1 Геометрия масс твёрдого тела

1.1 Тензор инерции

Движение тела может быть разбито на поступательное плюс вращательное. Есть три классические величины: $\boldsymbol{Q} = m\boldsymbol{v}_C$, $T = \frac{mv^2}{2} + T_{\dots}^{\dots}$, $\boldsymbol{K}$. Мгновенная ось вращения проходит через точку O.

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i \equiv \widetilde{r}_i \boldsymbol{\omega}, \qquad \widetilde{r}_i = \begin{pmatrix} 0 & z_i & -y_i \\ -z_i & 0 & x_i \\ y_i & -x_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Известно, что

$$v_i^2 = (\widetilde{r}_i \boldsymbol{\omega})^{\mathrm{T}} (\widetilde{r}_i \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \widetilde{r}_i^{\mathrm{T}} \widetilde{r}_i \boldsymbol{\omega}.$$

Так приходим к

Def 1.1. Тензором величину назовём величину

$$\hat{J}_0 = \sum m_i \widetilde{r}_i^{\mathrm{T}} \widetilde{r}_i. \tag{1.1}$$

Тогда кинетическую энергию запишем, как

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \hat{J}_0 \boldsymbol{\omega}. \tag{1.2}$$

Но опыт кричит о том, что там момент инерции, действительно

$$J_e = \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}} \hat{J}_0 \boldsymbol{e}. \tag{1.3}$$

Найдём его элементы:

$$\widetilde{r}_i^{\mathrm{T}} \widetilde{r}_i = \begin{pmatrix} y_1^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + y_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} = \hat{j}_i, \tag{1.4}$$

суммируя, получим

$$\hat{J}_0 = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

где J_x – *осевые моменты инерции*, а J_{xy} – центробежные момент инерции.

Но, в силу симметричности тензора, существуют такие оси, что

$$\hat{J}_0 = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

1.2 Кинетический момент

Кинетический момент найдём из

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \boldsymbol{v}_i \left[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i\right] = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2} \sum m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{K}_O, \tag{1.7}$$

тогда

$$\boxed{\boldsymbol{K}_O = \hat{J}_O \boldsymbol{\omega}}. \tag{1.8}$$

На самом деле

$$\hat{J}_0 \colon \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3 \to \boldsymbol{K}_O \in \mathbb{R}^{\nVdash},$$
$$\boldsymbol{\omega}, \Omega \colon \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3 \to \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Вообще, получается $\boldsymbol{K}_O \nparallel \boldsymbol{\omega}$.

Введём оси $\xi\eta\zeta$, тогда в них

$$\hat{J}_0 = \mathrm{diag}(A, B, C), \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right), \qquad \boldsymbol{K}_O = \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

1.3 Компоненты тензора инерции в других СО

1.3.1 Поворот

Во-первых, посмотрим на поворот

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_1^{\mathrm{T}}\hat{J}_{O1}\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\hat{J}_{O2}\boldsymbol{\omega}_2, \qquad \boldsymbol{\omega}_1 = R\boldsymbol{\omega}_2,$$

Тогда

$$\boxed{\hat{J}_{O1} = R^{-1}\hat{J}_{O2}R}. \tag{1.10}$$

1.3.2 Параллельный перенос (Т. Гюйгенса-Штейнера)

Запишем

$$\hat{J}_O = \hat{J}_C + m\,\hat{j}_{CO}, \tag{1.11}$$

если $\vec{CO} = (\xi\eta\zeta)$, то

$$\hat{j}_{CO} = \begin{pmatrix} \eta^2+\zeta^2 & -\xi\eta & -\xi\zeta \\ -\xi\eta & \xi^2+\zeta^2 & -\eta\zeta \\ -\xi\zeta & -\eta\zeta & \xi^2+\eta^2 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

1.4 Цилиндр

Перейдём к переменным r, φ, z, тогда, например

$$J_z = \int \left(x^2+y^2\right)\rho\,dV = \frac{M}{\pi R^2 H}\iiint r^2 r\,dr\,d\varphi\,dz. \tag{1.13}$$

Считая, получим

$$\hat{J}_C = \mathrm{diag}\left(\frac{MR^2}{4}+\frac{MH^2}{12},\ \frac{MR^2}{4}+\frac{MH^2}{12},\ \frac{MR^2}{2}\right). \tag{1.14}$$

