1.1 Векторы как дифференцирование функций

Что такое вектор? С одной стороны можем посмотреть на производную функции по направлению

$$\partial_X f(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(f(A+\varepsilon X) - F(A)\right). \tag{1.1}$$

Что очень просто выглядит в декартовых координатах

$$\partial_X f(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \ldots = \frac{d}{d\varepsilon} f\left(A^1+\varepsilon X^1, \ldots, A^n + \varepsilon XN\right)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial f}{\partial x^1}\left(A^1,\ldots,A^n\right)X^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\left(A^1,\ldots,A^n\right).$$

Таким образом

$$\partial_X f(A) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(A). \tag{1.2}$$

Таким образом построили отображение

$$X \mapsto \partial_X\big|_A.$$

Выпишем несколько свойств такого оператора

$$\partial_X(f+g)(A) = \partial_X f(A) + \partial_X g(A)$$
$$\partial_X(fg)(A) = (\partial_X f(A))g(A) + f(A)(\partial_X g(A)).$$

Что соответсвует правилу Лейбница.

1.2 Дифференцирование как вектор

Теперь зайдём с другой стороны. Рассмотрим $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим отображение D

$$D\colon C^\infty(U) \to \mathbb{R},$$

удоволетворяющее свойствам

$$D(f+g) = Df + Dg$$
$$D(fg) = (Df)\cdot g(A) + f(A)\cdot(Dg).$$

Что и назовём дифференцированием в точке A.

Легко показать, что $D(\text{const}) = 0$, $D\lambda f = \lambda Df$ и $f(A) = g(A) = 0 \Rightarrow D(fg) = 0$. Вспомним теперь формулу Тейлора в координатах $u^1,\ldots,u^n$.

$$f(u^1,\ldots,u^n) = f(A^1,\ldots,A^n) + \frac{\partial f}{\partial u^i}(A^1,\ldots,A^n)\cdot(u^i - A^i) + h_{ij}(u^1,\ldots,u^n)(u^i-A^i)\cdot(u^j-A^j).$$

Тогда

$$D(f) = 0 + \underbrace{D(u^i - A^i)}_{X^i}\frac{\partial f}{\partial u^i}(A^1,\ldots,A^n).$$

Таким образом

$$Df = X^i \frac{\partial f}{\partial u^i}\left(A^1,\ldots,A^n\right). \tag{1.3}$$

Итого

1. В ДСК $X \mapsto \partial_X\big|_A$.
2. В ДСК D имеет вид $\partial_X\big|_A$ для некоторого X.
3. Получили взаимно-однозначное соответствие векторы – дифференцирование.
4. Определим векторы, как дифференцирование. Это определение `инвариантно`.

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \tag{1.4}$$

   где $(X^1,\ldots,X^n)$ – координаты вектора в координатах $(u^1,\ldots,u^n)$.

1.3 Замена координат

Допустим выбрали некоторые $(u^1,\ldots,u^n)$ и $(v^1,\ldots,v^n)$. Тогда

$$D = X^i\frac{\partial}{\partial u^i} = Y^j \frac{\partial}{\partial v^j}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = \frac{\partial v^j}{\partial u^i}\frac{\partial f}{\partial v^j}, \qquad \Rightarrow \qquad X^i\frac{\partial}{\partial u^i} = \underbrace{X^i\frac{\partial v^j}{\partial u^i}}_{Y^j}\frac{\partial}{\partial v^j}.$$

Получили формулу изменения координат вектора при смене системы[1] координат

$$Y^j = \frac{\partial v^j}{\partial u^i}X^i \qquad \Leftrightarrow \qquad Y = JX. \tag{1.5}$$

1.4 Коммутатор

Для матриц известен коммутатор вида

$$[A, B] = AB - BA.$$

Аналогично для дифференцирования

$$[\partial_X, \partial_Y]\, f = \partial_X\partial_Y f - \partial_Y\partial_X f = X^i\frac{\partial}{\partial u^i}\left(Y^j\frac{\partial f}{\partial u^j}\right) - Y^j\frac{\partial}{\partial u^j}\left(X^i\frac{\partial f}{\partial u^i}\right) = X^i\frac{\partial Y^j}{\partial u^i}\frac{\partial f}{\partial u^i} - Y^j\frac{\partial X^i}{\partial u^j}\frac{\partial f}{\partial u^j}$$

Таким образом

$$[\partial_X, \partial_Y]\, f = \left[X^i\frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i\frac{\partial x^j}{\partial u^i}\right]\frac{\partial f}{\partial u^i}. \tag{1.6}$$

Это, как ни странно, дифференциальный оператор первого порядка. Это значит что есть такое векторное поле $[X, Y]$, что

$$\partial_{[X,Y]} = [\partial_X, \partial_Y]\, f.$$

Таким образом $[X, Y]$ существует и равен

$$[X, Y] = X^i\frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i\frac{\partial x^j}{\partial u^i}. \tag{1.7}$$

2.5 Обратный образ

Пусть

$$X^n \xrightarrow{F} X^k \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}.$$

Или можем рассмотреть отображение

$$X^n \xrightarrow{F^*\varphi} \mathbb{R}, \qquad \text{где} \qquad F^*\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \circ F,$$

что и является обратным образом.

