

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ КУРСА «АНАЛИЗ НА МНОГООБРАЗИЯХ»

А.В. ПЕНСКОГО

Авторы: Хоружий Кирилл

От: 2 декабря 2020 г.

Содержание

1 Лекция № 1	2
1.1 Векторы как дифференцирование функций	2
1.2 Дифференцирование как вектор	2
1.3 Замена координат	3
1.4 Коммутатор	3
2 Лекция № 2	3
2.1 Обратный образ	3
2.2 Тензор	4
3 Лекция № 3	4
3.1 Дифференциальная форма	4
3.2 Билинейные формы	5
3.3 Полилинейные формы	5
3.4 Внешний дифференциал	6
4 Лекция № 4	6
4.1 Обращение с обратным образом (?)	6
4.2 Кривые	7
4.3 Явно заданные поверхности	7
4.4 Неявно заданные поверхности	8
4.5 Гладкие функции и пути на поверхности	8
4.6 Векторы на поверхности	9
4.7 Замена локальных координат	9
5 Лекция № 5	10
5.1 Производная по направлению	10
5.2 Двойственность	11
8 Лекция № 8	11
8.1 Деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена	12
8.2 Вторая квадратичная форма	12
8.3 Ковариантная производная и связность	13
8.4 Оператор Вейнгартена (Shape operator)	14
8.5 Другой вариант тех же формул	14
10 Лекция № 10	14
10.1 Определение параллельного поля	14
10.2 Определение параллельного переноса	15
10.3 Другой сюжет	15
10.4 Геодезические	16
12 Лекция № 12	17

1 Лекция № 1

1.1 Векторы как дифференцирование функций

Что такое вектор? С одной стороны можем посмотреть на производную функции по направлению

$$\partial_X f(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(f(A + \varepsilon X) - f(A) \right). \quad (1.1)$$

Что очень просто выглядит в декартовых координатах

$$\partial_X f(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \dots = \frac{d}{d\varepsilon} f(A^1 + \varepsilon X^1, \dots, A^n + \varepsilon X^n) \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial f}{\partial x^1}(A^1, \dots, A^n) X^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(A^1, \dots, A^n).$$

Таким образом

$$\partial_X f(A) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(A). \quad (1.2)$$

Таким образом построили отображение

$$X \mapsto \partial_X|_A.$$

Выпишем несколько свойств такого оператора

$$\begin{aligned} \partial_X(f + g)(A) &= \partial_X f(A) + \partial_X g(A) \\ \partial_X(fg)(A) &= (\partial_X f(A))g(A) + f(A)(\partial_X g(A)). \end{aligned}$$

Что соответствует правилу Лейбница.

1.2 Дифференцирование как вектор

Теперь зайдём с другой стороны. Рассмотрим $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим отображение D

$$D: C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R},$$

удовлетворяющее свойствам

$$\begin{aligned} D(f + g) &= Df + Dg \\ D(fg) &= (Df) \cdot g(A) + f(A) \cdot (Dg). \end{aligned}$$

Что и назовём дифференцированием в точке A .

Легко показать, что $D(\text{const}) = 0$, $D\lambda f = \lambda Df$ и $f(A) = g(A) = 0 \Rightarrow D(fg) = 0$. Вспомним теперь формулу Тейлора в координатах u^1, \dots, u^n .

$$f(u^1, \dots, u^n) = f(A^1, \dots, A^n) + \frac{\partial f}{\partial u^i}(A^1, \dots, A^n) \cdot (u^i - A^i) + h_{ij}(u^1, \dots, u^n)(u^i - A^i) \cdot (u^j - A^j).$$

Тогда

$$D(f) = 0 + \underbrace{D(u^i - A^i)}_{X^i} \frac{\partial f}{\partial u^i}(A^1, \dots, A^n).$$

Таким образом

$$Df = X^i \frac{\partial f}{\partial u^i}(A^1, \dots, A^n). \quad (1.3)$$

Итого

1. В ДСК $X \mapsto \partial_X|_A$.
2. В ДСК D имеет вид $\partial_X|_A$ для некоторого X .
3. Получили взаимно-однозначное соответствие векторы – дифференцирование.
4. Определим векторы, как дифференцирование. Это определение **инвариантно**.

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad (1.4)$$

где (X^1, \dots, X^n) – координаты вектора в координатах (u^1, \dots, u^n) .

1.3 Замена координат

Допустим выбрали некоторые (u^1, \dots, u^n) и (v^1, \dots, v^n) . Тогда

$$D = X^i \frac{\partial}{\partial u^i} = Y^j \frac{\partial}{\partial v^j}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \frac{\partial f}{\partial v^j}, \quad \Rightarrow \quad X^i \frac{\partial}{\partial u^i} = \underbrace{X^i \frac{\partial v^j}{\partial u^i}}_{Y^j} \frac{\partial}{\partial v^j}.$$

Получили формулу изменения координат вектора при смене системы¹ координат

$$Y^j = \frac{\partial v^j}{\partial u^i} X^i \quad \Leftrightarrow \quad Y = JX. \quad (1.5)$$

1.4 Коммутатор

Для матриц известен коммутатор вида

$$[A, B] = AB - BA.$$

Аналогично для дифференцирования

$$[\partial_X, \partial_Y] f = \partial_X \partial_Y f - \partial_Y \partial_X f = X^i \frac{\partial}{\partial u^i} \left(Y^j \frac{\partial f}{\partial u^j} \right) - Y^j \frac{\partial}{\partial u^j} \left(X^i \frac{\partial f}{\partial u^i} \right) = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} \frac{\partial f}{\partial u^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial u^i}$$

Таким образом

$$[\partial_X, \partial_Y] f = \left[X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial u^j} \right] \frac{\partial f}{\partial u^j}. \quad (1.6)$$

Это, как ни странно, дифференциальный оператор первого порядка. Это значит что есть такое векторное поле $[X, Y]$, что

$$\partial_{[X, Y]} = [\partial_X, \partial_Y] f.$$

Таким образом $[X, Y]$ существует и равен

$$[X, Y] = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial u^j}. \quad (1.7)$$

2 Лекция № 2

2.1 Обратный образ

Пусть

$$X^n \xrightarrow{F} X^k \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}.$$

Или можем рассмотреть отображение

$$X^n \xrightarrow{F^* \varphi} \mathbb{R}, \quad \text{где} \quad F^* \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \circ F,$$

что и является обратным образом.

Пусть теперь $P \in X^n$ отображается в $F(P) \in X^k$. Пусть $W(P) \in X^n$, построим $d_P F(W)$ – вектор $F(P) \in X^k$. Пусть $\varphi \in C^\infty(X^k)$, тогда

$$\underbrace{d_P F(W)}_{\text{вектор}} \varphi \stackrel{\text{def}}{=} W(F^* \varphi). \quad (2.1)$$

Def 2.1. $d_P F$ – дифференциал F в точке P .

Пусть $\varphi \circ \Psi = \varphi(v^1, \dots, v^k)$ в координатах v^1, \dots, v^k . Тогда

$$F^* \varphi = \varphi(F) \quad \Rightarrow \quad F^* \varphi(u^1, \dots, u^k) = \underbrace{\varphi(v^1(u^1, \dots, u^n), \dots, v^k(u^1, \dots, u^n))}_{F^* \varphi \text{ в координатах } u^1, \dots, u^n} = \varphi \circ F \circ \Phi,$$

¹«В Царство небесное войдут только те кто думают про вектор, как про дифференцирование, потому что там нет координат.»

