Заметки курса «Электричество и магнетизм»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *22 декабря 2020 г.*

Содержание

1 Закон Кулона и теорема Гаусса

Здесь попробуем индуктивно построить содержательную теорию, **начнём с двух эксперементальных фактов**, положенных в основу теории. Закона Кулона (сгсэ)

$$\boldsymbol{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{1.1}$$

и, введя вектор напряженности электростатического поля $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/q$, принцип суперпозиции:

$$\boldsymbol{E} = \sum \boldsymbol{E}_i. \tag{1.2}$$

Дипольный момент

Простейшим примером системы зарядов является диполь $q_1 + q_2 = 0$, для которого введём $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$:

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{r_1^2}\frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1} - \frac{q}{r_1^2}\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2} \quad \overset{l \ll r_2, r_1}{\Longrightarrow} \quad \boldsymbol{E} = \frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}}{r^3} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}$$

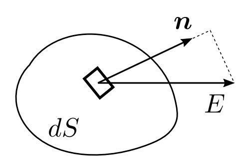
Для заряженной нити верно, что

$$E = 2\frac{\varkappa}{r}.$$

Теперь дойдём до двух теорем (кусочки уравнений Максвелла), описывающих электростатическое поле.

Thr 1.1 (теорема Гаусса)**.** *Для потока $\boldsymbol{E}$ через замкнутую поверхность S верно, что*

$$\oint_S E_n\, dS = \boxed{\oint_S (\boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S}) = 4\pi q_{\text{вн}}.} \tag{1.3}$$



△.

I. Доказательство (из закона Кулона) для сферы вокруг точечного заряда очевидно.

II. Рассмотрим произвольную поверхность Ω, содержащую заряд, и телесный угол в онной:

$$E_n\, dS = E\cos\alpha\, dS = E\, dS'$$

То есть поток через наклонную площадку равен потоку через тот же телесный угол через некоторую вспомогательную сферу. Так как $s_1/s_2 = r_1^2/r_2^2$ и $E_1/E_2 = r_2^2/r_1^2$, получается интегрировать по Ω то же самое, что и интегрировать по выбранной хорошей сфере.

III. Рассмотрим теперь некоторую Ω, не содержащую заряд. Посмотрим на телесный угол от q. По модулю потоки через них одинаковые, а знаки противоположны, следовательно вклада в поток через Ω нет.

IV. Для сложного распределения зарядов, по принципу суперпозиции верно, что

$$\boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i \quad \Rightarrow \quad \oint_S E_n\, dS = \sum_i \oint_S \boldsymbol{E}_i\, dS.$$

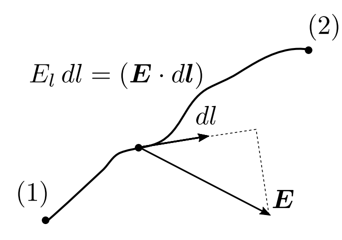
□

2 Потенциал электрического поля.

Thr 2.1 (Теорема о циркуляции)**.** *Для заряда, при квазистатическом перемещении, верно, что*

$$A_{\text{замкн}} = \boxed{\oint_{(L)} (\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}) = 0} \tag{2.1}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0 \tag{2.2}$$



△.

I. Рассмотрим поле точечного заряда Q и перемещение с $\boldsymbol{r}$ до $\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{l}_r + (d\boldsymbol{l} - d\boldsymbol{l}_r)$. Тогда $dA = (\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}) = \frac{Q}{r^2}dl_r$, то есть $A \equiv A(r_1, r_2)$.

II. Для поля в принципе вышесказанное верно по принципу суперпозиции.

□

Def 2.2. *Разностью потенциалов* $\varphi_1 - \varphi_2$ между точками $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ называется $A = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l}$, при перемещении единичного положительного заряда. Потенциал определен с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

В частности, для точечного заряда, при $\varphi_\infty = 0$, верно

$$\varphi(r) = \int_r^\infty \frac{Q(r)}{r^2}\, dr = \frac{Q}{r}.$$

А для двух зарядов, $+q, -q$

$$\varphi = -\frac{q}{r_1} + \frac{q}{r_2} = q\frac{(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} \quad \overset{r \gg l}{\Rightarrow} \quad \varphi = \frac{1}{r^2}\frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{r}$$

2.1 Дифференциальная форма записи

Вектор напряженности электростатического поля

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi.} \tag{2.3}$$

Действительно,

$$d\varphi = -(\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}) = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} dx_i = d\boldsymbol{l}\cdot\nabla\varphi, \text{ где } \nabla\varphi \equiv \operatorname{grad}\varphi.$$

А теперь рассмотрим некоторый элементарный параллелепипед. Тогда поток через левую грань это $-E_x\, dy\, dz$, а через правую это $\left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx\right) dy\, dz$. Тогда суммарный поток через мааленький параллелепипед равен $dV\, \partial E/\partial x$, а теорема Гаусса примет вид

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z}\right) dV = 4\pi\rho\, dV \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho}. \tag{2.4}$$

