

# ЗАМЕТКИ КУРСА «ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ»

---

Автор: Хоружий Кирилл

От: 24 декабря 2020 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Закон Кулона и теорема Гаусса</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Потенциал электрического поля.</b>	<b>2</b>
2.1	Дифференциальная форма записи . . . . .	3
2.2	Граничные условия на заряженной поверхности . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Проводники</b>	<b>3</b>
3.1	Основная задача электростатики . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Диэлектрики</b>	<b>4</b>
4.1	Теорема Гаусса . . . . .	4
4.2	Граничные условия на границе двух диэлектриков . . . . .	4
4.3	Поле системы зарядов в однородном диэлектрике . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Энергия электрического поля</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Виды диэлектриков</b>	<b>5</b>
<b>7</b>	<b>Теория постоянных токов</b>	<b>6</b>
<b>8</b>	<b>Магнитное поле в вакууме</b>	<b>7</b>
8.1	Сила Ампера . . . . .	7
8.2	Закон Био-Савара . . . . .	7
8.3	Сила Лоренца . . . . .	7
<b>9</b>	<b>Магнитное поле в намагничивающихся средах</b>	<b>7</b>
9.1	Уравнения максвелла для магнитного поля в веществе . . . . .	7
9.2	Различные вещества . . . . .	8
9.3	Граничные условия . . . . .	8
<b>10</b>	<b>Электромагнитная индукция</b>	<b>9</b>
10.1	Понимания . . . . .	9
10.2	Сила Лоренца . . . . .	9
10.3	Индуктивность проводов . . . . .	9
10.4	Магнитная энергия . . . . .	9
<b>11</b>	<b>Семинары</b>	<b>11</b>
11.1	Диполь . . . . .	11
11.2	Уравнения Максвелла . . . . .	11
11.3	Введение в электрические цепи . . . . .	12
11.4	Волновое уравнение . . . . .	13
11.5	Плазма . . . . .	13
11.6	Магнетики . . . . .	14
11.7	Тригонометрия . . . . .	15

# 1 Закон Кулона и теорема Гаусса

Здесь попробуем индуктивно построить содержательную теорию, **начнём с двух экспериментальных фактов**, положенных в основу теории. Закона Кулона (сгсэ)

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.1)$$

и, введя вектор напряженности электростатического поля  $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$ , принцип суперпозиции:

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i. \quad (1.2)$$

## Дипольный момент

Простейшим примером системы зарядов является диполь  $q_1 + q_2 = 0$ , для которого введём  $\mathbf{p} = ql$ :

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r_1^2} \frac{\mathbf{r}_1}{r_1} - \frac{q}{r_2^2} \frac{\mathbf{r}_2}{r_2} \quad l \ll r_2, r_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}}{r^3} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}$$

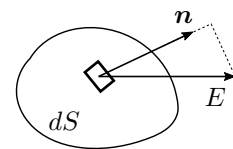
Для заряженной нити верно, что

$$E = 2 \frac{\lambda}{r}.$$

Теперь дойдём до двух теорем (кусочки уравнений Максвелла), описывающих электростатическое поле.

**Thr 1.1** (теорема Гаусса). Для потока  $\mathbf{E}$  через замкнутую поверхность  $S$  верно, что

$$\oint_S \mathbf{E}_n dS = \oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = 4\pi q_{\text{вн}}. \quad (1.3)$$



△.

I. Доказательство (из закона Кулона) для сферы вокруг точечного заряда очевидно.

II. Рассмотрим произвольную поверхность  $\Omega$ , содержащую заряд, и телесный угол в онной:

$$E_n dS = E \cos \alpha dS = E dS'$$

То есть поток через наклонную площадку равен потоку через тот же телесный угол через некоторую вспомогательную сферу. Так как  $s_1/s_2 = r_1^2/r_2^2$  и  $E_1/E_2 = r_2^2/r_1^2$ , получается интегрировать по  $\Omega$  то же самое, что и интегрировать по выбранной хорошей сфере.

III. Рассмотрим теперь некоторую  $\Omega$ , не содержащую заряд. Посмотрим на телесный угол от  $q$ . По модулю потоки через них одинаковые, а знаки противоположны, следовательно вклада в поток через  $\Omega$  нет.

IV. Для сложного распределения зарядов, по принципу суперпозиции верно, что

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i \quad \Rightarrow \quad \oint_S \mathbf{E}_n dS = \sum_i \oint_S \mathbf{E}_i dS.$$

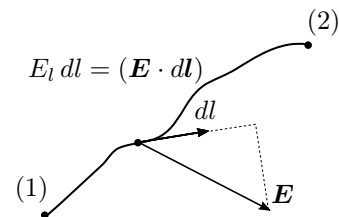
□

## 2 Потенциал электрического поля.

**Thr 2.1** (Теорема о циркуляции). Для заряда, при квазистатическом перемещении, верно, что

$$A_{\text{замкн}} = \oint_{(L)} (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (2.2)$$



△.

I. Рассмотрим поле точечного заряда  $Q$  и перемещение с  $\mathbf{r}$  до  $\mathbf{r} + d\mathbf{l}_r + (d\mathbf{l} - d\mathbf{l}_r)$ . Тогда  $dA = (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = \frac{Q}{r^2} d\mathbf{l}_r$ , то есть  $A \equiv A(r_1, r_2)$ .

