Первое задание по курсу «Аналитическая Механика»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *25 октября 2020 г.*

Содержание

1 Кинематика

1.1 Криволинейные координаты

T1.

Найдём ковариантные и контрвариантные компоненты $\boldsymbol{a}$. Учитывая, что тензор однозначно задаётся координатами в некотором базисе:

$$\exists \boldsymbol{b} = a^i \boldsymbol{g}_i \ \Big|_{\cdot \boldsymbol{g}^j} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{g}^j) = a^i (\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j) = a^i \delta_i^j = a^j \quad \Rightarrow \quad a^i \boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{a}.$$

Аналогично

$$\exists \boldsymbol{b} = a_i \boldsymbol{g}^i \ \Big|_{\cdot \boldsymbol{g}_j} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{g}_j) = a_i (\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_j) = a_i \delta_j^i = a_j \quad \Rightarrow \quad a_i \boldsymbol{g}^i = \boldsymbol{a}.$$

Теперь научимся жонглировать индексами.

$$\exists \boldsymbol{b}^i = g^{ij} \boldsymbol{g}_j \ \Big|_{\cdot \boldsymbol{g}^n} \quad \Rightarrow \quad g^{ij} \boldsymbol{g}_g \boldsymbol{g}^n = g^{ij} \delta_j^n = g^{in} = (\boldsymbol{k}^i \cdot \boldsymbol{g}^n) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g}^i = g^{ij} \boldsymbol{g}_j.$$

Для $g_{ij} \boldsymbol{g}^j = \boldsymbol{g}_i$ доказательство аналогично. Наконец,

$$\delta_i^j = (\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j) = \left(g_{ik} \boldsymbol{g}^k \cdot g^{jn} \boldsymbol{g}_n \right) = g_{ik} g^{jn} \delta_n^k = g_{ik} g^{kj}.$$

Теперь, для жонглирования над координатой:

$$\exists \boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{g}^i \ \Big|_{\cdot \boldsymbol{g}^j} \quad \Rightarrow \quad a^j = g^{ij} a_i.$$

T2.

Найдём локальный базис/матрицу перехода из ПДСК для $\boldsymbol{r}(\sigma, \tau, z)$:

$$\boldsymbol{r}(\sigma, \tau, z) = \begin{pmatrix} \sigma\tau \\ (\tau^2 - \sigma^2)/2 \\ z \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \tau & \sigma & 0 \\ -\sigma & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad g_{ij} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J} = \operatorname{diag}(\tau^2 + \sigma^2, \tau^2 + \sigma^2, 1).$$

Зафиксировав значения всех кроме одной переменных найдём координатные линии, затем построим координатные поверхности (см. рис. 1).

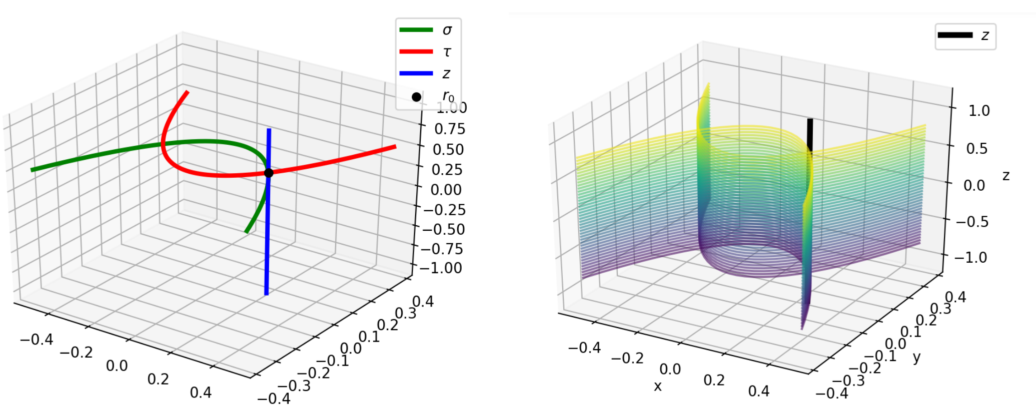


Рис. 1: Координатные линии и координатные поверхности.

T3.

Найдём метрический тензор g_{ij} для криволинейных координат (r, φ), задающих положение точки на параболоиде $z = a(x^2 - y^2)$, при $a = \text{const}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ ar^2\cos(2\varphi) \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} \quad \Rightarrow \quad g_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 2ar\cos(2\varphi) \end{pmatrix}; \quad g_\varphi = \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ -2ar^2\sin(2\varphi) \end{pmatrix}$$

Тогда метрический тензор:

$$\begin{aligned}
&g_{ig} = (\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j);\\
&g_{11} = 4a^2r^2\cos^2(2\varphi) + \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi);\\
&g_{12} = g_{21} = -2a^2r^3\sin(4\varphi);\\
&g_{22} = 4a^2r^4\sin^2(2\varphi) + r^2\sin^2(\varphi) + r^2\cos^2(\varphi).
\end{aligned}$$

Объединяя,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 16a^2r^2\sin^4(\varphi) - 16a^2r^2\sin^2(\varphi) + 4a^2r^2 + 1 & -2a^2r^3\sin(4\varphi) \\ -2a^2r^3\sin(4\varphi) & -16a^2r^4\sin^4(\varphi) + 16a^2r^4\sin^2(\varphi) + r^2 \end{pmatrix}.$$

Или,

$$g^{ij} = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-16a^2r^2\sin^4(\varphi)+16a^2r^2\sin^2(\varphi)+1}{4a^2r^2+1} & \frac{2a^2r\sin(4\varphi)}{4a^2r^2+1} \\ \frac{2a^2r\sin(4\varphi)}{4a^2r^2+1} & \frac{16a^2r^2\sin^4(\varphi)-16a^2r^2\sin^2(\varphi)+4a^2r^2+1}{4a^2r^4+r^2} \end{pmatrix}.$$

Соответсвенно,

$$\boldsymbol{g}^r = g^{rr}g_r + g^{r\varphi}g_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\left(8a^2r^2\sin^2(\varphi)+1\right)\cos(\varphi)}{4a^2r^2+1} \\ \frac{\left(8a^2r^2\cos^2(\varphi)+1\right)\sin(\varphi)}{4a^2r^2+1} \\ \frac{2ar\cos(2\varphi)}{4a^2r^2+1} \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{g}^\varphi == g^{\varphi r}g_r + g^{\varphi\varphi}g_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\left(-8a^2r^2\sin^2(\varphi)+4a^2r^2-1\right)\sin(\varphi)}{r(4a^2r^2+1)} \\ \frac{\left(8a^2r^2\cos^2(\varphi)-4a^2r^2+1\right)\cos(\varphi)}{r(4a^2r^2+1)} \\ -\frac{2a\sin(2\varphi)}{4a^2r^2+1} \end{pmatrix}.$$

На всякий случай проверим в $SymPy$, что

$$\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}^r = 1; \qquad \boldsymbol{g}_\varphi\boldsymbol{g}^\varphi = 1; \qquad \boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}^\varphi = 0; \qquad g^{ij}g_{ji} = \delta_i^j.$$

Вот.

