

БИЛЕТЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО «АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ», ФОПФ

Авторы: Хоружий Кирилл
Примаек Евгений

От: 18 января 2021 г.

Содержание

1	Кинематика точки	2
2	Описание движения твёрдого тела	3
3	Приложения к твердому телу	3
22	Сплошная среда и её напряжение	4
23	Перемещение сплошной среды	5
24	Тензоры деформаций и перемещений	5
25	Элементы гидродинамики	6
31	Уравнение Лагранжа второго рода	8
32	Разрешимость уравнений Лагранжа	8
33	Изменение полной механической энергии голономной системы	9
34	Обобщенный потенциал и первые интегралы лагранжевых систем	9
35	Гамильтонов формализм, уравнения и интеграл Якоби	10
36	Принцип наименьшего действия	12

1 Кинематика точки

Для точки P движущейся относительно некоторого неподвижного тела (свяжем с ним точку O), можно ввести следующие характеристики:

Def 1.1 (Радиус вектор, скорость и ускорение точки P).

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Def 1.2. Для задания движения точки, зная её траекторию, можно сопоставить ей дуговую координату $\sigma(t)$ и получить выражения для скорости и ускорения, выраженные в осях *естественного трёхгранника* $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$. Таким образом для $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\sigma(t))$:

$$\boldsymbol{\tau}(\sigma) = \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma}, \quad \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}(\sigma),$$

где ρ – радиус кривизны. Для кривой в \mathbb{R}^3 добавим ещё вектор \mathbf{b} для правой тройки. Таким образом получим формулы Френе:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\tau} + \varkappa\mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\varkappa\mathbf{n}.$$

Таким образом сможем в компонентах трёхгранника выписать скорость и ускорение точки:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = v_{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{w} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}v_{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{\tau} + v_{\boldsymbol{\tau}}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} = \frac{dv_{\boldsymbol{\tau}}}{dt}\boldsymbol{\tau} + v_{\boldsymbol{\tau}}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dv_{\boldsymbol{\tau}}}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v_{\boldsymbol{\tau}}^2}{\rho}\mathbf{n}. \end{aligned}$$

Как видно, ускорение точки представилось в видео $\mathbf{w} = w_n + w_{\boldsymbol{\tau}}$ – *нормальной* и *тангенциальной* составляющей.

Lem 1.3 (Из матана). Для $f_i \in C^2: U \mapsto V$, если X – касательный вектор в точке $p \in U$, то $X(f)$ можно определить как:

$$X(f) = X(x^i) \frac{\partial f(p)}{\partial x^i}, \text{ а координаты этого вектора в криволинейных координатах: } X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Каждую материальную точку можем определить $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ – итого \mathbb{R}^{3N} . Но есть некоторые ограничения вида

$$f_i(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Вложим в фазовое пространство многообразие M , в котором локально всё хорошо. Тогда $\dim M = n$ – число степеней свободы, а параметризация q_1, \dots, q_N – криволинейные координаты. В каждой $A \in M$ верно, что $\dot{\mathbf{q}} \in TM_A$, то есть

$$TM = \bigcup_q T_q M \ni (q, \dot{q})$$

И так, движение точки можно задать, если её криволинейные координаты – известные функции $q(t)$.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Def 1.4. Коэффициентами Ламе такие H^i . С их помощью удобно выразить единичные базисные векторы криволинейных координат:

$$H_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q^i} \right)^2}. \quad e^i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}.$$

Далее будем координатными векторами называть $\mathbf{g}_i(\mathbf{r}) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$. Разложение произвольного вектора по локальному базису имеет вид:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i = a_j \mathbf{g}^j.$$

Здесь \mathbf{g}^j – векторы двойственного базиса к базису из \mathbf{g}_i . В двойственном же (взаимном) базисе из матана мы видели:

$$X(f) = df(X) = \partial_x f, \quad dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i, \quad a = a_i dx^i.$$

Таким образом получаем скорость точки и её ковариантную компоненту:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} = \mathbf{g}_i \dot{q}^i, \quad v^i = \dot{q}^i.$$

И для ускорения:

$$w_k = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_k = \frac{(d\mathbf{v})_k}{dt} = g_{kj} \frac{dv^j}{dt} + \Gamma_{kij} v^j v^i.$$

2 Описание движения твёрдого тела

Def 2.1. *Твёрдое тело* — множество точек, расстояние между которыми не меняется: $\forall j, j', t: |\mathbf{r}_j(t) - \mathbf{r}_{j'}| = \text{const}$.

Точка O это полюс. Во-первых перенесем начало координат в O . Введём систему координат $O_{\xi\nu\zeta}$ связанную с телом, — тело относительно неё не движется

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}, \quad \boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{OA} = \text{const в } O_{\xi\nu\zeta}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}(t) = R(t)\boldsymbol{\rho}.$$

Ортогональность матрицы R даёт возможность описать её тремя независимыми параметрами. Один из вариантов сделать это — углы Эйлера.