II. Для поля в принципе вышесказанное верно по принципу суперпозиции.

□

**Def 2.2.** Разностью потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  между точками  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  называется  $A = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} d\mathbf{l}$ , при перемещении единичного положительного заряда. Потенциал определен с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

В частности, для точечного заряда, при  $\varphi_\infty = 0$ , верно

$$\varphi(r) = \int_r^\infty \frac{Q(r)}{r^2} dr = \frac{Q}{r}.$$

А для двух зарядов,  $+q, -q$

$$\varphi = -\frac{q}{r_1} + \frac{q}{r_2} = q \frac{(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} \quad r \gg l \Rightarrow \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r}$$

## 2.1 Дифференциальная форма записи

Вектор напряженности электростатического поля

$$\boxed{\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi.} \quad (2.3)$$

Действительно,

$$d\varphi = -(\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx_i = d\mathbf{l} \cdot \nabla \varphi, \text{ где } \nabla \varphi \equiv \text{grad } \varphi.$$

А теперь рассмотрим некоторый элементарный параллелепипед. Тогда поток через левую грань это  $-E_x dy dz$ , а через правую это  $(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx) dy dz$ . Тогда суммарный поток через мааленький параллелепипед равен  $dV \frac{\partial E}{\partial x}$ , а теорема Гаусса примет вид

$$\left( \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z} \right) dV = 4\pi\rho dV \Rightarrow \boxed{\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho.} \quad (2.4)$$

## 2.2 Граничные условия на заряженной поверхности

По теореме Гаусса верно, что

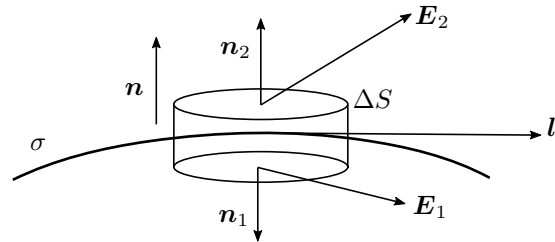
$$E_{2n_2} \Delta S + E_{1n_1} \Delta S = 4\pi\sigma \Delta S,$$

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$$

По теореме циркуляции верно, что

$$E_{2l} \Delta l - E_{1l} \Delta l = 0$$

$$E_{2l} - E_{1l} = 0.$$



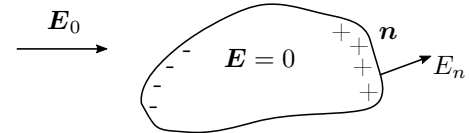
## 3 Проводники

**Def 3.1** (пусть так). *Проводник* – костьак частиц, окруженных *свободными* электронами, которые в пределах тела могут перемещаться на какие угодно расстояния.

В частности, для проводников, верно, что

$$E_n = 4\pi\sigma \quad (3.1)$$

$$E_\tau = 0 \quad (3.2)$$



Собственно, объёмных зарядов в проводнике нет, поверхностные есть и компенсируют внешнее поле. Аналогично работает решетка Фарадея, электростатическое поле не проникает в проводники.

### 3.1 Основная задача электростатики

Вместо поиска  $\mathbf{E}$  достаточно найти  $\varphi$ , воспользовавшись (2.3) и (2.4), получим

$$\text{div grad } \varphi \equiv \Delta \varphi = \begin{cases} -4\pi\rho & \text{ур. Пуассона} \\ 0 & \text{ур. Лапласа} \end{cases}$$

Как может быть поставлена задача? Заданы граничные значение, найти распределения зарядов. Заданы заряды, найти распределения. Что-то задано, что-то не задано. Во всех трёх случаях **решение уравнения Лапласа единственно.**

## Метод изображений

Если существует некоторая эквипотенциальная поверхность разделяющая пространство на два полупространства, то можем считать что эта поверхность является проводящей.

## 4 Диэлектрики

**Def 4.1.** *Диэлектрики* – непроводники электричества. В них возбуждаются индукционные заряды, привязанные к кастету частиц, – *поляризационные*, или *связанные заряды*.

Альтернативный вариант, – наличие дипольного момента у молекул. При наличии электрического поля дипольные моменты ориентируются, диэлектрик попользуется.

**Def 4.2.** *Вектор поляризации* – дипольный момент единицы объема диэлектрика, возникающий при его поляризации.

Рассмотрим скошенный параллелепипед. На основаниях параллелепипеда возникнут поляризационные заряды с поверхностной плотностью  $\sigma_{\text{пол}}$ . Взяв его площадь за  $S$ , найдём дипольный момент равный  $\sigma_{\text{пол}}Sl$ . Тогда вектор поляризации будет

$$\mathbf{P} = \frac{\sigma_{\text{пол}} S}{V} \mathbf{l}, \quad (4.1)$$

что верно и для анизотропных кристаллов где  $\mathbf{E} \nparallel \mathbf{P}$ .

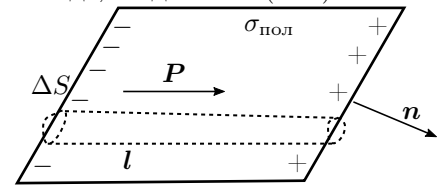
Пусть  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к основанию параллелепипеда, тогда  $V = S(\mathbf{l} \cdot \mathbf{n})$ .