T4.

Пусть $R = x^2 + y^2 + z^2$, найдём частную производную $\partial R/\partial x$тогда

1. $R(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$ $\qquad \partial R/\partial x = 2x.$
2. $R(x, r, z) = r^2 + z^2.$ $\qquad \partial R/\partial x = 0.$
3. $R(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 - y^2)^2.$ $\qquad \partial R/\partial x = 2x + 4x(x^2 - y^2).$
4. $R(x, r) = r^2 + (x^2 - y^2)^2 = r^2 + (2x^2 - r^2)^2.$ $\qquad \partial R/\partial x = 16x^3 - 8xr^2.$
5. $R(x, z) = x^2 + (x^2 - z) + z^2 = 2x^2 - z + z^2.$ $\qquad \partial R/\partial x = 4x.$

T5.

Для первого выражения, обозначим $(\boldsymbol{g}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial q^k}) \overset{\text{def}}{=} \Xi_{ik}^j$.

$$\Gamma_{ijk} = \left(\boldsymbol{g}_i, \frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial q^k}\right) = \left(\boldsymbol{g}_i, \frac{\partial (g_{jn}\boldsymbol{g}^n)}{\partial q^k}\right) = g_{jn}\underbrace{\left(\boldsymbol{g}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{g}^n}{\partial q^k}\right)}_{\Xi_{ik}^n} + \frac{\partial g_{jn}}{\partial q^k}\underbrace{(\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^n)}_{\delta_i^n} = g_{jn}\Xi_{ik}^n + \underbrace{\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}}_{\partial g_{jn}/\partial q^k}.$$

Домножив обе части на g^{jm}, получим

$$\Xi_{ik}^n g_{nj} g^{jm} = \Xi_{ik}^n \delta_n^m = \Xi_{ik}^m = \boxed{\left(\boldsymbol{g}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{g}^m}{\partial q^k}\right) = -\Gamma_{jik}g^{jm}}$$

Для второго выражения рассмотрим значение квадрата произведения при фиксированных $i \neq j \neq k$:

$$\underbrace{(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k)^2}_{\det g_{mn}} \cdot \underbrace{(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}^k)^2}_{\det g^{nk}} = \det g_{mn}g^{np} = \det \delta_m^p = 1. \qquad \Rightarrow \qquad (\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k) \cdot (\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}^k) = 3! = 6.$$

Важно заметить, что -1 не является возможным значением произведения таких смешанных произведений, т.к. левой тройке в первом сомножители будет соответствовать тройка во втором сомножителе.

1.2 Кинематика точки

1.12*

Параметризуем движение точки некоторым $\varphi(t)$:

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -a\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y} = b\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -a\dot{\varphi}^2\cos\varphi - a\ddot{\varphi}\sin\varphi = 0 \\ \ddot{y} = -b\dot{\varphi}^2\sin\varphi + b\ddot{\varphi}\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}\operatorname{tg}\varphi = 0. \tag{1.1}$$

Решением этого уравнения является

$$\varphi(t) = \arccos(c_1 + c_2 t).$$

С учётом начальных условий получим ($x(0) = 0$, $\dot{x} =$), что

$$\dot{\varphi}c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{v_0}{a}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \arccos(v_0 t/a).$$

Немного упростим выражения для $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = -\frac{v_0}{a\sin\varphi}, \quad \ddot{\varphi} = -\frac{\dot{\varphi}^2}{\operatorname{tg}\varphi},$$

теперь найдём $\ddot{y}(\sin\varphi)$:

$$\ddot{y} = -b\dot{f}\sin\varphi + v\ddot{\varphi}\cos\varphi = -b\frac{v_0^2}{a^2\sin^2\varphi}\sin\varphi - b\left(\frac{v_0}{a}\right)^2\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi\operatorname{tg}\varphi} = -\frac{b}{a^2}v_0^2\left(\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{\sin^3\varphi}\right) = -\frac{b}{a^2}v_0^2\frac{1}{\sin^3\varphi}.$$

Подставив $y = b\sin\varphi$, найдём

$$\ddot{y}\left(y = \frac{b}{2}\right) = -\frac{8b}{a^2}v_0^2.$$

1.19

Знаем, что в полярных координатах

$$\begin{cases} r = \dfrac{p}{1 + e\cos\varphi} \\ r^2\dot{\varphi} = c = \text{const} \end{cases} \quad \text{в полярных координатах} \quad \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}. \tag{1.2}$$

Вспомним, что

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = \frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right).$$

Найдём $\ddot{r}$:

$$r + er\cos\varphi = p \overset{d/dt}{\Rightarrow} \dot{r} + e\dot{r}\cos\varphi - er\dot{\varphi}\sin\varphi = 0 \overset{d/dt}{\Rightarrow} \ddot{r}(1 + e\cos\varphi) - e\dot{r}\sin\varphi\left(\dot{\varphi} - \frac{c}{r^2}\right) - \frac{ec}{r}\frac{c}{r^2}\cos\varphi = 0$$

Выразим и подставим $\dot{\varphi}$ и получим

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}, \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = \frac{c^2}{r^2 p}\left(\frac{p}{r} - 1\right), \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_r = -\frac{c^2}{pr^2}, \quad w_\varphi = 0.}$$

1.37(в)

Найдём скорость точки и проекции её ускорения на касательные к координатным линиям для координат параболического цилиндра σ, τ, z. Для начала найдём координатные векторы и метрический тензор:

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\tau \\ \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2) \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g}_\sigma = \begin{pmatrix} \tau \\ -\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{g}_\tau = \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{g}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} \tau^2 + \sigma^2 & 0 \\ 0 & \tau^2 + \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$v^2 = \dot{\sigma}^2(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{\tau}^2(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{z}^2, \quad v = \sqrt{(\dot{\tau}^2 + \dot{\sigma}^2)(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{z}^2}$$

Для i-ой ковариантной координаты ускорения верно, что

$$w_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial(v^2/2)}{\partial\dot{q}^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i}. \tag{1.3}$$

С учётом коэффициенты Ламе ($H_\tau = H_\sigma = \sqrt{\sigma^2+\tau^2}, H_z = 1$), найдём проекции

$$
\begin{aligned}
w_\tau &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\left(\ddot{\tau}(\tau^2+\sigma^2) + \dot{\tau}^2\tau + 2\dot{\sigma}\dot{\tau}\sigma - \tau\dot{\sigma}^2\right);\\
w_\sigma &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\left(\ddot{\sigma}(\tau^2+\sigma^2) + \dot{\sigma}^2\sigma + 2\dot{\tau}\dot{\sigma}\tau - \sigma\dot{\tau}^2\right);\\
w_z &= \ddot{z}.
\end{aligned}
$$

1.45

Выразим орты сопровождающий трехгранника $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ через $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$, с учётом $w \times \boldsymbol{v} \neq 0$, $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{v} > 0$. Так как $\boldsymbol{v} \nparallel \boldsymbol{w}$, то

$$
\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|}.
$$

Выразим $\boldsymbol{\tau}$.

$$
\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}, \qquad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = v\dot{\tau}, \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{v}}{v}.
$$

И найдём $\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\tau}]$, раскрывая двойное векторное произведение (формула Лагранжа), получим

$$
\boldsymbol{n} = \left[\frac{\boldsymbol{v}}{v}\times\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|}\right] = \frac{(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v} - v^2\boldsymbol{w}}{v|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|}.
$$

T6.