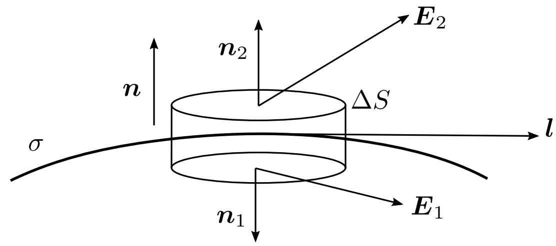
2.2 Граничные условия на заряженной поверхности

По теореме Гаусса верно, что

$$E_{2n_2}\cancel{\Delta S} + E_{1n_1}\cancel{\Delta S} = 4\pi\sigma\cancel{\Delta S},$$
$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$$

По теореме циркуляции верно, что

$$E_{2l}\cancel{\Delta l} - E_{1l}\cancel{\Delta l} = 0$$
$$E_{2l} - E_{1l} = 0.$$

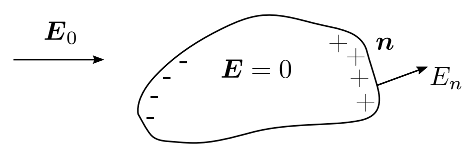


3 Проводники

Def 3.1 (пусть так)**.** *Проводник* – костяк частиц, окруженных *свободными* электронами, которые в пределах тела могут перемещаться на какие угодно расстояния.

В частности, для проводников, верно, что

$$E_n = 4\pi\sigma \tag{3.1}$$
$$E_\tau = 0 \tag{3.2}$$



Собственно, объёмных зарядов в проводнике нет, поверхностные есть и компенсируют внешнее поле. Аналогично работает решетка Фарадея, электростатическое поле не проникает в проводники.

3.1 Основная задача электростатики

Вместо поиска $\boldsymbol{E}$ достаточно найти φ, воспользовавшись (2.3) и (2.4), получим

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi \equiv \delta\varphi = \begin{cases} -4\pi\rho & \text{ур. Пуассона} \\ \ 0 & \text{ур. Лапласа} \end{cases}$$

Как может быть поставлена задача? Заданы граничные значение, найти распределения зарядов. Заданы заряды, найти распределения. Что-то задано, что-то не задано. Во всех трёх случаях **решение уравнения Лапласа единственно**.

Метод изображений

Если существует некоторая эквипотенциальная поверхность разделяющая пространство на два полупространства, то можем считать что эта поверхность является проводящей.

4 Диэлектрики

Def 4.1. *Диэлектрики* – непроводники электричества. В них возбуждаются индукционные заряды, привязанные к кастету частиц, – *поляризационные*, или *связанные заряды*.

Альтернативный вариант, – наличие дипольного момента у молекул. При наличии электрического поля дипольные моменты ориентируются, диэлектрик попользуется.

Def 4.2. *Вектор поляризации* – дипольный момент единицы объема диэлектрика, возникающий при его поляризации.

Рассмотрим скошенный параллелепипед. На основаниях параллелепипеда возникнут поляризационные заряды с поверхностной плотностью $\sigma_{\text{пол}}$. Взяв его площадь за S, найдём дипольный момент равный $\sigma_{\text{пол}} S \boldsymbol{l}$. Тогда вектор поляризации будет

$$\boldsymbol{P} = \frac{\sigma_{\text{пол}} S}{V} \boldsymbol{l}, \tag{4.1}$$

что верно и для анизотропных кристаллов где $\boldsymbol{E} \nparallel \boldsymbol{P}$.

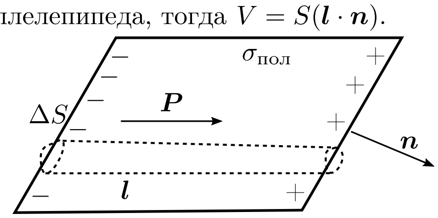
Пусть $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор внешней нормали к основанию параллелепипеда, тогда $V = S(\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{n})$.

Подставив V в предыдущую формулу, получим, что

$$\sigma_{\text{пол}} = (\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}) = P_n \tag{4.2}$$

Или, более общо,

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \boldsymbol{p}_i$$



В случае неоднородной поляризации верно, что поляризационные заряды могут появиться и на поверхности. Выделим V, ограниченный S, смещённый заряд равен $-P_n\, dS$, тогда через S поступает

$$q_{\text{пол}} = -\oint P_n\, dS = -\oint (\boldsymbol{P} \times\, d\boldsymbol{S})\,. \tag{4.3}$$

Стоит заметить, что в теорему о циркуляции не входят заряды, соотвественно для диэлектриков верно, что

$$\oint_{(L)} E_l\, dl = 0.$$

Далее чаще всего мы будем сталкиваться с линейной поляризацией, когда

$$\boldsymbol{P} = \alpha \boldsymbol{E}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} \underbrace{(1 + 4\pi\alpha)}_{\varepsilon} = \varepsilon \boldsymbol{E},$$

где α – *поляризуемость диэлектрика*, а ε – *диэлектрическая проницаемость*.