Подставив  $V$  в предыдущую формулу, получим, что

$$\sigma_{\text{пол}} = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}) = P_n \quad (4.2)$$

Или, более общо,

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \mathbf{p}_i$$



В случае неоднородной поляризации верно, что поляризационные заряды могут появиться и на поверхности. Выделим  $V$ , ограниченный  $S$ , смещённый заряд равен  $-P_n dS$ , тогда через  $S$  поступает

$$q_{\text{пол}} = - \oint P_n dS = - \oint (\mathbf{P} \times d\mathbf{S}). \quad (4.3)$$

Стоит заметить, что в теорему о циркуляции не входят заряды, соответственно для диэлектриков верно, что

$$\oint_{(L)} \mathbf{E}_l d\mathbf{l} = 0.$$

Далее чаще всего мы будем сталкиваться с линейной поляризацией, когда

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \underbrace{\mathbf{E}(1 + 4\pi\alpha)}_{\varepsilon} = \varepsilon \mathbf{E},$$

где  $\alpha$  – *поляризуемость диэлектрика*, а  $\varepsilon$  – *диэлектрическая проницаемость*.

### 4.1 Теорема Гаусса

Запишем теорему Гаусса для электрического поля в диэлектрике. Знаем, что  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{пол}} + \mathbf{E}_{\text{св}}$ .

$$\oint \mathbf{E}_n dS = 4\pi(q + q_{\text{пол}}) \quad \Rightarrow \quad \oint \underbrace{(\mathbf{E}_n + 4\pi P_n)}_{D_n} dS = 4\pi q. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\oint \mathbf{D}_n dS = 4\pi q_{\text{св}}} \quad (4.4)$$

где  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$  – вектор *электрической индукции*, или *электрического смещения*. Поток вектора  $\mathbf{D}$  определяется только свободными зарядами.

Можно посмотреть на это в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi(\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}), \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi(\rho + \rho_{\text{пол}}) \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{пол}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \end{aligned}$$

### 4.2 Граничные условия на границе двух диэлектриков

Повторя рассуждения для проводников, найдём, что

$$D_{1n} = D_{2n},$$

а в случае линейных диэлектриков верно

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}.$$

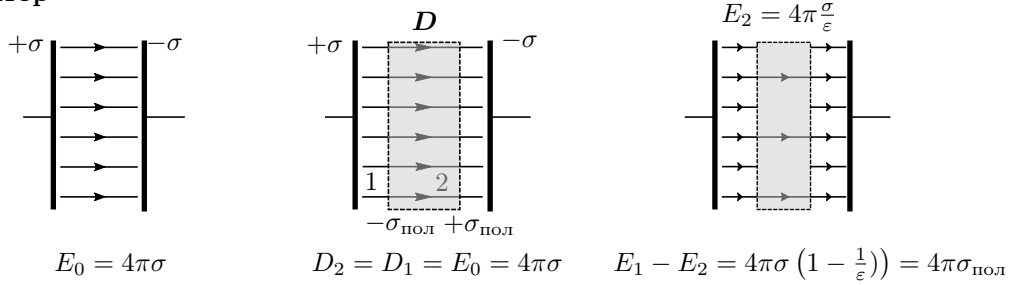
Или

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma_{\text{пол}}.$$

Аналогично, из теоремы о циркуляции получим, что

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0.$$

### Плоский конденсатор



То есть на грани пластинки  $\sigma_{\text{пол}} = \sigma \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)$ .

### 4.3 Поле системы зарядов в однородном диэлектрике

Для точечного заряда в однородном диэлектрике, по теореме Гаусса

$$\left. \begin{array}{l} D \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q \\ D = \varepsilon E \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{E = \frac{q}{\varepsilon r^2}}.$$

То есть в общем случае, по принципу суперпозиции, в диэлектрике

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E}_0.$$

## 5 Энергия электрического поля

Рассмотрим систему из двух зарядов  $q_1$  и  $q_2$ . Тогда энергия взаимодействия

$$W = q_1\varphi_{21} = q_2\varphi_{12} = \frac{1}{2} (q_1\varphi_{21} + q_2\varphi_{12}).$$

Или, в общем случае

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} W_{ij} = \frac{1}{2} (q_i \varphi_i^j) = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i,$$

где под  $\varphi_i$  имеется ввиду потенциал  $q_i$  заряда. В случае непрерывно заряженного тела

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi \rho dV.$$

Например, для конденсатора

$$W = \frac{1}{2} \varphi_1 \int_{(1)} dq + \frac{1}{2} \varphi_2 \int_{(2)} dq = \frac{1}{2} q(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{1}{2} qU = \frac{cU^2}{2} = \frac{q^2}{2c}.$$

Вопрос: где локализована энергия? Ответ: в зарядах или в поле. В частности, для конденсатора

$$W = \frac{1}{2} cU^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon S E^2 d^2}{4\pi d} = \underbrace{\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}}_{\mathcal{W}_\Theta} V,$$

где  $\mathcal{W}_\Theta = \varepsilon E^2 / 8\pi$  — *объемная плотность* электрической энергии. В общем же случае

$$W_\Theta = \int \mathcal{W}_\Theta dV. \quad (5.1)$$

## 6 Виды диэлектриков

Посмотрим на энергию внутри вакуума и диэлектрика,  $E^2/8\pi$  и  $E^2/\varepsilon 8\pi$ . Энергия электрического поля определяется через работу внешних сил, которую необходимо затратить, чтобы это поле создать. Собственно, во втором

случае есть ещё добавки. рассмотрим диэлектрик с упругими диполями, то есть пусть

$$F = \varkappa l.$$

Пусть диполь попал во внешнее поле, тогда

$$Eq \cdot \frac{l}{2} = \varkappa l \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} Ep.$$

Тогда вся энергия, чтобы создать в этой среде поле

$$W = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{EP}{2} = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{1}{2} E^2 \alpha = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{E^2}{8\pi} (\varepsilon - 1) = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}.$$

А если работать с диэлектриками с собственным дипольным моментом? Тогда ещё появиться некоторое тепло, которое необходимо отдать термостату, увеличивая упорядоченность системы. Постараемся обобщить, для этого вспомним, что

**Def 6.1.** *Свободная энергия* – функция состояния, приращение которой в обратимом изотермическом процессе равно совершаемой работе внешних сил.