где Φ – координатное отображение. Теперь вектор W

$$W = W^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \dots + W^n \frac{\partial}{\partial u^n} = W^i \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

Соответственно, по определению

$$d_P F(W) \varphi \stackrel{\text{def}}{=} W F^* \varphi, \quad (2.2)$$

расписывая, получим

$$W F^* \varphi = W^i \frac{\partial}{\partial u^i} \varphi(v^1(u^1, \dots, u^n), \dots) = W^i \frac{\partial \varphi}{\partial v^j} \frac{\partial v^j}{\partial u^i} = \underbrace{\frac{\partial v^j}{\partial u^i} W^i}_{d_P F(W)} \frac{\partial}{\partial v^j} \varphi.$$

А это кто? А вот матрица Якоби F , записанного в координатах v^1, \dots, v^k

$$\begin{bmatrix} d_P F(W)^1 \\ \vdots \\ d_P F(W)^k \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^1 \\ \vdots \\ W^n \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Тогда выясняется, что $d_P F$ – линейное отображение. Действительно,

$$d_P F(W_1 + W_2) \varphi = (W_1 + W_2) F^* \varphi = W_1 D^* \varphi + W_2 F^* \varphi = (d_P F(W_1) + d_P F(W_2)) \varphi.$$

2.2 Тензор

Есть пространство V с векторами и двойственное V^* с ковекторами, пространство линейных функций. Тогда e_1, \dots, e_n – базис в V , e^1, \dots, e^n – двойственный базис в V^* , т.е. $e^i e_j = \delta_j^i$.

Для начала скажем, что W – вектор и он же линейная функция на ковекторах.

$$W(\xi) = \xi(W) = \langle W, \xi \rangle,$$

что называется спариванием вектора и ковектора.

Пусть есть некоторая $B(W, Y)$ – билинейная функция от двух векторов. А теперь посмотрим на линейный оператор $A: V \rightarrow V$, билинейную функцию от вектора и ковектора.

$$A(W, \xi) = \langle A(W), \xi \rangle$$

Обобщим до понятия тензора:

$$T: \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_p \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_q \rightarrow \mathbb{R},$$

где T полилинейная функция от p ковекторов и q векторов, тензор типа p, q . Они образуют линейное пространство

$$T \in \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_p \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_q = \mathbb{T}_q^p(V).$$

3 Лекция № 3

3.1 Дифференциальная форма

В линейной алгебре есть ковекторы, а вот в дифференциальной геометрии ковекторные поля суть дифференциальные 1-формы.

Def 3.1. Дифференциальная 1-форма – это ковекторное поле.

Def 3.2. Дифференциал функции f от векторного поля X это $df(X) \stackrel{\text{def}}{=} Xf$.

Что это нам даёт? Ну, во-первых, пусть x^1, \dots, x^n – некоторые координаты.

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Тогда

$$df(X) = Xf = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Но, заметим, что $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ – базис в каждой точке. Рассмотрим теперь $f = x^i$ и $X = \frac{\partial}{\partial x^j}$, тогда

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i. \quad (3.1)$$

Из этого следует, что dx^1, \dots, dx^n – двойственный к $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ базис в V^* . Тогда в этом базисе

$$df = \omega_i dx^i.$$

Заметим, что

$$\underbrace{\omega_i dx^i}_{df} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \omega_i \delta_j^i = \omega_j, \quad \Rightarrow \quad \omega_j = df \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Тогда

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i. \quad (3.2)$$

Получается ковектор df расписывается по базису dx^i двойственного пространства с координатами $\partial f / \partial x^i$.

А для общей 1-формы

$$\omega = \omega_i dx^i,$$

где $\omega^1, \dots, \omega^n$ – координаты ω в локальной системе координат.

Def 3.3. ω гладкая, если $\forall X$, где X – гладкое поле, верно, что $\omega(X)$ – гладкая функция.

Lem 3.4. $\omega = \omega_i dx^i$ – гладкая $\Leftrightarrow \omega_i$ – гладкая форма $\forall i$.

3.2 Билинейные формы

Пространство билинейных форм на $V - V^* \otimes V^* = S^2 V^* \oplus \Lambda^2 V^*$. Что ж, в V^* базис e^1, \dots, e^n , в $S^2 V^*$ базис

$$e^i \cdot e^j(X, Y) = \frac{1}{2} (X^i Y^j + X^j Y^i),$$

а скалярное произведение

$$g = g_{ij} dx^i \cdot dx^j.$$

В кососимметрических же $\Lambda^2 V^*$ базис

$$e^i \wedge e^j(X, Y) = X^i Y^j - X^j Y^i, \quad 1 \leq i < j \leq n. \quad (3.3)$$

В таком случае, если есть некоторая кососимметрическая ω , то

$$\omega = \sum_{i < j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j.$$

Def 3.5. Поле кососимметрических билинейных форм – дифференциальные 2-формы.

Возьмём два поля и засунем в 2-форму, получим функцию.

3.3 Полилинейные формы

Пусть V – векторное пространство, $\Lambda^k V^k$ – векторное пространство кососимметрических полилинейных функций от k векторов.

$$\omega(X_1, \dots, X_k) \in \mathbb{R}.$$

Введём некоторое внешнее умножение

$$\wedge: \Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \rightarrow \Lambda^{k+l} V^*.$$

Пусть $\sigma \in \Lambda^k V^*$, $\tau \in \Lambda^l V^*$, тогда

$$\sigma \wedge \tau(X_1, \dots, X_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \text{sign}(\pi) \sigma(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(k)}) \tau(X_{\pi(k+1)}, \dots, X_{\pi(k+l)}).$$

Если в V базис e_1, \dots, e_k , то в $\Lambda^k V$ в качестве базиса можно взять

$$e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}, \quad i_1 < \dots < i_k.$$

Def 3.6. Дифференциальная k -форма – поле полилинейных кососимметрических форм от k векторов, при чем

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}, \quad (3.4)$$

где $\omega_{i_1, \dots, i_k} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ – гладкие функции..

3.4 Внешний дифференциал

Обозначим $\Omega^k(U)$ – пространство дифференциальных k -форм на некоторой $U \in \mathbb{A}^n$. Также будем говорить, что $X^\infty(U) = \Omega^0(U)$ – 0-формы. У нас уже есть такое отображение

$$\Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{?} \dots$$

Ну и введём тогда операцию внешнего дифференцирования

$$d: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U). \quad (3.5)$$

Введём её аксиоматически²

- 1) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$;
- 2) $d(\sigma \wedge \tau) = (d\sigma) \wedge \tau + (-1)^{|\sigma|} \sigma \wedge (d\tau)$;
- 3) $d^2 = 0$, т.е. $d(d\omega) = 0$;
- 4) $f \in \Omega^0(U) = C^\infty(U) \Rightarrow df(X) = Xf$.

Thr 3.7. Внешний дифференциал d существует и единственен.

\triangle .

I. Пусть существует внешний дифференциал. Тогда получим, что

$$d\omega = d\left(\sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\right) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \quad (3.6)$$

Собственно, подобный ответ является единственным.

II. Докажем теперь существование. Пусть x^1, \dots, x^n – координаты, тогда определим d , как (3.6). Легко показать, что такое определение удовлетворяет всем свойствам. \square

4 Лекция № 4

4.1 Обращение с обратным образом (?)