4.1 Теорема Гаусса

Запишем теорему Гаусса для электрического поля в диэлектрике. Знаем, что $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\text{пол}} + \boldsymbol{E}_{\text{св}}$.

$$\oint E_n\, dS = 4\pi(q + q_{\text{пол}}) \quad \Rightarrow \quad \oint \underbrace{(E_n + 4\pi P_n)}_{D_n} dS = 4\pi q. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\oint D_n\, dS = 4\pi q_{\text{св}}} \tag{4.4}$$

где $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}$. – вектор *электрической индукции*, или *электрического смещения*. Поток вектора $\boldsymbol{D}$ определяется только свободными зарядами.

Можно посмотреть на это в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \\
&\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\left(\rho - \operatorname{div} \boldsymbol{P}\right), \\
&\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi(\rho + \rho_{\text{пол}}) \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{пол}} = -\operatorname{div} \boldsymbol{P}.
\end{aligned}$$

4.2 Граничные условия на границе двух диэлектриков

Повторя рассуждения для проводников, найдём, что

$$D_{1n} = D_{2n},$$

а в случае линейных диэлектриков верно

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}.$$

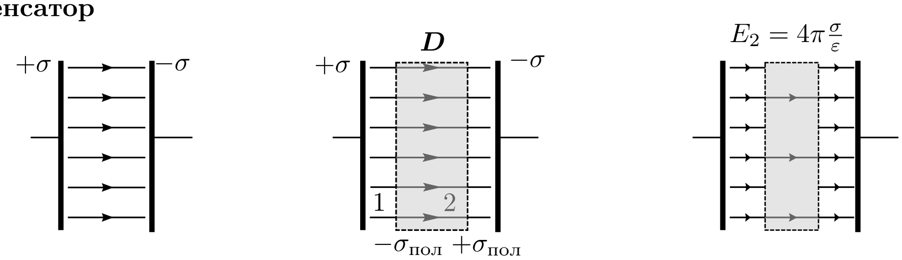
Или

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma_{\text{пол}}.$$

Аналогично, из теоремы о циркуляции получим, что

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0.$$

Плоский конденсатор



$E_0 = 4\pi\sigma$ $\quad$ $D_2 = D_1 = E_0 = 4\pi\sigma$ $\quad$ $E_1 - E_2 = 4\pi\sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)) = 4\pi\sigma_{\text{пол}}$

То есть на грани пластинки $\sigma_{\text{пол}} = \sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

4.3 Поле системы зарядов в однородном диэлектрике

Для точечного заряда в однородном диэлектрике, по теореме Гаусса

$$\left.\begin{aligned} &D\cdot 4\pi r^2 = 4\pi \\ &D = \varepsilon E \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{q}{\varepsilon r^2}.}$$

То ест в общем случае, по принципу суперпозиции, в диэлектрике

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0.$$

5 Энергия электрического поля

Рассмотрим систему из двух зарядов q_1 и q_2. Тогда энергия взаимодействия

$$W = q_1\varphi_{21} = q_2\varphi_{12} = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_{21} + q_2\varphi_{12}\right).$$

Или, в общем случае

$$W = \frac{1}{2}\sum_{ij} W_{ij} = \frac{1}{2}\left(q_i\varphi_i^j\right) = \frac{1}{2}\sum q_i\varphi_i,$$

где под φ_i имеется ввиду потенциал q_i заряда. В случае непрерывно заряженного тела

$$W = \frac{1}{2}\int \varphi\rho\, dV.$$

Например, для конденсатора

$$W = \frac{1}{2}\varphi_1\int_{(1)} dq + \frac{1}{2}\varphi_2\int_{(2)} dq = \frac{1}{2}q(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{1}{2}qU = \frac{cU^2}{2} = \frac{q^2}{2c}.$$

Вопрос: где локализована энергия? Ответ: в зарядах или в поле. В частности, для конденсатора

$$W = \frac{1}{2}cU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S E^2 d^2}{4\pi d} = \underbrace{\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}}_{w_{\text{э}}} V,$$

где $\mathcal{W}_Э = \varepsilon E^2/8\pi$ – *объемная плотность* электрической энергии. В общем же случае

$$W_Э = \int \mathcal{W}_Э \, dV. \tag{5.1}$$

6 Виды диэлектриков

Посмотрим на энергию внутри вакуума и диэлектрика, $E^2/8\pi$ и $E^2/\varepsilon 8\pi$. Энергия электрического поля определяется через работу внешних сил, которую необходимо затратить, чтобы это поле создать. Собственно, во втором случае есть ещё добавки. рассмотрим диэлектрик с упругими диполями, то есть пусть

$$F = \varkappa l.$$

Пусть диполь попал во внешнее поле, тогда

$$Eq \cdot \frac{l}{2} = \varkappa l \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} Ep.$$

Тогда вся энергия, чтобы создать в этой среде поле

$$W = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{EP}{2} = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{1}{2} E^2 \alpha = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{E^2}{8\pi}(\varepsilon - 1) = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}.$$

А если работать с диэлектриками с собственным дипольным моментом? Тогда ещё появиться некоторое тепло, которое необходимо отдать термостату, увеличивая упорядоченность системы. Постараемся обобщить, для этого вспомним, что

Def 6.1. *Свободная энергия* – функция состояния, приращение которой в обратимом изотермическом процессе равно совершаемой работе внешних сил.

