V$ — собственные векторы унитарного оператора φ, отвечающие разным собственным значениям $\lambda,\, \mu,\, \lambda \neq \mu$, то $(\mathbf{v},\, \mathbf{w}) = 0$. Действительно,

$$(\mathbf{v},\, \mathbf{w}) = (\varphi(\mathbf{v}),\, \varphi(\mathbf{w})) = \lambda\overline{\mu}(\mathbf{v},\, \mathbf{w}),$$

и так как по доказанному $|\lambda| = |\mu| = 1$, причем $\lambda \neq \mu$, то $\lambda\overline{\mu} \neq \neq 1 \quad\Rightarrow$ $(\mathbf{v},\, \mathbf{w}) = 0$.

Пусть теперь V — евклидово пространство, а $\varphi\colon V \to V$ — ортогональный оператор на нем. Пусть $V^{\mathbb{C}}$ — комплексификация V, являющаяся унитарным пространством, $\varphi^{\mathbb{C}}$ — унитарный оператор на $V^{\mathbb{C}}$, являющийся комплексификацией φ. Из пункта 2.2. мы знаем, что собственному значению $\lambda \notin \mathbb{R}$

комплексификации $\varphi^{\mathbb{C}}$ соответствует двумерное инвариантное подпространство $V^{\lambda} \subset V$ оператора φ.

Задача 3.30. Пусть V^{λ}, V^{μ} — два двумерных инвариантных подпространства оператора φ, которые отвечают разным невещественным собственным значениям $\lambda \neq \mu$, $\lambda \neq \overline{\mu}$ комплексификации $\varphi^{\mathbb{C}}$. Доказать, что тогда $V^{\lambda} \perp V^{\mu}$ (как подпространства евклидова пространства V).

Решение. Пусть $\mathbf{v} := \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$, $\mathbf{w} := \mathbf{w}_1 + i\mathbf{w}_2$ — собственные векторы оператора $\varphi^{\mathbb{C}}$ с собственными значениями λ, μ соответственно. Тогда $\mathbf{w}' := \mathbf{w}_1 - i\mathbf{w}_2$ — собственный вектор оператора $\varphi^{\mathbb{C}}$ с собственным значением $\overline{\mu}$. Согласно ранее доказанному,

$$g^{\mathbb{C}}(\mathbf{v},\, \mathbf{w}) = 0 = g^{\mathbb{C}}(\mathbf{v},\, \mathbf{w}'),$$

то есть

$$0 = g^{\mathbb{C}}(\mathbf{v},\, \mathbf{w}) = g(\mathbf{v}_1,\, \mathbf{w}_1) + g(\mathbf{v}_2,\, \mathbf{w}_2) + i(g(\mathbf{v}_2,\, \mathbf{w}_1) - g(\mathbf{v}_1,\, \mathbf{w}_2)),$$

$$0 = g^{\mathbb{C}}(\mathbf{v},\, \mathbf{w}') = g(\mathbf{v}_1,\, \mathbf{w}_1) - g(\mathbf{v}_2,\, \mathbf{w}_2) + i(g(\mathbf{v}_2,\, \mathbf{w}_1) + g(\mathbf{v}_1,\, \mathbf{w}_2)).$$

Разделяя вещественную и мнимую части, получаем систему:

$$0 = g(\mathbf{v}_1,\, \mathbf{w}_1) + g(\mathbf{v}_2,\, \mathbf{w}_2) = g(\mathbf{v}_1,\, \mathbf{w}_1) - g(\mathbf{v}_2,\, \mathbf{w}_2),$$

$$0 = g(\mathbf{v}_2,\, \mathbf{w}_1) - g(\mathbf{v}_1,\, \mathbf{w}_2) = g(\mathbf{v}_2,\, \mathbf{w}_1) + g(\mathbf{v}_1,\, \mathbf{w}_2).$$

Из нее следует требуемое:

$$V^{\lambda} = \langle \mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2 \rangle \perp \langle \mathbf{w}_1,\, \mathbf{w}_2 \rangle = V^{\mu}. \quad \blacksquare$$

Доказанный результат мы примéним к нахождению канонического вида ортогонального оператора.

Задача 3.31. Привести к каноническому виду ортогональный оператор φ, имеющий в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства V матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристический многочлен этого оператора есть t^4+1. Чтобы получить его почти без вычислений, заметим, что оператор на базисные векторы действует следующим образом:

$$\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_4, \quad \mathbf{e}_4 \mapsto -\mathbf{e}_1. \tag{47}$$

Значит, многочлен $t^4 + 1$ является аннулирующим для нашего оператора. Далее, $t^4 + 1 = (t^2 + \sqrt{2}t + 1)(t^2 - \sqrt{2}t + 1)$ — его разложение на неприводимые над $\mathbb{R}$ множители. Теперь из равенства $\operatorname{tr} A = 0$ легко получить,

что единственная возможность $\chi_\varphi(t) = t^4 + 1$. Отсюда уже очевиден канонический вид нашего оператора (см. ниже). Осталось найти канонический базис.
Пусть $\lambda := \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ и найдем соответствующий собственный вектор $\mathbf{v}$ комплексификации $\varphi^{\mathbb{C}}$. Пусть $\mathbf{v} = (v_1,\, v_2,\, v_3,\, v_4)^T$, тогда из (47) имеем

$$\lambda\mathbf{v} = (\lambda v_1,\, \lambda v_2,\, \lambda v_3,\, \lambda v_4)^T = (-v_4,\, v_1,\, v_2,\, v_3)^T.$$

Полагая $v_4 = 1$, получаем $v_3 = \lambda,\ v_2 = \lambda^2,\ v_1 = \lambda^3$. Итак, $\mathbf{v} = \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\, i,\, \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$
Тогда в качестве собственного вектора с собственным значением $\overline{\lambda}$ можно взять вектор $\mathbf{v}'$ с координатным столбцом $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},\, -i,\, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},\, 1\right)^T$.
Из пункта 2.2. мы знаем, что на векторы $\mathbf{v}_1 := \frac{1}{2}(\mathbf{v}+\mathbf{v}')$, $\mathbf{v}_2 := \frac{1}{2i}(\mathbf{v}-\mathbf{v}')$ натянуто двумерное инвариантное подпространство V^λ оператора φ, причем ограничение $\varphi|_{V^\lambda}$ имеет в указанном базисе матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\, 0,\, \frac{\sqrt{2}}{2},\, 1\right)^T$ и $\mathbf{v}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\, 1,\, \frac{\sqrt{2}}{2},\, 0\right)^T$ получились ортогональными. Это не случайно. Действительно, так как собственные векторы $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ унитарного оператора $\varphi^{\mathbb{C}}$, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны, то

$$g^{\mathbb{C}}(\mathbf{v},\, \mathbf{v}') = g(\mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_1) - g(\mathbf{v}_2,\, \mathbf{v}_2) + i(g(\mathbf{v}_2,\, \mathbf{v}_1) + g(\mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2)) = 0,$$

откуда получаем $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2|$ и $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$.
Теперь осталось нормировать векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$.
Если $\mu = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ — представитель другой пары комплексно-сопряженных собственных значений, то, как мы знаем из предыдущей задачи, $V^\mu = (V^\lambda)^\perp = \langle \mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2\rangle^\perp$. Альтернативно, для нахождения ортонормированного базиса $\{\mathbf{w}_1,\, \mathbf{w}_2\}$ в V^μ можно действовать как в предыдущем пункте. Матрица ограничения φ на V^μ в базисе $\{\mathbf{w}_1,\, \mathbf{w}_2\}$ есть

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}. \quad \blacksquare \tag{48}$$

Комментарий. Другой способ решения задачи подсказывает наблюдение, что $V^\lambda = \ker(\varphi^2 - \sqrt{2}\varphi + \mathrm{id}_V)$, $\ V^\mu = \ker(\varphi^2 + +\sqrt{2}\varphi + \mathrm{id}_V)$ в соответствии с разложением характеристического многочлена t^4+1 на неприводимые множители над $\mathbb{R}$. Действительно, характеристические многочлены ограничений $\varphi|_{V^\lambda}$ и $\varphi|_{V^\mu}$ суть $t^2 - \sqrt{2}t + 1$ и $t^2 + \sqrt{2}t + 1$ соответственно. Решая получающиеся системы линейных однородных уравнений, находим базис в каждом из подпространств, затем их ортогонализуем и нормируем.

Рассмотрим еще пару задач, связанных с пространствами функций, скалярное произведение в которых задается с помощью интеграла.

Задача 3.32. На линейном пространстве функций, непрерывных на отрезке $[-1,\,1]$, со скалярным произведением из задачи 3.10, преобразование φ задано формулой

$$\varphi(f)(y) = \int_{-1}^{1} K(x,\,y) f(x) dx,$$

где $K\colon [-1,\,1]\times[-1,\,1]\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция. При каком условии на функцию K оператор φ будет самосопряженным?

Решение. Проверка того, что формулы из условия действительно задают скалярное произведение, была проведена в задаче 3.10. То, что φ — линейный оператор, очевидным образом следует из свойств интеграла.
Решение задачи основано на выкладке[34]:

$$(\varphi(f),\,g) = \int\limits_{-1}^{1} \varphi(f)(y) g(y)\,dy = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} K(x,\,y) f(x)\,dx\; g(y) dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} f(x) \left(\int\limits_{-1}^{1} K(x,\,y) g(y)\,dy \right) dx = (f,\,\varphi^*(g)).$$

Таким образом, $\varphi^*(f)(y) = \int_{-1}^{1} K(y,\,x) f(x)\,dx$, и если $\varphi = \varphi^*$, то для любой непрерывной функции f на отрезке $[-1,\,1]$

$$\int_{-1}^{1} \left(K(x,\,y) - K(y,\,x)\right) f(x)\,dx = 0,$$

откуда (в силу непрерывности функции $K(x,\,y)$) получаем, что $\forall y \in [-1,\,1]$ должно выполняться условие $K(x,\,y) - K(y,\,x) \equiv 0$ как функция от x на отрезке $[-1,\,1]$ $\;\Rightarrow\;$ $K(x,\,y) \equiv K(y,\,x)$ на всем квадрате $[-1,\,1]\times[-1,\,1]$. ■

Комментарии. 1) Чтобы догадаться до правильного ответа, можно рассмотреть следующую "дискретную" модель. Рассмотрим вместо отрезка конечное множество точек $x_1,\,\ldots,\,x_n$; тогда K является $n\times n$-матрицей с элементами $K(x_j,\,x_i) =: a_{ij}$, функция f — столбцом $\mathbf{u} = (u_1,\,\ldots\,,u_n)^T$, $u_i := f(x_i)$; функция g — столбцом $\mathbf{v} = (v_1,\,\ldots\,,v_n)^T$, $v_i := g(x_i)$. Кроме того, действие оператора φ на функцию f сводится к умножению матрицы A на столбец $\mathbf{u}$, а скалярное произведение задается стандартной формулой (как в ортонормированном базисе) $(\mathbf{u},\,\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T\,\mathbf{v}$. Значит, если $(A\mathbf{u},\,\mathbf{v}) = (A\mathbf{u})^T\mathbf{v} = \mathbf{u}^T(A^T\mathbf{v}) = (\mathbf{u},\,A^*\mathbf{v})$, то оператору A^* соответствует матрица A^T.
Следовательно, оператор, сопряженный φ, имеет производящую функцию $K^*(x,\,y) = K(y,\,x)$ и φ самосопряжен, если и только если $K(x,\,y) = K(y,\,x)$.

[34] Далее используется следствие из теоремы Фубини о сведе́нии двойного интеграла к повторному, которая изучается на втором курсе. Для полноты мы приводим его формулировку в комментарии ниже.

2) Приведем формулировку использованной нами выше теоремы Фубини из курса математического анализа (см., например, [13], гл. 19, § 19.3.), которая позволяет менять местами порядок интегрирования.

Теорема 3.33. *Пусть функция f непрерывна на прямоугольнике $P := [a,\, b] \times [c,\, d] \subset \mathbb{R}^2$. Тогда*

$$\iint\limits_P f(x,\, y)\, dx\, dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,\, y)\, dx \right) dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,\, y)\, dy \right) dx.$$

Задача 3.34. Показать, что оператор двукратного дифференцирования $\mathbf{A} = \frac{d^2}{dx^2}$ является самосопряженным оператором в пространстве V тригонометрических многочленов

$$V = \{a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx\}$$

с евклидовым скалярным произведением

$$(f,\, g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx.$$

Показать, что функции $1/\sqrt{2}$, $\cos x$, $\sin x$, $\ldots$, $\cos nx$, $\sin nx$ образуют ортонормированный базис для оператора $\mathbf{A}$, найти соответствующие собственные значения.

Решение. Ясно, что функции $\{1,\, \cos\, kx,\, \sin\, kx \mid k \geq 1\}$ линейно независимы, следовательно, $\dim V = 2n + 1$. Элементы пространства V называются *тригонометрическими многочленами.* Заметим, что оператор $\frac{d}{dx}$ (а значит, и $\mathbf{A} = \frac{d}{dx} \circ \frac{d}{dx}$) переводит пространство V в себя. По формуле интегрирования по частям для любых тригонометрических многочленов f, g имеем

$$\left(\frac{df}{dx},\, g \right) + \left(f,\, \frac{dg}{dx} \right) = fg \,|_0^{2\pi} = 0.$$

Таким образом, на V

$$\left(\frac{df}{dx},\, g \right) = \left(f,\, -\frac{dg}{dx} \right),$$

т.е. оператор $-\frac{d}{dx}$ сопряжен с оператором $\frac{d}{dx}$. Отсюда получаем

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} \right)^* = \left(\frac{d}{dx} \circ \frac{d}{dx} \right)^* = \left(\frac{d}{dx} \right)^* \circ \left(\frac{d}{dx} \right)^* =$$

$$= \left(-\frac{d}{dx} \right) \circ \left(-\frac{d}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \circ \frac{d}{dx} = \frac{d^2}{dx^2}$$

(здесь мы использовали тождество[35] $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$), то есть оператор $\mathbf{A}$ самосопряжен.

[35] Можно также использовать повторное интегрирование по частям.

Для оператора **A**, как для любого самосопряженного оператора, существует ортонормированный базис из собственных векторов. Легко проверить, что функция $f(x) \equiv 1$ — собственный вектор оператора **A** с собственным значением 0, а $\cos kx$ и $\sin kx$ — собственные векторы оператора **A** с собственным значением $-k^2$. Так как собственные подпространства самосопряженного оператора, отвечающие разным собственным значениям, взаимно ортогональны, при $k \neq l$ получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos kx \cos lx \, dx = \int\limits_0^{2\pi} \sin kx \sin lx \, dx = \int\limits_0^{2\pi} \cos kx \sin lx \, dx = 0.$$

Разумеется, эти хорошо известные соотношения могут быть проверены и прямым вычислением.

Нормированность рассматриваемого базиса следует из очевидных равенств

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi \quad \text{при} \quad k > 0.$$

Таким образом, в указанном в условии ортонормированном базисе оператор **A** имеет следующий диагональный вид:

$$\operatorname{diag}(0, -1, -1, -2^2, -2^2, \ldots, -n^2, -n^2). \quad \blacksquare$$

Комментарий. Отсюда можно вывести следующий важный факт. Оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, действующий в пространстве финитных функций (бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем), является самосопряженным оператором. Отметим, что в пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$ со скалярным произведением, определенным как интеграл по соответствующему отрезку от произведения функций, оператор Лапласа самосопряженным уже не будет, так как получающийся при интегрировании по частям смешанный член в ноль обращаться не обязан. Действительно, если мы возьмем пару функций x и x^2, которые, разумеется, будут удовлетворять всем перечисленным условиям, скажем, на отрезке $[0, 1]$, самосопряженность оператора $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ означает, что

$$\int\limits_0^1 x^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} x \right) dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 \right) x dx. \tag{49}$$

В левой части выражения (49) получилось нулевое выражение, а в правой, как несложно убедиться, не ноль.

3.3. Билинейные и квадратичные функции в евклидовых пространствах

Пусть V — евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, $h\colon V\times V\to\mathbb{R}$ — билинейная функция на V. Тогда, как показывает следующая задача, существует единственный линейный оператор $\varphi=\varphi_h\colon V\to V$, определяемый равенством

$$h(\mathbf{u},\,\mathbf{v})=(\mathbf{u},\,\varphi(\mathbf{v}))\ \ \forall\,\mathbf{u},\,\mathbf{v}\in V. \tag{50}$$

Замечание. Для читателей, знакомых с тензорными обозначениями, заметим, что билинейная форма h получается из линейного оператора φ_h опусканием верхнего индекса с помощью метрики g:

$$h_{ij}u^iv^j=g_{ij}u^i\varphi(\mathbf{v})^j=g_{ij}u^i\varphi^j_kv^k=g_{ik}\varphi^k_ju^iv^j\quad\Rightarrow\quad h_{ij}=g_{ik}\varphi^k_j$$

(свертка по k), ср. формулу (51) ниже. Здесь мы пользуемся обозначениями А. Эйнштейна (суммирование по повторяющимся сверху и снизу индексам). Обратно, φ_h получается из h с помощью подъема индекса в присутствии метрики g.

Заметим, что и множество линейных операторов $V\to V$, и множество билинейных функций $V\times V\to\mathbb{R}$ являются векторными пространствами над $\mathbb{R}$ одной и той же размерности n^2, где $n=\dim V$ (например, в базисе оператор и билинейная функция однозначно задаются своими матрицами, причем любая матрица может быть как матрицей линейного оператора, так и матрицей билинейной функции). Пространство билинейных функций на V обозначим $\mathcal{B}(V)$, пространство линейных операторов на V — $\mathcal{L}(V)$.

Задача 3.35. 1) Сопоставление $h\mapsto\varphi_h$ определяет изоморфизм векторных пространств $\alpha\colon\mathcal{B}(V)\to\mathcal{L}(V)$.

2) При изоморфизме α симметричные билинейные функции отвечают самосопряженным операторам.

Решение. 1) Построим линейное отображение $\beta\colon\mathcal{L}(V)\to\mathcal{B}(V)$, обратное к отображению α, а именно для линейного оператора $\varphi\colon V\to V$ определим билинейную функцию $h=h_\varphi\colon V\times V\to\mathbb{R}$ равенством (50). То есть по определению $\beta(\varphi)=h_\varphi$. Линейность отображения β очевидна. Так как пространства операторов и билинейных функций на V, как указывалось, имеют одинаковые размерности, то для доказательства того, что β — линейный изоморфизм, достаточно доказать его инъективность.
Пусть $\varphi\neq0$, тогда, конечно, существует такой вектор $\mathbf{v}\in V$, что $\varphi(\mathbf{v})\neq\mathbf{0}$. Кроме того, в силу невырожденности скалярного произведения существует вектор $\mathbf{u}\in V$ такой, что

$$(\mathbf{u},\,\varphi(\mathbf{v}))=h_\varphi(\mathbf{u},\,\mathbf{v})\neq0\ \ \Rightarrow\ \ \beta(\varphi)=h_\varphi\neq0.$$

Таким образом, линейное отображение β — изоморфизм, а значит, и обратное к нему отображение α тоже является изоморфизмом.
2) Проверим теперь второе утверждение. Действительно, для всех $\mathbf{u},\,\mathbf{v}\in V$

$$h(\mathbf{u},\,\mathbf{v})=h(\mathbf{v},\,\mathbf{u})\ \ \Leftrightarrow\ \ (\mathbf{u},\,\varphi(\mathbf{v}))=(\mathbf{v},\,\varphi(\mathbf{u}))=(\varphi(\mathbf{u}),\,\mathbf{v}),$$

что равносильно самосопряженности оператора φ. ■

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — некоторый базис в V, в котором евклидово скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ имеет матрицу Грама G, билинейная форма h — матрицу H, а оператор φ_h — матрицу $A = A_\varphi$. Кроме того, пусть $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ — координатные столбцы векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Тогда (50) переписывается в виде

$$\overrightarrow{u}^T H \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}^T G A \overrightarrow{v} \quad \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \quad \Leftrightarrow \quad H = GA \quad \Leftrightarrow \quad A = G^{-1} H. \qquad (51)$$

В частности, если базис ортонормированный, то $G = E$, а значит, $A = H$. Пусть $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ — еще один базис в V, C — матрица перехода к нему от старого базиса. Тогда в очевидных обозначениях мы должны иметь $G' = C^T G C$, $H' = C^T H C$. Проверим, что тогда $A' = C^{-1} A C$ (как и должно быть для матрицы оператора). Действительно,

$$A' = G'^{-1} H' = (C^T G C)^{-1} C^T H C =$$

$$= C^{-1} G^{-1} C^{-T} C^T H C = C^{-1} G^{-1} H C = C^{-1} A C.$$

В частности, если оба базиса ортонормированные, то C — ортогональная матрица, то есть $C^{-1} = C^T$, и тогда $A' = C^{-1} A C = = C^T A C = C^T H C = H'$. Пусть h — симметричная билинейная форма. Так как для самосопряженного оператора φ_h существует ортонормированный базис из собственных векторов, а значит, в нем его матрица A диагональна, то и матрица билинейной формы H в этом базисе тоже диагональна. Таким образом, для любой симметричной билинейной (или квадратичной) формы на евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором она диагональна (для квадратичной формы последнее означает, что в соответствующих координатах она имеет вид $\sum_k \lambda_k x_k^2$).

Задача 3.36. Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$, g, h — две квадратичные формы на V, причем g положительно определена. Доказать, что в V существует базис, в котором матрица Грама первой формы $G = E$, а матрица H второй формы h диагональна.

Решение. Так как g положительно определена, то (V, g) — евклидово пространство. Построим по h симметричную билинейную форму $\widetilde{h}$ ("поляризацию" h), с которой ассоциируем самосопряженный оператор φ, как показано выше (заметим, что сопоставление $\widetilde{h} \mapsto \varphi_{\widetilde{h}}$ зависит и от g). Тогда для построенного нами самосопряженного оператора φ существует ортонормированный базис из собственных векторов. В этом базисе мы имеем $G = E$, $A = H$ и A диагональна (с собственными значениями φ на главной диагонали). ■

Изложим теперь алгоритм приведения пары форм к диагональному виду. Пусть в некотором базисе пространства V форма g имеет матрицу G, а форма h — матрицу H, тогда матрица оператора φ есть $A = A_\varphi = G^{-1} H$. Имеем

$$\det (A - \lambda E) = \det (G^{-1} H - \lambda E) = \det (G^{-1} H - \lambda G^{-1} G) =$$

$$= \det (G^{-1} (H - \lambda G)) = \det (G^{-1}) \det (H - \lambda G).$$

Таким образом, собственные значения φ совпадают с корнями "обобщенного характеристического уравнения" $\det(H - \lambda G) = 0$ (так как A — матрица самосопряженного оператора, то все они вещественны). Пусть λ_k — некоторый корень. Тогда соответствующие собственные векторы находятся как (ненулевые) решения системы линейных однородных уравнений $(A - \lambda_k E)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ (здесь $\overrightarrow{v}$ — неизвестный столбец координат собственного вектора $\mathbf{v}$). Данная система эквивалентна системе $(H - \lambda_k G)\overrightarrow{v} = = \overrightarrow{0}$. Заметим, что собственные векторы, отвечающие разным собственным значениям, автоматически будут ортогональны относительно g, в случае же кратного собственного значения λ_k базисные векторы из соответствующего собственного подпространства нужно ортогонализовать отдельно (например, с помощью алгоритма Грама–Шмидта) относительно матрицы Грама G. Далее полученный ортогональный базис, опять же используя матрицу G, нужно нормировать. В полученном ортонормированном относительно формы g базисе матрица Грама формы g будет единичной E, а матрица h — диагональной $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Полученный в данном разделе результат о приведении пары квадратичных форм к главным осям имеет важное применение в теории малых колебаний. Роль квадратичных форм в этом случае играют кинетическая и потенциальная энергии, причем первая из них положительно определена. Подробнее см., например, в книге [5].

Задача 3.37. [11] Привести пример пары квадратичных форм, которые не приводятся одновременно к диагональному виду.

Решение. Такой пример нужно искать среди форм, ни одна из которых не является знакоопределенной. Рассмотрим квадратичные формы в двумерном пространстве, имеющие в некотором базисе матрицы

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — матрица перехода к новому базису. Тогда в нем квадратичные формы будут иметь матрицы

$$S^T K S = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S^T H S = \begin{pmatrix} 2ac & ad + bc \\ ad + bc & 2bd \end{pmatrix}.$$

Если они обе диагональны, то элементы матрицы перехода удовлетворяют системе

$$\begin{cases} ab - cd = 0 & (1) \\ ad + bc = 0. & (2) \end{cases}$$

Тогда $b(1) + d(2) = a(b^2 + d^2) = 0$, а также $d(1) - b(2) = c(b^2 + d^2) = 0$. В то же время из обратимости S следует, что $b^2 + d^2 \neq 0$, значит, $a = c = 0$ — противоречие. ■

3.4. Полярное разложение

Задача 3.38. Показать, что множество ортогональных матриц $O(n)$ в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ является замкнутым и ограниченным. И соответственно множество унитарных матриц $U(n)$ — замкнутое и ограниченное подмножество в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.

Решение. Доказательство проведем в ортогональном случае, для унитарного рассуждения аналогичны. Выше в задаче 3.6 мы ввели структуру евклидова пространства на $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ с помощью скалярного произведения $(A, B) = \mathrm{tr}(A^T B)$. Для ортогональной матрицы $U^T U = E$, поэтому ее квадрат евклидовой длины есть $|U|^2 = \mathrm{tr}(U^T U) = n$, то есть множество ортогональных матриц лежит в сфере радиуса $\sqrt{n}$, следовательно, оно ограничено. Переписывая матричное уравнение $U^T U = E$ в терминах матричных элементов a_{ij} матрицы U, получаем набор $n(n+1)/2$ полиномиальных уравнений

$$\sum_{m=1}^{n} a_{mj} a_{mk} = \delta_{jk}, \ \ 1 \le j \le k \le n$$

(эти уравнения просто означают, что столбцы матрицы U, рассматриваемые как векторы из $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, образуют там ортонормированный базис). Полиномы — непрерывные функции, значит, их множество нулей замкнуто. Пересечение произвольного семейства замкнутых множеств замкнуто. ■

Комментарий. Подмножество в $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Значит, в предыдущей задаче фактически доказано, что множества $O(n)$ и $U(n)$ компактны.

Определение 3.39. Самосопряженный оператор A называется *неотрицательным* (соотв. *положительным*), если $(A\mathbf{v}, \mathbf{v}) \ge 0$ (соотв. $(A\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$) для всех $\mathbf{v} \in V$ (соотв. для всех $\mathbf{v} \ne \mathbf{0}$).

Задача 3.40. Доказать, что условие неотрицательности (положительности) оператора A равносильно неотрицательности (положительности) всех точек спектра A.

Решение. Самосопряженный оператор A имеет вещественный спектр. Пусть $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда если A неотрицателен, то $\lambda(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (A\mathbf{v}, \mathbf{v}) \ge 0\ \forall \mathbf{v} \in V \ \Rightarrow\ \lambda \ge 0$. Если A положителен, то $\lambda \ne 0$ и $\lambda \ge 0 \ \Rightarrow\ \lambda > 0$.
Обратно, если спектр неотрицателен (положителен), то, выбирая ортонормированный базис из собственных векторов, легко убедиться, что квадратичная форма $\mathbf{v} \mapsto (A\mathbf{v}, \mathbf{v})$ неотрицательно (положительно) определена. ■

Очевидно, неотрицательный оператор невырожден тогда и только тогда, когда он положителен.

Задача 3.41. Доказать, что из каждого неотрицательного оператора A можно извлечь единственный неотрицательный квадратный корень.

Решение. Пусть $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ — все различные собственные значения оператора A, а $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$ — разложение в ортогональную сумму собственных подпространств оператора A. На каждом V_{λ_j} оператор A действует как

скалярный оператор $\lambda_j \operatorname{id}_{V_{\lambda_j}}$, причем $\lambda_j \geq 0$, значит, из него можно извлечь арифметический квадратный корень. Тогда мы получим неотрицательный оператор B, ограничение которого на V_{λ_j} есть $\sqrt{\lambda_j} \operatorname{id}_{V_{\lambda_j}}$ (оператор B самосопряжен, поскольку он диагонализируется в ортонормированном базисе и имеет вещественный спектр). Тем самым показано существование арифметического квадратного корня из неотрицательного оператора.
Докажем его единственность. Пусть, обратно, $A = B^2$. Пусть $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_l\}$ — все различные собственные значения оператора B, а $V = V_{\sigma_1} \oplus \ldots \oplus V_{\sigma_l}$ — разложение в ортогональную прямую сумму собственных подпространств оператора B. Заметим, что ограничение $B^2 = A$ на V_{σ_r} есть скалярный оператор $\sigma_r^2 \operatorname{id}_{V_{\sigma_r}}$. Значит, $k = l$, следовательно (возможно, после перенумерации), $\lambda_j = \sigma_j^2$ и $V_{\lambda_j} = V_{\sigma_j}$. ■

Таким образом, положительные операторы — аналог положительных действительных чисел. Сейчас мы получим аналог представления произвольного комплексного числа z в экспоненциальном виде $z = re^{i\varphi}$, где $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ и $\varphi \in \mathbb{R}$. Заметим, что число $e^{i\varphi}$ — матрица унитарного оператора в ортонормированном базисе в одномерном эрмитовом пространстве. Заметим также, что в этом представлении $r = |z|$ определено по z однозначно, а $e^{i\varphi}$ однозначно[36] при $z \neq 0$.
Пусть V — конечномерное евклидово (эрмитово) пространство, $A \colon V \to V$ — линейный оператор на V.

Определение 3.42. *Полярным разложением* оператора A называется его представление в виде $A = UB$, где U — ортогональный (унитарный), а B — неотрицательный самосопряженный операторы, см. [10], гл. VII, § 2, п. 6.

Заметим, что наряду с разложением $A = UB$ ("*правым полярным разложением*") можно совершенно аналогично рассматривать разложение вида $A = BU$, называемое *левым полярным разложением.*
Для полноты аналогии с показательной формой записи комплексного числа отметим, что любой унитарный оператор U может быть представлен в виде $\exp(iS)$, где S — самосопряженный, см., например, [35], ч. 2, § 8 или [19], гл. 5, § 20.
Полярное разложение имеет простой физический смысл. Деформация тела с закрепленной точкой в первом приближении описывается невырожденным линейным оператором A, который есть композиция положительного самосопряженного оператора B (который есть композиция растяжений (сжатий) по трем взаимно перпендикулярным направлениям — это так называемый тензор деформаций) и поворота U вокруг некоторой оси (см. задачу 3.27).

Задача 3.43. Проверить, что A^*A — неотрицательный самосопряженный оператор и что он положителен тогда и только тогда, когда A обратим.

Решение. $(A^*A\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (A\mathbf{v}, A\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, A^*A\mathbf{v}) \Rightarrow A^*A$ самосопряжен. Так как $(A^*A\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (A\mathbf{v}, A\mathbf{v}) \geq 0 \ \ \forall \mathbf{v} \in V \ \Rightarrow A^*A$ неотрицателен. A обратим $\Leftrightarrow \forall \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \ \ A\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. ■

[36] Разумеется, речь не об однозначности φ, которое определено только с точностью до $2\pi k$.

Если $A = UB$ — полярное разложение, то

$$A^*A = B^*U^*UB = B^2.$$

Поэтому неотрицательный самосопряженный оператор B определяется как арифметический квадратный корень из A^*A, $B = = \sqrt{A^*A}$. Пусть A обратим, тогда, как мы видели, B обратим и $U = AB^{-1}$ — ортогональный (унитарный) оператор. Действительно,

$$U^*U = (AB^{-1})^*AB^{-1} = B^{-1}A^*AB^{-1} = B^{-1}B^2B^{-1} = \mathrm{id}_V.$$

Тем самым мы получили полярное разложение в случае, когда A обратим. В этом случае B и U определены по A однозначно. Действительно, если $A = UB$, то $A^* = BU^*$ и $A^*A = BU^*UB = B^2$. В задаче 3.41 мы доказали, что неотрицательный B определен однозначно. Тогда если A обратим, то B положителен и $U = AB^{-1}$.

Задача 3.44. Пусть A — невырожденный оператор на евклидовом пространстве, UB и $B'U'$ — его правое и левое полярные разложения. Доказать, что $U = U'$.

Решение. Ясно, что $B'^2 = AA^*$, поэтому B' единствен как положительный квадратный корень $\sqrt{AA^*}$. С другой стороны, для положительного самосопряженного оператора $B'' := UBU^{-1}$ имеем $A = B''U$, откуда $B'' = B'$ и $U' = U$. ■

В задаче 2.8 мы уже доказали, что обратимые операторы образуют плотное подмножество в пространстве всех операторов. Это утверждение может быть использовано для следующей задачи.

Задача 3.45. Доказать существование полярного разложения для всех операторов на V[37].

Решение. Пусть A — необратимый оператор на V. Используя плотность обратимых операторов, выберем последовательность обратимых операторов $\{A_n\}$, сходящуюся к A. Тогда $A_n = U_nB_n$, где B_n — арифметический квадратный корень из положительного оператора $A_n^*A_n$, а $U_n = A_nB_n^{-1}$. Далее, используя непрерывность перехода к сопряженному и композиции операторов, получаем $\{A_n^*A_n\} \to A^*A$, то есть $\{B_n^2\} \to B^2$, где $B := \sqrt{A^*A}$. Отсюда (используя непрерывность арифметического квадратного корня из неотрицательного оператора) легко вывести, что $\{B_n\} \to B$ (в связи с этим заметим, что замыкание множества положительных самосопряженных операторов — множество неотрицательных самосопряженных операторов).
Далее, $\{U_n = A_nB_n^{-1}\}$ — последовательность ортогональных (унитарных) операторов. Согласно задаче 3.38 множество ортогональных (унитарных) операторов замкнуто и ограничено в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ (соотв. в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$), а следовательно, компактно. Метрическое пространство компактно тогда и только

[37]Причем в случае необратимого A неотрицательный самосопряженный оператор B определен однозначно, а ортогональный (унитарный) — нет.