На данный момент у нас есть отображения для $U \in \mathbb{R}^n$ и $V \in \mathbb{R}^k$, считая $U \xrightarrow{F} V$

$$C^\infty(U) \xleftarrow{F^*} C^\infty(V)$$

$$U \xrightarrow{F} V \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

$$T_P U \xrightarrow{d_P F} T_{F(P)} V$$

$$U \xrightarrow{F^* \varphi} \mathbb{R}, \quad \text{где} \quad F^* \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \circ F,$$

$$\overbrace{d_P F}^{\in T_{F(P)} V} \underbrace{X}_{\in T_P U} \underbrace{\varphi}_{\in C^\infty(V)} = X \underbrace{F^* \varphi}_{\in C^\infty(U)}. \quad (4.1)$$

С формами ситуация схожая с функциями, то есть

$$C^\infty(V) = \Gamma^0(V),$$

получается

$$\Omega^k(U) \xleftarrow{F^*} \Omega^k(V),$$

$$T_U U \xrightarrow{d_P F} T_{F(P)}(V).$$

Теперь пусть X_1, \dots, X_k – векторное поле на U , тогда

$$(F^* \omega)(X_1, \dots, X_k) = \omega(dF(X_1), \dots, dF(X_k)).$$

² Формы образуют градуированную алгебру. Это такой эмпирический факт: в градуированной алгебре дифференциал должен быть с таким знаком и счастье будет.

Собственно, факт:

$$dF^*\omega = F^*d\omega. \quad (4.2)$$

И ещё факт

$$F^*(\sigma \wedge \tau) = F^*\sigma \wedge F^*\tau. \quad (4.3)$$

4.2 Кривые

Кривые должны быть гладкими, но этого недостаточно. Поэтому требуем и *регулярность*:

$$\forall x, y: F(x, y) = 0 \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) \neq (0, 0), \quad (4.4)$$

а в параметрическом задании

$$\forall t \in (a, b) \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \neq (0, 0). \quad (4.5)$$

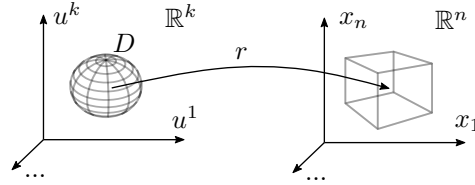
Пусть $F(x, y) = 0$ – регулярная гладкая неявно заданная кривая. Тогда в окрестности любой своей точки её можно задать как регулярную гладкую параметрическую кривую. В самом деле,

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) \Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0, \quad \Rightarrow \quad \exists \varphi \in U(x_0, y_0): F(x, y) \Leftrightarrow x = \varphi(y).$$

А вот пусть теперь есть гладкая регулярная параметризованная регулярная кривая $(x, y)(t): (\dot{x}, \dot{y}) \neq 0$. Пусть $\dot{x} \neq 0$, тогда по теореме об обратной функции $t = t(x)$.

4.3 Явно заданные поверхности

Регулярная (не особая) гладкая k -мерная поверхность в n -мерном аффинном пространстве, заданная параметрически.



Формально,

$$r: D \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \text{при чем} \quad \begin{cases} 1) \text{ гладкость:} & \mathbf{r} \equiv [x^1(u^1, \dots, u^k), \dots, x^n(u^1, \dots, u^k)] \\ 2) \text{ регулярность:} & \text{rg}(\partial x^i / \partial u^j) = k. \end{cases}$$

где подразумевается $r \in C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$. Регулярность же, по сути, это утверждение о том что в J существует невырожденный минор $k \times k$.

Пусть это $(\partial x^i / \partial u^j)$, где $i, j = 1, \dots, k$. Тогда, по теореме об обратной функции, в окрестности этой точки

$$\begin{aligned} u^1 &= u^1(x^1, \dots, x^k) \\ &\dots \\ u^k &= u^k(x^1, \dots, x^k). \end{aligned}$$

Тогда, это просто график отображения

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^{k+1}(u^1(x^1, \dots, x^k), \dots, u^k(x^1, \dots, x^k)) \\ &\dots \\ x^n &= x^n(u^1(x^1, \dots, x^k), \dots, u^k(x^1, \dots, x^k)) \end{aligned}$$

такого, что

$$\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

Так, например, для сферы, можно выразить $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

4.4 Неявно заданные поверхности

Гладкая регулярная k -мерная поверхность в n -мерном аффинном пространстве, заданная неявно. Тогда есть $n - k$ уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \dots \\ F^{n-k}(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}, \quad \mathbf{F} = 0.$$

Аналогично мы требуем гладкость: $F^i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, и регулярность в тех точках, где $\mathbf{F} = 0$. Условие регулярности в таком случае

$$\text{rg} \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right) = n - k. \quad (4.6)$$

Lem 4.1. Гладкая регулярная неявно заданная поверхность, может рассматриваться, как параметрическая.

△.

I. Пусть в точке P

$$\text{rg} \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right) = n - k.$$

II. Тогда можем считать, что есть невырожденный минор $\text{rg} \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right) (P)$, где $i = 1, \dots, n - k$ и $j = k + 1, \dots, n$.

III. По теореме о неявной функции

$$\begin{cases} x^{k+1} = x^{k+1}(x^1, \dots, x^k) \\ \dots \\ x^n = x^n(x^1, \dots, x^k) \end{cases} \quad \text{— гладкие.}$$

IV. Тогда понятно, как утроен параметрический вид:

$$\left. \begin{array}{l} x^1 = u^1 \\ \dots \\ x^k = u^k \\ x^{k+1} = x^{k+1}(u^1, \dots, u^k) \\ \dots \\ x^n = x^n(u^1, \dots, u^k) \end{array} \right\} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ & & * \end{pmatrix}, \quad \text{rg } J = k.$$

□

Def 4.2. Назовем x^1, \dots, x^n координатами объемлющего пространства, а u^1, \dots, u^k локальными координатами.

4.5 Гладкие функции и пути на поверхности

Функции

Def 4.3. Пусть есть гладкая функция $F(x^1, \dots, x^n)$ — гладкая в окрестности Σ , тогда $F|_\Sigma$ — гладкая на поверхности Σ .

Def 4.4. Пусть $f(u^1, \dots, u^k)$ — гладкая, тогда f — гладкая функция на Σ .

Докажем равносильность двух следующих определений.

△. \Rightarrow Пусть $F(x^1, \dots, x^n)$ — гладкая, тогда и $F(x^1(u^1, \dots, u^k), \dots, x^n(u^1, \dots, u^k))$ — гладкая.

\Leftarrow Пусть есть $f(u^1, \dots, u^k)$ — гладкая, тогда и $f(u^1(x^1, \dots, x^k), \dots, u^k(x^1, \dots, x^k))$ — тоже гладкая.

□

Пути

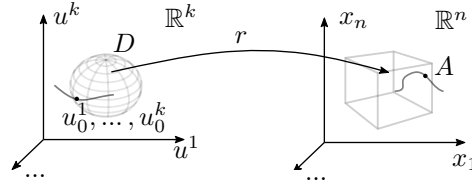
Def 4.5. Путь $\mathbf{r}(u^1(t), \dots, u^k(t))$ гладкий, если u^i – гладкие.

Def 4.6. Если $x^1(t), \dots, x^n(t)$ – гладкие, такие что $[x^1(t), \dots, x^n(t)] \in \Sigma$, то и путь \mathbf{r} гладкий.