Так вот, то что мы называем энергией электрического поля (в диэлектриках), на самом деле это объёмная плотность свободной энергии $\Psi = U - TS$.

7 Теория постоянных токов

Def 7.1. *Сила тока* – заряд, протекший через сечений проводника в единицу времени,

$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{7.1}$$

Плотность тока – ток, протекающий через единичное сечение.

$$\boldsymbol{j} = ne\boldsymbol{u}. \tag{7.2}$$

Law 7.2 (закон Ома)**.** *Для класса линейных проводников верно, что при наличии разности потенциалов U*

$$I = \frac{U}{R} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{j} = \lambda \boldsymbol{E}, \tag{7.3}$$

где $\lambda = 1/\rho$, обратное удельное сопротивление.

В СГСЭ, кстати, $\dim \rho = \text{c}$, а в СИ 1 ед. СГСЭ $\rho = 9 \cdot 10^9$ Ом.

Условие стационарности

Пусть в некоторый узел втекает $I_1, \ldots, I_n$, тогда

$$\oint_{(S)} j_n \, dS = -\dot{Q}.$$

Это «закон сохранения заряда», или уравнение непрерывности. В частности, в стационарном случае

$$\boxed{\oint j_n \, dS = 0}. \tag{7.4}$$

Получается (??), что поле зарядов, которые участвуют в протекании постоянных токов можно описывает с помощью электростатических формул, то есть применять теорему Гаусса и теорему о циркуляции.

По теореме Гаусса и условия стационарности,

$$0 = \oint j_n \, dS = \lambda \oint E_n \, dS = \lambda 4\pi q,$$

то есть для проводников с постоянным током всё ещё верно, что внутреннего заряда в проводниках нет, а есть только поверхностный.

Невозможна стационарная ситуация с постоянных током только на потенциальных силах. Для участка цепи, в котором действуют сторонние силы, можно записать

$$\boldsymbol{j} = \lambda\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\text{стор}}\right). \tag{7.5}$$

Def 7.3. *ЭДС* – электро-движущая сила, работа совершаемая сторонними силами при перемещении единичного заряда по рассматриваемому участку,

$$\mathcal{E} = \int_{(I)} E_l^{\text{стор}}\, dl. \tag{7.6}$$

Правила Кирхгофа

Рассмотрим узел, в который втекает $I_1, \ldots, I_n$. Из условия стационарности получим (I). Рассмотрев замкнутый участок цепи, получим (II) правило Кирхгофа. Действительно, $j_l = \lambda\left(E_l + E_l^{\text{стор}}\right)$, или

$$\oint \frac{I\, dl}{\lambda S} = \oint \left(E_l + E_l^{\text{стор}}\right) dl, \quad \text{где} \quad \oint \frac{I\, dl}{\lambda S} = IR.$$

Но для каждого участка $I_i R_i = \Delta\varphi_i + \mathcal{E}_i$. Это с учётом направления тока.

I. $\sum I_i = 0.$

II. $\sum I_i R_i = \sum \mathcal{E}_i$

Оказывается, для любой цепи, записав уравнения Кирхгофа для всех узлов и всех независимых контуров, получим разрешимую единственным образом систему уравнений (ну или хотя бы столько, сколько можно).

8 Магнитное поле в вакууме

8.1 Сила Ампера

Ампер ввел элементы тока, тогда

$$d\boldsymbol{F} = K_1 I \left[d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}\right], \tag{8.1}$$

где $\boldsymbol{B}$ – *индукция магнитного поля*, силовая характеристика магнитного поля.

8.2 Закон Био-Савара

Ещё один эксперементальный факт:

$$d\boldsymbol{B} = K_2 I \frac{\left[d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}\right]}{r^3}. \tag{8.2}$$

Осталось поговорить про коэффициенты[1] K_1 и K_2. Из $I^{(\text{М})} = \frac{1}{c} I^{(\text{Э})}$, получим

в СГСМ:

$$d\boldsymbol{F} = I\left[\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}\right]$$
$$d\boldsymbol{B} = I\ \frac{\left[d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}\right]}{r^3}.$$

в системе Гаусса:

$$d\boldsymbol{F} = \frac{I}{c}\left[d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}\right]$$
$$d\boldsymbol{B} = \frac{I}{c}\ \frac{\left[d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}\right]}{r^3}.$$

Подставляя $\boldsymbol{j} = nq\boldsymbol{v}$, получим формулу следующего раздела.

8.3 Сила Лоренца

Law 8.1. *Сила, действующая на движущийся точечный заряд q в магнитном поле, получен обобщением опытных фактов,*

$$\boldsymbol{F}_m = \frac{q}{c}\left[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right], \tag{8.3}$$

где вектор $\boldsymbol{B} \neq f(q, v)$ характеризует магнитное поле, напряженность магнитного поля.

