

ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА I»

Автор: Хоружий Кирилл

От: 16 декабря 2020 г.

Содержание

1	Кинематика	2
1.1	Криволинейные координаты	2
1.2	Кинематика точки	4
1.3	Кинематика твёрдого тела	6
1.4	Сложное движение точки и твёрдого тела	9
2	Динамика I	12
2.5	Основные теоремы динамики	12
2.6	Движение точки в центральном поле сил	15
2.7	Элементы механики сплошных сред (МСС)	17
3	Контрольная работа I	21
4	Динамика II	22
4.8	Геометрия масс	22
4.9	Динамика твёрдого тела	25
5	Аналитическая механика	29
5.10	Уравнения Лагранжа	29
5.11	Принцип Гамильтона-Остроградского	34
5.12	Равновесие. Принцип виртуальных перемещений.	37
5.13	Устойчивость равновесия консервативных систем.	39
6	Контрольная работа II	41

1 Кинематика

1.1 Криволинейные координаты

Т1.

Найдём ковариантные и контрвариантные компоненты \mathbf{a} . Учитывая, что тензор однозначно задаётся координатами в некотором базисе:

$$\lceil \mathbf{b} = a^i \mathbf{g}_i \mid \mathbf{g}_j \Rightarrow (\mathbf{b} \cdot \mathbf{g}^j) = a^i (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j) = a^i \delta_i^j = a^j \Rightarrow a^i \mathbf{g}_i = \mathbf{a}.$$

Аналогично

$$\lceil \mathbf{b} = a_i \mathbf{g}^i \mid \mathbf{g}_j \Rightarrow (\mathbf{b} \cdot \mathbf{g}_j) = a_i (\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j) = a_i \delta_j^i = a_j \Rightarrow a_i \mathbf{g}^i = \mathbf{a}.$$

Теперь научимся жонглировать индексами.

$$\lceil \mathbf{b}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j \mid \mathbf{g}^n \Rightarrow g^{ij} \mathbf{g}_j \mathbf{g}^n = g^{ij} \delta_j^n = g^{in} = (\mathbf{k}^i \cdot \mathbf{g}^n) \Rightarrow \mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j.$$

Для $g_{ij} \mathbf{g}^j = \mathbf{g}_i$ доказательство аналогично. Наконец,

$$\delta_i^j = (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j) = (g_{ik} \mathbf{g}^k \cdot g^{jn} \mathbf{g}_n) = g_{ik} g^{jn} \delta_n^k = g_{ik} g^{kj}.$$

Теперь, для жонглирования над координатой:

$$\lceil \mathbf{a} = a_i \mathbf{g}^i \mid \mathbf{g}_j \Rightarrow a^j = g^{ij} a_i.$$

Т2.

Найдём локальный базис/матрицу перехода из ПДСК для $\mathbf{r}(\sigma, \tau, z)$:

$$\mathbf{r}(\sigma, \tau, z) = \begin{pmatrix} \sigma\tau \\ (\tau^2 - \sigma^2)/2 \\ z \end{pmatrix}; \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \tau & \sigma & 0 \\ -\sigma & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad g_{ij} = \mathbf{J}^T \mathbf{J} = \text{diag}(\tau^2 + \sigma^2, \tau^2 + \sigma^2, 1).$$

Зафиксировав значения всех кроме одной переменных найдём координатные линии, затем построим координатные поверхности (см. рис. 1).



Рис. 1: Координатные линии и координатные поверхности.

Т3.

Найдём метрический тензор g_{ij} для криволинейных координат (r, φ) , задающих положение точки на параболоиде $z = a(x^2 - y^2)$, при $a = \text{const}$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ ar^2 \cos(2\varphi) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \Rightarrow g_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 2ar \cos(2\varphi) \end{pmatrix}; \quad g_\varphi = \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ -2ar^2 \sin(2\varphi) \end{pmatrix}$$

Тогда метрический тензор:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j); \\ g_{11} &= 4a^2 r^2 \cos^2(2\varphi) + \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi); \\ g_{12} &= g_{21} = -2a^2 r^3 \sin(4\varphi); \\ g_{22} &= 4a^2 r^4 \sin^2(2\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi) + r^2 \cos^2(\varphi). \end{aligned}$$

Объединяя,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 16a^2 r^2 \sin^4(\varphi) - 16a^2 r^2 \sin^2(\varphi) + 4a^2 r^2 + 1 & -2a^2 r^3 \sin(4\varphi) \\ -2a^2 r^3 \sin(4\varphi) & -16a^2 r^4 \sin^4(\varphi) + 16a^2 r^4 \sin^2(\varphi) + r^2 \end{pmatrix}.$$

Или,

$$g^{ij} = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-16a^2 r^2 \sin^4(\varphi) + 16a^2 r^2 \sin^2(\varphi) + 1}{4a^2 r^2 + 1} & \frac{2a^2 r \sin(4\varphi)}{4a^2 r^2 + 1} \\ \frac{2a^2 r \sin(4\varphi)}{4a^2 r^2 + 1} & \frac{16a^2 r^2 \sin^4(\varphi) - 16a^2 r^2 \sin^2(\varphi) + 4a^2 r^2 + 1}{4a^2 r^4 + r^2} \end{pmatrix}.$$

Соответственно,

$$\mathbf{g}^r = g^{rr} \mathbf{g}_r + g^{r\varphi} \mathbf{g}_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{(8a^2 r^2 \sin^2(\varphi) + 1) \cos(\varphi)}{4a^2 r^2 + 1} \\ \frac{(8a^2 r^2 \cos^2(\varphi) + 1) \sin(\varphi)}{4a^2 r^2 + 1} \\ \frac{2ar \cos(2\varphi)}{4a^2 r^2 + 1} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{g}^\varphi = g^{\varphi r} \mathbf{g}_r + g^{\varphi\varphi} \mathbf{g}_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{(-8a^2 r^2 \sin^2(\varphi) + 4a^2 r^2 - 1) \sin(\varphi)}{r(4a^2 r^2 + 1)} \\ \frac{(8a^2 r^2 \cos^2(\varphi) - 4a^2 r^2 + 1) \cos(\varphi)}{r(4a^2 r^2 + 1)} \\ -\frac{2a \sin(2\varphi)}{4a^2 r^2 + 1} \end{pmatrix}.$$

На всякий случай проверим в *SymPy*, что

$$\mathbf{g}_r \mathbf{g}^r = 1; \quad \mathbf{g}_\varphi \mathbf{g}^\varphi = 1; \quad \mathbf{g}_r \mathbf{g}^\varphi = 0; \quad g^{ij} g_{ji} = \delta_i^j.$$

Вот.

Т4.

Пусть $R = x^2 + y^2 + z^2$, найдём частную производную $\partial R / \partial x$ тогда

1. $R(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2. \quad \partial R / \partial x = 2x.$
2. $R(x, r, z) = r^2 + z^2. \quad \partial R / \partial x = 0.$
3. $R(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 - y^2)^2. \quad \partial R / \partial x = 2x + 4x(x^2 - y^2).$
4. $R(x, r) = r^2 + (x^2 - y^2)^2 = r^2 + (2x^2 - r^2)^2. \quad \partial R / \partial x = 16x^3 - 8xr^2.$
5. $R(x, z) = x^2 + (x^2 - z) + z^2 = 2x^2 - z + z^2. \quad \partial R / \partial x = 4x.$

Т5.

Для первого выражения, обозначим $(\mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{g}^j}{\partial q^k}) \stackrel{\text{def}}{=} \Xi_{ik}^j$.

$$\Gamma_{ijk} = \left(\mathbf{g}_i, \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial q^k} \right) = \left(\mathbf{g}_i, \frac{\partial (g_{jn} \mathbf{g}^n)}{\partial q^k} \right) = g_{jn} \underbrace{\left(\mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{g}^n}{\partial q^k} \right)}_{\Xi_{ik}^n} + \frac{\partial g_{jn}}{\partial q^k} \underbrace{(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^n)}_{\delta_i^n} = g_{jn} \Xi_{ik}^n + \underbrace{\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}}_{\partial g_{jn} / \partial q^k}.$$

Домножив обе части на g^{jm} , получим

$$\Xi_{ik}^n g_{nj} g^{jm} = \Xi_{ik}^n \delta_n^m = \Xi_{ik}^m = \boxed{\left(\mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{g}^m}{\partial q^k} \right) = -\Gamma_{jik} g^{jm}}$$

Для второго выражения рассмотрим значение квадрата произведения при фиксированных $i \neq j \neq k$:

$$\underbrace{(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k)^2}_{\det g_{mn}} \cdot \underbrace{(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}^k)^2}_{\det g^{nk}} = \det g_{mn} g^{np} = \det \delta_m^p = 1. \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k) \cdot (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}^k) = 3! = 6.$$

Важно заметить, что -1 не является возможным значением произведения таких смешанных произведений, т.к. левой тройке в первом сомножителе будет соответствовать тройка во втором сомножителе.

1.2 Кинематика точки

1.12*

Параметризуем движение точки некоторым $\varphi(t)$:

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -a\dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} = b\dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -a\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - a\ddot{\varphi} \sin \varphi = 0 \\ \ddot{y} = -b\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + b\ddot{\varphi} \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi = 0. \quad (1.1)$$

Решением этого уравнения является

$$\varphi(t) = \arccos(c_1 + c_2 t).$$

С учётом начальных условий получим $(x(0) = 0, \dot{x} = 0)$, что

$$\dot{\varphi} c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{v_0}{a}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \arccos(v_0 t / a).$$

Немного упростим выражения для $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = -\frac{v_0}{a \sin \varphi}, \quad \ddot{\varphi} = -\frac{\dot{\varphi}^2}{\operatorname{tg} \varphi},$$

теперь найдём $\ddot{y}(\sin \varphi)$:

$$\ddot{y} = -b\dot{\varphi} \sin \varphi + v\ddot{\varphi} \cos \varphi = -b\frac{v_0^2}{a^2 \sin^2 \varphi} \sin \varphi - b\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi \operatorname{tg} \varphi} = -\frac{b}{a^2} v_0^2 \left(\frac{1}{\sin \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^3 \varphi} \right) = -\frac{b}{a^2} v_0^2 \frac{1}{\sin^3 \varphi}.$$

Подставив $y = b \sin \varphi$, найдём

$$\ddot{y} \left(y = \frac{b}{2} \right) = -\frac{8b}{a^2} v_0^2.$$

1.19

Знаем, что в полярных координатах

$$\begin{cases} r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \\ r^2 \dot{\varphi} = c = \text{const} \end{cases} \quad \text{в полярных координатах} \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}. \quad (1.2)$$

Вспомним, что

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}).$$

Найдём \ddot{r} :

$$r + er \cos \varphi = p \xrightarrow{d/dt} \dot{r} + e\dot{r} \cos \varphi - er\dot{\varphi} \sin \varphi = 0 \xrightarrow{d/dt} \ddot{r}(1 + e \cos \varphi) - e\dot{r} \sin \varphi \left(\dot{\varphi} - \frac{c}{r^2} \right) - \frac{ec}{r} \frac{c}{r^2} \cos \varphi = 0$$

Выразим и подставим $\dot{\varphi}$ и получим

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}, \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = \frac{c^2}{r^2 p} \left(\frac{p}{r} - 1 \right), \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_r = -\frac{c^2}{pr^2}, \quad w_\varphi = 0.}$$

1.37(в)

Найдём скорость точки и проекции её ускорения на касательные к координатным линиям для координат параболического цилиндра σ, τ, z . Для начала найдём координатные векторы и метрический тензор:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \tau \\ \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2) \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{g}_\sigma = \begin{pmatrix} \tau \\ -\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{g}_\tau = \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{g}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} \tau^2 + \sigma^2 & 0 \\ 0 & \tau^2 + \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$v^2 = \dot{\sigma}^2(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{\tau}^2(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{z}^2, \quad v = \sqrt{(\dot{\tau}^2 + \dot{\sigma}^2)(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{z}^2}$$

Для i -ой ковариантной координаты ускорения верно, что

$$w_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i}. \quad (1.3)$$

С учётом коэффициенты Ламе ($H_\tau = H_\sigma = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$, $H_z = 1$), найдём проекции

$$\begin{aligned} w_\tau &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} (\ddot{\tau}(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{\tau}^2 \tau + 2\dot{\sigma}\dot{\tau}\sigma - \tau\dot{\sigma}^2); \\ w_\sigma &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} (\ddot{\sigma}(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{\sigma}^2 \sigma + 2\dot{\tau}\dot{\sigma}\tau - \sigma\dot{\tau}^2); \\ w_z &= \ddot{z}. \end{aligned}$$

1.45

Выразим орты сопровождающий трехгранника $(\tau, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ через \mathbf{v} и \mathbf{w} , с учётом $\mathbf{w} \times \mathbf{v} \neq 0$, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} > 0$. Так как $\mathbf{v} \nparallel \mathbf{w}$, то

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|}.$$

Выразим τ .

$$\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = v\tau, \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\mathbf{v}}{v}.$$

И найдём $\mathbf{n} = [\mathbf{b} \times \tau]$, раскрывая двойное векторное произведение (формула Лагранжа), получим

$$\mathbf{n} = \left[\frac{\mathbf{v}}{v} \times \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|} \right] = \frac{(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} - v^2 \mathbf{w}}{v|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|}.$$

Т6.

Рассмотрим движение точки в цилиндрических координатах:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \text{diag}(1, r^2, 1)$$

Для начала выразим ковариантные координаты ускорений:

$$w_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i} \Rightarrow \begin{cases} w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ w_\varphi = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) \\ w_z = \ddot{z}. \end{cases}$$

По условию хотим, чтобы $w_\varphi = w_z = 0$, $r = \text{const}$. Проинтегрировав дважды по времени получим систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi = c_1 t + c_2; \\ z = c_3 t + c_4, \end{cases}$$

Где c_1, c_2, c_3, c_4 — некоторые константы. Построим полученные траектории положив $c_2 = c_4 = 0$ и отмасштабировав к $c_1 = 1$ (см. рис. (2)).



Рис. 2: Возможные геодезические цилиндра.

Т7.

Найдём $\partial v_k / \partial v_j$, при $v_k = v_k(q^i, v^i)$. Далее будем пользоваться тем, что $g_{ig} = g_{ig}(q^i)$.

$$v_k(q^i, v^i) = g_{ki} v^i \Rightarrow \frac{\partial v_k}{\partial v^j} = g_{ki} \frac{\partial v^i}{\partial v^j} = g_{ki} \delta_j^i = g_{kj}.$$

Теперь найдём $\partial v_k / \partial q^j$, при $v_k = v_k(q^i, v^i)$.

$$\frac{\partial v_k(q^i, v^i)}{\partial q^j} = v^i \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} \right) = v^i \left(\left(\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial q^j}, \mathbf{g}_i \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial q^j}, \mathbf{g}_k \right) \right) = v^i (\Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji}).$$

Теперь найдём $\partial v_k / \partial q^j$, при $v_k = v_k(q^i, v_i)$. Но тут так как функция выражается через саму себя, то при частном дифференцировании, $v_k = \text{const}$, тогда $\partial v_k(q^i, v_i) / \partial q^j = 0$.

Т8.*

Найдём $v_i \dot{v}^i - v^i \dot{v}_i$. Перейдём к контравариантным координатам:

$$v_i \dot{v}^i - v^i \dot{v}_i = g_{ij} v^i v^j - v^i \frac{d}{dt} (g_{ij} v^j) = g_{ij} v^j \dot{v}^i - v^i v^j \dot{g}_{ij} - g_{ij} v^i \dot{v}^j$$

В силу симметричности метрического тензора $g_{ij} = g_{ji}$, получим, что

$$v_i \dot{v}^i - v^i \dot{v}_i = -v^i v^j \dot{g}_{ij}.$$

Подставил для параболических и полярных координат, сходится.

1.3 Кинематика твёрдого тела

3.24

Запишем \mathbf{v}_B , выбрав в качестве полюса точку A и точку C .

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB} + \mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \overrightarrow{CB}, \quad (1.4)$$

или, расписав по координатам,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}} + \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{BC} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3r \cos \alpha \\ -3r \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix},$$

получим два содержательных уравнения

$$\left. \begin{aligned} -r\omega \sin \alpha + v &= v_C + 3r\omega_{BC} \sin \alpha \\ -r\omega \cos \alpha + 0 &= 0 + 3r\omega_{BC} \cos \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\omega_{BC} = -\frac{\omega}{3}, \quad v_C = v.}$$



Рис. 3: К задаче 3.24.

Для поиска \mathbf{w}_C , запишем условия жёсткости стержней BC и CD . Дифференцируя по времени, получим

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_B \cdot \overrightarrow{BC} &= \mathbf{v}_C \cdot \overrightarrow{BC}; \\ \mathbf{v}_C \cdot \overrightarrow{DC} &= 0. \end{aligned} \right\} \xrightarrow{d/dt} \left\{ \begin{aligned} \mathbf{w}_B \cdot \overrightarrow{BC} + \mathbf{v}_B \cdot \dot{\overrightarrow{BC}} &= \mathbf{w}_C \cdot \overrightarrow{BC} + \mathbf{v}_C \cdot \dot{\overrightarrow{BC}}; \\ \mathbf{w}_C \cdot \overrightarrow{DC} + \mathbf{v}_C \cdot \dot{\overrightarrow{DC}} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (1.5)$$

Выразим \mathbf{w}_B из уравнения Ривальса:

$$\mathbf{w}_B = \underbrace{\mathbf{w}_A}_0 + \underbrace{\dot{\omega}_{AB} \times \overrightarrow{AB}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \alpha \\ -r \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\omega^2 \cos \alpha \\ -r\omega^2 \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В первом уравнении (1.5), зная $\dot{\overrightarrow{BC}} = \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \overrightarrow{BC} = (\omega r \sin \alpha, \omega r \cos \alpha, 0)^T$ и \mathbf{v}_B из (1.4), получим

$$\mathbf{w}_C \cdot \overrightarrow{BC} = -4\omega^2 r^2. \quad (1.6)$$

Во втором уравнении (1.5), зная $\dot{\overrightarrow{DC}} = \boldsymbol{\omega}_{DC} \times \overrightarrow{DC} = \mathbf{v}_C$, получим

$$\mathbf{w}_C \cdot \overrightarrow{DC} = -v^2. \quad (1.7)$$

Из (4.22), мы знаем $(\mathbf{w}_C)_y$, расписав в (1.6) проекцию на BC по координатам, получим

$$\left. \begin{aligned} -4\omega^2 r^2 &= 3r(-w_{Cx} \cos \alpha + w_{Cy} \sin \alpha); \\ w_{Cy} &= -v^2/2r. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{w}_C = \begin{pmatrix} w_{Cx} \\ w_{Cy} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } w_{Cx} = \frac{8\sqrt{3}}{9}\omega^2 r - \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{v^2}{r}, \quad w_{Cy} = -\frac{v^2}{2r}.$$

Собственно¹, $\|\mathbf{w}_C\|^2 = \frac{64}{27}\omega^4 r^2 - \frac{8}{9}\omega^2 v^2 + \frac{1}{3}v^4/r^2$.