Рассмотрим движение точки в цилиндрических координатах:

$$
\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g_{ij} = \mathrm{diag}(1, r^2, 1)
$$

Для начала выразим ковариантные координаты ускорений:

$$
w_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial(v^2/2)}{\partial q\delta^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i} \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{aligned} w_r &= \ddot{r} - r\dot{f}^2 \\ w_\varphi &= \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) \\ w_z &= \ddot{z}. \end{aligned}\right.
$$

По условию хотим, чтобы $w_\varphi = w_z = 0, r = \mathrm{const}$. Проинтегрировав дважды по времени получим систему уравнений

$$
\begin{cases} \varphi = c_1 t + c_2; \\ z = c_3 t + c_4, \end{cases}
$$

Где c_1, c_2, c_3, c_4 –некоторые константы. Построим полученные траектории положив $c_2 = c_4 = 0$ и отмасштабировав к $c_1 = 1$ (см. рис. (2)).

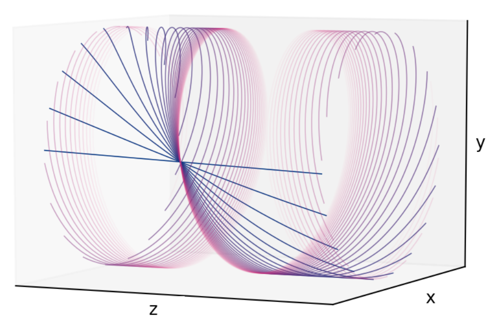


Рис. 2: Возможные геодезические цилиндра.

T7.

Найдём $\partial v_k/\partial v_j$, при $v_k = v_k(q^i, v^i)$. Далее будем пользоваться тем, что $g_{ig} = g_{ig}(q^i)$.

$$
v_k(q^i, v^i) = g_{ki}v^i \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial v_k}{\partial v^j} = g_{ki}\frac{\partial v^i}{\partial v^j} = g_{ki}\delta^i_j = g_{kj}.
$$

Теперь найдём $\partial v_k/\partial q^j$, при $v_k = v_k(q^i, v^i)$.

$$
\frac{\partial v_k(q^i, v^i)}{\partial q^j} = v^i\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j}\right) = v^i\left(\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial q^j}, \boldsymbol{g}_i\right) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial q^j}, \boldsymbol{g}_k\right)\right) = v^i\left(\Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji}\right).
$$

Теперь найдём $\partial v_k/\partial q^j$, при $v_k = v_k(q^i, v_i)$. Но тут так как функция выражается через саму себя, то при частном дифференцировании, $v_k = \mathrm{const}$, тогда $\partial v_k(q^i, v_i)/\partial q^j = 0$.

T8.*

Найдём $v_i\dot v^i - v^i\dot v_i$. Перейдём к контравариантным координатам:

$$v_i\dot v^i - v^i\dot v_i = g_{ij}v^i v^j - v^i\frac{d}{dt}\left(g_{ij}v^j\right) = g_{ij}v^j\dot v^i - v^i v^j\dot g_{ij} - g_{ij}v^i\dot v^j$$

В силу симметричности метрического тензора $g_{ij} = g_{ji}$, получим, что

$$v_i\dot v^i - v^i\dot v_i = -v^i v^j\dot g_{ij}.$$

Подставил для параболических и полярных координат, сходится.

1.3 Кинематика твёрдого тела

3.24

Запишем $\boldsymbol{v}_B$, выбрав в качестве полюса точку A и точку C.

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AB} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega}_{BC}\times\overrightarrow{CB}, \tag{1.4}$$

или, расписав по координатам,

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-r\cos\alpha\\r\sin\alpha\\0\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AB}} + \begin{pmatrix}v\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_C\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\omega_{BC}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3r\cos\alpha\\-3r\sin\alpha\\0\end{pmatrix},$$

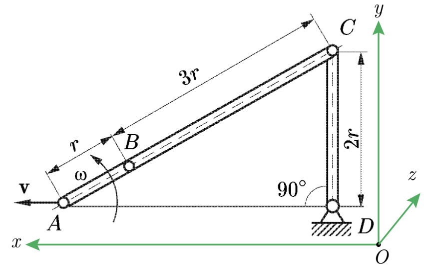


Рис. 3: К задаче 3.24.

получим два содержательных уравнения

$$\left.\begin{aligned}-r\omega\sin\alpha + v &= v_c + 3r\omega_{BC}\sin\alpha\\ -r\omega\cos\alpha + 0 &= 0\ \ + 3r\omega_{BC}\cos\alpha\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\boldsymbol{\omega}_{BC} = -\frac{\boldsymbol{\omega}}{3},\qquad \boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}.}$$

Для поиска $\mathbf{w}_C$, запишем условия жёсткости стержней BC и CD. Дифференцируя по времени, получим

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{v}_B\cdot\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{v}_C\cdot\overrightarrow{BC};\\ &\boldsymbol{v}_C\cdot\overrightarrow{DC} = 0.\end{aligned}\right\}\ \overset{d/dt}{\Rightarrow}\ \begin{cases}\mathbf{w}_B\cdot\overrightarrow{BC} + \boldsymbol{v}_B\cdot\dot{\overrightarrow{BC}} = \mathbf{w}_C\cdot\overrightarrow{BC} + \boldsymbol{v}_C\cdot\dot{\overrightarrow{BC}};\\ \mathbf{w}_C\cdot\overrightarrow{DC} + \boldsymbol{v}_C\cdot\dot{\overrightarrow{DC}} = 0.\end{cases}\tag{1.5}$$

Выразим $\mathbf{w}_B$ из уравнения Ривальса:

$$\mathbf{w}_B = \underbrace{\mathbf{w}_A}_{0} + \underbrace{\dot\omega_{AB}\times\overrightarrow{AB}}_{0} + \boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AB}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-r\omega\sin\alpha\\-r\omega\cos\alpha\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\omega^2\cos\alpha\\-r\omega^2\sin\alpha\\0\end{pmatrix}.$$

В первом уравнении (1.5), зная $\dot{\overrightarrow{BC}} = \boldsymbol{\omega}_{BC}\times\overrightarrow{BC} = (\omega r\sin\alpha,\ \omega r\cos\alpha,\ 0)^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{v}_B$ из (1.4), получим

$$\mathbf{w}_C\cdot\overrightarrow{BC} = -4\omega^2 r^2. \tag{1.6}$$

Во втором уравнении (1.5), зная $\dot{\overrightarrow{DC}} = \boldsymbol{\omega}_{DC}\times\overrightarrow{DC} = \boldsymbol{v}_C$, получим

$$\mathbf{w}_C\cdot\overrightarrow{DC} = -v^2. \tag{1.7}$$

Из (1.7), мы знаем $(\mathbf{w}_C)_y$, расписав в (1.6) проекцию на BC покоординатно, получим

$$\left.\begin{aligned}-4\omega^2r^2 &= 3r(-\mathrm{w}_{Cx}\cos\alpha + \mathrm{w}_{Cy}\sin\alpha);\\ \mathrm{w}_{Cy} &= -v^2/2r.\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{w}_C = \begin{pmatrix}\mathrm{w}_{Cx}\\\mathrm{w}_{Cy}\\0\end{pmatrix},\quad\text{где}\quad \mathrm{w}_{Cx} = \frac{8\sqrt3}{9}\omega^2 r - \frac{\sqrt3}{6}\frac{v^2}{r},\ \mathrm{w}_{Cy} = -\frac{v^2}{2r}.$$

Собственно[1], $\|\mathbf{w}_C\|^2 = \frac{64}{27}\omega^4r^2 - \frac{8}{9}\omega^2v^2 + \frac{1}{3}v^4/r^2$.