Пусть начальная ПДСК (x, y, z) , а конечная — (X, Y, Z) , при чём $xy \cap XY = ON$ — линия узлов.

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------|
| 1) $\alpha: Ox \rightarrow ON$, | угол прецессии; |
| 2) $\beta: Oz \rightarrow OZ$, | угол нутации; |
| 3) $\gamma: OX \rightarrow ON$, | угол собственного вращения. |

Повороты системы на эти углы называются прецессия, нутация и поворот на собственный угол (вращение).

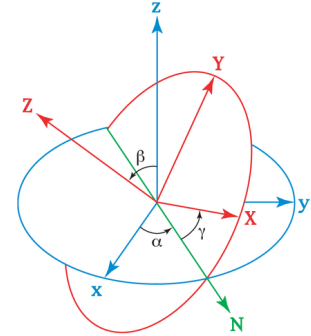


Рис. 1: Углы Эйлера

Матричная запись углов Эйлера:

$$R_Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_X(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad R_Z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Thr 2.2 (Теорема Эйлера). *Произвольное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку, можно осуществить посредством вращения вокруг некоторой оси, проходящей через эту точку.*

Thr 2.3 (Теорема Шаля). *Самое общее перемещение твердого тела разлагается на поступательное перемещение, при котором произвольно выбранный полюс переходит из своего первоначального положения в конечное, и на вращение вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс. Это разложение можно совершить не единственным способом, выбирая за полюс различные точки тела; при этом направление и длина поступательного перемещения будут изменяться при выборе различных полюсов, а направление оси вращения и угол поворота вокруг нее не зависят от выбора полюса.*

Thr 2.4 (Теорема Моцци). *Самое общее перемещение твердого тела является винтовым перемещением.*

Con 2.5 (Теорема Бернулли-Шаля). *Самое общее перемещение плоской фигуры в своей плоскости есть либо поступательное перемещение, либо вращение вокруг точки. Эта точка называется центром конечного вращения.*

3 Приложения к твердому телу

Проведём два вектора $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_O$:

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_O + \mathbf{r} = \mathbf{r}_O + R(t)\boldsymbol{\rho} \xrightarrow{d/dt} \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \dot{R}\boldsymbol{\rho} = \mathbf{v}_O + \dot{R}R^{-1}\mathbf{r}$$

но,

$$RR^T = E, \quad \dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0, \quad \dot{R}R^T = -R\dot{R}^T, \quad (\dot{R}R^{-1})^T = -\dot{R}R^{-1}.$$

То есть $\dot{R}R^{-1}$ кососимметрична. Тогда пусть

$$\dot{R}R^{-1} = \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

Thr 3.1 (формула Эйлера). Существует единственный вектор¹ ω , называемый *угловой скоростью тела*, с помощью которого скорость v точки тела может быть представлена в виде

$$v_A = v_O + \omega \times r \quad - \quad \text{формула Эйлера.}$$

Тогда, например, при постоянном радиус векторе верно, что

$$v_A = \frac{da}{dt} = \omega \times a, \quad \text{при условии } a = \text{const.}$$

Можно вывести ускорение точки твёрдого тела

$$\begin{aligned} w_A &= w_O + \frac{d\omega}{dt} \times r + \omega \times \frac{dr}{dt}, \\ w_A &= w_O + \varepsilon \times r + \omega \times (\omega \times r) \quad - \quad \text{формула Ривальса,} \end{aligned}$$

где $\varepsilon = d\omega/dt$ — угловое ускорение.

22 Сплошная среда и её напряжение

Тензор напряжений

В недеформированном теле молекулы находятся друг с другом в механическом и тепловом равновесии. При деформировании же взаимное расположение меняется и равновесие нарушается.

Def 22.1. В результате возникают *внутренние напряжения* — силы, стремящиеся вернуть тело в равновесие, которые обуславливаются молекулярными силами, обладающими незначительным радиусом действия.

Выделим в теле объём и рассмотрим суммарную действующую на него силу. С одной стороны, эта сила может быть представлена: $\int F dV$, для F — силы на единицу объема. С другой стороны, силы, с которыми действуют различные части объёма друг на друга не приведут к появлению никакой внешней силы. Поэтому искомая полная сила будет состоят из сил действующих на объём со стороны окружающих его частей тела. В силу пренебрежимой малости радиуса молекулярных сил, внешние силы будут представлены как суммы сил на каждый элемент поверхности объёма.

Def 22.2. $\int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x^k} = \oint \sigma^{ik} df_k$. В последнем равенстве σ^{ik} — *тензор напряжений* (симметричный). То есть $\sigma^{ik} df_k$ есть i -ая компонента силы, действующей на элемент поверхности df .