Пусть теперь $P \in X^n$ отображается в $F(P) \in X^k$. Пусть $W(P) \in X^n$, постороим $d_pF(W)$ – вектор $F(P) \in X^k$. Пусть $\varphi \in C^\infty(X^k)$, тогда

$$\underbrace{d_PF(W)}_{\text{вектор}}\ \varphi \stackrel{\text{def}}{=} W(F^*\varphi). \tag{2.8}$$

Def 2.1. d_PF – *дифференциал* F в точке P.

Пусть $\varphi \circ \Psi = \varphi(v^1, \ldots, v^k)$ в координатах $v^1, \ldots, v^k$. Тогда

$$F^*\varphi = \varphi(F) \qquad \Rightarrow \qquad F^*\varphi(u^1, \ldots, u^k) = \underbrace{\varphi(v^1(u^1, \ldots, u^n), \ldots, v^k(u^1, \ldots, u^n))}_{F^*\varphi \text{ в координатах } u^1, \ldots, u^n} = \varphi \circ F \circ \Phi,$$

где Φ – координатное отображение. Теперь вектор W

$$W = W^1\frac{\partial}{\partial u^1} + \ldots + W^n\frac{\partial}{\partial u^n} = W^i\frac{\partial}{\partial u^i}.$$

Соответсвенно, по определению

$$d_PF(W)\ \varphi \stackrel{\text{def}}{=} WF^*\varphi, \tag{2.9}$$

[1] «В Царство небесное войдут только те кто думают про вектор, как про дифференцирование, потому что там нет координат.»

расписывая, получим
$$WF^*\varphi = W^i \frac{\partial}{\partial u^i}\varphi(v^1(u^1,\ldots,u^n),\ldots) = W^i \frac{\partial \varphi}{\partial v^j}\frac{\partial v^j}{\partial u^i} = \underbrace{\frac{\partial v^j}{\partial u^i} W^i \frac{\partial}{\partial v^j}}_{d_pF(W)} \varphi.$$
А это кто? А вот матрица Якоби F, записанного в координатах $v^1,\ldots,v^k$
$$\begin{bmatrix} d_PF(W)^{\,1} \\ \vdots \\ d_PF(W)^{\,k}\end{bmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & \dfrac{\partial v^j}{\partial u^i} & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W^1 \\ \vdots \\ W^n\end{pmatrix} \tag{2.10}$$
Тогда выясняется, что d_PF – линейное отображение. Действительно,
$$d_PF(W_1+W_2)\varphi = (W_1+W_2)F^*\varphi = W_1D^*\varphi + W_2F^*\varphi = \left(d_PF(W_1) + d_PF(W_2)\right)\varphi.$$

2.6 Ещё раз о чёрте

Есть пространство V с векторами и двойственное V^* с ковекторами, пространство линейных функций. Тогда $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ – базис в V, $\boldsymbol{e}^1,\ldots,\boldsymbol{e}^n$ – двойственный базис в V^*, т.е. $\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}_j = \delta^i_j$.

Для начала скажем, что W – вектор и он же линейная функция на ковекторах.
$$W(\xi) = \xi(W) = \langle W, \xi\rangle,$$
что называется спариванием вектора и ковектора.

Пусть есть некоторая $B(W,Y)$ – билинейная функция от двух векторов. А теперь посмотрим на линейный оператор $A\colon V\to V$, билинейную функцию от вектора и ковектора.
$$A(W,\xi) = \langle A(W), \xi\rangle$$
Обобщим до понятия тензора:
$$T\colon \underbrace{V^*\otimes\ldots\otimes V^*}_{p}\otimes\underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{q}\to\mathbb{R},$$
где T полилинейная функция от p ковекторов и q векторов, тензор типа p,q. Они образуют линейное пространство
$$T\in\underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{p}\otimes\underbrace{V^*\otimes\ldots\otimes V^*}_{q} = \mathbb{T}^p_q(V).$$

3.7 Дифференциальная форма

В линейной алгебре есть ковекторы, а вот в дифференциальной геометрии ковекторные поля суть дифференциальные 1-формы.

Def 3.2. *Дифференциальная 1-форма* – это ковекторное поле.

Def 3.3. *Дифференциал* функции f от векторного поля X это $df(X) \overset{\text{def}}{=} Xf$.

Что это нам даёт? Ну, во-первых, пусть $x^1,\ldots,x^n$ – некоторые координаты.
$$X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$
Тогда
$$df(X) = Xf = X^i\frac{\partial f}{\partial x^i}.$$
Но, заметим, что $\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}$ – базис в каждой точке. Рассмотрим теперь $f=x^i$ и $X=\frac{\partial}{\partial x^j}$, тогда
$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j. \tag{3.11}$$
Из этого следует, что $dx^1,\ldots,dx^n$ – двойственный к $\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}$ базис в V^*. Тогда в этом базисе
$$df = \omega_i\,dx^i.$$

Заметим, что

$$\underbrace{\omega_i\,dx^i}_{df}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\omega_i\delta^i_j=\omega_j,\qquad\Rightarrow\qquad \omega_j=df\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Тогда

$$df=\frac{\partial f}{\partial x^i}\,dx^i. \tag{3.12}$$

Получается ковектор df расписывается по базису dx^i двойственного пространства с координатами $\partial f/\partial x^i$.