4.4

Запишем в координатах ω_1 и ω_2.

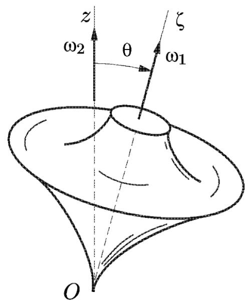
$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{pmatrix}0\\\omega_1\sin\theta\\\omega_1\cos\theta\end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\\omega_2\end{pmatrix}.$$

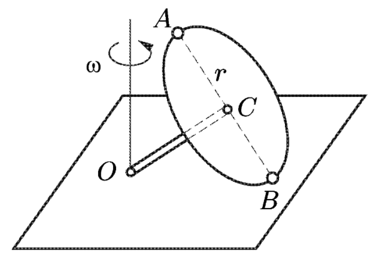
[1] Вычисления доступны здесь.

Так как оси ω_1 и ω_2 пересекаются, угловая скорость и угловое ускорение можно найти, как

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \sin\theta \\ \omega_2 + \omega_1\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{pmatrix} \omega_1\omega_2\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что очень похоже на правду.





Рисунки к задачам 4.4 и 4.10.

4.10

Запишем $\boldsymbol{v}_c$, как результат движения стержня и диска. Пусть Ω – угловая скорость вращения диска, $\parallel OB$.

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OC}.$$

Другими словами, в координатной записи,

$$\begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{r}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{r}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega = -\sqrt{3}\omega}.$$

Угловое ускорение стержня найдём, как движение в СО стержня,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^a = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\varepsilon \\ -\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3}\omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\varepsilon \\ 0 \\ \sqrt{3}\omega^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon^a = \sqrt{3\left(\varepsilon^2 + \omega^4\right)}},$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon}^r = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}\right) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} -\sqrt{3}\omega \\ -\omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\varepsilon \\ -\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь, из сложения ускорений,

$$\mathbf{w}^a = \underbrace{\mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}}_{\mathbf{w}^e} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}^r}_{\mathbf{w}^c} + \mathbf{w}^r,$$

найдём $\mathbf{w}^a_B$:

$$\mathbf{w}^a_B = \mathbf{0} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{OB} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OB}\right) + 2\boldsymbol{\omega} \times \left(-\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OB}\right) + \mathbf{w}^r_B.$$

Теперь найдём $\mathbf{w}^r_B$, как

$$\mathbf{w}^r_B = \mathbf{w}^r_\tau + \mathbf{w}^r_n = -\varepsilon r \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \omega^2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -r \\ r\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя, дойдём до

$$\boxed{\mathbf{w}^a_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3}\omega^2 r \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{w}^r_B\| = 2\sqrt{3}\omega^2 r,$$

что, достаточно, логично.

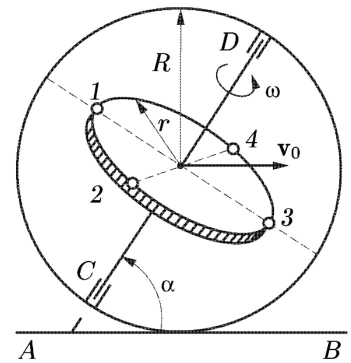
Аналогично найдём $\mathbf{w}^r_A$:

$$\mathbf{w}^r_B = \mathbf{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} r - \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} r + 2\omega^2 r \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} - \varepsilon r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{w}^r_B = r \begin{pmatrix} 3\omega^2 \\ 2\sqrt{3}\omega^2 \\ -3\varepsilon \end{pmatrix}}.$$

И найдём норму ускорения точки A

$$\|\mathbf{w}_A^a\| = \sqrt{21\omega^4 r^2 + 9\varepsilon^2 r^2}.$$

4.12



Расмотрим движение интересных нам точек, как движение в СО обруча, с

$$\boldsymbol{v}^e = \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\omega}^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v/R \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}^e = \mathbf{0}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{0}.$$

Найдём радиус векторы до интересных нам точек:

$$\overrightarrow{O1} = \begin{pmatrix} -r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{O2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{O3} = \begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ -r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{O4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}.$$

Тогда, из теоремы о сложении скоростей, получим значения для $\boldsymbol{v}_i^a$:

$$\boldsymbol{v}_i^a = \underbrace{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}^e \times \overrightarrow{Oi}}_{\boldsymbol{v}_i^e} + \underbrace{\boldsymbol{\omega}^r \times \overrightarrow{Oi}}_{\boldsymbol{v}_i^r}.$$

Подставляя значения, получим, что

$$\boldsymbol{v}_1^a = \begin{pmatrix} v\,(R + r\cos\alpha)/R \\ rv\sin\alpha/R \\ \omega r \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2^a = \begin{pmatrix} \omega r\sin\alpha + v \\ -\omega r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3^a = \begin{pmatrix} v\,(R - r\cos\alpha)/R \\ -rv\sin\alpha/R \\ -\omega r \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4^a = \begin{pmatrix} -\omega r\sin\alpha + v \\ \omega r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Или, переходя к значениями $\|\boldsymbol{v}_i^a\|$:

$$\|\boldsymbol{v}_1^a\| = \left(/R^2\omega^2 r^2 + R^2 v^2 + 2Rrv^2\cos(\alpha) + r^2v^2\right)/R^2, \qquad \|\boldsymbol{v}_2^a\| = \omega^2 r^2 + 2\omega rv\sin(\alpha) + v^2,$$
$$\|\boldsymbol{v}_3^a\| = \left(R^2\omega^2 r^2 + R^2 v^2 - 2Rrv^2\cos(\alpha) + r^2v^2\right)/R^2, \qquad \|\boldsymbol{v}_4^a\| = \omega^2 r^2 - 2\omega rv\sin(\alpha) + v^2.$$

Что соответсвует ответам учебника.