Так, на единичную площадку, перпендикулярную оси x , действуют нормальная к ней сила σ_{xx} и тангенциальные σ_{yx} и σ_{zx} . Знак силы $\sigma^{ik} df_k$, которая является действующей на ограниченный поверхностью объём со стороны окружающих тел — положительный. Для напряжений же извне, перед интегралом нужно поставить знак минус.

Всестороннее и не только сжатие

При таком сжатии на каждую единицу поверхности тела действует одинаковое по величине давление p , направленное везде по нормали к поверхности внутрь объёма тела. А на элемент df_i действует сила $-p df_i = \sigma^{ik} df_k$. Таким образом при всестороннем сжатии тензор напряжений: $\sigma^{ik} = -p \delta^{ik}$.

В общем случае ещё и диагональные элементы тензора напряжений не нуль. То есть, помимо нормальной силы, действуют ещё и тангенциальные «скалывающие» напряжения, стремящиеся сдвинуть параллельные элементы поверхности друг относительно друга.

В равновесии силы внутренних напряжений должны уравновешивать друг друга, то есть:

$$F_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x^k} = 0.$$

И если тело находится в поле тяжести, то в равновесии:

$$F + \rho g = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x^k} + \rho g^i = 0.$$

Внешние силы

Обычно именно внешние силы вызывают деформацию, однако они будут просто входить в граничные условия к уравнениям равновесия. Внешняя сила P должна компенсироваться силой $\sigma^{ik} df_k$:

$$P^i df = -\sigma^{ik} df_k = 0 \quad \Rightarrow \quad df_k = n_k df \quad \Rightarrow \quad \sigma^{ik} n_k = P^i,$$

¹Псевдовектор же, нет?

где n — единичный вектор нормали к площадке. Таким образом получили условие, которое должно выполняться на всей поверхности находящегося в равновесии тела.

23 Перемещение сплошной среды

Пусть каждой точке среды соответствует ξ^1, ξ^2, ξ^3 , собственно (ξ, t) — *лагранжевы переменные*. Закон движения среды в таком случае это

$$\mathbf{r}(\xi, t), \quad (0.1)$$

скорость же

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}(\xi, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{v}(\xi, t)}{\partial t},$$

и так далее.

Альтернативно можем задать (x, t) — эйлерово описание. Тогда

$$\mathbf{v}(x, t), \mathbf{w}(x, t) \quad \text{— поля скоростей и ускорений.}$$

В частности, представляя движение по шоссе, полоса 1,2,3 и участок трассы — эйлерово описание среды. Если же мы будем следить за каждой машиной, то это будет лагранжево описание.

24 Тензоры деформаций и перемещений

Подход к деформации

Под влиянием приложенных внешних сил твердые тела в той или иной степени *деформируются*, то есть меняют свою форму и объём. Рассмотрим точку деформируемого тела $\mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)$, которая после деформации станет \mathbf{r}' .

Def 24.1. $\mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ — *вектор деформации*. Координаты y^i смещенной точки могут быть выражены через x^i , таким образом $\mathbf{u}(x^i)$ полностью определяет деформацию тела.

Рассмотрим две близкие точки, расстояние между ними до деформации $d(l')^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$, а после $d(l)^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2$. Записав через деформацию (здесь $u_i = g_{ik}u^k$):

$$d(l')^2 = (dx^i + du_i)^2 \Rightarrow \left(du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x^k} dx^k \right) \Rightarrow d(l')^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x^k} dx^i dx^k + \frac{\partial u_i}{\partial x^k} \frac{\partial u_i}{\partial x^l} dx^k dx^l.$$

Поменяем во втором члене индексы i и k , а в третьем i и l :

$$d(l')^2 = dl^2 + 2u_{ik}dx^i dx^k, \quad \text{где } u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_i}{\partial x^k} + \frac{u_k}{\partial x^i} + \frac{u_i}{\partial x^l} \frac{u_l}{\partial x^k} \right).$$

Как и всякий симметричный тензор, можно привести тензор u_{ik} в каждой данной точке к главным осям. Это значит, что в каждой данной точке можно выбрать такую систему координат — главные оси тензора, — в которой из всех компонент u_{ik} отличны от нуля только диагональные компоненты u_{11}, u_{22}, u_{33} .

При малых же деформациях, за исключением редких случаев, и вектор деформации оказывается малым, тогда можем пренебречь последним членом в полученном нами значении для тензора деформации:

Def 24.2 (Тензор деформации в малом приближении).

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i} \right).$$

Изменение объёма при деформации

Относительные удлинения элементов длины вдоль направлений главных осей тензора деформации с нашей точностью: $\sqrt{1 + 2u_{ii}} - 1 \approx u_{ii}$.