Так вот, то что мы называем энергией электрического поля (в диэлектриках), на самом деле это объёмная плотность свободной энергии  $\Psi = U - TS$ .

## 7 Теория постоянных токов

**Def 7.1.** *Сила тока* – заряд, протекший через сечений проводника в единицу времени,

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (7.1)$$

*Плотность тока* – ток, протекающий через единичное сечение.

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{u}. \quad (7.2)$$

**Law 7.2** (закон Ома). *Для класса линейных проводников верно, что при наличии разности потенциалов  $U$*

$$I = \frac{U}{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}, \quad (7.3)$$

где  $\lambda = 1/\rho$ , обратное удельное сопротивление.

В СГСЭ, кстати,  $\dim \rho = \text{с}$ , а в СИ 1 ед. СГСЭ  $\rho = 9 \cdot 10^9 \text{ Ом}$ .

### Условие стационарности

Пусть в некоторый узел втекает  $I_1, \dots, I_n$ , тогда

$$\oint_{(S)} j_n dS = -\dot{Q}.$$

Это «закон сохранения заряда», или уравнение непрерывности. В частности, в стационарном случае

$$\boxed{\oint j_n dS = 0}. \quad (7.4)$$

Получается (??), что поле зарядов, которые участвуют в протекании постоянных токов можно описывает с помощью электростатических формул, то есть применять теорему Гаусса и теорему о циркуляции.

По теореме Гаусса и условия стационарности,

$$0 = \oint j_n dS = \lambda \oint E_n dS = \lambda 4\pi q,$$

то есть для проводников с постоянным током всё ещё верно, что внутреннего заряда в проводниках нет, а есть только поверхностный.

Невозможна стационарная ситуация с постоянным током только на потенциальных силах. Для участка цепи, в котором действуют сторонние силы, можно записать

$$\mathbf{j} = \lambda (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}}). \quad (7.5)$$

**Def 7.3.** *ЭДС* – электро-движущая сила, работа совершаемая сторонними силами при перемещении единичного заряда по рассматриваемому участку,

$$\mathcal{E} = \int_{(I)} E_l^{\text{стор}} dl. \quad (7.6)$$

## Правила Кирхгофа

Рассмотрим узел, в который втекает  $I_1, \dots, I_n$ . Из условия стационарности получим (I). Рассмотрев замкнутый участок цепи, получим (II) правило Кирхгофа. Действительно,  $j_l = \lambda(E_l + E_l^{\text{стоп}})$ , или

$$\oint \frac{I dl}{\lambda S} = \oint (E_l + E_l^{\text{стоп}}) dl, \quad \text{где} \quad \oint \frac{I dl}{\lambda S} = IR.$$

Но для каждого участка  $I_i R_i = \Delta\varphi_i + \mathcal{E}_i$ . Это с учётом направления тока.

$$\text{I. } \sum I_i = 0.$$

$$\text{II. } \bigcirc I_i R_i = \bigcirc \mathcal{E}_i$$

Оказывается, для любой цепи, записав уравнения Кирхгофа для всех узлов и всех независимых контуров, получим разрешимую единственным образом систему уравнений (ну или хотя бы столько, сколько можно).

## 8 Магнитное поле в вакууме

### 8.1 Сила Ампера

Ампер ввел элементы тока, тогда

$$d\mathbf{F} = K_1 I [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}], \quad (8.1)$$

где  $\mathbf{B}$  – индукция магнитного поля, силовая характеристика магнитного поля.

### 8.2 Закон Био-Савара

Ещё один экспериментальный факт:

$$d\mathbf{B} = K_2 I \frac{[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (8.2)$$

Осталось поговорить про коэффициенты<sup>1</sup>  $K_1$  и  $K_2$ . Из  $I^{(M)} = \frac{1}{c} I^{(\Xi)}$ , получим  
в СГСМ: в системе Гаусса:

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= I [\mathbf{l} \times \mathbf{B}] \\ d\mathbf{B} &= I \frac{[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{r^3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= \frac{I}{c} [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}] \\ d\mathbf{B} &= \frac{I}{c} \frac{[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{r^3}. \end{aligned}$$

Подставляя  $\mathbf{j} = nq\mathbf{v}$ , получим формулу следующего раздела.

### 8.3 Сила Лоренца

**Law 8.1.** Сила, действующая на движущийся точечный заряд  $q$  в магнитном поле, получен обобщением опытных фактов,

$$\mathbf{F}_m = \frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad (8.3)$$

где вектор  $\mathbf{B} \neq f(q, v)$  характеризует магнитное поле, напряженность магнитного поля.

Из этого можем найти, что

$$\mathbf{B} = \frac{c}{qv_{\perp}^2} [\mathbf{F}_m \times \mathbf{v}_{\perp}],$$

что однозначно определяет  $\mathbf{B}$ .

В предположение, что электрическое и магнитное поля действуют независимо, то  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m$ , т.е.

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right),$$

где  $\mathbf{F}$  – сила Лоренца.