тогда, когда оно секвенциально компактно, то есть когда любая его последовательность имеет предельную точку. Значит, $\{U_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{U'_n\}$, сходящуюся к ортогональному (унитарному) оператору U_0 (ввиду замкнутости множества ортогональных (унитарных) операторов в пространстве всех операторов). Пусть $\{A'_n\}$, $\{B'_n\}$ — соответствующие подпоследовательности в $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ соответственно. Теперь из непрерывности композиции операторов получаем, что $\{U'_n B'_n\} \to U_0 B$, но, с другой стороны, $U'_n B'_n = A'_n$ и $\{A'_n\} \to A$. Следовательно, $A = U_0 B$. ■

Комментарий. Заметим, что предельных точек U_0, вообще говоря, много, если оператор A необратим. В качестве примера можно рассмотреть сходящуюся к нулевой последовательность матриц

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{n} & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{n} \end{pmatrix} \to 0.$$

Тогда $B_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$, а $U_n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то есть предельными точками являются E и $-E$. Впрочем, понятно и так, что полярное разложение нулевого оператора есть $U \cdot 0$, где U — произвольная ортогональная (унитарная) матрица.

3.5. Сингулярное разложение и норма оператора

Пусть снова V — конечномерное евклидово (эрмитово) пространство, $A\colon V \to V$ — линейный оператор на V. Выше мы получили полярное разложение $A = UB$, где B — неотрицательный самосопряженный, а U — ортогональный (унитарный) операторы.

Выберем некоторый ортонормированный базис в V и будем записывать операторы матрицами в нем (обозначая матрицы теми же буквами). Для определенности ниже мы предполагаем, что V евклидово, эрмитов случай полностью аналогичен (с единственным отличием, что матрица сопряженного оператора к A в ортонормированном базисе есть $\overline{A}^{\,T}$).

Матрица B — неотрицательная симметричная, поэтому она диагонализируется в некотором ортонормированном базисе, то есть существует такая ортогональная матрица U_1, что

$$U_1 B U_1^T = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) =: \Lambda,$$

причем все $\sigma_i \geq 0$. Тогда $A = UB = UU_1^T \Lambda U_1 = U_2 \Lambda U_1$, где $U_2 := UU_1^T$ — ортогональная матрица.

То есть нами доказан следующий результат: для любой вещественной квадратной матрицы A существует представление

$$A = U_2 \Lambda U_1, \tag{52}$$

где U_1, U_2 — ортогональные матрицы, а Λ — диагональная матрица с неотрицательными диагональными элементами. Представление (52) называется *сингулярным разложением* матрицы A, а неотрицательные числа σ_i, $1 \leq$

$i \leq n$ — *сингулярными значениями* матрицы A. Заметим, что σ_i — собственные значения матрицы B, а из задачи 3.41 мы знаем, что $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, где λ_i — собственные значения неотрицательного самосопряженного оператора A^*A (с симметричной матрицей A^TA в выбранном ортонормированном базисе пространства V).
Сингулярные значения матрицы A имеют следующий геометрический смысл: при линейном отображении с матрицей A единичная сфера пространства V переходит в эллипсоид в V, полуоси которого — сингулярные значения A.

Введем важное (особенно в функциональном анализе) понятие *операторной нормы* линейного оператора на евклидовом (эрмитовом) пространстве.
Пусть V — евклидово (эрмитово) пространство, тогда на V задана функция (длина вектора):

$$|\cdot|\colon V \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \mapsto |\mathbf{v}| := \sqrt{(\mathbf{v},\, \mathbf{v})}.$$

Определение 3.46. Пусть V — евклидово (эрмитово) пространство, $A\colon V \to V$ — линейный оператор. *Нормой* оператора A называется число (если оно существует):

$$\|A\| := \sup_{|\mathbf{v}|\leq 1} |A\mathbf{v}|, \tag{53}$$

где верхняя грань берется по всем векторам $\mathbf{v} \in V$, $|\mathbf{v}| \leq 1$, то есть по *замкнутому единичному шару* в V. Если $\|A\|$ существует, то оператор A называется *ограниченным.*

Заметим, что если $V \neq \{0\}$, то норму оператора можно также определить равенствами

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{v}\neq \mathbf{0}} \frac{|A\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} \quad \text{или} \quad \|A\| = \sup_{|\mathbf{v}|=1} |A\mathbf{v}|,$$

где в последнем равенстве верхняя грань справа берется по *единичной сфере* $S(V)$ пространства V. Действительно, если $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, то $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \in S(V)$ и $\frac{|A\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \left|A\left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right)\right|$, поэтому два последних равенства определяют одно и то же число (если одно из них конечно). С другой стороны, если $\mathbf{v} \neq 0$ и $|\mathbf{v}| \leq 1 \;\Rightarrow\; |A\mathbf{v}| \leq \frac{|A\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \left|A\left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right)\right|$, поэтому оба этих числа совпадают с первоначальным определением (53).

Теорема 3.47. *Функция $\|\cdot\|$ на пространстве линейных операторов на V имеет следующие свойства:*

1) *если A ограничен и $A \neq 0$, то $\|A\| > 0$;*
2) *если A ограничен, то $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$;*
3) *если A и B ограничены, то $A+B$ тоже ограничен, причем $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$;*
4) *если A и B ограничены, то AB тоже ограничен, причем $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.*

Доказательство. Свойства 1) и 2) очевидны. Докажем свойство 3) (при $V \neq \{0\}$):

$$\|A+B\| = \sup_{|\mathbf{v}|=1} |(A+B)(\mathbf{v})| = \sup_{|\mathbf{v}|=1} |A\mathbf{v} + B\mathbf{v}| \leq$$

$$\leq \sup_{|\mathbf{v}|=1}(|A\mathbf{v}|+|B\mathbf{v}|) \leq \sup_{|\mathbf{v}|=1}|A\mathbf{v}| + \sup_{|\mathbf{v}|=1}|B\mathbf{v}| = \|A\|+\|B\|.$$

Докажем 4). Если B — нулевой оператор, то равенство 4) очевидно. В противном случае имеем

$$\|AB\| = \sup_{\mathbf{v}\neq\mathbf{0}} \frac{|AB(\mathbf{v})|}{|\mathbf{v}|} = \sup_{B\mathbf{v}\neq\mathbf{0}} \left(\frac{|AB(\mathbf{v})|}{|B\mathbf{v}|}\,\frac{|B\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}\right) \leq$$

$$\leq \sup_{B\mathbf{v}\neq\mathbf{0}} \frac{|AB(\mathbf{v})|}{|B\mathbf{v}|} \sup_{B\mathbf{v}\neq\mathbf{0}} \frac{|B\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} \leq \sup_{\mathbf{v}\neq\mathbf{0}} \frac{|A\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} \sup_{\mathbf{v}\neq\mathbf{0}} \frac{|B\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \|A\|\,\|B\|. \quad \blacksquare$$

Из пунктов 2) и 3) доказанной теоремы следует, что ограниченные операторы образуют подпространство, а из пункта 4) — что даже подалгебру в алгебре $\mathcal{L}(V)$ всех линейных операторов на V.
Следующая теорема описывает связь с нормой операции взятия сопряженного оператора.

Теорема 3.48. *Для любого оператора $A\colon V \to V$ имеем*

$$\|A^*\| = \|A\|, \quad \|A^*A\| = \|A\|^2$$

(*последнее из равенств называется “C^*-тождеством”*).

Доказательство. Пусть $\mathbf{v} \in V$, $|\mathbf{v}| \leq 1$, тогда

$$|A\mathbf{v}|^2 = (A\mathbf{v},\, A\mathbf{v}) = (A^*A\mathbf{v},\, \mathbf{v}) \leq \tag{54}$$

$$\leq |A^*A\mathbf{v}||\mathbf{v}| \leq \|A^*A\||\mathbf{v}|^2 \leq \|A^*\|\|A\|, \tag{55}$$

где мы последовательно использовали определение квадрата длины через скалярное произведение, определение сопряженного оператора, неравенство Коши–Буняковского, очевидное неравенство $|L\mathbf{v}| \leq \|L\||\mathbf{v}|$ для любого линейного оператора $L\colon V \to V$, свойство 4) операторной нормы из предыдущей теоремы и условие $|\mathbf{v}| \leq 1$.
Переходя к верхним граням в (54) по $\mathbf{v} \in V$, $|\mathbf{v}| \leq 1$, получаем $\|A\|^2 \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\|\|A\|$, откуда $\|A\| \leq \|A^*\|$. Теперь, используя $A^{**} = A$, имеем $\|A^*\| \leq \|A\|$, следовательно, $\|A\| = \|A^*\|$, а значит, и $\|A^*A\| = \|A\|^2$. $\blacksquare$

Задача 3.49. Если V конечномерно, то любой оператор на V ограничен и верхняя грань в определении нормы оператора (53) может быть заменена на максимум.

Решение. Единичная сфера $S(V)$ в V замкнута и ограничена (а значит, компактна, так как V конечномерно). Кроме того, так как функция $\mathbf{v} \mapsto |A\mathbf{v}|$ непрерывна на $S(V)$ (в ортонормированном базисе это просто функция $f(\overrightarrow{x}) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j)^2}$ от координат вектора), то данная функция ограничена и верхняя грань ее значений достигается. $\blacksquare$

Ниже (в конце § 3.7.) мы используем понятие нормы оператора чтобы обосновать сходимость рядов от операторов, таких как $\exp(A)$.

Пусть $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ — набор собственных значений оператора A на конечномерном пространстве V. Тогда неотрицательное число

$$\rho(A) := \max_{1 \le i \le k} |\lambda_i|$$

называется *спектральным радиусом* оператора A. Легко видеть, что

$$\|A\| \ge \rho(A). \tag{56}$$

Задача 3.50. Если A самосопряжен, то $\|A\| = \rho(A)$.

Решение. 1-й способ. Пусть $V = \oplus_i V_{\lambda_i}$ — разложение пространства V в прямую сумму собственных подпространств самосопряженного оператора A (из самосопряженности A также следует, что все подпространства V_{λ_i} попарно ортогональны), $\mathbf{v} = \sum_i \mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_i \in V_{\lambda_i}$ — соответствующее разложение произвольного $\mathbf{v} \in V$. Пусть $\lambda_1^2 := \max_i \lambda_i^2$. Тогда

$$A\mathbf{v} = \sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i \quad \Rightarrow \quad |A\mathbf{v}|^2 = \sum_i \lambda_i^2 |\mathbf{v}_i|^2 \le \lambda_1^2 \sum_i |\mathbf{v}_i|^2 = \lambda_1^2 |\mathbf{v}|^2,$$

откуда $\|A\| \le \rho(A)$, что с учетом (56) дает требуемое.

2-й способ. Из конечномерности V следует, что нам нужно найти максимум функции $\mathbf{v} \mapsto |A\mathbf{v}|$ на единичной сфере $S(V)$ пространства V. Ясно, что он равен арифметическому квадратному корню из максимума функции $\mathbf{v} \mapsto (A\mathbf{v}, A\mathbf{v})$ на $S(V)$.

Для самосопряженного оператора $L\colon V \to V$ рассмотрим квадратичную функцию $q(\mathbf{v}) := (L\mathbf{v}, \mathbf{v})$. Попробуем найти максимум функции $q(\mathbf{v})$ на сфере $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 1$.

Необходимое условие экстремума следующее: если $\mathbf{v}$, $|\mathbf{v}| = 1$ — точка экстремума функции q, то для любого касательного вектора $\mathbf{w}$ к сфере в точке $\mathbf{v}$ (то есть $\forall\, \mathbf{w}$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$) значение дифференциала $dq|_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = 0$, то есть

$$dq|_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = 2(L\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{w} \perp \mathbf{v}.$$

Легко видеть, что последнее означает, что $\mathbf{v}$ — собственный вектор оператора L.

Так как $S(V)$ компактна, а q непрерывна, то максимум функции q на $S(V)$ достигается, и так как q дифференцируема, в точке максимума выполнено необходимое условие экстремума. Значит, максимум достигается на некотором собственном векторе. Отсюда следует, что он совпадает с максимальным собственным значением оператора L.

Полагая теперь $L = A^2$, получаем, что максимум функции $\mathbf{v} \mapsto |A\mathbf{v}|$ на $S(V)$ равен $\rho(A)$, что и требовалось. ■

Замечание. Второй способ решения сложнее первого, но он не использует факт существования собственного вектора у самосопряженного оператора (что устанавливается в процессе доказательства).

Задача 3.51. Пусть $A\colon V \to V$ — оператор в евклидовом пространстве V. Тогда

$$\|A\| = \sqrt{\rho(A^* A)}.$$

Решение. Имеем
$$\|A\|^2 = \|A^*A\| = \rho(A^*A),$$
где использовано C^*-тождество и самосопряженность оператора A^*A. ∎

Замечание 1. Последняя задача показывает, что норма оператора полностью определяется само́й алгеброй операторов (с операцией * перехода к сопряженному оператору). Действительно, спектр оператора $A^*A\colon V \to V$ — множество тех $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых оператор $(A^*A - \lambda\,\mathrm{id}_V)$ необратим, а значит, $\rho(A^*A)$ определяется алгебраическими свойствами оператора A^*A.

Замечание 2. Из полученного выше сингулярного разложения следует, что
$$\sqrt{\rho(A^*A)} = \max_{1\le i\le n} \sigma_i,$$
где $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ — сингулярные значения оператора A. В частности, $\|A\| = \|\Lambda\|$.
Действительно, заметим, что если $U\colon V \to V$ — ортогональный оператор, то $|U\mathbf{v}| = |\mathbf{v}|\ \forall\, \mathbf{v} \in V$. Поэтому из определения нормы оператора легко следует, что $\|AU\| = \|UA\| = \|A\|$, и, таким образом, если $A = U_2\Lambda U_1$ — сингулярное разложение оператора A, то $\|A\| = \|\Lambda\|$.

Таким образом, если A самосопряжен, то $\|A\| = \rho(A)$, в то же время для оператора A, имеющего в ортонормированном базисе матрицу $J_n(0)$, $n \ge 2$, $1 = \|A\| > \rho(A) = 0$.

Вот еще пример: диагонализируемый оператор A, имеющий матрицу $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ в ортонормированном базисе. В таком случае $\Lambda = \mathrm{diag}(\sqrt{2},\, 0)$, поэтому $\|A\| = \sqrt{2} > \rho(A) = 1$ (максимум $|A\mathbf{v}|$ достигается на векторе $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\, 1)^T$). Если мы изменим скалярное произведение в V так, чтобы базис, в котором A имеет диагональный вид, был ортонормированным[38], то тогда $\|A\| = 1 = \rho(A)$ — наименьшая возможная норма оператора с матрицей $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Наибольшая же норма сверху не ограничена (то есть путем выбора скалярного произведения может быть сделана сколь угодно большой).

Пусть A — матрица оператора в некотором ортонормированном базисе пространства V. Выше мы определили евклидову длину матрицы $|A| = \sqrt{\mathrm{tr}(A^TA)}$. Заметим, что при произвольной замене базиса в V длина матрицы оператора, вообще говоря, меняется, однако она сохраняется при ортогональных заменах базиса. Действительно, если $U^TU = E$, то
$$|U^TAU|^2 = \mathrm{tr}((U^TAU)^TU^TAU) = \mathrm{tr}(U^TA^TUU^TAU) = \\ = \mathrm{tr}(U^TA^TAU) = \mathrm{tr}(A^TA) = |A|^2.$$

[38]При этом изменится, разумеется, операция перехода к сопряженному оператору, то есть мы не получаем противоречия с замечанием 1.

Задача 3.52. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ — матрица некоторого оператора в ортонормированном базисе V. Доказать, что

$$\|A\| \leq |A| \leq \sqrt{n}\,\|A\|. \tag{57}$$

Решение. Непосредственным вычислением, аналогичным проведенному выше, доказывается, что $|AU| = |UA| = |A|$ для любой ортогональной матрицы U. Аналогичное свойство операторной нормы $\|AU\| = \|UA\| = \|A\|$ было доказано в замечании 2. Значит, неравенство (57) достаточно доказать для $A = \Lambda$.

Объединяя предыдущую задачу и замечание 2, мы получаем, что $\|\Lambda\| = \max_{1\leq i\leq n} \sigma_i$. Равенство $|\Lambda| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$ очевидно. Из этого легко следует требуемый результат. ■

Комментарий. Заметим, что длина матрицы оператора обладает свойствами 1) — 3)[39] из теоремы 3.47, то есть является некоторой *нормой* (см. [15], см. также добавление 3.6.) на пространстве операторов на V, отличной от операторной $\|\cdot\|$. Существует теорема (см. Задачу 3.68 ниже), утверждающая, что любые две нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ на конечномерном пространстве W эквивалентны, то есть найдутся такие положительные константы $C_1 \leq C_2$, что $C_1\|\mathbf{w}\|_1 \leq \|\mathbf{w}\|_2 \leq C_2\|\mathbf{w}\|_1 \quad \forall\, \mathbf{w} \in W$. Это верно, в частности, если W является пространством линейных операторов на конечномерном пространстве V, которое, в свою очередь, является конечномерным линейным пространством над тем же полем. А на бесконечномерных пространствах не все нормы эквивалентны. Более того, неравенство (57) свидетельствует о том, что в бесконечномерном случае, когда V — гильбертово пространство, операторная норма $\|\cdot\|$ и норма $|\cdot|$, называемая *нормой Гильберта–Шмидта*, не эквивалентны (поскольку $C_2 = \sqrt{n}$ зависит от $n = \dim V$ и от двойного неравенства (57), остается только $\|A\| \leq |A|$, то есть норма Гильберта–Шмидта *мажорирует* операторную норму). В частности, не всякий ограниченный оператор в (бесконечномерном) гильбертовом пространстве V имеет конечную норму Гильберта–Шмидта, последнее условие выделяет специальный класс операторов в V.

3.6. Базисы в бесконечномерных пространствах

Настоящая работа посвящена преимущественно случаю конечномерных линейных пространств, которые и являются предметом рассмотрения курса линейной алгебры. Бесконечномерные линейные пространства заметно отличаются по своим свойствам от конечномерных и изучаются в курсе функционального анализа. В прикладных задачах и других математических дисциплинах бывают нужны и конечномерные, и бесконечномерные пространства, поэтому предостережем читателя от скоропалительных суждений о "полезности" тех или иных изучаемых разделов математики. Отметим только, что в любой параграф настоящего пособия можно добавить ссылки на самые современные работы, посвященные решению конкретных прикладных

[39] А также и 4) и $|A^*| = |A|$, однако C^*-тождество не выполнено. Так что противоречия с замечанием 1 нет.

задач, в которых используются средства линейной алгебры. То же самое можно сделать и с функциональным анализом.

Приведем, однако, некоторые примеры отличия бесконечномерных пространств от конечномерных. Пусть, например, $\varphi\colon V \to \to V$ — линейный изоморфизм пространства V и $U \subset V$ — его инвариантное подпространство. Если U конечномерно, то ограничение $\psi := \varphi|_U\colon U \to U$ тоже изоморфизм. Однако если U (а значит и V) бесконечномерно, то все, что можно доказать — это инъективность ψ[40]. И действительно, легко привести пример такого пространства V и его изоморфизма φ, что ограничение $\psi = \varphi|_U$ на инвариантное подпространство U уже не является изоморфизмом. В самом деле, возьмем счетномерное пространство $V = \langle \mathbf{e}_i \mid i \in \mathbb{Z}\rangle$ и его подпространство $U = \langle \mathbf{e}_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$, а в качестве $\varphi\colon V \to V$ — единственное линейное отображение такое, что $\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_{i+1},\ i \in \mathbb{Z}$. Тогда φ— изоморфизм, но ψ не сюръективно: вектор $\mathbf{e}_1$ не лежит в его образе, и, значит, ψ не изоморфизм.

Еще одно отличие между конечномерным и бесконечномерным случаями уже отмечалось в комментарии к задаче 5.19: *векторное пространство изоморфно своему двойственному тогда и только тогда когда оно конечномерно.* В качестве упражнения читателю предлагается доказать, что пространством, двойственным к (счетномерному) пространству финитных последовательностей действительных чисел, является пространство всех последовательностей действительных чисел.

В случае бесконечномерных пространств, изучаемых в функциональном анализе, часто используется понятие базиса, допускающее разложения в бесконечные линейные комбинации. Точнее, пусть V — некоторое векторное пространство, не являющееся, вообще говоря, конечномерным. В линейной алгебре базисом в V называется семейство векторов из V такое, что произвольный вектор $\mathbf{v} \in V$ однозначно представляется в виде *конечной* линейной комбинации векторов из этого семейства. Однако в функциональном анализе обычно рассматривают векторные пространства (над полями $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$) с дополнительными структурами (такими как норма), которые позволяют придавать смысл некоторым бесконечным линейным комбинациям, как мы сейчас продемонстрируем.

В центре дальнейших наших рассуждений будет стоять определение нормы в векторном пространстве (0.21) и понятие сходимости (0.24).

Для нормированных пространств можно попытаться изменить приведенное выше понятие базиса с учетом возможности разложения векторов в бесконечные линейные комбинации. Так мы приходим к следующему определению.

Определение 3.53. Последовательность векторов $\{\mathbf{e}_k\}$ нормированного пространства $(V, \|\cdot\|)$ называется *базисом Шаудера* в $(V, \|\cdot\|)$, если для всякого вектора $\mathbf{v} \in V$ существует единственная числовая последовательность $\{\lambda_k\}$ такая, что

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mathbf{e}_k, \tag{58}$$

[40] из которой в конечномерном случае следует сюръективность — но только в конечномерном!

где сходимость ряда понимается в том смысле, что

$$\|\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{e}_k\| \to 0 \quad \text{при } \ n \to \infty.$$

Заметим, что сходимость ряда (58) не предполагается абсолютной, поэтому существенно, что базисом Шаудера называется именно *последовательность* векторов, то есть эти векторы упорядочены.

Чтобы отличить "обычные" базисы от базисов Шаудера, в функциональном анализе первые называют *базисами Гамеля*. В любом векторном пространстве существует базис Гамеля (в бесконечномерном случае доказательство опирается на аксиому выбора), причем любые два базиса в одном и том же пространстве имеют одинаковую мощность.

Как видно, принципиальное отличие базиса Гамеля от базиса Шаудера состоит в количестве суммируемых векторов. Для базиса Гамеля оно строго конечно, а для базиса Шаудера счётно.

Наиболее полную теорию удается построить для *полных* нормированных пространств, называемых *банаховыми*. Напомним, что метрическое (в частности, нормированное) пространство называется полным, если всякая фундаментальная последовательность его элементов имеет предел, также принадлежащий этому пространству.

Нетрудно видеть[41], что нормированное пространство, обладающее базисом Шаудера, обязательно сепарабельно (то есть имеет счетное всюду плотное подмножество). Заметим, что не во всяком сепарабельном банаховом пространстве есть базис Шаудера. Это так называемая проблема Банаха–Шаудера, решенная П. Энфло во второй половине XX века.

Среди нормированных пространств наиболее "хорошими" являются пространства, чья норма $\|\cdot\|$ происходит из некоторого скалярного произведения, то есть $\|\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{v},\, \mathbf{v})$.

Замечание. Интересный вопрос: как охарактеризовать нормированные пространства V, чья норма происходит из скалярного произведения? Нетрудно видеть, что необходимым условием является следующее *тождество параллелограмма*:

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = 2\|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{w}\|^2 \quad \forall\, \mathbf{v},\, \mathbf{w} \in V.$$

Теорема Йордана—фон Ноймана утверждает, что это условие является и достаточным (см., например, [41], гл. 2, §12).

Рассмотрим евклидово (унитарное) пространство V со счетным базисом Гамеля $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$, который можно считать ортонормированным (иначе применим к нему алгоритм ортогонализации). Таким образом, элементы V можно отождествить с последовательностями

$$\mathbf{x} := (x_1, x_2, \ldots), \quad x_k \in \mathbb{R} \quad (\text{или } \ x_k \in \mathbb{C}),$$

---

[41] Рассматривая конечные линейные комбинации элементов базиса Шаудера с рациональными коэффициентами.

причем $x_k \neq 0$ только для конечного числа индексов $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$$

(ряд справа всегда сходится, т.к. содержит только конечное число ненулевых слагаемых). Главный недостаток данного пространства состоит в том, что оно не полно, то есть не банахово.

Задача 3.54. Привести пример фундаментальной последовательности векторов из V, которая не сходится по норме ни к какому элементу из V.

Решение. Рассмотрим, например, последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ следующего вида: $\mathbf{x}_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, 0, \ldots) \in V$. Покажем, что она фундаментальна. Например, при $m > n$ имеем

$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n\|^2 = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall m,\, n > N$ $\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n\| < \varepsilon$, что и означает фундаментальность.
Пусть $\mathbf{x} := \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$. Из сходимости по норме следует, что для всякого $k \in \mathbb{N}$ последовательность k-х координат векторов $\mathbf{x}_n$ сходится к k-й координате вектора $\mathbf{x}$. Тогда $\mathbf{x} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots)$ — последовательность, у которой бесконечно много элементов не равно нулю, и легко видеть, что она не принадлежит пространству V. ■

Чтобы из неполного метрического (в частности, нормированного) пространства получить полное, в математике существует специальная операция, называемая *пополнением*. Мы не будем ее здесь приводить, отметим лишь, что она обобщает построение поля действительных чисел с помощью фундаментальных последовательностей рациональных. Применяя эту операцию к нашему пространству V, мы получаем некоторое полное нормированное пространство $\overline{V}$, содержащее V в качестве плотного подмножества. Это пространство имеет стандартное обозначение ℓ_2 и состоит из всех (вещественных или комплексных) последовательностей $(x_1, x_2, \ldots)$ таких, что ряд $\sum\limits_k |x_k|^2$ сходится.

Задача 3.55. 1) Доказать, что для векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ из пространства ℓ_2 ряд $\sum\limits_i x_i y_i$ (или $\sum\limits_i x_i \overline{y}_i$ в унитарном случае) абсолютно сходится.

2) Доказать, что ℓ_2 является векторным пространством относительно очевидных операций сложения и умножения на число.

Решение. Абсолютная сходимость рядов следует из числового неравенства $|ab| \leq \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$. Пункт 2) следует из пункта 1). ■

Полнота пространства ℓ_2 доказывается в стандартных учебниках функционального анализа (см., например, [31]). Заметим, что из этого факта и задачи 3.54 следует, что мощность базиса Гамеля в ℓ_2 строго больше счетной

(можно показать, что базис Гамеля пространства ℓ_2 имеет континуальную мощность).
Для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell_2$ определим их скалярное произведение как $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum\limits_i x_i y_i$ (или $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum\limits_i x_i \overline{y}_i$ в унитарном случае) и норму $\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Тогда ℓ_2 превращается в евклидово (соотв. унитарное) пространство.

Определение 3.56. Полное евклидово (унитарное) бесконечномерное пространство называется вещественным (комплексным) *гильбертовым пространством.*

Таким образом, пространство ℓ_2 суммируемых с квадратом вещественных (комплексных) последовательностей является примером вещественного (комплексного) гильбертова пространства.
Легко видеть, что набор "стандартных" векторов $\{\mathbf{e}_n\}$, имеющих вид $\mathbf{e}_n = (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots)$ (единица на n-м месте), образует базис Шаудера в ℓ_2. В частности, сразу получаем, что пространство ℓ_2 сепарабельно.
Имеет место следующая важная теорема.

Теорема 3.57. *Любые два сепарабельных вещественных (комплексных) гильбертовых пространства изоморфны.*

То есть если V и W — два сепарабельных гильбертова пространства над одним и тем же полем со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_V$ и $(\cdot, \cdot)_W$ соответственно, то существует линейный изоморфизм $\varphi\colon V \to W$ такой, что

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}))_W \ \ \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Другой пример (комплексного) гильбертова пространства возникает при рассмотрении функций $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ на некотором отрезке $[a, b]$, для которых конечен интеграл Лебега $\int_a^b |f(t)|^2\, dt$. Для определенности в качестве отрезка возьмем $[-\pi, \pi]$. Элементами гильбертова пространства $L_2[-\pi, \pi]$ являются классы следующего отношения эквивалентности на множестве таких функций: две функции эквивалентны, если они различаются на множестве нулевой меры. Скалярное произведение в $L_2[-\pi, \pi]$ задается формулой

$$(f, g) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g}(t) dt$$

(таким образом, $\|f\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt$).

Замечание. Необходимость рассмотрения интеграла Лебега вместо интеграла Римана связана с тем, что предел сходящейся по указанной норме последовательности интегрируемых по Риману функций, вообще говоря, не интегрируем по Риману, а интегрируемых по Лебегу — интегрируем по Лебегу, то есть пространство $L_2[-\pi, \pi]$ полно.

Можно показать, что пространство $L_2[-\pi, \pi]$ сепарабельно, причем в качестве ортонормированного базиса Шаудера в нем может быть выбрана последовательность периодических функций

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots\}.$$

В теории гильбертовых пространств такие системы функций называются *полными ортонормированными системами* (термин “полная” в применении к ортонормированной системе означает, что ее линейная оболочка всюду плотна в $L_2[-\pi, \pi]$).

Таким образом, согласно приведенной выше теореме, гильбертово пространство $L_2[-\pi, \pi]$ изоморфно комплексному пространству ℓ_2, причем изоморфизм можно задать отображением базисных векторов

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \mapsto (1, 0, \ldots),\ \cos t \mapsto (0, 1, 0, \ldots),\ \sin t \mapsto (0, 0, 1, 0, \ldots), \ldots$$

Здесь ситуация полностью аналогична случаю конечномерных евклидовых (унитарных) пространств: там у нас было “эталонное” координатное евклидово (унитарное) пространство $\mathbb{R}^n$ (соотв. $\mathbb{C}^n$), скалярное произведение в котором задавалось формулой $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ (соотв. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y}_k$), причем если V — еще какое-то евклидово (унитарное) n-мерное пространство, то любой выбор ортонормированного базиса в V определяет его изоморфизм с $\mathbb{R}^n$ (соотв. с $\mathbb{C}^n$).

Другой пример полной ортонормированной системы функций в $L_2[-\pi, \pi]$ можно получить, производя ортогонализацию последовательности мономов $\{1, t, t^2, \ldots\}$. Это определит еще один изоморфизм с координатным пространством ℓ_2.

Легко понять, что $L_2[-\pi, \pi] = H_0 \oplus H_1$ — ортогональная прямая сумма замкнутых подпространств четных H_0 и нечетных H_1 функций (точнее, классов эквивалентности функций). Пространства H_0 и H_1 сами являются гильбертовыми пространствами с полными ортонормированными системами $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos t, \cos 2t, \ldots\}$ и $\{\sin t, \sin 2t, \ldots\}$ соответственно. В частности, мы имеем изоморфизм гильбертовых пространств

$$\ell_2 \to H_1, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots) \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sin kt, \tag{59}$$

сохраняющий скалярные произведения (в частности, нормы векторов).

Напомним, что если $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — ортонормированный базис в n-мерном евклидовом пространстве V, то коэффициенты разложения произвольного вектора $\mathbf{v} \in V$ по нему даются равенствами $v_k = (\mathbf{v}, \mathbf{e}_k)$. Оказывается, что эти же формулы применимы для нахождения коэффициентов разложения вектора по полной ортонормированной системе в гильбертовом пространстве. Мы не будем здесь доказывать этот результат. Отметим лишь, что из него следует, что обратный к (59) изоморфизм $H_1 \to \ell_2$ задается следующим образом:

$$H_1 \ni f \mapsto \{x_k\} \in \ell_2, \quad \text{где } x_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt, \tag{60}$$

причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt. \tag{61}$$

Для функции $f \in H_1$ коэффициенты x_k, определяемые по формулам (60), называются *коэффициентами Фурье*, а *рядом Фурье* называют ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \sin\, kt$. Равенство (61) называется *равенством Парсеваля.* Оно выполняется для любой полной ортонормированной системы.

Задача 3.58. Найти в пространстве нечетных функций H_1 норму функции $f(t) = t$, рассматриваемой как функцию на отрезке $[-\pi, \pi]$, а также ее разложение в ряд Фурье. Выяснить смысл равенства Парсеваля для этого случая.

Решение. По формулам (60)

$$x_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin kt\,dt = -\frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} t\,d\cos kt = -\frac{1}{\pi k} t\cos kt \,|_{-\pi}^{\pi} +$$

$$+\frac{1}{\pi k^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kt\,d(kt) = \frac{(-1)^{k+1}2}{k}.$$

Значит,

$$t = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kt.$$

Таким образом, равенство $\|f\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$ дает нам следующее:

$$4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Тем самым мы получили формулу (Л. Эйлер, 1734)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

для суммы ряда из обратных квадратов натуральных чисел. ■

Рассмотрим бесконечную матрицу $A = (a_{ij})$, i, $j \in \mathbb{N}$, с матричными элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } |i-j| = 1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

В пространстве ℓ_2 она определяет ограниченный[42] линейный оператор, действующий на базисных векторах следующим образом:

$$A\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2,\ A\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{k-1} + \mathbf{e}_{k+1},\ k > 1.$$

Задача 3.59. Покажите, что при изоморфизме (59) оператор A переходит в оператор умножения на функцию $2\cos t$ в пространстве H_1.

Решение. Оператор A переходит в оператор φ, действующий на полной ортонормированной системе $\{\sin kt\}$ в гильбертовом пространстве H_1 по формулам

$$\varphi(\sin t) = \sin 2t,\ \ \varphi(\sin kt) = \sin(k+1)t + \sin(k-1)t,\ k > 1.$$

[42]Можно показать, что его норма равна 2.

Теперь результат следует из тригонометрического тождества

$$\sin(k+1)t + \sin(k-1)t = 2\cos t \sin kt. \quad \blacksquare$$

Комментарий. Этот пример поучителен тем, что у оператора A нет собственных векторов. Он показывает, что понятие спектра оператора в бесконечномерном случае должно быть модифицировано. При "правильном" определении спектра A он состоит из всех $\lambda \in [-2, 2]$, то есть заполняет целый отрезок (т.к. A, очевидно, самосопряжен, его спектральный радиус совпадает с операторной нормой).

Напомним (см. определение 3.46), что оператор называется ограниченным, если его норма ограничена, и неограниченным в противоположном случае. Выше мы доказали, что в конечномерном пространстве любой линейный оператор ограничен. Напомним, что доказательство этого факта опирается на компактность единичной сферы. В бесконечномерном нормированном пространстве единичная сфера уже не будет компактна, за подробностями отошлем интересующегося читателя к любому учебнику функционального анализа, например, [31]. Из некомпактности сферы следует, что существуют неограниченные операторы (на самом деле, в любом бесконечномерном пространстве существуют неограниченные операторы), причем многие чрезвычайно полезные операторы, например оператор дифференцирования, не будут ограниченными в "стандартных" нормах.