Малый элемент объёма тогда претерпит следующее изменение:

$$dV' = dV(1 + u_{11})(1 + u_{22})(1 + u_{33}) \Rightarrow u_{ii} = \frac{dV' - dV}{dV}.$$

Для несжимаемого тела, тогда u_{ii} — сумма диагональных компонент тензора в главных осях — нулевая. Такая деформация называется *сдвигом*.

Тензор скорости деформации

Def 24.3. Тензором скорости деформации назовём просто $\dot{u}_{ij} = \frac{du_{ij}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right)$.

Тогда рассмотрим движение элемента объёма тела во времени: $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r})$, до первого члена малости:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^j} \delta x^j \Rightarrow (\mathbf{v}_0 = 0) \Rightarrow v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} \delta x^j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right) \delta x^j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right) \delta x^j.$$

Получаем уравнение, где с помощью замены, и вернув начальную скорость, явно можем показать, что

Thr 24.4 (Теорема Гельмгольца). *Тензор скоростей деформации можно разложить на сумму симметричного и кососимметричного:*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + u_{ij} \delta x^j \mathbf{e}^i + \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r}.$$

Обобщенный закон Гука

Пусть E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона. Тогда

$$u_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}, \quad u_{22} = u_{33} = -\frac{\mu}{E} \sigma_{11}.$$

Перепишем это в виду

$$u_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\mu}{E} \sigma_{22} - \frac{\mu}{E} \sigma_{33} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_{11} - \frac{\mu}{E} \text{tr } \sigma.$$

Или, в матричном виде

$$\begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \frac{1+\mu}{E} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} - \frac{\mu}{E} \text{tr } \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В тензорном виде

$$u_{ik} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_{ik} - \frac{\mu}{E} \delta_{ik} \text{tr } \sigma.$$

Выразим u :

$$\text{tr } u = \frac{1+\mu}{E} \text{tr } \sigma - \frac{3\mu}{E} \text{tr } \sigma \Rightarrow \text{tr } \sigma = \frac{E}{1-2\mu} \text{tr } u.$$

Так и получаем *обобщенный закон Гука*:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\mu} \left[u_{ik} + \frac{\mu}{1-2\mu} \delta_{ik} \text{tr } u \right]$$

25 Элементы гидродинамики

Уравнение непрерывности

Def 25.1 (Предмет рассмотрения). Ввиду макроскопического рассмотрения *жидкости* (газы) в гидродинамике представляется как сплошная среда, то есть малый элемент объёма жидкости содержит ещё достаточно большое количество молекул, относительно межмолекулярного расстояния.

Для описания движения жидкости требуется задать распределение скорости жидкости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ и какие-либо её две термодинамические величины, как, например, плотность и давление. Важно отметить, что все эти величины относятся не к отдельной частице, а к точке в пространстве в определенное время.

Thr 25.2 (Уравнение непрерывности).

Δ . В маленьком объёме V_0 количество жидкости есть $\int_{V_0} \rho dV$. Через элемент поверхности, ограничивающей V_0 , в единицу времени протекает $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$ жидкости — положительно или отрицательное число, в зависимости от того, вытекает или втекает жидкость соответственно. Тогда приравниваем для вытекания жидкости два наших рассуждения:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} \Rightarrow \int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} \right) dV = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0.$$

Последнее следует из того, что равенство должно иметь для любого объёма, таким образом получили искомое *уравнение непрерывности*. \square

Уравнение Эйлера

Thr 25.3 (Уравнение Эйлера).

\triangle . Выделим в жидкости некоторый объём, полная сила, действующая на этот объём: $-\oint p d\mathbf{f} = -\int \text{grad } p dV$, где интеграл из взятого по поверхности объёма преобразуется в сам рассматриваемый объём. Таким образом получили, что на единицу объёма жидкости будет действовать сила:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p.$$

Однако стоящая здесь скорость определяет изменение скорости именно элемента объёма, а не точки в пространстве. Запишем это изменение скорости:

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

Последнее и есть искомое уравнение Эйлера. □

Если же жидкость движется во внешнем поле тяжести, то, на каждый элемент объёма будет действовать сила, которая просто добавится к изначальному уравнению:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}.$$

Уравнение Навье-Стокса

Чтобы нормально учесть вязкость, нужно поговорить про *поток импульса*. Импульс единицы объёма жидкости есть $\rho \mathbf{v}$, скорость изменения его компоненты:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v^i = \rho \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v^i.$$

Уравнения непрерывности и Эйлера запишутся в тензорном виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v^k)}{\partial x^k}, \quad \frac{\partial v^i}{\partial t} = -v^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} - \frac{1}{\rho} \delta^{ik} \frac{\partial p}{\partial x^k}.$$

Тогда получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v^i = -\rho v^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} - \delta^{ik} \frac{\partial p}{\partial x^k} - v^i \frac{\partial \rho v^k}{\partial x^k} = -\delta^{ik} \frac{\partial p}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial x^k} \rho v^i v^k = -\frac{\partial \Pi^{ik}}{\partial x^k}.$$

Def 25.4. Π^{ik} — *тензор плотности потока импульса*: $\Pi^{ik} = p \delta^{ik} + \rho v^i v^k$.