В частности, при $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} R & 0 & -H/2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, получим

$$\hat{J}_A = \hat{J}_C + m\hat{j}_{CA} = \begin{pmatrix} A & 0 & \frac{1}{2}MRH \\ 0 & B & 0 \\ \frac{1}{2}MRH & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Теперь приведем к главным осям, поворотом относительно оси z:

$$\hat{J}'_A = \mathrm{diag}\left(A', B', C'\right) = R^{\mathrm{T}}\hat{J}_A R, \qquad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Решая, получим

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = 4\sqrt{3}.$$

Подставляя, найдём

$$\hat{J}'_A = \frac{mR^2}{4}\,\mathrm{diag}\left(2, 9, 9\right).$$

Ну или просто к главным осям привести можно, через собственные числа.

1.5 Диск

Есть некоторая квадратная рама (полное условие см. дополнение). Для простоты положим $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Найдём $T, \boldsymbol{N}_A, \boldsymbol{N}_B$.

Во-первых,

$$T = \frac{1}{2}mV_O^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}\hat{J}_O\boldsymbol{\Omega},$$

где $v_O = \omega a/2$. Выберем такие оси, что

$$\hat{J}_O = \frac{1}{4}mR^2\,\mathrm{diag}\left(1, 1, 2\right).$$

Посчитаем теперь $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} O & \omega\sqrt{2}/2 & \omega\sqrt{2}/2+\omega \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Из теоремы об изменение импульса

$$m\mathbf{w}_O = \boldsymbol{N}_A + \boldsymbol{N}_B, \qquad m\frac{\omega^2\ a^2/4}{a/2} = N_A + N_B.$$

А ещё знаем, что

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{K}_A = \boldsymbol{\omega}_1 \times \left[\left(\hat{J}_O + m\hat{j}_{OA}\right)\boldsymbol{\Omega}\right] = \overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{N}_B.$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{K}_A = \boldsymbol{\omega}_1 \times \left[\left(\hat{J}_O + m\hat{j}_{OA}\right)\boldsymbol{\Omega}\right] = \overrightarrow{AB} \times \mathbf{N}_B.$$

2 Уравнения Лагранжа

2.1 Конфигурационное многообразие

Каждую материальную точку можем определить $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N$ – итого $\mathbb{R}^{3N}$. Но есть некоторые ограничения вида $f_i(\boldsymbol{r}, t) = 0$.

Вложим в фазовое пространство многообразие M, в котором локально всё хорошо. Тогда $\dim M = n$ – число степеней свободы, а параметризация $q_1, \ldots, q_N$ – криволинейные координаты. В каждой $A \in M$ верно, что $\dot{\boldsymbol{q}} \in TM_A$, то есть

$$TM = \bigcup_q T_q M \ni (q, \dot{q}) \tag{2.1}$$

Примеры:

Для маятника, например, его множеством положений будет окружность. Для маятника в пространстве это будет сфера. И для маятника с $l(t) = \sin\omega t + 2$ это тоже будет окружность! То есть многообразие может быть не стационарно.

А вот для стержня в пространстве $M = \mathbb{R}^2 \times S^1$. Твёрдое тело с неподвижной точкой? По теореме Эйлера о конечном повороте, достаточно задать орт и угол. Для орта это будет S^2, а для угла отрезок $[-\pi, \pi]$. Берем шар и заклеиваем все диаметрально-противоположные точки – конфигурационное многообразие $SO(3) \sim RP^3$.

2.2 О связях

Например для окружности $\dot{x} = \dot{\varphi} r \ \Rightarrow\ x = \varphi r + \text{const}$. А вот для сферы все не так радужно. Получается системы бывают *голономные* ($f_i(q, \dot{q}, t) = 0$ интегрируемые) и *неголономные* ($f_i(q, \dot{q}, t) = 0$ неинтегрируемые).