Задача 3.60. Докажите, что оператор дифференцирования не ограничен в пространстве $C^\infty[0;1]$ бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $[0;1]$ с нормой

$$\|f\|^2 = \int_0^1 f^2(t)\,dt.$$

Решение. Выберем сначала удобное множество векторов с единичной нормой. Имеем

$$\|\sqrt{2n+1}\,t^n\|^2 = (2n+1)\int_0^1 t^{2n}dt = 1.$$

Обозначим для удобства $a_n(t) := \sqrt{2n+1}\,t^n$. Как мы выяснили, $\|a_n\| = 1$. Теперь подействуем на элементы a_n оператором дифференцирования:

$$a_n'(t) = n\sqrt{2n+1}\,t^{n-1}.$$

Вычислим теперь норму a_n':

$$\|a_n'\|^2 = n^2(2n+1)\int_0^1 t^{2n-2}dt = \frac{n^2(2n+1)}{2n-1}.$$

И при $n \to \infty$ легко видеть, что $\|a_n'\| \to \infty$, а значит, оператор дифференцирования не ограничен. $\blacksquare$

Существование неограниченных операторов приводит, например, к тому, что нельзя переставлять линейный оператор и предел, то есть для неограниченного оператора A и сходящейся последовательности $\{b_n\}$, вообще говоря, $A \lim b_n \neq \lim(Ab_n)$. Более того, предел в правой части вообще не обязан существовать.

Задача 3.61. Приведите пример линейного оператора A и сходящейся последовательности $\{b_n\}$ такой, что последовательность $\{Ab_n\}$ не ограничена.

Решение. Продолжая пример из предыдущей задачи, рассмотрим последовательность $\{b_n\}$, где

$$b_n(t) := t^n.$$

Заметим, что $\|b_n\|^2 = \frac{1}{2n+1} \to 0$. То есть последовательность сходится к 0. Применив к этой последовательности (неограниченный, как мы выяснили) оператор дифференцирования, получим

$$b_n'(t) = nt^{n-1}.$$

И тогда $\|b_n'\|^2 = \frac{n^2}{2n-1}$, а эта последовательность уже не ограничена. ■

Таким образом, $A(\lim b_n) = 0$, но $\lim(Ab_n)$ — вообще не существует.

Комментарий. Неприятным следствием неограниченности оператора дифференцирования и вообще особенностью бесконечномерных пространств является то, что условия, при которых функциональный ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать, достаточно сложны. Вообще, многие трудности, с которыми читатель столкнется в курсе математического и функционального анализа, касающиеся вопросов сходимости, происходят именно из неограниченности в "стандартных нормах" полезного и хорошо знакомого оператора дифференцирования. Решать данную проблему приходится путем выбора подходящих норм и правильных пространств, между которыми действует оператор дифференцирования. Заинтересованному читателю посоветуем почитать литературу по пространствам Соболева и вообще функциональному анализу, например, [31], [25].

Отметим ещё одну проблему, возникающую для бесконечномерных пространств. А именно вопрос существования обратного оператора.

Определение 3.62. Оператор B называется обратным к линейному ограниченному оператору если $AB = BA = Id$.

Известная теорема Банаха (см. [31] стр. 225) утверждает, что если линейный непрерывный оператор обратим, то оператор A^{-1} также будет ограниченным. Важно отметить, что в отличии от конечномерных пространств для обратимости недостаточно инъективности.

Задача 3.63. Дан оператор $A : \ell_2 \to \ell_2$ заданный по формуле

$$A : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots),$$

где последовательность λ_i – ограничена по модулю и $\lambda_i \neq 0$. При каких условиях существует обратный оператор?

Решение. Легко видеть, что из ограниченности λ_i – следует ограниченность оператора A. Действительно, имеем

$$\|Ax\|^2 = \sup_{\|x\|\le 1} \sum \lambda_i^2 x_i^2 \le \sup_{\|x\|\le 1} \left(\sup_i |\lambda_i| \sum x_i^2 \right) = \sup |\lambda_i|.$$

Условие $\lambda_i \neq 0$ гарантирует нам инъективность оператора A. И понятно, что если оператор A^{-1} существует, то он должен задаваться по формуле

$$A^{-1} : (x_1, x_2, \dots) \mapsto \left(\frac{x_1}{\lambda_1}, \frac{x_2}{\lambda_2}, \dots \right),$$

так как свойство $AA^{-1} = Id$ должно выполняться на базисных векторах e_k. В таком случае, выпишем неравенства на норму оператора $A^{-1}x$ по аналогии с тем, как мы вычисляли $\|A\|$

$$\inf \frac{1}{|\lambda_i|} \le \|A^{-1}x\| \le \sup \frac{1}{|\lambda_i|}.$$

Из этого неравенства становится понятно, что если $\inf |\lambda_i| > 0$, то $\|A^{-1}\|$ – ограничена. Если же нет, имеем подполследовательность $\lambda_{i_j} \to 0$. И в таком случае для стандартного базиса пространства ℓ_2 из векторов e_k, имеем, что $\|A^{-1}(e_{i_j})\| = \frac{1}{|\lambda_{i_j}|} \to \infty$.

Таким образом, хотя оператор A^{-1} определен на базисных векторах, раз его норма бесконечна, по теореме Банаха он не может быть обратным к оператору A, следовательно оператор A не может быть обратимым при выполнении условия $\inf |\lambda_i| = 0$. ∎

Комментарий. Мы рекомендуем в качестве упражнения в явном виде построить пример элемента пространства ℓ_2 на котором оператор A^{-1} – не будет определен. Также отметим, что для рассматриваемых нами в последней задаче операторов легко построить пример такого оператора, что число обусловленности $\|A\|\|A^{-1}\| > 1$. И вообще, число обусловленности может быть сколь угодно велико.

Неформально отметим, что рассматриваемые операторы очевидно инъективны и "выглядят" сюръективными. Во всяком случае они сюръективны на базисных векторах. Но в бесконечномерных пространствах этого не достаточно, чтобы задать оператор на всем пространстве. И вообще, условие биективности достаточно трудно проверять, и есть достаточно много теорем дающих критерии обратимости операторов в бесконечномерных пространствах. Приведем в качестве примера следующее утверждение, которое читатели могут доказать самостоятельно

Теорема 3.64. *Если для линейного ограниченного оператора A действующего в нормированном пространстве E существует $m > 0$ такое что*

$$\forall x \in E : \quad \|Ax\| \ge m\|x\|,$$

то оператор A имеет непрерывный обратный.

3.7. Сходимости в бесконечномерных пространствах

Важную роль как в линейной алгебре, так и в функциональном анализе играет понятие сходимости. Цель настоящего раздела — привести основные примеры и определения различных типов сходимости.
Пусть $(V, \|\cdot\|)$ – произвольное вещественное векторное пространство V, оснащенное нормой $\|\cdot\|$. Пусть $\{x_n\}$ – последовательность векторов в этом пространстве. Напомним определение сходящейся последовательности.

Определение 3.65. Последовательность векторов $\{x_n\}$ будем называть сходящейся по норме $\|\cdot\|$, если существует такой вектор $x \in V$, что

$$\|x_n - x\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

В настоящем разделе нормы нас интересуют только в контексте сходимости. Легко понять, что, например, пропорциональные нормы определяют одно и то же множество сходящихся последовательностей. Это естественным образом порождает вопрос о классах эквивалентных норм относительно сходимости. Напомним определение 0.25.

Определение 3.66. Две нормы $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ в одном векторном пространстве V будем называть эквивалентными, если существуют такие положительные константы C_1, C_2, что выполняется соотношение

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1, \quad \forall x \in V. \tag{62}$$

Оставим читателю в качестве несложного упражнения проверку того, что свойство (62) действительно задает отношение эквивалентности на множестве норм.

Задача 3.67. Две нормы эквивалентны тогда и только тогда, когда множество сходящихся последовательностей относительно этих норм одинаково.

Решение. Пусть имеем две эквивалентные нормы $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$. Покажем что последовательность $\{x_n\}$ сходится или расходится в этих нормах одновременно. Действительно, пусть $\|x - x_n\|_1 \to 0$. Тогда по условию (62) имеем

$$0 \leq \|x - x_n\|_2 \leq C_2\|x - x_n\|_1 \to 0.$$

Следовательно и $\|x - x_n\|_2 \to 0$. Аналогично, если последовательность сходится во второй норме, то она будет сходиться и в первой.
Докажем теперь обратное. А именно, если имеем две неэквивалентные нормы, то существует последовательность, которая сходится в одной норме, а в другой — не сходится. Условие неэквивалентности норм равносильно существованию последовательности, ограниченной в одной норме и неограниченной в другой.
Рассмотрим единичный шар B_2 во второй норме. То есть множество

$$B_2 = \{x \in V | \|x\|_2 \leq 1\}.$$

Пусть имеем монотонно растущую во второй норме последовательность $\{y_n\} \subset B_2$, которая неограничена в первой норме. Выделим подпоследовательность

y_{n_k} такую, что $\frac{\|y_{n_k}\|_1}{\|y_{n_{k-1}}\|_1} > 2^k$. Рассмотрим последовательность $z_k := \frac{y_{n_k}}{2^k}$. Заметим, что эта последовательность искомая. В силу предположения, с одной стороны $\|z_k\|_1 \to \infty$, а с другой стороны $\|z_k\|_2 \to 0$. ■

Комментарий. На самом деле утверждение задачи 3.67 можно усилить. А именно — справедливо, что эквивалентные нормы задают одинаковую топологию в пространстве (то есть топологию, в которой в качестве базы выступают все открытые шары). Следующая задача покажет, что в конечномерных пространствах топология, допускающая нормировку пространства — единственная. А вот в бесконечномерных пространствах это уже будет не так.
Если V – конечномерное пространство, то оказывается, что с точки зрения сходимости все нормы одинаковы.

Задача 3.68. В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.

Решение. Рассмотрим единичный относительно первой нормы шар B_1 и заметим, что он является в силу леммы Гейне-Бореля (см. например [31]) компактным множеством, поскольку пространство V конечномерно. Норма $\|\cdot\|_2$, как функция на векторном пространстве V, является непрерывной функцией, а значит достигает на шаре B_1 минимального и максимального значения

$$m \le \|x\|_2 \le M, \quad \forall x : \|x\|_1 \le 1.$$

Отсюда получается неравенство (62), а значит все нормы действительно эквивалентны. ■

Комментарий.
В качестве следствия из предыдущей задачи получаем, что любое конечномерное нормированное пространство банахово. Действительно, если две нормы эквивалентны, то множества фундаментальных последовательностей относительно них совпадают. Очевидно, что полнота пространства $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|\mathbf{x}\| = \max_{1\le i\le n} |x_i|$ эквивалентна полноте $\mathbb{R}$ (которая известна из анализа). Значит, любая фундаментальная последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ в этом пространстве сходится к некоторому элементу $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, и этот элемент $\mathbf{x}$ будет также пределом последовательности $\{\mathbf{x}_n\}$ по любой другой норме.

Мы, конечно, в предыдущей задаче существенно использовали лемму Гейне-Бореля, которая справедлива только для конечномерных пространств. В бесконечномерном пространстве это уже не так.

Задача 3.69. Доказать, что в пространстве непрерывных функций $C[0;1]$ норма "супремум" не эквивалентна норме L_1.

Решение. Мы уже знаем, что эквивалентные нормы задают одинаковые сходимости. Значит достаточно привести пример последовательности функций, которые сходились бы в одной норме, а в другой – не сходились бы. Зададим последовательность функций f_n следующим образом. Функции $f_n(x)$ – кусочно-линейные. Носитель $supp f_n(x) = [0; \frac{1}{2n^2}]$, и значение $f_n(\frac{1}{n^2}) = n$. Получается "треугольная" функция. Легко понять, что по интегральной норме пространства L_1 сходимость есть $f_n(x) \to 0$. Но, конечно, по "супремумной" норме последовательность неограниченно растет. Значит, исходные нормы не могли быть эквивалентны. ■

Отметим ещё один подход к понятию сходимости, так называемую слабую сходимость.

Определение 3.70. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится к* $\{x\}$ *слабо*, если

$$\forall f \in V^*, f(x_n) \to f(x).$$

В конечномерном пространстве слабая сходимость не добавляет ничего нового.

Задача 3.71. Доказать, что в конечномерном пространстве слабая сходимость совпадает с сильной.

Решение. Докажем сначала, что из сильной сходимости всегда следует слабая. Действительно, пусть $\|x_n - x\| \to 0$. Справедливо неравенство $|f(x)| \leq \|f\|\|x\|$. Откуда получаем, что $|f(x_n - x)| \to 0$.
Доказательство в обратную сторону, конечно, опирается на конечномерность. Возьмем последовательность $\{x_n\}$, слабо сходящуюся к 0. Тогда для любого базисного элемента e_i справедливо $(e_i, x_n) \to 0$. Поскольку пространство конечномерно, получаем, что каждая компонентна последовательности векторов x_n при разложении по базису, стремится к нулю. Значит $x_n \to 0$ и по норме. Отсюда и следует искомое.
Доказательство для ненулевых векторов — оставим читателю в качестве упражнения. ■

А вот в бесконечномерных пространствах множество слабо сходящихся последовательностей, вообще говоря, больше, чем множество последовательностей, сходящихся по норме. Рассмотрим для начала стандартный базис в пространстве l_2, состоящий из векторов вида $e_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots)$, где δ_{lk} — символ Кронекера. Разумеется, векторы e_i образуют ортонормированный базис, так что в обычном смысле сходиться никак не могут.

Задача 3.72. Доказать, что последовательность e_i слабо сходится к нулю.

Решение. Для любого линейного функционала φ найдется такой элемент $a \in l_2$, что

$$\varphi(x) = (a, x).$$

Здесь $a = (a_1, a_2, \dots)$ — элемент l_2. Понятно, что $\varphi(e_i) = a_i$, но раз $a \in l_2$, значит, имеем $a_i \to 0$. ■

Немного усилив наши рассуждения, можно добиться в пространстве l_2 и большего.

Задача 3.73. Доказать, что слабое замыкание единичной сферы S^1 в пространстве l_2 это единичный шар.

Решение. Пусть $w \in l_2$ – произвольный элемент такой, что $\|w\| < 1$. В таком случае предъявим последовательность w_i, состоящую из элементов пространства l_2, имеющих единичную норму. Зафиксируем обозначения. А именно $w = (w^1, w^2, \dots)$, и положим $w_i = (w_i^1, w_i^2, \dots)$. В таком случае определим компоненты последовательности w_i следующим образом: $w_i^j := w^j$, для $j = 1 \dots i$, $w_i^{i+1} := \sqrt{1 - ((w^1)^2 + \dots + (w^i)^2)}$, а все остальные

компоненты последовательности w_i положим равными нулю. Легко понять, что $\|w_i\| = 1$. В то же самое время рассуждения, полностью повторяющие предыдущую задачу, показывают слабую сходимость $w_i \to w$.
Остается вспомнить, что для линейных функционалов в Гильбертовом пространстве справедливо неравенство $|f(x)| \le \|f\||x|$, а значит, если имеет место слабая сходимость $\{x_i\} \to x$, где $\|x_i\| \le 1$, то и $\|x\| \le 1$. А значит ничего более чем шар мы получить не можем. ■

Вопреки ожиданиям, в бесконечномерном нормированом пространстве слабое замыкание единичной сферы не всегда является шаром. Некоторые бесконечномерные банаховы пространства обладают так называемым свойством Шура – в них совпадают слабая и сильная сходимости. В частности, справедлива следующая теорема, с доказательством которой можно познакомиться в [25] (стр. 292, теорема 4).

Теорема 3.74 (Теорема Шура)**.** *В пространстве l_1 слабая сходимость совпадает со сходимостью по норме.*

Обратим внимание читателя, знакомого с топологией, на важное следствие из этой теоремы. Топология, порожденная нормой (сильная топология) и топология, порожденная линейными функционалами (слабая топология) различны, то есть запас открытых множеств в них существенно различается. Однако этого недостаточно для того, чтобы топологии порождали разную сходимость, не очевидным примером чего и является приведенная нами теорема Шура.

Пусть V — конечномерное евклидово (или эрмитово) пространство, $\mathcal{L}(V)$ — пространство линейных операторов на нем. Последовательность $\{A_n\}_n,\ A_n \in \mathcal{L}(V)$ сходится по операторной норме к $A \in \mathcal{L}(V)$, если

$$\|A_n - A\| \to 0, \ \ n \to \infty.$$

Заметим, что в силу Задачи 3.71 указанная сходимость равносильна поэлементной сходимости матриц операторов (в произвольном базисе). Мы знаем (см. Комментарий к Задаче 3.68), что конечномерное нормированное пространство полно: любая фундаментальная последовательность его элементов сходится к некоторому его элементу.
Пусть дан степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ с комплексными коэффициентами и радиусом сходимости $R > 0$. Тогда он абсолютно сходится в каждой точке $z \in \mathbb{C},\ |z| < R$. Кроме того, он равномерно сходится на компактах $K \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ и определяет аналитическую функцию f внутри круга сходимости.
Пусть A — линейный оператор на конечномерном пространстве V такой, что $\|A\| < R$. Мы хотим показать, что последовательность $\{\sum_{k=0}^{n} c_k A^k\}_n$ его частичных сумм фундаментальна.
В самом деле, из условий следует, что числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|\|A\|^k$ сходится, и по критерию Коши $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall\, p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k|\|A\|^k < \varepsilon,$$

откуда (используя свойство операторной нормы $\|A^k\| \leq \|A\|^k$) получаем

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k A^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|c_k A^k\| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k| \|A^k\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k| \|A\|^k < \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность частичных сумм $\sum_{k=0}^{n} c_k A^k \in \mathcal{L}(V)$ фундаментальна, и в силу полноты пространства $\mathcal{L}(V)$ сходится к некоторому элементу из $\mathcal{L}(V)$, который естественно обозначить $f(A)$.
Например, для любого линейного оператора A в конечномерном пространстве L (и для любой матрицы конечного порядка) определена его экспонента $\exp A \in \mathcal{L}(V)$.

Замечание 3.75. Заметим, что если $A' = S^{-1}AS$, то $\exp A' = S^{-1}(\exp A)S$. В самом деле, для многочлена P равенство $P(A') = S^{-1}P(A)S$ очевидно. Пусть $P_n(t) := \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$. Тогда $P_n(A') \to \exp(A')$. Покажем, что также $P_n(A') = S^{-1}P_n(A)S \to S^{-1}\exp(A)S$. Действительно,

$$\|S^{-1}P_n(A)S - S^{-1}\exp(A)S\| \leq \|S^{-1}\| \|P_n(A) - \exp(A)\| \|S\|.$$

4 Группы и алгебры

Не имея намерения подменять полноценные учебные курсы, мы хотели бы рассказать о некоторых вопросах алгебры, которые существенно дополняют те разделы алгебры и линейной алгебры, которые обычно рассказывают на первых курсах университетов. Далее мы дадим более подробные библиографические указания, но сразу хотели бы обратить внимание читателя на следующие замечательные учебники. По теории групп мы рекомендуем обратить внимание на книгу [26] а тем, кто только начинает свое знакомство с теорией групп, рекомендуем уделить замечательной книге [2]. По конечномерным алгебрам мы ориентируемся на книгу [24]. По алгебрам Ли отметим классический учебник [45], а по теории представлений одна из самых полных (хотя и не простая) – книга [28].

4.1. Графы Кэли

За более систематическим изложением отсылаем читателя к книге [38] и лекциям [30]. Тем, кто заинтересуется прикладными задачами связанными с графами Кэли, можем порекомендовать например работу [48].
Пусть $G =< X >$ – группа, порожденная конечным числом элементов $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. . Отметим сразу, что группа может порождаться разными наборами элементов и граф Кэли при этом будет меняться. Ниже мы приведем некоторые примеры.

Определение 4.1. Будем называть графом Кэли для данного копредставления группы $G =< X|R >$ ориентированный граф $Caley(G)$, в котором вершины отождествлены с элементами группы, а ребра строятся следующим образом. Из вершины a в вершину b ведёт ребро с меткой x_i если $ax_i = b$. Будем говорить также ребро цвета x_i.

Сразу из определения становится ясен алгебраический смысл графа. А именно, возьмем вершины графа a, b и какой-нибудь непрерывный путь из a в b. Если мы выпишем метки рёбер в том порядке в каком они встречаются, с учётом их направления (если мы проходим ребро по направлению, то пишем соответствующую ему метку x_i, а если против направления, то x_i^{-1}), мы получим слово (элемент группы) ω такое что $a\omega = b$. Причем если мы в нашем пути не имеем одного и того же ребра два раза подряд, то слово у нас получится несократимым. В частности, если выбрать какой-нибудь замкнутый цикл и прочитать слово, которое на нем написано (учитывая направление стрелок), мы получим или соотношение, или следствие из соотношений.
Подчеркнем, что граф Кэли, конечно, зависит от системы порождающих. Ниже мы сформулируем теорему о том, как связаны графы Кэли для различных копредставлений одной группы.
Сразу отметим несколько очевидных свойств графа Кэли Г:

- Граф Г – связен;
- Граф Г вершинно-транзитивен, то есть для любых двух вершин a, b существует автоморфизм f графа Кэли, сохраняющий метки ребер.

Задача 4.2. Построить граф Кэли для аддитивной группы целых чисел $\mathbb{Z}$.

Решение Построение графа Кэли для группы $\mathbb{Z} =< 1 >$, не составляет труда, поскольку образующая с меткой "$1''$ просто соединяет соседние целые числа. Гораздо интереснее посмотреть на граф Кэли с образующими $a = 2, b = 3$.

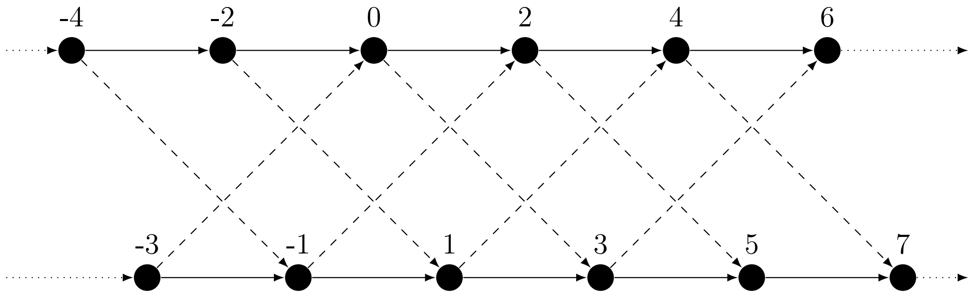

Рис. 1: Группа $\mathbb{Z} =< 2, 3 >$

Отметим, что если "прочитать" слова написанные на гранях, мы получим соотношения $ab = ba$ и $a^3 \times b^{-2} = 0$, что соответствует понятому соотношению $2 \times 3 - 3 \times 2 = 0$.■
Комментарий. Интересным вопросом является следующий. Может ли быть графом Кэли некоторой группы – дерево? Первым примером является, конечно, группа целых чисел. В общем же случае, группа граф Кэли которой – дерево, называется свободной. Термин "свобода" нужно понимать не в политическом смысле, а как свободу от соотношений между элементами группы. Такие группы являются крайне важными объектом в комбинаторной теории групп.
Далее, при изображении графов мы будем игнорировать направление ребер в случаях, когда ориентация легко восстанавливается. Также, кратные ребра (то есть когда соответствующая образующая имеет порядок 2) обычно рисуют как одно ребро. Именно в этом смысле нужно понимать следующий граф Петерсона, где короткие ребра понимаются как кратные[43].

Задача 4.3. Граф Петерсона является вершинно-транзитивным, но не является графом Кэли ни для какой группы.

Решение; Понятно, что такой граф задается образующими x и a, где $x^5 = a^2 = e$. С учетом того, в графе 10 вершин, можно было бы перебрать все группы из 10 элементов и доказать, что ни у одной из них нет такого графа Кэли. Но мы пойдем более "технологичным" путем. Ясно, что ориентацию вершин можно задать несколькими способами, однако решение будет идентичн ым. Одна из ориентаций дает нам соотношения $axa = x^3$ и $x = ax^2a$. Откуда получаем, подставляя одно в другое, что $a^2x^2a^2 = x^3$, значит раз $a^2 = e$, имеем $x^2 = x^3$, значит $x = e$, чего быть не может, поскольку в группе должно быть 10 элементов. ■

[43]Источник иллюстраций – Wikipedia.

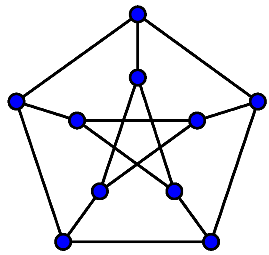

Рис. 2: Граф Петерсона

В дальнейшем нам пригодится такие важные характеристики графов, как расстояние и диаметр.

Определение 4.4. Будем называть *расстоянием* между вершинам a и b графа длину минимального пути (без учета ориентации ребер) из a в b. Максимальное расстояние между вершинами для конечных графов будем называть *диаметром* графа.

Задача 4.5. Дан деревянный куб с пронумерованными вершинами. Какого минимального количества поворотов на $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{2\pi}{3}$ вокруг осей вращения куба достаточно чтобы из одного положения другое?

Решение. Начнём с того, что группа вращений куба изоморфна группе перестановок S_4. В самом деле, любая перестановка больших диагоналей куба задает некоторый поворот, и обратно любой поворот задается некоторой перестановкой диагоналей. Интересующие нас повороты – это по сути образующие группы S_4 порядка 4 (повороты на $\frac{\pi}{2}$) и 3 (повороты на $\frac{2\pi}{3}$). Так что нашу задачу можно переформулировать следующим образом. Каково минимальное (по ребрам) расстояние между двумя произвольными вершинами графа Кэли с указанными образующими. В силу вершинной транзитивности нашего графа, достаточно проверять расстояние от вершины, соответствующей тождественной перестановке. В данном случаем граф Кэли достаточно несложен и легко рисуется, откуда получаем что минимальное необходимое количество поворотов равно 3. ■

Комментарий. На самом деле конструкция предложенная нами в предыдущей задаче очень важная. По сути, граф Кэли дает нам возможность найти алгоритм (и найти оценку необходимого количества шагов) поиска для двух данных элементов группы a, b слова минимальной длины ω такого, что $a\omega = b$. Эти соображения оказываются чрезвычайно важными например в теории алгоритмов (ниже мы укажем приложение к задаче сортировки массива). Но есть применения и, скажем, к головоломкам. Так, *числом бога* для головоломки называют минимальное необходимое количество действий достаточных для того, чтобы решить головоломку из любого изначального состояния. Например для кубика Рубика, это число равно 20. Доказательство

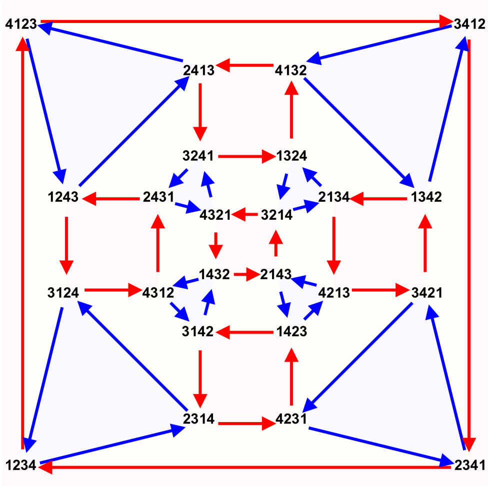

Рис. 3: Граф Кэли для группы S_4

этого факта опирается на серьёзные вычисления, которые стали возможными совсем недавно, с появлением суперкомпьютеров. Подробнее об этом можно прочитать в [49]. Хочется отметить, что вычисление диаметра графа Кэли оказывается нетривиальной задачей даже для "детского" кубика $2 \times 2 \times 2$, про что можно прочитать в работе [48].

Задача 4.6. Найти диаметр графа Кэли группы S_n порожденной транспозициями вида $(i\ i+1)$.

Решение. В решении нам конечно нужно проверить и корректность условия, а именно показать что любая перестановка раскладывается в произведение транспозиций указанного вида. Проверку того, что ни одну из транспозиций убрать нельзя – оставляем читателю в качестве упражнения.
Пусть имеем перестановку $\sigma \in S_n$. Будем называть *числом беспорядков* количество упорядоченных пар $(i, j), i < j$ таких, что $\sigma(i) > \sigma(j)$. Понятно, что умножение на транспозицию вида $(i\ i+1)$ меняет число беспорядков на 1. Пусть пара (i, j) – такая что j – максимально возможное. Заметим, что у перестановки $(j\ j+1) \circ \sigma$ количество беспорядков на 1 меньше чем у перестановки σ. Мы всегда можем повторить ту же процедуру, если количество беспорядков не нулевое. По индукции получаем, что в результате мы сведем всё к тождественной перестановке. Теперь вычислим максимальное количество необходимых действий. Больше всего беспорядков в перестановке вида $\sigma(j) = n - j$ и равно $\frac{n(n-1)}{2}$, что и является диаметром графа Кэли.■

Комментарий. Внимательный читатель сразу поймет, что диаметр такого графа Кэли это ни что иное как максимальное число шагов в сортировке "пузырьком" массива из n элементов. Конечно, подобная интерпретация годится и для других алгоритмов. Таким образом известный вопрос

о количестве минимально необходимых операций для сортировки массива сводится к вопросу поиска минимального диаметра графа Кэли в зависимости от выбранной системы порождающих. Разумеется, мы тут полностью игнорируем такие вопросы как количество необходимой памяти и разной затратности операций. За соответствующими деталями отсылаем читателя к специализированной литературе.
Разговаривая о графах Кэли, нельзя не упомянуть и некоторые их геометрические свойства. Например для конечных групп планарными являются только графы для конечных подгрупп группы $SO(3)$ (теорема Машке [50]). Пример конечной группы с непланарным графом Кэли предлагаем читателю привести самостоятельно. Интерес представляет и наличие в графе гамильтонова цикла, то есть такого цикла, который проходит по все вершинам ровно один раз. Группы в которых есть гамильтонов цикл мы будем называть гамильтоновыми.

Задача 4.7. Доказать, что у группы диэдра D_n есть минимальный граф Кэли, который является гамильтоновым.

Под минимальным, мы понимаем граф для системы образующих, из которой нельзя ничего убрать.

Решение. Для решения достаточно подобрать удобную систему образующих. Выберем естественную систему образующих из симметрии τ поворо-

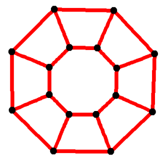

Рис. 4: Группа диэдра D_8

та многоугольника на угол $\frac{2\pi}{n}$. Тогда граф Кэли представляет из себя два многоугольника, у которых последовательно соединены вершины. То есть выполняется (легко проверяемое) соотношение $\tau\phi\tau = \phi^{-1}$. Так что гамильтонов цикл леко предъявить:

$$\phi \to \dots \to \phi^n = id \to \tau \to \tau\phi \to \dots \to \tau\phi^{n-1} \to \phi,$$

что и завершает решение задачи. ■

Комментарий. Легко придумать и другие гамильтоновы циклы в таком графе. Однако, если взять группу перестановок S_n, задача становится уже менее простой. Однако отметим, что если породить группу перестановок транспозицией и циклом максимальной длины, гамильтонов цикл также может быть построен ([51], лемма 3). В общем же случае, до сих пор неизвестно, каждый ли граф Кэли даже для группы перестановок S_n содержит в себе гамильтонов цикл (это предположение называется гипотезой Ловаса). Впрочем известно, что при $|G| \to \infty$ вероятность существования гамильтонова цикла стремится к единице. Зато известно, что вершинно-транзитивности для существования гамильтонова цикла – не достаточно. Например упомянутый нами выше граф Петерсона гамильтонова цикла в себе не содержит.

Задача 4.8. Если у графов групп $A =< x_i >, B =< y_j >$, есть графы кэли с гамильтоновым циклом, то и у графа группы $A \times B$ тоже.

Решение. Для удобства будем обозначать элементы группы $A =$ через a_i, причем гамильтонов путь $e = a_0 \to a_1 \to \dots a_n \to e$. И аналогично для группы B. Поясним, как устроен граф Кэли для $A \times B$. Между вершинами (a, b) и (a', b') имеется ребро с меткой (x_i, y_j), если $ax_i = a', by_j = b'$. В таком случае, с учетом наших обозначений у нас будут ребра между (a_i, b_j) и $(a_{i'}, b_{j'})$ если $|i - i'| + |j - j'| = 1$.
Понятно, что при фиксированном $b \in B$ множество элементов вида (a, b) – отождествляется с элементами группы A и в таком "слое" у нас будет гамильтонов цикл. Это и дает ключ к построению гамильтонова цикла во всей группе

$$\begin{aligned}(a_0, b_0) \to (a_1, b_0) \to \dots \to (a_n, b_0) \to (a_n, b_1) \to \\ \to (a_{n-1}, b_1) \to \dots \to (a_n, b_n) \to (a_0, b_0).\end{aligned}$$

Отметим, что "склеивать" циклы можно и другими способами.■

Комментарий. Отсюда, конечно, получается что например в абелевых группах (кроме "паталогического" случая группы $\mathbb{Z}_2$) обязательно есть граф Кэли с гамильтоновым циклом. Можно доказать, что на самом деле любой граф Кэли для абелевой группы будет гамильтоновым. Подробнее о гамильтоновых путях и циклах в графах Кэли можно прочесть например в работе [51].

4.2. Кватернионы

Кватернионы — очень интересный математический объект и, кроме того, имеет многочисленные применения в физике. О романтической истории открытия кватернионов (и других алгебр с делением) можно прочитать например в работе [8]. Далее мы опишем применение кватернионов к задаче описания вращений трехмерного пространства (см. стр. 145 и далее). Заинтересовавшемуся читателю сразу порекомендуем прочитать [28], § 4, [47], § 8, а также брошюры [4], [44] и книгу [24].
Напомним (см., например, [15]), что *алгебра кватернионов* $\mathbb{H}$ является алгеброй над $\mathbb{R}$ с базисом $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ со следующей таблицей умножения:

$\times$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$-\mathbf{1}$

(63)

Таким образом, $\mathbf{1}$ — "обычная" единица (нейтральный элемент относительно умножения). Из соотношений (63) следует, что данная алгебра ассоциативна[44], но не коммутативна; более того, любой ее ненулевой элемент имеет мультипликативный обратный, то есть $\mathbb{H}$ — *алгебра с делением* (= некоммутативное поле, называемое также *телом*).

Отметим, что кватернионы дают простой, но нетривиальный пример неабелевой группы.

Задача 4.9. Докажите, что $\mathbb{Q}_8 := (\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}, \times)$ является группой и постройте ее граф Кэли.