А для общей 1-формы

$$\omega=\omega_i\,dx^i,$$

где $\omega^1,\ldots,\omega^n$ – координаты ω в локальной системе координат.

Def 3.4. ω гладкая, если $\forall X$, где X – гладкое поле, верно, что $\omega(X)$ – гладкая функция.

Lem 3.5. *$\omega=\omega_i\,dx^i$ – гладкая $\Leftrightarrow$ ω_i – гладкая форма $\forall i$.*

3.8 Билинейные формы

Пространство билинейных форм на V – $V^*\otimes V^*=S^2V^*\oplus\Lambda^2V^*$. Что ж, в $V*$ базис $\boldsymbol{e}^1,\ldots,\boldsymbol{e}^n$, в S^2V^* базис

$$e^i\cdot e^j(X,Y)=\frac{1}{2}\left(X^iY^j+X^jY^i\right),$$

а скалярное произведение

$$g=g_{ij}dx^i\cdot dx^j.$$

В кососимметрических же Λ^2V^* базис

$$e^i\wedge e^j(X,Y)=X^iY^j-X^jY^i,\qquad 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n. \tag{3.13}$$

В таком случае, если есть некоторая кососимметрическая ω, то

$$\omega=\sum_{i<j}\omega_{ij}\,dx^i\wedge dx^j.$$

Def 3.6. Поле кососимметрических билинейных форм – дифференциальные 2-формы.

Возьмём два поля и засунем в 2-форму, получим функцию.

3.9 Полилинейные формы

Пусть V – векторное пространство, Λ^kV^k – векторное пространство кососимметрических полилинейных функций от k векторов.

$$\omega\left(X_1,\ldots,X_k\right)\in\mathbb{R}.$$

Введём некоторое внешнее умножение

$$\wedge\colon\Lambda^kV^*\times\Lambda^lV^*\to\Lambda^{k+l}V^*.$$

Пусть $\sigma\in\Lambda^kV^*$, $\tau\in\Lambda^lV^*$, тогда

$$\sigma\wedge\tau\left(X_1,\ldots,X_{k+l}\right)=\frac{1}{k!l!}\sum_{\pi\in S_{k+l}}\operatorname{sign}(\pi)\ \sigma\left(X_{\pi(1)},\ldots,X_{\pi(k)}\right)\ \tau\left(X_{\pi(k+1)},\ldots,X_{\pi(k+l)}\right).$$

Если в V базис $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_k$, то в Λ^kV в качестве базиса можно взять

$$e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k},\qquad i_1<\ldots<i_k.$$

Def 3.7. Дифференциальная k-форма – поле полилинейных кососимметрических форм от k векторов, причем

$$\omega=\sum_{i_1<\ldots<i_k}\omega_{i_1,\ldots,i_k}e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k}, \tag{3.14}$$

где $\omega_{i_1,\ldots,i_k}=\omega\left(\boldsymbol{e}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{i_k}\right)$ – гладкие функции..

3.10 Внешний дифференциал

Обозначим $\Omega^k(U)$ – пространство дифференциальных k-форм на некоторой $U \in \mathbb{A}^n$. Также будем говорить, что $X^\infty(U) = \Omega^0(u)$ – 0-формы. У нас уже есть такое отображение

$$\Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{?} \ldots$$

Ну и введём тогда операцию внешнего дифференцирования

$$d\colon \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U). \tag{3.15}$$

Введём её аксиоматически[2]

$$\begin{aligned}
&1) \quad d\left(\omega_1 + \omega_2\right) = d\omega_1 + d\omega_2;\\
&2) \quad d(\sigma \wedge \tau) = (d\sigma) \wedge \tau + (-1)^{|\sigma|}\sigma \wedge (d\tau);\\
&3) \quad d^2 = 0, \text{ т.е. } d(d\omega) = 0;\\
&4) \quad f \in \Omega^0(U) = C^\infty(U) \;\Rightarrow\; df(X) = Xf.
\end{aligned}$$

Thr 3.8. *Внешний дифференциал d существует и единственнен.*

$\triangle$.

I. Пусть существует внешний дифференциал. Тогда получим, что

$$d\omega = d\left(\sum_{i_1<\ldots<i_k} \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right) = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}. \tag{3.16}$$

Собственно, подобный ответ является единственным.

II. Докажем теперь существование. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ – координаты, тогда определим d, как (3.16). Легко показать, что такое определение удоволетворяет всем свойствам.

$\square$

4.11 Векторозначная форма

...

[2] Формы образуют градуированную алгебру. Это такой эмпирический факт: в градуированной алгебре дифференциал должен быть с таким знаком и счастьей будет.