Таким образом уравнение Эйлера у нас записалось в виде: $\frac{\partial}{\partial t} \rho v^i = -\frac{\partial \Pi^{ik}}{\partial x^k}$. Поток импульса представляет собой чисто обратимый перенос импульса, связанный с просто механическим передвижением различных участков жидкости и с действующими в жидкости силами давления. *Вязкость* (внутреннее трение) жидкости проявляется в наличии ещё дополнительного, необратимого переноса импульса из мест с большой скоростью в места с меньшей.

Поэтому уравнение движения вязкой жидкости можно получить, прибавив к идеальному потоку импульса дополнительный член σ^{ik}_{visc} , определяющий такой вязкий перенос: $\Pi^{ik} = p \delta^{ik} + \rho v^i v^k - \sigma^{ik}_{visc} = -\sigma^{ik} + \rho v^i v^k$.

Def 25.5. Таким образом: $\sigma^{ik} = -p \delta^{ik} + \sigma^{ik}_{visc}$ называют *тензором напряжений*, а σ^{ik}_{visc} — вязким тензором напряжений.

Чтобы написать выражение для вязкого напряжения сделаем пару оговорок. *Во первых*, градиенты скорости движения участков жидкости относительно друг друга не велики, тогда σ^{ik}_{visc} зависит лишь от первых производных скорости по координатам, линейно. *Во вторых*, не зависящие от первых производных величины должны обращаться в нуль как для скорости потока $\mathbf{v} = \text{const}$ и тензор должен быть нулевым. *В третьих*, $\sigma^{ik}_{visc} = 0$ когда жидкость совершает целое равномерное вращение, поскольку никакого внутреннего трения тогда не будет. Для такого равномерного вращения с $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]$ линейными комбинациями производных обращающимися в нуль будут: $\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i}$.

Это всё даёт нам мотивацию для не шибко сильных потоков несжимаемой жидкости согласится с Сэром Исааком Ньютоном, и написать тензор вязкого напряжения, как *тензор скорости деформации*:

$$\sigma^{ik}_{visc} = \eta \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \right), \quad \Rightarrow \quad \sigma^{ik} = -p \delta^{ik} + \eta \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \right).$$

А уравнение Эйлера тогда для несжимаемой жидкости запишется:

$$\rho \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \right) = -\delta^{ik} \frac{\partial p}{\partial x^k} + \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\eta \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \right) \right].$$

а в более человеческом, привычном глазу, виде *уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости*:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}.$$

Def 25.6. Коэффициент η называется — *динамическим коэффициентом вязкости*, а отношение $\eta/\rho = \nu$ — *кинематической вязкостью*.

31 Уравнение Лагранжа второго рода

Def 31.1. Обобщенная сила Q_k — величина коэффициента ∂q^k при вариации δA , то есть $\delta A = Q_k \delta q^k$.

Thr 31.2 (Уравнения Лагранжа второго рода). *Каждая механическая система характеризуется определенной функцией $L(q, \dot{q}, t)$. Для голономных системы с конфигурационным многообразием степени n , верно что*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Где для потенциальных систем $L = T - \Pi$. В более общем случае можно записать, что

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} - Q^k \right) \delta q^k = 0, \quad Q^k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^k}.$$

Δ . Запишем второй закон Ньютона: $(m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i) \big|_{d\mathbf{r}_i}$, где \mathbf{R}_i — реакции связи. Хотим записать уравнение в общеквариантном виде. То есть мы «замораживаем» время, так чтобы $\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$. На таких перемещениях работа реакция связи равна 0.

$$\left[\sum m_i \left(\mathbf{w}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^k} \right) - \left(\mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^k} \right) - \underbrace{\left(\mathbf{R}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^k} \right)}_{\cdot \delta q^k \rightarrow 0} \right] \cdot \delta q^k = 0;$$

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \sum \frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q^k} \sum \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^k} \right] \delta q^k = 0, \quad \Rightarrow \quad \sum_k \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} - Q_k \right] \delta q^k = 0.$$

Проблема остается в неголономных системах, где δq^k не являются независимыми, получается, что уравнения Лагранжа справедливы для голономных систем.