## 9 Магнитное поле в намагничивающихся средах

### 9.1 Уравнения максвелла для магнитного поля в веществе

Посмотрим на рамку с током в магнитном поле. Для неё верно, что суммарная сила, действующая на рамку,

$$\mathbf{B} \oint d\mathbf{F} = \frac{I}{c} \oint [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}] = \frac{I}{c} \left[ \oint d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \right] = 0.$$

<sup>1</sup>В системе Гаусса  $I, q, \Delta\varphi$  измерятся в СГСЭ, а  $B, H, L, M$  в СГСМ.

Однако момент, действующий на рамку, не равен 0,

$$S = ab, \quad F = \frac{I}{c} bB \quad \Rightarrow \quad M = \frac{IS}{c} \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_m = \frac{IS}{c} \mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \times \mathbf{B}].$$

Посмотрим теперь на рамку в неоднородном магнитном поле. Рассмотрим рамку такую, что  $\mathbf{p}_m \parallel \mathbf{B}$ , тогда  $\mathbf{I} d\mathbf{l}$  имеет проекцию на  $\mathbf{n}$ , получается, что

$$F_x = (p_m)_x \frac{\partial B_x}{\partial x}.$$

Возвращая к полю, предполагается, что внутри молекул формируются *молекулярные токи*, создающие дополнительный магнитный момент, а при наличие внешнего поля происходит ориентация этих моментов. Тогда теорема о циркуляции магнитного поля в веществе запишется, как

$$\oint_{(L)} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}) = \frac{4\pi}{c} (I_{\text{пров}} + I_{\text{мол}}). \quad (9.1)$$

Стоит заметить, что в теории Максвелла имеется ввиду, что

$$\mathbf{B} = \langle \mathbf{B}_\mu \rangle.$$

Характеристика, описывающая состояние намагниченого вещества в точке – магнитный дипольный момент, единице объема:

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\Delta V} \sum (\mathbf{p}_m)_i.$$

Можем записать, что

$$\oint \mathcal{I}_l d\mathbf{l} = \frac{I_{\text{мол}}}{c}. \quad (9.2)$$

Тогда уравнение переписется, как

$$\oint_{(L)} (\mathbf{B} d\mathbf{l}) = \frac{4\pi}{c} I_{\text{пров}} + 4\pi \oint_{(L)} (\mathcal{I} d\mathbf{l}). \quad (9.3)$$

$$\oint_{(L)} \underbrace{(\mathbf{B} - 4\pi\mathcal{I})}_{\mathbf{H}} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I_{\text{пров}}, \quad (9.4)$$

здесь принимается определение  $\boxed{\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathcal{I}}$  – *напряженность магнитного поля*.

Далее нас интересует линейная намагничиваемость:

$$\mathcal{I} = \kappa \mathbf{H},$$

где  $\kappa$  – магнитная восприимчивость. Тогда можем записать, что

$$\underbrace{\mathbf{H} (1 + 4\pi\kappa)}_{\mu} = \mathbf{B}, \quad (9.5)$$

что записано в системе Гаусса. В СИ верно, что

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathcal{I}.$$

## 9.2 Различные вещества

I. Парамагнетики,  $\kappa \in [10^{-3}, 10^{-6}]$ , пример: алюминий.

II. Диамагнетики,  $\kappa < 0$ , пример: золото, серебро, см. модель Ланжевена.

III. Ферромагнетики,  $\kappa \in [10^3, 10^6]$ , пример: железо, никель.

## 9.3 Граничные условия

Рассмотрим границу двух веществ с  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Тогда

$$\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n},$$

а для тангенциальной компоненты

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_N.$$



## 10 Электромагнитная индукция

### 10.1 Понимания

**Def 10.1** (Понимание Фарадея). Для движущейся перемычки в замкнутом контуре, помещенного в магнитное поле, можно записать силу лоренца, которая будет толкать каждый носитель заряда в ней как:

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

Электродвижущая сила, создаваемая этим полем называется *электродвижущей силой*. И для магнитного потока пронизывающего площадь рамки:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \quad (10.1)$$

**Def 10.2** (Понимание Максвелла). Всякое изменение магнитного поля во времени возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле. Циркуляция  $\mathbf{E}$  по  $\forall$  замкнутому контуру определяется:

$$\oint_s (\mathbf{E} d\mathbf{s}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (10.2)$$

где  $\Phi = \oint_s \mathbf{B} d\mathbf{S}$  — магнитный поток, пронизывающий неподвижный контур  $s$ .

Сущность в таком понимании прежде всего в возбуждении электрического поля, а не тока. Электромагнитная индукция может наблюдаться и тогда, когда в пространстве нет проводников вообще.

### 10.2 Сила Лоренца

**Def 10.3.** *Сила Лоренца* для проводника движущегося в переменном магнитном поле ток возбуждается как магнитной, так и электрической силами:

$$\mathbf{F} = e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) \quad (10.3)$$

От выбора системы отсчета зависит, какая часть индукционного тока вызывается электрической, а какая магнитной составляющей силы Лоренца. Деление электромагнитного поля на электрическое и магнитное определяется системой отсчета, в которой рассматриваются явления.

С помощью пересадок, в общем случае, нельзя добиться того, чтобы электромагнитное поле сделалось либо чисто электрическим, либо чисто магнитным.