Из этого можем найти, что

$$\boldsymbol{B} = \frac{c}{q\boldsymbol{v}_\perp^2}\left[\boldsymbol{F}_m \times \boldsymbol{v}_\perp\right],$$

[1] В системе Гаусса $I, q, \Delta\varphi$ измерется в СГСЭ, а B, H, L, M в СГСМ.

что однозначно определяет $\boldsymbol{B}$.

В предположение, что электрическое и магнитное поля действуют независимо, то $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_m$, т.е.

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\left[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right]\right),$$

где $\boldsymbol{F}$ – сила Лоренца.

9 Магнитное поле в намагничивающихся средах

9.1 Уравнения максвелла для магнитного поля в веществе

Посмотрим на рамку с током в магнитном поле. Для неё верно, что суммарная сила, действующая на рамку,

$$\boldsymbol{B}\oint d\boldsymbol{F} = \frac{I}{c}\oint\left[d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}\right] = \frac{I}{c}\left[\oint d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}\right] = 0.$$

Однако момент, действующий на рамку, не равен 0,

$$S = ab, \qquad F = \frac{I}{c}bB \quad\Rightarrow\quad M = \frac{IS}{c}\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{p}_m = \frac{IS}{c}\boldsymbol{n} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{M} = \left[\boldsymbol{p}_m\times\boldsymbol{B}\right].$$

Посмотрим теперь на рамку в неоднородном магнитном поле. Рассмотрим рамку такую, что $\boldsymbol{p}_m \parallel \boldsymbol{B}$, тогда $\boldsymbol{I}\,d\boldsymbol{l}$ имеет проекцию на $\boldsymbol{n}$, получается, что

$$F_x = (p_m)_x\frac{\partial B_x}{\partial x}.$$

Возвращая к полю, предполагается, что внутри молекул формируются *молекулярные токи*, создающие дополнительный магнитный момент, а при наличие внешнего поля происходит ориентация этих моментов. Тогда теорема о циркуляции магнитного поля в веществе запишется, как

$$\oint_{(L)}(\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}) = \frac{4\pi}{c}\left(I_{\text{пров}} + I_{\text{мол}}\right). \tag{9.1}$$

Стоит заметить, что в теории Максвелла имеется ввиду, что

$$\boldsymbol{B} = <\boldsymbol{B}_\mu>.$$

Характеристика, описывающая состояние намагниченного вещества в точке – магнитный дипольный момент, единице объема:

$$\boldsymbol{\mathcal{I}} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{\Delta V}(\boldsymbol{p}_m)_i.$$

Можем записать, что

$$\oint \mathcal{I}_l\,dl = \frac{I_{\text{мол}}}{c}. \tag{9.2}$$

Тогда уравнение перепишется, как

$$\oint_{(L)}(\boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{l}) = \frac{4\pi}{c}I_{\text{пров}} + 4\pi\oint_{(L)}(\boldsymbol{\mathcal{I}}\,d\boldsymbol{l}). \tag{9.3}$$

$$\oint_{(L)}\underbrace{(\boldsymbol{B} - 4\pi\boldsymbol{\mathcal{I}})}_{\boldsymbol{H}}\,d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c}I_{\text{пров}}, \tag{9.4}$$

здесь принимается определение $\boxed{\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - 4\pi\boldsymbol{\mathcal{I}}}$ – *напряженность магнитного поля.*

Далее нас интересует линейная намагничиваемость:

$$\boldsymbol{\mathcal{I}} = \varkappa\boldsymbol{H},$$

где $\varkappa$ – магнитная восприимчивость. Тогда можем записать, что

$$\boldsymbol{H}\underbrace{(1 + 4\pi\varkappa)}_{\mu} = \boldsymbol{B}, \tag{9.5}$$

что записано в системе Гаусса. В СИ верно, что

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{\mathcal{I}}.$$

9.2 Различные вещества

I. Парамагнетики, $\varkappa \in [10^{-3}, 10^{-6}]$, пример: алюминий.

II. Диамагнетики, $\varkappa < 0$, пример: золото, серебро, см. модель Ланжевена.

III. Ферромагнетики, $\varkappa \in [10^{3}, 10^{6}]$, пример: железо, никель.

9.3 Граничные условия

Рассмотрим границу двух веществ с μ_1 и μ_2. Тогда

$$\boldsymbol{B}_{1n} = \boldsymbol{B}_{2n},$$

а для тангенциальной компоненты

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_N.$$

10 Электромагнитная индукция

10.1 Понимания

Def 10.1 (Понимание Фарадея)**.** Для движущейся перемычки в замкнутом контуре, помещенного в магнитное поле, можно записать силу лоренца, которая будет толкать каждый носитель заряда в ней как:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{e} = \frac{1}{c}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}].$$

Электродвижущая сила, создаваемая этим полем называется *электродвижущей силой*. И для магнитного потока пронизывающего площадь рамки:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} \tag{10.1}$$

Def 10.2 (Понимание Максвелла)**.** Всякое изменение магнитного поля во времени возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле. Циркуляция E по $\forall$ замкнутому контуру определяется:

$$\oint_s (E\, ds) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{10.2}$$

где $\Phi = \oint_s \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S}$ — магнитный поток, пронизывающий неподвижный контур s.