Вспомогая, что

$$\delta A = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \left(\mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^k} \right) \delta q^k \stackrel{?}{=} \sum_k \frac{\delta A_k}{\delta q^k} \delta q^k = Q_k \delta q^k.$$

Тогда пусть $\Pi(q, t): Q_k = -\partial \Pi / \partial q^k$. Тогда

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q^k} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

То есть получили систему уравнений на $2n$ переменных. □

32 Разрешимость уравнений Лагранжа

Подставим разложение кинетической энергии в уравнения Лагранжа, оставив только слагаемые с обобщёнными ускорениями $f_j(q, \dot{q}, t) = a_{jk} \ddot{q}^j$.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \dot{\mathbf{r}}_{\nu}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j + \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[\underbrace{a_{jk} \dot{q}^j \dot{q}^k}_{2T_2} + \underbrace{a_j \dot{q}^j}_{2T_1} + \underbrace{a_0}_{2T_0} \right],$$

где коэффициенты, соответственно, равны

$$a_{jk}(q, t) = \sum_{\nu} m_{\nu} \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial \dot{q}^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial \dot{q}^k}, \quad a_j(q, t) = \sum_{\nu} m_{\nu} \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial \dot{q}^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial t}, \quad a_0 = \sum_{\nu} m_{\nu} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial t} \right)^2.$$

Для склерономных систем $\partial \mathbf{r}_{\nu} / \partial t = 0$, соответственно $T = a_{jk} \dot{q}^j \dot{q}^k$, при чём $a_{jk} \equiv a_{jk}(q)$.

Теперь подставим значение T в уравнения Лагранжа, и получим, что $a_{ik} \ddot{q}^k = f_i$, где $f_1 = f_1(q, \dot{q}, t)$. Уравнений в системе n , причём a_{jk} является положительно определенной формой², соответственно невырожденной.

Thr 32.1. Уравнения Лагранжа второго рода разрешимы относительно обобщенных ускорений

²Требуется отдельного доказательства.

33 Изменение полной механической энергии голономной системы

Пусть есть также непотенциальные силы, часть обобщенных сил, соответствующих непотенциальным силам, обозначим Q_i^* , тогда

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}^i} + Q_i^*, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i^*.$$

Найдём производную по времени от кинетической энергии

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} \right) \dot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial t}.$$

По теореме Эйлера об однородных функциях для $f(x_1, \dots, x_n)$ k -й степени верно что

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} x^i = k f, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i = 2T_2 + T_1.$$

В таком случае последнее равенство переписывается, как

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{d}{dt} (2T_2 + T_1) + \frac{\partial \Pi}{\partial q^i} \dot{q}^i - Q_i^* \dot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial t} = \\ &= \frac{d}{dt} (2T_2 + 2T_1 + 2T_0) - \frac{d}{dt} (T_1 + 2T_0) + \frac{d\Pi}{dt} - \frac{\partial \Pi}{\partial t} - Q_i^* \dot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial t}. \end{aligned}$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

Thr 33.1. Полная механическая энергия голономной системы $E = T + \Pi$ изменяется следующим образом:

$$\frac{dE}{dt} = N^* + \frac{d}{dt} (T_1 + 2T_0) + \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Где $N^* = Q_i^* \dot{q}^i$ – мощность непотенциальных сил.

Def 33.2. Голономная склерономная система с $\Pi \equiv \Pi(q)$ называется *консервативной*, при чём $dE/dt = 0$.

Гироскопические силы

Def 33.3. Непотенциальные силы называют *гироскопическими*, если их мощность равна 0.

Пусть $Q_i^* = \gamma_{ik} \dot{q}^k$. Если $\gamma_{ik} = -\gamma_{ki}$, то силы Q_i^* гироскопические, соответственно кососимметричность γ_{ik} необходима и достаточна.

Более того, имеет место равенство

$$\sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu} \cdot \mathbf{v}_{\nu} = \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i + \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial t} \right) = \left(\sum_{\nu} \overbrace{\mathbf{F}_{\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial \dot{q}^i}}^{Q_i} \right) \dot{q}^i + \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial t} \Big|_{\dot{q}=0} \quad \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu} \cdot \mathbf{v}_{\nu} = Q_i \dot{q}^i.$$

Поэтому для склерономных систем $N^* = 0$ выражается в $\sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu}^* \cdot \mathbf{v}_{\nu} = 0$.

Диссипативные силы

Def 33.4. Непотенциальные силы называются диссипативными, если их $N^* \leq 0$, но $N^* \neq 0$. При $\Pi = \Pi(q)$ и диссипативности сил $dE/dt \leq 0$, тогда система называется диссипативной. В случае определенно-отрицательной $N^*(\dot{q})$ диссипация называется *полной*, а в случае знакопостоянной отрицательной N^* *частичной*.