4.4

Запишем в координатах ω_1 и ω_2 .

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \sin \theta \\ \omega_1 \cos \theta \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{pmatrix}.$$

¹Вычисления доступны здесь.

Так как оси ω_1 и ω_2 пересекаются, угловая скорость и угловое ускорение можно найти, как

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \sin \theta \\ \omega_2 + \omega_1 \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{pmatrix} \omega_1 \omega_2 \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что очень похоже на правду.



Рисунки к задачам 4.4 и 4.10.

4.10

Запишем \mathbf{v}_c , как результат движения стержня и диска. Пусть Ω – угловая скорость вращения диска, $\parallel OB$.

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OC}.$$

Другими словами, в координатной записи,

$$\begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{r}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{r}{2} \Rightarrow \boxed{\Omega = -\sqrt{3}\omega}.$$

Угловое ускорение стержня найдём, как движение в СО стержня,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^a = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\varepsilon \\ -\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3}\omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\varepsilon \\ 0 \\ \sqrt{3}\omega^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\varepsilon}^a = \sqrt{3}(\boldsymbol{\varepsilon}^2 + \omega^4)},$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon}^r = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\omega \\ -\omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\varepsilon \\ -\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь, из сложения ускорений,

$$\mathbf{w}^a = \underbrace{\mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}_{\mathbf{w}^e} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^r}_{\mathbf{w}^c} + \mathbf{w}^r,$$

найдем \mathbf{w}_B^a :

$$\mathbf{w}_B^a = \mathbf{0} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{OB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OB}) + 2\boldsymbol{\omega} \times (-\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OB}) + \mathbf{w}_B^r.$$

Теперь найдём \mathbf{w}_B^r , как

$$\mathbf{w}_B^r = \mathbf{w}_\tau^r + \mathbf{w}_n^r = -\varepsilon r \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \omega^2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -r \\ r\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя, дойдём до

$$\boxed{\mathbf{w}_B^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3}\omega^2 r \\ 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow \|\mathbf{w}_B^a\| = 2\sqrt{3}\omega^2 r,$$

что, достаточно, логично.

Аналогично найдём \mathbf{w}_A^a :

$$\mathbf{w}_A^a = \mathbf{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} r - \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} r + 2\omega^2 r \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} - \varepsilon r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \Rightarrow \boxed{\mathbf{w}_A^a = r \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3}\omega^2 \\ -3\varepsilon \end{pmatrix}}.$$

И найдём норму ускорения точки A

$$\|\mathbf{w}_A^a\| = \sqrt{21\omega^4 r^2 + 9\varepsilon^2 r^2}.$$

4.12

Рассмотрим движение интересных нам точек, как движение в СО обруча, с

$$\mathbf{v}^e = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\omega}^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v/R \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}^e = \mathbf{0}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{0}.$$

Найдём радиус векторы до интересных нам точек:

$$\vec{O1} = \begin{pmatrix} -r \sin \alpha \\ r \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{O2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}; \quad \vec{O3} = \begin{pmatrix} r \sin \alpha \\ -r \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{O4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}.$$

Тогда, из теоремы о сложении скоростей, получим значения для \mathbf{v}_i^a :

$$\mathbf{v}_i^a = \underbrace{\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}^e \times \vec{O}_i}_{\mathbf{v}_i^e} + \underbrace{\boldsymbol{\omega}^r \times \vec{O}_i}_{\mathbf{v}_i^r}.$$

Подставляя значения, получим, что

$$\mathbf{v}_1^a = \begin{pmatrix} v(R + r \cos \alpha)/R \\ rv \sin \alpha / R \\ \omega r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2^a = \begin{pmatrix} \omega r \sin \alpha + v \\ -\omega r \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3^a = \begin{pmatrix} v(R - r \cos \alpha)/R \\ -rv \sin \alpha / R \\ -\omega r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4^a = \begin{pmatrix} -\omega r \sin \alpha + v \\ \omega r \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Или, переходя к значениям $\|\mathbf{v}_i^a\|$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_1^a\| &= (R^2 \omega^2 r^2 + R^2 v^2 + 2Rrv^2 \cos(\alpha) + r^2 v^2) / R^2, & \|\mathbf{v}_2^a\| &= \omega^2 r^2 + 2\omega r v \sin(\alpha) + v^2, \\ \|\mathbf{v}_3^a\| &= (R^2 \omega^2 r^2 + R^2 v^2 - 2Rrv^2 \cos(\alpha) + r^2 v^2) / R^2, & \|\mathbf{v}_4^a\| &= \omega^2 r^2 - 2\omega r v \sin(\alpha) + v^2. \end{aligned}$$

Что соответствует ответам учебника.

Теперь, из теоремы о сложении скоростей, найдём \mathbf{w}_i^a

$$\mathbf{w}_i^a = \underbrace{0 + 0 + \boldsymbol{\omega}^e \times \boldsymbol{\omega}^e \times \vec{O}_i}_{\mathbf{w}^e} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega}^e \times (\boldsymbol{\omega}^r \times \vec{O}_i)}_{\mathbf{w}^e} + \underbrace{-\omega^2 \cdot \vec{O}_i}_{\mathbf{w}_i^r}.$$

Подставляя значения, получим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1^a &= \frac{r(R^2 \omega^2 + v^2)}{R^2} \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{w}_2^a &= -\omega r \begin{pmatrix} 2v \cos \alpha / R \\ 2v \sin \alpha / R \\ \omega \end{pmatrix}, \\ \mathbf{w}_3^a &= \frac{r(R^2 \omega^2 + v^2)}{R^2} \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{w}_4^a &= \omega r \begin{pmatrix} 2v \cos \alpha / R \\ 2v \sin \alpha / R \\ \omega \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Или, переходя к нормам, получим, что

$$\|\mathbf{w}_1^a\| = \frac{r^2 (R^2 \omega^2 + v^2)^2}{R^4}, \quad \|\mathbf{w}_2^a\| = \frac{\omega^2 r^2 (R^2 \omega^2 + 4v^2)}{R^2}, \quad \|\mathbf{w}_3^a\| = \frac{r^2 (R^2 \omega^2 + v^2)^2}{R^4}, \quad \|\mathbf{w}_4^a\| = \frac{\omega^2 r^2 (R^2 \omega^2 + 4v^2)}{R^2}.$$

4.32

Нам известно $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$, из задачи 1.45 знаем, как выразить направляющие трёхгранника Френе $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}$, через $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$, соответственно считаем известными ρ, κ . В выводе теоремы сложения ускорений использовалось, что

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega}^e \times \mathbf{e}_i. \quad (1.8)$$

Также мы знаем, что

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nu}, \quad \frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\tau} + \kappa \boldsymbol{\beta}, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\kappa \boldsymbol{\nu}. \quad (1.9)$$



Тогда, из покоординатной записи, в $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta})$, получим систему уравнений, решая которую получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} v \\ \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} v \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nu} v &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\tau} \\ -v \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\nu} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \omega_{\tau} &= v \boldsymbol{\kappa} \\ \omega_{\nu} &= 0 \\ \omega_{\beta} &= v/\rho \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\omega} = (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\beta}/\rho)}.$$

4.37

Пусть $\boldsymbol{\omega}^r$ – угловая скорость тела в СО Земли, посмотрим на угловое ускорение твёрдого тела относительно СО, в данный момент времени совпадающей с направлениями: $\mathbf{e}_i \parallel \boldsymbol{\omega}_i$, с полюсом в неподвижной точке тела.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^a = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \dot{\omega}_1 \frac{\boldsymbol{\omega}_1}{\omega_1} + \dot{\omega}_2 \frac{\boldsymbol{\omega}_2}{\omega_2} + \dot{\omega}_3 \frac{\boldsymbol{\omega}_3}{\omega_3} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \dot{\omega}_1 \frac{\boldsymbol{\omega}_1}{\omega_1} + \dot{\omega}_2 \frac{\boldsymbol{\omega}_2}{\omega_2} + \dot{\omega}_3 \frac{\boldsymbol{\omega}_3}{\omega_3},$$

так как оси жёстко связаны с самим телом.

4.50

Знаем, что скорость некоторой точки твёрдого тела можем записать, как

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}_0 + \begin{pmatrix} \omega_y r_z - \omega_z r_y \\ \omega_z r_x - \omega_x r_z \\ \omega_x r_y - \omega_y r_x \end{pmatrix}.$$

Тогда, прямой подстановкой, получим, что

$$\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{v}_0 + \text{rot} \begin{pmatrix} \omega_y r_z - \omega_z r_y \\ \omega_z r_x - \omega_x r_z \\ \omega_x r_y - \omega_y r_x \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}.$$

1.4 Сложное движение точки и твёрдого тела

2.15

Для началача найдём, что

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \mathbf{r}_p^r = \mathbf{a} \cdot (1 + \sin \omega_0 t) \\ \mathbf{v}_p^r &= \mathbf{a} \cdot \omega_0 \cos \omega_0 t \\ \mathbf{w}_p^r &= -\mathbf{a} \cdot \omega_0^2 \sin \omega_0 t \end{aligned} \right\} \text{ в СО стержня, где } \mathbf{a} = a \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем абсолютную скорость \mathbf{v}_p^a точки P ,

$$\mathbf{v}_p^a = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p^r + \mathbf{v}_p^r = a\omega(1 + \sin \omega_0 t) \begin{pmatrix} -\cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} + a\omega_0 \cos \omega_0 t \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда норма $\|\mathbf{v}_p^a\|$ такая, что

$$\|\mathbf{v}_p^a\|^2 = a^2 (\omega^2(1 + \sin \omega_0 t) + \omega_0^2 \cos \omega_0 t).$$

Запишем абсолютное ускорение \mathbf{w}_p^a точки P ,

$$\mathbf{w}_p^a = -\omega^2 \mathbf{r}_p^r + 0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p^r + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_p^r + \mathbf{w}_p^r = (a(\omega^2 + \omega_0^2) \sin \omega_0 t + \omega^2) \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ -\cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} + 2a\omega\omega_0 \cos \omega_0 t \begin{pmatrix} -\cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда норма $\|\mathbf{w}_p^a\|^2$ такая, что

$$\|\mathbf{w}_p^a\|^2 = (a(\omega^2 + \omega_0^2) \sin \omega_0 t + \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2\omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t.$$



Рис. 4: Рисунки к задачам 2.15, 2.19 и 2.35.

2.19

Для начала найдём и выразим все интересные нам векторы:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 \sin \omega_0 t \\ \dot{\varphi} &= \varphi_0 \omega_0 \cos \omega_0 t \\ \ddot{\varphi} &= -\varphi_0 \omega_0^2 \sin \omega_0 t \end{aligned} \right\}, \mathbf{w}_0 = - \begin{pmatrix} \omega^2 r \sin \varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\omega}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BA} = r \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 0 \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}, \boldsymbol{\epsilon}^r = \begin{pmatrix} 0 \\ -\ddot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{\omega}_m$ – угловая скорость \overrightarrow{AB} относительно конструкции.

Во-первых, скорость \mathbf{v}_A^a такая, что

$$\mathbf{v}_A^a = \mathbf{v}^e + \mathbf{v}^r = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OA} + \boldsymbol{\omega}_m \times \overrightarrow{BA} = r \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \omega \sin \varphi \\ \dot{\varphi} \sin \varphi \end{pmatrix}$$

а норма $\|\mathbf{v}_A^a\|$ в точке $t = t_0 = \pi/2\omega_0$ такая, что

$$\|\mathbf{v}_A^a\|^2 = r^2 (\dot{\varphi} + \omega^2 \sin^2 \varphi) \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{v}_A^a\|^2 \Big|_{t=t_0} = r^2 \omega^2 \sin^2 \varphi_0.$$

Во-вторых, ускорение \mathbf{w}_A^a такое, что

$$\mathbf{w}_A^a = \mathbf{w}_0 + 0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{BA} + 2\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega}_m \times \overrightarrow{BA}) + \mathbf{w}^r.$$

Подставляя значения для $t = t_0$, получим, что

$$\mathbf{w}_A^a = -r \begin{pmatrix} \omega^2 \sin \varphi_0 + \varphi_0 \omega_0^2 \cos \varphi_0 \\ 0 \\ \varphi_0 \omega_0^2 \sin \varphi_0 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, норма ускорения точки A

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_A^a\|^2 &= r^2 (\omega^4 \sin^2 \varphi_0 + \omega^2 \omega_0^2 \varphi_0 \sin^2 \varphi_0 + \varphi_0^2 \omega_0^4 \cos^2 \varphi_0 + \varphi_0^2 \omega_0^4 \sin^2 \varphi_0) = \\ &= r^2 (\omega^4 \sin^2 \varphi_0 + \omega^2 \omega_0^2 \varphi_0 \sin^2 \varphi_0 + \varphi_0^2 \omega_0^4). \end{aligned}$$

2.35

Снова предварительно запишем необходимые нам величины,

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{O_1 A} &= \mathbf{r}_A^r = a \sin \omega t, \\ \mathbf{v}_A^r &= a \omega \cos \omega t, \\ \mathbf{w}_A^r &= -a \omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \right\}, \quad \mathbf{a} = a \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi = -\frac{\mathbf{w}_0 t^2}{2R}, \quad \mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\Omega} R = \mathbf{w}_0 t, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{w}_0/R \end{pmatrix}.$$

где $\varphi(t)$ и $\boldsymbol{\Omega}(t)$ мы знаем из условия $\mathbf{w}_0 = \text{const}$.

Скорость \mathbf{v}_A^a такая, что

$$\mathbf{v}_A^a = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_A^r + \mathbf{v}_A^r \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_x = \mathbf{w}_0 t (R + a \sin \varphi \sin \omega t) / R + a \omega \cos \varphi \cos \omega t \\ v_y = a \omega \sin \varphi \cos \omega t - \mathbf{w}_0 t a \cos \varphi \sin \omega t / R \\ v_z = 0 \end{cases}$$

а норма

$$\|\mathbf{v}_A^a\|^2 = \frac{\mathbf{w}_0^2 t^2}{R^2} a^2 \sin^2 \omega t + a^2 \omega^2 \cos^2 \omega t + \mathbf{w}_0^2 t^2 + 2 \frac{\mathbf{w}_0 t}{R} a (\mathbf{w}_0 t \sin \varphi \sin \omega t + R \omega \cos \varphi \cos \omega t).$$

или, преобразуя, получим, что

$$\|\mathbf{v}_A^a\|^2 = \left(\frac{w_0 t}{R} a \sin \omega t w_0 t \sin \varphi \right)^2 + \left(a \omega \cos \omega t + w_0 t \cos \varphi \right)^2.$$

Ускорение \mathbf{w}_A^a такое, что

$$\mathbf{w}_A^a = \mathbf{w}_0 + \varepsilon \times \mathbf{r}_A^r + \Omega \times \Omega \times \mathbf{r}_A^r + 2\Omega \times \mathbf{v}_A^r + \mathbf{w}_A^r.$$

Подставляя значения, получим

$$\mathbf{w}^c = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 2\omega a t w_0 \sin(\varphi) \cos(\omega t) \\ -2\omega a t w_0 \cos(\varphi) \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^e = \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} w_0 (R^2 + R a \sin(\varphi) \sin(\omega t) - a t^2 w_0 \sin(\omega t) \cos(\varphi)) \\ -a w_0 (R \cos(\varphi) + t^2 w_0 \sin(\varphi)) \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Суммируя, получим, что

$$\begin{cases} (\mathbf{w}_A^a)_x = \frac{1}{R^2} (R^2 (-\omega^2 a \sin(\omega t) \cos(\varphi) + w_0) + R a w_0 (2\omega t \cos(\omega t) + \sin(\omega t)) \sin(\varphi) - a t^2 w_0^2 \sin(\omega t) \cos(\varphi)) \\ (\mathbf{w}_A^a)_y = \frac{1}{R^2} (-a (R^2 \omega^2 \sin(\varphi) \sin(\omega t) + R w_0 (2\omega t \cos(\omega t) + \sin(\omega t)) \cos(\varphi) + t^2 w_0^2 \sin(\varphi) \sin(\omega t))) \\ (\mathbf{w}_A^a)_z = 0. \end{cases}$$

4.14 и 4.15*

Сделаем задачу чуть менее абстрактной. Представим кольцевую железную дорогу, плоскость которой нормальна к ω_1 . Наш агент №1 сидит в вагоне поезда и на столе, поверхность которого нормальна к ω_2 , запускает игрушечную кольцевую железную дорогу с игрушечным агентом №2 в вагоне поезда. Агент №2 запускает поезд на столе, поверхность которого нормальна к ω_3 ...

Найдём ε_{N^2} – угловое ускорение агента №2. По словам №1, угловое ускорение равно $\omega_{N^2} = \omega_2$, тогда

$$\varepsilon_{N^2} = \underbrace{\varepsilon_1}_{\varepsilon^e} + \frac{d}{dt} \omega_2 = 0 + \frac{\omega_2}{\omega_2} \dot{\omega}_2 + \omega_1 \times \omega_2.$$

А теперь найдём ε_3 . С точки зрения №2 $\omega_{N^3} = \omega_3$. Мы знаем, что $\omega_{N^2} = \omega_1 + \omega_2$, и знаем ε_{N^2} , тогда

$$\varepsilon_{N^3} = \varepsilon_2 + \frac{d}{dt} \omega_3 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_2} \dot{\omega}_2 + \omega_1 \times \omega_2 \right) + \frac{\omega_3}{\omega_3} \dot{\omega}_3 + (\omega_1 + \omega_2) \times \omega_3.$$

И так далее мы можем продолжать добавлять вектора ω_i к движению тела, в силу $\omega^a = \omega^e + \omega^r$, при чём мы получим слагаемые вида векторного произведения всех упорядоченных пар ω_j и ω_k , плюс сумма ε_i^r .

$$\varepsilon_{N^N} = \varepsilon_{N(N-1)} + \frac{\omega_N}{\omega_N} \dot{\omega}_N + \omega_{N(N-1)} \times \omega_N.$$

По индукции можем показать, что

$$\varepsilon = \varepsilon_{N^N} = \sum_{j=2}^n \frac{\omega_j}{\omega_j} \dot{\omega}_j + \sum_{k=2}^N \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \times \omega_k.$$

В частности, при $\dot{\omega}_j = 0$, получим выражение для задачи 4.14.