Теперь, из теоремы о сложении скоростей, найдём $\mathbf{w}_i^a$

$$\mathbf{w}_i^a = \underbrace{0 + 0 + \boldsymbol{\omega}^e \times \boldsymbol{\omega}^e \times \overrightarrow{Oi}}_{\mathbf{w}^e} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega}^e \times \left(\boldsymbol{\omega}^r \times \overrightarrow{Oi}\right)}_{\mathbf{w}^c} + \underbrace{-\,\omega^2 \cdot \overrightarrow{Oi}}_{\mathbf{w}_i^r}.$$

Подставляя значения, получим, что

$$\mathbf{w}_1^a = \frac{r\left(R^2\omega^2 + v^2\right)}{R^2}\begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2^a = -\omega r\begin{pmatrix} 2v\cos\alpha/R \\ 2v\sin\alpha/R \\ \omega \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{w}_3^a = \frac{r\left(R^2\omega^2 + v^2\right)}{R^2}\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_4^a = \omega r\begin{pmatrix} 2v\cos\alpha/R \\ 2v\sin\alpha/R \\ \omega \end{pmatrix}.$$

Или, переходя к нормам, получим, что

$$\|\mathbf{w}_1^a\| = \frac{r^2\left(R^2\omega^2 + v^2\right)^2}{R^4}, \quad \|\mathbf{w}_2^a\| = \frac{\omega^2 r^2\left(R^2\omega^2 + 4v^2\right)}{R^2}, \|\mathbf{w}_3^a\| = \frac{r^2\left(R^2\omega^2 + v^2\right)^2}{R^4}, \quad \|\mathbf{w}_4^a\| = \frac{\omega^2 r^2\left(R^2\omega^2 + 4v^2\right)}{R^2}.$$

4.32

Нам известно $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^{\mathrm{T}}$, из задачи **1.45** знаем, как выразить направляющие трёхгранника Френе $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}$, через $\dot{\boldsymbol{r}}$ и $\ddot{\boldsymbol{r}}$, соотвественно считаем известными $\rho, \varkappa$. В выводе теоремы сложения ускорений использовалось, что

$$\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega}^e \times \boldsymbol{e}_i. \tag{1.8}$$

Также мы знаем, что

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nu}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\tau} + \varkappa\boldsymbol{\beta}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\varkappa\boldsymbol{\nu}. \tag{1.9}$$

Тогда, из покоординатной записи, в $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta})$,получим систему уравнений, решая которую получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}v \\ \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}v \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nu}v &= \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\tau} \\ -v\varkappa\boldsymbol{\nu} &= \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\beta} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \omega_\tau &= v\varkappa \\ \omega_\nu &= 0 \\ \omega_\beta &= v/\rho \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau})(\varkappa\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\beta}/\rho)}.$$

4.37

Пусть $\boldsymbol{\omega}^r$ – угловая скорость тела в СО Земли, посмотрим на угловое ускорение твёрдого тела относительно СО, в данный момент времени совпадащей с направлениями: $\boldsymbol{e}_i \parallel \boldsymbol{\omega}_i$, с полюсом в неподвижной точке тела.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^a = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}_1\frac{\boldsymbol{\omega}_1}{\omega_1} + \dot{\omega}_2\frac{\boldsymbol{\omega}_2}{\omega_2} + \dot{\omega}_3\frac{\boldsymbol{\omega}_3}{\omega_3} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} = \dot{\omega}_1\frac{\boldsymbol{\omega}_1}{\omega_1} + \dot{\omega}_2\frac{\boldsymbol{\omega}_2}{\omega_2} + \dot{\omega}_3\frac{\boldsymbol{\omega}_3}{\omega_3},$$

так как оси жёстко связаны с самим телом.

4.50

Знаем, что скорость некоторой точки твёрдого тела можем записать, как

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 + \begin{pmatrix} \omega_y r_z - \omega_z r_y \\ \omega_z r_x - \omega_x r_z \\ \omega_x r_y - \omega_y r_x \end{pmatrix}.$$

Тогда, прямой подстановкой, получим, что

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \cancel{\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_0} + \operatorname{rot}\begin{pmatrix} \omega_y r_z - \omega_z r_y \\ \omega_z r_x - \omega_x r_z \\ \omega_x r_y - \omega_y r_x \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}\omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z\end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}.$$

1.4 Сложное движение точки и твёрдого тела

2.15

Для началача найдём, что

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}_p^r &= \boldsymbol{a}\cdot(1+\sin\omega_0 t) \\ \boldsymbol{v}_p^r &= \boldsymbol{a}\cdot\omega_0\cos\omega_0 t \\ \mathbf{w}_p^r &= -\boldsymbol{a}\cdot\omega_0^2\sin\omega_0 t \end{aligned}\right\} \text{ в СО стержня, где } \boldsymbol{a} = a\begin{pmatrix}\sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0\end{pmatrix}.$$

Запишем абсолютную скорость $\boldsymbol{v}_p^a$ точки P,

$$\boldsymbol{v}_p^a = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_p^r + \boldsymbol{v}_p^r = a\omega(1+\sin\omega_0 t)\begin{pmatrix}-\cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0\end{pmatrix} + a\omega_0\cos\omega_0 t\begin{pmatrix}\sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0\end{pmatrix}$$

Тогда норма $\|\boldsymbol{v}_p^a\|$ такая, что

$$\|\boldsymbol{v}_p^a\|^2 = a^2\left(\omega^2(1+\sin\omega_0 t) + \omega_0^2\cos\omega_0 t\right).$$

Запишем абсолютное ускорение $\mathbf{w}_p^a$ точки P,

$$\mathbf{w}_p^a = -\omega^2\boldsymbol{r}_p^r + 0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_p^r + 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_p^r + \mathbf{w}_p^r = \left(a(\omega^2+\omega_0^2)\sin\omega_0 t + \omega^2\right)\begin{pmatrix}-\sin\omega t \\ -\cos\omega t \\ 0\end{pmatrix} + 2a\omega\omega_0\cos\omega_0 t\begin{pmatrix}-\cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0\end{pmatrix}.$$

Тогда норма $\|\mathbf{w}_p^a\|^2$ такая, что

$$\|\mathbf{w}_p^a\|^2 = \left(a(\omega^2+\omega_0^2)\sin\omega_0 t + \omega^2\right)^2 + 4a^2\omega^2\omega_0^2\cos^2\omega_0 t.$$

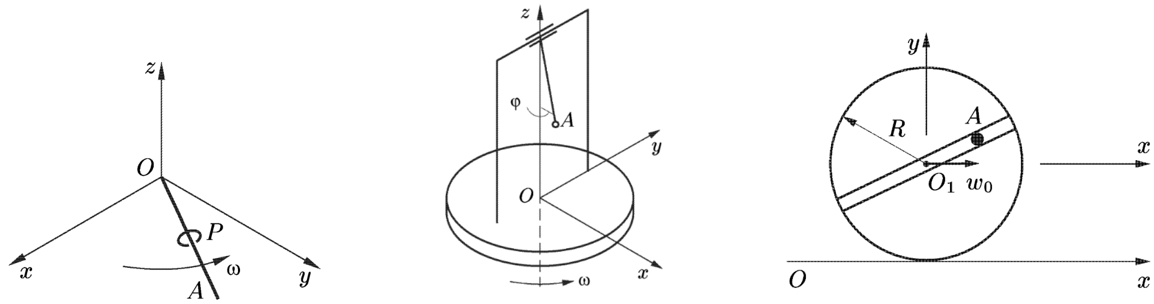


Рис. 4: Рисунки к задачам 2.15, 2.19 и 2.35.