Решение. Во-первых, из соотношений (63) следует, что множество $\mathbb{Q}_8$ замкнуто относительно операции умножения. Во-вторых, свойство ассоциативности для каждого набора из трех элементов легко проверяется непосредственно с помощью соотношений (63) (или может быть выведено из ассоциативности алгебры $\mathbb{H}$). В-третьих, элемент $\mathbf{1}$ играет роль единичного элемента. Наконец, $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}$, значит, $\mathbf{i}^{-1} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{j}^{-1} = -\mathbf{j}$, $\mathbf{k}^{-1} = -\mathbf{k}$, $-\mathbf{1}^{-1} = -\mathbf{1}$, откуда следует существование обратного для каждого элемента $\mathbb{Q}_8$.

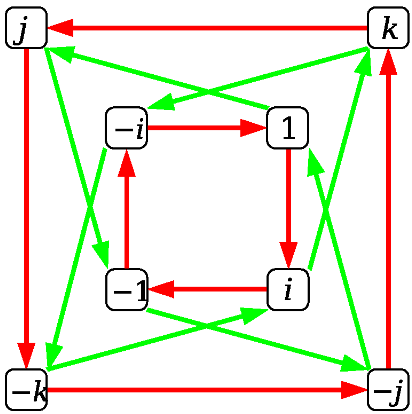

Рис. 5: Граф Кэли для группы $\mathbb{Q}_8 =< i, j >$

Комментарий. Хотя группа $\mathbb{Q}_8$ сама по себе неабелева, все ее собственные подгруппы абелевы и даже циклические (это единственная неабелева p-группа с таким свойством). Для тех, кто знаком с теорией групп, отметим, что такие группы называются *локально циклическими*. Кроме того, все подгруппы $\mathbb{Q}_8$ являются нормальными.

---

[44]Заметим, что ассоциативность умножения в алгебре следует из ассоциативности умножения базисных векторов.

Таким образом, каждый кватернион $\mathbf{x}$ однозначно представляется в виде

$$\mathbf{x} = x_0\mathbf{1} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, \quad x_0,\, x_1,\, x_2,\, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Если при этом $x_0 = 0$, то кватернион $\mathbf{x}$ называется *чисто мнимым*. Чисто мнимые кватернионы образуют трехмерное подпространство в $\mathbb{H}$.
Соотношения (63) при условии ассоциативности эквивалентны другой системе:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{ij} + \mathbf{ji} = \mathbf{jk} + \mathbf{kj} = \mathbf{ki} + \mathbf{ik} = \mathbf{0},$$

которая, в свою очередь, эквивалентна тождеству (ср. задачу 3.16):

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})^2 = -(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\mathbf{1} \quad \forall\, a_1,\, a_2,\, a_3 \in \mathbb{R}. \tag{64}$$

Более общо, с использованием приведенных выше соотношений легко проверить, что произведение чисто мнимых кватернионов $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ есть

$$-(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\mathbf{1} + \tag{65}$$

$$+(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k},$$

то есть выражается через скалярное $(\mathbf{a},\, \mathbf{b})$ и векторное $[\mathbf{a},\, \mathbf{b}]$ произведения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если считать базис $\{\mathbf{i},\, \mathbf{j},\, \mathbf{k}\}$ в пространстве чисто мнимых кватернионов правым ортонормированным.
Кватернионы были открыты У. Р. Гамильтоном в 1843 году в результате попыток найти многомерный аналог комплексных чисел, содержащий более одной мнимой единицы. Их место в математике показывает следующая теорема Фробениуса [40].

Теорема 4.10. *Любая конечномерная ассоциативная алгебра с делением над полем действительных чисел изоморфна одной из алгебр* $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *или* $\mathbb{H}$.

Задача 4.11. Построить инъективный гомоморфизм $\psi\colon \mathbb{H} \to \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ алгебры кватернионов $\mathbb{H}$ в алгебру комплексных матриц $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ (гомоморфизм алгебр над $\mathbb{R}$).

Решение. Пользуясь теми же идеями, что и в задаче 1.11, можно получить представление $\mathbb{H}$ вещественными 4×4-матрицами. В то же время произвольный кватернион $\mathbf{x}$ можно однозначно представить в виде $z_1\mathbf{1} + z_2\mathbf{j}$, где z_1, z_2 — комплексные числа. Легко проверить, что тем самым $\mathbb{H}$ превращается в двумерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ с базисом $\{\mathbf{1},\, \mathbf{j}\}$. Отметим, что $\mathbb{H}$ *не является* алгеброй над $\mathbb{C}$, поскольку, например, $\mathbf{j}z = \overline{z}\mathbf{j}$, где $z \in \mathbb{C}$.
Легко проверить, что кватернионы перемножаются по формуле

$$(w_1\mathbf{1} + w_2\mathbf{j})(z_1\mathbf{1} + z_2\mathbf{j}) = (w_1z_1 - w_2\overline{z}_2)\mathbf{1} + (w_1z_2 + w_2\overline{z}_1)\mathbf{j}, \tag{66}$$

где $w_k,\, z_k \in \mathbb{C}$.
Если мы умножаем кватернионы на комплексные числа слева, то, чтобы умножение на кватернион $\mathbf{x}$ определяло бы на $\mathbb{H}$ $\mathbb{C}$-линейный оператор, умножать на $\mathbf{x}$ нужно справа. Действительно, если, напротив, $\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := \mathbf{xy}$, где $\mathbf{y} \in \mathbb{H}$, то $\varphi_{\mathbf{x}}(z\mathbf{y}) = = \mathbf{x}z\mathbf{y} \neq z\mathbf{xy} = z\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ для общего $z \in \mathbb{C}$. Таким образом, определим $\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := \mathbf{yx}$. Проверим, что

$$\varphi_{\mathbf{x}}\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

— $\mathbb{C}$-линейный оператор. Действительно, во-первых,

$$\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}+\mathbf{t}) = (\mathbf{y}+\mathbf{t})\mathbf{x} = \mathbf{y}\mathbf{x}+\mathbf{t}\mathbf{x} = \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})+\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$$

(здесь мы использовали дистрибутивность сложения относительно умножения в $\mathbb{H}$) и, во-вторых,

$$\varphi_{\mathbf{x}}(z\mathbf{y}) = (z\mathbf{y})\mathbf{x} = z(\mathbf{y}\mathbf{x}) = z\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\ \forall\, z\in\mathbb{C}.$$

Найдем матрицу $A_{\mathbf{x}}$ оператора $\varphi_{\mathbf{x}}$, где $\mathbf{x} = z_1\mathbf{1}+z_2\mathbf{j}$, в базисе $\{\mathbf{1},\mathbf{j}\}$. Из соотношений

$$\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}) = \mathbf{x} = z_1\mathbf{1}+z_2\mathbf{j} \quad \text{и} \quad \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{j}) = \mathbf{j}(z_1\mathbf{1}+z_2\mathbf{j}) = -\overline{z}_2\mathbf{1}+\overline{z}_1\mathbf{j}$$

получаем

$$A_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z}_2 \\ z_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, умножение $\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}\mathbf{x}$, $\mathbf{y} = w_1\mathbf{1}+w_2\mathbf{j}$ в терминах матриц запишется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z}_2 \\ z_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1w_1-\overline{z}_2w_2 \\ z_2w_1+\overline{z}_1w_2 \end{pmatrix}, \quad \text{ср. (66).}$$

Заметим, что

$$\varphi_{\mathbf{t}}(\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})) = \varphi_{\mathbf{t}}(\mathbf{y}\mathbf{x}) = (\mathbf{y}\mathbf{x})\mathbf{t} = \mathbf{y}(\mathbf{x}\mathbf{t}) = \varphi_{\mathbf{x}\mathbf{t}}(\mathbf{y}),$$

то есть $\varphi_{\mathbf{t}}\circ\varphi_{\mathbf{x}} = \varphi_{\mathbf{x}\mathbf{t}}$. То есть в терминах матриц

$$A_{\mathbf{t}}A_{\mathbf{x}} = A_{\mathbf{x}\mathbf{t}}. \tag{67}$$

Мы видим, что отображение

$$\rho\colon \mathbb{H}\to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}), \quad \rho(\mathbf{x}) = A_{\mathbf{x}}$$

является не гомоморфизмом, а антигомоморфизмом (произведение элементов переходит в произведение образов в обратном порядке) колец. Чтобы получить гомоморфизм, заменим матрицы $A_{\mathbf{x}}$ на $A_{\mathbf{x}}^T$, тогда (67) превратится в $A_{\mathbf{x}}^TA_{\mathbf{t}}^T = A_{\mathbf{x}\mathbf{t}}^T$, то есть

$$\psi\colon \mathbb{H}\to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}), \ \psi(\mathbf{x}) := A_{\mathbf{x}}^T$$

является искомым гомоморфизмом алгебр над $\mathbb{R}$.
Таким образом, алгебру $\mathbb{H}$ мы можем отождествить с подалгеброй в $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ так, что роль базисных кватернионов $\{\mathbf{1},\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ играют соответственно матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Комментарий. Таким образом, в задаче построен инъективный гомоморфизм (то есть вложение)

$$\psi\colon \mathbb{H}\to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$$

алгебры кватернионов в алгебру комплексных матриц, который кватерниону $\mathbf{x} = z_1\mathbf{1} + z_2\mathbf{j}$ сопоставляет матрицу

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}. \tag{68}$$

Его можно рассматривать как аналог вложения $\mathbb{C} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, построенного в задаче 1.11. Например, посмотрим, что является кватернионным аналогом гомоморфизма групп (14).

Определим *модуль* $|\mathbf{x}|$ кватерниона $\mathbf{x} = x_0\mathbf{1} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$ как неотрицательное число, равное $\sqrt{\mathbf{x}\overline{\mathbf{x}}} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, где $\overline{\mathbf{x}} := x_0\mathbf{1} - x_1\mathbf{i} - x_2\mathbf{j} - x_3\mathbf{k}$ — *сопряженный* к $\mathbf{x}$ кватернион ($\mathbf{x} \mapsto \overline{\mathbf{x}}$ — аналог операции комплексного сопряжения). Заметим, что $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \;\Rightarrow\; |\mathbf{x}| > 0$. Легко проверить, что

$$|\mathbf{x}\mathbf{y}| = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \quad \forall \mathbf{x},\, \mathbf{y} \in \mathbb{H},$$

поэтому сопоставление ненулевому кватерниону его модуля, $\mathbf{x} \mapsto \mapsto |\mathbf{x}|$, определяет гомоморфизм группы $\mathbb{H}^*$ ненулевых кватернионов с операцией умножения в группу $\mathbb{R}_+$ положительных действительных чисел тоже с операцией умножения,

$$\mathbb{H}^* \to \mathbb{R}_+.$$

Ядро построенного гомоморфизма (= полный прообраз $1 \in \mathbb{R}_+$) есть подгруппа группы $\mathbb{H}^*$, состоящая из кватернионов, модуль которых равен единице. Ее стандартное обозначение $\mathrm{Sp}(1)$. Это — кватернионный аналог группы $\mathrm{U}(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, только в отличие от $\mathrm{U}(1)$ группа $\mathrm{Sp}(1)$ некоммутативна. Ограничение ψ на $\mathrm{Sp}(1)$ определяет изоморфизм последней группы с группой комплексных матриц вида (68) с единичным определителем, которая обозначается $\mathrm{SU}(2)$ (обозначение происходит от слов *special unitary* group, так как это в точности унитарные матрицы порядка 2 с единичным определителем). Таким образом, аналогом гомоморфизма (14) является гомоморфизм (изоморфизм) групп

$$\mathrm{Sp}(1) \to \mathrm{SU}(2).$$

Матрица (68) имеет определитель $1 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, последнее уравнение определяет трехмерную сферу единичного радиуса в $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$, то есть "топологически" $\mathrm{SU}(2)$ является трехмерной сферой (аналог того, что $\mathrm{U}(1)$ — единичная окружность в $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$).

Группа $\mathrm{SU}(2)$ тесно связана с группой $\mathrm{SO}(3)$ вращений трехмерного евклидова пространства, а именно, существует сюръективный гомоморфизм групп $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ с ядром $\pm E$ (таким образом, топологически $\mathrm{SO}(3)$ представляет собой трехмерное вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^3$). Интересно отметить, что рассматривавшаяся выше группа кватернионов $\mathbb{Q}_8 \subset \subset \mathrm{SU}(2)$ является прообразом подгруппы порядка 4 в $\mathrm{SO}(3)$, неединичными элементами которой являются повороты на углы π вокруг трех взаимно перпендикулярных осей. Подробнее об этом гомоморфизме, имеющем тесную связь с теорией спина, можно почитать, например, в [35], ч. 2, § 11.

4.3. Кватернионы и вращения трехмерного пространства

Перейдем теперь к применению кватернионов для описания вращений трехмерного пространства. Напомним (см. стр. 140 и далее), что кватернион q называется *чисто мнимым*, если $\overline{q} = = -q$, где черта обозначает сопряжение. Через $\mathbb{H}_0$ обозначим подпространство чисто мнимых кватернионов в $\mathbb{H}$. Мы отождествим его с евклидовым пространством $\mathbb{R}^3$, считая базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ правым ортонормированным (в частности, скалярный квадрат чисто мнимого кватерниона q равен $q\overline{q}$).

Пусть $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$ — два чисто мнимых кватерниона. Мы уже знаем (см. (65)), что их произведение $\mathbf{vw}$ выражается через скалярное и векторное произведение векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ следующим образом:

$$\mathbf{vw} = -(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{1} + [\mathbf{v}, \mathbf{w}].$$

Отметим, что $\mathbf{vw} \in \mathbb{H}_0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \perp \mathbf{w}$, причем в последнем случае $\mathbf{vw} = -\mathbf{wv}$.

Легко видеть, что произвольный $q \in \mathbb{H}$, $|q| = 1$ можно представить в виде $q = \mathbf{1}\cos\varphi + \mathbf{v}\sin\varphi$, где $\mathbf{v} \in \mathbb{H}_0$, $|\mathbf{v}| = 1$. Для таких кватернионов $q^{-1} = \overline{q}$. Напомним, что кватернионы единичной длины образуют группу $\mathrm{Sp}(1)$ по умножению, которая гомеоморфна[45] сфере S^3, состоящей из единичных векторов в $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$.

Пусть теперь $\mathbf{w} \in \mathbb{H}_0$, $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$. Тогда

$$q\mathbf{w} = \mathbf{w}\cos\varphi + [\mathbf{v}, \mathbf{w}]\sin\varphi. \tag{69}$$

Геометрический смысл последнего равенства заключается в том, что умножение на единичный кватернион q вектора $\mathbf{w}$ слева при $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$ отвечает повороту $\mathbf{w}$ на угол φ вокруг оси $\mathbf{v}$ в пространстве $\mathbb{H}_0$ (против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора $\mathbf{v}$).

Недостатком полученного представления поворота как умножения слева на кватернион является то, что оно работает только при условии $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$ (иначе $q\mathbf{w}$ уже не будет чисто мнимым, то есть мы выйдем за пределы пространства $\mathbb{H}_0$). Поэтому вместо умножения на единичный кватернион q рассмотрим сопряжение α_q с помощью него.

Задача 4.12. Если $|q| = 1$, то преобразование

$$\alpha_q \colon \mathbb{H}_0 \to \mathbb{H}_0, \quad \alpha_q(\mathbf{w}) = q\mathbf{w}q^{-1}, \ \ \mathbf{w} \in \mathbb{H}_0$$

является вращением евклидова пространства $\mathbb{H}_0 = \mathbb{R}^3$, причем кватернионы $\pm q$ определяют одно и то же вращение.

Решение. Проверим, что из $\mathbf{w} \in \mathbb{H}_0$ следует $\alpha_q(\mathbf{w}) \in \mathbb{H}_0$. В самом деле,

$$\overline{\alpha_q(\mathbf{w})} = \overline{q\mathbf{w}\overline{q}} = q\,\overline{\mathbf{w}}\,\overline{q} = -q\mathbf{w}\overline{q} = -\alpha_q(\mathbf{w}).$$

[45] Гомеоморфизмом называю непрерывное биективное отображение, обратное к которому также непрерывно.

Линейность α_q очевидна. Кроме того,

$$|\alpha_q(\mathbf{w})| = |q\mathbf{w}\overline{q}| = |q||\mathbf{w}||\overline{q}| = |\mathbf{w}|,$$

поэтому $\alpha_q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ является ортогональным преобразованием.
В ортонормированном базисе $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ преобразование α_q имеет ортогональную матрицу A_q. Функция $f(q) = \det A_q$ является непрерывной функцией на единичной сфере от аргумента $q \in S^3 \subset \mathbb{H}$, принимающей значения ± 1. Так как сфера S^3 связна, то эта функция — константа. Причем она принимает значение $+1$, поскольку $f(\mathbf{1}) = 1$. Из задачи 3.27 мы знаем, что такое преобразование является вращением вокруг некоторой оси. ■

Задача 4.13. Доказать, что α_q, где $q = \mathbf{1}\cos\varphi + \mathbf{v}\sin\varphi$, $|\mathbf{v}| = 1$, является вращением пространства $\mathbb{R}^3$ на угол 2φ вокруг оси $\mathbf{v}$.

Решение. Заметим, что $q\mathbf{v} = \mathbf{v}q$, откуда

$$\alpha_q(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}\overline{q} = \mathbf{v}q\overline{q} = \mathbf{v},$$

то есть $\mathbf{v}$ действительно является направляющим вектором оси вращения.
Пусть теперь $\mathbf{w}\perp\mathbf{v}$. Тогда, используя тождество

$$(q\mathbf{w})\mathbf{v} = -\mathbf{v}(q\mathbf{w}),$$

верное в силу $q\mathbf{w}\perp\mathbf{v}$ (см. (69)), имеем

$$\alpha_q(\mathbf{w}) = q\mathbf{w}(\mathbf{1}\cos\varphi - \mathbf{v}\sin\varphi) = q\mathbf{w}\cos\varphi - (q\mathbf{w})\mathbf{v}\sin\varphi =$$

$$= q\mathbf{w}\cos\varphi + \mathbf{v}(q\mathbf{w})\sin\varphi = q\mathbf{w}\cos\varphi + [\mathbf{v}, q\mathbf{w}]\sin\varphi,$$

то есть $\alpha_q(\mathbf{w})$ — поворот вектора $q\mathbf{w}$ на угол φ вокруг оси $\mathbf{v}$. Заметим, что сам вектор $q\mathbf{w}$ является поворотом вектора $\mathbf{w}$ вокруг той же оси на тот же угол. Поэтому $\forall\, \mathbf{w}\perp\mathbf{v}$ $\alpha_q(\mathbf{w})$ получается из вектора $\mathbf{w}$ поворотом на угол 2φ вокруг оси $\mathbf{v}$. ■

Таким образом, повороту трехмерного пространства вокруг оси $\mathbf{v}$, $|\mathbf{v}| = 1$ на угол φ отвечает кватернион

$$q = \mathbf{1}\cos\varphi/2 + \mathbf{v}\sin\varphi/2. \tag{70}$$

В частности, углу $\varphi = 2\pi$ отвечает $q = -\mathbf{1}$!

Полученный результат можно применить к вычислению композиции двух заданных поворотов. Ясно, что сопоставление $q \mapsto \mapsto \alpha_q$ единичному кватерниону соответствующего вращения определяет гомоморфизм группы единичных кватернионов $\mathrm{Sp}(1)$ в группу вращений трехмерного евклидова пространства $\mathrm{SO}(3)$. Действительно,

$$\alpha_{q_2 q_1}(\mathbf{w}) = q_2 q_1 \mathbf{w}\overline{q_2 q_1} = q_2 q_1 \mathbf{w}\overline{q}_1\overline{q}_2 = \alpha_{q_2}(\alpha_{q_1}(\mathbf{w}))\ \ \forall\, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3.$$

Таким образом, результат композиции двух поворотов, отвечающих кватернионам q_1 и q_2, отвечает кватерниону $q_2 q_1$.

Задача 4.14. [24] Определить ось и угол для композиции поворотов 1) вокруг $\mathbf{i}$ на угол $\frac{\pi}{2}$ и 2) вокруг $\mathbf{j}$ на тот же угол.

Решение. Напишем кватернионы, соответствующие первому и второму поворотам (см. (70)):

$$q_1 = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} = \frac{\mathbf{1}+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}, \quad q_2 = \frac{\mathbf{1}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}.$$

Далее перемножим их в нужном порядке и результат снова запишем в виде (70):

$$q_2q_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{1}+\mathbf{j})(\mathbf{1}+\mathbf{i}) = \frac{1}{2}(\mathbf{1}+\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{1}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}}{\sqrt{3}}.$$

Получили кватернион, отвечающий повороту на угол $\frac{2\pi}{3}$ вокруг оси с направляющим вектором $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$. ■

Таким образом, вместо того, чтобы совершать "реальные" повороты в пространстве, можно перемножать соответствующие им кватернионы (подобно тому как вместо сложения "реальных" предметов достаточно складывать соответствующие их количествам целые числа).

Заметим, что мы также фактически доказали сюръективность гомоморфизма

$$\mathrm{Sp}(1) \to \mathrm{SO}(3), \quad q \mapsto \alpha_q,$$

поскольку поворот на любой угол вокруг любой оси отвечает некоторому кватерниону. Также из наших результатов легко следует, что ядро данного гомоморфизма есть $\{\pm\mathbf{1}\}$. Тогда из основной теоремы о гомоморфизмах групп следует, что $\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{Sp}(1)/\{\pm\mathbf{1}\}$.

Ещё один способ применения кватернионов к вращениям многогранников читатель может найти в работе [44].

4.4. Конечномерные алгебры: октавы и седенионы

Наша цель в настоящем разделе посмотреть с более общих позиций на понятие комплексных чисел, кватернионов, и познакомиться с их 8 и 16-мерными родственниками – октавами и седенионами. Регулярное изложение этой науки, изучающей т.н. гиперкомплексные числа, читатель может обнаружить в работах [24], [52],[8].

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра с инволюцией, то есть это алгебра с единицей, в которой есть унарный оператор $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ такой что:

$$\begin{cases} (x+y)^* = x^* + y^* \\ (xy)^* = y^*x^* \\ 1^* = 1 \\ (x^*)^* = x \end{cases} \qquad \forall x, y \in \mathcal{A}.$$

В таком случае определим линейное пространство $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}$, задав в нем операцию умножения следующим образом

$$(p,q)(r,s) := (pr - s^*q, sp + qr^*). \tag{71}$$

И зададим на $\mathcal{A}'$ операцию $*$ следующим образом

$$(p, q)^* := (p^*, -q). \tag{72}$$

Эта процедура "удвоения" алгебры и называется *процедурой Кэли-Диксона.* В данном разделе мы далее всегда будем понимать под $\mathcal{A}$ конечномерную алгебру с инволюцией над вещественным полем, а под $\mathcal{A}'$ — алгебру, которая получается из $\mathcal{A}$ при помощи процедуры Кэли-Диксона.

Задача 4.15. Докажите, что $\mathcal{A}'$ с введеными выше операциями умножения и инволюцией $*$ будет алгеброй с инволюцией.

Решение. Проверим, прежде всего, что в $\mathcal{A}'$ есть единица. Естественный кандидат на эту роль — элемент $(1, 0)$. В самом деле,

$$(p, q)(1, 0) = (p \cdot 1 - 0 \cdot q, 0 \cdot p + q \cdot 1) = (p, q). \tag{73}$$

Теперь покажем, что введенная нами операция $*$ является инволюцией. Вычислим

$$\begin{aligned} ((p, q)(r, s))^* &= (pr - s^* q, sp + qr^*)^* = \\ &= (r^* p^* - q^* s, -sp - qr^*) = (r, s)^* (p, q)^*. \end{aligned}$$

Проверку остальных свойств инволюции оставляем читателю. ■

Комментарий. Легко понять, что если на вещественных числах ввести тривиальную инволюцию $x^* = x$, то в результате процедуры Кэли-Диксона мы получим не что иное как комплексные числа. Если же на комплексных числах взять в качестве инволюции комплексное сопряжение, мы в результате применения процедуры удвоения получим как раз кватернионы. Если же к кватернионам применить процедуру Кэли-Диксона, то полученная 8-мерная алгебра будет называться *октавами.* Следующая за ней (16-мерная алгебра) называется *седенионами.*
Из предыдущих разделов мы уже знаем, что кватернионы не коммутативны. Значит, при удвоении свойство коммутативности, вообще говоря, не сохраняется. Как оказывается, не сохраняется и свойство ассоциативности (уже для октав), и вообще, свойства алгебры при каждом удвоении лишь ухудшаются. Но кое-что всё-таки сохраняется.

Определение 4.16. Будем говорить, что алгебра $\mathcal{A}$ является хорошо нормированной, если $aa^*, a + a^* \in \mathbb{R}$ и, кроме того, для всех $a \neq 0$ имеем $aa^* = a^* a > 0$.

Легко понять, что если алгебра $\mathcal{A}$ хорошо нормированна, то на ней можно ввести норму следующим образом

$$\|a\|^2 := aa^*. \tag{74}$$

В качестве простого упражнения предлагаем читателю проверить, что уже знакомые нам алгебры $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ — являются хорошо нормированными. Чуть позже мы покажем, что при применении процедуры Кэли-Диксона к хорошо нормированным алгебрам, мы будем вновь получать хорошо нормированные алгебры.

Задача 4.17. Докажите, что в хорошо нормированной алгебре все ненулевые элементы обратимы. То есть для каждого ненулевого элемента $a \in \mathcal{A}$ найдется, причем единственный, элемент a^{-1} такой, что

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

Решение. Из формулы (71) получаем соотношения для элемента обратного к $a = (p, q)$

$$(p, q)(x, y) = (1, 0) = (x, y)(p, q).$$

Легко понять, что обратный элемент, заданный следующим образом (разумеется, при $a \neq 0$)

$$a^{-1} := \frac{a^*}{\|a\|^2}, \tag{75}$$

будет удовлетворять соотношениям на a^{-1}, причем является единственным. ■

Комментарий. Хоть решение последней задачи и несложно, однако сама задача крайне важна. Дело в том, что хотя в алгебрах, получаемых при удвоении при помощи процедуры Кэли-Диксона все элементы обратимы, там могут быть делители нуля. И, начиная с 16-мерных седенионов – во всех таких алгебрах делители нуля есть. А, соответственно, октавы — являются последней алгеброй без делителей нуля. Проверка этих двух утверждений – проводится “в лоб“ и не представит трудностей для заинтересованного читателя. Также отметим, что в ассоциативных алгебрах с единицей делители нуля всегда необратимы (проверьте это!), так что обратимость всех ненулевых элементов в седенионах и старших алгебрах, возможна только из-за неассоциативности.
Будем говорить, что $\mathcal{A}$ – *алгебра с делением*, если $\forall a, b \in \mathcal{A}, a \neq 0$, разрешимы уравнения $ax = b$, $ya = b$.

Задача 4.18. Доказать, что октавы образуют алгебру с делением, а седенионы — нет.

Решение. Заметим, что если $x \neq 0$, то линейное отображение $\varphi_x : a \mapsto ax$ имеет тривиальное ядро тогда и только тогда, когда в алгебре $\mathcal{A}$ нет делителей нуля. Пользуясь предыдущей задачей – легко получается наше утверждение. ■

Задача 4.19. Докажите, что

- [*Тождество Эйлера*] Произведение сумм четырех квадратов является суммой четырех квадратов;
- Произведение сумм восьми квадратов является суммой восьми квадратов.

Решение. Наивный способ. Конечно, оба утверждения можно доказать и непосредственными вычислениями. Так, в первом случае (для четырех квадратов) получится вот что

$$\begin{aligned}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) * (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = \\ = (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)^2 + \\ + (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2)^2 + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1)^2.\end{aligned}$$

Проверять эту формулу в лоб мы, разумеется, не будем. Похожая формула имеет место и для восьми квадратов, но подобные выкладки никак не прольют свет на то, почему для 7 квадратов аналогичное утверждение уже не будет верным. Так что для решения задачи стоит пойти другим путем.
Правильное решение. Пусть алгебра $\mathcal{A}$ — помимо обычных свойств — еще и ассоциативна[46]. Тогда проверим, что в алгебре $\mathcal{A}'$ выполняется свойство

$$\|ab\| = \|a\|\|b\|, \tag{76}$$

где норма определена нами выше.
Распишем левую и правую часть формулы (76). Введем обозначения $a = (q_1, q_2), b = (r_1, r_2)$. Тогда, конечно,

$$ab = (q_1 r_1 - r_2^* q_2, r_2 q_1 + q_2 r_1^*).$$

Откуда получаем

$$\|ab\|^2 = (q_1 r_1 - r_2^* q_2)(q_1 r_1 - r_2^* q_2)^* + (r_2 q_1 + q_2 r_1^*)(r_2 q_1 + q_2 r_1^*)^* = \\ = (q_1 r_1 - r_2^* q_2)(r_1^* q_1^* - q_2^* r_2) + (r_2 q_1 + q_2 r_1^*)(q_1^* r_2^* + r_1 q_2^*).$$

С другой стороны, для правой части выражения (76) имеем

$$\|u\|^2 \|v\|^2 = (q_1 q_1^* + q_1 q_2^*)(r_1 r_1^* + r_2 r_2^*).$$

Сокращая подобные члены (и пользуясь ассоциативностью при раскрытии скобок!) получаем, что

$$\|ab\|^2 - \|a\|^2 \|b\|^2 = r_2 q_1 r_1 q_2^* + q_2 r_1^* q_1^* r_2^* - q_1 r_1 q_2^* r_2 - r_2^* q_2 r_1^* q_1^*.$$

Нужно показать, что последнее выражение равно нулю при любых $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathcal{A}$. Если r_2 – вещественное число, это очевидно. Если же r_2 — чисто мнимое, то $r_2 = -r_2^*$ и, значит, имеем далее

$$\|ab\|^2 - \|a\|^2 \|b\|^2 = r_2(q_1 r_1 q_2^* + q_2 r_1^* q_1^*) - (q_1 r_1 q_2^* + q_2 r_1^* q_1^*) r_2.$$

Заметим, что выражение в скобках это сумма элемента алгебры $\mathcal{A}$ с сопряженным

$$(q_1 r_1 q_2^* + q_2 r_1^* q_1^*) = (q_1 r_1 q_2^*) + \Big(q_1 r_1 q_2^*\Big)^* =: c,$$

а значит, поскольку $\mathcal{A}$ – хорошо нормированная алгебра, c – это вещественное число. Значит получаем, что

$$\|ab\|^2 - \|a\|^2 \|b\|^2 = r_2 c - c r_2 = 0.$$

В случае, когда r_2 не является ни вещественным, ни чисто мнимым элементом, остается представить r_2 как сумму вещественной и мнимой части.

Вернемся к решению нашей задачи.

[46]Напомним, что по теореме Фробениуса отсюда следует, что $\mathcal{A}$ это одно из трех: вещественные числа, комплексные числа или кватернионы.

Если в качестве u, v взять кватернионы, то доказанное нами равенство (76) дает тождество четырех квадратов, а если u, v — это октавы, то мы получаем тождество восьми квадратов.

■

Комментарий. Видно, что в решении мы активно пользовались ассоциативностью алгебры $\mathcal{A}$ чтобы доказать соотношение (76) в алгебре $\mathcal{A}'$. Мы уже отмечали выше, что кватернионы – это последняя ассоциативная алгебра, отсюда мы получаем, что наше решение не проходит ни для какого количества квадратов, отличного от 1, 2, 4 и 8. Однако само утверждение о том, что не существует формулы n квадратов при n отличном от $1, 2, 4$ и 8 — называется теоремой Гурвица и доказывается достаточно непросто. За подробностями отсылаем читателя к [24] (§17, §18).
Заметим, что хоть формула (76) работает только для ассоциативных алгебр, но некоторое ее ослабление справедливо для всех алгебр, которые получаются при помощи процедуры Кэли-Диксона.

Задача 4.20. Если $\mathcal{A}$ – хорошо нормированная алгебра, то и $\mathcal{A}'$ – тоже будет такой же.

Решение. Для доказательства нужно провести выкладку. А именно, зафиксируем ненулевой элемент алгебры $a \neq 0$. Тогда имеем

$$aa^* = (p, q)(p^*, -q) = (pp^* + qq^*, 0) = (p^*, -q)(p, q).$$

Откуда, пользуясь тем, что $\mathcal{A}$ — хорошо нормированная алгебра, получаем, что aa^* — вещественное положительное число. Вещественность $a + a^*$ очевидна. ■

Как мы уже отмечали, уже октавы не ассоциативны. Да и вообще, чем больше раз применяется процедура Кэли-Диксона тем менее ассоциативными будут получаемые алгебры. Говорят, что алгебра *альтернативна*, если любая двумерная подалгебра в ней ассоциативна. Иными словами, выполняются тождества

$$a(ab) = (aa)b, \ (ab)b = a(bb) \ \ \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Алгебра называется удовлетворяющей свойству *степенной ассоциативности*, если каждая одномерная подалгебра в ней ассоциативна. Иными словами выполняется тождество

$$a(aa) = (aa)a, \ \forall a \in \mathcal{A}.$$

Несложные непосредственные вычисления, которые мы оставляем заинтересованному читателю, показывают, что справедлива следующая теорема.

Теорема 4.21.

- *Если алгебра $\mathcal{A}$ — коммутативна и ассоциативна, то $\mathcal{A}'$ ассоциативна;*
- *Если алгебра $\mathcal{A}$ — ассоциативна и хорошо нормирована, то $\mathcal{A}'$ — альтернативна и хорошо нормирована;*
- *Если алгебра $\mathcal{A}$ — удовлетворяет условию степенной ассоциативности, то и $\mathcal{A}'$ — тоже.*

Таким образом $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ — ассоциативные алгебры, октавы $\mathbb{O}$ — альтернативны, а начиная с 16-мерных седенионов выполняется только свойство степенной ассоциативности.

4.5. Несколько слов об алгебрах Ли

Помимо ассоциативных алгебр, в математике и приложениях встречаются также неассоциативные алгебры, среди них наиболее важны так называемые алгебры Ли без которых современная математика немыслима и которым, к сожалению, уделяется недостаточно времени в математических курсах. С примерами таких алгебр (ориентированное трехмерное евклидово пространство с операцией векторного произведения и пространство кососимметрических матриц порядка 3 с операцией взятия коммутатора) мы уже встречались в Задаче 1.10. Для систематического знакомства с теорией алгебр Ли рекомендуем читателю книгу [45] или любую другую книгу по теории алгебр Ли.

С точки зрения линейной алгебры к понятию алгебры Ли можно прийти следующим образом.