Т9.*

Рассмотрим движение выпуклого твёрдого тела по выпуклой поверхности. Они соприкасаются в точках A и C соответственно. Пусть есть некоторая неподвижная СО, относительно начала которой будем записывать радиус векторы. Пусть точка O – мгновенный центр скоростей, тогда скорость некоторой точки тела может быть найдена, как

$$\mathbf{v} = \omega \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_O),$$

где \mathbf{r} – радиус вектор этой точки.

Для точки A верно, что $\mathbf{v}_A = \omega \times (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_O) = 0$, дифференцируя равенство по времени, найдём, что

$$\mathbf{w}_A = \dot{\omega} \times \underbrace{(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_O)}_{=0} + \omega \times \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_O) = -\omega \times \dot{\mathbf{r}}_O,$$

где $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_O = 0$, т.к. тело движется без проскальзывания и в данный момент времени A соответствует мгновенному центру скоростей. Рассматривая движение относительно центра кривизны B, поймём, что $\mathbf{v}_C = \mathbf{v} = \mathbf{v}_O = \dot{\mathbf{r}}_O$, получается, $\mathbf{w}_A = -\omega \times \mathbf{v}$, Q.E.D.

2 Динамика I

2.5 Основные теоремы динамики

5.10

Парметризуем систему движением по оси $z \parallel \mathbf{g}$, тогда

$$m\dot{v} = \beta v^2 - mg \frac{R^2}{(R+z)^2}. \quad (2.1)$$

Что аналогично диф. уравнению

$$\ddot{z} = \frac{\beta}{m} \dot{z}^2 - g \frac{R^2}{(R+z)^2}. \quad (2.2)$$

Решим диф. уравнение заменой $\dot{z} = p(v) \equiv v$, тогда $\ddot{z} = p'p$. Пусть теперь $y = v^2$, $x'/2 = p'p$, тогда приходим к однородному диф. уравнению

$$\frac{1}{2}y' - \frac{\beta}{m}x = \frac{-gR^2}{(R+z)^2}. \quad (2.3)$$

Решая, получим, что

$$C(z) = -2g \int \left(1 + \frac{z}{R}\right)^{-2} \exp\left(-\frac{2\beta}{m}z\right) dz + C_0. \quad (2.4)$$

Из начальных условия находим C_0 , получая

$$v^2 = v_0^2 \exp\left(-\frac{2\beta}{m}(H-h)\right) - 2gR^2 \exp\left(\frac{2\beta}{m}h\right) \int_H^h (R+z)^{-2} \exp\left(-\frac{2\beta}{m}z\right) dz. \quad (2.5)$$

6.13

Из теоремы об изменении количества движения, ц.м. системы покоится. Т.к. на систему не действуют внешние силы с ненулевым относительно вертикальной оси моментом, то по теореме об изменении кин. момента, он сохраняется $K_0 = K_1$.

Далее всё запишем в проекции на вертикальную ось. В начальный момент времени

$$K_0 = I\omega_0 = \frac{3}{10}kmr^2\omega_0. \quad (2.6)$$

При достижении шариком пола

$$K_1 = I'\omega' + m(kl)^2\omega'. \quad (2.7)$$

По т. Штейнера

$$I'\omega' = I\omega' + kml^2 = \frac{3}{10}kmr^2\omega' + kml^2\omega'. \quad (2.8)$$

Собирая всё вместе получаем, что

$$3k(k+1)\omega_0 = (3k(k+1) + 10k)\omega' \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega' = \frac{3(k+1)}{3k+13}\omega_0} \quad (2.9)$$

6.25

Кинетический момент

$$\frac{d}{dt}\mathbf{K}_A = \mathbf{M}_A^e + \mathbf{Q} \times \mathbf{v}_A, \quad (2.10)$$

где A – мгновенный центр скоростей, $\mathbf{v}_A = 0$. Тогда, в проекции на вертикальную ось, получим, что

$$\frac{d}{dt}K_A = M_A^e = l \times F_{\text{тр}} \quad \Rightarrow \quad K_A|_z = \text{const}. \quad (2.11)$$

6.35

Для точек пластины $\mathbf{r}_{AC} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A$, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{Ai}$. Соответственно

$$\mathbf{K}_A = \sum_i \mathbf{r}_{Ai} \times m_i (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{Ai}) = \mathbf{v}_A \times \sum_i (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_i) m_i + \sum_i \mathbf{r}_{Ai} \times (m_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{Ai}). \quad (2.12)$$

Раскрывая по правилу Лагранжа, получим, что

$$\mathbf{K}_A = m \left(\overrightarrow{AC} \times \mathbf{v}_A \right) + I_A \boldsymbol{\omega}, \quad \text{Q.E.D.} \quad (2.13)$$

7.4

Во-первых запишем кинетическую энергию системы, как

$$T_{\text{сист}} = T_{\text{диска}} + T_{\text{стержня}}. \quad (2.14)$$

Начнем с простого,

$$T_{\text{ст}} = \frac{1}{2} \left(M \frac{l^2}{3} \omega^2 \right). \quad (2.15)$$

Точка K – мгновенный центр скоростей, то

$$\mathbf{v}_d = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{l} = \boldsymbol{\omega}_d \times \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \omega_d = \omega \frac{l}{r}. \quad (2.16)$$

Аналогично для обруча

$$\mathbf{v}_{об} = \boldsymbol{\omega}_{об} \times \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OB} \quad \Rightarrow \quad \omega_{об} = \omega \frac{R - \rho}{\rho}. \quad (2.17)$$

Теперь можем записать для диска

$$T_d = \frac{1}{2} I_d \omega_d^2 + \frac{m v_0^2}{2} = \frac{3}{4} m \omega^2 l^2. \quad (2.18)$$

И, наконец, для обруча,

$$T_{об} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 (R - \rho) + \frac{1}{2} \mu \rho^2 \omega^2 \frac{(R - \rho)^2}{\rho^2} = \mu (R - \rho)^2 \omega^2. \quad (2.19)$$

Собирая всё вместе, получим

$$T = \omega^2 \left(\mu (l + r - \rho)^2 + \frac{3}{4} m l^2 + \frac{1}{6} M l^2 \right) \quad (2.20)$$

7.12

Изначально, известно, что

$$\begin{cases} F_x = yz \sin \omega t \\ F_y = xz \sin \omega t \\ F_z = xy \sin \omega t \end{cases} \quad (2.21)$$

Проверим, что поле потенциально

$$\text{rot } \mathbf{F} = 0. \quad (2.22)$$

Да, действительно потенциально. Тогда выбрав в качестве 0 потенциальной энергии U нулевой момент времени, получим

$$U = \int_{x_0}^x F_x dx + \int_{y_0}^y F_y dy + \int_{z_0}^z F_z dz \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = xyz \sin \omega t} \quad (2.23)$$

9.11

Точка A подвеса математического маятника длины l совершает вертикальные колебания по закону

$$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} \sin(\omega t) = \mathbf{r}_A, \quad \mathbf{a} \omega \cos(\omega t) = \mathbf{v}_A, \quad -\mathbf{a} \omega^2 \sin(\omega t) = -\mathbf{w}^e.$$

Тогда по II закону Ньютона для неИСО

$$m \mathbf{w}^r = \mathbf{F} + m \mathbf{g} - m \mathbf{w}^e. \quad (2.24)$$

Пусть ось OX противоположна силе натяжения нити \mathbf{F} , OY в плоскости движения, тогда, введём $\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \mathbf{w}^e$ и получим

$$\begin{aligned} OX : \quad m w_x &= -F + m g' \cos \varphi = 0, \\ OY : \quad m w_y &= m g' \sin \varphi, \end{aligned}$$

Так приходим к уравнению вида

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{L} \left(g - a\omega^2 \sin(\omega t) \right) \sin(\varphi) = 0. \quad (2.25)$$

В частности, заметим, что $\varphi(t) \equiv 0$ и $\varphi(t) \equiv \pi$ являются частными решениями этого уравнения.

9.16

Невесомый стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси Oz , перпендикулярной плоскости рисунка. По диску катится диск радиуса r и массы m , в начальный момент точки O и A совпадали, а диск покоился.

Перейдём в СО стержня, тогда

$$m\mathbf{w}_d^r = m\mathbf{w}_d^a - m\mathbf{w}_d^c - m\mathbf{w}_d^e. \quad (2.26)$$

Так как движение происходит без проскальзывания, сила трения не совершает работу. С учётом II закона Ньютона в неИСО, и тем что сила Кориолиса не изменяет кинетическую энергию системы, получим, что внешний момент

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{R}_i \times (m_i \mathbf{g} - m_i \omega \times \omega \times \mathbf{r}_i), \quad \mathbf{r}_i = \overrightarrow{OA} + \mathbf{R}_i, \quad (2.27)$$

Тогда

$$\mathbf{M}_i = m_i \mathbf{R}_i \times \overrightarrow{OA} \omega^2 - m_i \mathbf{R}_i \times \omega \left(\omega \cdot \overrightarrow{OA} \right) + m_i \mathbf{R}_i \times \mathbf{g},$$

Суммируя, по теореме об изменении кинетического момента, получим, что

$$I \varepsilon_d = \sum \mathbf{M}_i = m\omega^2 \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{OA} + m \overrightarrow{AB} \times \mathbf{g}.$$

Пусть L – пройденное расстояние, в проекции на ось, сонаправленную с ω_d^r ,

$$\frac{d\omega_d^r}{dt} = \frac{2}{3} \frac{L}{R} \omega^2 + \frac{2}{3} \frac{g}{R} \cos \varphi,$$

интегрируя, с учётом начальных условий,

$$(\omega_d^r)^2(L) = \frac{2}{3} \frac{L^2}{R^2} \omega^2 + \frac{4}{3} \frac{L}{R^2} g \cos \varphi. \quad (2.28)$$

Запишем теперь Кориолисову силу, как

$$\mathbf{F}_i^c = -2\omega \times (\omega \times \mathbf{r}_i) m_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}^c = -2\omega \times \left(\omega_d^r \times \overrightarrow{AB} \right) m.$$

Догда записав II закон Ньютона на ось, сонаправленную с \mathbf{N} , получим

$$0 = N - mg \sin \varphi - Rm\omega^2 + 2m\omega\omega_d^r R \quad \Rightarrow \quad N = mg \sin \varphi + Rm\omega^2 - 2m\omega \sqrt{\frac{2}{3}\omega^2 L^2 + \frac{4}{3}gL \cos \varphi} \quad (2.29)$$

Аналогично записав уравнение в проекции на ось, сонаправленную с $\mathbf{F}_{\text{тр}}$, найдём

$$m\omega = m\varepsilon R = F_{\text{тр}} + Lm\omega^2 + mg \cos \varphi, \quad \Rightarrow \quad F_{\text{тр}} = \frac{m}{3} \left(L\omega^2 + g \cos \varphi \right). \quad (2.30)$$

9.27

Посмотрим на систему с точки зрения вращающейся с угловой скоростью ω_0 плоскости, тогда по теореме об изменении количества движения в неИСО

$$m\mathbf{w}^r = \mathbf{R} - m\mathbf{w}^e - m\mathbf{w}^c. \quad (2.31)$$

Выберем в качестве полюса тела центр масс A , тело вращается относительно него с ω , тогда

$$-\frac{1}{2}\mathbf{F}^C = \sum_i m_i \left(\omega_0 \times (\mathbf{v}_A + \omega \times \overrightarrow{Ci}) \right) = m\omega_0 \times \mathbf{v}_A + \omega_0 \times \left(\omega \times \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) \right) = m\omega_0 \times \mathbf{v}_A.$$

Аналогично для переносной

$$-\mathbf{F}^e = \sum_i m_i \omega \times \mathbf{v}_i^r = \sum_i m_i \omega \times \omega \times \mathbf{r}_i = \omega \times \omega \times \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) = m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}_A).$$

Таким образом переносные и кориолисовы силы приводятся к равнодействующим, проходящим через центр масс фигуры.

9.32

Шарик движется так, что скорость всех его точек параллельны плоскости, которая вращается с угловой скоростью $\omega(t)$ вокруг неподвижной оси, лежащей в этой плоскости.

В плоскости введем координаты так, что

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_y(t) \operatorname{tg} \omega t \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}.$$

По условию

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{n}) = 0, \quad \Rightarrow \quad v_x \cos \omega t = v_y \sin \omega t,$$

где \mathbf{n} – нормаль к плоскости, равная, например $(-\cos \omega t, \sin \omega t, 0)^T$. Зная, что

$$\mathbf{w}^r = \mathbf{w}^a - \mathbf{w}^e - \mathbf{w}^c, \quad \mathbf{v}^r = \mathbf{v}^a - \mathbf{v}^c = \mathbf{v}^a - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2.32)$$

Тогда

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{w}^a - 2\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}^a - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}. \quad (2.33)$$

2.6 Движение точки в центральном поле сил

8.36

Для начала выразим a и b через h и H :

$$r_1 + r_2 = H + h \quad \Rightarrow \quad b = \frac{H + h}{2}, \quad a = \sqrt{Hh}. \quad (2.34)$$

Запишем теперь уравнение Бине

$$u'' + u = \frac{F}{mc^2 u^2} = \frac{\alpha}{mc^2}, \quad (2.35)$$

т.к. $F(u) = \alpha u^2$. Тогда

$$u'' = (u - \frac{\alpha}{mc^2}) \quad \Rightarrow \quad u - \frac{\alpha}{mc^2} = A \cos \varphi + B \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{\frac{\alpha}{mc^2} - A \cos \varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p}{1 - e \cos \varphi}. \quad (2.36)$$

Из граничных условия находим, что

$$\left\{ r(\varphi = 0) = H = \frac{p}{1 - e}, r(\varphi = \pi) = h = \frac{p}{1 + e} \right\} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{H - h}{H + h}; \quad p = \frac{2Hh}{H + h}. \quad (2.37)$$

8.48

Рассмотрим движение в поле с силой

$$F = -\frac{\alpha}{m^2} \psi(\varphi) - \frac{\beta}{r^3}. \quad (2.38)$$

Запишем уравнение Бине:

$$u'' + u = \frac{F(u)}{mc^2 u^2} = \frac{-\alpha u^2 \psi - \beta u^3}{mc^2 u^2} \quad \Rightarrow \quad u'' + \underbrace{\left(1 + \frac{\beta}{mc^2}\right)}_{\omega^2} u = \underbrace{-\frac{\alpha}{mc^2}}_{-B} \psi(\varphi). \quad (2.39)$$

Методом вариации постоянных, получим

$$u(\varphi) = C_1(\varphi) \cos(\omega \varphi) + C_2(\varphi) \sin(\omega \varphi). \quad (2.40)$$

Тогда

$$u' = C_1' \cos \omega \varphi - \omega C_1 \sin \omega \varphi + C_2 \sin \omega \varphi + \omega C_2 \cos \omega \varphi. \quad (2.41)$$

В силу предоставленной нам свободы, потребуем для простоты и адекватности выкладок

$$C_1 \cos \omega \varphi + C_2 \sin \omega \varphi \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad u' = -\omega C_1 \sin \omega \varphi + \omega C_2 \cos \omega \varphi. \quad (2.42)$$

Найдём из нашего условия и условия диф. уравнения C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} C_1' = -\frac{1}{\omega} \psi(\varphi) \sin \omega t \\ C_2' = \frac{1}{\omega} \psi(\varphi) \cos \omega t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{\omega} \int_0^\varphi \psi(\varphi) \sin \omega \tau d\tau + \tilde{C}_1 \\ C_2 = \frac{1}{\omega} \int_0^\varphi \psi(\varphi) \cos \omega \tau d\tau + \tilde{C}_2 \end{cases} \quad (2.43)$$

Из формулы синуса суммы, получим

$$u(\varphi) = C_1 \sin \omega \varphi + C_2 \cos \omega \varphi + \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(\varphi - \tau) \psi(\varphi) d\tau, \quad (2.44)$$

где $\omega(\varphi) = \sqrt{1 + \beta/mc^2}$.

8.21

В приближении $m \ll M$, запишем, что

$$\mathbf{F}(r) = \frac{kQq}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = \varepsilon u^2 \frac{\mathbf{r}}{r},$$

В силу того, что $\dot{\varphi} = cu^2$, то из момента, когда $\dot{\varphi} = v_0/r$, найдём $c = v_0 d$. Уравнение Бине примет вид

$$u'' + u = \frac{kQq}{mv_0^2 d^2} \stackrel{\text{def}}{=} \varkappa. \quad (2.45)$$

Решением будет

$$u = u_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \varkappa. \quad (2.46)$$

При $\varphi \rightarrow 0$, получим, что

$$u_0 \cos \varphi_0 = -\varkappa.$$

Дифференцируя же по времени, получим

$$\dot{u} = -u_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = u_0 v_0 d \sin(\varphi - \varphi_0),$$

Таким образом

$$\begin{cases} u_0 = 1/d \sin \varphi_0 \\ u_0 = -\varkappa / \cos \varphi_0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{1}{\varkappa d}.$$

Теперь при $u \rightarrow 0$, получим

$$\theta' - \varphi_0 = \arccos\left(\frac{-\varkappa}{u_0}\right) = \varphi_0, \quad \Rightarrow \quad \theta = \pi - \theta' = \pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varkappa d} = 2 \operatorname{arctg}(\varkappa d),$$

Таким образом приходим к выражению

$$\theta = 2 \operatorname{arctg}(\varkappa d). \quad (2.47)$$

Т10*.

В ОТО движение в центральном поле тяжести описывается как движение в метрике Шварцшильда:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) d\tau^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 - (r \sin \theta)^2 d\varphi^2 - r^2 d\theta^2.$$

Здесь 4 независимых переменных $(\tau, r, \varphi, \theta)$, где три из сферических координат, а τ – физическое время, также введен радиус Шварцшильда $a = 2GM$.