Сущность в таком понимании прежде всего в возбуждении электрического поля, а не тока. Электромагнитная индукция может наблюдаться и тогда, когда в пространстве нет проводников вообще.

10.2 Сила Лоренца

Def 10.3. *Сила Лоренца* для проводника движущегося в переменном магнитном поле ток возбуждается как магнитной, так и электрической силами:

$$\boldsymbol{F} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}]\right) \tag{10.3}$$

От выбора системы отсчета зависит, какая часть индукционного тока вызывается электрической, а какая магнитной составляющей силы Лоренца. Деление электромагнитного поля на электрическое и магнитное определяется системой отсчета, в которой рассматриваются явления.

С помощью пересадок, в общем случае, нельзя добиться того, чтобы электромагнитное поле сделалось либо чисто электрическим, либо чисто магнитным.

10.3 Индуктивность проводов

Def 10.4. Предполагаем, что ферромагнетиков нет, тогда $\boldsymbol{B}$ и Φ пропорциональны току:

$$\Phi = LI^{(m)} = \frac{1}{c}LI, \tag{10.4}$$

где $I^{(m)}$ – сила тока в СГСМ, а I – сила того же тока в СИ, L же не зависит от силы тока и называется *индуктивностью провода.* Чем тоньше провод, тем болше его индуктивность.

10.4 Магнитная энергия

Для витка с током, в котором с помощью внешних сил потечёт ток, а значит будет нарастать и магнитный поток через него, возникнет ЭДС, тогда элементарная работа внешний сил:

$$\delta A^{\text{внеш}} = -\mathcal{E}^{\text{инд}} I\, dt = \frac{1}{c} I\, d\Phi.$$

Def 10.5. Из верхнего, достаточно общего утверждения, если работа внешняя работы пойдёт только на увеличение *магнитной энергии*, то есть диа- или парамагнетик, в частности.

$$dW_m = \frac{1}{c}\, d\Phi \quad \overset{\nexists\text{ферромагнетиков}}{\rightsquigarrow} \quad W_m = \frac{L}{2}\left(\frac{I}{c}\right)^2 = \frac{1}{2c} I\Phi = \frac{\Phi^2}{2L}, \tag{10.5}$$

где L – самоиндукция проводника с током и константа. Также, для справедливости последней формулы не обязательно виток должен оставаться неподвижным.

Важно, что μ остается постоянной, или же, если проницаемость зависит от температуры, то в процессе намагничивания, чтобы формула работала, надо поддерживать T постоянной.

Тогда W_m будет иметь смысл свободной магнитной энергии системы.

Можно перейти к другому виду записи энергии магнитного поля, энергия, которую запас соленоид, используя:

$$\begin{cases} H = 4\pi I/(cl) \\ \Phi = BS \end{cases} \rightsquigarrow\ dW_m = \frac{I}{c}\, d\Phi = \frac{V}{4\pi}(\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{B}) \tag{10.6}$$

Если w_m – плотность магнитной энергии в соленоиде, то в общем случае можно записать $W_m = \int w_m\, dV$, где плотность определяется: $w_m = (\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{B})/(4\pi)$.

В случае пара- и диамагнитный сред $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ получаем: $w_m = \mu H^2/(8\pi)$

Рассмотрим два витка с током по которым текут токи I_1 и I_2. В отсутствии ферромагнетиков запишется:

$$\Phi_1 = \frac{1}{c} L_{11} I_1 + \frac{1}{c} L_{12} I_2,$$
$$\Phi_2 = \frac{1}{c} L_{21} I_1 + \frac{1}{c} L_{22} I_2.$$

Можно сформулировать **теорему о взаимности** $L_{ik} = L_{ki}$

Thr 10.6 (О сохранении магнитного потока)**.** *Проводник с током в $\forall$ магнитном поле, движется и деформируется, тогда в нём возбуждается:*

$$I = \frac{\mathcal{E}^{\text{инд}}}{R} = -\frac{1}{cR}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Если $R = 0$, то $d\Phi/\,dt = 0$, то есть при движении идеально проводящего замкнутого провода в магнитном поле остается постоянным магнитный поток, пронизывающий контур провода.

11 Семинары

11.1 Диполь

Поле диполя:

$$\boldsymbol{E} = \frac{3\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}\right)}{r^5}\boldsymbol{r} - \frac{1}{r^3}\boldsymbol{p}.$$

Или, считая $\boldsymbol{n}$ – единичным вектором вдоль r:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{r^3}\left(3(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p}\right)$$

Момент сил, действующих на диполь в однородном магнитном поле

$$\boldsymbol{M} = \left[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}\right].$$

Энрегия диполя:

$$W = \int \delta A = \int M\, d\alpha = pE\cos\alpha\Big|_{\alpha}^{\alpha_0=\pi/2} = -\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}\right).$$

Теперь для неупругого диполя:

$$kl = qE, \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}\right).$$

Для диполя в неоднородном поле:

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) \approx q\, d\boldsymbol{E}, \qquad d\boldsymbol{E} = l^i\partial_i\boldsymbol{E}, \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{F} = p^i\partial_i\boldsymbol{E} = \left(\boldsymbol{p}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{E}$$