### 10.3 Индуктивность проводов

**Def 10.4.** Предполагаем, что ферромагнетиков нет, тогда  $\mathbf{B}$  и  $\Phi$  пропорциональны току:

$$\Phi = LI^{(m)} = \frac{1}{c} LI, \quad (10.4)$$

где  $I^{(m)}$  — сила тока в СГСМ, а  $I$  — сила того же тока в СИ,  $L$  же не зависит от силы тока и называется *индуктивностью провода*. Чем тоньше провод, тем больше его индуктивность.

### 10.4 Магнитная энергия

Для витка с током, в котором с помощью внешних сил потечёт ток, а значит будет нарастать и магнитный поток через него, возникнет ЭДС, тогда элементарная работа внешних сил:

$$\delta A^{\text{внеш}} = -\mathcal{E}^{\text{инд}} I dt = \frac{1}{c} I d\Phi.$$

**Def 10.5.** Из верхнего, достаточно общего утверждения, если работа внешних работ пойдёт только на увеличение *магнитной энергии*, то есть диа- или парамагнетик, в частности.

$$dW_m = \frac{1}{c} d\Phi \quad \not\approx_{\text{ферромагнетиков}} \quad W_m = \frac{L}{2} \left( \frac{I}{c} \right)^2 = \frac{1}{2c} I \Phi = \frac{\Phi^2}{2L}, \quad (10.5)$$

где  $L$  — самоиндукция проводника с током и константа. Также, для справедливости последней формулы не обязательно виток должен оставаться неподвижным.

Важно, что  $\mu$  остается постоянной, или же, если проницаемость зависит от температуры, то в процессе намагничивания, чтобы формула работала, надо поддерживать  $T$  постоянной.

Тогда  $W_m$  будет иметь смысл свободной магнитной энергии системы.

Можно перейти к другому виду записи энергии магнитного поля, энергия, которую запас соленоид, используя:

$$\begin{cases} H = 4\pi I/(cl) \\ \Phi = BS \end{cases} \rightsquigarrow dW_m = \frac{I}{c} d\Phi = \frac{V}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}) \quad (10.6)$$

Если  $w_m$  – плотность магнитной энергии в соленоиде, то в общем случае можно записать  $W_m = \int w_m dV$ , где плотность определяется:  $w_m = (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B})/(4\pi)$ .

В случае пара- и диамагнитный сред  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  получаем:  $w_m = \mu H^2/(8\pi)$

Рассмотрим два витка с током по которым текут токи  $I_1$  и  $I_2$ . В отсутствии ферромагнетиков запишется:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{c} L_{11} I_1 + \frac{1}{c} L_{12} I_2, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{c} L_{21} I_1 + \frac{1}{c} L_{22} I_2. \end{aligned}$$

Можно сформулировать **теорему о взаимности**  $L_{ik} = L_{ki}$

**Thr 10.6** (О сохранении магнитного потока). *Проводник с током в  $\forall$  магнитном поле, движется и деформируется, тогда в нём возбуждается:*

$$I = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} = -\frac{1}{cR} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Если  $R = 0$ , то  $d\Phi/dt = 0$ , то есть при движении идеально проводящего замкнутого провода в магнитном поле остается постоянным магнитный поток, пронизывающий контур провода.

## 11 Семинары

### 11.1 Диполь

Поле диполя:

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{1}{r^3} \mathbf{p}.$$

Или, считая  $\mathbf{n}$  – единичным вектором вдоль  $r$ :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{r^3} (3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})\mathbf{n} - \mathbf{p})$$

Момент сил, действующих на диполь в однородном магнитном поле

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p} \times \mathbf{E}].$$

Энергия диполя:

$$W = \int \delta A = \int M d\alpha = pE \cos \alpha \Big|_{\alpha}^{\alpha_0=\pi/2} = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}).$$

Теперь для неупругого диполя:

$$kl = qE, \Rightarrow U = \frac{1}{2} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}).$$

Для диполя в неоднородном поле:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \approx q d\mathbf{E}, \quad d\mathbf{E} = l^i \partial_i \mathbf{E}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = p^i \partial_i \mathbf{E} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

Взаимодействие двух сонаправленных диполей:

$$E_1 = -6 \frac{p_1}{d^4}, \quad \Rightarrow \quad F = p_2 \frac{dE_1}{dx} = -\frac{6p_1 p_2}{x^4}.$$

Для двух равномерно заряженных сфер, смещённых на  $\mathbf{l}$ , поле внутри области пересечения

$$\mathbf{E}(A) = -\frac{4}{3} \pi \rho \mathbf{l}.$$

Найдём теперь такое распределение заряда, чтобы поле внутри всей сферы было  $\mathbf{E}_0$ . Толщина заряженной части  $l' = l \cos \theta$ , тогда

$$\rho = \frac{3}{4} \frac{E_0}{l}, \quad \Rightarrow \quad \sigma(\theta) = \rho l' = \rho l \cos \theta = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos \theta,$$

при чём для этой сферы дипольный момент

$$\mathbf{P} = q\mathbf{l} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \mathbf{l} = -R^3 \mathbf{E}_0.$$

### 11.2 Уравнения Максвелла

Ди-форма в СГС:	Ин-форма в СГС:	Ди-форма в СИ:	Ин-форма в СГС:
$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$	$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi Q$	$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$	$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$
$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$	$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$
$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$	$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$
$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$	$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \frac{d}{dt} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$

где  $\mu \mathbf{H} = \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ,

$\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля;

$\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля;

$\mathbf{D}$  — электрическая индукция;

$\mathbf{B}$  — магнитная индукция.