Движение точек рассматриваем, как движение по геодезическим, то есть $\mathbf{w}_i = 0$, где $i \in \{\tau, r, \varphi, \theta\}$. Движение будет в некотором смысле происходить в одной плоскости, так что пусть $\theta(t) = \pi/2$. Так мы получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{\tau}^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 \\ \mathbf{w}_\tau = \frac{d}{dt} \frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{\tau}} - \underbrace{\frac{\partial(v^2/2)}{\partial \tau}}_0 = \frac{d}{dt} \left[\left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{\tau} \right] = 0 \\ \mathbf{w}_\varphi = -\frac{d}{dt} [r^2 \dot{\varphi}] = 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

Таким образом получим пару первых интегралов системы, в частности

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{\tau} &= \mathcal{D}, \\ r^2 \dot{\varphi} &= \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Подставляя их в выражение для скорости, получим, что

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \mathcal{D}^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{\mathcal{C}^2}{r^2} = v^2.$$

По замене Бине

$$r = \frac{1}{u}, \quad \dot{r} = r' \dot{\varphi} = \left(\frac{1}{u} \right)' c u^2 = -u' c,$$

перейдём к функции $u(\varphi)$:

$$2c^2 u'' + c^2(2u - 3au^2) = v^2. \quad (2.49)$$

Преобразуя, получим

$$\boxed{u'' + u = \frac{a}{2c^2} v^2 + \frac{3}{2} a u^2}. \quad (2.50)$$

Найдём теперь видимый радиус черной дыры – минимальное значение прицельного параметра, при котором луч, проходящий через окрестность черной дыры не падает на центр. Для светового луча верно, что $\dot{s}^2 = v^2 = 0$, тогда

$$u'' + u = \frac{3}{2} a u^2.$$

Интегрируя, получим

$$\frac{u'^2}{2} + \frac{u^2}{2} = \frac{a u^3}{2} + c'.$$

Посмотрим теперь на поведение света при $u \rightarrow 0$ верно, что $r\varphi \rightarrow b$, тогда

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{r}{\varphi} \Rightarrow \frac{du}{d\varphi} = -\frac{dr}{d\varphi} \frac{1}{r^2} = \frac{r}{\varphi} \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r\varphi} \Rightarrow u'|_{t=0} = \frac{1}{b} \Rightarrow c' = \frac{1}{2b^2}$$

Перепишав, получим

$$u'^2 = a u^3 - u^2 + \frac{1}{b^2}.$$

Вблизи точки с критическим u верно, что $\dot{r} \sim 0$, тогда нас интересует экстремум функции $a u^3 - u^2 + b^{-2}$, тогда

$$3a u^2 - 2u = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_{\min}} = \left(\frac{3}{2} a \right)^{-1}.$$

Условие падения – уменьшение радиуса (увеличение u) при $r = r_{\min}$:

$$u'^2_{\min} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{8}{27} - \frac{4}{9} \right) + \frac{1}{b^2} = -\frac{4}{27a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 0 \Rightarrow b^2 \leq \frac{27}{4} a^2$$

Тогда минимальное значение прицельного параметра, при котором луч, проходящий через окрестность черной дыры не падает на центр

$$\boxed{b_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a}, \quad (2.51)$$

что и является видимым радиусом черной дыры.

2.7 Элементы механики сплошных сред (МСС)

T11.

Движение среды происходит по закону ($\tau = \text{const} > 0$),

$$\mathbf{r} = (x \ y \ z)^T, \quad x = \xi_1 \left(1 + \frac{t}{\tau} \right), \quad y = \xi_2 \left(1 + 2\frac{t}{\tau} \right), \quad z = \xi_3 \left(1 + \frac{t^2}{\tau^2} \right).$$

Тогда поля скорости и ускорения в лагранжевом описании

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\tau} \left(\xi_1 \quad 2\xi_2 \quad 2\frac{t}{\tau}\xi_3 \right)^T, \quad \mathbf{w} = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\tau^2} (0 \ 0 \ 2\xi_3)^T.$$

Пусть деформация произвола через малый промежуток времени dt , тогда $\mathbf{u} = \mathbf{v} dt$. Представим $\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{r}$, как сумму симметричного и косо-симметричного

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = u_{ij} + \varphi_{ij},$$

где

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right), \quad \varphi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right).$$

Подставим \mathbf{v} в эйлеровом описании

$$\mathbf{v} = \left(\frac{x}{\tau+t}, \frac{2y}{\tau+t}, \frac{2tz}{\tau^2+t^2} \right)^T, \quad \Rightarrow \quad u_{ij} = \text{diag} \left(\frac{1}{t+\tau}, \frac{2}{\tau+t}, \frac{2t}{\tau^2+t^2} \right)_{ij} dt, \quad \varphi_{ij} = 0.$$

Вращательное движение отсутствует.

Как можно заметить из выражения для \mathbf{v} неподвижными будут частицы с $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$, в начальный момент времени неподвижными будут все частицы с $\xi_3 = 0$.

T12 и T13. (Теория)

В равновесии силы внутренних напряжений должны взаимно компенсироваться, т.е.

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = -F_i = 0. \quad (2.52)$$

Также мы знаем обобщенный закон Гука:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma} \left[u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll} \delta_{ik} \right], \quad (2.53)$$

где $\sigma \in [0, 1/2]$ – коэффициент Пуассона, а E – модуль Юнга. Зная, что u_{ik} – симметричный тензор

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right),$$

получим

$$\frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} = 0,$$

что перепишем в векторных обозначениях, в силу $\Delta \mathbf{u} = \partial^2 u_i / \partial x_k^2$, а $\partial u_l / \partial x_l = \text{div } \mathbf{u}$, тогда

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \text{grad div } \mathbf{u} = 0.$$

Вспомнив, что $\text{grad div } \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} + \text{rot rot } \mathbf{u}$,

$$\text{grad div } \mathbf{u} - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \text{rot rot } \mathbf{u} = 0. \quad (2.54)$$

T12 и T13. (общий случай)

Внешние и внутренние радиусы толстостенной сферы равны R_1 и R_2 , внутри сферы действует давление p_1 , снаружи действует p_2 . Найдём деформацию и тензор напряжений для этой сферы.

Введём сферические координаты с началом в центре шара. В силу радиальности $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{r})$, следует, что $\text{rot } \mathbf{u} = 0$, тогда уравнение (2.54) примет вид

$$\text{grad div } \mathbf{u} = 0, \quad (2.55)$$

с учётом (2.65),

$$\text{div } \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} = \text{const} \equiv 3a,$$

тогда

$$d(r^2 u) = 3ar^2 dr \quad \Rightarrow \quad u = ar + \frac{b}{r^2}.$$

Выпишем компоненты тензора деформации в сферических координатах:

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{u_{\theta\theta}}{r} \text{ctg } \theta + \frac{u_r}{r}.$$

В остальные не входит u_r , соответственно они равны 0. В частности, для нашего случая

$$u_{rr} = a - \frac{2b}{r^3}, \quad u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = a + \frac{b}{r^3}. \quad (2.56)$$

Также можем найти (диагональный) тензор напряжений :

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left[(1-\sigma)u_{rr} + 2\sigma u_{\theta\theta} \right] = \frac{E}{1-2\sigma} a - \frac{2E}{1+\sigma} \frac{b}{r^3}, \quad (2.57)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left[(1+\sigma)u_{\theta\theta} + \sigma u_{rr} \right] = \sigma_{\varphi\varphi}. \quad (2.58)$$

Также мы знаем следующие граничные условия:

$$\sigma_{rr}|_{r=R_1} = -p_1, \quad \sigma_{rr}|_{r=R_2} = -p_2,$$

получаем

$$a = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \frac{1 - 2\sigma}{E}, \quad b = \frac{R_1^3 R_2^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \frac{1 + \sigma}{2E}. \quad (2.59)$$

Т12 и Т13. (тонкая сферическая оболочка)

Рассмотрим теперь случай, когда $h = R_2 - R_1 \ll R$.

$$a \approx \frac{R}{3h} \frac{1 - 2\sigma}{E} (p_1 - p_2), \quad b \approx \frac{R^4}{3h} (p_1 - p_2) \frac{1 + \sigma}{2E}.$$

Тогда деформация

$$\left(\text{пусть } \varkappa = \frac{R^2}{3h} (p_1 - p_2), \text{ тогда} \right) \quad u = \varkappa \frac{1 - 2\sigma}{E} + \varkappa \frac{1 + \sigma}{2E} = \frac{r^2(1 - \sigma)}{2Eh} (p_1 - p_2).$$

Чуть интереснее выражение для σ_{rr} (введено обозначение $p = p_1 - p_2$):

$$\sigma_{rr} = \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \underbrace{\left(p_1 - p_2 - p_2 \frac{3h}{R} - \frac{R_2^2}{r^3} (p_1 - p_2) \right)}_{p(1 - R_2^2/r^3)},$$

посмотрим, однако, на среднее по r значение.

$$\frac{1}{h} (R_1 + h)^3 \int_{R_1}^{R_1+h} \frac{1}{r^3} dr = \frac{R_1 + h}{2} \left(\frac{2}{R_1} + \frac{h}{R_1^2} \right),$$

тогда

$$\frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \left\langle p \left(1 - \frac{R_2^2}{r^3} \right) \right\rangle = \boxed{\langle \sigma_{rr} \rangle = \frac{1}{2} (p_1 + p_2)}.$$

Найдём остальные компоненты

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{3}{2} \left(\frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \right) (p_1 - p_2) = \frac{1}{2} \frac{R}{h} (p_1 - p_2).$$

Т14*. (решение для криволинейных координат, образующих ортогональный базис)

Хотелось бы выразить лапласиан Δp через частные производные в произвольной криволинейной системе координат. Легко показать, что

$$\Delta p = \operatorname{div} \operatorname{grad} p. \quad (2.60)$$

Так что начнём с вида $\operatorname{div} \mathbf{v}$ и $\operatorname{grad} f$ в криволинейной системе координат. Понадеемся, что достаточно рассмотреть случай криволинейных координат, образующих ортогональный базис в каждой точке пространства.

В криволинейных координатах базисные направления сформированы векторами $\mathbf{g}_i(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \partial \mathbf{r} / \partial q^i$. Для удобства введём единичные орты координатных направлений для ортогональной системы

$$\mathbf{e}_1(q) = \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}, 0, 0 \right), \quad \mathbf{e}_2(q) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}, 0 \right), \quad \mathbf{e}_3(q) = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \right). \quad (2.61)$$

Тогда

$$dq^j(\mathbf{e}_i) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \delta_j^i, \quad dq^i \wedge dq^j(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} \delta_k^i \delta_l^j. \quad (2.62)$$

Известно, что градиент функции соответствует дифференциальной 1-форме. Её (по вектору \mathbf{A}) можно записать как $\omega_A^1 = a_i dq^i$. С учётом введенного базиса можно записать, что $\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i$, $\forall \mathbf{A} \in T\mathbb{R}_q^3$. Из (2.62) получим, что

$$\omega_A^1(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i) = A^i = \frac{a_i}{\sqrt{g_{ii}}},$$

следовательно $a_i = A^i \sqrt{g_{ii}}$, и, соответственно

$$\omega_A^1 = A^i \sqrt{g_{ii}} dq^i. \quad (2.63)$$

Аналогично, пусть теперь $\text{grad } f = A^i e_i$. По определению

$$\omega_{\text{grad } f}^1 = d\omega_f^0 = df = \frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{grad } f = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial f}{\partial q^i} e_i.}$$

Теперь найдём $\text{div } \mathbf{B}$, как дифференциальную 3-форму. Для начала поймём, что для вектора $\mathbf{B}(q) = (B^i e_i)(q)$ форма

$$\omega_B^2 = b_1 dq^2 \wedge dt^3 + b_2 dq^3 \wedge dt^1 + b_3 dq^1 \wedge dt^2 \quad (2.64)$$

имеет следующий вид:

$$\omega_B^2(e_2, e_3) = (\mathbf{B}, e_2, e_3) = B^1.$$

С другой стороны, из (2.62) и (2.64),

$$\omega_B^2(e_2, e_3) = b_1 dq^2 \wedge dq^3(e_2, e_3) = \frac{b_1}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}.$$

Получаем, что $b_1 = B^1 \sqrt{g_{22}g_{33}}$, аналогично можем получить, что $b_2 = B^2 \sqrt{g_{11}g_{33}}$, $b_3 = B^3 \sqrt{g_{11}g_{22}}$.

Теперь, из определения, получаем

$$\omega_{\text{div } B}^3 = d\omega_B^2 = \sum_{\substack{i \neq j \neq k \\ P(i,g,k)=1}}^3 \frac{\partial \sqrt{g_{jj}g_{kk}} B^i}{\partial q^i} dq^i \wedge dq^j \wedge dq^k.$$

Тогда

$$\text{div } \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{22}g_{33}} B^1}{\partial q^1} + \frac{\partial \sqrt{g_{33}g_{11}} B^2}{\partial q^2} + \frac{\partial \sqrt{g_{11}g_{22}} B^3}{\partial q^3} \right) \quad (2.65)$$

Собирая всё вместе получаем, что

$$\Delta f = \text{div} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial f}{\partial q^i} e_i \right) = \frac{1}{\det g} \sum_{\substack{i \neq j \neq k \\ P(i,g,k)=1}}^3 \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \left[\sqrt{\frac{g_{jj}g_{kk}}{g_{ii}}} \frac{\partial f}{\partial q^i} \right] \right). \quad (2.66)$$

В частности, для полярных

$$g_{ij} = \text{diag}(1, r^2, 1) \quad \Rightarrow \quad \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

T15*.

Запишем ковариантную производную вектора и ковектора:

$$\nabla_j v_m = \frac{\partial v_m}{\partial q^j} - \Gamma_{kj}^i v_i, \quad \nabla_k v^j = \frac{\partial v^j}{\partial q^k} + \Gamma_{kj}^i v^j. \quad (2.67)$$

В таком случае

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\nabla_i v_j - \nabla_j v_i \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial q^i} + \Gamma_{ji}^k v_k - \frac{\partial v_i}{\partial q^j} - \Gamma_{ij}^k v_k \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial q^i} - \frac{\partial v_i}{\partial q^j} \right),$$

что и требовалось доказать.

Перейдём к следующему заданию. Корректнее сказать, что **псевдовектор** вихря ω может быть представлен $\omega_{ij} e^i e^j$, т.к. при выводе критически важно, что

$$[e^1 \times e^2] = e^3, \quad (2.68)$$

соответственно ω не инвариантен к зеркальному отображению базиса.

Судя по символу Леви-Чевиты речь идёт о трёхмерной задаче, так что нам достаточно показать что

$$\omega = \omega_{ij} [e^i \times e^j], \quad \text{где} \quad \omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^3 & -\omega^2 \\ -\omega^3 & 0 & \omega^1 \\ \omega^2 & -\omega^1 & 0 \end{pmatrix}_{ij}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \omega^\gamma = \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}, \quad (2.69)$$

что проверяется прямой подстановкой:

$$\omega = \omega^3 \underbrace{[e^1 \times e^2]}_{e^3} + (-\omega^3) \underbrace{[e^2 \times e^1]}_{-e^3} + \dots = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}.$$

3 Контрольная работа I

Задача №1

Введём координаты так, чтобы $OX \parallel \omega$, и $OY \parallel \vec{OO_1} \equiv \mathbf{l}$. Запишем скорость точки O_1 двумя способами

$$\mathbf{v}_{O_1} = \omega \times \mathbf{l} = \omega_0 \times \mathbf{r}. \quad (3.1)$$

Скорость точки B

$$\mathbf{v}_B^r = 2\omega_0 \times \mathbf{r},$$

Ускорение точки B

$$\mathbf{w}_B^a = \mathbf{w}_B^r + \mathbf{w}_B^e + \mathbf{w}_B^c. \quad (3.2)$$

Что ж, по порядку

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_B^r &= 2\omega_0 \times (\omega_0 \times \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 r & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \\ \mathbf{w}_B^e &= \omega \times (\omega \times \mathbf{l}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 l & 0 \end{pmatrix}^T, \\ \mathbf{w}_B^c &= 2\omega \times \mathbf{v}_B^r = 4\omega \times (\omega_0 \times \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 & -4\omega\omega_0 r & 0 \end{pmatrix}^T, \end{aligned}$$

где подразумевается, что

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ l \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Также имеет смысл найти из первого уравнения ω_0 и собрать всё вместе

$$\omega_0 = \frac{l}{r}\omega, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w}_B^a = - \begin{pmatrix} \omega^2 l^2 / r \\ 5\omega l \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача №2

Мы знаем как изменяется со временем угловая скорость:

$$\omega(t) = \omega_{\text{н}} + \int_0^t \varepsilon(t) dt. \quad (3.3)$$

Знаем, что

$$\mathbf{v}_O = \omega \times \mathbf{r}, \quad d\omega = \varepsilon dt = -k\omega \times \mathbf{r} dt. \quad (3.4)$$

Введём систему координат, OX которой в начальный момент времени такое, что $\mathbf{v}_O \parallel OX$, а OY нормально к поверхности. Тогда

$$\omega_{\text{н}} = (\omega_{\text{н}} \sin \alpha \quad \omega_{\text{н}} \cos \alpha \quad 0)^T, \quad \mathbf{r} = (0 \quad r \quad 0)^T,$$

а из (3.4) получим дифференциальное уравнение

$$d \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = -k \begin{pmatrix} -\omega_z r \\ 0 \\ \omega_x r \end{pmatrix} dt \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} d\omega_x = k\omega_z r dt \\ d\omega_y = 0 \\ d\omega_z = -k\omega_x r dt \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \omega_z d\omega_z = -\omega_x d\omega_x.$$

Решая, находим

$$\omega_z^2 + \omega_x^2 = C^2 = \omega_{\text{н}}^2 \sin^2 \alpha, \quad (3.5)$$

где C мы находим из момента $t = 0$.