Взаимодействие двух сонаправленных диполей:

$$E_1 = -6\frac{p_1}{d^4}, \qquad \Rightarrow \qquad F = p_2\frac{dE_1}{dx} = -\frac{6p_1p_2}{x^4}.$$

Для двух равномерно заряженных сфер, смещённых на $\boldsymbol{l}$, поле внутри области пересечения

$$\boldsymbol{E}(A) = -\frac{4}{3}\pi\rho\boldsymbol{l}.$$

Найдём теперь такое распредление заряда, чтобы поле внутри всей сферы было $\boldsymbol{E}_0$. Толщина заряженной части $l' = l\cos\theta$, тогда

$$\rho = \frac{3}{4}\frac{E_0}{l}, \qquad \Rightarrow \qquad \sigma(\theta) = \rho l' = \rho l\cos\theta = \frac{3}{4\pi}E_0\cos\theta,$$

при чём для этой сферы дипольный момент

$$\boldsymbol{P} = q\boldsymbol{l} = \frac{4}{3}\pi R^3\rho\boldsymbol{l} = -R^3\boldsymbol{E}_0.$$

11.2 Уравнения Максвелла

Ди-форма в СГС:	Ин-форма в СГС:	Ди-форма в СИ:	Ин-форма в СГС:
$\operatorname{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho$	$\oint \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s} = 4\pi Q$	$\operatorname{div}\boldsymbol{D} = \rho$	$\oint \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s} = Q$
$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$	$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = 0$	$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$	$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = 0$
$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}$	$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}$
$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$	$\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c}I + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s}.$	$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$	$\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = I + \frac{d}{dt}\int \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s}.$

где $\mu\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$,

$\boldsymbol{E}$ — напряженность электрического поля;
$\boldsymbol{H}$ — напряженность магнитного поля;
$\boldsymbol{D}$ — электрическая индукция;
$\boldsymbol{B}$ — магнитная индукция.

Материальные уравнения

В среде сторонние электрические и магнитные поля вызывают поляризация $\boldsymbol{P}$ и намагничивание вещества $\boldsymbol{M}$. Тогда

$$\rho_{\mathrm{b}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{b}} = c\nabla \times \boldsymbol{M} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t},$$

где в СИ не будет множителя c. Далее, по определению

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi \boldsymbol{M} \qquad \text{(СГС)}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \qquad \text{(СИ)}$$

Наконец, в однородных средах верно, что

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi \dfrac{\rho}{\varepsilon}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \dfrac{4\pi}{c}\mu \boldsymbol{j} + \dfrac{\varepsilon\mu}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \end{cases}$$

где в оптическом диапазоне принято $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$.

Граничные условия

Опять же, в СГС,

$$\begin{cases} (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) \times \boldsymbol{n}_{1,2} = 0, \\ (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) \times \boldsymbol{n}_{1,2} = \dfrac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) \cdot \boldsymbol{n}_{1,2} = -4\pi\rho_{\mathrm{s}}, \\ (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) \cdot \boldsymbol{n}_{1,2} = 0, \end{cases}$$

где ρ_{s} – поверхностная плотность свободных зарядов, $\boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}$ – плотность поверхностных свободных токов вдоль границы.

Эти граничные условия показывают непрерывность нормальной компоненты вектора магнитной индукции, и непрерывность на границе областей тангенциальных компонент напряжённостей электрического поля.

Уравнение непрерывности

Источники полей $\rho, \boldsymbol{j}$ не могут быть заданы произвольным образом. Применяя операцию дивергенции к четвёртому уравнению (закон Ампера—Максвелла) и используя первое уравнение (закон Гаусса), получаем уравнение непрерывности

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \oint_S \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho \, dV.$$

11.3 Введение в электрические цепи

Колебательный контур описывается дифференциальным уравнением второго порядка:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \mathscr{E} \tag{11.1}$$

Если же «внешних сил» ε или F нет, то уравнения линейны и однородны по времени, описывая, так называемые, свободные колебания. Введём обозначения для таких линейных колебательных систем:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \qquad 2\gamma = \frac{R}{L}, \qquad X = \frac{\mathscr{E}}{L}. \tag{11.2}$$

Тогда уравнения преобразуются в более удобный вид, в котором ω_0 – собственная частота, а γ – коэффициент затухания.

Виды колебаний в электрических цепях

Свободные колебания гармонического осциллятора характеризуется отсутствием омического сопротивления:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} &q = q_0 \cos(\omega_0 t + \delta), \\ &I = \omega_0 q_0 \cos\left(\omega_0 t + \delta + \pi/2\right). \end{aligned} \tag{11.3}$$

Затухающие колебания характеризуются наличием тормозящей силы:

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q = ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \delta),\ \text{где } \omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2. \tag{11.4}$$

Выпишем несколько важных определений:

Период колебаний — величина $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = T_0/\sqrt{1 - (\gamma/\omega_0)^2}$;

Амплитуда — величина $A = ae^{-\gamma t}$;

Время затухания — величина $\tau = 1/\gamma$ за которое A убывает в e раз;

Логарифмический декремент затухания —величина $d = \gamma T$ (безбожно устарел);

Добротность — величина $Q = \pi/d = \omega/2\gamma = \pi N$, где $N = \tau/T = \frac{1}{\gamma T}(= 1/d)$. Также $Q = \Delta W/W$.