## Материальные уравнения

В среде сторонние электрические и магнитные поля вызывают поляризация  $\mathbf{P}$  и намагничивание вещества  $\mathbf{M}$ . Тогда

$$\begin{aligned}\rho_b &= -\nabla \cdot \mathbf{P} \\ \mathbf{j}_b &= c\nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},\end{aligned}$$

где в СИ не будет множителя  $c$ . Далее, по определению

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} \quad (\text{СГС})$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (\text{СИ})$$

Наконец, в однородных средах верно, что

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j} + \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{cases}$$

где в оптическом диапазоне принято  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ .

## Граничные условия

Опять же, в СГС,

$$\begin{cases} (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n}_{1,2} = 0, \\ (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{n}_{1,2} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s, \end{cases} \quad \begin{cases} (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n}_{1,2} = -4\pi\rho_s, \\ (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n}_{1,2} = 0, \end{cases}$$

где  $\rho_s$  – поверхностная плотность свободных зарядов,  $\mathbf{j}_s$  – плотность поверхностных свободных токов вдоль границы.

Эти граничные условия показывают непрерывность нормальной компоненты вектора магнитной индукции, и непрерывность на границе областей тангенциальных компонент напряжённостей электрического поля.

## Уравнение непрерывности

Источники полей  $\rho, \mathbf{j}$  не могут быть заданы произвольным образом. Применяя операцию дивергенции к четвёртому уравнению (закон Ампера–Максвелла) и используя первое уравнение (закон Гаусса), получаем уравнение непрерывности

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV.$$

## 11.3 Введение в электрические цепи

Колебательный контур описывается дифференциальным уравнением второго порядка:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \mathcal{E} \quad (11.1)$$

Если же «внешних сил»  $\mathcal{E}$  или  $F$  нет, то уравнения линейны и однородны по времени, описывая, так называемые, свободные колебания. Введём обозначения для таких линейных колебательных систем:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2\gamma = \frac{R}{L}, \quad X = \frac{\mathcal{E}}{L}. \quad (11.2)$$

Тогда уравнения преобразуются в более удобный вид, в котором  $\omega_0$  – собственная частота, а  $\gamma$  – коэффициент затухания.

## Виды колебаний в электрических цепях

**Свободные колебания гармонического осциллятора** характеризуется отсутствием омического сопротивления:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} q &= q_0 \cos(\omega_0 t + \delta), \\ I &= \omega_0 q_0 \cos(\omega_0 t + \delta + \pi/2). \end{aligned} \quad (11.3)$$

**Затухающие колебания** характеризуются наличием тормозящей силы:

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad \Rightarrow \quad q = ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \delta), \quad \text{где } \omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2. \quad (11.4)$$

Выпишем несколько важных определений:

**Период колебаний** — величина  $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = T_0/\sqrt{1 - (\gamma/\omega_0)^2}$ ;

**Амплитуда** — величина  $A = ae^{-\gamma t}$ ;

**Время затухания** — величина  $\tau = 1/\gamma$  за которое  $A$  убывает в  $e$  раз;

**Логарифмический декремент затухания** — величина  $d = \gamma T$  (безбожно устарел);

**Добротность** — величина  $Q = \pi/d = \omega/2\gamma = \pi N$ , где  $N = \tau/T = \frac{1}{\gamma T} (= 1/d)$ . Также  $Q = \Delta W/W$ .

## Вынужденный колебания затухающего осциллятора под действием синусоидальной силы

Запишем уравнение колебаний в самом простом случае:

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = X(t) = X_0 \cos(\omega t) \quad (11.5)$$

Частное решение ищем в виде  $q = q_0 e^{i\omega t}$ , откуда  $\dot{q} = i\omega q$ ,  $\ddot{q} = -\omega^2 q$ , тогда:

$$q = \frac{X}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} e^{i\omega t} + e^{-\gamma t} (C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t) \quad (11.6)$$

Если  $t \gg \tau$ , то свободные колебания практически затухнут и останутся только вынужденные (первый член выражения для  $q$ ).

Оставим только вещественную часть решения:

$$q = \frac{X}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} e^{i\omega t} \rightsquigarrow q = \frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \Delta\varphi), \quad \Delta\varphi = \arctan \left[ \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]. \quad (11.7)$$

В наиболее важном случае, когда затухание невелико, положения всех максимумов почти не отличаются друг от друга. Поэтому за максимум амплитуды смещения можно принять её значение при  $\omega = \omega_0$ :

$$a_{max} = \frac{X_0}{2\omega_0\gamma} = \frac{\omega_0}{2\gamma} a_0, \quad \rightsquigarrow \quad \frac{a_{max}}{a_0} = Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}. \quad (11.8)$$

## 11.4 Волновое уравнение

Считая в среде  $\mathbf{j} = 0$ , можно написать, что

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}; \quad \begin{cases} \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \end{cases}; \Rightarrow \begin{cases} \nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}] = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} \\ \nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}] = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{B} \end{cases}; \Rightarrow \boxed{\Delta \mathbf{E} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0}. \quad (11.9)$$

Аналогично для  $\mathbf{B}$  мы можем записать, что

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} \Delta \mathbf{B}.$$

Если мы хотим видеть в волноводе целое число волн, то

$$\omega^2 = \frac{c^2 \pi^2}{\varepsilon\mu} \left[ \left( \frac{n_x}{a_x} \right)^2 + \left( \frac{n_y}{a_y} \right)^2 + \left( \frac{n_z}{a_z} \right)^2 \right].$$

## 11.5 Плазма

**Плазма** — а-ля ионизированный квазинейтральный газ, но с коллективными явлениями. В плазме молекулярных токов нет:  $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ ; обладает высокой электропроводностью. Если в каком-то веществе протекает ток с объёмной плотностью  $\mathbf{j}$ , то возникает сила на единицу объёма с током:  $\mathbf{f} = [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]/c$ .