Подставляя значение для ω_z , получим

$$d\omega_x = kr\sqrt{C^2 - \omega_x^2} dt, \quad \Rightarrow \quad \omega_x = C \sin(krt + C_t) = \left/ \omega_x(0) = \omega_{\text{н}} \sin \alpha \right/ = \omega_{\text{н}} \sin(\alpha) \cos(krt). \quad \Rightarrow C_t = \pi/2$$

Собирая всё вместе, получаем, что

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_{\text{н}} \sin(\alpha) \cos(krt) \\ \omega_{\text{н}} \cos(\alpha) \\ \omega_{\text{н}} \sin(\alpha) \sin(krt) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Найдём теперь $\mathbf{r}_O(t)$:

$$d\mathbf{r}_O = \mathbf{v}_O dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} dt \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_O = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \omega_H \sin(\alpha) \cos(krt) \\ 0 \\ \omega_H \sin(\alpha) \sin(krt) \end{pmatrix} + \mathbf{C}_r,$$

где \mathbf{C}_r находим из условия $\mathbf{r}_O(t=0) = \mathbf{r}$. Введём также некоторые обозначения для удобства записи,

$$\varkappa = \frac{1}{k} \omega_H \sin \alpha, \quad \varphi = krt, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_O(t) = \varkappa \begin{pmatrix} \cos \varphi - 1 \\ r/\varkappa \\ \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

В таком случае траектория будет окружностью, в плоскости zx с центром в $(-\varkappa, 0)$ и радиусом \varkappa .

Задача №3

Искать центр вращения – дело гиблое, лучше посмотрим с точки зрения A на точку C – центр масс, расположенный в $A + \overrightarrow{AB}/2$. С учётом того, что в начальный момент времени все скорости равны 0, получим

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}^e + \mathbf{w}_C^r, \quad (3.8)$$

где $\mathbf{w}^e = \mathbf{w}_A$, а \mathbf{w}_C^r – вращение с угловым ускорением $\boldsymbol{\varepsilon}$ точки C относительно точки A , другими словами

$$\mathbf{w}_C^r = \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{AC}. \quad (3.9)$$

По теореме об изменении кинетического момента

$$J_C \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{M}_C^e + 0 = \overrightarrow{CA} \times \mathbf{T} = \mathbf{T} \times \overrightarrow{AC}. \quad (3.10)$$

По теореме об изменении количества движения

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{R}^e = \mathbf{T} + m\mathbf{g}. \quad (3.11)$$

Осталось выбрать хорошие оси и по координатно это записать.

Так как не очень хочется задумываться об ускорении точки A , выберем ось $OX \perp \mathbf{w}_A$, получается повернутую на α от \overrightarrow{AB} в начальный момент времени, OY выберем так, чтобы $\omega_z > 0$, тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} L \cos \alpha \\ L \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ w_a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_C^r = \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -\varepsilon L \sin \alpha \\ \varepsilon L \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix},$$

Момент инерции для однородного стержня $J_c = mL^2/3$, в таком случае из проекции (3.10) на ось OZ найдём

$$J_C \varepsilon = TL \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{3T \sin \alpha}{mL}. \quad (3.12)$$

Перепишем (3.11) в проекции на ось OX и подставим ε :

$$-\varepsilon L \sin \alpha = \frac{T}{m} - g \cos \alpha, \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = mg \frac{\sin \alpha}{1 + 3 \sin^2 \alpha}}.$$

4 Динамика II

4.8 Геометрия масс

11.8(7)

Запишем тензор квадрата расстояния

$$\tilde{r}_i^T \tilde{r}_i = \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + y_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} = \hat{j}_i, \quad (4.1)$$

суммируя, получим

$$\hat{J}_0 = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

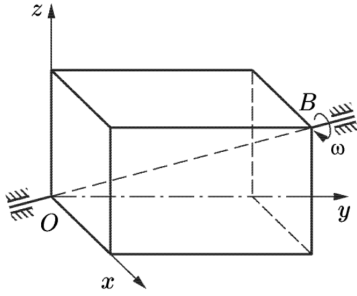


Рис. 5: К задаче 11.18

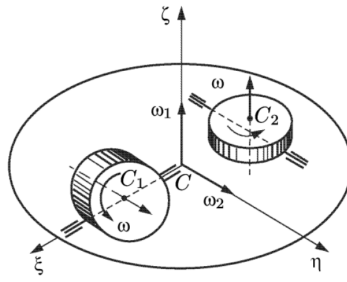


Рис. 6: К задаче 11.27

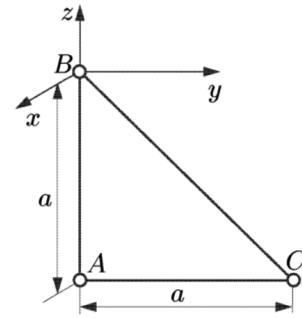


Рис. 7: К задаче 11.27

В силу симметрии системы $J_x = J_y = J_z$, выбрав сферические координаты найдём J_z :

$$J_z = \int_M (y^2 + x^2) dm = \rho \int_V (y^2 + x^2) dV = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^4 \sin^3 \theta dr d\varphi d\theta = \frac{2}{5} R^5 \frac{1}{R^2} \left(\frac{4}{3} R^3 \rho \pi \right) = \frac{2}{5} M R^2. \quad (4.3)$$

11.12

Тензор инерции твердого тела в базисе $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ имеет такой вид

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}, \quad D \neq 0.$$

Хотелось бы его к диагональному виду привести. Повернем оси вокруг оси Ox на некоторый угол α и приведём к диагональному виду

$$S^T \hat{J} S = \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

После нескольких монотонных операций (ограничив все на плоскость Oxy) получаем

$$S^T J S \Big|_{Oyz} = \begin{pmatrix} B \cos^2 \alpha + C \sin^2 \alpha + D \sin 2\alpha & B \sin 2\alpha/2 - C \sin 2\alpha/2 - D \cos 2\alpha \\ B \sin 2\alpha/2 - C \sin 2\alpha/2 - D \cos 2\alpha & B \cos^2 \alpha + C \cos^2 \alpha - D \sin 2\alpha \end{pmatrix},$$

откуда находим α

$$\cos 2\alpha = \frac{B - C}{\sqrt{4D^2 + (B - C)^2}}$$

и, соответственно,

$$A' = A, \quad B' = \frac{1}{2} \left(B + C + \sqrt{(B - C)^2 + 4D^2} \right), \quad C' = \frac{1}{2} \left(B + C - \sqrt{(B - C)^2 + 4D^2} \right). \quad (4.4)$$

Направляющие же векторы найдём, повернув базисные векторы,

$$S \begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{e}'_2 = (\mathbf{e}_2 + \tan \alpha \mathbf{e}_3)/n_2, \\ \mathbf{e}'_3 = (-\tan \alpha \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)/n_3 \end{cases}$$

Возвращаясь в трёхмерие наш новый базис (который остается ортонормировать)

$$\mathbf{e}'_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}'_2 = (0, D, (B' - B)), \quad \mathbf{e}'_3 = (0, C' - C, D). \quad (4.5)$$

11.18

Поместим начало координат в центр масс (потому что так привычнее считать) и найдём тензор инерции по (4.1) и (4.2), аналогично (4.3), несколько раз проинтегрировав по параллелепипеду

$$J_z = \rho \int_V (x^2 + y^2) dV = \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz (x^2 + y^2) = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2),$$

аналогичные результаты получим для J_y, J_x

$$J_y = \dots = \frac{1}{12}m(a^2 + c^2), \quad J_x = \dots = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2).$$

Остается найти осевые моменты инерции

$$J_{xy} = \rho \int_V xy dV = J_{yz} = J_{xz} = 0.$$

Таким образом

$$\hat{J}_O = \frac{1}{48}m \begin{pmatrix} 4(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & 4(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & 4(a^2 + b^2) \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Кинетический момент найдём по определению, как

$$\mathbf{K}_O = \hat{J}_O \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{K}_A = \hat{J}_A \boldsymbol{\omega},$$

где $\boldsymbol{\omega}$ и \hat{J}_A

$$\hat{J}_A = \hat{J} + m\hat{j}_{OA}, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} (a, b, c)^T$$

Заметим что \hat{j}_{OA} будет аналогичен (4.1), тогда осталось найти \mathbf{K}_O :

$$\mathbf{K}_O = \hat{J}_O \boldsymbol{\omega} = \frac{\omega m}{48\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a(b^2 + c^2) \\ b(a^2 + c^2) \\ c(a^2 + b^2) \end{pmatrix}.$$

11.27

Проинтегрировав как в задачах 11.18 и 11.8(7) найдём, что относительно центра масс тензор инерции \hat{J}_O диска в главных осях имеет вид

$$\hat{J}_C = \frac{1}{4}mR^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Кинетическая энергия тела может быть найдена, как

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \hat{J}_O \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}mv_O^2.$$

Запишем T для случая $\boldsymbol{\omega}_1 \parallel Oz$, как сумму вращательной и поступательной энергии для двух дисков.

Поступательные, в силу геометрии системы, у дисков равны, первый диск вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_{D1} = (0, 0, \omega + \omega_1)$, а второй с $\boldsymbol{\omega}_{D2} = (0, \omega, \omega_1)$. Тензор инерции для второго диска аналогичен (4.7), только с 2 по оси Oy . Собирая всё вместе

$$T = 2 \times \frac{1}{2}m\omega_1^2 a^2 + \underbrace{\frac{1}{4}mR^2(\omega + \omega_1)^2}_{\vec{\omega}_{D1}^T \hat{J}_{O,D1} \vec{\omega}_{D1}} + \underbrace{\frac{1}{8}mR^2\omega_1^2 + \frac{1}{4}mR^2\omega^2}_{\vec{\omega}_{D2}^T \hat{J}_{O,D2} \vec{\omega}_{D2}} = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \left(a^2 + \frac{3}{8}R^2\right)\omega_1^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega\omega_1.$$

Также заметим, что вопросы задачи симметричны с точностью до замены дисков, что упрощает нам дело в плане поиска и записи ответа:

$$T_i = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \left(a^2 + \frac{3}{8}R^2\right)\omega_i^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega\omega_i, \quad i = 1, 2. \quad (4.8)$$

11.92

Найдём тензор инерции для точки B по (4.2):

$$\hat{J}_B = ma^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вспоминая результаты задачи №11.12, где подобное приведение к главным осям решено в общем виде, находим

$$B' = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}), \quad C' = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

Главные оси же параллельны векторам

$$\mathbf{e}'_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}'_2 = (0, -2, \sqrt{5} - 1), \quad \mathbf{e}'_3 = (0, 1 - \sqrt{5}, -2).$$

Отнормировав которые найдём новый базис.

Тензор инерции точки A и эллипсоид инерции, соответственно, равны

$$\hat{J}_A = ma^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \{2x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

где M , как можно заметить, является эллипсоидом инерции ($J_y = J_z$).

4.9 Динамика твёрдого тела

11.45

Твёрдое тело с неподвижной точкой движется под действием момента

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega},$$

где вектор \mathbf{a} вращается вместе с твёрдым телом. Хотим перейти к динамическим уравнениям Эйлера, так что

$$\hat{J}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_\xi \\ a_\eta \\ a_\zeta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_O = \begin{pmatrix} a_\eta r - a_\zeta q \\ a_\zeta p - a_\xi r \\ a_\xi r - a_\eta p \end{pmatrix}.$$

Для начала попробуем в лоб, домножив динамические уравнения эйлера на p, q, r соответственно

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = -M_\xi \\ B\dot{q} + (A - C)pr = -M_\eta \\ C\dot{r} + (B - A)pq = -M_\zeta \end{cases} \Rightarrow A\dot{p}p + B\dot{q}q + C\dot{r}r = 0.$$

Не густо.

Пойдём в чуть более низкоуровневую запись

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \dot{K}_{Oi}\mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_O = \mathbf{a} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Т.к. $\dot{a}_i\mathbf{e}_i = 0$, то

$$(\dot{K}_{Oi} + \dot{a}_i)\mathbf{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{K}_O + \mathbf{a}) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{K}_O + \mathbf{a}) = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbf{K}_O + \mathbf{a} = \text{const}} - \text{первый I интеграл.}$$

Теперь, т.к. $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{M}_O$ предположим, что $T = \text{const}$. Действительно

$$dT = \partial A = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}_O) dt + (\mathbf{M})_O \cdot \boldsymbol{\omega} dt = 0 \Rightarrow \boxed{T = \text{const}} - \text{второй I интеграл.}$$

11.59

Есть твёрдое тело в отсутствие внешних сил с $\mathbf{K}_O = \text{const}$ и $A = B \neq C$. Выберем в качестве оси динамической симметрии ось $O\zeta$. Запишем динамические уравнения Эйлера

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - A)qr = 0 \\ A\dot{q} - (C - A)pr = 0 \\ C\dot{r} = 0 \end{cases} \Rightarrow C\dot{r} = 0, \quad Cr_0 = K_O \cos \theta = \text{const} \Rightarrow \begin{cases} r(t) = r_0 = \text{const} \\ \theta(t) = \theta = \text{const} \end{cases}$$

Посмотрим теперь на $\|\mathbf{K}_O\|$

$$K_O^2 = A^2(p^2 + q^2) + (K_O \cos \theta)^2 \Rightarrow p^2 + q^2 = \left(\frac{K_O \sin \theta}{A} \right)^2.$$

Теперь посмотрим на $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} + \dot{\psi} + \dot{\theta},$$

проецируя всё на базис $O\xi\eta\zeta$ находим, что

$$\begin{cases} r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta \\ \sqrt{p^2 + q^2} = \dot{\psi} \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\psi} = K_O/A = \text{const} \\ \dot{\varphi} = r_0(1 - C/A) = \text{const} \end{cases}$$

Теперь мы готовы записать *параметры регулярной прецессии в случае Эйлера*:

$$\cos \theta = \frac{Cr_0}{K_O}, \quad \dot{\psi} = \frac{K_O}{A}, \quad \dot{\varphi} = r_0 \left(1 - \frac{C}{A} \right), \quad K_O = \sqrt{C^2 r_0^2 + A^2 (\omega_0^2 - r_0^2)}. \quad (4.9)$$

11.63

Для начала поймём куда диск движется, точнее найдем (или хотя бы сделаем шаги в эту сторону) мгновенную ось вращения проходящую через точку A и некоторую точку C .

Для начала посмотрим на геометрию системы (введя неизвестные a, b, c):

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -r \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} r \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CA} = 0 \\ \mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CB} \\ \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CD} \end{cases}, \quad \begin{cases} \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \\ \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

Для удобства далее будем считать $\boldsymbol{\omega} = k\overrightarrow{CA}$. Посчитаем векторы скоростей в наших обозначениях

$$\mathbf{v}_D = kr \begin{pmatrix} c \\ c \\ -b-a \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_B = k\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{AB} = kr \begin{pmatrix} c \\ -c \\ b-a \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = b$$

Так как мы знаем абсолютные значения скоростей точек, то запишем

$$v_D^2 - v_B^2 = v_0^2 = 4a^2k^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v_0}{2rk}.$$

Подставив теперь значения a в v_B^2 получим

$$v_B^2 = 2k^2c^2r^2 = v_0^2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{v_0\sqrt{2}}{2kr}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = k \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{v_0}{2r} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Теперь найдём скорость центра масс

$$\mathbf{v}_O = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CO} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_{CA} + \overrightarrow{AO}) = \boldsymbol{\omega} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{v_0}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_O(t) = \begin{pmatrix} v_0t/\sqrt{2} \\ 0 \\ -gt^2/2 + v_0t/2 \end{pmatrix}.$$

Теперь мы знаем как будет двигаться в условиях гравитации наш диск (его центр масс)!

Теперь посмотрим на вращение диска относительно центра масс. Для этого пересядем в СО падающую с \mathbf{g} , теперь $\mathbf{M}_O = \mathbf{0}$ и мы пришли к случаю Эйлера (который подробно был рассмотрен в задаче №11.59).

Для начала вспомним, что для диска кинетический момент

$$\mathbf{K}_O = \hat{J}_O \boldsymbol{\omega} = \frac{mr^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{v_0}{2r} = \frac{mr v_0}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \text{const}, \quad \Rightarrow \quad K_O = \frac{\sqrt{10}}{8} mrv_0.$$

Зная \mathbf{K}_O можем найти ось прецессии $\mathbf{e} \parallel \mathbf{K}_O$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{10}} (1, 1, 2\sqrt{2}).$$

Подставляя параметры системы в уравнения (4.9), найдём

$$\dot{\psi} = \frac{K_O}{A} = \frac{\sqrt{10}}{2} \frac{v_0}{r}, \quad \dot{\varphi} = r_0 \left(1 - \frac{C}{A} \right) = -\frac{v_0\sqrt{2}}{2r}, \quad \cos \theta = \frac{Cr_0}{K_O} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

11.72

Решим чуть более общую задачу о движении тяжелого симметричного волчка с неподвижной нижней точкой. Начало координат O совпадает с неподвижной точкой волчка, расстояние до центра масс равно l .

Запишем кинематические и динамические уравнения Эйлера

$$\begin{cases} p = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\ q = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi, \\ r = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 \dot{p} + (I_3 - I_2)qr = M_\xi \\ I_2 \dot{q} + (I_1 - I_3)pr = M_\eta \\ I_3 \dot{r} + (I_2 - I_1)pq = M_\zeta \end{cases}, \quad \hat{J}_O = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$

Кинетическая энергия волчка (с учетом параллельного переноса тензора инерции с центра масс к точке O)

$$T = \boldsymbol{\omega}^T \hat{J}_O \boldsymbol{\omega} = \frac{I_1 + ml^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2.$$

Потенциальная энергия, соответственно, равна

$$\Pi = mgl \cos \theta.$$

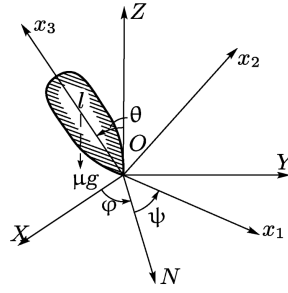


Рис. 8: К задаче 11.72

Собирая вместе, находим

$$L = T - \Pi.$$

Понятно, что $K_3 = \text{const}$, докажем также что $K_z = \text{const}$. Действительно,

$$\frac{dK_z}{dt} = \mathbf{M}_A \Big|_Z + \mathbf{Q} \times \mathbf{v}_O = 0 \quad \Rightarrow \quad K_z = \text{const}.$$

Явно выпишем их

$$\begin{cases} K_3 = \partial L / \partial \dot{\psi} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \\ K_z = \partial L / \partial \dot{\varphi} = ((I_1 + ml^2) \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\varphi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta. \end{cases} \quad (4.10)$$

Кроме того, в системе сохраняется энергия

$$E = T + \Pi = \frac{1}{2} (I_1 + ml^2) (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + mgl \cos \theta.$$

Из (4.10) находим явные выражения для $\dot{\varphi}$ и $\dot{\theta}$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{K_z - K_3 \cos \theta}{(I_1 + ml^2) \sin^2 \theta}, \\ \dot{\psi} &= \frac{K_3}{I_3} - \cos \theta \frac{K_z - K_3 \cos \theta}{(I_1 + ml^2) \sin^2 \theta}. \end{aligned}$$

Подставляя это в выражения для энергии E получим

$$E = \frac{1}{2} (I_1 + ml^2) \dot{\theta}^2 + \frac{(K_z - K_3 \cos \theta)^2}{2(I_1 + ml^2) \sin^2 \theta} + \frac{K_3^2}{2I_3} + mgl \cos \theta. \quad (4.11)$$

Таким образом мы находим

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = f_{\dot{\theta}}(E, K_z, K_3) \quad \Rightarrow \quad t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{f_{\dot{\theta}}(E, K_z, K_3)}, \quad (4.12)$$

что и является нашим искомым решением в квадратурах. Конкретно для №11.72 следует положить $I_3 = 0$ и, в силу доступного для стержня произволя, $\psi = 0$. Слагаемые вида K_3/I_3 в таком случае просто не возникнут, решение сохранится.