Def 33.5. *Диссипативной функцией Рэлея* называется положительная квадратичная форма R такая, что

$$R = \frac{1}{2} b_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k, \quad Q_i^* = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^i} = -b_{ik} \dot{q}^k.$$

Тогда для склерономной системы мощность N^* непотенциальных сил равна

$$\sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu}^* \cdot \mathbf{v}_{\nu} = Q_i^* \dot{q}^i = -2R \leq 0.$$

34 Обобщенный потенциал и первые интегралы лагранжевых систем

Пусть существует функция $V(q, \dot{q}, t)$ такая, что обобщенные силы Q_i определяются по формулам

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial V}{\partial q^i}.$$

Тогда функция V называется обобщенным потенциалом. Действительно, при $L = T - V$ уравнения движения запишутся в той же форме. Дифференцируя по времени выясним, что

$$Q_i = \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k} \ddot{q}^k + f_i,$$

где $f_i \equiv f_i(q, \dot{q}, t)$. Но так как зависимость $Q_i(\ddot{q})$ это странно, то

$$V = A_i(q, t)\dot{q}^i + V_0(q, t).$$

Тогда обобщенные силы

$$Q_i = \frac{dA_i}{dt} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} (A_k \dot{q}^k + V_0) = -\frac{\partial V_0}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial A_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial A_i}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial A_k}{\partial \dot{q}^i} \right) \dot{q}^k.$$

Если $\partial A_i / \partial t = 0$, то Q_i складываются из потенциальных $\partial V_0 / \partial \dot{q}^i$ и гироскопических $Q_i^* = \gamma_{ik} \dot{q}^k$, где $\gamma_{ik} = \partial_k A_i - \partial_i A_k$. Если система склерономна и $V_0 \neq V_0(t)$, то $T + V_0$ остается постоянной.

В случае существования обобщенного потенциала L всё так же многочлен второй степени относительно q , \dot{q} , при чём $L_2 = T_2$, так что уравнения остаются разрешимы относительно обобщенных ускорений.

Натуральные системы

Def 34.1. Системы, в которых силы имеют обычный $\Pi(q_i, t)$ или обобщенный $V(q^i, \dot{q}^i, t)$ потенциал, называются *натуральными*. В таких системах $L = T - \Pi$. Более общие системы $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ не представимы в виде однако при выполнении условия,

$$\det \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k} \right] \neq 0,$$

то есть ненулевого гессиана лагранжиана, уравнения Лагранжа остаются разрешимы относительно обобщенных ускорений.

Первые интегралы

Распространенным

35 Гамильтонов формализм, уравнения и интеграл Якоби

Преобразование Лежандра

Def 35.1. В уравнениях Лагранжа второго рода движения голономной системы в потенциальном поле сил, функция Лагранжа зависит от q , \dot{q} , t – *переменные Лагранжа*. Если в качестве параметров взять q , p , t , где p_i – *обобщенные импульсы*³, определяемые как $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$. То получим набор q , p , t – *переменные Гамильтона*.

В силу невырожденности $\partial L / (\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j) = J_p$, то есть по *теореме о неявной функции* эти равенства разрешимы относительно переменных \dot{q}^i . Через преобразование Лежандра естественно ввести функцию

$$H(q, p, t) = p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}, t), \quad \dot{q} \equiv \dot{q}(q, p, t).$$

Уравнения Гамильтона

Полный дифференциал функции Гамильтона можем выразить двумя способами:

$$\left. \begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \\ dH &= \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t} \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}^i, \quad \frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial L}{\partial q^i} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \end{cases}$$

Эти уравнения называются *уравнениями Гамильтона*, или *каноническими уравнениями*.

Физический смысл функции Гамильтона

Пусть система натуральна, тогда $L = L_2 + L_1 + L_0$, и, соответственно,

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L.$$

По теореме Эйлера об однородных функциях

$$\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i = 2L_2, \quad \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i = L_1, \quad \Rightarrow \quad H = L_2 - L_0.$$

пусть $T = T_2 + T_1 + T_0$, если силы имеют обычный потенциал Π , то $L_0 = T_0 - \Pi$,

$$H = T_2 - T_0 + \Pi.$$

³Обобщенный импульс p_i – ковектор, а не вектор!

Если же силы имеют обобщенный потенциал $V = V_1 + V_0$, то $L_0 = T_0 - V_0$, и

$$H = T_2 - T_0 + V_0.$$

В случае натуральных и склерономных систем $T_1 = T_0 = 0$ и $T = T_2$, тогда $H = T + \Pi$. Т.е. для натуральных склерономных систем с обычным потенциалом сил функция Гамильтона H представляет собой полную механическую энергию.