2.19

Для начала найдём и выразим все интересные нам векторы:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 \sin\omega_0 t \\ \dot\varphi &= \varphi_0\omega_0 \cos\omega_0 t \\ \ddot\varphi &= -\varphi_0\omega_0^2 \sin\omega_0 t \end{aligned}\right\}, \mathbf{w}_0 = -\begin{pmatrix}\omega^2 r\sin\varphi \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\omega}_m = \begin{pmatrix}0 \\ -\dot\varphi \\ 0\end{pmatrix}, \overrightarrow{BA} = r\begin{pmatrix}\sin\varphi \\ 0 \\ -\cos\varphi\end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}^r = \begin{pmatrix}0 \\ -\ddot\varphi \\ 0\end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{\omega}_m$ – угловая скорость $\overrightarrow{AB}$ относительно конструкции.

Во-первых, скорость $\boldsymbol{v}_A^a$ такая, что

$$\boldsymbol{v}_A^a = \boldsymbol{v}^e + \boldsymbol{v}^r = \boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OA} + \boldsymbol{\omega}_m \times \overrightarrow{BA} = r\begin{pmatrix}\dot\varphi\cos\varphi \\ \omega\sin\varphi \\ \dot\varphi\sin\varphi,\end{pmatrix}$$

а норма $\|\boldsymbol{v}_A^a\|$ в точке $t = t_0 = \pi/2\omega_0$ такая, что

$$\|\boldsymbol{v}_A^a\|^2 = r^2\left(\dot\varphi + \omega^2\sin^2\varphi\right) \quad\Rightarrow\quad \|\boldsymbol{v}_A^a\|^2\Big|_{t=t_0} = r^2\omega^2\sin^2\varphi_0.$$

Во-вторых, ускорение $\mathbf{w}_A^a$ такое, что

$$\mathbf{w}_A^a = \mathbf{w}_0 + 0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{BA} + 2\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}_m\times\overrightarrow{BA}\right) + \mathbf{w}^r.$$

Подставляя значения для $t = t_0$, получим, что

$$\mathbf{w}_A^a = -r\begin{pmatrix}\omega^2\sin\varphi_0 + \varphi_0\omega_0^2\cos\varphi_0 \\ 0 \\ \varphi_0\omega_0^2\sin\varphi_0\end{pmatrix}.$$

Соответсвенно, норма ускорения точки A

$$\begin{aligned}\|\mathbf{w}_A^a\|^2 &= r^2(\omega^4\sin^2\varphi_0 + \omega^2\omega_0^2\varphi_0\sin^2\varphi_0 + \varphi_0^2\omega_0^4\cos^2\varphi_0 + \varphi_0^2\omega_0^4\sin^2\varphi_0) = \\ &= r^2(\omega^4\sin^2\varphi_0 + \omega^2\omega_0^2\varphi_0\sin^2\varphi_0 + \varphi_0^2\omega_0^4).\end{aligned}$$

2.35

Снова предварительно запишем необходимые нам величины,

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{O_1A} = \boldsymbol{r}_A^r &= \boldsymbol{a}\sin\omega t, \\ \boldsymbol{v}_A^r &= \boldsymbol{a}\omega\cos\omega t, \\ \mathbf{w}_A^r &= -\boldsymbol{a}\omega^2\sin\omega t \end{aligned}\right\}, \quad \boldsymbol{a} = a\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0\end{pmatrix}, \quad \varphi = -\frac{\mathrm{w}_0 t^2}{2R}, \quad \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{\Omega}R = \mathbf{w}_0 t, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ \mathrm{w}_0/R\end{pmatrix}.$$

где $\varphi(t)$ и $\boldsymbol{\Omega}(t)$ мы знаем из условия $\mathbf{w}_0 = \mathrm{const}$.

Скорость $\boldsymbol{v}_A^a$ такая, что

$$\boldsymbol{v}_A^a = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_A^r + \boldsymbol{v}_A^r \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} v_x = \mathrm{w}_0 t\left(R + a\sin\varphi\sin\omega t\right)/R + a\omega\cos\varphi\cos\omega t \\ v_y = a\omega\sin\varphi\cos\omega t - \mathrm{w}_0 t a\cos\varphi\sin\omega t/R \\ v_z = 0 \end{cases}$$

а норма

$$\|\boldsymbol{v}_A^a\|^2 = \frac{{\mathrm{w}_0}^2 t^2}{R^2}a^2\sin^2\omega t + a^2\omega^2\cos^2\omega t + \mathrm{w}_0^2 t^2 + 2\frac{\mathrm{w}_0 t}{R}a\left(\mathrm{w}_0 t\sin\varphi\sin\omega t + R\omega\cos\varphi\cos\omega t\right).$$

или, преобразуя, получим, что

$$\|\boldsymbol{v}_A^a\|^2 = \left(\frac{\mathrm{w}_0 t}{R} a\sin\omega t \mathrm{w}_0 t\sin\varphi\right)^2 + \left(a\omega\cos\omega t + w_0 t\cos\varphi\right)^2.$$

Ускорение $\mathbf{w}_A^a$ такое, что

$$\mathbf{w}_A^a = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}_A^r + \Omega\times\Omega\times\boldsymbol{r}_A^r + 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_A^r + \mathbf{w}_A^r.$$

Подставляя значения, получим

$$\mathbf{w}^c = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} 2\omega a t \mathrm{w}_0\sin(\varphi)\cos(\omega t) \\ -2\omega a t\mathrm{w}_0\cos(\varphi)\cos(\omega t) \\ 0\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}^e = \frac{1}{R^2}\begin{pmatrix} \mathrm{w}_0\left(R^2 + Ra\sin(\varphi)\sin(\omega t) - at^2\mathrm{w}_0\sin(\omega t)\cos(\varphi)\right) \\ -a\mathrm{w}_0\left(R\cos(\varphi) + t^2\mathrm{w}_0\sin(\varphi)\right)\sin(\omega t) \\ 0\end{pmatrix}.$$

Суммруя, получим, что

$$\begin{cases} (\mathbf{w}_A^a)_x = \dfrac{1}{R^2}\left(R^2\left(-\omega^2 a\sin(\omega t)\cos(\varphi) + \mathrm{w}_0\right) + Ra\mathrm{w}_0\left(2\omega t\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right)\sin(\varphi) - at^2\mathrm{w}_0^2\sin(\omega t)\cos(\varphi)\right) \\ (\mathbf{w}_A^a)_y = \dfrac{1}{R^2}\left(-a\left(R^2\omega^2\sin(\varphi)\sin(\omega t) + R\mathrm{w}_0\left(2\omega t\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right)\cos(\varphi) + t^2\mathrm{w}_0^2\sin(\varphi)\sin(\omega t)\right)\right) \\ (\mathbf{w}_A^a)_z = 0. \end{cases}$$

4.14 и 4.15*

Сделаем задачу чуть менее абстрактной. Представим кольцевую железную дорогу, плоскость которой нормальна к $\boldsymbol{\omega}_1$. Наш агент №1 сидит в вагоне поезда и на столе, поверхность которого нормальна к $\boldsymbol{\omega}_2$, запускает игрушечную кольцевую жилезную дорогу с игрушечным агентом №2 в вагоне поезда. Агент №2 запускает поезд на столе, поверхность которого нормальна к $\boldsymbol{\omega}_3$ ...