Зададимся вопросом: верно ли, что два диагонализируемых оператора A и B в конечномерном пространстве V можно одновременно диагонализировать (то есть найти в V базис, состоящий из общих для них собственных векторов)? Поскольку алгебра диагональных матриц (над полем) коммутативна, то необходимым условием для одновременной диагонализируемости A и B является равенство $AB = BA$. Например, диагонализируемые по отдельности матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не диагонализируемы одновременно, поскольку они не коммутируют. Из Задачи 2.26 теперь следует, что множество S диагонализируемых операторов *одновременно* диагонализируемо тогда и только тогда, когда они попарно коммутируют. Последнее условие можно записать как $[A, B] = 0 \;\; \forall\, A, B \in S$, где $[A, B] := AB - BA$ — коммутатор операторов A, B.

Задача 4.22. Докажите, что уравнение $AB - BA = E$ неразрешимо в конечных квадратных матрицах A, B над полем нулевой характеристики. Найти решение этого уравнения в бесконечных матрицах.

Решение. В случае конечных матриц достаточно взять след от обеих частей. Чтобы получить решение в бесконечных матрицах, можно рассмотреть линейные операторы $\frac{d}{dx}$ и умножения на x в пространстве многочленов $\mathbb{K}[x]$ и воспользоваться тем, что

$$\frac{d}{dx}(xf) - x\frac{d}{dx}f = f. \quad \blacksquare$$

Аналогичный вопрос можно также задать об одновременном приведении к верхнему треугольному виду данного семейства операторов на n-мерном пространстве над алгебраически замкнутым полем. Из теории ЖНФ (которую мы обсуждали в разделе 2.4.) мы знаем, что один оператор всегда приводится к такому виду. Заметим, что коммутатор любых двух верхних треугольных матриц является верхней треугольной матрицей с нулевой диагональю. Если взять коммутатор любых двух верхних треугольных матриц с нулевой диагональю, получится матрица, у которой нули стоят также на следующей диагонали над главной и т.д.. Отсюда нетрудно получить необходимое условие триангулируемости данного множества операторов в терминах коммутаторов, которое, как мы увидим далее, является достаточным. Мы вернемся к этим вопросам после необходимых определений и формулировок теорем. Отметим, что эту задачу естественно ставить не только для конечных наборов операторов, но и для подпространств в пространстве операторов.

Определение 4.23. *Алгеброй Ли* над полем $\mathbb{K}$ называется пара, состоящая из линейного пространства L над $\mathbb{K}$ и бинарной операции $[\cdot,\cdot]\colon L \times L \to L$, которая

1) билинейна, то есть
$$[x+y,z]=[x,z]+[y,z],\ \ [\lambda x,y]=\lambda[x,y] \quad \forall x,\, y\in L,\ \ \lambda\in\mathbb{K},$$
и аналогично по второму аргументу;

2) антисимметрична, то есть $[x,x]=0\ \ \forall\, x\in L$;

3) удовлетворяет *тождеству Якоби*
$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0 \quad \forall\, x,\, y,\, z\in L. \tag{77}$$

Заметим, что из пункта 2) следует соотношение $[x,y]=-[y,x]\ \forall\, x,y\in L$, причем эти два условия равносильны в случае, когда $\operatorname{char}\mathbb{K}\neq 2$. *В дальнейшем в этом разделе мы предполагаем, что* $\operatorname{char}\mathbb{K}=0$ (хотя некоторые результаты верны и в общем случае).
Операция $[\cdot,\cdot]$ в алгебре Ли называется *скобкой Ли* или *коммутатором.* Последнее название оправдывается следующей задачей.

Задача 4.24. Пусть A — ассоциативная алгебра над полем $\mathbb{K}$; положим
$$[x,y]:=xy-yx\ \ \forall\, x,y\in A.$$
Покажите, что пространство A с такой операцией коммутирования является алгеброй Ли над полем $\mathbb{K}$.

Решение. Выполнение условий из определения проверяется прямым вычислением. Отметим, что тождество Якоби является следствием ассоциативности алгебры A. ■

Например, положив в предыдущей задаче $A=\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, получаем алгебру Ли, обозначаемую $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$. В теории групп и алгебр Ли есть некоторое соответствие между первыми и вторыми, мы немного коснемся его в дальнейшем. Для группы Ли G ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$ традиционно обозначается соответствующими готическими буквами. Например, алгебра Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ соответствует полной линейной группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Роль этой алгебры Ли показывает следующая

Теорема 4.25. *(И.Д. Адо) Каждая конечномерная алгебра Ли L над полем* $\mathbb{K}$ *является подалгеброй алгебры Ли* $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$.

Тривиальным примером алгебры Ли является линейное пространство с нулевым коммутатором. Такая алгебра Ли называется *коммутативной* или *абелевой*. Ясно, что все одномерные алгебры Ли абелевы. Абелевой является также подалгебра $\mathfrak{d}_n(\mathbb{K})$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$, состоящая из диагональных матриц.

Используя введенную терминологию, результат Задачи 2.26 теперь можно интерпретировать как теорему о том, что для абелевой алгебры Ли L, состоящей из диагонализируемых операторов в пространстве V над алгебраически замкнутым полем, найдется такой базис в V, что L является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{d}_n(\mathbb{K})$ диагональных матриц.

Задача 4.26. Опишите двумерные алгебры Ли над полем $\mathbb{K}$.

Решение. Пусть L такая алгебра, выберем в ней некоторый базис $\{x, y\}$. Если $[x, y] = 0$, то легко видеть, что коммутатор тождественно равен нулю на L, и значит L абелева. Другая возможность — $[x, y] = z \neq 0$. Тогда коммутатор любых элементов из L пропорционален z. Выберем в L новый базис $\{t, z\}$, тогда $[t, z] = \lambda z,\ \lambda \neq 0$. Полагая $w := \lambda^{-1} t$, получаем базис $\{w, z\}$, в котором $[w, z] = z$. Очевидно, что это однозначно определяет коммутаторы всех элементов в L и значит любая неабелева двумерная алгебра изоморфна такой. ■

Построенная в предыдущей задаче неабелева алгебра имеет следующее представление матрицами

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и является алгеброй Ли одномерной аффинной группы.

Подобным кустарным методом (без развития общей теории) классифицировать трехмерные алгебры над $\mathbb{R}$ можно, но довольно утомительно, хотя читатель и может попытаться это сделать (при этом полезно отдельно рассмотреть случаи, когда подпространство $L^{(1)} \subset L$, порожденное всеми коммутаторами, имеет размерность $0, 1, 2$ или 3).

Вот еще источник большого количества примеров алгебр Ли.

Дифференцированием (не обязательно ассоциативной) алгебры A над полем $\mathbb{K}$ называется линейное отображение $D\colon A \to A$, удовлетворяющее *тождеству Лейбница*

$$D(xy) = D(x)y + xD(y) \quad \forall\, x, y \in A.$$

Задача 4.27. Покажите, что пространство $\mathrm{Der}\,(A)$ всех дифференцирований алгебры A с операцией коммутирования

$$[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$$

является алгеброй Ли над полем $\mathbb{K}$.

Решение. Ясно, что если D_1, D_2 — дифференцирования, то и $\alpha D_1 + \beta D_2$ — дифференцирование. Кроме того, непосредственная выкладка показывает, что для любых $a, b \in A$

$$[D_1, D_2](ab) = ([D_1, D_2]a)b + a([D_1, D_2]b),$$

то есть коммутатор двух дифференцирований также является дифференцированием.
Тождество Якоби для коммутаторов следует из Задачи 4.27. Действительно, дифференцирования содержатся в ассоциативной алгебре линейных операторов на A. ■

Задача 4.28. Опишите алгебру Ли $\mathrm{Der}\,(\mathbb{K}[x])$.

Решение. Из соотношения

$$D(1 \cdot 1) = D(1) \cdot 1 + 1 \cdot D(1)$$

получаем, что любое дифференцирование константы переводит в 0. Пусть $Dx = f(x)$, и делая индуктивное предположение $Dx^{k-1} = (k-1)x^{k-2}f(x)$, получаем

$$Dx^k = D(x \cdot x^{k-1}) = f(x)x^{k-1} + xD(x^{k-1}) =$$
$$= f(x)x^{k-1} + (k-1)x^{k-1}f(x) = kx^{k-1}f(x).$$

Таким образом, произвольное дифференцирование алгебры $\mathbb{K}[x]$ имеет вид $f(x)\frac{d}{dx}$.
Далее легко проверяется, что если $D_1 = f(x)\frac{d}{dx}$, $D_2 = g(x)\frac{d}{dx}$, то $[D_1, D_2] = (f(x)g'(x) - g(x)f'(x))\frac{d}{dx}$. ■
Пусть L — произвольная алгебра Ли и $x \in L$. Обозначим через $\mathrm{ad}\,x$ линейный оператор в L, заданный равенством

$$\mathrm{ad}\,x(y) := [x, y].$$

Задача 4.29. Докажите, что $\mathrm{ad}\,x$ является дифференцированием алгебры Ли L для любого $x \in L$. Кроме того,

$$[\mathrm{ad}\,x, \mathrm{ad}\,y] = \mathrm{ad}\,[x, y]. \tag{78}$$

Решение. Линейность $\mathrm{ad}\,x$ очевидна. Переписывая тождество Якоби (77) в виде

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]],$$

получаем тождество Лейбница. Тождество (78) следует из этой же формулы. ■
Дифференцирования алгебры Ли L вида $\mathrm{ad}\,x$, $x \in L$ называются *внутренними*. Из предыдущей задачи следует, что внутренние дифференцирования алгебры Ли образуют подалгебру Ли $L_a \subset \mathrm{Der}\,L$ в алгебре всех дифференцирований. Кроме того, тождество (78) означает, что мы имеем гомоморфизм алгебр Ли

$$\mathrm{ad}\colon L \to L_a, \quad x \mapsto \mathrm{ad}\,x. \tag{79}$$

Возникает естественный вопрос, все ли дифференцирования являются внутренними. Это так для полупростых алгебр Ли, но в общем случае ответ отрицательный, за деталями отошлем читателя к специализированной литературе по алгебрам Ли, например [45]. Мы же ограничимся одним примером для ещё одного важного класса лиевых алгебр, а именно для т.н. групповых алгебр $\mathbb{C}[G]$. Мы будем называть групповой алгеброй для дискретной группы G множество всевозможных *конечных* линейных комбинаций вида

$\sum \lambda_i g_i$, где $g_i \in G$ – элементы группы, а $\lambda_i \in \mathbb{C}$ – коэффициенты. Сложение элементов такого вида определяется покоординатно, а перемножение – наследуется из группы G, разрешая перекидывать коэффициенты через элементы группы $\lambda g = g\lambda$. В групповой алгебре имеется естественный базис из элементов вида $1 \times g_i$. Дальше для удобства мы будем отождествлять $1 \times g \equiv g$. Разумеется, алгебра $\mathbb{C}[G]$ – будет ассоциативной алгеброй с единицей.
Пусть $z \in Z(G)$ – элемент центра группы G, а $\tau : G \to \mathbb{C}$ – гомоморфизм в аддитивную группу комплексных чисел.

Задача 4.30. Докажите, что отображение заданное на базисных элементах по формуле

$$d_z^\tau : g \mapsto z\tau(g)g, \tag{80}$$

задает внешнее дифференцирование.

Решение. Понятно, что тождество Лейбница достаточно проверять только на базисных элементах, а на всю остальную групповую алгебру оно распространится по линейности. Имеем следующее

$$d_z^\tau(uv) = z\tau(uv)uv = z\tau(u)uv + zu\tau(v)v = d_z^\tau(u)v + ud_z^\tau(v).$$

Проверку того, что такое дифференцирование при нетривиальном гомоморфизме τ не может совпадать ни с каким внутренним – оставляем читателю. ■

Отметим, что вполне правомерным вопросом является и описание дифференцирований на лиевой алгебре $\mathfrak{A}[G] := (\mathbb{C}[G], [\cdot,\cdot])$, то есть обычной групповой алгебре, но с операцией взятия коммутатора. В таком случае интересно рассмотреть случай, когда исходная группа G – коммутативна. Тогда любое линейное отображение $d : \mathfrak{A}[G] \to \mathfrak{A}[G]$ – будет дифференцированием, поскольку исходная алгебра коммутативна, а значит в ней коммутатор любых двух элементов нулевой.

Но вернёмся к матрицам. Напомним, что матрица $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ называется *косоэрмитовой*, если $A + \overline{A}^T = 0$.

Задача 4.31. Покажите, что косоэрмитовы матрицы с нулевым следом порядка 2 образуют алгебру Ли над полем $\mathbb{R}$. Опишите для нее гомоморфизм (79), покажите, что он является изоморфизмом алгебр Ли.

Решение. Легко проверяется, что косоэрмитовы матрицы порядка n образуют вещественное векторное пространство размерности n^2, а если к тому же у них нулевой след — то $n^2 - 1$. Если $A^T = -\overline{A}$, $B^T = -\overline{B}$, то

$$[A, B]^T = [B^T, A^T] = [-\overline{B}, -\overline{A}] = -\overline{[A, B]},$$

откуда следует, что косоэрмитовы матрицы образуют алгебру Ли. Кроме того, коммутатор матриц с нулевым следом тоже имеет нулевой след.
Пусть L — алгебра Ли косоэрмитовых матриц порядка 2 с нулевым следом. Выберем в ней базис, например

$$e_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Для выбранных матриц непосредственно проверяется формула

$$[e_i, e_j] = \operatorname{sgn}(ijk)\, e_k, \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}.$$

Также непосредственно проверяется, что формула

$$(x, y) := -2 \operatorname{tr}(xy)$$

задает евклидово скалярное произведение на трехмерном вещественном пространстве L, для которого базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ является ортонормированным. Мы получили, что скобка Ли $[\cdot, \cdot]$ задает на L векторное произведение, для которого базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ является правым ортонормированным. Значит, операторы на L вида $\operatorname{ad} x$ являются кососимметрическими и алгебра L_a изоморфна их алгебре Ли (см. Задачу 1.10 и Комментарий к ней). ■

Таким образом, алгебра внутренних дифференцирований алгебры Ли $\mathfrak{su}_n$ есть $\mathfrak{o}_n(\mathbb{R})$ и нами построен изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{su}_n \to \mathfrak{o}_n(\mathbb{R})$ (по поводу обозначений см. ниже).

Пусть L — алгебра Ли со скобкой Ли $[\cdot, \cdot]$. Определим $L^{(1)} \subset L$ как подпространство, порожденное всеми коммутаторами элементов из L. Очевидно, $L^{(1)}$ является подалгеброй в L (и даже идеалом). Данную операцию можно итерировать: рассмотреть подалгебру $L^{(2)} \subset L^{(1)}$, порожденную коммутаторами элементов из $L^{(1)}$ и т.д. Алгебра Ли L называется *разрешимой*, если $L^{(k)} = 0$ для некоторого натурального k.
Например, из Задачи 4.26 следует, что любая двумерная алгебра Ли разрешима. В то же время, трехмерное евклидово пространство с векторным произведением в качестве скобки Ли дает пример неразрешимой алгебры Ли, поскольку для нее $L^{(1)} = L$.

Пусть $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$ обозначает пространство верхних треугольных матриц порядка n над полем $\mathbb{K}$.

Задача 4.32. Докажите, что $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$ — разрешимая алгебра Ли (с операцией коммутирования).

Решение. Обозначим (при $n \geq 2$) через $\mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$ подпространство в $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$, состоящее из строго верхнетреугольных матриц (это верхнетреугольные матрицы с нулями на главной диагонали). Читатель легко проверит, что $\mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$ — не просто подпространство, а подалгебра Ли. Также легко убедиться, что $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})^{(1)} \subset \mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$. Далее, $\mathfrak{n}_n(\mathbb{K})^{(1)}$ состоит из матриц, у которых нули также на диагонали, следующей за главной, и т.д. Таким образом, $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})^{(n)} = 0$. ■

Оказывается, что при условии, что поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, любая разрешимая подалгебра Ли $L \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ сопряжена с некоторой подалгеброй в алгебре $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$ (теорема Ли). Другими словами, для любой такой подалгебры L найдется базис, в котором все операторы из нее представляются верхними треугольными матрицами. Это дает ответ на вопрос, поставленный в начале этого параграфа (точнее, показывает, что сформулированное там условие является достаточным).
Теорема Ли следует по индукции по n из следующего результата: если L — разрешимая подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$, $n > 0$ над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики $\mathbb{K}$, то у всех матриц из L есть общий собственный вектор.

Заметим, что алгебра Ли строго верхнетреугольных матриц $\mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$ удовлетворяет более сильному условию чем разрешимость. Чтобы его сформулировать, рассмотрим алгебру Ли L и семейство подалгебр (идеалов) в ней $L^1 := [L, L]$, $L^2 := [L^1, L], \ldots$, $L^k := [L^{k-1}, L], \ldots$, где $[L^m, L]$ — подпространство, порожденное всеми коммутаторами $[x, y]$, $x \in L^m$, $y \in L$. Если $L^k = 0$ для некоторого натурального k, то алгебра Ли L называется *нильпотентной*. Алгебра $\mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$ — типичный пример нильпотентной алгебры Ли.

По индукции легко доказывается, что $L^{(k)} \subset L^k$, поэтому нильпотентные алгебры разрешимы. Обратное неверно: алгебра $\mathfrak{t}_n(\mathbb{K})$ разрешима, но не нильпотентна (так же как и неабелева алгебра из Задачи 4.26).

Оказывается, что любая подалгебра Ли $L \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$, *состоящая из нильпотентных матриц*, сопряжена с некоторой подалгеброй в алгебре $\mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$ (теорема Энгеля)[47]. Другими словами, для любой такой подалгебры L найдется базис, в котором все операторы из нее представляются строго верхнетреугольными матрицами. В частности, такая алгебра Ли L нильпотентна. Заметим, что без условия нильпотентности матриц, входящих в L, теорема Энгеля неверна: очевидно, абелева алгебра $\mathfrak{d}_n(\mathbb{K})$ нильпотентна, но не сопряжена никакой подалгебре в $\mathfrak{n}_n(\mathbb{K})$ (если диагональная матрица сопряжена со строго верхнетреугольной, то все ее собственные значения нулевые, а значит она сама равна нулю).

Опишем теперь некоторые классические матричные (то есть состоящие из матриц и с операцией коммутирования) алгебры Ли над полями $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Очевидно, матричной алгеброй Ли является любое подпространство в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, замкнутое относительно коммутатора. Мы уже знаем пример матричной алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ и ее подалгебр $\mathfrak{n}_n(\mathbb{K}) \subset \mathfrak{t}_n(\mathbb{K}) \supset \mathfrak{d}_n(\mathbb{K})$.

Рассмотрим другие примеры.
Алгебра $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ состоит из всех матриц в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ со следом нуль.
Алгебра $\mathfrak{o}_n(\mathbb{K})$ состоит из всех кососимметричных матриц в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ (заметим, что симметричные матрицы алгебры Ли не образуют).
Алгебра $\mathfrak{u}_n$ состоит из всех косоэрмитовых матриц порядка n, то есть из комплексных матриц, удовлетворяющих условию $A + \overline{A}^T = 0$. Заметим, что это — алгебра Ли над полем $\mathbb{R}$, а не $\mathbb{C}$ (косоэрмитовы матрицы не образуют даже линейного пространства над $\mathbb{C}$).
Еще один пример вещественной алгебры Ли — алгебра $\mathfrak{su}_n$, состоящая из косоэрмитовых матриц с нулевым следом.

Задача 4.33. Убедитесь, что каждая из определенных выше алгебр действительно является алгеброй Ли над соответствующим полем.

Решение. Для алгебр $\mathfrak{u}_n$ и $\mathfrak{su}_n$ мы уже доказали требуемый результат в Задаче 4.31. Для остальных пунктов доказательство аналогично. ■

Задача 4.34. Пусть A — квадратная матрица порядка n, ε — вещественная переменная, $\varepsilon \to 0$. Покажите, что матрица $U := E + \varepsilon A$ “унитарна с

[47]Отметим, что в отличии от теоремы Ли это верно без ограничения на характеристику и алгебраическую замкнутость поля $\mathbb{K}$.

точностью до ε^2" тогда и только тогда, когда A косоэрмитова:

$$U\overline{U}^T = E + O(\varepsilon^2) \quad \Leftrightarrow \quad A + \overline{A}^T = 0.$$

Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для других приведенных выше классических матричных алгебр Ли.

Решение. Проверяется непосредственной выкладкой:

$$(E + \varepsilon A)(E + \varepsilon \overline{A}^T) = E + \varepsilon(A + \overline{A}^T) + O(\varepsilon^2).$$

Вот формулировка и доказательство для $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$: матрица $S := E+\varepsilon A$ "имеет равный 1 определитель с точностью до ε^2" тогда и только тогда, когда $A \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$:

$$\det(E + \varepsilon A) = 1 + O(\varepsilon^2) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tr} A = 0.$$

Докажем формулу $\det(E + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} A + O(\varepsilon^2)$. Для этого заметим, что определитель матрицы $E + \varepsilon A$ равен произведению ее характеристических чисел λ_i — корней характеристического уравнения

$$\det(E + \varepsilon A - \lambda E) = \varepsilon^n \det(A - \frac{(\lambda - 1)}{\varepsilon} E),$$

откуда $\lambda_i = 1+\varepsilon\mu_i$, где μ_i — i-е характеристическое число матрицы A. Таким образом,

$$\det(E + \varepsilon A) = \prod_{i=1}^{n}(1 + \varepsilon\mu_i) = 1 + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \mu_i + O(\varepsilon^2),$$

причем $\sum_{i=1}^n \mu_i = \operatorname{tr} A$. ■

Задача 4.35. Пусть $U := E + \varepsilon A,\ V := E + \varepsilon B$, где $\varepsilon \to 0$. Проверьте, что

$$UVU^{-1}V^{-1} = E + \varepsilon^2[A, B] + O(\varepsilon^3).$$

Решение. Прямой проверкой убедимся, что $U^{-1} = E - \varepsilon A + \varepsilon^2 A + O(\varepsilon^3)$:

$$(E + \varepsilon A)(E - \varepsilon A + \varepsilon^2 A) = E + O(\varepsilon^3),$$

и аналогично для V^{-1}. Осталось подставить эти выражения в $UVU^{-1}V^{-1}$ и разложить полученное выражение по степеням малого параметра ε до $O(\varepsilon^3)$. ■

Задача 4.34, по-существу, означает, что для классической группы Ли соответствующая ей алгебра Ли является касательным пространством в единице группы[48], а задача 4.35 позволяет построить на нем скобку Ли по групповой операции в окрестности единицы группы. Тем самым по группе Ли строится алгебра Ли (более того, гладкий гомоморфизм групп Ли определяет соответствующий гомоморфизм алгебр Ли).

---

[48]Напомним, что группа Ли, помимо наличия групповой структуры, является гладким многообразием.

Более сложным является обратный переход от алгебры Ли к соответствующей группе Ли. Теорема Э. Картана утверждает, что произвольная конечномерная вещественная алгебра Ли является алгеброй Ли единственной связной и *односвязной* вещественной группы Ли. (Если отбросить условие односвязности, то теорема перестанет быть верной, как показывает пример неизоморфных групп SU(2) и SO(3), имеющих изоморфные алгебры Ли, что было доказано в Задаче 4.31. Однако различие между этими группами не так велико: существует сохраняющий операцию диффеоморфизм[49] между достаточно малой окрестностью нейтрального элемента одной группы на соответствующую окрестность другой).
Значение данного результата для теории групп Ли (и ее многочисленных приложений в математике и физике) сложно переоценить: оно позволяет во многом свести изучение нелинейного объекта — группы Ли — к изучению ее алгебры Ли.

Важную роль в рассматриваемой теории играет так называемое экспоненциальное отображение $\exp\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{G}$ из алгебры Ли в соответствующую ей группу Ли. В случае матричных групп Ли — это просто экспонента матрицы (существование которой было нами обосновано в конце § 3.7.).

Задача 4.36. Для матрицы A конечного порядка докажите тождество

$$\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A).$$

Решение. Если A — жорданова матрица, то утверждение очевидно. Но любая матрица на полем $\mathbb{C}$ сопряжена с жордановой. Далее нужно воспользоваться Замечанием 3.75. ■

Заметим, что предыдущая задача применима не только к матрицам, но и к конечномерным операторам.

Следующее Предложение доказывается как и в случае чисел путем перемножения рядов, с использованием того, что сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется ни при какой перестановке его членов.

Предложение 4.37. Если $AB = BA$, то $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Положим $\mathcal{G}(t) := \exp(tA)$, $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, что $\mathcal{G}(0) = E$. Из предыдущего Предложения также следует, что

$$\mathcal{G}(t+s) = \mathcal{G}(t)\mathcal{G}(s), \quad \mathcal{G}(-t) = \mathcal{G}(t)^{-1}.$$

Таким образом, операторы $\mathcal{G}(t)$ образуют группу, называемую *однопараметрической группой*, порожденной оператором A. Например, для оператора $A = \frac{d}{dx}$ на пространстве многочленов в Задаче 2.5 мы доказали, что соответствующая однопараметрическая подгруппа образована операторами сдвига

$$T_t\colon \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n, \quad T_t(f(x)) = f(x+t).$$

[49]Диффеоморфизм — такое дифференцируемое биективное отображение между гладкими многообразиями, обратное к которому также дифференцируемо.

Задача 4.38. Докажите, что отображение exp переводит $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, $\mathfrak{o}_n(\mathbb{K})$, $\mathfrak{u}_n$, $\mathfrak{su}_n$ в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ соответственно.

Решение. В силу сказанного выше, матрицы вида $\exp(A)$ обратимы, поэтому отображение exp переводит $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Утверждение, касающееся $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, следует из Задачи 4.36.
Докажем теперь, что $\exp(A^T) = \exp(A)^T$. Пусть $P_n(t)$ — многочлены из Замечания 3.75. Тогда, используя непрерывность операции транспонирования матриц, имеем

$$(\exp(A))^T = (\lim_{n\to\infty} P_n(A))^T = \lim_{n\to\infty}(P_n(A)^T) = \lim_{n\to\infty} P_n(A^T) = \exp(A^T).$$

Аналогично доказывается равенство $\exp \overline{A} = \overline{\exp(A)}$.
Теперь предполагая, например, что матрица A косоэрмитова, получаем

$$E = \exp(A + \overline{A}^T) = \exp(A)\exp(\overline{A}^T) = \exp(A)\overline{\exp(A)}^T,$$

а это означает, что $\exp(A)$ унитарна. ■
Во всех случаях образ экспоненциального отображения содержит некоторую окрестность единицы соответствующей группы. Более того, exp является диффеоморфизмом некоторой окрестности нуля в $\mathfrak{g}$ на некоторую окрестность единицы в G. Однако в целом отображения exp, вообще говоря, не сюръективны (и не обязаны быть локальными диффеоморфизмами во всех точках). Например, нетрудно показать, что отображение $\exp\colon \mathfrak{u}_n \to \mathrm{U}(n)$ сюръективно, а $\exp\colon \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ — нет.

4.6. Элементы теории представлений

Ряд результатов, касающихся линейных операторов, имеют далеко идущие обобщения в теории представлений. Здесь мы не собираемся систематически излагать данную теорию (это потребовало бы много больше места и привлечения ряда новых идей, см., например, [15], гл. 11), а только лишь наметим направление, в котором идеи линейной алгебры находят свое развитие в теории представлений, и рассмотрим несколько простых, но достаточно содержательных примеров.

Определение 4.39. *Линейным представлением группы G* в векторном пространстве V называется произвольный гомоморфизм $R\colon G \to \mathrm{GL}(V)$. Пространство V называется *пространством представления R*.

Заметим, что из определения сразу следует, что $R(e) = \mathrm{id}_V$, где $e \in G$ — единичный элемент, и $R(g^{-1}) = R(g)^{-1}$.

Пример 4.1. Пусть G — произвольная группа, V — произвольное векторное пространство (над полем $\mathbb{K}$). Тогда гомоморфизм $R\colon G \to \mathrm{GL}(V)$, определенный формулой $R(g) = \mathrm{id}_V \;\; \forall g \in G$ — линейное представление группы G в пространстве V, называемое *тривиальным.*

Пример 4.2. Пусть G — группа из двух элементов: нейтрального e и элемента σ второго порядка $\sigma^2 = e$. Рассмотрим V — n-мерное евклидово пространство. Легко видеть, что для того, чтобы задать представление G в V, необходимо и достаточно найти такой оператор $R(\sigma)$ на V, что $R(\sigma)^2 = \mathrm{id}_V$. Например, пусть $R(\sigma)$ — ортогональное отражение в пространстве V относительно подпространства $W \subset V$ размерности k, где $0 \le k \le n$. Тогда R — линейное представление G. Представление R тривиально при $k = n$, а при $k = 0$ $R(\sigma) = -\mathrm{id}_V$.

Пример 4.3. Пусть S_n — группа перестановок множества натуральных чисел $\{1, 2, \dots, n\}$. Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{K}$ с выбранным базисом $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Определим так называемое *мономиальное* представление M_n группы S_n по формуле

$$M_n \colon S_n \to \mathrm{GL}(V), \quad M_n(\sigma)\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{\sigma(i)} \ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \ \sigma \in S_n$$

(на произвольные векторы представление однозначно продолжается с базисных по линейности).

Пример 4.4. Пусть X — некоторое множество, на котором задано действие φ группы G (напомним, что φ — гомоморфизм из G в группу биективных преобразований множества X). Таким образом, $\varphi(g)(x)$ — результат применения биекции $\varphi(g)$ к элементу $x \in X$. Для упрощения дальнейших обозначений мы будем писать gx вместо $\varphi(g)(x)$, где $x \in X$, $g \in G$.
Пусть $\mathbb{K}$ — некоторое поле, а V — пространство всех финитных (то есть каждая функция отлична от нуля только в конечном числе точек из X) функций $f \colon X \to \mathbb{K}$. Ясно, что V — векторное пространство над $\mathbb{K}$, базисом в котором является набор дельта-функций δ_x, определяемых так:

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Действие φ группы G на X задает некоторое линейное представление $R = R_\varphi$ группы G на пространстве V:

$$R \colon G \to \mathrm{GL}(V), \quad (R(g)f)(x) = f(g^{-1}x),$$

то есть значение функции $R(g)f$, полученной применением оператора $R(g)$ к функции f, в точке x равно значению f в точке $g^{-1}x$. Например,

$$(R(g)\delta_x)(gy) = \delta_x(g^{-1}g(y)) = \delta_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y; \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

откуда $R(g)\delta_x = \delta_{gx}$.
Причина, почему при определении представления на функциях пишут g^{-1}, а не g, связана с тем, что только в этом случае мы получаем представление группы G, а именно выполнение равенства $(R(hg)f)(x) = (R(h)R(g)f)(x)$. Действительно, при таком определении левая часть последнего равенства принимает вид $f((hg)^{-1}x) = f(g^{-1}h^{-1}x)$, а правая $R(g)f(h^{-1}x) = f(g^{-1}h^{-1}x)$.
В частности, если в качестве множества X взять множество элементов группы G, а в качестве действия φ — действие группы G на себе левыми сдвигами $\varphi(g)h = gh$, мы получим *регулярное представление* группы G. Если группа G конечна, то его размерность равна порядку группы. Это представление играет важную роль: например, если характеристика $\mathbb{K}$ не делит порядок

группы G, то оно содержит любое неприводимое (см. ниже) представление группы G.
Далее, если взять в качестве группы $G = S_n$ группу перестановок множества $X = \{1, \dots, n\}$, а в качестве действия φ — "тавтологическое" действие на X перестановками, то мы получим мономиальное представление из предыдущего примера (при этом дельта-функции δ_i отождествляются с векторами базиса $\mathbf{e}_i$).

Пример 4.5. В евклидовой плоскости V рассмотрим правильный треугольник с вершинами в точках $A_1(1, 0)$, $A_2(-1/2, \sqrt{3}/2)$ и $A_3(-1/2, -\sqrt{3}/2)$. Группа симметрий D_3 правильного треугольника[50] состоит из шести элементов: трех отражений относительно высот и трех поворотов вокруг его центра на углы 0, $2\pi/3$ и $4\pi/3$ радиан. Сопоставляя симметрии треугольника индуцируемую ей перестановку на множестве вершин, легко убедиться, что группа D_3 изоморфна S_3. Таким образом, сопоставляя перестановкам из S_3 линейные операторы в V, осуществляющие соответствующие перестановки вершин, получим некоторое линейное представление R группы S_3. Так как S_n порождается транспозициями (перестановками пар элементов), достаточно выписать операторы $R(23)$, $R(13)$, $R(12)$, соответствующие транспозициям. Для фиксированного выше треугольника, пользуясь задачей 3.28, получаем

$$R(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, R(13) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, R(12) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Тогда, например, циклической перестановке (123) отвечает оператор поворота на угол $2\pi/3$:

$$R(123) = R(13) \circ R(12) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Пример 4.6. Аналогично предыдущему примеру, задание множества всех вращений трехмерного евклидова пространства, сохраняющих (как подмножество) некоторый правильный многогранник, определяет линейное представление соответствующей абстрактной группы. Например, группа вращений, переводящих куб в себя, состоит из 24 элементов. Эта группа изоморфна группе перестановок S_4, в чем можно убедиться, рассмотрев индуцированное действие на 4–элементном множестве из диагоналей куба. Кроме того, группа вращений куба действует перестановками на множестве из трех прямых, соединяющих центры противоположных граней. Так мы получаем ее сюръективный гомоморфизм на группу S_3. Беря его композицию с линейным представлением, описанным в предыдущем примере, получаем еще одно (на этот раз двумерное) представление группы S_4.

Пример 4.7. В разделе 4.3. мы сопоставили каждому единичному кватерниону $q \in \mathrm{Sp}(1)$ поворот α_q трехмерного евклидова пространства $\mathbb{H}_0$, при-

[50] Группа симметрий D_n правильного n-угольника называется *группой диэдра* и состоит из $2n$ элементов, из которых n поворотов и n отражений относительно осей симметрии.

чем произведению кватернионов соответствует композиция поворотов. Тем самым мы задали линейное представление $\alpha\colon \mathrm{Sp}(1) \to \mathrm{GL}(\mathbb{H}_0)$ группы $\mathrm{Sp}(1)$. В отличие от предыдущих примеров, последняя группа имеет бесконечный порядок.

Определение 4.40. *Морфизмом* φ между представлением

$$R\colon G \to \mathrm{GL}(U)$$

и представлением

$$S\colon G \to \mathrm{GL}(V)$$

группы G называется такое линейное отображение $\varphi\colon U \to V$, что $\varphi \circ R(g) = S(g) \circ \varphi \ \ \forall\, g \in G$.