Эти определения равносильны. Получается, что пути можно описывать как в глобальных, так и в локальных координатах. Далее ограничимся рассмотрением путей в локальных координатах, **ничего при этом не потеряв**.

4.6 Векторы на поверхности

Точка A имеет локальные координаты u_0^1, \dots, u_0^k , то есть $A = \mathbf{r}(u_0^1, \dots, u_0^k)$.



Если мы посмотрим на путь точки A , то увидим (считая, что в $t = 0$ $\mathbf{r} = A$).

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^k)(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r_{u^i}(u^1(t), \dots, u^k(t)) \cdot \dot{u}^i(t).$$

где подразумевается, что

$$r_{u^i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^i}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial u^i} \right).$$

При $t = 0$, увидим

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{t=0} = \underbrace{r_{u^i}(u_0^1, \dots, u_0^k)}_{\text{векторы}} \underbrace{\dot{u}^i(0)}_{\text{числа}},$$

где векторы зависят только от точки A , а числа зависят от конкретной кривой. Получается, что есть некоторое пространство, порожденное этими векторами.

Def 4.7. Назовём *касательным пространством* к Σ в точке A

$$T_A \Sigma = \text{span}(r_{u^1}(A), \dots, r_{u^k}(A)).$$

Пусть есть некоторый вектор \mathbf{V}

$$\mathbf{V} = \alpha^i r_{u^i}(A).$$

Он может быть получен кривой $u^i = u_0^i + \alpha^i t$. Получается, что $T_A \Sigma$ состоит в точности из векторов скорости кривых в точке A .

Lem 4.8. Размерность $\dim T_A \Sigma = k$.

\triangle . Действительно, по условию регулярности

$$\text{rg}(r_{u^i}) = \text{rg} \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j} \right) \stackrel{\text{reg}}{=} k.$$

В этом и состоит геометрический смысл условия регулярности. □

4.7 Замена локальных координат

С одной стороны понятно, что множество всех кривых на поверхности D инвариантно. С другой стороны интересно посмотреть, что же происходит с векторами.

$$\begin{cases} v^1 = v^1(x^1(u^1, \dots, u^k), \dots, x^k(u^1, \dots, u^k)) \\ \dots \\ v^k = v^k(x^1(u^1, \dots, u^k), \dots, x^k(u^1, \dots, u^k)) \end{cases} \quad \text{— диффеоморфизм.}$$

Действительно, Якобиан композиции равен произведению Якобианов, получается композиция двух невырожденных преобразований будет невырождена.

$$r_{u^i} = \frac{\partial r}{\partial v^j} \frac{\partial v^j}{\partial u^i} = \underbrace{\frac{\partial v^j}{\partial u^i}}_J r_{v^j},$$

получается, что матрица перехода от базиса r_{v^j} к r_{u^i} – матрица Якоби J замены координат.

$$\forall V \in T_A \Sigma \quad V = V^i r_{v^i} = V^i \underbrace{\frac{\partial r^j}{\partial u^i}}_{\tilde{V}^j} r_{v^j}.$$

Тогда

$$V = \tilde{V}^j r_{v^j} \quad \Rightarrow \quad \tilde{V}^j = \frac{\partial v^j}{\partial u^i} V^i. \quad (4.7)$$

Оказывается, что если

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}^1 \\ \dots \\ \tilde{V}^k \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial v^j}{\partial u^i} \right)_{(A)} \begin{pmatrix} V^1 \\ \dots \\ V^k \end{pmatrix}.$$

5 Лекция № 5

5.1 Производная по направлению

Раньше определили

$$\partial_V f(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(A + \varepsilon V) - f(A)}{\varepsilon},$$

но сложность в том, что $A + \varepsilon V \notin \Sigma$. Но гладкую функцию с поверхности может всегда продлить в некоторую окрестность поверхности. Это продолжение F не единственно.

Def 5.1. Определим

$$\partial_V f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \partial_V F(A),$$

при чём def инвариантно к выбору F .

△.

I. Мы дифференцируем только вдоль касательных векторов к Σ , следовательно существует кривая γ на Σ такая, что

- 1) $\forall t \gamma(t) \in \Sigma$
- 2) $\gamma(0) = A$
- 3) $\dot{\gamma}(0) = V$.

II. Тогда

$$\underbrace{\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \Big|_{t=0}}_* = \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) \Big|_{t=0} = \frac{\partial F}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^n) \dot{x}^i(t) \Big|_{t=0} = \frac{\partial F}{\partial x^i}(A) V^i = \underbrace{\partial_V F(A)}_{**},$$

считая $\gamma(t) = [x^1(t), \dots, x^n(t)]$.

III. Но, т.к. * не зависит от выбора F , то и ** не зависит от выбора F . Тогда $\partial_V f(A)$ определена корректно.

IV. К слову, ** не зависит от выбора пути, тогда и * не зависит от выбора пути. □

Получается мы можем определить понятие дифференцирования гладкой функции на поверхности в точке.

Def 5.2. Для $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ достаточно быть определенной в некоторой окрестности точки A . Скажем, что D –

дифференцирование на Σ в точке A , если

- 1) $Df \in \mathbb{R}$
- 2) $D(f + g) = Df + Dg$
- 3) $D(fg) = (Df) \cdot g(A) + f(A) \cdot (Dg)$.

Пусть u^1, \dots, u^k – локальные координаты в окрестности точки A .

Lem 5.3. Для $\forall D \exists V^1, \dots, V^K$ такой, что

$$Df = \frac{\partial f}{\partial u^i}(A) V^i.$$

Пусть есть некоторый касательный вектор $W \in T_A \Sigma$

$$W = W^i r_{u^i}(A).$$

Тогда можно рассматривать путь $\gamma(t)$ в локальных координатах такой, что $\gamma(0) = A$, $\dot{\gamma}(0) = W$, то есть для $A = (u_0^1, \dots, u_0^k)$ и $\gamma(t) = [u^1(t), \dots, u^k(t)]$ верно, что

$$u^i(0) = u_0^i, \quad \dot{u}^i(0) = W^i.$$

Тогда

$$\partial_W f(A) = \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial u^i}(A) W^i.$$

Получается, что **каждый** касательный вектор W даёт дифференцирование $\partial_W|_A$, и **каждое** дифференцирование в A получается из касательного вектора. Поэтому будем писать просто

$$W = \partial_W = W^i \frac{\partial}{\partial u^i}. \quad (5.1)$$

5.2 Двойственность

Раз есть касательные векторы, то есть и кососимметрические полилинейные функции на них. Так приходим к следующей двойственной структуре:

- $T_P \Sigma$ – касательное пространство к Σ в P ,
- $T_P^* \Sigma \stackrel{\text{def}}{=} (T_P \Sigma)^*$ – кокасательное пространство к Σ в P .

Получаются векторное поле $X: X(P) \in T_P \Sigma$, и ковекторное поле $\xi: \xi(P) \in T_P^* \Sigma$.

Если u^1, \dots, u^k – локальные координаты на Σ , то

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = r_{u^i} \quad \text{— базис в } T_P \Sigma.$$

Соответственно,

$$du^1, \dots, du^k \quad \text{— базис в } T_P^* \Sigma.$$

А вот

$$du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_q} \quad \text{— базис в } \Lambda^q T_P^* \Sigma,$$

где $\Lambda^q T_P^* \Sigma$ – пространство q -форм.