Давление, которое может быть создано на плазму магнитным поле — **магнитное давление** =  $B^2/8\pi$ . По плазменному шнуру, чтобы он не расплылся, можно пустить такой ток, чтобы возникло магнитное поле  $\mathbf{B}$ :  $nkT = B^2/8\pi$ .

**Дебаевский радиус:**

$$r_D = \sqrt{\frac{kT}{8\pi e^2 n}}. \quad (11.10)$$

Имеет смысл радиуса сферы вокруг внесённого в плазму заряда, в которой нарушается квазинейтральность плазмы. Количество частиц в дебаевской сфере, по которой различают ионизированный газ и плазму:  $N \approx nr_D^3$ . И если  $N_D \lesssim 1$ , то это называется ионизованным газом, а если  $N_D \gg 1$  — называется плазмой.

Плазменная частота:

$$\omega_{pl} = \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m}}, \quad (11.11)$$

Например для колебаний смещённых электронов в плазме. Энергия таких колебаний:

$$W_{\text{э}} = \frac{E^2}{8\pi} = 2\pi(nex)^2 \lesssim nkT \quad \rightsquigarrow \quad x_{\text{max}} \approx 2r_D, \quad (11.12)$$

где  $x_{\text{max}}$  – максимальная амплитуда таких колебаний (может служить определением дебаевского радиуса).

Для плазмы в переменном электрическом поле:

$$m\ddot{r} = -eE_0 \cos \omega t \quad \rightsquigarrow \quad r = \frac{e}{m\omega^2} E_0 \cos \omega t, \quad (11.13)$$

по такому закону будет колебаться каждый электрон.

Запишем сразу дипольный момент единицы объёма с такими электронами:

$$P = -ner = -\frac{ne^2}{m\omega^2} E = \alpha E \quad \rightsquigarrow \quad (\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha) \quad \rightsquigarrow \quad \varepsilon = 1 - \frac{\omega_{\text{pl}}^2}{\omega^2}, \quad (11.14)$$

от возбуждаемой частоты будут зависеть оптические (электрические) свойства плазмы.

**Фазовая скорость в плазме:**

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\omega}{k} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\omega_{\text{pl}}^2 + k^2 c^2}} \quad \rightsquigarrow \quad k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{\text{pl}}^2}{c^2}}. \quad (11.15)$$

Центральное выражение называется дисперсионной формулой для плазмы. Её можно выразить в виде последнего выражения, которое похоже на критическую частоту для волноводы. Оказывается, что дисперсионное соотношение для волн в волноводе и в плазме – одинаковое.

## 11.6 Магнетики

Есть такое определение магнитного поля  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = \frac{q}{cr^3} [\mathbf{v} \times \mathbf{r}] = \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}],$$

в СГСЭ.

Можно из  $I d\mathbf{l} = \mathbf{j} dV$ , перейти к закону

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{c} [d\mathbf{l} \times \mathbf{r}], \quad d\mathbf{B} = \frac{I}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{r}].$$

Например, для прямого провода есть самозамкнутые кружочки вокруг одного с модулем

$$B = \frac{2I}{cr}.$$

Если взять маленький виток с проводом, то конфигурация полей аналогична полю диполю. В центре витка поле будет

$$B = \frac{2\pi I}{cr}.$$

Так вот для витка

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{c} IS.$$

Поле вокруг магнитного диполя

$$\mathbf{B} = \frac{3}{5} \frac{(\mathfrak{M} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{1}{r^3} \mathfrak{M}.$$

Сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right). \quad (11.16)$$

Введём линейную плотность тока и запишем, где  $\Omega$  – телесный угол площадочки,

$$i = \frac{I}{l}, \quad dB_{\tau} = \frac{i}{c} d\Omega.$$

Тогда поле внутри соленоида

$$B = \frac{i}{c} 4\pi, \quad i = \frac{IN}{l}.$$

Для плоскости по которой течёт  $i$ ,

$$B = \frac{2\pi}{c} i.$$

Для двух плоскостей аналогично, (а-ля магнитный конденсатор)

$$B = \frac{4\pi}{c} i.$$

Кстати, для телесного угла,

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha).$$

Для погнутого в окружность радиуса  $R$  соленоида, площади  $S$ , с  $i$

$$B_O = \frac{2iS}{cR^2} = \frac{2\pi i}{c} \left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

### Магнетики – магнитное поле в веществе

Магнитный момент молекулярных токов:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathfrak{M}}{V} = \frac{1}{c} i_{\text{мол}} \mathbf{l}, \quad \Rightarrow \quad i_{\text{мол}} = c(\mathbf{I} \cdot \mathbf{l}), \quad i_{\text{мол}} = c \oint_L (\mathbf{I} \cdot d\mathbf{l}).$$

Кстати,

$$\mathbf{I} = \kappa \mathbf{H},$$

где  $\kappa$  – магнитная восприимчивость. Также

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

где  $\mu = 1 + 4\pi\kappa$  – магнитная проницаемость.

## 11.7 Тригонометрия

Ну, не судите,

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

А также

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \left[ \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \right];$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \left[ \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \right];$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \left[ \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \right].$$