Вынужденный колебания затухающего осциллятора под действием синусоидальной силы

Запишем уравнение колебаний в самом простом случае:

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = X(t) = X_0\cos(\omega t) \tag{11.5}$$

Частное решение ищем в виде $q = q_0 e^{i\omega t}$, откуда $\dot{q} = i\omega q$, $\ddot{q} = \omega^2 q$, тогда:

$$q = \frac{X}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}e^{i\omega t} + e^{-\gamma t}(C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t) \tag{11.6}$$

Если $t \gg \tau$, то свободные колебания практически затухнут и останутся только вынужденные (первый член выражения для q).

Оставим только вещественную часть решения:

$$q = \frac{X}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}e^{i\omega t} \quad \rightsquigarrow \quad q = \frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}\cos\left(\omega t - \Delta\varphi\right), \qquad \Delta\varphi = \arctan\left[\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right]. \tag{11.7}$$

В наиболее важном случае, когда затухание невелико, положения всех максимумов почти не отличаются друг от друга. Поэтому за максимум аплитуды смещения можно принять её значение при $\omega = \omega_0$:

$$a_{max} = \frac{X_0}{2\omega_0\gamma} = \frac{\omega_0}{2\gamma}a_0, \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{a_{max}}{a_0} = Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}. \tag{11.8}$$

11.4 Волновое уравненние

Считая в среде $\boldsymbol{j} = 0$, можно написать, что

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \end{cases}; \quad \begin{cases} \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} \end{cases}; \ \Rightarrow \ \begin{cases} \nabla\times[\nabla\times\boldsymbol{E}] = \cancel{\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})} - \Delta\boldsymbol{E} \\ \nabla\times[\nabla\times\boldsymbol{E}] = -\dfrac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{B} \end{cases}; \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\boldsymbol{E} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial^2 t} = 0}. \tag{11.9}$$

Аналогично для $\boldsymbol{B}$ мы можем записать, что

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial^2 t} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\Delta\boldsymbol{B}.$$

Если мы хотим видеть в волноводе целое число волн, то

$$\omega^2 = \frac{c^2\pi^2}{\varepsilon\mu}\left[\left(\frac{n_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{a_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{a_z}\right)^2\right].$$

11.5 Магнитики

Есть такое определение магнитного поля $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{B} = \frac{q}{cr^3}\left[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}\right] = \frac{1}{c}\left[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}\right],$$

в СГСЭ.

Можно из $I\,d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{j}\,dV$, перейти к закону

$$d\boldsymbol{B} = \frac{I}{c}\left[d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}\right], \qquad d\boldsymbol{B} = \frac{I}{c}\left[\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}\right].$$

Например, для прямого провода есть самозамкнутые кружочки вокруг онного с модулем

$$B = \frac{2I}{cr}.$$

Если взять маленький виток с проводом, то конфигурация полей аналогична полю диполю. В центре витка поле будет

$$B = \frac{2\pi I}{cr}.$$

Так вот для витка

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{c} I\boldsymbol{S}.$$

Поле вокруг магнитного диполя

$$\boldsymbol{B} = \frac{3}{5}\frac{(\mathfrak{M}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5}\boldsymbol{r} - \frac{1}{r^3}\mathfrak{M}.$$

Сила Лоренца:

$$\boldsymbol{F} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}]\right). \tag{11.10}$$

Введём линейную плотность тока и запишем, где Ω – телесный угол площадочки,

$$i = \frac{I}{l}, \qquad dB_\tau = \frac{i}{c}\,d\Omega.$$

Тогда поле внутри соленодиа

$$B = \frac{i}{c}4\pi, \qquad i = \frac{IN}{l}.$$

Для плоскости по которой течёт i,

$$B = \frac{2\pi}{c}i.$$

Для двух плоскостей аналогично, (а-ля магнитный конденсатор)

$$B = \frac{4\pi}{c}i.$$

Кстати, для телесного угла,

$$\Omega = 2\pi(1-\cos\alpha).$$

Для погнутого в окружность радиуса R соленоида, площади S, с i

$$B_O = \frac{2iS}{cR^2} = \frac{2\pi i}{c}\left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

Магнетики – магнитное поле в веществе

Магнитный момент молекулярных токов:

$$\boldsymbol{I} = \frac{\mathfrak{M}}{V} = \frac{1}{c}i_{\text{мол}}\boldsymbol{l}, \qquad \Rightarrow \qquad i_{\text{мол}} = c\,(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{l}), \qquad i_{\text{мол}} = c\oint_L (\boldsymbol{I}\cdot d\boldsymbol{l}).$$

Кстати,

$$\boldsymbol{I} = \varkappa\boldsymbol{H},$$

где $\varkappa$ – магнитная восприимчивость. Также

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H},$$

где $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$ – магнитная проницаемость.