Найдём $\boldsymbol{\varepsilon}_{№2}$ – угловое ускорение агента №2. По словам №1, угловое ускорение равно $\boldsymbol{\omega}_{№2} = \boldsymbol{\omega}_2$, тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{№2} = \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}_1}_{\boldsymbol{\varepsilon}^e} + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}_2 = 0 + \frac{\boldsymbol{\omega}_2}{\omega_2}\dot{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_2.$$

А теперь найдём $\boldsymbol{\varepsilon}_3$. С точки зрения №2 $\boldsymbol{\omega}_{№3} = \boldsymbol{\omega}_3$. Мы знаем, что $\boldsymbol{\omega}_{№2} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$, и знаем $\boldsymbol{\varepsilon}_{№2}$, тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{№3} = \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}_3 = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_2}{\omega_2}\dot{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_2\right) + \frac{\boldsymbol{\omega}_3}{\omega_3}\dot{\omega}_3 + (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2)\times\boldsymbol{\omega}_3.$$

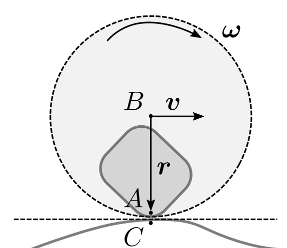
И так далее мы можем продолжать добавлять вектора $\boldsymbol{\omega}_i$ к движению тела, в силу $\boldsymbol{\omega}^a = \boldsymbol{\omega}^e + \boldsymbol{\omega}^r$, при чём мы получим слагаемые вида векторного произведение всех упорядоченных пар $\boldsymbol{\omega}_j$ и $\boldsymbol{\omega}_k$, плюс сумма $\boldsymbol{\varepsilon}_i^r$.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{№N} = \boldsymbol{\varepsilon}_{№(N-1)} + \frac{\boldsymbol{\omega}_N}{\omega_N}\dot{\omega}_N + \boldsymbol{\omega}_{№(N-1)}\times\boldsymbol{\omega}_N.$$

По индукции можем показать, что

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{№N} = \sum_{j=2}^{n}\frac{\boldsymbol{\omega}_j}{\omega_j}\dot{\omega}_j + \sum_{k=2}^{N}\sum_{i=1}^{k-1}\boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{\omega}_k.$$

В частности, при $\dot{\omega}_j = 0$, получим выражение для задачи **4.14**.



к задаче Т9.

Т9.*

Рассмотрим движение выпуклого твёрдого тела по выпуклой поверхности. Они соприкасаются в точках A и C соответсвенно. Пусть есть некоторая неподвижная СО, относительно начала которой будем записыввать радиус векторы. Пусть точка O – мгновенный центр скоростей, тогда скорость некоторой точки тела может быть найдена, как

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_O),$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус вектор этой точки.

Для точки A верно, что $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_O) = 0$, дифференцируя равенство по времени, найдём, что

$$\mathbf{w}_A = \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\underbrace{(\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_O)}_{=0} + \boldsymbol{\omega}\times\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_O) = -\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_O,$$

где $\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_O = 0$, т.к. тело движется без проскальзывания и в данный момент времени A соответсвует мгновенному центру скоростей. Рассматривая движение относительно центра кривизны B, поймём, что $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O = \dot{\boldsymbol{r}}_O$, получается, $\mathbf{w}_A = -\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$, Q.E.D.

2 Динамика

2.5 Движение точки в центральном поле сил

T10*.

В ОТО движение в центральном поле тяжести описывается как движение в метрике Шварцшильда:

$$ds^2 = \left(1-\frac{a}{r}\right) d\tau^2 - \left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 - (r\sin\theta)^2\, d\varphi^2 - r^2\, d\theta^2.$$

Здесь 4 независимых переменных $(\tau, r, \varphi, \theta)$, где три из сферических координат, а τ – физическое время, также введен радиус Шварцшильда $a = 2GM$.

Движение точек рассматриваем, как движение по геодезическим, то есть $\mathbf{w}_i = 0$, где $i \in \{\tau, r, \varphi, \theta\}$. Движение будет в некотором смысле происходить в одной плоскости, так что пусть $\theta(t) = \pi/2$. Так мы получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} v^2 = \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = \left(1-\dfrac{a}{r}\right)\dot\tau^2 - \left(1-\dfrac{a}{r}\right)^{-1}\dot r^2 - r^2\dot\varphi^2 \\ \mathbf{w}_\tau = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial(v^2/2)}{\partial\dot\tau} - \underbrace{\dfrac{\partial(v^2/2)}{\partial\tau}}_{0} = \dfrac{d}{dt}\left[\left(1-\dfrac{a}{r}\right)\dot\tau\right] = 0 \\ \mathbf{w}_\varphi = -\dfrac{d}{dt}\left[r^2\dot\varphi\right] = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Таким образом получим пару первых интегралов системы, в частности

$$\left(1-\frac{a}{r}\right)\dot\tau = \mathcal{D},$$
$$r^2\dot\varphi = \mathcal{C}.$$

Подставляя их в выражение для скорости, получим, что

$$\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}\mathcal{D}^2 - \left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - \frac{c^2}{r^2} = v^2.$$

По замене Бине

$$r = \frac{1}{u}, \qquad \dot r = r'\dot\varphi = \left(\frac{1}{u}\right)' cu^2 = -u'c,$$

перейдём к функции $u(\varphi)$:

$$2c^2u'' + c^2(2u - 3au^2) = v^2. \tag{2.2}$$

Преобразуя, получим

$$\boxed{u'' + u = \frac{a}{2c^2}v^2 + \frac{3}{2}au^2}. \tag{2.3}$$

Найдём теперь видимый радиус черной дыры – минимальное значение прицельного параметра, при котором луч, проходящий через окрестность черной дыры не падает на центр. Для светового луча верно, что $\dot s^2 = v^2 = 0$, тогда

$$u'' + u = \frac{3}{2}au^2.$$

Интегрируя, получим

$$\frac{u'^2}{2} + \frac{u^2}{2} = \frac{au^3}{2} + c'.$$

Посмотрим теперь на поведение света при $u \to 0$ верно, что $r\varphi \to b$, тогда

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{r}{\varphi} \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{dr}{d\varphi}\frac{1}{r^2} = \frac{r}{\varphi}\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r\varphi} \quad\Rightarrow\quad u'\big|_{t=0} = \frac{1}{b} \quad\Rightarrow\quad c' = \frac{1}{2b^2}$$

Переписав, получим

$$u'^2 = au^3 - u^2 + \frac{1}{b^2}.$$

Вблизи точки с критическим u верно, что $\dot r \sim 0$, тогда нас интересует экстремум функции $au^3 - u^2 + b^{-2}$, тогда

$$3au^2 - 2u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r_{\min}} = \left(\frac{3}{2}a\right)^{-1}.$$

Условие падения – уменьшение радиуса (увеличение u) при $r = r_{\min}$:

$$u'^2_{\min} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{8}{27} - \frac{4}{9}\right) + \frac{1}{b^2} = -\frac{4}{27a^2} + \frac{1}{b^2} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 \leqslant \frac{27}{4}a^2$$

Тогда минимальное значение прицельного параметра, при котором луч, проходящий через окрестность черной дыры не падает на центр

$$\boxed{b_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a}, \tag{2.4}$$

что и является видимым радиусом черной дыры.