Последнее равенство удобно записывать как коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "R(g)"] \arrow[d, "\varphi"'] & U \arrow[d, "\varphi"] \\ V \arrow[r, "S(g)"'] & V, \end{tikzcd}$$

то есть независимость $\forall\, g \in G$ результата (взятия композиции отображений) от выбора пути по ориентированному графу. Для краткости указанный морфизм мы будем обозначать $\varphi\colon R \to S$.
Обратимый морфизм из представления R в представление S называется *эквивалентностью* (или иногда *изоморфизмом*) представлений. Таким образом, $R \sim S \quad \Leftrightarrow \quad \exists$ линейный изоморфизм $\varphi\colon U \to V$ такой, что $S(g) = \varphi R(g) \varphi^{-1} \quad \forall\, g \in G$ (подчеркнем, что φ один и тот же для всех g).

Определение 4.41. Пусть $R\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ — такое представление, что некоторое подпространство $U \subset V$ инвариантно относительно операторов $R(g)\colon V \to V, \ \ \forall\, g \in G$. Тогда, рассматривая ограничения $S(g) := R(g)|_U$ операторов на инвариантное подпространство U, получаем некоторое новое представление $S\colon G \to \mathrm{GL}(U)$, называемое *подпредставлением* представления R. Иногда в литературе подпредставлением называют само подпространство U.

Если при наличии инвариантного подпространства $U \subset V$ вместо ограничения $R(g)|_U$ операторов рассмотреть факторoператоры $\overline{R}(g)\colon V/U \to V/U, \quad \overline{R}(g)(v + U) = R(g)(v) + U$, то мы получим определение *фактор-представления* $\overline{R}\colon G \to \mathrm{GL}(V/U)$.

Легко видеть, что если $\varphi\colon R \to S$ — морфизм представлений группы G, то его ядро и образ — подпредставления соответственно представлений R и S. Любое представление содержит нулевое подпредставление и подпредставление, совпадающее со всем представлением. Остальные подпредставления мы будем называть *собственными*.

Пример 4.8. Пусть G — снова группа из двух элементов. Два представления $R\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ и $S\colon G \to \mathrm{GL}(U)$ вида, описанного в примере 4.2, эквивалентны тогда и только тогда, когда $\dim V = \dim U$ и размерности соответствующих подпространств $W \subset V$, $W' \subset U$ совпадают.
Очевидно, что минимальные (относительно включения) ненулевые собственные подпредставления такого представления — одномерные подпространства собственных подпространств (отвечающих возможным собственным значениям 1 и -1) оператора $R(g)$. Любое ненулевое подпредставление получается как сумма таких.

Пример 4.9. Вернемся к мономиальному представлению, определенному в примере 4.3. Пусть $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \ldots + \mathbf{e}_n \in V$. Тогда ограничение мономиального представления M_n группы S_n на подпространство $\langle \mathbf{v} \rangle \subset V$ является тривиальным представлением. Таким образом, мономиальное представление содержит подпредставление. Заметим, что у него есть инвариантное прямое дополнение, то есть прямое дополнение к $\langle \mathbf{v} \rangle$ в V, которое является еще одним подпредставлением. А именно, определим подпространство $U := \{\mathbf{u} = \sum u_i \mathbf{e}_i \mid \sum u_i = 0\} \subset V$, которое, как легко проверить, также инвариантно относительно всех $M_n(g)$, $g \in S_n$. Очевидно, что $V = \langle \mathbf{v} \rangle \oplus U$ — *прямая сумма* подпредставлений.
Читателю предлагается проверить, что если $n = 3$ и V — евклидово пространство, то подпредставление U эквивалентно представлению группы S_3, рассмотренному в примере 4.5.

Определение 4.42. Ненулевое представление $R\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ называется *неприводимым*, если у него нет собственных подпредставлений.

Очевидно, что представление, эквивалентное неприводимому, само неприводимо.
Например, одномерное представление группы всегда неприводимо. Обратно, если группа G абелева, а поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, то всякое неприводимое представление G над $\mathbb{K}$ одномерно (см. задачу 4.46 ниже).

Пример 4.10. Покажем, что в случае поля $\mathbb{K}$ нулевой характеристики подпредставление U мономиального представления M_n, построенное в предыдущем примере, неприводимо. Пусть $W \subset U$ — некоторое ненулевое подпредставление U, а $\mathbf{u} = \sum u_i \mathbf{e}_i \neq \mathbf{0}$ — некоторый вектор из W. Так как $\sum u_i = 0$, то найдется пара $i \neq j$ такая, что $u_i \neq u_j$. Не теряя общности, можно предположить, что $\{i,\, j\} = \{1,\, 2\}$. Тогда

$$\mathbf{u} - M_n(12)\mathbf{u} = (u_1 - u_2)(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \neq \mathbf{0},$$

то есть $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \in W$. Для любой пары $\{i,\, j\}$, $i \neq j$ существует $\sigma \in S_n$, переводящая 1 в i, а 2 — в j, тогда $M_n(\sigma)(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$, а из последних векторов можно составить базис в U. Значит, $W = U$, и, таким образом, U неприводимо.
В частности, представление примера 4.5 неприводимо (и даже его комплексификация — неприводимое представление над $\mathbb{C}$. Заметим, что при расширении основного поля представление может, вообще говоря, перестать быть неприводимым: например, представление циклической группы C_n вращениями евклидовой плоскости, будучи неприводимым (при $n > 2$) над $\mathbb{R}$, становится приводимым при комплексификации).

Пример 4.11. Докажем неприводимость трехмерного представления группы S_4 вращениями куба из примера 4.6. Из геометрических соображений ясно, что одномерных подпространств, инвариантных относительно всех вращений куба, нет. Если бы было инвариантное двумерное подпространство, то так как образ представления лежит в группе ортогональных операторов, то его ортогональное дополнение тоже было бы инвариантным, но мы только что констатировали отсутствие одномерных инвариантных подпространств. Таким образом, данное представление неприводимо.

О следующей задаче можно также прочитать в [15], гл. 11, § 1, предложение 2.

Задача 4.43. Доказать, что комплексификация нечетномерного неприводимого вещественного представления сама неприводима.

Решение. Пусть $V^{\mathbb{C}}$ — комплексификация пространства неприводимого представления $R\colon G \to \mathrm{GL}(V)$. Пусть $W \subset V^{\mathbb{C}}$ — ненулевое инвариантное подпространство. Рассмотрим тогда его комплексно-сопряженное подпространство $\overline{W} \subset V^{\mathbb{C}}$, определенное (в наших обозначениях из раздела 2.2.) условием $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in W$, только если $(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) \in \overline{W}$. Тогда из инвариантности пространства W следует инвариантность и пространства $\overline{W}$. Действительно, если $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in W \quad \Rightarrow \quad (R(g)\mathbf{u}, R(g)\mathbf{v}) \in W \quad \Rightarrow$ из $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \overline{W}$ следует $(R(g)\mathbf{u}, R(g)\mathbf{v}) \in \overline{W}$.
Теперь легко видеть, что подпространства $W \cap \overline{W}$ и $W + \overline{W}$ инвариантны относительно операторов представления и относительно комплексного сопряжения. Используя задачу 2.28, мы видим, что они являются комплексификациями некоторых инвариантных подпространств в V. В силу неприводимости представления R эти инвариантные подпространства обязаны совпадать соответственно с нулевым подпространством $\{\mathbf{0}\} \subset V$ и всем пространством V, откуда $W \cap \overline{W} = \{\mathbf{0}\}$, $W + \overline{W} = V^{\mathbb{C}}$, и последняя сумма прямая. Так как, очевидно, $\dim W = \dim \overline{W}$, то $\dim V^{\mathbb{C}} = 2 \dim W$, что противоречит нечетномерности пространства V. Таким образом, мы получили противоречие с предположением о существовании нетривиального инвариантного подпространства $W \subset V$. ■

В качестве следствия из предыдущей задачи и примера 4.11 получаем, например, неприводимость комплексификации трехмерного вещественного представления группы S_4 из примера 4.6.
Далее следуют три несложные задачи, содержащие важнейшие общие результаты о неприводимых представлениях.

Задача 4.44. Пусть R и S — два неприводимых представления группы G. Доказать, что морфизм $\varphi\colon R \to S$ — либо нулевое отображение, либо эквивалентность.

Решение. Поскольку R неприводимо, то $\ker \varphi$, будучи подпредставлением в R, является несобственным. В случае, если ядро совпадает со всем пространством представления R, то морфизм нулевой. В противном случае ядро нулевое, и образ, будучи подпредставлением в S, совпадает, в силу неприводимости S, со всем пространством представления S. ■

Следующая задача хорошо известна как лемма Шура. Напомним, что эндоморфизмом называется морфизм в себя.

Задача 4.45. Всякий эндоморфизм неприводимого представления R над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ скалярен.

Решение. Пусть $R\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ — неприводимое представление группы G над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$. Непосредственно из определения морфизма представлений следует, что оператор $\varphi\colon V \to V$ является эндоморфизмом представления R тогда и только тогда, когда он коммутирует со всеми операторами $R(g)$, $\forall g \in G$. Тогда если φ — эндоморфизм, то и $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V$ является эндоморфизмом для $\forall\,\lambda \in \mathbb{K}$. Выбрав в качестве λ собственное значение оператора φ (которое существует в силу алгебраической замкнутости поля $\mathbb{K}$), в силу предыдущей задачи получим, что $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V = 0$, то есть $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}_V$. ■

Докажем наконец упоминавшийся выше результат о неприводимых представлениях абелевых групп.

Задача 4.46. Неприводимое представление абелевой группы над алгебраически замкнутым полем одномерно.

Решение. Пусть $R\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ — неприводимое представление абелевой группы G над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$. Тогда $\forall\, g \in G$ оператор $R(g)$ является эндоморфизмом представления R, поскольку коммутирует со всеми операторами представления (образ абелевой группы при гомоморфизме абелев). По лемме Шура все операторы представления скалярны, то есть имеют вид $\lambda\,\mathrm{id}_V$. Значит, любое подпространство в V является инвариантным, и представление будет неприводимым только при $\dim V = 1$. ■

Конечно, если поле не является алгебраически замкнутым, то у абелевой группы могут существовать неприводимые представления размерности больше 1. Например, представление над $\mathbb{R}$ циклической группы C_n порядка $n > 2$ поворотами евклидовой плоскости. Заметим, что над полем $\mathbb{C}$ для конечной группы G справедливо и обратное утверждение: если всякое неприводимое представление группы G одномерно, то группа G обязательно абелева (см. задачу 4.53).

Задача 4.47. Описать с точностью до эквивалентности всевозможные неприводимые представления над полем $\mathbb{C}$ циклической группы C_n.

Решение. Пусть $R\colon C_n \to \mathrm{GL}(V)$ — неприводимое представление группы C_n над полем $\mathbb{C}$, тогда $\dim V = 1$. Пусть $\mathbf{v} \in V$ — произвольный ненулевой вектор. Пусть g — образующий элемент группы C_n. Тогда $R(g)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, и $R(g)^n\mathbf{v} = \mathrm{id}_V\mathbf{v} = \lambda^n\mathbf{v}$, поэтому $\lambda^n = 1$, то есть λ — корень n-й степени из 1. Соответствующее одномерное представление обозначим R_λ. Заметим, что если μ — еще один корень n-й степени из единицы, $\lambda \neq \mu$, то представления R_λ и R_μ неэквивалентны. Следовательно, все неприводимые представления исчерпываются представлениями вида R_λ, которых (с точностью до эквивалентности) $n = \natural C_n$ штук. ■

Заметим, что конечная группа G над полем $\mathbb{C}$ имеет столько попарно неэквивалентных неприводимых представлений, сколько у нее классов сопряженных элементов. В случае абелевой группы число таких классов совпадает с порядком группы.

Задача 4.48. Пусть G — абелева группа, все элементы которой имеют конечный порядок. Доказать, что любое конечномерное представление G над $\mathbb{C}$ эквивалентно прямой сумме одномерных представлений.

Решение. Пусть $R\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ — произвольное представление группы G над полем $\mathbb{C}$. Операторы $R(g)$ имеют конечный порядок и потому, согласно задаче 2.41, диагонализируемы; кроме того, они попарно коммутируют. Тогда из задачи 2.26 следует, что для них существует общий базис из собственных векторов. Из этого с очевидностью следует требуемое. ■

Однако не для любой абелевой (и даже циклической) группы заключение условия предыдущей задачи верно. Действительно, возьмем $G = \mathbb{Z}$ и рассмотрим ее представление $R(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $n \in \mathbb{Z}$. Тем не менее для ряда классов групп всякое представление над полями $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ представляется в виде прямой суммы неприводимых (которые в случае неабелевой группы не обязательно одномерны). Для конечных групп этот результат доказан в задаче 4.52.

Определение 4.49. Представление $R\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ называется *вполне приводимым*, если у каждого инвариантного подпространства есть инвариантное прямое дополнение. Другими словами, если представление V содержит подпредставление $U \subset V$, то существует подпредставление $W \subset V$ такое, что представление V эквивалентно прямой сумме представлений $U \oplus W$.

Заметим, что, по определению, неприводимое представление вполне приводимо.

Полезно понимать условие полной приводимости как аналог “отсутствия жордановых клеток” (размера больше 1) у оператора. Действительно, жорданова клетка $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ дает пример оператора, для которого у инвариантного подпространства $\langle (1,\, 0)^T \rangle$ нет инвариантного дополнения.

Дадим еще пример приводимого, но не вполне приводимого представления конечной группы. Для этого возьмем циклическую группу C_p порядка p с образующим g, а в качестве V возьмем двумерное пространство над полем $\mathbb{K}$ характеристики p. Пусть $R(g^k) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Легко проверяется, что у инвариантного подпространства $\langle (1,\, 0)^T \rangle$ нет инвариантного дополнения.

Описание вполне приводимых представлений сильно упрощает доказательство следующего важного результата (полное доказательство см., например, в [15], гл. 11, §1).

Теорема 4.50. *Представление вполне приводимо тогда и только тогда, когда оно эквивалентно прямой сумме неприводимых представлений.*

Таким образом, неприводимые представления играют роль строительных блоков (или атомов) для вполне приводимых, причем принцип построения очень простой — взятие прямой суммы. Далее естественно ожидать утверждения о единственности представления в виде прямой суммы неприводимых (по поводу точных формулировок см. [15]).
Замечательно, что существует следующий общий результат, известный как теорема Машке.

Теорема 4.51. *Всякое линейное представление конечной группы над полем характеристики, не делящей порядок группы, вполне приводимо.*

В частности, в случае полей нулевой характеристики (таких как $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) всякое представление конечной группы G вполне приводимо.

Задача 4.52. Доказать предыдущую теорему в случае полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Решение. Пусть $R\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ — представление конечной группы G порядка $\natural G$ над $\mathbb{C}$. Идея доказательства состоит в том, что если бы пространство V было бы унитарным, а образ G при гомоморфизме R лежал бы в унитарной группе, то так как для любого инвариантного подпространства унитарного оператора его ортогональное дополнение тоже инвариантно, то в этом случае для произвольного подпредставления, беря его ортогональное дополнение, мы получили бы инвариантное прямое дополнение.
Снабдим V произвольным эрмитовым скалярным произведением $\{\cdot\,,\cdot\}$, а затем определим новое эрмитово скалярное произведение $(\cdot\,,\cdot)$ по формуле

$$(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) := \frac{1}{\natural G} \sum_{g \in G} \{R(g)(\mathbf{u}),\, R(g)(\mathbf{v})\}.$$

Покажем, что все операторы вида $R(g)$, $g \in G$ являются унитарными относительно $(\cdot\,,\cdot)$. Действительно, для произвольного $h \in G$ имеем

$$(R(h)\mathbf{u},\, R(h)\mathbf{v}) = \frac{1}{\natural G} \sum_{g \in G} \{R(h)R(g)(\mathbf{u}),\, R(h)R(g)(\mathbf{v})\} =$$

$$= \frac{1}{\natural G} \sum_{g \in G} \{R(hg)(\mathbf{u}),\, R(hg)(\mathbf{v})\} = \frac{1}{\natural G} \sum_{g \in G} \{R(g)(\mathbf{u}),\, R(g)(\mathbf{v})\}.$$

То есть окончательно получаем

$$(R(h)\mathbf{u},\, R(h)\mathbf{v}) = (\mathbf{u},\, \mathbf{v}),$$

поскольку, когда элементы g пробегают всю группу G, элементы вида hg (где $h \in G$ — некоторый фиксированный элемент) тоже пробегают всю группу G.
В случае поля $\mathbb{R}$ доказательство полностью аналогично, если вместо эрмитова взять евклидово скалярное произведение. ■

С несколько иным доказательством теоремы Машке можно ознакомиться по книге [15] (гл. 11, §2).

Задача 4.53. Пусть G — конечная группа, всякое неприводимое представление которой над $\mathbb{C}$ одномерно. Доказать, что G — абелева.

Решение. Во-первых, заметим, что существует линейное представление $R\colon G \to \mathrm{GL}(V)$, ядро которого нулевое. Например, в качестве такого V можно взять пространство, имеющее базис вида $\{\mathbf{e}_g \mid g \in G\}$, и действие операторов представления задается на базисных векторах как $R(h)\mathbf{e}_g = \mathbf{e}_{hg}$, а далее продолжается на V по линейности (это — регулярное представление, определенное в примере 4.4). Согласно предыдущей задаче, такое представление вполне приводимо, тогда по условию оно эквивалентно прямой сумме одномерных. То есть образ группы содержится в алгебре диагональных (в соответствующем базисе) матриц, которая коммутативна. ■

Следующий важный класс представлений можно рассматривать как аналог диагонализируемых операторов с различными собственными значениями.

Определение 4.54. Вполне приводимое представление называется *представлением с простым спектром*, если оно является прямой суммой попарно неэквивалентных неприводимых представлений.

Задача 4.55. Пусть $R\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ — вполне приводимое представление с простым спектром над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$. Пусть $R = R_1 \oplus \ldots \oplus R_m$ — его разложение в прямую сумму попарно неэквивалентных неприводимых представлений $R_i\colon G \to \mathrm{GL}(V_i)$, $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$. Тогда всякий эндоморфизм φ представления R имеет вид

$$\varphi(\mathbf{v}) = \sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad \text{где } \mathbf{v} = \textstyle\sum_i \mathbf{v}_i, \ \ \mathbf{v}_i \in V_i$$

для некоторых $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Другими словами, ограничение φ на каждую неприводимую компоненту является скалярным оператором.

Решение. Пусть $\psi_{ij}\colon V_i \to V_j$ есть композиция ограничения $\varphi|_{V_i}\colon V_i \to V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ с проекцией $\pi_j\colon V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m \to V_j$ на j-е прямое слагаемое. Легко видеть, что ψ_{ij} определяет морфизм представлений $R_i \to R_j$. Так как представления R_i, R_j неприводимы, то, согласно задаче 4.44, ψ_{ij} — либо нулевое отображение, либо эквивалентность. Так как представление R имеет простой спектр, то R_i неэквивалентно R_j при $i \neq j$, и в этом случае $\psi_{ij} = 0$. Из этого легко видеть, что морфизм φ сохраняет неприводимые компоненты. Если же $i = j$, то по лемме Шура $\psi_{ii} = \lambda_i \,\mathrm{id}_{V_i}$ для некоторого $\lambda_i \in \mathbb{K}$, откуда все и следует. ■

В заключение приведем одну классическую задачу, см. [29], которая подводит итог нашему краткому введению в теорию представлений групп.

Задача 4.56. В лаборатории одного института лежит модель куба. Один из сотрудников занумеровал грани куба цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6. Другой, придя в институт на следующий день, заменил каждое число на среднее арифметическое соседних чисел. Первый, заметив это, на другой день ответил тем же. Какие числа окажутся на гранях куба через месяц, если известно, что оба сотрудника ходят в институт через день?

Решение. Пусть V — 6-мерное пространство комплекснозначных функций, постоянных на гранях куба. Действие группы S_4 вращений куба на множестве его граней определяет линейное представление $R\colon S_4 \to \mathrm{GL}(V)$ (см. пример 4.4).

Попробуем разложить представление R на неприводимые компоненты. Легко видеть, что подпространства четных функций (принимающих равные значения на противоположных гранях куба) и нечетных функций (принимающих равные по модулю, но разного знака значения) инвариантны относительно представления R, и, следовательно, R разлагается в прямую сумму представлений R_e и R_o. В свою очередь, среди четных функций содержатся константы, которые образуют одномерное подпредставление R_c в R_e. Это последнее имеет в R_e дополнительное подпредставление R_e^0, пространство которого состоит из четных функций с суммой значений 0.

Оказывается, что представления R_e^0, R_o группы S_4 неприводимы (R_c неприводимо, поскольку одномерно). Таким образом, $R = R_c \oplus R_e^0 \oplus R_o$ — разложение представления R в прямую сумму неприводимых[51]. В частности, мы видим, что R — представление с простым спектром.

Докажем неприводимость представления R_e^0. Для этого заметим, что представление R_e эквивалентно представлению, полученному композицией сюръективного гомоморфизма $S_4 \to S_3$ (задаваемого действием группы вращений куба перестановками на множестве из трех пар противоположных граней) с мономиальным представлением группы S_3 (над $\mathbb{C}$, см. пример 4.3), причем $R_e = R_c \oplus R_e^0$ отвечает разложению мономиального представления на неприводимые компоненты, полученному в примерах 4.9 и 4.10. Для этого в качестве базиса в пространстве представления R_e нужно рассмотреть функции, принимающие значение 1 на некоторой паре противоположных граней и 0 на остальных гранях.

Представление R_o также неприводимо, так как оно эквивалентно комплексификации представления S_4 вращениями куба. Покажем это. Отложим базисные векторы ортонормированного базиса от центра куба со стороной 2 так, чтобы базисные векторы были перпендикулярны соответствующим граням куба. Пусть конец базисного вектора e_i лежит на грани F_i, а F_i' — противоположная грань ($i = 1, 2, 3$). Пусть g_i — функции из пространства представления R_o, равные 1 на грани F_i, -1 — на грани F_i' и 0 на остальных гранях. Теперь очевидно, что представление R_o группы S_4 на нечетных функциях — то же (точнее, эквивалентно), что и представление группы S_4 поворотами трехмерного пространства, оставляющими куб инвариантным (как подмножество).

Далее, отображение $\varphi\colon V \to V$, сопоставляющее функции $f \in V$ новую функцию $\varphi(f)$, значение которой на каждой грани равно среднему арифметическому значений f на соседних гранях, является *линейным оператором.* Ключевое наблюдение состоит в том, что оператор φ перестановочен (т.е. коммутирует) со всеми элементами $R(g) \in \mathrm{GL}(V)$, $\ g \in S_4$, то есть

$$R(g)(\varphi(f)) = \varphi(R(g)f) \ \ \forall g \in S_4,\ f \in V.$$

[51] Ниже мы даем геометрическое доказательство этого факта. Более простое и естественное доказательство опирается на понятие характера представления и дано в книге [15], гл. 11, §4, пример 7.

Последнее следует из того, что повороты сохраняют отношение смежности граней. Другими словами, φ является *эндоморфизмом* представления R. Теперь, применяя утверждение условия задачи 4.55, получаем, что ограничения φ на неприводимые компоненты R_c, R_e^0 и R_o представления R являются скалярными операторами. Вычисляя соответствующие скалярные множители, получаем: $\lambda_c = 1$, $\lambda_e^0 = -1/2$, $\lambda_o = 0$. Отсюда, возвращаясь к условию задачи, получаем, что постоянная компонента исходной функции (равная среднему арифметическому значений по всем граням, то есть $3,5$) не меняется при итерациях оператора φ, нечетная компонента после первой итерации обнуляется, а четная с нулевой суммой быстро убывает (при каждой итерации умножаясь на $-1/2$). Таким образом, с хорошей точностью ответ — постоянная функция, равная среднему арифметическому (то есть $3,5$). ■

5 Тензоры

Операция тензорного произведения и ее вариации используются во многих разделах математики, а также физики и ее приложений (от квантовой теории[52] и общей теории относительности до теории упругости), поэтому каждому, кто планирует заниматься этими науками, полезно серьезно ее изучить.

Данную часть пособия можно рассматривать только как введение в тензорные произведения векторных пространств, в ней не обсуждаются многие необходимые для теории и приложений понятия (тензорная, симметрическая и внешняя алгебры, мы также не затрагиваем таких важных вещей, как свертка, подъем и опускание индексов и т.п.). Однако мы надеемся, что данное введение подготовит читателя к изучению тензорной алгебры по учебникам (наше изложение ближе всего к [35], см. также [15]).

Понятие тензора охватывает хорошо знакомые по предыдущему тексту объекты, как векторы, линейные функционалы, линейные операторы и билинейные формы. Если V — векторное пространство (над некоторым полем $\mathbb{K}$), то векторы "живут" в само́м пространстве V, линейные функционалы — в двойственном (сопряженном) пространстве V^*, а линейные операторы и билинейные формы на V — в пространствах $V^* \otimes V$ и $V^* \otimes V^*$ соответственно, где "$\otimes$" обозначает некоторую новую операцию над векторными пространствами — их *тензорное произведение*. Полезными оказываются и элементы многократных тензорных произведений, например, $V^* \otimes V^* \otimes V$. При этом полезно рассматривать все подобные тензорные произведения копий пространств V и V^* одновременно, так как они связаны друг с другом множеством отображений (таких как свертки). Сначала мы постараемся подготовить читателя к введению этой операции на более простых примерах и после чего перейдем к ее определению и изучению.

5.1. Универсальные свойства в линейной алгебре

Мы хотим определить тензорное произведение через его универсальное свойство (такое определение в настоящее время является общепринятым в математике, но в учебной литературе оно пока встречается нечасто, см. [35]). Однако именно универсальное свойство является тем, что характеризует тензорное произведение, и кроме того, оно удобно для проведения доказательств (как будет видно в дальнейшем).

Чтобы сориентировать читателя, о свойствах какого рода пойдет речь ниже, зададимся вопросом: как среди всех множеств может быть охарактеризовано (произвольное) одноэлементное множество P (без явного описания его "строения", то есть его мощности)? Нетрудно видеть, что оно обладает

[52] Например, для квантовых систем типичны так называемые запутанные состояния, в которых известна вся возможная информация о составной системе, но при этом ничего не известно о ее подсистемах (в роли составной системы может, например, выступать система из двух спинов, в роли ее подсистем — отдельные спины). О том, как тензорные произведения позволяют описывать такие парадоксальные свойства квантовых систем, можно прочитать в научно-популярной книге [43].

следующим свойством: для любого множества S существует единственная функция $f^S: S \to P$. Этим свойством одноэлементное множество определяется однозначно с точностью до канонической биекции.

Аналогично, пустое множество $\varnothing$ однозначно определяется как такое множество Q, что для любого множества S существует единственная функция $f_S: Q \to S$.

Читателю предлагается подумать, какие математические объекты играют аналогичную роль, если вместо множеств в качестве объектов и функций в качестве отображений рассматривать a) группы и гомоморфизмы; b) векторные пространства и линейные отображения; c) кольца с единицей и гомоморфизмы колец, сохраняющих единицу.

Заметим, что не только тензорное произведение, но и другие общие математические конструкции могут быть определены через свойство универсальности. В качестве примеров из линейной алгебры приведем такие определения (внешней) прямой суммы векторных пространств и факторпространства.

Прямая сумма линейных пространств

Определение 5.1. Пусть U, V — векторные пространства над полем $\mathbb{K}$. Их *прямой суммой* назовем тройку $(W,\, \alpha,\, \beta)$, состоящую из векторного пространства W над тем же полем и линейных отображений $\alpha: U \to W,\ \beta: V \to W$, обладающую следующим *универсальным свойством*: для любого векторного пространства L над тем же полем и любой пары линейных отображений $\varphi: U \to L,\ \psi: V \to L$ существует притом единственное линейное отображение $\chi: W \to L$ такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\varphi"'] & W \arrow[d, "\chi"] & V \arrow[l, "\beta"'] \arrow[dl, "\psi"] \\ & L & \end{tikzcd} \tag{81}$$

коммутативна, то есть $\varphi = \chi \circ \alpha,\ \psi = \chi \circ \beta$.

Из определения непосредственно следует, что α и β — вложения[53], и их образы имеют нулевое пересечение как подпространства в W. Действительно, возьмем в диаграмме $L = U$, $\varphi = \mathrm{id}_U$. Тогда в силу коммутативности диаграммы $\chi(\alpha(\mathbf{u})) = \mathbf{u}\ \forall \mathbf{u} \in U$ и α — вложение. Теперь, кроме того, предположим, что ψ — нулевое отображение. Пусть $\mathbf{w} = \alpha(\mathbf{u}) = \beta(\mathbf{v})$, тогда $\chi(\alpha(\mathbf{u})) = \mathbf{u},\, \chi(\beta(\mathbf{v})) = \mathbf{0}\ \Rightarrow\ \mathbf{u} = \mathbf{0}\ \Rightarrow\ \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Теорема 5.2. *Прямая сумма U и V существует.*

Доказательство. Покажем, что прямая сумма U и V существует, предъявив ее явную конструкцию. Пусть W есть множество пар $\{(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) \mid \mathbf{u} \in U,\, \mathbf{v} \in V\}$ с покомпонентным сложением и умножением на скаляры, тогда это — векторное пространство над тем же полем. Определим линейные отображения

$$\alpha: U \to W,\ \alpha(\mathbf{u}) = (\mathbf{u},\, \mathbf{0}), \quad \beta: V \to W,\ \beta(\mathbf{v}) = (\mathbf{0},\, \mathbf{v}).$$

[53] То есть инъективные линейные отображения.

Тогда (W, α, β) — прямая сумма пространств U и V. Действительно, если даны φ и ψ, такие как в диаграмме, то если χ, делающее диаграмму коммутативной, существует, то мы должны иметь

$$\chi(\alpha(\mathbf{u})) = \chi(\mathbf{u},\, \mathbf{0}) = \varphi(\mathbf{u}), \text{ аналогично, } \chi(\beta(\mathbf{v})) = \chi(\mathbf{0},\, \mathbf{v}) = \psi(\mathbf{v}).$$

Кроме того, в силу линейности χ получаем

$$\chi(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = \chi(\alpha(\mathbf{u}) + \beta(\mathbf{v})) = \chi(\alpha(\mathbf{u})) + \chi(\beta(\mathbf{v})) = \varphi(\mathbf{u}) + \psi(\mathbf{v}).$$

Тем самым χ однозначно определено условием коммутативности диаграммы и линейностью. С другой стороны, так определенное χ действительно является линейным:

$$\chi((\mathbf{u}_1,\, \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}_2,\, \mathbf{v}_2)) = \chi(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2,\, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) =$$
$$= \varphi(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \psi(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \varphi(\mathbf{u}_1) + \psi(\mathbf{v}_1) + \varphi(\mathbf{u}_2) + \psi(\mathbf{v}_2) =$$
$$= \chi(\mathbf{u}_1,\, \mathbf{v}_1) + \chi(\mathbf{u}_2,\, \mathbf{v}_2),$$
$$\chi(\lambda(\mathbf{u},\, \mathbf{v})) = \chi(\lambda\mathbf{u},\, \lambda\mathbf{v}) = \varphi(\lambda\mathbf{u}) + \psi(\lambda\mathbf{v}) =$$
$$= \lambda\varphi(\mathbf{u}) + \lambda\psi(\mathbf{v}) = \lambda(\varphi(\mathbf{u}) + \psi(\mathbf{v})) = \lambda\chi(\mathbf{u},\, \mathbf{v}).$$

Это завершает доказательство существования прямой суммы. ■

Пусть теперь (W, α, β) и (W', α', β') — две суммы пространств U и V. Тогда по универсальному свойству сумм имеем коммутативные диаграммы:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & W \arrow[d, "\chi"] & V \arrow[l, "\beta"'] \arrow[dl, "\beta'"] \\ & W' & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & W & V \arrow[l, "\beta"'] \arrow[dl, "\beta'"] \\ & W'. \arrow[u, "\chi'"'] & \end{tikzcd}$$

Из них получаем

$$\alpha' = \chi \circ \alpha, \;\; \alpha = \chi' \circ \alpha' \;\Rightarrow\; \chi' \circ \chi \circ \alpha = \alpha,$$

$$\beta' = \chi \circ \beta, \;\; \beta = \chi' \circ \beta' \;\Rightarrow\; \chi' \circ \chi \circ \beta = \beta.$$

Значит, диаграмма

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha"'] & W \arrow[d, "\chi' \circ \chi"'] & V \arrow[l, "\beta"'] \arrow[dl, "\beta"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Но если в ней вместо $\chi' \circ \chi$ поставить id_W, то полученная диаграмма тоже будет коммутативна. Используя теперь единственность отображения, делающего диаграмму суммы (81) коммутативной, получаем $\chi' \circ \chi = \mathrm{id}_W$. Аналогично получается тождество $\chi \circ \chi' = \mathrm{id}_{W'}$.

Таким образом, из универсального свойства следует единственность прямой суммы (W, α, β) пространств U и V в следующем сильном смысле: если (W', α', β') — еще одна прямая сумма пространств U и V, то существуют такие однозначно определенные линейные отображения $\chi\colon W \to W'$ и $\chi'\colon W' \to W$, что $\chi' \circ \chi = \mathrm{id}_W$ и $\chi \circ \chi' = \mathrm{id}_{W'}$ (в этом случае они являются взаимно обратными изоморфизмами), причем $\alpha' = \chi \circ \alpha$, $\beta' = \chi \circ \beta$ и т.д. Это сильное свойство единственности выражают следующим образом.

Теорема 5.3. *Прямая сумма пространств единственна с точностью до канонического изоморфизма.*

Прямая сумма пространств U и V обычно обозначается просто $U \oplus V$ (при этом отображения α, β обычно явно не указываются).

Факторпространство. Определению факторпространства предпошлем пару задач.

Задача 5.4. Пусть $\varphi\colon V \to L$, $\psi\colon V \to W$ — линейные отображения. Когда существует линейное $\chi\colon W \to L$ такое, что $\chi \circ \psi = = \varphi$, то есть диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & W \arrow[dl, "\chi"] \\ L & \end{tikzcd}$$

коммутативна? При каком условии такое χ единственно?

Решение. Покажем, что требуемое χ существует тогда и только тогда, когда $\ker\psi \subset \ker\varphi$.

Если χ существует, то $\chi(\psi(\mathbf{v})) = \varphi(\mathbf{v})$ $\forall \mathbf{v} \in V$. Значит, если $\mathbf{v} \notin \ker\varphi$, то $\varphi(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$ и $\psi(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$, а значит, $\mathbf{v} \notin \ker\psi$.