Давайте запишем второй закон Ньютона:

$$m_i \mathbf{w}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i, \qquad \Big|_{\cdot\, d\boldsymbol{r}_i}$$

где $\boldsymbol{R}_i$ – реакции связи. Хотим записать уравнение в общековариантном виде. Но

$$d\boldsymbol{r}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^k}\overset{\delta}{\cancel{d}}q_k + \cancel{\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}dt} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^k}\delta q_k, \qquad \text{— виртуальные перемещения.}$$

То есть мы «замораживаем» время, так чтобы $\boldsymbol{R} \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0$. На таких перемещениях работа реакция связи равна 0.

$$\left[\sum m_i \left(\omega_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right) - \left(\boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right) - \underbrace{\left(\boldsymbol{R}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right)}_{\cdot \delta q_k \to 0}\right] \cdot \delta q_k = 0 \tag{2.2}$$

Другими словами

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\sum m_i \frac{v_i^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_k}\sum m_i \frac{v_i^2}{2} - \sum \boldsymbol{F}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right]\delta q_k = 0.$$

Тогда

$$\sum_k \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k\right]\delta q_k = 0. \tag{2.3}$$

Проблема остается в неголономных системах, где δq_k не являются независимыми, получается, что **уравнения Лагранжа справедливы для голономных систем**.

2.3 Обобщенная сила

Во-первых

$$\delta A = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_i \boldsymbol{F}_i \sum_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_k \sum_i \left(\boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_k \underbrace{\frac{\delta A_k}{\delta q_k}}_{Q_k} \delta q_k.$$

Тогда пусть $\Pi(q,t)$: $Q_k = -\partial \Pi / \partial q_k$. Тогда

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T-\Pi)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial (T-\Pi)}{\partial q_k} = 0, \tag{2.4}$$

где вводим

$$L = T - \Pi, \qquad — \textit{лагранжиан.}$$

Приходим к

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n} \tag{2.5}$$

системе уравнений на $2n$ переменных.

2.4 Алгоритм на примере типичной задачи (12.37)

$\triangle$.

I. **Определить количество степеней свободы.**
В частности цилинд без проскальзывания и свободный цилиндр – 2 степени свободы, а в качестве координат $q = (x, \varphi)$.

II. **Посчитать кинетическую энергию.**

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} J \omega^2.$$

Но, по замечательной формуле,

$$V_c^2 = (\boldsymbol{v}_c^e)^2 + (\boldsymbol{v}_c^r)^2 + 2(\boldsymbol{v}_c^e \cdot \boldsymbol{v}_c^r) = \dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2 (R-r)^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi}(R-r)\cos\varphi.$$

Собираем всё вместе

$$\begin{aligned} T = \frac{M+m}{2} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} \left(\dot{\varphi}^2 (r-r)^2 + 2\dot{\varphi}(R-r)\dot{x}\cos\varphi \right) + \frac{mr^2}{4} \frac{\dot{\varphi}^2 (R-r)^2}{r^2} = \\ = \frac{M+m}{2} \dot{x}^2 + \frac{3}{4} m \dot{\varphi}^2 (R-r)^2 + m\dot{x}\dot{\varphi}(R-r)\cos\varphi. \end{aligned}$$

III. **Найти потенциальную энергию или обобщенные силы**.

$$\Pi = \frac{1}{2} c x^2 + mg(R-r)(1-\cos\varphi).$$

IV. **Найти лагранжиан** $L = T - \Pi$.

V. **Дифференцировать.**

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (m+M)\dot{x} + m\dot{\varphi}(R-r)\cos\varphi, \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= cx. \end{aligned} \right\} \quad \Rightarrow \quad (m+M)\ddot{x} + m\ddot{\varphi}(R-r)\cos\varphi - m\dot{f}^2 (R-r)\sin\varphi - cx = 0.$$

$\square$

2.5 ✗Законы сохранения

Во-первых теперь ЗСЭ выглядит так:

$$\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = \text{const}. \tag{2.6}$$

Что работает, когда время не входит в L. Аналогично для импульса, когда x не входит в L.

Задача 12.64

Кольцо вращается с постоянной угловой скоростью[1]

$\triangle$.

I. Степени свободы:
$$n = 1,\ q = \varphi.$$

II. Кинеическая энергия
$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{\varphi}^2 R^2 + \omega R \sin\varphi)^2\right).$$

III. Потенциальная энергия
$$\Pi = \frac{1}{2} c R^2 (\varphi - \varphi_0)^2 + mgR\cos\varphi.$$

IV. Дифференцируем

$\square$

[1] Это не свобода, а склерономная связь.