8 Лекция № 8

Мы знаем, что такое $\partial_X f$ – определенная на аффинном пространстве, поверхности и многообразии. Рассмотрим

$$\partial_X Y(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{Y(A + \varepsilon X) - Y(A)}{\varepsilon},$$

что работает в аффинном пространстве или для касательных x на поверхностях в аффинном пространстве (для касательного X).

Например, когда

$$Y = (Y^1, \dots, Y^n)^T, \quad (\partial_X Y)^i = \partial_X Y^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}.$$

Con 8.1. Если X, Y – векторные поля в аффинном пространстве, то

$$[X, Y] = \partial_X Y - \partial_Y X.$$

△. Т.к.

$$[X, Y]^i = X^i \frac{\partial Y^i}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^i}{\partial x^i}.$$

□

Lem 8.2. Если X, Y – касательные векторные поля на $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, то $[X, Y]$ – тоже касательное векторное поле.

Размерность $\dim T_A \Sigma = \dim \Sigma = k$, нормальное пространство $N_A \Sigma = (T_A \Sigma)^\perp$, тогда $\dim N_A \Sigma = n - k$. Пусть есть вектор V , тогда $V = P(V) + (\text{id} - P)(V)$, где P – ортогональный проектор на касательное пространство $T_A \Sigma$

$$P_A: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad (8.1)$$

который гладко зависит от точки A , т.к. r_{u^1}, \dots, r_{u^k} гладко зависят от A , но этот базис можем привести к ОНБ, гладкими преобразованиями.

Lem 8.3. P – гладкое поле операторов.

8.1 Деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена

Y – касательное векторное поле, ξ – нормальное векторное поле, X – касательный вектор (в точке A).

$$\partial_X Y = \underbrace{P(\partial_X Y)}_{\nabla_X Y} + \underbrace{(\text{id} - P)(\partial_X Y)}_{B(X, Y)} \quad (8.2)$$

$$\partial_X \xi = \underbrace{P(\partial_X \xi)}_{-W_\xi(X)} + \underbrace{(\text{id} - P)(\partial_X \xi)}_{\nabla_X^\Sigma \xi} \quad (8.3)$$

Def 8.4. Далее $\Gamma(T\Sigma)$ – множество касательных векторных полей на Σ , а $\Gamma(N\Sigma)$ – множество нормальных векторных полей (на Σ).

8.2 Вторая квадратичная форма

Def 8.5. Вторая квадратичная форма $B(X, Y) = (\text{id} - P)(\partial_X Y)$.

В частности, её свойства:

- I) $B: T_A \Sigma \times \Gamma(T\Sigma) \mapsto N_A \Sigma$;
- II) при $X \in \Gamma(T\Sigma)$ $B: \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(T\Sigma) \mapsto \Gamma(N\Sigma)$;
- III) B линейна по X ;
- IV) $X, Y \in \Gamma(T\Sigma) \Rightarrow B(X, Y) = B(Y, X)$;
- V) $B(X, Y)(A)$ зависит только от $X(A)$ и $Y(A)$;
- VI) $B: T_A \Sigma \times T_A \Sigma \mapsto N_A \Sigma$;
- VII) $B(X, Y)$ линейна по Y .

△_{IV}.

$$B(X, Y) - B(Y, X) = (\text{id} - P)(\partial_X Y - \partial_Y X) = (\text{id} - P) \underbrace{([X, Y])}_{\text{касат. поле}} = 0$$

□

Lem 8.6. B – симметрическая билинейная форма со значениями в нормальном векторном пространстве.

Пусть e_1, \dots, e_k – базис в касательных векторных полях. Т.е. это такие векторные поля, что в любой точке A векторы $e_1(A), \dots, e_k(A)$ – базис в $T_A \Sigma$. Аналогично пусть $\eta_1, \dots, \eta_{n-k}$ – базис в нормальных векторных полях.

$$\begin{aligned} X &= X^i e_i, & i &= 1, \dots, k \\ Y &= Y^j e_j, & j &= 1, \dots, k \\ B(X, Y) &= B(X^i e_i, Y^j e_j) = X^i Y^j \underbrace{B(e_i, e_j)}_{\text{н. в. поле}} = X^i Y^j b_{ij}^\nu, & \nu &= 1, \dots, n - k \end{aligned}$$

где b_{ij}^k – локальные коэффициенты B .

8.3 Ковариантная производная и связность

Def 8.7. Связностью в касательном расслоении к поверхности назовём ∇ . Ковариантной производной Y вдоль X в касательном расслоении к поверхности назовём

$$\nabla_X Y = P(\partial_X Y). \quad (8.4)$$

Что оно делает? Во-первых

$$\nabla: T_A \Sigma \times \Gamma(T\Sigma) \mapsto T_A \Sigma,$$

или, если X – касательное поле, то

$$\nabla: \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(T\Sigma) \mapsto \Gamma(T\Sigma).$$

Во-вторых $\nabla_X Y$ линейна X , т.е.

$$\begin{aligned} \nabla_{X_1+X_2} Y &= \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y, \\ \nabla_{fX} Y &= f \nabla_X Y \end{aligned}$$

А ещё линейная по Y

$$\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2.$$

Также верно тождество Лейбница.

$$\nabla_X (fY) = \partial_X fY + f \nabla_X Y. \quad (8.5)$$

Действительно,

$$\nabla_X (fY) = P(\partial_X (fY)) = P(\partial_X fY + f \partial_X Y).$$

Также верна симметричность

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \quad (8.6)$$

В силу того, что

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = P([X, Y]) = [X, Y].$$

И последнее,

$$\partial_X (Y, Z) = (\partial_X Y, Z) + (Y, \partial_X Z).$$

Хорошо.

В координатах $X = X^i e_i$, $Y = Y^j e_j$, где $i, j = 1, \dots, k$.

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{X^i e_i} (Y^j e_j) = X^i \nabla_{e_i} (Y^j e_j) = X^i \left((\partial_{e_i} Y^j) e_j + Y^j \overbrace{\nabla_{e_i} e_j}^{\Gamma_{ij}^l e_l} \right) = X^i (\partial_{e_i} Y^l + Y^j \Gamma_{ij}^l) e_l \\ \Leftrightarrow \quad &\boxed{(\nabla_X Y)^l = X^i (\partial_{e_i} Y^l + Y^j \Gamma_{ij}^l)} \end{aligned}$$

Если мы выберем базис (голономный базис), который состоит из

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, e_k = \frac{\partial}{\partial u^k},$$

то

$$(\nabla_X Y)^l = X^i \left(\frac{\partial Y^l}{\partial u^i} + Y^j \Gamma_{ij}^l \right).$$

Def 8.8. Γ_{ij}^l – символ Кристофеля, коэффициенты разложения ковариантной производной координатных векторов ∂_i по базису $\nabla_{\partial_j} \partial_i = \Gamma_{ij}^k \partial_k$.

Def 8.9. Назовем $\nabla^{N\Sigma}$ связностью в нормальном расслоении к поверхности, а

$$\nabla_X^{N\Sigma} \xi \equiv \nabla_X \xi = (\text{id} - P) (\partial_X \xi), \quad (8.7)$$

ковариантной производной ξ вдоль X в нормальном расслоении.

Как это работает?

$$\begin{aligned} \nabla^{N\Sigma}: T_A \Sigma \times \Gamma(N\Sigma) &\mapsto N_A \Sigma; \\ \nabla^{N\Sigma}: \Gamma(N\Sigma) \times \Gamma(N\Sigma) &\mapsto \Gamma(N\Sigma). \end{aligned}$$

Аналогично раннему, это производная линейная по первому и второму аргументу, работает тождество Лейбница, согласовано с метрикой – всё хорошо. Но оно не симметрично!