11.118

Как и в решение к №11.72 у нас симметричный волчок. Требуется определить начальную угловую скорость прецессии $\dot{\varphi}_0$, чтобы $\dot{\theta} = 0$. Формально можем поставить задачу несколько иначе, какой должен быть момент внешних сил \mathbf{M}_O чтобы происходила регулярная прецессия $\dot{\theta} = 0$?

Для начала введём отдельно $\boldsymbol{\omega}_1 \parallel O\zeta$ и $\boldsymbol{\omega}_2 \parallel OZ$. По ранее проделанной работе с регулярной прецессией, мы знаем, что K_z и K_3 постоянны, соответственно $\omega_1, \omega_2, \omega = \text{const}$. Аналогично случаю Эйлера (см. №11.59)

$$(K_O)_\zeta = Cr, \quad (K_O)_Z = A\sqrt{p^2 + q^2}.$$

То есть $\mathbf{K}_O \in O\zeta Z$ и $K_O = \text{const}$. Но, т.к. плоскость $O\zeta Z$ вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$ то и вектор \mathbf{K}_O аналогично. Тогда для \mathbf{M}_O верно, что

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{K}_O = \mathbf{M}_O. \quad (4.13)$$

Нетрудно показать, что

$$\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{K}_O = \frac{\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1}{\|\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1\|} \omega_2 \sin \theta (C(\omega_1 + \omega_2 \cos \theta) - A\omega_2 \cos \theta)$$

Т.к. $\|\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1\| = \omega_1 \omega_2 \sin \theta$, то

$$\mathbf{M}_O = (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1) \left[C + (C - A) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta \right]. \quad (4.14)$$

Это *основная формула гироскопии*, так что, наверное, можно было принять её на веру. В частном случае, когда $\omega_1 \gg \omega_2$ можно приближенно записать эту формулу, как

$$\mathbf{M}_O = C(\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1). \quad (4.15)$$

Конкретно для нашей задачи (4.14) перепишется как

$$\dot{\varphi} \omega \sin \theta \left(C + (C - A) \frac{\dot{\varphi}}{\omega} \cos \theta \right) = mgl \sin \theta,$$

т.к. мы действительно требуем регулярной прецессии. Так получаем квадратное уравнение вида

$$(C - A)\dot{\varphi}^2 \cos \theta + C\omega\dot{\varphi} - mgl = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{-C\omega \pm \sqrt{C^2\omega^2 + (C - A)mgl \cos \theta}}{2(C - A) \cos \theta}. \quad (4.16)$$

Стоит заметить, что при $C^2\omega^2 + (C - A)mgl \cos \theta < 0$ регулярная прецессия, по всей видимости, невозможна. При $\omega \gg \dot{\varphi}$ угловая прецессия будет равна

$$\dot{\varphi} = \frac{mgl}{C\omega}, \quad (4.17)$$

и, как видно, не зависит от угла нутации.

Теперь про силы. Запишем II закон Ньютона в проекции на вертикаль и нормаль к вертикали, повернутую на $+\varphi$ от X , получим

$$\begin{cases} N_x = m\dot{\varphi}^2 l \sin \theta \\ N_z - mg = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad N = m\sqrt{g^2 + \dot{\varphi}^2 l^2 \sin^2 \theta}. \quad (4.18)$$

Т16.*

Запишем динамические уравнения Эйлера

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = M_\xi \\ B\dot{q} + (A - C)pr = M_\eta, \\ C\dot{r} + (B - A)pq = M_\zeta \end{cases} \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Тело вращается относительно закрепленного центра масс O . По условию

$$\mathbf{M}_O = -\gamma\boldsymbol{\omega}, \quad A = B > C.$$

Хочется доказать, что мгновенная ось вращения тела асимптотически стремится стать ортогональной оси динамической симметрии тела ($O\zeta$). Если чуть формализовать, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|\boldsymbol{\omega}^\zeta\|}{\|\boldsymbol{\omega}^{\xi\eta}\|} = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2}} = 0, \quad (4.20)$$

равносильно поставленному условию.

Конкретизируем динамические уравнения Эйлера под наш случай:

$$A\dot{p} + (C - A)qr = -\gamma p \quad (4.21)$$

$$A\dot{q} - (C - A)pr = -\gamma q \quad (4.22)$$

$$C\dot{r} = -\gamma r \quad (4.23)$$

Из (4.23) найдём

$$r = \omega^\zeta = r_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{C}t\right).$$

Теперь посмотрим на $p \cdot (4.21) + q \cdot (4.22)$ равное полному дифференциалу по времени

$$p\dot{p} + q\dot{q} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (p^2 + q^2) = -\frac{\gamma}{A} (p^2 + q^2).$$

Естественно решить это уравнение относительно $\omega^{\xi\eta}$

$$\omega^{\xi\eta} = -\frac{\gamma}{A} \omega^{\xi\eta} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{p^2 + q^2} = \omega^{\xi\eta} = \omega_0^{\xi\eta} \exp\left(-\frac{\gamma}{A}t\right).$$

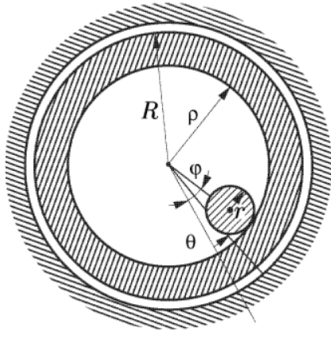


Рис. 9: К задаче 12.46

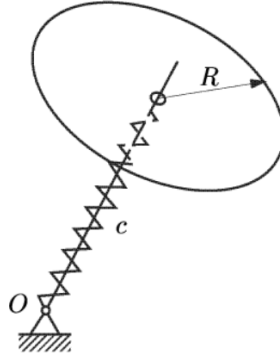


Рис. 10: К задаче 12.59

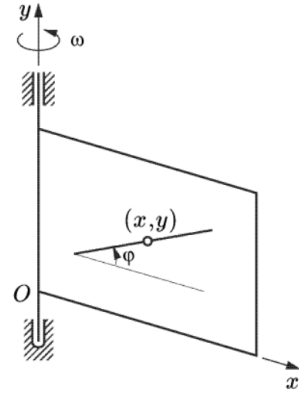


Рис. 11: К задаче 12.61

Подставляя всё в (4.20) находим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{\omega^\zeta}{\omega^{\xi\eta}} \right] = \frac{r_0}{\omega_0^{\xi\eta}} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\exp \left(\frac{\gamma}{AC} \underbrace{(C - A)t}_{<0} \right) \right] = 0, \quad \text{Q. E. D.}$$

5 Аналитическая механика

5.10 Уравнения Лагранжа

12.6 (в)

Проверим, является ли интегрируемой связь

$$\dot{y} - z\dot{x} = 0.$$

В случае интегрируемости связи существовали бы запрещенные положения системы. Покажем же что в действительности мы можем попасть из любой точки в любую. В силу отсутствия ограничений на \dot{z} , мы свободно можем перемещаться вдоль оси z при $\dot{x}, \dot{y} = 0$. Пусть мы оказались в $z = 2$, тогда при движении

$$\sqcap \dot{x} dt = \xi, \quad \dot{y} dt = 2\xi, \quad \Rightarrow \quad (0, 0, 2) \rightarrow (\xi, 2\xi, 2).$$

Теперь по $\dot{x}, \dot{y} = 0$ перейдём в $z = 1$, тогда

$$\sqcap \dot{x} dt = -\xi, \quad \dot{y} dt = -\xi, \quad \Rightarrow \quad (\xi, 2\xi, 1) \rightarrow (0, \xi, 1).$$

Собирая всё вместе,

$$(0, 0, 0) \xrightarrow{\vec{r}=(0,0,\neq 0)} (0, 0, 2) \xrightarrow{\vec{r}dt=(\xi, 2\xi, 2)} (\xi, 2\xi, 2) \xrightarrow{\vec{r}=(0,0,\neq 0)} (\xi, 2\xi, 1) \xrightarrow{\vec{r}dt=(-\xi, -\xi, 1)} (0, \xi, 1) \xrightarrow{\vec{r}=(0,0,\neq 0)} (0, \xi, 0).$$

Получается допустимы перемещения из \mathbf{r}_1 в $\mathbf{r}_2 \forall \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, следовательно **связь не является интегрируемой**.

12.12

Найдём уравнения движения для двух материальных точек, массами m_1 и m_2 , притягивающихся по закону Ньютона. В качестве обобщенных координат выберем x, y, z центра масс системы, расстояние между точками r и углы φ, θ , определяющие направление прямой.

Потенциальная энергия системы Π

$$\Pi = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}.$$

Для каждого из тел можем записать расстояние до центра масс и абсолютное положение:

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r, \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r, \quad \begin{cases} x_1 = x + r_1 \sin \theta \cos \varphi, \\ y_1 = y + r_1 \sin \theta \sin \varphi, \\ z_1 = z + r_1 \cos \theta. \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = x + r_2 \sin \theta \cos \varphi, \\ y_2 = y + r_2 \sin \theta \sin \varphi, \\ z_2 = z + r_2 \cos \theta. \end{cases}$$

Вспомнив, что для сферических координат (r, θ, φ) метрический тензор $g_{ij} = \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$, найдём

квадрат относительной скорости

$$v_1^2(r_1) = g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j = r_1^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + r_1^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}_1^2 \Rightarrow v_1^2(r_1) = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \cdot v_1^2(r).$$

Теперь можем записать кинетическую энергию движения (T_1, T_2 – кинетические энергии движения тел относительно центра масс) :

$$T_1 + T_2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \left(\frac{d}{dt}(x, y, z) \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

И, наконец, лагранжиан системы

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (5.1)$$

Найдём уравнения движения системы относительно центра масс:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\varphi} (r \dot{\theta} \sin(2\theta) + \dot{r} \dot{\varphi} (1 - \cos 2\theta)) + \frac{1}{2} r \ddot{\varphi} (1 - \cos 2\theta) = 0, \\ \gamma(m_1 + m_2) - r^3 (\sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) + r^2 \ddot{r} = 0, \\ 2\dot{\theta} \dot{r} + r \ddot{\theta} - \frac{1}{2} r \sin(2\theta) \dot{\varphi}^2 = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

И для центра масс:

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = 0. \quad (5.3)$$

Что логично, на центр масс не действует никаких сил.

Теперь к интегралам системы. Пусть $\frac{d}{dt}(x_1, y_1, z_1)^T = \mathbf{v}_1$, аналогично для второго тела. Во-первых сохраняется количество движения системы (x, y, z не входят явно в L), также не входят t, φ , тогда

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \\ L \neq L(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \text{const}, \\ r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta = \text{const}, \\ E = \Pi + T = \text{const}. \end{cases} \quad (5.4)$$

Вообще, в силу отсутствия внешних сил на систему, сохраняется кинетический момент,

$$\mathbf{K} = m_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2 = \text{const}. \quad (5.5)$$

12.29

Два однородных стержня длины l каждый образуют плоский двойной маятник. Составим уравнения движения в форме Лагранжа.

Выберем начала координат в точке подвеса. Тогда координаты центра масс второго стержня

$$\begin{cases} x_2 = l \sin \varphi_1 + (l/2) \sin \varphi_2, \\ y_2 = l \cos \varphi_1 + (l/2) \cos \varphi_2. \end{cases}$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = -mg \left(\frac{l}{2} \cos \varphi_1 \right) - mg \left(l \cos \varphi_1 + \frac{l}{2} \cos \varphi_2 \right).$$

Кинетическая энергия первого стержня

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{l^2 m}{6} \dot{\varphi}_1^2.$$

Для второго стержня найдём кинетическую энергию, рассмотрев его вращение относительно центра масс:

$$T_2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} \dot{\varphi}_2^2.$$

Лагранжиан системы:

$$L = T - \Pi = ml^2 \left[\frac{g}{2l} (3 \sin \varphi_1 + \cos \varphi_2) + \frac{1}{2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \frac{2}{3} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{6} \dot{\varphi}_2^2 \right]. \quad (5.6)$$

Тогда уравнения движения системы

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9(g/l) \sin \varphi_1 + 3 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_2^2 + 3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_2 + 8\ddot{\varphi}_1 = 0, \\ 3(g/l) \sin \varphi_2 - 3 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_1^2 + 3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \ddot{\varphi}_1 + 2\ddot{\varphi}_2 = 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

12.46

Составим уравнения движения в форме Лагранжа для системы, представленно на рис. 9 Для начала запишем потенциальную энергию системы, как

$$\Pi = -(\rho - r) \cos(\varphi + \theta).$$

Момент инерции полого цилиндра:

$$I_1 = \int_{\rho}^R \sigma r^2 dV \xrightarrow{dV=h2\pi r dr} I_1 = 2\pi\sigma h \int_{\rho}^R r^3 dr = \frac{1}{2} (R^2 - \rho^2) (R^2 + \rho^2) \pi h \sigma = \frac{1}{2} M (R^2 + \rho^2).$$

Тогда его кинетическая энергия

$$T_1 = \frac{1}{4} M (R^2 + \rho^2) \dot{\theta}^2.$$

Скорость центра масс сплошного цилиндра:

$$v_2 = \dot{\varphi}(\rho - r).$$

Пусть цилиндр катится с угловой скоростью ω , тогда запишем условие того, что он не проскальзывает

$$(\rho - r)\dot{\varphi} = \rho\dot{\theta} + \omega r, \quad \Rightarrow \quad \omega = (\rho - r)\dot{\varphi} - \rho\dot{\theta}.$$

Тогда кинетическая энергия сплошного цилиндра

$$T_2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{\varphi}(\rho - r) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m r^2 \right) \omega^2.$$

Лагранжиан системы:

$$L = mg(\rho - r) \cos \varphi + m \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 (\rho - r)^2 + \frac{1}{4} \left(\dot{\theta} \rho - \dot{\varphi}(\rho - r) \right)^2 \right) + \frac{1}{4} M (R^2 + \rho^2) \dot{\theta}^2. \quad (5.8)$$

Соответственно, уравнения движения системы

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\ddot{\theta} \rho + 3\ddot{\varphi}(\rho - r) + 2g \sin(\varphi) = 0, \\ M\ddot{\theta}(R^2 + \rho^2) + \rho m (\ddot{\theta} \rho - \ddot{\varphi}(\rho - r)) = 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

12.59

Составим уравнения движения в форме Лагранжа для системы, представленной на рис. 10. Для начала перейдём в сферические координаты:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

Для начала запишем потенциальную энергию системы, как

$$\Pi = mgz + \frac{1}{2} k(r_0 - r)^2.$$

Как уже было показано в №12.12 скорость центра масс диска

$$v^2 = g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j = r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2.$$

Также запишем кинематические уравнения Эйлера и момент инерции диска:

$$\omega^{\text{в СО диска}} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \omega_1 = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ \omega_2 = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ \omega_3 = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\varphi}, \end{cases} \quad \hat{J} = \frac{mR^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Кинетическую энергию диска тогда найдём, как

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \hat{J} \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} m \left(r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \right).$$

Соответственно, лагранжиан системы:

$$\begin{aligned} L/m = & + \frac{1}{8} R^2 \left(\dot{\psi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\psi}^2 + 4\dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\varphi}^2 \right) + \\ & + \frac{1}{2} r^2 \left(\dot{\theta}^2 r^2 + \dot{\varphi}^2 r^2 \sin^2 \theta + \dot{r}^2 \right) - \\ & - gr \cos \theta - \frac{1}{2} \frac{k}{m} (r_0 - r)^2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Уравнения движения системы:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0. \quad (5.11)$$

Подставляя L , получим уравнения движения в чуть менее элегантной форме:

$$\begin{aligned} R^2 \left(\ddot{\psi} \cos(\theta) + \ddot{\varphi} - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin(\theta) \right) + 2\ddot{\varphi} r^2 \sin^2(\theta) + 2\dot{\theta} \dot{\varphi} r^2 \sin(2\theta) + 4\dot{\varphi} \dot{r} r \sin^2(\theta) &= 0, \\ R^2 \ddot{\theta} + R^2 \dot{\psi} \left(\dot{\psi} \cos(\theta) + 2\dot{\varphi} \right) \sin(\theta) + 4\ddot{\theta} r^2 + 8\dot{\theta} \dot{r} r - 2\dot{\varphi}^2 r^2 \sin(2\theta) - 4gr \sin(\theta) &= 0, \\ \ddot{\psi} \cos^2(\theta) + \ddot{\psi} + 2\ddot{\varphi} \cos(\theta) - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin(2\theta) - 2\dot{\theta} \dot{\varphi} \sin(\theta) &= 0, \\ 2\ddot{r} m + 2gm \cos(\theta) - 2k(-r + r_0) - 2mr \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

12.61

Составим уравнения движения в форме Лагранжа для системы, представленной на рис. 11. Хотелось бы найти уравнения относительного движения стержня в форме Лагранжа.