Интеграл Якоби

Найдём полную производную H по времени,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Система называется *обобщенно консервативной*, если $\partial H / \partial t = 0$, т.е. $H(q^i, p_i) = h$, собственно, H называют *обобщенной полной энергией*, а последнее равенство – *обобщенным интегралом энергии*.

Def 35.2. Для натуральной системы с обычным потенциалом сил, если $\partial H / \partial t = 0$, то

$$H = T_2 - T_0 + \Pi = h = \text{const.}$$

Соотношение, где h – произвольная постоянная, называют *интегралом Якоби*.

Есть и другая формулировка для интеграла Якоби голономной склерономной системы. Действительно, при $\partial L / \partial t = 0$, интеграл Якоби перейдёт в

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i = \text{const.}$$

Уравнения Уиттекера

Если $\partial H / \partial t = 0$, то $H(q, p) = h$, где $h = \text{const}$ определяемая из н.у. В $2n$ -мерном пространстве q, p интеграл Якоби задаёт гиперповерхность, рассмотрим движение с $H = h$.

Такое движение описывается системой с $2n - 2$ уравнений, причём она может быть записана в виде канонических уравнений. Пусть $\partial H / \partial p_1 \neq 0$, тогда

$$p_1 = -K(q^1, \dots, q^n, p_2, \dots, p_n, h), \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q^j} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{dq^j}{dq^1} = \frac{\left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \right)}{\left(\frac{\partial H}{\partial p_1} \right)}, \quad \frac{dp_j}{dq^1} = -\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial q^j} \right)}{\left(\frac{\partial H}{\partial p_1} \right)},$$

для $j = 2, 3, \dots, n$. Подставляя p_1 получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q^j} - \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial K}{\partial q^j} &= 0, & (j = 2, 3, \dots, n); \\ \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial K}{\partial p_j} &= 0, & (j = 2, 3, \dots, n). \end{aligned}$$

Допиливая до надлежащего вида, окончательно находим

$$\frac{dq^j}{dq^1} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dq^1} = -\frac{\partial K}{\partial q^j}, \quad (j = 2, 3, \dots, n).$$

Эти уравнения описывают движения системы при $H = h = \text{const}$, и называются *уравнениями Уиттекера*.

Уравнения Якоби

Уравнения Уиттекера имеют структуру уравнений Гамильтона, соответственно их можно записать в виде уравнений типа Лагранжа, при гессiane K по p неравным 0. Пусть P – преобразование Лежандра функции K по p_j ($j = 2, 3, \dots, n$). Тогда

$$P = P(q^2, \dots, q^n, \tilde{q}^2, \dots, \tilde{q}^n, q^1, h) = \sum_{j=2}^n \tilde{q}^j p_j - K,$$

где $\tilde{q}^j = dq^j / dq^1$. Величины p_j выражаются через $\tilde{q}^2, \dots, \tilde{q}^n$ из уравнений

$$\tilde{q}^j = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad (j = 2, 3, \dots, n),$$

т.е. из первых $n - 1$ уравнений Уиттекера. При помощи функции P эти уравнения могут быть записаны в эквивалентной форме:

$$\frac{d}{dq^1} \frac{\partial P}{\partial q_j'} - \frac{\partial P}{\partial q^j} = 0 \quad (j = 2, 3, \dots, n).$$

Это уравнения типа Лагранжа, называются *уравнениями Якоби*.

Преобразовывая выражение для P найдём, что

$$P = \sum_{j=2}^n q_j \tilde{q}^j + p_1 = \sum_{i=1}^n p_1 \tilde{q}_i = \frac{1}{\dot{q}^1} \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i = \frac{1}{\dot{q}^1} (L + H).$$

Тогда в случае консервативной системы $L = T - \Pi$, $H = T + \Pi$, и⁴

$$P = \frac{2T}{\dot{q}^1}, \quad \Rightarrow \quad P = 2\sqrt{(h - \Pi)G}.$$

ДОПИСАТЬ!

36 Принцип наименьшего действия

Def 36.1. *Действием по Гамильтону* называют функционал вида

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt.$$

Переходя к однопараметрическому семейству кривых $\gamma(\alpha, t)$ получим *вариацию действия*

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(\alpha, t), \dot{\gamma}(\alpha, t), t) dt, \quad \delta S = \frac{dS}{d\alpha} \delta\alpha.$$

Thr 36.2 (принцип Гамильтона). *Кривая $\gamma(\alpha, t)$ является экстремалью действия тогда и только тогда, когда является решением уравнений Лагранжа*

$$\delta S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma(\alpha, t) \in \text{Sol} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0 \right).$$

\triangle . Давайте просто проварьировем Лагранжиан, тогда

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \alpha} \right) \delta\alpha dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q}{\partial \alpha} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt = 0.$$

таким образом уравнения Лагранжа выполнены. \square

⁴Пара выражений в выводе опущены.