Обратно, предположим, что $\ker\psi \subset \ker\varphi$. Определим сначала ограничение $\chi|_{\operatorname{im}\psi}$ отображения χ на подпространство $\operatorname{im}\psi \subset W$. Если $\mathbf{w} = \psi(\mathbf{v})$, то единственный способ удовлетворить требованию коммутативности диаграммы — положить $\chi|_{\operatorname{im}\psi}(\mathbf{w}) = = \varphi(\mathbf{v})$. Проверим, что этим условием $\chi|_{\operatorname{im}\psi}$ корректно определено. Пусть $\mathbf{w} = \psi(\mathbf{v}) = \psi(\mathbf{v}')$, тогда $\mathbf{v}' - \mathbf{v} \in \ker\psi \subset \ker\varphi$, а значит, $\varphi(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}')$. Проверим линейность $\chi|_{\operatorname{im}\psi}$. Если $\mathbf{w}_1 = = \psi(\mathbf{v}_1)$, $\mathbf{w}_2 = \psi(\mathbf{v}_2)$, то $\chi|_{\operatorname{im}\psi}(\mathbf{w}_1) = \varphi(\mathbf{v}_1)$, $\chi|_{\operatorname{im}\psi}(\mathbf{w}_2) = \varphi(\mathbf{v}_2)$. Кроме того, из линейности ψ имеем $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \psi(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$. Тогда

$$\chi|_{\operatorname{im}\psi}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \varphi(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \varphi(\mathbf{v}_1) + \varphi(\mathbf{v}_2) =$$

$$= \chi|_{\operatorname{im}\psi}(\mathbf{w}_1) + \chi|_{\operatorname{im}\psi}(\mathbf{w}_2).$$

Аналогично получаем $\chi|_{\operatorname{im}\psi}(\alpha\mathbf{w}) = \alpha\chi|_{\operatorname{im}\psi}(\mathbf{w})$ $\forall \mathbf{w} \in W$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Для подпространства $\operatorname{im}\psi \subset W$ выберем произвольное прямое дополнение $M \subset W$, то есть $W = \operatorname{im}\psi \oplus M$. Пусть $\tau\colon M \to L$ — произвольное линейное отображение. Теперь, используя универсальное свойство прямой суммы, для пары $\chi|_{\operatorname{im}\psi}$, τ получим единственное линейное отображение $\chi = \chi(\tau)\colon W \to L$, ограничение которого на подпространство $\operatorname{im}\psi \subset W$ есть $\chi|_{\operatorname{im}\psi}$, а на подпространство $M \subset W$ — τ, делающее диаграмму (ср. (81))

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{im}\psi \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\chi|_{\operatorname{im}\psi}"'] & \operatorname{im}\psi \oplus M \arrow[d, "\chi"] & M \arrow[l, "\beta"'] \arrow[dl, "\tau"] \\
& L &
\end{tikzcd}$$

коммутативной. Легко видеть, что χ — требуемое отображение.
Заметим, что $\chi|_{\operatorname{im}\psi}$ условием задачи определено однозначно, в то время как τ мы выбирали произвольно. Отсюда следует, что единственность χ равносильна единственности τ, последнее имеет место, только если $M = \{\mathbf{0}\}$, то есть когда ψ сюръективно. $\blacksquare$

В качестве примера применения доказанного результата получим некоторое обобщение пункта c) задачи 2.19.

Задача 5.5. Пусть V — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$ (не обязательно конечномерное), $f_1, \ldots, f_n$ — набор линейных функционалов $f_i \colon V \to \mathbb{K}$, $f \colon V \to \mathbb{K}$ — еще один функционал такой, что $\cap_{i=1}^n \ker f_i \subset \ker f$. Доказать, что тогда f является линейной комбинацией $f_1, \ldots, f_n$, то есть существуют такие скаляры $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, что $f = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n$.

Заметим, что утверждение, обратное условию задачи, также имеет место.

Решение. Рассмотрим линейное отображение

$$\varphi \colon V \to \mathbb{K}^n, \qquad \mathbf{v} \mapsto (f_1(\mathbf{v}), \ldots, f_n(\mathbf{v})).$$

Так как по условию $\cap_{i=1}^n \ker f_i \subset \ker f$, то, согласно задаче 5.4, существует линейная функция $\overline{f}$ на $\mathbb{K}^n$ такая, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{K}^n \arrow[dl, "\overline{f}"] \\
\mathbb{K} &
\end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть $f = \overline{f} \circ \varphi$. Тогда для произвольного $\mathbf{v} \in V$ имеем

$$f(\mathbf{v}) = (\overline{f} \circ \varphi)(\mathbf{v}) = \overline{f}(\sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{v})\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(\mathbf{v}),$$

где $\mathbf{e}_i$ — элементы стандартного базиса $\mathbb{K}^n$, а $\alpha_i := \overline{f}(\mathbf{e}_i)$ (согласно все той же задаче 5.4, функционал $\overline{f}$ единствен тогда и только тогда, когда φ сюръективно, что, в свою очередь, имеет место тогда и только тогда, когда $f_1, \ldots, f_n$ линейно независимы. Это дает критерий единственности α_i-х). $\blacksquare$

В разделе 2.3. мы уже дали определение факторпространства. Сейчас мы дадим его определение через универсальное свойство и установим связь между этими определениями.

Определение 5.6. Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{K}$, $U \subset V$ — его подпространство. *Факторпространством* пространства V по подпространству U называется пара $(W,\, p)$, состоящая из векторного пространства W над полем $\mathbb{K}$ и линейного отображения $p\colon V \to W$, обладающая следующим универсальным свойством: для любого векторного пространства L над тем же полем и линейного отображения $\varphi\colon V \to L$ такого, что $\ker\varphi \supset U$ существует, причем единственное, линейное отображение $\chi\colon W \to L$ такое, что $\chi \circ p = \varphi$, то есть диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varphi"'] & W \arrow[dl, "\chi"] \\ L & \end{tikzcd} \tag{82}$$

коммутативна.

Теорема 5.7. *Факторпространство V по U существует и единственно с точностью до канонического изоморфизма.*

Доказательство. Для доказательства существования мы предъявим явную конструкцию факторпространства и проверим свойство универсальности (далее мы используем обозначения из раздела 2.3.). Точнее, рассмотрим пару $(V/U,\, \pi)$, где линейное пространство V/U нами было определено ранее в разделе 2.3., а отображение $\pi\colon V \to V/U$ — каноническая проекция, определенная равенством $\pi(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}] \quad \forall \mathbf{v} \in V$.

Проверим линейность канонической проекции π:

$$\pi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = [\mathbf{u}+\mathbf{v}] = [\mathbf{u}] + [\mathbf{v}] = \pi(\mathbf{u}) + \pi(\mathbf{v}),$$

$$\pi(\lambda\mathbf{v}) = [\lambda\mathbf{v}] = \lambda[\mathbf{v}] = \lambda\pi(\mathbf{v}).$$

Далее, покажем, что $\ker\pi = U$. Действительно,

$$\mathbf{v} \in \ker\pi \quad \Leftrightarrow \quad \pi(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}] = [\mathbf{0}] \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} \in U.$$

Кроме того, так как любой элемент из U/V по определению имеет вид $[\mathbf{v}]$ для некоторого $\mathbf{v} \in V$, то проекция π сюръективна. Теперь требуемое универсальное свойство пары $(V/U,\, \pi)$ следует из предыдущей задачи.

Вот план другого, непосредственного, доказательства универсального свойства (без ссылки на предыдущую задачу). Для данного $\varphi\colon V \to L$ определим $\chi\colon V/U \to L$ как $\chi([\mathbf{v}]) = \varphi(\mathbf{v})$. Такое определение χ — следствие требования коммутативности диаграммы $\chi\circ\pi = \varphi$. Далее нужно, используя условие $U \subset \ker\varphi$, проверить корректность определения χ: то есть если $[\mathbf{v}] = [\mathbf{v}']$, то $\chi(\mathbf{v}) = \chi(\mathbf{v}')$. Затем проверить линейность χ и заметить, что требованием коммутативности диаграммы отображение χ определено однозначно.

Единственность факторпространства с точностью до канонического изоморфизма доказывается следуя той же схеме, что и для прямой суммы. Пусть $(W,\, p)$ и $(W',\, p')$ — два факторпространства пространства V по подпространству U. Тогда имеем коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p'"'] & W \arrow[dl, "f"] \\ W' & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p'"'] & W \\ W', \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

согласно которым $p' = f \circ p$, $p = f' \circ p'$, а следовательно, имеем $p = f' \circ f \circ p$, $p' = f \circ f' \circ p'$. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p"'] & W \arrow[dl, "f' \circ f"] \\ W, & \end{tikzcd}$$

но она останется коммутативной, если вместо $f' \circ f$ взять id_W. В силу единственности χ в диаграмме (82) (примененной к случаю $L = W$, $\varphi = p$) получаем, что $f' \circ f = \mathrm{id}_W$. Аналогично доказывается $f \circ f' = \mathrm{id}_{W'}$. ■

Следующая задача имеет аналоги в различных разделах алгебры, которые носят название "основной теоремы о гомоморфизмах" (групп, колец, алгебр).

Задача 5.8. Пусть $\varphi\colon V \to W$ — линейное отображение векторных пространств (не обязательно конечномерных). Доказать, что $\operatorname{im}\varphi \cong V/\ker\varphi$.

Решение. Пусть, как выше,

$$\pi\colon V \to V/\ker\varphi, \quad \pi(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]$$

— каноническая проекция на факторпространство. Пусть $\overline{\varphi}$ — *коограничение* отображения φ на $\operatorname{im}\varphi$, то есть такое отображение $\overline{\varphi}\colon V \to \operatorname{im}\varphi$, что $\overline{\varphi}(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v})\ \forall\, \mathbf{v} \in V$[54]. Определим линейное отображение $\alpha\colon V/\ker\varphi \to \operatorname{im}\varphi$, делающее диаграмму

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\overline{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"'] & \operatorname{im}\varphi \\ V/\ker\varphi \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативной, положив $\alpha[\mathbf{v}] = \varphi(\mathbf{v})$. Легко проверяется, что α корректно определено и линейно. Покажем, что α — изоморфизм. Сюръективность α очевидна. Кроме того,

$$\alpha[\mathbf{v}] = \mathbf{0} \iff \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{v} \in \ker\varphi \iff [\mathbf{v}] = \mathbf{0}.$$

Значит, α инъективно. ■

[54] Другими словами, $\overline{\varphi}$ получено из φ ограничением области значений с W на $\operatorname{im}\varphi$.

Комментарий. Предположим, что $\operatorname{im}\varphi$ конечномерен. Тогда в качестве следствия из предыдущей задачи получаем, что факторпространство $V/\ker\varphi$ также конечномерно и $\dim(V/\ker\varphi) = = \dim(\mathrm{im}\varphi)$. Вообще, если U — подпространство в V такое, что факторпространство V/U конечномерно, то размерность V/U называется *коразмерностью* U в V и обозначается $\mathrm{codim}_V U$. Например, из пункта а) задачи 2.19 следует, что если $f\colon V \to \mathbb{K}$ — ненулевой линейный функционал, то $\mathrm{codim}_V(\ker f) = 1$. Предыдущая задача очевидным образом обобщает это утверждение. Кроме того, если пространство V конечномерно, то, поскольку $\dim(V/\ker\varphi) = \dim V - \dim\ker\varphi$ (см. задачу 2.32), получаем хорошо известную формулу $\dim V = \dim\ker\varphi + \dim\operatorname{im}\varphi$.

Изучением универсальных свойств разных математических конструкций занимается теория категорий, ей посвящены отдельные параграфы в книгах [35] и [47]; много примеров универсальных конструкций также можно найти в [20], более продвинутым вопросам теории категорий посвящена [21].

5.2. Универсальное свойство тензорного произведения

Определение 5.9. Пусть U, V — векторные пространства над полем $\mathbb{K}$ (не обязательно конечномерные). Их *тензорным произведением* называется пара (W, t), которая состоит из векторного пространства W над тем же полем и билинейного отображения $t\colon U \times V \to W$, обладающая следующим *свойством универсальности*: для любого векторного пространства L над полем $\mathbb{K}$ и произвольного билинейного отображения $g\colon U \times V \to \to L$ существует, притом единственное, *линейное* отображение $f = f(g)\colon W \to L$ такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[dl, "f(g)"] \\ L & \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть $g = f(g) \circ t$.

Теорема 5.10. *Тензорное произведение двух*[55] *пространств существует.*

Доказательство. Доказательство заключается в предъявлении явной конструкции тензорного произведения, для которой нужно проверить выполнение универсального свойства. Предположим для простоты, что пространства U и V конечномерны, $\dim U = m$, $\dim V = n$.

1) Конструкция тензорного произведения. Пусть $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ и $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ — некоторые базисы в U и V соответственно. Определим пару (W, t) так: $t(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j) =: \mathbf{w}_{ij}$, где $\{\mathbf{w}_{ij}\}_{1\le i\le m,\, 1\le j\le n}$ — базис в W. Тем самым билинейное отображение t однозначно определено:

$$t(\sum_i \lambda_i \mathbf{u}_i,\, \sum_j \mu_j \mathbf{v}_j) = \sum_{i,\,j} \lambda_i \mu_j \mathbf{w}_{ij}. \tag{83}$$

[55] А также любого конечного числа — в определении нужно просто заменить билинейные отображения полилинейными.

2) Проверка универсального свойства. Пусть $g\colon U \times V \to L$ — произвольное билинейное отображение. Линейное отображение $f(g)\colon W \to L$ зададим на базисе $\{\mathbf{w}_{ij}\}_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$ пространства W формулой $f(g)(\mathbf{w}_{ij}) = g(\mathbf{u}_i,\, \mathbf{v}_j)$. Тем самым линейное отображение $f(g)$ корректно определено. Кроме того, ясно, что это — единственное линейное отображение со свойством $g = f(g) \circ t$. ■

Например, рассмотрим билинейное отображение

$$t\colon \mathbb{K}[x] \times \mathbb{K}[y] \to \mathbb{K}[x,\, y], \quad t(f,\, g)(x,\, y) := f(x)g(y).$$

Так как система $t(x^i,\, y^j) = x^i y^j$ $(i,\, j = 0,\, 1,\, 2, \ldots)$ образует базис в пространстве $\mathbb{K}[x,\, y]$, то $\mathbb{K}[x,\, y]$ — тензорное произведение пространств $\mathbb{K}[x]$ и $\mathbb{K}[y]$.

Может показаться, что конструкция тензорного произведения зависит от выбора базисов в пространствах U и V, но это не так. Например, пусть U и V конечномерны и $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ и $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ — выбранные базисы в них. Тогда, используя матрицы перехода, легко проверить, что если $\mathbf{w}_{ij} = t(\mathbf{u}_i,\, \mathbf{v}_j)$ образуют базис в W, то и для любых базисов $\{\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_m\}$ и $\{\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_n\}$ в U и V векторы $\mathbf{w}'_{ij} := t(\mathbf{u}'_i,\, \mathbf{v}'_j)$ также образуют базис в W.

В литературе можно встретить и другие конструкции тензорного произведения (см., например, [35]). Но обычно удобно работать не с конкретной реализацией, а использовать универсальное свойство.
Например, из свойства универсальности сразу получим утверждение о единственности тензорного произведения.

Теорема 5.11. *Тензорное произведение единственно с точностью до канонического изоморфизма.*

Доказательство. Мы покажем, что если $(W',\, t')$ — еще одно тензорное произведение пространств U и V, то существуют такие единственные линейные отображения $f\colon W \to W'$ и $f'\colon W' \to W$, что $f \circ t = t'$, $f' \circ t' = t$, $f' \circ f = \mathrm{id}_W$, $f \circ f' = \mathrm{id}_{W'}$. Действительно, по свойству универсальности пар $(W,\, t)$ и $(W',\, t')$ существуют такие единственные $f\colon W \to W'$ и $f'\colon W' \to W$, что диаграммы

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "t"] \arrow[d, "t'"'] & W \arrow[dl, "f"] \\ W' & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "t"] \arrow[d, "t'"'] & W \\ W' \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативны, то есть $f \circ t = t'$, $f' \circ t' = t$. Тогда диаграмма

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "t"] \arrow[d, "t"'] & W \arrow[dl, "f' \circ f"] \\ W & \end{tikzcd}$$

коммутативна, но коммутативна также диаграмма, в которой вместо $f' \circ f$ стоит id_W. В силу единственности $f' \circ f = \mathrm{id}_W$, аналогично доказывается $f \circ f' = \mathrm{id}_{W'}$. ■

То есть в указанном в теореме смысле тензорное произведение единственно ("единственно с точностью до канонического изоморфизма") и не зависит от конкретной конструкции. Пространство W обычно обозначается $U \otimes V$ и часто само называется тензорным произведением U и V.

Следствие 5.12. $\dim(U \otimes V) = \dim U \cdot \dim V$.

Доказательство. В доказательстве теоремы 5.10 мы предъявили конструкцию тензорного произведения (W, t) пространств U и V, для которой $\dim W = \dim U \cdot \dim V$, а из единственности тензорного произведения с точностью до изоморфизма следует, что $\dim(U \otimes V)$ корректно определена (то есть не зависит от выбора конкретной конструкции тензорного произведения). ■

Элементы пространства $U \otimes V$ называются *тензорами*, а элементы $U \otimes V$, лежащие в образе t, — *разложимыми тензорами* и обозначаются $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} := t(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Как следует из предыдущего, множество разложимых тензоров содержит некоторый базис пространства $U \otimes V$. Отсюда, конечно, не следует, что всякий тензор разложим (за исключением случаев, когда одно из пространств U или V имеет размерность ≤ 1): нужно помнить, что отображение t не линейное, а билинейное, и его образ в общем случае не является линейным подпространством (см. замечание ниже).

Заметим еще, что из билинейности универсального отображения $t\colon U \times V \to U \otimes V$ следуют соотношения

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{v}, \quad (\lambda \mathbf{u}) \otimes \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$$

и аналогичные соотношения для 2-го аргумента.

Введем дополнительные обозначения. Пространство билинейных отображений $U \times V \to L$ обозначим $\mathcal{L}(U, V; L)$, а пространство линейных отображений $W \to L$ — $\mathcal{L}(W; L)$.

Из определения тензорного произведения легко следует, что сопоставление $g \mapsto f(g)$ определяет канонический (то есть инвариантно определенный, не зависящий от базиса) изоморфизм линейных пространств

$$\mathcal{L}(U, V; L) \to \mathcal{L}(U \otimes V; L). \tag{84}$$

Задача 5.13. Докажите что представление ненулевого разложимого тензора $\mathbf{w} \in U \otimes V$ в виде $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ единственно с точностью до замен $\mathbf{u} \mapsto \lambda \mathbf{u}$, $\mathbf{v} \mapsto \lambda^{-1} \mathbf{v}$ $(\lambda \in \mathbb{K}^*)$.

Решение. Пусть $\mathbf{w} = \mathbf{u}' \otimes \mathbf{v}'$ для некоторых $\mathbf{u}' \in U$, $\mathbf{v}' \in V$. Включим векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ в базисы $\{\mathbf{u}_1 := \mathbf{u}, \mathbf{u}_2, \ldots\}$ и $\{\mathbf{v}_1 := \mathbf{v}, \mathbf{v}_2, \ldots\}$ пространств U и V. Пусть $\mathbf{u}' = \sum \lambda_i \mathbf{u}_i$, $\mathbf{v}' = \sum \mu_j \mathbf{v}_j$. Тогда $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}' \otimes \mathbf{v}' = \sum_{i,\, j} \lambda_i \mu_j \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j$. Поскольку $\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$ образуют базис в $U \otimes V$, то $\lambda_1 \mu_1 = 1$ и $\lambda_i = \mu_j = 0$ при $i \neq 1$, $j \neq 1$. ■

Замечание (про геометрию универсального билинейного отображения). Имеется тесная связь между универсальным билинейным отображением t и отображением Сегре (см. ниже), играющим важную роль в проективной и алгебраической геометрии. В свою очередь, отображение Сегре дает некоторое описание образа билинейного отображения (который не является линейным подпространством).

Пусть $\mathbf{P}(V)$ обозначает *проективизацию* векторного пространства V. Заметим, что имеется каноническое отображение

$$\pi_V : V \backslash \{\mathbf{0}\} \to \mathbf{P}(V),$$

сопоставляющее ненулевому вектору $\mathbf{v} \in V$ одномерное подпространство $\langle \mathbf{v} \rangle$. С его помощью легко определить отображение

$$\widetilde{t} \colon \mathbf{P}(U) \times \mathbf{P}(V) \to \mathbf{P}(U \otimes V),$$

индуцированное универсальным билинейным отображением t, и проверить его корректность (что оставляется читателю).

Из (83) следует, что в координатах относительно выбранных базисов в пространствах U и V отображение t задается следующей формулой:

$$t((\lambda_1, \ldots, \lambda_m), (\mu_1, \ldots, \mu_n)) = (\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_m\mu_n).$$

Пусть $[\lambda_1 : \ldots : \lambda_m]$ и $[\mu_1 : \ldots : \mu_n]$ — соответствующие однородные координаты на пространствах $\mathbf{P}(U)$ и $\mathbf{P}(V)$ соответственно (см. [35], часть 3, § 6). Тогда

$$\widetilde{t}([\lambda_1 : \ldots : \lambda_m], [\mu_1 : \ldots : \mu_n]) = [\lambda_1\mu_1 : \ldots : \lambda_m\mu_n].$$

Данное отображение называется *отображением* (или вложением) *Сегре* (см., например, [46]). Если $[\nu_{11} : \ldots : \nu_{mn}]$ — однородные координаты в $\mathrm{P}(U \otimes V)$, то образ отображения Сегре является пересечением квадрик

$$\nu_{ij}\nu_{kl} - \nu_{il}\nu_{kj} = 0, \;\; 1 \leq i, \, k \leq m, \; 1 \leq j, \, l \leq n.$$

Если однородные координаты ν_{ij} записать в матрицу, то выписанная система квадратных уравнений — условие того, что ранг данной матрицы равен 1 (все миноры второго порядка обращаются в нуль).

В частном случае $m = n = 2$ образ отображения Сегре

$$\widetilde{t}(\mathbf{P}(U) \times \mathbf{P}(V)) \subset \mathbf{P}(U \otimes V)$$

— квадрика

$$\nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}\nu_{21} = 0.$$

В случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ в некоторой аффинной карте она выглядит как однополостный гиперболоид, два семейства прямолинейных образующих которого отвечают проективным прямым $\{x\} \times \mathbf{P}(V)$ и $\mathbf{P}(U) \times \{y\}$, где $x \in \mathbf{P}(U)$, $y \in \mathbf{P}(V)$ — некоторые точки.

5.3. Тензорное произведение линейных отображений

Пусть даны некоторые линейные отображения

$$\varphi \colon U \to L, \;\; \psi \colon V \to M.$$

Построим линейное отображение

$$\chi\colon U\otimes V\to L\otimes M,$$

однозначно (поскольку разложимые тензоры содержат базис) задаваемое равенством

$$\chi(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})=\varphi(\mathbf{u})\otimes\psi(\mathbf{v})\ \ \forall\mathbf{u}\in U,\ \mathbf{v}\in V.$$

Для этого сначала определим билинейное отображение

$$g\colon U\times V\to L\otimes M,\ \ g(\mathbf{u},\,\mathbf{v})=\varphi(\mathbf{u})\otimes\psi(\mathbf{v}).$$

Тогда по универсальному свойству тензорного произведения существует единственное линейное отображение χ, превращающее диаграмму

$$\begin{tikzcd}
U\times V \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"'] & U\otimes V \arrow[dl, "\chi"] \\
L\otimes M &
\end{tikzcd}$$

в коммутативную. Очевидно, что χ — искомое. Его часто обозначают $\varphi\otimes\psi$ и называют *тензорным произведением линейных отображений* φ и ψ.

Если φ относительно выбранных базисов в U и L имеет матрицу A, а ψ — относительно базисов в V и M — матрицу B, то $\varphi\otimes\psi$ относительно тензорных произведений базисов в $U\otimes V$ и $L\otimes M$ (при соответствующем упорядочивании) имеет в качестве матрицы кронекерово произведение матриц $A\otimes B$.

Задача 5.14. Пусть линейные операторы $\varphi,\,\psi\colon V\to V$ в базисе $\{\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_2\}$ пространства V заданы матрицами

$$A_\varphi=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix},\qquad A_\psi=\begin{pmatrix}2&-1\\3&1\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора $\varphi\otimes\psi\colon V\otimes V\to V\otimes V$ в базисе $\{\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2,\,\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2\}$.

Решение. Имеем

$$(\varphi\otimes\psi)(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)=\varphi(\mathbf{e}_1)\otimes\psi(\mathbf{e}_1)=$$

$$=(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)\otimes(2\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2)=2\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1-3\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2;$$

аналогично

$$(\varphi\otimes\psi)(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2)=\varphi(\mathbf{e}_1)\otimes\psi(\mathbf{e}_2)=$$

$$=(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)\otimes(-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)=-\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2,$$

$$(\varphi\otimes\psi)(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1)=\varphi(\mathbf{e}_2)\otimes\psi(\mathbf{e}_1)=$$

$$=(2\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2)\otimes(2\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2)=4\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1+6\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2+6\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1+9\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2,$$

$$(\varphi\otimes\psi)(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2)=\varphi(\mathbf{e}_2)\otimes\psi(\mathbf{e}_2)=$$

$$=(2\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2)\otimes(-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)=-2\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2-3\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2.$$

Таким образом,

$$A_{\varphi\otimes\psi} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ -2 & 1 & 6 & -3 \\ -3 & -1 & 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ -1\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

— кронекерово произведение матриц A_φ и A_ψ. ■

5.4. Канонические изоморфизмы

Построим канонический изоморфизм

$$U^* \otimes V^* \cong (U \otimes V)^*. \tag{85}$$

Для этого, во-первых, определим билинейное отображение

$$g\colon U^* \times V^* \to \mathcal{L}(U,\, V;\, \mathbb{K})$$

(где $\mathcal{L}(U,\, V;\, \mathbb{K})$ обозначает векторное пространство билинейных отображений $U \times V \to \mathbb{K}$) с помощью формулы

$$g(\alpha,\, \beta)(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u})\beta(\mathbf{v}),$$

где $\alpha \in U^*$, $\beta \in V^*$, $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{v} \in V$. По универсальному свойству тензорного произведения тогда существует единственное линейное отображение

$$f\colon U^* \otimes V^* \to \mathcal{L}(U,\, V;\, \mathbb{K})$$

такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} U^* \times V^* \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"'] & U^* \otimes V^* \arrow[dl, "f"] \\ \mathcal{L}(U,\, V;\, \mathbb{K}) & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Беря композицию f с изоморфизмом (84) при $L = \mathbb{K}$, получим линейное отображение $\phi\colon U^* \otimes V^* \to (U \otimes V)^*$ (поскольку $\mathcal{L}(U \otimes V;\, \mathbb{K}) = (U \otimes V)^*$).

Покажем, что ϕ — изоморфизм. Очевидно, достаточно доказать, что f — изоморфизм. Более того, так как f — линейное отображение между пространствами одинаковой размерности, достаточно установить сюръективность f. Покажем, что

$$g(\mathbf{u}^i,\, \mathbf{v}^j) = f(\mathbf{u}^i \otimes \mathbf{v}^j),\ \ 1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n$$

составляют базис в $\mathcal{L}(U,\, V;\, \mathbb{K})$, где $\{\mathbf{u}^1, \ldots, \mathbf{u}^m\}$ — базис в U^*, двойственный базису $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ в U, а $\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n\}$ — базис в V^*, двойственный базису $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ в V. Действительно, по определению g имеем

$$g(\mathbf{u}^i,\, \mathbf{v}^j)(\mathbf{u}_k,\, \mathbf{v}_l) = \mathbf{u}^i(\mathbf{u}_k)\mathbf{v}^j(\mathbf{v}_l) = \delta^i_k\delta^j_l,$$

где
$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$
— символ Кронекера. Если $h \in \mathcal{L}(U,\, V;\, \mathbb{K})$ — произвольная билинейная форма, то $h = \sum_{i,\,j} h_{ij} g(\mathbf{u}^i,\, \mathbf{v}^j)$, где $h_{ij} := h(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j) \in \mathbb{K}$ — единственное разложение h по $g(\mathbf{u}^i,\, \mathbf{v}^j) \in \mathcal{L}(U,\, V;\, \mathbb{K})$. Тем самым сюръективность f доказана, поскольку это — линейное отображение, образ которого содержит базис. ■

Для понимания следующего канонического изоморфизма полезна такая задача.

Задача 5.15. Всякое линейное отображение $\varphi\colon U \to V$ ранга 1 имеет вид $\mathbf{u} \mapsto \xi(\mathbf{u})\mathbf{v}\ \ \forall\, \mathbf{u} \in U$, где пара $\xi \in U^*,\ \mathbf{v} \in V$ определена отображением φ однозначно с точностью до замены $\xi \mapsto \lambda\xi,\ \mathbf{v} \mapsto \lambda^{-1}\mathbf{v}$ для $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Решение. $\operatorname{rk}\varphi = \dim \operatorname{im}\varphi = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{im}\varphi = \langle \mathbf{v} \rangle$ для некоторого $\mathbf{v} \in V,\ \ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Тогда $\varphi(\mathbf{u}) = \xi(\mathbf{u})\mathbf{v}$, причем из линейности φ следует, что $\xi(\mathbf{u})$ линейно зависит от $\mathbf{u}$, то есть является линейной формой.
Ясно, что вектор $\mathbf{v}$ такой, что $\operatorname{im}\varphi = \langle \mathbf{v} \rangle$ определен отображением φ однозначно с точностью до ненулевого множителя. Также ясно, что $\langle \xi \rangle = \operatorname{Ann}(\ker\varphi)$[56], поэтому $\xi \in U^*$ также определен отображением φ однозначно с точностью до ненулевого множителя. ■

Построим теперь канонический изоморфизм
$$U^* \otimes V \cong \mathcal{L}(U;\, V). \tag{86}$$
Для этого, во-первых, определим билинейное отображение
$$g\colon U^* \times V \to \mathcal{L}(U,\, V)$$
с помощью формулы
$$g(\alpha,\, \mathbf{v})(\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{u})\mathbf{v},$$
где $\alpha \in U^*$, $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{v} \in V$. Согласно универсальному свойству тензорного произведения, существует, причем единственное, линейное отображение $f\colon U^* \otimes V \to \mathcal{L}(U;\, V)$, которое превращает диаграмму
$$\begin{tikzcd} U^* \times V \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"'] & U^* \otimes V \arrow[dl, "f"] \\ \mathcal{L}(U;\, V) & \end{tikzcd} \tag{87}$$
в коммутативную.
Покажем, что f — изоморфизм. Снова, в силу равенства размерностей, достаточно доказать его сюръективность. Из равенства $g(\mathbf{u}^i,\, \mathbf{v}_j)(\mathbf{u}_k) = \delta^i_k \mathbf{v}_j$

[56]Аннулятор $\operatorname{Ann}(W) \subset U^*$ подпространства $W \subset U$ был определен нами ранее в пункте 1) задачи 1.8.

легко получить, что матрица оператора $f(\mathbf{u}^i \otimes \mathbf{v}_j)$ в выбранных в пространствах U, V базисах есть E_{ji}, причем когда i пробегает числа от 1 до m, а j — от 1 до n, матрицы E_{ji} пробегают некоторый базис пространства $\mathcal{L}(U;\,V)$. Тем самым сюръективность установлена. ■

Интересно отметить, что образ $\operatorname{im} t$ универсального билинейного отображения t из диаграммы (87) ("разложимые тензоры") состоит в точности из линейных отображений ранга ≤ 1[57], в частности, отображение t не сюръективно, хотя его образ содержит базис $U^* \otimes V$. Это, конечно, связано с тем, что t является не линейным, а билинейным отображением (см. Замечание выше).
В частном случае $U = V$ мы имеем канонический изоморфизм

$$f\colon V^* \otimes V \to \mathcal{L}(V;\,V) =: \mathcal{L}(V). \tag{88}$$

Заметим, что в $\mathcal{L}(V)$ есть выделенный элемент, а именно тождественный оператор id_V. Какой элемент $V^* \otimes V$ ему отвечает при каноническом изоморфизме из формулы (88)? Легко видеть, что $f^{-1}(\mathrm{id}_V) = \sum_i \mathbf{v}^i \otimes \mathbf{v}_i$[58] для любой пары двойственных базисов $\{\mathbf{v}_i\}$, $\{\mathbf{v}^j\}$.
На пространстве $\mathcal{L}(V)$ имеется канонический линейный функционал следа $tr\colon \mathcal{L}(V) \to \mathbb{K}$, сопоставляющий линейному оператору его след. С другой стороны, на векторном пространстве $V^* \otimes V$ есть линейный функционал $c\colon V^* \otimes V \to \mathbb{K}$, называемый *сверткой*. Это — линейное отображение, которое на разложимых тензорах $\alpha \otimes \mathbf{v} \in V^* \otimes V$ определяется как вычисление значения линейного функционала α на векторе $\mathbf{v}$, то есть $c(\alpha \otimes \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{v}) \in \mathbb{K}$.

Задача 5.16. Показать, что при отождествлении пространства $\mathcal{L}(V)$ с $V^* \otimes V$ посредством изоморфизма (88) след переходит в свертку, то есть $tr \circ f = c$.

Решение. При изоморфизме (88) тензор $\sum_{i,\,j} t_i^j\, \mathbf{v}^i \otimes \mathbf{v}_j$ отождествляется с линейным оператором $T\colon V \to V$, имеющим в базисе $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ матрицу (t_i^j) (таким образом, верхний индекс — номер строки, нижний — номер столбца). След — линейный функционал $(t_i^j) \mapsto \sum_i t_i^i$, инвариантный относительно замен базиса. Он отвечает сопоставлению тензору $\sum_{i,\,j} t_i^j \mathbf{v}^i \otimes \mathbf{v}_j$ числа $\sum_i t_i^i$. С другой стороны,

$$c(\sum_{i,\,j} t_i^j \mathbf{v}^i \otimes \mathbf{v}_j) = \sum_{i,\,j} t_i^j \mathbf{v}^i(\mathbf{v}_j) = \sum_{i,\,j} t_i^j \delta_j^i = \sum_i t_i^i. \quad ■$$

Многие знакомые операции в линейной алгебре (например, вычисление зна-

[57] Действительно, то, что линейное отображение, отвечающее ненулевому разложимому тензору $\alpha \otimes \mathbf{v}$, $\alpha \in U^*$, $\mathbf{v} \in V$, имеет ранг 1, очевидно. В обратную сторону, если отображение $\varphi\colon U \to V$ имеет ранг 1, то $\operatorname{im}\varphi = \langle \mathbf{v} \rangle$, $\forall \mathbf{u} \in U\ \varphi(\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{u})\mathbf{v}$, $\alpha \in U^* \ \Rightarrow\ \varphi = f(\alpha \otimes \mathbf{v})$.