Потенциальная энергия стержня

$$\Pi = mgy.$$

Записав кинетическую энергию, рассматривая движение центра масс и вращение относительно него, найдём

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} m (\dot{y}^2 + \omega^2 x^2 + \dot{x}^2) + \frac{1}{12} m l^2 (\dot{\varphi}^2 + \omega^2 \cos^2 \varphi) - mgy. \quad (5.13)$$

В угловой скорости появляется добавка $\omega \cos \varphi$ как проекции $\boldsymbol{\omega}$ на нормаль к стержню.

Уравнения движения системы найдём, как

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \omega^2 x, \\ \ddot{y} = g, \\ \ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin(2\varphi)/2. \end{cases} \quad (5.14)$$

12.88

Пусть на диск действует сила реакции опоры \mathbf{N}_1 , на опору со стороны диска действует $\mathbf{N}_2 = -\mathbf{N}_1$. Связь по определению является идеальной, если

$$\delta A = \sum_i (\mathbf{N}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i) = 0.$$

В рассматриваемой системе в проекцию на ось Oy $\delta r_1 = \delta r_2$. Тогда

$$OY: \quad \delta A = N_1 \delta r_1 + N_2 \delta r_2 = (N_1 - N_1) \delta r_1 = 0,$$

следовательно **связь является идеальной**.

12.73

Выберем начало координат в положение равновесия. Запишем второй закон Ньютона для системы:

$$m\ddot{x} = -cx - \beta v.$$

Формально, мы хотим найти такой $L(x, \dot{x}, t)$, что

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0.$$

При отсутствии вязкого трения L имел бы вид

$$L^* = T - \Pi = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}cx^2.$$

Как мы видим $L^* \neq L(t)$, соответственно энергия такой системы сохраняется. Мы же рассматриваем систему с вязким трением, которая в пределе с $\beta \rightarrow 0$ приходила бы к $L = L^*$ так что будем искать L вида

$$L = f(t) \cdot L^*.$$

В таком случае

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = f(t)m\ddot{x} + \underbrace{\dot{f}(t)m\dot{x}}_{=f(t)\beta} + f(t)cx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0.$$

Воплощая в жизнь стремление сократить уравнение на $f(t)$ находим, что

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{\beta}{m} f(t), \quad \Rightarrow \quad f(t) = \exp\left(\frac{\beta}{m}t\right).$$

Тогда уравнение движения осциллятора с вязким трением можно записать, как уравнение лагранжа второго рода, для лагранжаиана

$$L(x, t) = \exp\left(\frac{\beta}{m}t\right) \cdot \frac{1}{2} (m\dot{x}^2 + cx^2). \quad (5.15)$$

12.82

Знаем, что символ Кристофеля

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^i} \right).$$

Кинетическая энергия склерономной системы в обобщенных координатах запишется как

$$T = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

Хотелось бы в терминах сивола Кристофеля записать уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i.$$

Для начала найдём

$$\frac{\partial T}{\partial q^k} = \frac{1}{2} \dot{q}^i \dot{q}^j \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}.$$

Теперь

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} = \frac{1}{2} g_{ij} \left(\dot{q}^j \delta_k^i + q \delta^i \delta_k^j \right) = g_{kj} \dot{q}^j.$$

Дифференцируя по времени, получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} = g_{kj} \ddot{q}^j + \dot{q}^j \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} \right) = g_{kj} \ddot{q}^j + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^i.$$

Теперь заметим, что

$$\dot{q}^i \dot{q}^j \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} = \dot{q}^j \dot{q}^i \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j}.$$

Тогда

$$Q_k = g_{kj} \ddot{q}^j + \frac{1}{2} \dot{q}^j \dot{q}^i \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right), \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_{kj} \ddot{q}^j + \Gamma_{k,ij} \dot{q}^j \dot{q}^i = Q_k}. \quad (5.16)$$

5.11 Принцип Гамильтона-Остроградского

21.7

Запишем лагранжиан системы

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mx^2\omega^2.$$

В условиях сказано, что $\omega = \omega(t)$ – для простоты рассмотрим $\omega = \text{const}$.

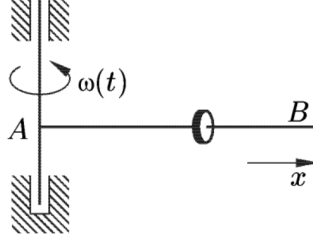


Рис. 12: К задаче 21.7

Действие тогда

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad \Rightarrow \quad \delta S = m\dot{x}\delta x \Big|_{t_1}^{t_2} + m \int_0^t (-\ddot{x} + x\omega^2) \delta x dt = 0.$$

Так приходим к

$$\ddot{x} = \omega^2(t)x, \quad \Rightarrow \quad x = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}.$$

Рассмотрим движение от (x_1, t_1) до (x_2, t_2) , получим СЛУ:

$$\begin{cases} x_1 = Ae^{\omega t_1} + Be^{-\omega t_1} \\ x_2 = Ae^{\omega t_2} + Be^{-\omega t_2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \det = e^{\omega(t_1-t_2)} - e^{-\omega(t_1-t_2)} \neq 0, \quad \text{при } t \neq \text{const},$$

что соответствует существованию единственного решения у уравнения.

Возвращаясь к случаю $\omega = \omega(t)$, хотелось бы показать, что решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \xi(t), \\ \dot{\xi}(t) = x(t)\omega^2(t), \end{cases} \quad \text{с начальными условиями} \quad \begin{cases} x(t_1) = x_1, \\ \xi(t_1) = \xi_1, \end{cases}$$

существует и единственно.

Действительно, из физических соображений, функция $\omega(t)$ непрерывна, соответственно и $\xi(t), x(t)$, тогда решение задачи Коши существует и единственно для любых t_1, t_2 . Для сравнения в Т17 $\varphi(t)$ не является непрерывной функцией, соответственно наблюдаем неединственность решения.

Решаем мы здесь правда краевые задачи, а не задачи Коши, поэтому общий случай нуждается ещё в дополнительном рассуждении. Скорее всего единственность решения будет определяться формой самого Лагранжиана.

21.14 и 21.15

Точка массы m може двигаться по гладкой вертикальной плоскости xz , вращающейся вокруг вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω .

Лагранжиан системы

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}mx^2\omega^2 - mgz. \quad (5.17)$$

Вариация действия

$$\delta S = m \int_A^B (\dot{x}\delta x + \dot{z}\delta z + \omega^2 x\delta x - g\delta z) dt.$$

Посмотрим на действие

$$\begin{aligned} S &= \int_A^B L(x + \delta x, z + \delta z, t) dt = \\ &= \int_A^B L(x, z, t) dt + \underbrace{m \int_A^B \dot{x}\delta\dot{x} + \dot{z}\delta\dot{z} + \omega^2 x\delta x - g\delta z dt}_{\delta S(L(x,z,t))=0} + \frac{1}{2}m \int_A^B (\delta\dot{x})^2 + (\delta\dot{z})^2 + \omega^2(\delta x)^2 dt, \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

21.35

Хотелось бы от действия S вида

$$S = \int_A^B L dt, \quad L = T - \Pi = \frac{1}{2}p_i\dot{q}^i - \Pi$$

к действию (или *укороченному действию*) $\delta S^* = 0$, где S^* вида

$$S^* = \int_A^B n ds, \quad (5.18)$$

где под интегрирование от A до B подразумевается интегрирование уравнение от состояния в точке A до состояния в точке B . Можно было бы сразу получить ответ из принципа Мопертюи, так что давайте его выведем.

Перейдём к энергии системы, как функции p и q , где $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$ – обобщенный импульс. Тогда

$$dS = L dt = (p_i \dot{q}^i - H) dt \Rightarrow S = S_0 - H \cdot (t_B - t_A), \quad (5.19)$$

так как мы рассматриваем аналогию с консервативной системой, то есть $\dot{H} = 0$. Величина S_0 – *укороченное действие*,

$$S_0 = \int_A^B p_i \dot{q}^i dt = 2 \int_A^B (H - \Pi) dt.$$

Найдём dt , как

$$dt = \frac{ds}{v}, \quad v^2 = 2(H - \Pi)/m \Rightarrow dt = \frac{ds}{\sqrt{2(H - \Pi)/m}}.$$

Собирая всё вместе, получаем

$$S_0 = \int_A^B \sqrt{2m(H - \Pi)} ds.$$

Вернёмся к варьированию. Если допускать варьирование конечного момента времени, то

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial t} \delta t = -H \delta t, \quad \Rightarrow \quad \delta S + H \delta t = 0. \quad (5.20)$$

Подставляя (5.19) в (5.20), получим, что

$$\delta S_0 = 0, \quad \Rightarrow \quad \delta \left(\int_A^B \sqrt{2m(H - \Pi)} ds \right) = 0. \quad (5.21)$$

Сравнивая полученное выражение с (5.18), полагая $m = 1$, находим

$$\Pi = -\frac{n^2}{2} + H. \quad (5.22)$$

T17

Рассмотрим движение точки по цилиндру радиуса r_0 . Тогда L

$$L = T - \Pi = T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{q}_i\dot{q}^i = \frac{1}{2}mg_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j = \frac{1}{2}(r_0^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2).$$

Тогда вариация действия для системы (свободной материальной точки)

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}\delta x) = \ddot{x}\delta x + \dot{x}\delta\dot{x} \Rightarrow \delta S = m \int_A^B (r_0^2\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi} + \dot{z}\delta\dot{z}) dt = m(r_0^2\dot{\varphi}\delta\varphi + \dot{z}\delta z) \Big|_A^B + \int_A^B (-r_0^2\ddot{\varphi}\delta\varphi - \ddot{z}\delta z) dt = 0.$$

Вариация на A и B тождественно равна 0, в силу произвольности δz и $\delta \varphi$ получаем, что

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = 0, \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = C_1 t + C_2 \pmod{2\pi}, \\ z = C_3 t + C_4. \end{cases}$$

так как в силу выбора φ верно, что $\varphi + 2\pi k = \varphi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$. В таком случае

$$C_1 = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{t_B - t_A} + \frac{2\pi}{t_B - t_A} k, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

таким образом для свободной материальной точки существует счётное количество истинных путей для перемещения из A в B за фиксированное время $t_B - t_A$.

T18. (I)

Пусть в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2) закреплена цепь с линейной плотностью ρ и массой M . Для цепной линии сначала найдём центр масс y_0 :

$$y_0 = \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} y \cdot \underbrace{\rho \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx}_{dm}.$$

Лагранжиан системы

$$L = T - \Pi = Mg \cdot y_0.$$

В силу независимости L от t верно, что

$$\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L dt \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \delta L = 0, \quad \Rightarrow \quad \delta \left(\int_{x_1}^{x_2} \underbrace{y \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx}_{F(x)} \right) = 0, \quad (5.23)$$

что позволяет нам решать немного другую задачу.

Мы знаем, что на \dot{q}, q равносильны следующие условия

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\dot{q}, q, t)}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}, q, t) dt \right) = 0,$$

при фиксированной длине нити l равной

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}_{\varphi(x)} dx, \quad (5.24)$$

где $y'_x = \dot{y}$ (здесь и далее). Тогда введём² L^*

$$L^*(y, x) = F(x) - \lambda \varphi(x), \quad (5.25)$$

для которого верно, что

$$\delta \left(\int_{x_1}^{x_2} L^*(y, \dot{y}, x) dx \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L^*}{\partial x} = 0. \quad (5.26)$$

Формально мы перешли к решению изопериметрической задачи. Для удобства переобозначим $L^* = L$. Посмотрим на $\partial L / \partial \dot{y} = L_{\dot{y}}$:

$$dL_{\dot{y}}(y, \dot{y}) = \frac{\partial L_{\dot{y}}}{\partial y} dy + \frac{\partial L_{\dot{y}}}{\partial \dot{y}} d\dot{y}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = L_{\dot{y}, y} \dot{y} + L_{\dot{y}, \dot{y}} \ddot{y} - L_y = 0.$$

Домножив на $(-\dot{y})$ получим, как видно, полный дифференциал \smile

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{d\dot{y}}{dx} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \ddot{y} + \dot{y} \left[\frac{\partial L_{\dot{y}}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial L_{\dot{y}}}{\partial \dot{y}} \ddot{y} \right] \right)}_{\text{прибавил/вычел}} = \frac{d}{dx} \left(L - \dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right),$$

откуда (5.26) может быть переписано, как

$$L - \dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = C_1,$$

то есть да, «энергия» сохраняется, x же явно не входит в L^* .

Конкретно в нашем случае,

$$(y + \lambda) \sqrt{1 + \dot{y}^2} - \dot{y}(y + \lambda) \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = C_1, \quad \Rightarrow \quad y + \lambda = C_1 \sqrt{1 + \dot{y}^2}.$$

²О причинах такого решения см. метод решения изопериметрической задачи.

Как известно **синус** замечателен: $1 + \operatorname{sh}^2 \varkappa = \operatorname{ch}^2 \varkappa$, так что пусть $\dot{y} = \operatorname{sh} \varkappa$. Тогда

$$y = C_1 \operatorname{ch} \varkappa - \lambda.$$

Подставив друг в друга последних два выражения, найдём

$$\dot{y} = \frac{dy}{d\varkappa} \cdot \frac{d\varkappa}{dx} = C_1 \frac{d\varkappa}{dx} \operatorname{sh} \varkappa, \quad \Rightarrow \quad x = C_1 \varkappa + C_2.$$

Таким образом мы получаем *уравнение цепной линии*

$$\boxed{y = C_1 \operatorname{ch} \frac{x - C_2}{C_1} - \lambda.} \quad (5.27)$$

Константы могут быть найдены из граничных условий $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ и интеграла (5.24):

$$\operatorname{sh} \frac{x_2 - C_2}{C_1} - \operatorname{sh} \frac{x_1 - C_2}{C_1} = \frac{l}{C_1}.$$

Т18. (II)

Найдём траекторию светового луча в среде с показателем преломления

$$n(z) = n_0 + n_z z.$$

Согласно принципу Ферма, введя $(ds)^2 = (dr)^2 + (dz)^2$, считая $dz/dr = \dot{z}$

$$\delta \left(\int_A^B (n_0 + n_z z) ds \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \delta \left(\int_A^B z \sqrt{1 + \dot{z}^2} dr + \frac{n_0}{n_z} l \right) = 0,$$

где

$$l = \int_A^B \sqrt{1 + \dot{z}^2} dr.$$

Вспомнив (5.25) и (5.24), поймём, что решаем изопериметрическую задачу, которую уже решили в предыдущем пункте, решением является траектория по цепной линии, с $\lambda = -n_0/n_z$:

$$z(r) = \frac{n_0}{n_z} + C_1 \operatorname{ch} \frac{r - C_2}{C_1}, \quad (5.28)$$

где C_1 и C_2 определяются из начальных условий³.

Т19.

Пока не готово.

5.12 Равновесие. Принцип виртуальных перемещений.

14.37

Перейдём в СО, вращающуюся с ω , соответственно хочется ввести потенциальное поле для сил инерции и гравитационных.

$$dF_{\text{и. б.}} = \omega^2 x dm, \quad \Rightarrow \quad d\Pi_{\text{и}} = -\frac{1}{2} \omega^2 x^2 dm.$$

Тогда потенциал

$$\Pi_{\text{г},1} = -\frac{m}{l} \int_0^{l \sin \varphi} \frac{1}{2} \omega^2 x^2 dx = -\frac{m_1 l^2}{6} \omega^2 \sin^2 \varphi.$$

$$\Pi_{\text{г},2} = -\frac{m_2 l^2}{6} \omega^2 \sin^2 \varphi.$$

Полная энергия системы:

$$\Pi = -gl \cos \varphi \left(m_1 + \frac{3}{2} m_2 \right) - \frac{1}{6} \omega^2 l^2 \sin^2 \varphi (m_1 + m_2).$$

Найдём стационарные точки потенциала

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} gl \sin \varphi (m_1 + 3m_2) - \frac{1}{3} \omega^2 l^2 \sin \varphi \cos \varphi (m_1 + m_2) = 0.$$

³Предполагая, что мы хотим пустить луч от точки (z_1, r_1) к (z_2, r_2) , мы сможем сделать это единственным образом, это и задаст C_1 и C_2 .

Находим положения равновесия:

$$\sin \varphi^* = 0, \quad \Rightarrow \quad \varphi^* = 0, \pi.$$

При условии, что rhs следующего уравнения ≤ 1 , найдём также

$$\cos \varphi^* = \frac{2g(m_1 + 3m_2)}{2\omega^2(m_1 + m_2)}, \quad \omega^2 \geq \frac{3g(m_1 + 3m_2)}{2l(m_1 + m_2)}.$$

14.20

Перейдём в СО точки подвеса. В таком случае можно ввести потенциальное поле, гравитационного поля

$$\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \mathbf{w}.$$

Положение равновесия соответствует минимуму потенциала, соответственно наименьший $h_{\text{ц. м.}}$ относительно \mathbf{g}' . В таком случае при $\mathbf{w} \parallel \mathbf{g}$ ниточка останется висеть вертикально. При $\mathbf{g} \nparallel \mathbf{w}$, вводя начало координат в точку подвеса

$$y = x \frac{g - w \sin \alpha}{w \cos \alpha}, \quad a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k. \quad (5.29)$$

14.34

Система движется в потенциальном поле с удерживающей связью:

$$\Pi = \sum_{k=1}^n \alpha_k q_k, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 > 0, \quad \sum_{k=1}^n q_k^2 - 1 \leq 0.$$

Можно было решить задачу на условный экстремум, введя функцию F :

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k q_k - \lambda \left(\sum_{k=1}^n q_k^2 - 1 \right).$$

А можно посмотреть на n -мерную сферу, которой ограничено положение системы на координатном пространстве. Действующая сила тогда

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} = F_i = \alpha_i, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T.$$

Уравнение для сферы

$$\sum q_i^2 = 1.$$

Нас интересует момент, когда радиус вектор сонаправлен с \mathbf{F} , пусть $\mathbf{r} = k\mathbf{F}$.

$$(k\alpha_1)^2 + \dots + (k\alpha_n)^2 = 1, \quad \Rightarrow \quad k = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \right)^{-1/2}.$$

Соответственно искомое положение равновесия

$$\mathbf{r} = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \right)^{-1/2} (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T. \quad (5.30)$$

14.41

Материальная точка может двигаться по линии пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} \text{I:} & -2x_1 + x_2 + x_3 = t \\ \text{II:} & x_1 - 2x_2 + x_3 = -t^2. \end{cases}$$

Найдём систему бесконечно малых возможных перемещений. Знаем, что направляющая прямой,

$$\mathbf{n}_I \times \mathbf{n}_{II} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Хотелось бы найти уравнения прямой, в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}k.$$

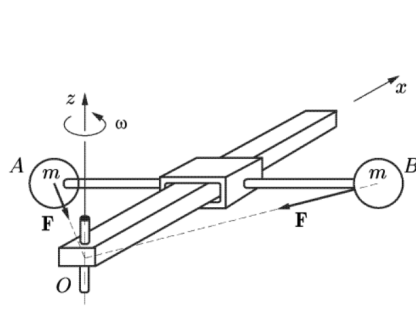


Рис. 13: К задаче 15.5

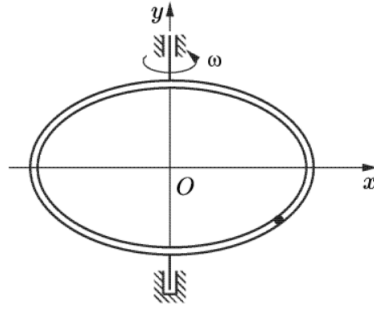


Рис. 14: К задаче 15.9

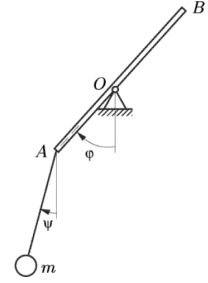


Рис. 15: К задаче 15.13

Подставляя \mathbf{a} в уравнения плоскости, найдём, что

$$x_0 = \frac{1}{3}t(t-2), \quad y_0 = \frac{1}{3}t(2t-1), \quad z_0 = 0.$$

Тогда

$$\mathbf{r} = \frac{t}{3} \begin{pmatrix} t-2 \\ 2t-1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2t-2 \\ 4t-1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В таком случае возможные перемещения:

$$\delta \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \delta k, \quad d\mathbf{r} = \delta \mathbf{r} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} dt = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \delta k + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2t-2 \\ 4t-1 \\ 0 \end{pmatrix} dt.$$

5.13 Устойчивость равновесия консервативных систем.