В координатах $X = X^i e_i$ с $i = 1, \dots, k$ и $\xi = \xi^\nu \eta_\nu$ с $\nu = 1, \dots, n - k$. Тогда

$$\nabla_X^{N\Sigma} = X^i \left((\partial_{e_i} \xi^\nu) \eta_\nu + \xi^\nu \overbrace{\nabla_{e_i}^{N\Sigma} \eta_\nu}^{K_{i\nu}^\mu \eta_\mu} \right) \Rightarrow \boxed{\nabla_X^{N\Sigma} = X^i (\partial_{e_i} \xi^\mu + \xi^\nu K_{i\nu}^\mu) \eta_\mu}.$$

Def 8.10. $K_{i\nu}^\mu$ – локальные коэффициенты связности в нормальном расслоении.

8.4 Оператор Вейнгартена (Shape operator)

Def 8.11. Оператор Вейнгартена – $W_\xi(X) = -P(\partial_X \xi)$.

Что он делает?

$$W: \Gamma(N\Sigma) \times T_A \Sigma \rightarrow T_A \Sigma.$$

В частности

$$(W_\xi(X), Y) = (B(X, Y), \xi).$$

△. ...

□

К слову, $W_X \xi(A)$ зависит только от $\xi(A)$ и $X(A)$, т.е.

$$W: N_A \Sigma \times T_A \Sigma \mapsto T_A \Sigma,$$

но если зафиксировать ξ , то

$$W_\xi: T_A \Sigma \mapsto T_A \Sigma.$$

Можно это всё расписать в координатах.

$$W_\xi(X) = X^i \xi^\nu \omega_{\nu i}^j e_j.$$

Подставив в $(W_\xi(X), Y) = (B(X, Y), \xi)$, считая $X = e_i$, $\xi = \eta_\nu$, $Y = e_j$.

$$\underbrace{\omega_{\nu i}^l(e_l, e_j)}_{g_{lj}} = \underbrace{b_{ij}^\mu(\eta_\mu, \eta_\nu)}_{g_{\mu\nu}} \Rightarrow \boxed{\omega_{\nu i}^l g_{lj} = b_{ij}^\mu g_{\mu\nu} \Rightarrow \omega_{\nu i}^m = b_{ij}^\mu g_{\mu\nu} g^{jm}.$$

где g_{lj} – матричный элемент матрицы $I_A = (,)|_{T_A \Sigma}$, то есть матрицы первой квадратичной формы, метрики касательного расслоения. А вот $g_{\mu\nu}$ – элемент матрицы $(,)|_{N_A \Sigma}$, метрики в нормальном расслоении.

8.5 Другой вариант тех же формул

Пусть $x = e_i$, $Y = e_j$, $\xi = \eta_\nu$. Тогда

$$\begin{aligned} \partial_{e_i} e_j &= \Gamma_{ij}^l e_l + b_{ij}^\nu \eta_\nu \\ \partial_{e_i} \eta_\nu &= -b_{ij}^\mu g_{\mu\nu} g^{jm} e_m + K_{i\nu}^\mu \eta_\mu. \end{aligned}$$

Плоская кривая в нормальном параметре

10 Лекция № 10

Параллельный перенос на поверхностях – штука непростая. Хотелось бы двигаться в сторону внутренней геометрии и уходить от объемлющего пространства. Есть некоторая наивная идея. Давай возьмём вектор X в точках A и B . Спроецируем X на пространство с помощью $P_B(X)$. Тогда в $\Sigma^k \subset \mathbb{R}^n$ увидим, что длины не сохраняются.

Другой вариант, посмотрим на $\gamma(t) \in \Sigma$ и $Y(t) \in T_{\gamma(t)} \Sigma$. Рассмотрим $Y(t)$ в $\gamma(t)$ и $Y(t), Y(t+\varepsilon)$ в $\gamma(t+\varepsilon)$.

10.1 Определение параллельного поля

Def 10.1. Поле $Y(t)$ параллельно вдоль кривой $\gamma(t)$, если

$$P_{\gamma(t+\varepsilon)} Y(t) = Y(t+\varepsilon) + o(\varepsilon),$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть $Y(t) \parallel \gamma(t)$.

$$P_{\gamma(t+\varepsilon)} Y(t+\varepsilon) - P_{\gamma(t+\varepsilon)} Y(t) = o(\varepsilon), \quad \Rightarrow \quad \underbrace{P_{\gamma(t+\varepsilon)}}_{P_{\gamma(t)} + \varepsilon Q + o(\varepsilon)} \underbrace{(Y(t+\varepsilon) - Y(t))}_{\varepsilon \frac{dY}{dt}(t) + o(\varepsilon)} = o(\varepsilon),$$

раскрыв скобки, приходим к

$$\varepsilon P_{\gamma(t)} \left(\frac{dY}{dt} \right) = o(\varepsilon), \quad \Rightarrow \quad P_{\gamma(t)} \left(\frac{dY}{dt} \right) = o(1), \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{\gamma(t)} \left(\frac{dY}{dt} \right) = 0.} \quad (10.1)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Вспомнив, что

$$\frac{df(\gamma(t))}{dt} = \partial_{\dot{\gamma}} f, \quad (10.2)$$

приходим к

$$P_{\gamma(t)} (\partial_{\dot{\gamma}} Y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla_{\dot{\gamma}} Y = 0}, \quad (10.3)$$

так мы пришли к *уравнению параллельного переноса*.

Пусть u^1, \dots, u^k – локальные координаты, $\gamma(t) = (u^1(t), \dots, u^k(t))$ – кривая, $\dot{\gamma}(t) = (\dot{u}^1(t), \dots, \dot{u}^k(t))$ – направляющий вектор кривой. Вспомним, что

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial Y^l}{\partial u^i} + Y^j \Gamma_{ij}^l \right) \frac{\partial}{\partial u^l},$$

и подставив $X = \dot{\gamma}$, $X^i = \dot{u}^i(t)$

$$\nabla_{\dot{\gamma}} Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{u}^i(t) \frac{\partial Y^l}{\partial u^i} + \dot{u}^i(t) Y^j \Gamma_{ij}^l = 0, \quad l = 1, \dots, k$$

Посмотрим чуть подробнее на

$$\frac{\partial Y^l}{\partial u^i} \dot{u}^i(t) = \frac{\partial Y^l}{\partial u^i} \frac{du^i}{dt} = \frac{dY^l}{dt},$$

таким образом

$$\dot{Y}^l + \Gamma_{ij}^l (u^1(t), \dots, u^k(t)) \dot{u}^i(t) Y^j(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{Y}^l + \Gamma_{ij}^l \dot{u}^i Y^j = 0. \quad (10.4)$$

Что у нас тут известно? Известны $u^1(t), \dots, u^k(t)$ – наша кривая γ , известны $\Gamma_{ij}^l(u^1(t), \dots, u^k(t))$. Неизвестными остаются $Y^1(t), \dots, Y^k(t)$. Получается система **линейных** дифференциальных уравнений I-го порядка на $Y^1(t), \dots, Y^k(t)$. Возникает задача Коши:

$$\begin{cases} \dot{Y}^l + \Gamma_{ij}^l \dot{u}^i Y^j = 0, & l = 1, \dots, k \\ Y^l(t_0) = Y_0^l, & l = 1, \dots, k \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \nabla_{\dot{\gamma}} Y = 0 \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases} \quad (10.5)$$

Thr 10.2. Пусть Σ – поверхность, $\gamma(t)$ – кривая на Σ , $Y_0 \in T_{\gamma(t_0)}\Sigma$. Тогда на всей γ существует и единственно параллельное вдоль γ векторное поле $Y(t)$, такое что $Y(t_0) = Y_0$.