[58] С использованием указанного изоморфизма в квантовой механике тождественный оператор в дираковских обозначениях записывается в виде $\sum_i |i\rangle\langle i|$.

чения функционала (линейного оператора) на векторе, композиция линейных операторов, подъем (опускание) индексов в присутствии метрики и т.д.) выражаются через свертку. Дальнейшую информацию по этому поводу читатель найдет в рекомендованных учебниках (например, в [35]).

Наконец, построим канонический изоморфизм

$$\mathcal{L}(U,\, V;\, W) \cong U^* \otimes V^* \otimes W \tag{89}$$

как композицию

$$\mathcal{L}(U,\, V;\, W) \cong \mathcal{L}(U \otimes V;\, W) \cong (U \otimes V)^* \otimes W \cong U^* \otimes V^* \otimes W,$$

где мы последовательно использовали (84), (86), (85), а также ассоциативность тензорного произведения, о которой можно почитать в [35].

5.5. Тензоры малых рангов

Пусть V — конечномерное пространство над полем $\mathbb{K}$. Произвольный элемент пространства

$$T^p_q(V) := \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{q} \otimes \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p}$$

называется *тензором на* V *типа* $(p,\, q)$ *или ранга* (*валентности*) $p+q$. Перечислим тензоры малого ранга.

a) $T^0_0(V) = \mathbb{K}$[59], то есть тензоры ранга 0 на V — в точности скаляры.

b) $T^0_1(V) = V^*$, то есть тензоры типа $(0,\, 1)$ на V — линейные функционалы на пространстве V.

c) $T^1_0(V) = V$, то есть тензоры типа $(1,\, 0)$ на V — векторы из пространства V.

d) $T^0_2(V) = V^* \otimes V^*$, причем канонические изоморфизмы $\mathcal{L}(V,\, V;\, \mathbb{K}) \cong \mathcal{L}(V \otimes V;\, \mathbb{K}) = (V \otimes V)^*$ (84) и $(V \otimes V)^* \cong V^* \otimes V^*$ (85) показывают, что элементы $T^0_2(V)$ — в точности билинейные функции $V \times V \to \mathbb{K}$.

e) $T^1_1(V) = V^* \otimes V$ и канонический изоморфизм (86) позволяет отождествить $T^1_1(V)$ с $\mathcal{L}(V)$, то есть тензоры типа $(1,\, 1)$ — в точности линейные операторы на V.

f) Пространство $T^2_0(V) = V \otimes V$ отождествляется с пространством билинейных форм на V^*, что показывает композиция канонических изоморфизмов:

$$V \otimes V \cong (V \otimes V)^{**} = \mathcal{L}((V \otimes V)^*;\, \mathbb{K}) \cong$$

$$\cong \mathcal{L}(V^* \otimes V^*;\, \mathbb{K}) \cong \mathcal{L}(V^*,\, V^*;\, \mathbb{K}).$$

g) $T^1_2(V) = V^* \otimes V^* \otimes V$ и канонический изоморфизм (89) позволяет отождествить тензоры типа $(1,\, 2)$ с билинейными отображениями $V \times V \to V$, то есть со структурами алгебр на V (не обязательно ассоциативных). Дело в том, что билинейное отображение $\mu\colon V \times V \to V$ задает умножение $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 := \mu(\mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2)$ векторов из V, дистрибутивное относительно сложения.

[59] Это — категорный вариант empty product, см. примечание на с. 26.

5.6. Координатная запись тензоров

Выберем в пространстве V некоторый базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, а в двойственном пространстве V^* — соответствующий двойственный базис $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$, $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j$. Тогда, согласно предыдущему, в $T^p_q(V)$ набор

$$\{\mathbf{e}^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}^{j_q} \otimes \mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \mid 1 \le i_k,\, j_l \le n,\ 1 \le k \le p,\ 1 \le l \le q\}$$

является базисом (при выбранном упорядочивании), называемым *тензорным базисом*. Заметим, что $\dim T^p_q(V) = n^{p+q}$.

Таким образом, любой элемент $T \in T^p_q(V)$ (тензор типа $(p,\, q)$) может быть разложен по указанному базису:

$$T = \sum t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \mathbf{e}^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}^{j_q} \otimes \mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_p}.$$

Чтобы упростить обозначения, тензор типа $(p,\, q)$ часто просто записывается набором своих координат $\{t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}\}$ в данном тензорном базисе. Разумеется, набор $\{t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}\}$, вообще говоря, зависит от выбора тензорного базиса; опишем эту зависимость.

Пусть есть еще один базис $\{\mathbf{e}'\} := \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ в V и C — матрица перехода от старого базиса $\{\mathbf{e}\}$ к новому $\{\mathbf{e}'\}$. То есть $\mathbf{e}'_i = \sum \mathbf{e}_j c^j_i$, где $C = (c^j_i)$, причем в такой записи верхний индекс обозначает номер строки, а нижний — столбца. Тогда для двойственных базисов, как легко проверить, имеем $\mathbf{e}'^i = \sum d^i_j \mathbf{e}^j$, где $D = (d^j_i) = C^{-1}$. Действительно, пусть $\mathbf{e}'^j = \sum_k d^j_k \mathbf{e}^k$; тогда имеем

$$\delta^j_i = \mathbf{e}'^j(\mathbf{e}'_i) = \sum_m d^j_m \mathbf{e}^m \Big(\sum_k \mathbf{e}_k c^k_i\Big) = \sum_{k,\, m} d^j_m c^k_i \delta^m_k = \sum_k d^j_k c^k_i,$$

что в матричном виде записывается как $DC = E$, следовательно, $D = C^{-1}$[60]. Эквивалентно, имеем

$$\mathbf{e}_i = \sum_j \mathbf{e}'_j d^j_i, \quad \mathbf{e}^i = \sum_j c^i_j \mathbf{e}'^j.$$

Теперь, подставляя в равенство

$$T = \sum t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}^{j_q} = \\ = \sum t'^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} \mathbf{e}'_{k_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}'_{k_p} \otimes \mathbf{e}'^{l_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}'^{l_q}$$

полученные выражения для $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}^j$ через $\mathbf{e}'_k$, $\mathbf{e}'^l$ и приравнивая два разложения по одному тензорному базису, получаем *формулу преобразования координат тензора*:

$$t'^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} = \sum d^{k_1}_{i_1} \ldots d^{k_p}_{i_p} c^{j_1}_{l_1} \ldots c^{j_q}_{l_q} t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \tag{90}$$

[60]Таким образом, при замене базиса в V двойственный базис в V^* преобразуется по той же формуле, что и координаты вектора. Конечно, это не случайно: элементы двойственного к $\{\mathbf{e}\}$ базиса суть координатные функции относительно $\{\mathbf{e}\}$.

(суммирование по всем повторяющимся сверху и снизу индексам).
Проверим, что полученная формула согласуется с описанием тензоров малого ранга в предыдущем пункте. Например, для линейных форм из $\mathbf{e}^i = \sum c^i_j \mathbf{e}'^j$ получаем

$$\sum t_i \mathbf{e}^i = \sum c^i_j t_i \mathbf{e}'^j = \sum t'_j \mathbf{e}'^j \quad \Rightarrow \ t'_j = \sum c^i_j t_i,$$

а это — в точности формула преобразования (90) для тензоров типа (0, 1).
Аналогично, для тензоров типа (1, 0) формула (90) сводится к $t'^i = \sum d^i_j t^j$ — формуле преобразования координат вектора при замене базиса.
Далее, для тензоров типа (0, 2) формула (90) сводится к виду $t'_{ij} = \sum c^k_i c^l_j t_{kl}$, что в матричном виде записывается как $T' = = C^T T C$, то есть как формула преобразования координат билинейной формы при замене базиса.
В случае тензоров типа (1, 1) формула (90) сводится к $t'^i_j = = \sum d^i_k c^l_j t^k_l$, то есть в матричном виде к $T' = DTC = C^{-1}TC$. Это — в точности формула преобразования матрицы линейного оператора при замене базиса. Заметим, что тождественному оператору id_V отвечает тензор, который в произвольной паре двойственных базисов $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\mathbf{e}^j\}$ имеет вид $\sum_i \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_i$. Таким образом, его координаты $\{\delta^i_j\}$ не зависят от базиса в V.
Из предыдущего пункта мы знаем, что тензор типа (1, 2) — структура алгебры на V. В выбранном базисе структура алгебры задается набором из n^3 чисел γ^k_{ij}, которые определяются равенством $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_k \gamma^k_{ij} \mathbf{e}_k$. Покажем, что он преобразуется по формуле (90) как набор координат тензора типа (1, 2). Действительно, с одной стороны, по определению получаем

$$\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \sum_k \gamma'^k_{ij} \mathbf{e}'_k; \tag{91}$$

с другой стороны, используя билинейность умножения, имеем

$$\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \sum_{l,\,m} c^l_i c^m_j \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_m = \sum_{l,\,m,\,r} c^l_i c^m_j \gamma^r_{lm} \mathbf{e}_r = \sum_{l,\,m,\,r,\,k} c^l_i c^m_j \gamma^r_{lm} d^k_r \mathbf{e}'_k. \tag{92}$$

Приравнивая коэффициенты перед $\mathbf{e}'_k$ в (91) и (92), получаем

$$\gamma'^k_{ij} = \sum_{l,\,m,\,r} c^l_i c^m_j d^k_r \gamma^r_{lm},$$

что действительно совпадает с законом преобразования координат тензоров типа (1, 2). Набор $\{\gamma^k_{ij}\}$ называется *тензором структурных констант* данной алгебры.
Например, если $[\cdot\,,\cdot]\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ — векторное произведение в ориентированном трехмерном евклидовом пространстве, $\{\mathbf{e}_1,\,\mathbf{e}_2,\,\mathbf{e}_3\}$ — произвольный базис в $\mathbb{R}^3$, то набор коэффициентов $\{a^k_{ij}\}$, определенных равенствами $[\mathbf{e}_i,\,\mathbf{e}_j] = \sum_k a^k_{ij} \mathbf{e}_k$, образует тензор типа (1, 2). Действительно, из билинейности векторного произведения следует, что умножение $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = [\mathbf{u},\,\mathbf{v}]$ определяет структуру (неассоциативной) алгебры на $\mathbb{R}^3$. Таким образом, $\{a^k_{ij}\}$ — ее тензор структурных констант.

Тензор $\{t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\}$ называется *инвариантным*, если он имеет одинаковые координаты во всех тензорных базисах в $T^p_q(V)$. Если V — евклидово пространство, то $\{t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\}$ называется *изотропным*, если он инвариантен относительно ортогональных преобразований V (т.е. имеет одинаковые координаты во всех тензорных базисах, получающихся друг из друга с помощью ортогональных преобразований V). Ясно, что всякий инвариантный тензор изотропен, но, вообще говоря, не наоборот.

Задача 5.17. a) Найти все инвариантные тензоры ранга 2. b) Найти все изотропные тензоры типа (0, 2).

Решение. a) Во-первых, заметим, что если ненулевой тензор $T \in T^p_q(V)$ инвариантен, то $p = q$. Действительно, рассмотрим замену базиса $\mathbf{e}'_i = \lambda \mathbf{e}_i$, $1 \leq i \leq n$. Тогда из формулы замены координат тензора $t'^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \lambda^{q-p} t^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$.
Таким образом, достаточно рассмотреть тензоры типа (1, 1). Ранее такие тензоры мы отождествили с линейными операторами на V, причем тогда координаты тензора типа (1, 1) в тензорном базисе $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j\}$ в $V^* \otimes V$ — то же самое, что матричные элементы матрицы этого оператора в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ пространства V. Таким образом, инвариантные тензоры типа (1, 1) отвечают линейным операторам, которые имеют одинаковые матрицы во всех базисах, то есть матрицы A, такие что $CA = AC$ для любой обратимой матрицы C. Легко видеть, что тогда $A = \lambda E$, то есть инвариантные тензоры типа (1, 1) — операторы $\lambda\,\mathrm{id}_V$, кратные тождественному. Таким образом, инвариантный тензор T типа (1, 1) имеет координаты $t^j_i = \lambda \delta^j_i$.
b) Выше мы видели, что пространство тензоров типа (0, 2) отождествляется с пространством билинейных функций, при этом координаты такого тензора в тензорном базисе $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j\}$ в $V^* \otimes V^*$ — то же, что матричные элементы матрицы соответствующей билинейной функции в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ пространства V. Таким образом, нужно найти билинейные функции, имеющие одну и ту же матрицу во всех базисах, получаемых друг из друга ортогональной заменой.
Поскольку V — евклидово пространство, на нем уже задан тензор типа (0, 2) — положительно определенная симметричная билинейная функция g, задающая скалярное произведение. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — ортонормированный базис в V. Рассмотрим ортогональную замену базиса $\mathbf{e}'_i = -\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}'_j = \mathbf{e}_j$ при $j \neq i$. Тогда при $i \neq j$ получаем $t'_{ij} = -t_{ij}$, то есть изотропный тензор в этом базисе должен иметь вид $\lambda_i \delta_{ij}$. Далее, при ортогональной замене $\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}'_j = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}'_k = \mathbf{e}_k$ при $k \neq i, j$ имеем $t'_{ii} = t_{jj}$, $t'_{jj} = t_{ii}$. Таким образом, изотропный тензор t_{ij} имеет вид $\lambda\,\delta_{ij}$. То есть матрица соответствующей билинейной функции в ортонормированном базисе есть λE, и билинейная функция пропорциональна евклидовой структуре на V. ■

Комментарий. Очевидно, что не существует ненулевых изотропных тензоров ранга 1. Можно показать, что также не существует ненулевых изотропных тензоров ранга 3. Изотропные тензоры типа (4, 0) образуют трехпараметрическое семейство

$$t_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu \delta_{ik}\delta_{jl} + \nu \delta_{il}\delta_{jk}.$$

Инвариантные тензоры ранга 4 образуют двухпараметрическое семейство

$$t^{ij}_{kl} = \lambda \delta^i_k \delta^j_l + \mu \delta^i_l \delta^j_k.$$

5.7. Еще о канонических изоморфизмах

Данный раздел посвящен довольно тонким специальным вопросам, которые часто вызывают трудности при углубленном изучении линейной алгебры. Выше мы уже пользовались понятием канонического изоморфизма как такого изоморфизма, который может быть определен инвариантно, независимо от какого-либо произвола (выбора базиса и т.д.). Полное объяснение этого понятия можно дать только в рамках теории категорий. В данном разделе мы будем пользоваться следующим определением.

Пусть у нас есть пара отображений $\theta = (\theta_0, \theta_1)$, причем θ_0 произвольному конечномерному векторному пространству V (над данным полем) сопоставляет некоторое новое векторное пространство $\theta_0(V)$, которое ему изоморфно. А отображение θ_1 сопоставляет линейному отображению $\varphi\colon V \to W$ линейное отображение $\theta_1(\varphi)\colon \theta_0(V) \to \theta_0(W)$, причем $\theta_1(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{\theta_0(V)}$ и для линейных отображений $\psi\colon U \to V$, $\varphi\colon V \to W$ имеет место равенство

$$\theta_1(\varphi \circ \psi) = \theta_1(\varphi) \circ \theta_1(\psi) :\ \theta_0(U) \to \theta_0(W). \tag{93}$$

Такая пара θ называется *ковариантным функтором* из категории конечномерных векторных пространств (над данным полем) в себя. Пример: *тождественный функтор* $\mathrm{Id} = (\mathrm{Id}_0, \mathrm{Id}_1)$,

$$\mathrm{Id}_0(V) = V, \quad \mathrm{Id}_1(\varphi) = \varphi.$$

Другой пример дает *функтор двойного сопряжения*:

$$\theta_0(V) = V^{**}, \quad \theta_1(\varphi) = \varphi^{**}.$$

Помимо ковариантных, существуют *контравариантные функторы*, отличие которых от первых заключается в том, что они обращают направление стрелок. Более подробно: контравариантный функтор $\theta = (\theta_0, \theta_1)$ линейному отображению $\varphi\colon V \to W$ сопоставляет линейное отображение $\theta_1(\varphi)\colon \theta_0(W) \to \theta_0(V)$, и вместо (93) для композиции отображений $\psi\colon U \to V$ и $\varphi\colon V \to W$ имеем

$$\theta_1(\varphi \circ \psi) = \theta_1(\psi) \circ \theta_1(\varphi) :\ \theta_0(W) \to \theta_0(U). \tag{94}$$

Примером контравариантного функтора является *функтор сопряжения*:

$$\theta_0(V) = V^*, \quad \theta_1(\varphi) = \varphi^*.$$

Проверим для него (94). Для $f \in W^*$, $\mathbf{u} \in U$ имеем

$$(\varphi \circ \psi)^*(f)(\mathbf{u}) = f((\varphi \circ \psi)(\mathbf{u})) = f(\varphi(\psi(\mathbf{u}))) =$$

$$= \varphi^*(f)(\psi(\mathbf{u})) = \psi^*(\varphi^*(f))(\mathbf{u}) = (\psi^* \circ \varphi^*)(f)(\mathbf{u}),$$

откуда $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$, что в данном случае то же, что и (94).

Определение 5.18. Пусть θ — ковариантный функтор. *Изоморфизм* $\alpha\colon \mathrm{Id} \Rightarrow \theta$ между тождественным функтором Id и θ — набор изоморфизмов $\alpha_V : V \to$

$\theta_0(V)$, по одному для каждого конечномерного векторного пространства V, таких, что для любого линейного отображения $\varphi\colon V \to W$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha_V"] \arrow[d, "\varphi"'] & \theta_0(V) \arrow[d, "\theta_1(\varphi)"] \\ W \arrow[r, "\alpha_W"] & \theta_0(W) \end{tikzcd}$$

коммутативна.
Некоторый изоморфизм $\beta\colon V \to \theta_0(V)$ линейных пространств называется *каноническим*, если существует изоморфизм функторов $\alpha\colon \mathrm{Id} \Rightarrow \theta$ такой, что $\beta = \alpha_V$.

Существование канонического изоморфизма $\beta\colon V \to \theta_0(V)$ подразумевает существование конструкции α, которая для всякого конечномерного пространства W порождает изоморфизм $\alpha_W : W \to \theta_0(W)$, причем $\beta = \alpha_V$, и для этих изоморфизмов диаграммы в определении выше коммутативны.

Задача 5.19. Построить канонический изоморфизм

$$\varepsilon_V : V \to V^{**}.$$

Решение. Напомним, что для каждого векторного пространства V определено линейное отображение $\varepsilon_V : V \to V^{**}$, сопоставляющее вектору $\mathbf{v} \in V$ функционал $\varepsilon_V(\mathbf{v})$ на пространстве линейных функционалов V^*, принимающий на $f \in V^*$ значение, равное значению f на векторе $\mathbf{v}$, т.е. $\varepsilon_V(\mathbf{v})(f) = f(\mathbf{v})$. Кроме того, в курсе линейной алгебры доказывается, что в случае конечномерного V отображение ε_V является изоморфизмом линейных пространств.
Мы утверждаем, что (для конечномерных V) набор $\{\varepsilon_V\}$ определяет изоморфизм между тождественным функтором и функтором двойного сопряжения.
Для доказательства этого нужно проверить коммутативность всевозможных квадратов вида

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varepsilon_V"] \arrow[d, "\varphi"'] & V^{**} \arrow[d, "\varphi^{**}"] \\ W \arrow[r, "\varepsilon_W"] & W^{**}. \end{tikzcd} \tag{95}$$

Для удобства выкладок введём обозначение $\psi := \varphi^* : W^* \to V^*$. Для произвольного $\mathbf{v} \in V$ рассмотрим линейный функционал $\varepsilon_V(\mathbf{v}) \in V^{**}$ такой, что $\varepsilon_V(\mathbf{v})(f) = f(\mathbf{v}) \ \ \forall f \in V^*$. Применив к нему φ^{**} (то есть ψ^*), получим элемент $\psi^*(\varepsilon_V(\mathbf{v})) \in W^{**}$ такой, что

$$\psi^*(\varepsilon_V(\mathbf{v}))(g) = \varepsilon_V(\mathbf{v})(\psi(g)) \ \ \forall g \in W^*,$$

причём

$$\varepsilon_V(\mathbf{v})(\psi(g)) = \varepsilon_V(\mathbf{v})(\varphi^*(g)) = \varphi^*(g)(\mathbf{v}) = g(\varphi(\mathbf{v})).$$

Такой ответ мы получили, двигаясь по диаграмме вправо и вниз, начав с вектора $\mathbf{v} \in V$. Путь вниз и вправо даёт нам элемент $\varepsilon_W(\varphi(\mathbf{v})) \in W^{**}$, который на произвольном $g \in W^*$ принимает значение $\varepsilon_W(\varphi(\mathbf{v}))(g) = g(\varphi(\mathbf{v}))$, то есть то же, что и $\varphi^{**}(\varepsilon_V(\mathbf{v}))$, откуда и следует коммутативность диаграммы. ■

Комментарий. Заметим, что если V бесконечномерно, то отображение $\varepsilon_V : V \to V^{**}$ остается инъективным, но перестает быть сюръективным. Более того, пространство V изоморфно своему двойственному V^* тогда и только тогда, когда оно конечномерно. Например, читателю предлагается доказать, что пространство многочленов $\mathbb{Q}[x]$ не изоморфно своему двойственному (указание: сравните мощности). В функциональном анализе для нормированного пространства V вместо пространства V^* *всех* линейных функционалов на V обычно рассматривают его подпространство $V^\sharp \subset V^*$, состоящее из *ограниченных* функционалов. В этом случае определено отображение $\varepsilon_V^\sharp : V \to V^{\sharp\sharp}$, которое в некоторых случаях (например, для гильбертовых пространств) является изоморфизмом. Такие (нормированные) пространства называются *рефлексивными*.

Задача 5.20. Существует ли канонический изоморфизм

$$V \to V^*?$$

Решение. Как было отмечено выше, функтор сопряжения контравариантный, то есть линейному отображению $\varphi\colon V \to W$ он сопоставляет отображение

$$\varphi^*\colon W^* \to V^*, \quad \varphi^*(f)(\mathbf{v}) = f(\varphi(\mathbf{v})).$$

Если $\alpha_V : V \to V^*$ — канонический изоморфизм, то аналог диаграммы (95) должен выглядеть так:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha_V"] \arrow[d, "\varphi"'] & V^* \\ W \arrow[r, "\alpha_W"] & W^* \arrow[u, "\varphi^*"'] \end{tikzcd}.$$

В частности, полагая $W = V$, для любого линейного оператора $\varphi\colon V \to V$ мы должны иметь коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha_V"] \arrow[d, "\varphi"'] & V^* \\ V \arrow[r, "\alpha_V"] & V^* \arrow[u, "\varphi^*"'] \end{tikzcd}.$$

Полагая $\varphi = 0$, мы видим, что из коммутативности диаграммы следует $\alpha_V = 0$. ■

Комментарий. Отметим, что если мы ограничимся рассмотрением только *евклидовых* пространств V, то канонический изоморфизм $\alpha_V : V \to V^*$ будет существовать. Точнее, изоморфизм α_V, сопоставляющий произвольному вектору $\mathbf{v} \in V$ функционал $\alpha_V(\mathbf{v}) \in V^*$, $\alpha_V(\mathbf{v})(\mathbf{u}) := (\mathbf{v}, \mathbf{u})_V \ \forall\, \mathbf{u} \in V$, где $(\cdot,\cdot)_V$ — скалярное произведение на V, будет каноническим. Это связано с тем, что сопоставление $V \mapsto \theta_0(V) = V^*$ в случае евклидовых V можно продолжить до *ковариантного* функтора, определив θ_1 на линейном отображении $\varphi\colon V \to W$ (где W — еще одно евклидово пространство) по следующей формуле. Пусть $f \in V^*$, тогда существует единственный $\mathbf{v} \in V$ такой, что $f = \alpha_V(\mathbf{v})$. Тогда $\theta_1(\varphi)(f) := \alpha_W(\varphi(\mathbf{v}))$. Теперь для евклидовых пространств V, W коммутативность всех диаграмм из определения 5.18 непосредственно следует из определений входящих в них отображений.

В задаче 5.19 нами был построен канонический изоморфизм $\varepsilon_V : V \to V^{**}$. Естественно задаться вопросом: сколько таких изоморфизмов?

Задача 5.21. Описать канонические изоморфизмы $V \to V^{**}$.

Решение. Канонический изоморфизм — семейство изоморфизмов $\alpha_V : V \to V^{**}$, по одному для каждого конечномерного векторного пространства V над данным полем $\mathbb{K}$, которые согласованы в следующем смысле: для любого линейного отображения $\varphi \colon V \to W$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha_V"] \arrow[d, "\varphi"'] & V^{**} \arrow[d, "\varphi^{**}"] \\ W \arrow[r, "\alpha_W"] & W^{**} \end{tikzcd} \tag{96}$$

коммутативна.

В частности, если $W = V$, то для любого линейного оператора $\varphi \colon V \to V$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha_V"] \arrow[d, "\varphi"'] & V^{**} \arrow[d, "\varphi^{**}"] \\ V \arrow[r, "\alpha_V"] & V^{**}. \end{tikzcd}$$

Иначе говоря, $\forall$ линейного $\varphi \colon V \to V$, $\forall\ f \in V^*$, $\forall\ \mathbf{v} \in V$ имеем равенство

$$(\alpha_V(\mathbf{v}),\, \varphi^*(f)) = (\alpha_V(\varphi(\mathbf{v})),\, f), \tag{97}$$

где внешние скобки обозначают каноническую (ни от чего не зависящую) билинейную функцию $V^{**} \times V^* \to \mathbb{K}$.

Рассмотрим билинейную функцию

$$b \colon V^* \times V \to \mathbb{K}, \quad b(f,\, \mathbf{v}) := (\alpha_V(\mathbf{v}),\, f).$$

Тогда равенство (97) перепишется в виде

$$b(\varphi^*(f),\, \mathbf{v}) = b(f,\, \varphi(\mathbf{v})). \tag{98}$$

Выберем базис $\{\mathbf{e}_i\}$ в V и двойственный к нему $\{\mathbf{e}^j\}$ в V^*; пусть φ имеет матрицу Φ в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$, тогда φ^* имеет матрицу Φ^T в двойственном базисе $\{\mathbf{e}^j\}$. В этих базисах равенство (98) перепишется в виде

$$(\Phi^T \overrightarrow{f})^T B \overrightarrow{v} = \overrightarrow{f}^T B \Phi \overrightarrow{v}, \quad \text{то есть} \quad \overrightarrow{f}^T \Phi B \overrightarrow{v} = \overrightarrow{f}^T B \Phi \overrightarrow{v}.$$

Отсюда получаем, что матрица B билинейной формы b коммутирует со всеми матрицами Φ, то есть является скалярной матрицей λE. С другой стороны, легко видеть, что “стандартный” канонический изоморфизм

$$\varepsilon_V \colon V \to V^{**}, \;\; \varepsilon_V(\mathbf{v})(f) = f(\mathbf{v}) \;\; \forall \mathbf{v} \in V,\, f \in V^*$$

отвечает матрице $B = E$, так как в этом случае $(\varepsilon_V(\mathbf{v}),\, f) = = f(\mathbf{v}) = \overrightarrow{f}^T \overrightarrow{v}$. Следовательно, множество канонических изоморфизмов $V \to V^{**}$ отождествляется с множеством ненулевых скаляров из поля $\mathbb{K}$: любой такой изоморфизм α_V имеет вид $\lambda\,\varepsilon_V,\;\; \lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. Причем скаляр λ один и тот же для всех V в силу согласованности (96) изоморфизмов для разных пространств. ■

Литература

[1] Алания Л. А. и др. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре /под редакцией Ю.М. Смирнова / Изд. 2-е, перераб. и доп. — М.: Логос, 2005.—376 с.

[2] Алексеев В.Б. Теорема Абеля в задачах и решениях / —М.:МЦНМО, 2001. — 192с. https://www.mccme.ru/free-books/pdf/alekseev.pdf

[3] Аржанцев И. В. и др. Сборник задач по алгебре /под редакцией А.И. Кострикина /— М.: МЦНМО, 2009.—408 с.

[4] Арнольд В. И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. — М.: МЦНМО, 2002.—40 с.

[5] Арнольд В. И. Математические методы классической механики: учебное пособие. Изд. 5-е, стереотипное.— М.: Эдиториал УРСС, 2003.—416 с.

[6] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Новое изд., исправл.— М.: МЦНМО, 2012.—344 с.

[7] Арутюнов А.А., Ершов А.В. Дополнительные задачи по линейной алгебре /М.:МФТИ, 2017. — 209с.

[8] Баез Джон С. Октонионы. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(5), Vol 3, 2006, 120–176сс.

[9] Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учебн. пособие / под ред. Д.В. Беклемишева 2-е изд., перераб. — М.: Физматлит, 2012.—496 с.

[10] Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учеб. для вузов. — 12-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2009. — 312 с.

[11] Беклемишев Д. В Решение задач из курса аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Физматлит, 2014. — 192 с.

[12] Беклемишев Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 336 с.

[13] Бесов О. В. Лекции по математическому анализу. — М.: Физматлит, 2014. — 480 с.

[14] Бурцев А. А. Элементы математической кибернетики и дискретной математики: учеб. пособие. — М.: МФТИ, 2012. — 160 с.

[15] Винберг Э. Б. Курс алгебры. — 2-е изд., стереотип.— М.: МЦНМО, 2013.—592 с.

[16] Винберг Э. Б., Демидов Е. Е., Шварцман О. В. Задачи по алгебре. — М.: МЦНМО, 1997.—56 с.

[17] Гайфуллин А. А., Пенской А. В., Смирнов С. В. Задачи по линейной алгебре и геометрии.— М.: МЦНМО, 2014. — 152 с.

[18] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1966.— 576 с.

[19] Городенцев А. Л. Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Часть 1.— М.: МЦНМО, 2013.—488 с.

[20] Ершов А. В. Категории и функторы: учебное пособие. Электронный адрес: `window.edu.ru/resource/165/77165`

[21] Ершов А. В. Функторные морфизмы: учебное пособие. Электронный адрес: `window.edu.ru/resource/166/77166`

[22] Зорич В. А. Математический анализ. Часть II. — 6-е изд., дополн. — М.: МЦНМО, 2012.—818 с.

[23] Игнатьев М. В. Квантовая комбинаторика. // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 18 М.: МЦНМО, 2014. С. 66–111.

[24] Кантор И. Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1973. — 144 с.

[25] Канторович Л.В., Акилов Г.П. - Функциональный анализ (3е изд., Наука, 1984) — 750 с.

[26] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. – Основы теории групп, 3-е изд., Наука, 1982 — 287с.

[27] Кассель К. Квантовые группы — М.: ФАЗИС, 1999.—698 с.

[28] Кириллов А. А. Что такое число? — М.: Физматлит, 1993.—80 с.

[29] Кириллов А. А. Элементы теории представлений. — М.: Наука, 1978.— 343 с.

[30] Клячко А.А. Теория групп. — http://halgebra.math.msu.su/staff/klyachko/sk.htm

[31] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа — М.: Наука, 1976 —543 с.

[32] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Ч. I. Основы алгебры. — Новое издание. — М.: МЦНМО, 2009.—272 с.

[33] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Ч. II. Линейная алгебра. — Новое издание. — М.: МЦНМО, 2009.—368 с.

[34] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Ч. III. Основные структуры алгебры. — Новое издание. — М.: МЦНМО, 2009.—272 с.

[35] Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.—320 с.

[36] Ландо С. К. Введение в дискретную математику.— М.: МЦНМО, 2012.—265 с.

[37] Ландо С. К. Лекции о производящих функциях.— 2-е изд., испр.— М.: МЦНМО, 2004.—144 с.

[38] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. — М.: МИР, 1980. — 445 с.

[39] Петрович А. Ю. Лекции по математическому анализу. Ч.2. Многомерный анализ, интегралы и ряды. М.: МФТИ, 2012. – 268 с.

[40] Понтрягин Л. С. Обобщения чисел.— М.: Наука, 1986. – 120 с. (Библиотечка “Квант”, выпуск 54).

[41] Прасолов В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры.— Новое изд., перераб.– М.: МЦНМО, 2015. – 576 с.

[42] Прасолов В. В., Шварцман О. В. Азбука римановых поверхностей.— М.: МЦНМО, 2014.— 148 с.

[43] Сасскинд Л., Фридман А. Квантовая механика. Теоретический минимум.— СПб.: Питер, 2015. — 400 с. — (Серия «New Science»).

[44] Смирнов Е.Ю. Группы отражений и правильные многогранники. — М.:МЦНМО, 2018 — 56с.

[45] Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. — М.:МЦНМО, 2003 – 216с.

[46] Харрис Дж. Алгебраическая геометрия. Начальный курс.— М.: МЦНМО, 2006. — 400 с.

[47] Шафаревич И. Р. Основные понятия алгебры.— Ижевск, Ижевская республиканская типография, 1999.—348 с.

[48] Cooperman G., Finkelstein L., Sarawagi N. (1991) Applications of Cayley graphs. In: Sakata S. (eds) Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes. AAECC 1990. Lecture Notes in Computer Science, vol 508. Springer, Berlin, Heidelberg

[49] Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson, and John Dethridge The Diameter of the Rubik's Cube Group Is Twenty, SIAM J. Discrete Math., 27(2), 1082–1105

[50] Maschke, H. "The Representation of Finite Groups, Especially of the Rotation Groups of the Regular Bodies of Three-and Four-Dimensional Space, by Cayley's Color Diagrams." American Journal of Mathematics, vol. 18, no. 2, 1896, pp. 156–194

[51] Igor Pak, Rados Radoicic, Hamiltonian paths in Cayley graphs, Discrete Mathematics, Volume 309, Issue 17, 2009, Pages 5501-5508.

[52] R.D. Schafer, On the algebras formed by the Cayley-Dickson process. American J. of Math. 76 (1954), no. 2., 435-446.

[53] Wildon Mark A short proof of the existence of Jordan Normal Form.— `www.math.vt.edu/people/renardym/class_home/Jordan.pdf`

Учебное издание

Арутюнов Андроник Арамович
Ершов Андрей Владимирович

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Редактор . Корректор
Компьютерная верстка

Подписано в печать ??.07.2016. Формат 60×84 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 20,5. Уч.-изд. л. 20,0. Тираж 100 экз. Заказ № ???.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@.mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mail.mipt.ru