15.5

Перейдём в СО, вращающуюся вместе с телом. В таком случае в уравнениях «возникнут» силы инерции. Ввиду того что $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}$ запишем

$$\mathbf{F}_и = m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{l}) + m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{l}) = 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 2m\omega^2 \mathbf{r}.$$

Тогда добавка к потенциалу системы будет

$$\Pi_и = -\omega^2 r^2 m.$$

Силы между гантелями и стержнем аналогичны потенциалу

$$\Pi_g = -\frac{\alpha m}{\rho} \times 2, \quad \rho = \sqrt{r^2 + l^2},$$

где r – расстояние от центра до стержня.

Запишем теперь потенциал системы

$$\Pi = -\frac{2\alpha m}{\rho} - \omega^2 r^2 m.$$

Найдём стационарные точки потенциала

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} = \frac{2\alpha m r}{(r^2 + l^2)^{3/2}} - 2\omega^2 r m = 2mr \left(\frac{\alpha}{(r^2 + l^2)^{3/2}} - \omega^2 \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r_1^* = \sqrt{(\alpha/\omega^2)^{2/3} - l^2}, & \omega^2 l^3 < \alpha, \\ r_2^* = 0. \end{cases}$$

И определим локальные экстремумы потенциала

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}(r) = 2m \left(\frac{\alpha}{(r^2 + l^2)^{3/2}} - \frac{\alpha r^2}{(r^2 + l^2)^{5/2}} - \omega^2 \right) ..$$

При $r = r_2^*$ верно, что

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}(0) = \frac{2\alpha}{l^3} - 2\omega^2, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r^* = 0 - \text{устойчиво при} & \omega^2 l^3 < \alpha, \\ r^* = 0 - \text{неустойчиво при} & \omega^2 l^3 > \alpha. \end{cases}$$

Чуть сложнее для $r = r_1^*$, заметим, что случай реализуется только при $\omega^2 l^3 < \alpha$:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}(r_1^*) = \underbrace{(\dots)}_{>0} \left(\alpha^{-2/3} \omega^{4/3} l^2 - 1 \right), \quad a^{-2/3} < \omega^{-4/3} l^{-2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}(r_1^*) < 0.$$

Таким образом $r = r_1^*$ – неустойчивое положение равновесия.

15.9

Параметризуем систему некоторым φ таким, что

$$\begin{cases} x = a \sin \varphi \\ y = b \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Аналогично предыдущим задачам считаем, что движение происходит в поле потенциальных сил (инерции и гравитации):

$$\Pi_g = mgy = mgb \cos \varphi, \quad \Pi_\pi = -\frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = -\frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \sin^2 \varphi.$$

Далее полагая $m = 1$, найдём стационарные точки потенциала

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \sin \varphi \frac{1}{\omega^2 a^2} \left(\cos \varphi + \frac{bg}{\omega^2 a^2} \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sin \varphi^* = 0 \\ \cos \varphi^* = -\frac{bg}{\omega^2 a^2}, \quad bg < \omega^2 a^2 \end{cases}$$

и определим локальные экстремумы потенциала

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \omega^2 a^2 (1 - 2 \cos^2 \varphi) - bg \cos \varphi.$$

Для $\sin \varphi^* = 0$ и, соответственно, $\cos \varphi = \pm 1$, найдём, что

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}(\varphi^*) = -\omega^2 a^2 \mp bg, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (0, b) & - \text{неустойчиво при } \omega^2 a^2 < bg, \\ (0, -b) & - \text{устойчиво при } \omega^2 a^2 < bg, \\ (0, \pm b) & - \text{неустойчиво при } \omega^2 a^2 > bg. \end{cases}$$

Для $\cos \varphi^* = -bg/\omega^2 a^2$, и соответствующего $\sin \varphi^*$ найдём, что при $\omega^2 a^2 > gb$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}(\varphi^*) = \left(1 + \frac{bg}{\omega^2 a^2} \right) (\omega^2 a^2 - bg), \quad \Rightarrow \quad \left(\pm a \sqrt{1 - \frac{g^2 b^2}{\omega^4 a^4}}, -b \frac{gb}{\omega^2 a^2} \right) - \text{устойчивые.}$$

15.13

Запишем потенциал поля гравитационных сил:

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{l_2}{l_1 + l_2} Mgl_2 - \frac{1}{2} \frac{l_1}{l_1 + l_2} Mgl_1 - (l_1 \cos \varphi + l \cos \psi) mg.$$

Заметим, что в Π независимо входит $\cos \psi$, в силу $\Pi \rightarrow \min$ имеет, что $\cos \psi = 1$, $\psi = 0$. Так как связь односторонняя, то невозможно значение $\psi = \pi$. Далее будем решать одномерную задачу.

Найдём стационарные точки потенциала

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} \frac{Mg}{l_1 + l_2} (\sin \varphi) \left(-l_2^2 + l_1^2 + 2l_1(l_1 + l_2) \frac{m}{M} \right), \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sin \varphi^* = 0 \\ 2ml_1 = M(l_2 - l_1) \quad \forall \varphi \text{ система равновесна.} \end{cases}$$

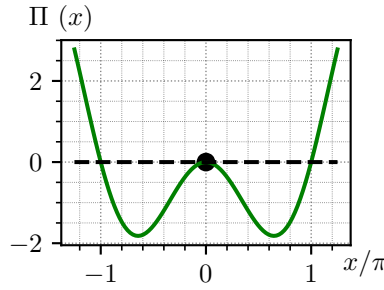
И определим локальные экстремумы

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \underbrace{(\dots)}_{>0} (\cos \varphi) (M(l_1 - l_2) + 2l_1 m), \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varphi = 0 - \text{устойчиво при } 2ml_1 > M(l_2 - l_1) \\ \varphi = \pi - \text{устойчиво при } 2ml_1 < M(l_2 - l_1) \end{cases}$$

и соответствующие положения равновесия неустойчивы при обратных знаках в неравенствах.

15.23

Начнём с того, что условие не корректно. Действительно, давайте посмотрим на близкие к 0 положения равновесия системы с потенциалом $\Pi(x) = -x \sin x$. В точке $x = 0$ существует неустойчивое положение равновесия, однако посмотрим на развитие системы из точки $\{-\pi - \delta, 0\}$, увидим, что на фазовой плоскости

Рис. 16: График $\Pi(x) = -x \sin x$

существует замкнутая орбита (сплюснутая в середине), содержащая $x = 0$. Поэтому докажем, что при наличии устойчивого равновесия, существует замкнутая кривая на фазовой плоскости.

Также хотелось бы что-то сказать при наличии замкнутой траектории о положении равновесия. Можно показать, что при отсутствии других положений равновесия в этой области положение равновесия будет устойчивым. Аналогично можно считать, что положение равновесия устойчиво только если для любой U_ε окрестности существует замкнутая траектория вложенная в U_ε и содержащая точку.

Так как сила $F = F(x)$ и $F(x)$ гладкая, то всегда можно ввести потенциал такой, что

$$-\frac{\partial \Pi(x)}{\partial x} = F(x) = \ddot{x}.$$

Также можно считать, что энергия системы сохраняется, то есть

$$E = \Pi(x) + \frac{1}{2}\dot{x}^2 = \text{const.}$$

Пусть есть устойчивое положение равновесия x^* , тогда мы знаем, что

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial x}(x^*) = 0, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}(x^*) > 0.$$

Тогда возьмём в качестве крайних точек нашей траектории $x_1 = x^* - \delta_1$ и в качестве $x_2 = x^* + \delta_2$, где δ_i — достаточно малая величина, чтобы $x' \notin U_\delta(x^*)$, x' — другое положение равновесия/точка перегиба потенциала. Выберем δ_1, δ_2 так, чтобы

$$\Pi(x^* - \delta_1) = \Pi(x^* + \delta_2).$$

Тогда поместив с 0 скоростью точку x_1 получим замкнутую орбиту $[x_1, x_2]$.

В другую сторону, пусть есть некоторая замкнутая орбита на $[x_1, x_2]$. Тогда верно, что

$$T(x_1) = T(x_2) = 0, \quad -\frac{\partial \Pi}{\partial x}(x_1) > 0, \quad -\frac{\partial \Pi}{\partial x}(x_2) < 0.$$

Тогда по непрерывности $\Pi(x)$ существует x^* такой, что $\partial \Pi(x^*)/\partial x = 0$, при чём, так как это единственная точка экстремума потенциала в $[x_1, x_2]$, то это минимум, $\partial^2 \Pi/\partial x^2(x^*) > 0$, Q. E. D.

6 Контрольная работа II

Задача №1

Рассмотрим движение твёрдого тела с неподвижной точкой O , в частности рассмотрим случай Лагранжа. Хотелось бы найти первые интегралы и какое-нибудь хорошее дифференциальное уравнение для системы, при условии что $(\mathbf{K}_O)_z = 0$ и $\omega_\xi = 0$.

Запишем кинематические и динамические уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{cases} \quad \begin{cases} I_1 \dot{p} + (I_3 - I_2)qr = M_\xi \\ I_2 \dot{q} + (I_1 - I_3)pr = M_\eta \\ I_3 \dot{r} + (I_2 - I_1)pq = M_\zeta \end{cases} \quad \hat{J}_O = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$

При чём в случае Лагранжа сразу находим первый интеграл системы:

$$\mathbf{M}_O = \overrightarrow{OP} \times (m\mathbf{g}), \quad \Rightarrow \quad c\dot{r} = M_\xi = 0, \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} = r = \text{const.} \quad (6.1)$$

По условию $(\mathbf{K}_O)_z = 0$ и $\omega_\xi = 0$. В таком случае энергия системы

$$T + \Pi = \frac{1}{2} A(p^2 + q^2) + mgl \cos \theta = \text{const} = \frac{h}{2}.$$

Подставляя значения из кинематических уравнений, получаем

$$A(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + 2mgl \cos \theta = h = \text{const}. \quad (6.2)$$

Так как $(\mathbf{K}_0)_z = \text{const} = 0$, то

$$Cr \cos \theta + A\dot{\psi} \sin^2 \theta = (\mathbf{K}_0)_z = 0, \quad \Rightarrow \quad A\dot{\psi} \sin^2 \theta = 0.$$

Из последних двух выражений находим, что

$$A\dot{\theta}^2 + 2mgl \cos \theta = h, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} = \frac{mgl}{A} \sin \theta}, \quad (6.3)$$

что и является искомым дифференциальным уравнением второго порядка, относительно угла нутации.

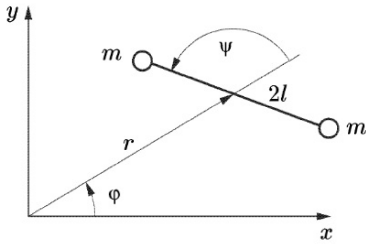


Рис. 17: К задаче №2

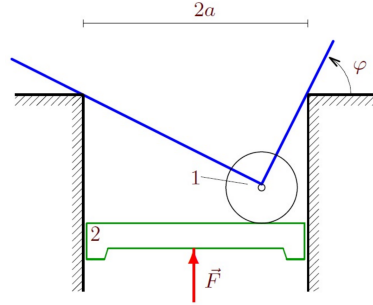


Рис. 18: К задаче №3

Задача №2

Для системы, представленной на рис. 17 найдём лагранжиан. Потенциальная энергия системы (считая, что в $(0, 0)$ находится тело массы $M \gg m$),

$$\Pi = -\frac{2GMm}{r} \stackrel{\text{def}}{=} -\varkappa \frac{m}{r}.$$

Положение массивных тел, из геометрии системы, можем записать, как

$$r_{1,2} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \pm l \begin{pmatrix} -\cos(\varphi + \psi) \\ \sin(\varphi + \psi) \end{pmatrix}.$$

Кинетическая энергия системы теперь может быть записана как

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2),$$

где

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = \dot{r} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \dot{\varphi} + l \begin{pmatrix} \sin(\varphi + \psi) \\ \cos(\varphi + \psi) \end{pmatrix} (\dot{\varphi} + \dot{\psi}), \\ \dot{r}_2 = \dot{r} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \dot{\varphi} - l \begin{pmatrix} \sin(\varphi + \psi) \\ \cos(\varphi + \psi) \end{pmatrix} (\dot{\varphi} + \dot{\psi}), \end{cases} \quad (6.4)$$

что позволяет, наконец, записать лагранжиан системы

$$L = T - \Pi, \quad \Rightarrow \quad L/m = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 (\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 + \frac{\varkappa}{r}. \quad (6.5)$$

Так как на систему действуют только радиальные силы, то

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2 = \text{const}. \quad (6.6)$$

Также сохраняется энергия системы,

$$T + \Pi = \text{const}, \quad \Rightarrow \quad \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 (\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 + \frac{\varkappa}{r} = \text{const}. \quad (6.7)$$

Задача №3

Аналогично предыдущей задаче, найдём уравнения движения системы (рис. 19) в форме Лагранжа. Выберем в качестве начала координат правый верхний угол системы, выбрав оси, как показано на рисунке. По всей видимости будем считать в угла стержни «прикрепленными» к опорам так, чтобы не было отрыва – иначе задача не имеет смысла.

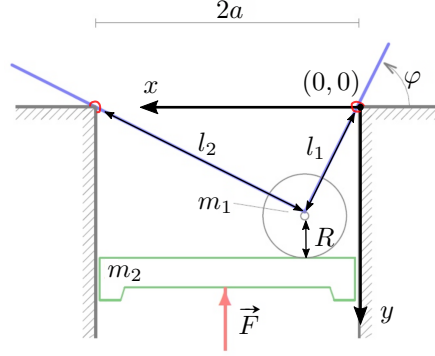


Рис. 19: К задаче №3

Так как на платформу действует постоянная сила \vec{F} , потенциальная энергия системы

$$\tilde{g} = g - \frac{\vec{F}}{m_1 + m_2} = g + 3g = 4g, \quad \Pi = -(m_1 + m_2)\tilde{g}y_1.$$

Координаты диска и платформы, соответственно

$$\mathbf{r}_d = \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_2 \cos \varphi \\ l_2 \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_n = \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ l_2 \sin \varphi + R \end{pmatrix}.$$

Из геометрии системы, можем понять, что

$$l_2/2a = \cos \varphi, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 2a \cos^2 \varphi \\ y_1 = a \sin(2\varphi). \end{cases}$$

Дифференцируя по времени, найдём скорость диска:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = 2a\dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin 2\varphi \\ \cos 2\varphi \end{pmatrix}, \quad \omega R = \dot{x}_1 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{1}{R^2} 4a^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 2\varphi.$$

Кинетическая энергия диска, как сумма поступательной и вращательной

$$T_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 R^2}{2} \right) \frac{1}{R^2} 4a^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 2\varphi + 2a^2 \dot{\varphi}^2 m_1.$$

Для платформы кинетическая энергия, соответственно

$$T_2 = \frac{m_2}{2} \dot{y}_1^2.$$

К огромному счастью трудящихся полная кинетическая энергия системы оказывается равна

$$T = T_1 + T_2 = 6m_2 a^2 \dot{\varphi}^2.$$

Лагранжиан системы

$$L = T - \Pi = 6m_2 a^2 (a\dot{\varphi}^2 + 2g \sin 2\varphi). \quad (6.8)$$

Запишем уравнение Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = \frac{2g}{a} \cos(2\varphi). \quad (6.9)$$

Решение этого дифференциального уравнения в терминах аналитических функций не представляется возможным, однако можем посмотреть на происходящее вблизи положения равновесия:

$$\ddot{\varphi} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \pi/4.$$

В таком случа рассмотрим $\alpha: 2\varphi = \pi/2 + \alpha$,

$$\boxed{\ddot{\alpha} = -\omega^2 \sin \alpha}, \quad \omega^2 = \frac{4g}{a}. \quad (6.10)$$

И, при малых α , получили гармонический осциллятор:

$$\alpha = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t.$$

Из начальных условий (при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$), находим, что

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{4} + \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right) \cos \omega t, \quad \dot{\varphi} = \left(\frac{\pi}{4} - \varphi_0\right) \omega \sin \omega t.$$

Если нас интересует угловая скорость $\dot{\varphi}$ в момент, когда $\varphi = \varphi_1$, то

$$\dot{\varphi}(t_1) = \pm 2\sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \sqrt{\left(\varphi_1 + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)(\varphi_1 - \varphi_0)}, \quad 0 < \varphi_0 - \pi/4 < \varphi_1 - \pi/4 \ll 1. \quad (6.11)$$