10.2 Определение параллельного переноса

Def 10.3. Результат параллельного переноса касательного в точке A вектора Y_0 в точку B вдоль кривой $\gamma(t)$, такой что $\gamma(t_0) = A$, $\gamma(t_1) = B$, – это вектор $Y(t_1)$ единственного параллельного вдоль $\gamma(t)$ векторного поля $Y(t)$, такого что $Y(t_0) = Y_0$.

$$Y(t_1) = \Pi_{A \rightarrow B} Y_0$$

Lem 10.4. При параллельном переносе сохраняются длины и углы.

\triangle . Пусть Y, Z – параллельны вдоль γ . Посмотрим на $\langle Y, Z \rangle(t)$

$$\frac{d}{dt} \langle Y(t), Z(t) \rangle = \partial_{\dot{\gamma}} \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \cdot Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_{\dot{\gamma}} \cdot Z \rangle = 0,$$

в силу того, что Y, Z – параллельные поля. □

В частности, (для петли) $A = \gamma(t_0) = \gamma(t_1)$ верно, что для $\Pi_{A \rightarrow A}: T_A \Sigma \mapsto T_A \Sigma$ параллельный перенос – ортогональный линейный оператор. В частности, если поверхность ориентируемая, то всё хорошо.

10.3 Другой сюжет

Из линейности

$$Y(t) = \Pi(t) Y_0(t) \quad \Rightarrow \quad Y^l(t) = \Pi_m^l(t) Y_0^m.$$

Подставляя в

$$\begin{cases} \dot{Y}^l + \Gamma_{ij}^l \dot{u}^i Y^j = 0, & l = 1, \dots, k \\ Y^l(t_0) = Y_0^l, & l = 1, \dots, k \end{cases}$$

приходим к

$$\begin{cases} \dot{\Pi}_m^l Y_0^m + \Gamma_{ij}^l \dot{u}^i \Pi_m^j Y_0^m = 0 \\ \Pi_m^l(t_0) Y_0^m = Y_0^l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\Pi}_m^l + \Gamma_{ij}^l \dot{u}^i \Pi_m^j = 0 \\ \Pi_m^l(t_0) = \delta_m^l \end{cases}$$

Так мы пришли к задаче Коши на матрицу оператора параллельного переноса.

Просто решая диффур такого вида придём к

$$\begin{cases} \dot{y}(t) + a(t)y(t) = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = y_0 \exp\left(-\int_{t_0}^t a(t) dt\right). \quad (10.6)$$

Одно трагическое но – матрицы не коммутируют. Вот если бы коммутировали, то

$$\Pi(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t \Gamma(\dot{\gamma}) dt\right),$$

где

$$\Gamma_{ij}^l \dot{u}^i \stackrel{?}{=} \Gamma_j^l(\dot{\gamma}). \quad (10.7)$$

Вообще решение этой штуки пишется через *мультипликативный интеграл*. Но, в ОНБ, т.к. матрицы из SO(2) коммутируют, более того кососимметрические матрицы 2×2 тоже коммутируют. **Мораль:** в ОНБ касательных векторных полей на двумерной поверхности верно, что

$$\Pi(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t \Gamma(\dot{\gamma}) dt\right). \quad (10.8)$$

В лекции №9 выяснили, что

$$d\Gamma_2^1 = K \underbrace{e^1 \wedge e^2}_{dS}.$$

Применим это к петле на двумерие, где Γ кососимметрична

$$\Pi(t_1) = \exp\left[-\int_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_2^1(\dot{\gamma}) \\ -\Gamma_2^1(\dot{\gamma}) & 0 \end{pmatrix} dt\right] = \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & -\int_{t_0}^{t_1} \Gamma_2^1(\dot{\gamma}) \\ +\int_{t_0}^{t_1} \Gamma_2^1(\dot{\gamma}) & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Посмотрим теперь на $\Gamma_2^1 = P du + Q dv$, с учётом формулы Грина

$$\oint_{\gamma} P du + Q dv = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right) du \wedge dv \Rightarrow d(P du + Q dv) = \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right)$$

получим, по (10.9)

$$\int_{t_0}^{t_1} \Gamma_2^1(\dot{\gamma}) dt = \iint_{\Omega} d\Gamma_2^1 = \iint_{\Omega} K dS \Rightarrow \Pi(t_1) = \exp\left(\begin{pmatrix} 0 & \iint_{\Omega} K dS \\ -\iint_{\Omega} K dS & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha = \iint_{\Omega} K dS$. Утверждение, которое легко проверить, но не будем

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (10.9)$$

Thr 10.5. При параллельном переносе вдоль границы области Ω на двумерной поверхности вектор поворачивается на угол $\alpha = \iint_{\Omega} K dS$.

10.4 Геодезические

Нормальная кривизна $k_n = |(\text{id} - P)(\ddot{\gamma})| = |B(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})|$, где $\dot{\gamma} = d/ds$, s – натуральный параметр. Геодезическая кривизна $k_g = |P(\ddot{\gamma})| = |\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}|$. По теореме пифагора $k = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}$, принимая во внимание, что $k_n \equiv k_n(\dot{\gamma})$, то среди всех кривых³ с заданной касательной прямой, наименьшую имеет такая, у которой геодезическая кривизна $k_g = 0$.

$$k_g = 0 \Leftrightarrow \|\nabla_{\dot{\gamma}}\| = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\dot{\gamma}} = 0.$$

³Это одно из описаний таких кривых, как решения некоторой экстремальной задачи.

Def 10.6. Уравнение геодезической

$$\boxed{\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0}, \quad (10.10)$$

а кривая, которая удовлетворяет этому уравнению называется геодезической.

Lem 10.7. Если $k_n = 0$, то кривая – решение уравнения геодезических при натуральной параметризации.

Заметим, что $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$, это уравнение напоминает уравнение параллельного переноса, в частности

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0 \Rightarrow \dot{\gamma} \text{ параллельно вдоль } \gamma \Rightarrow \|\dot{\gamma}\| = \text{const.}$$

Def 10.8. Если s – натуральный параметр, то $t = as + b$, где a, b константы, называется *натуральный аффинный параметр*.

Lem 10.9. Пусть $\gamma(t)$ – решение уравнения геодезических $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$. Тогда t – *натуральный аффинный параметр*.

\triangle . Если $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$, то $\|\dot{\gamma}\| = \|d\gamma/dt\| = c$, тогда пусть $t = s/c$

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{c} \frac{d\gamma}{dt} \Rightarrow \left\| \frac{d\gamma}{ds} \right\| = \left\| \frac{1}{c} \frac{d\gamma}{dt} \right\| = \frac{c}{c} = 1,$$

таким образом $t = s/c$ – аффинный натуральный параметр. \square

Lem 10.10. Пусть $\gamma(t)$ – решение уравнения геодезических $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$. Тогда геодезическая кривизна этой кривой $k_g = 0$.

\triangle \square

Таким образом геодезические – это в точности кривые с $k_g = 0$ в различных аффинных натуральных параметризациях.

Теперь вспомним, что $\nabla_{\dot{\gamma}} Y = 0 \Leftrightarrow \dot{Y}^l + \Gamma_{ij}^l \dot{u}^i Y^j = 0$. Посмотрим теперь на $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$, то есть подставим вместо $Y = \dot{\gamma} \Rightarrow Y^l = \dot{u}^l \Rightarrow \dot{Y}^l = \ddot{u}^l$:

$$\ddot{u}^l + \Gamma_{ij}^l \dot{u}^i \dot{u}^j = 0, \quad l = 1, \dots, k \quad (10.11)$$

это *уравнения геодезических в координатах*, система **нелинейных** ОДУ II-го порядка на неизвестные (неизвестна кривая) $u^1(t), \dots, u^k(t)$. Точнее

$$\ddot{u}^l(t) + \underbrace{\Gamma_{ij}^l(u^1(t), \dots, u^k(t))}_{\text{нелинейная вещь}} \dot{u}^i(t) \dot{u}^j(t) = 0, \quad l = 1, \dots, k$$

12 Лекция № 12

Многие вещи раньше происходили исключительно в локальных координатах. Пусть есть некоторая $\Sigma \in \mathbb{R}^n$. Область D через r параметризует некоторый кусок нашей поверхности. Другая область D' через \hat{r} параметризует другой кусок. Что происходит на их пересечениях? У нашей поверхности есть условие регулярности. Хочется от него уйти, имея при этом возможность замены координат и склейки карт.

Рассмотрим любое множество, как аналог поверхности и потребовать, чтобы r и \hat{r} были взаимнооднозначны. Но этого мало. Нужно чтобы они были и непрерывны, а чтобы говорить про непрерывность нужно работать с топологическими пространствами. Хорошо, рассмотрим топологическое пространство M , такое, что:

1. M хаусдорфово.
2. M удовлетворяет второй аксиоме счётности: M обладает счётной базой топологии.

Пример 1. Для прямой в качестве базы топологии можно брать открытые интервалы, при чём с рациональными концами. Аналогично для \mathbb{R}^n . Из счётности базы выведем разбиение единицы. Если мы хотим интегрировать, то хотим разбивать единицу, и иначе никак.

Def 12.1. Возьмём пару (U, φ) , где $U \in M$ – открытая область, а $\varphi: U \mapsto \mathbb{R}^k$ – гомеоморфизм на образ.

$$U \xrightarrow{\varphi} \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^k.$$

В таком случае $u^1 \circ \varphi, \dots, u^k \circ \varphi$ – локальные координаты на M . Такую пару назовём *картой* на M .

Рассмотрим ситуацию пересечения двух разных карт. Выберем некоторые $U, V \subset M$, так чтобы $U \cap V \neq \emptyset$ и $\varphi: U \mapsto \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^k$, $\psi: V \mapsto \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^l$. Заметим, что

$$\varphi(U \cap V) \xrightarrow{\sim} \psi(U \cap V), \quad \Rightarrow \quad k = l.$$

Есть такая шутка - топологическая теория размерности. Мораль в том, что размерность можно определить чисто в топологических терминах. Если M - связно, то все карты принимают значения в \mathbb{R}^k , это k называют размерностью M , $\dim M$.

Пусть на многообразии M есть

$$U_\alpha, \varphi_\alpha, \quad U_\beta, \varphi_\beta, \quad \mapsto \mathbb{R}^n \quad \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n.$$

И даже больше, есть

$$\begin{cases} y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n), \\ \dots \\ y^2 = y^2(x^1, \dots, x^n) \end{cases} \quad - \text{ замена локальных координат или отображение склейки}$$

Раньше мы выводили их гладкость и регулярность из гладкости и регулярности самой поверхности, но на многообразии их вывести неоткуда, соответственно будем требовать для разных карт одного и того же атласа, чтобы эти замены были гладкими:

Def 12.2. Набор карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ на M называется *атласом* класса гладкости C^l , если эти карты согласованы в следующем смысле: отображения $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ - являются гладкими класса C^l на области определения. А также $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

Почему отображение склейки? Ну, пусть $V_\alpha = \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\bigsqcup_\alpha V_\alpha / \sim = M, \quad - \text{ гомеоморфизм топологических пространств.} \quad (12.1)$$

где $\forall p \in V_\alpha, q \in V_\beta \quad p \sim q \Leftrightarrow q = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(p)$.

Def 12.3. Атласы $A_1 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ и $A_2 = \{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$ эквивалентны, если $A_1 \cup A_2$ тоже атлас (класса гладкости C^l).

Что это значит? Если A_1 атлас, то все карты внутри согласованы. Если их объединения тоже атлас, что любые две карты из них согласованы. Но есть неэквивалентные атласы, с этим нужно смириться.

Def 12.4. Класс эквивалентности атласов на M называется *гладкой* (или дифференцируемой) *структурой* на M (класса гладкости C^l).

Def 12.5. Гладкое многообразие (класса гладкости C^l) - это топологическое пространство M (хаусдорфово, со счётной топологической базой) с гладкой структурой класса C^l .

Пример 2. Рассмотрим нехаусдорфово пространство. Рассмотрим

$$\mathbb{R} \bigsqcup \mathbb{R} / \sim, \quad x \sim y \Leftrightarrow x = y \neq 0.$$

Было две прямых, склеиваем одинаковые точки - все, кроме нуля, получили прямую с двойным нулем. Как мы вводим топологию на фактормножестве? У нас открыто такое множество, чтобы его прообраз до факторизации открыт.

Множество U в M с верхним $0+$ открыто, множество V с $0-$ также открыто в M . Есть две карты $U \xrightarrow{\varphi=\text{id}} \mathbb{R}$ и $V \xrightarrow{\psi=\text{id}} \mathbb{R}$ - гомеоморфизмы. Посмотрим на $\psi \circ \varphi^{-1}$ - прямую без нуля отображаем тождественно в прямую без нуля, что гладко. Это атлас. Это уродливо.

Пример 3. Посмотрим на сферу S^2 . Легко было бы получить стереографическую проекцию, вида

$$(u, v) = \varphi_N(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right), \quad (12.2)$$

и, в обратную сторону,

$$x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \quad z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}, \quad (12.3)$$

собирая всё вместе,

$$\varphi_N^{-1}(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

Аналогично можем построить проекцию из южного полюса $\varphi_S(A) = (s, t)$. Можно заметить, что проецировать из северного, это то же самое, что и проецировать из южного.

$$\varphi_s(x, y, z) = \varphi_N(x, y, -z),$$

поэтому

$$(s, t) = \varphi_S(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right),$$

получили вторую карту $(S^2 \setminus \{S\}, \varphi_S)$.

Как выглядит замена координат?

$$\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}(u, v) = \varphi_S \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) = \left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2} \right).$$

Но есть тонкости: пересечение карт это $S^2 \setminus \langle N, S \rangle$. Посмотрим на $\varphi_N(S^2 \setminus \langle N, S \rangle) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$. Отображение склейки гладкое на области определения.

Очень забавный факт:

Thr 12.6 (теорема Уитни). *Многообразие размерности k можно засунуть в \mathbb{R}^{2k+1} .*

Пример 4. Рассмотрим \mathbb{RP}^n . Фиксируем O и говорим, что \mathbb{RP}^n – множество прямых, проходящих через O . Заметим, что (\mathbb{RP}^n, α) – метрическое пространство, следовательно хаусдорфово топологическое.

Как выглядит шар? Как конус.