2.6 Элементы механики сплошных сред (МСС)

Т11.

Движение среды происходит по закону ($\tau = \text{const} > 0$),

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad x = \xi_1\left(1 + \frac{t}{\tau}\right), \qquad y = \xi_2\left(1 + 2\frac{t}{\tau}\right), \qquad z = \xi_3\left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right).$$

Тогда поля скорости и ускорения в лагранжевом описании

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\tau}\begin{pmatrix} \xi_1 & 2\xi_2 & 2\frac{t}{\tau}\xi_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{w} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\tau^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\xi_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Пусть деформация произвола через малый промежуток времени dt, тогда $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}\,dt$. Представим $\partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{r}$, как сумму симметричного и косо-симметричного

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{r}} = u_{ij} + \varphi_{ij},$$

где

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right), \qquad \varphi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right).$$

Подставим $\boldsymbol{v}$ в эйлеровом описании

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\tau + t} & \frac{2y}{\tau + t} & \frac{2tz}{\tau^2 + t^2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \Rightarrow \quad u_{ij} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{t+\tau}, \frac{2}{\tau + t}, \frac{2t}{\tau^2 + t^2}\right)_{ij} dt, \qquad \varphi_{ij} = 0.$$

Вращательное движение отсутствует.

Как можно заметить из выражения для $\boldsymbol{v}$ неподвижными будут частицы с $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0, \xi_3 = 0$, в начальный момент времени неподвижными будут все частицы с $\xi_3 = 0$.

Т12 и Т13. (Теория)

В равновесии силы внутренних напряжений должны взаимно компенсироваться, т.е.

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = -F_i = 0. \tag{2.5}$$

Также мы знаем обобщенный закон Гука:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma}\left[u_{ik} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma}u_{ll}\ \delta_{ik}\right], \tag{2.6}$$

где $\sigma \in [0, 1/2]$ – коэффициент Пуассона, а E – модуль Юнга. Зная, что u_{ik} – симметричный тензор

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right),$$

получим

$$\frac{E}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} = 0,$$

что перепишем в векторных обозначениях, в силу $\Delta \boldsymbol{u} = \partial^2 u_i/\partial x_k^2$, а $\partial u_l/\partial x_l = \operatorname{div} \boldsymbol{u}$, тогда

$$\Delta \boldsymbol{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0.$$

Вспомнив, что $\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \Delta \boldsymbol{u} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$,

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = 0. \tag{2.7}$$

T12 и T13. (общий случай)

Внешние и внутренние радиусы толстостенной сферы равны R_1 и R_2, внутри сферы действует давление p_1, снаружи действует p_2. Найдём деформацию и тензор напряжений для этой сферы.

Введём сферические координаты с началом в центре шара. В силу радиальности $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$, следует, что $\operatorname{rot} u = 0$, тогда уравнение (2.7) примет вид

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \tag{2.8}$$

с учётом (2.18),

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2 u)}{r} = \text{const} \equiv 3a,$$

тогда

$$d(r^2 u) = 3ar^2\, dr \qquad \Rightarrow \qquad u = ar + \frac{b}{r^2}.$$

Выпишем компоненты тензора деформации в сферических координатах:

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \qquad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta + \frac{u_r}{r}.$$

В остальные не входит u_r, соответственно они равны 0. В частности, для нашего случая

$$u_{rr} = a - \frac{2b}{r^3}, \qquad u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = a + \frac{b}{r^3}. \tag{2.9}$$

Также можем найти (диагональный) тензор напряжений :

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\Big[(1-\sigma)u_{rr} + 2\sigma u_{\theta\theta}\Big] = \frac{E}{1-2\sigma}a - \frac{2E}{1+\sigma}\frac{b}{r^3}, \tag{2.10}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\Big[(1+\sigma)u_{\theta\theta} + \sigma u_{rr}\Big] = \sigma_{\varphi\varphi}. \tag{2.11}$$

Также мы знаем следующие граничные условия:

$$\sigma_{rr}\big|_{r=R_1} = -p_1, \qquad \sigma_{rr}\big|_{r=R_2} = -p_2,$$

получаем

$$\boxed{a = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\frac{1-2\sigma}{E}, \qquad b = \frac{R_1^3 R_2^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3}\frac{1+\sigma}{2E}.} \tag{2.12}$$

T12 и T13. (тонкая сферическая оболочка)

Рассмотрим теперь случай, когда $h = R_2 - R_1 \ll R$.

$$a \approx \frac{R}{3h}\frac{1-2\sigma}{E}(p_1 - p_2), \qquad b \approx \frac{R^4}{3h}(p_1 - p_2)\frac{1+\sigma}{2E}.$$

Тогда деформация

$$\left(\text{пусть } \varkappa = \frac{R^2}{3h}(p_1 - p_2),\ \text{тогда}\right) \qquad u = \varkappa\frac{1-2\sigma}{E} + \varkappa\frac{1+\sigma}{2E} = \frac{r^2(1-\sigma)}{2Eh}(p_1 - p_2).$$

Чуть интереснее выражение для σ_{rr} (введено обозначение $p = p_1 - p_2$):

$$\sigma_{rr} = \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\Bigg(\underbrace{p_1 - p_2 - p_2\frac{3h}{R} - \frac{R_2^2}{r^3}(p_1 - p_2)}_{p(1 - R_2^2/r^3)}\Bigg),$$

посмотрим, однако, на среднее по r значение.

$$\frac{1}{h}(R_1 + h)^3 \int_{R_1}^{R_1 + h} \frac{1}{r^3}\, dr = \frac{R_1 + h}{2}\left(\frac{2}{R_1} + \frac{h}{R_1^2}\right),$$

тогда

$$\frac{R_1^3}{R_2^3-R_1^3}\left\langle p\left(1-\frac{R_2^2}{r^3}\right)\right\rangle = \boxed{\langle\sigma_{rr}\rangle = \frac{1}{2}\Big(p_1+p_2\Big).}$$

Найдём остальные компоненты

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{3}{2}\left(\frac{R_1^3}{R_2^3-R_1^3}\right)\Big(p_1-p_2\Big) = \frac{1}{2}\frac{R}{h}(p_1-p_2).$$

T14*. (решение для криволинейных координат, образующих ортогональный базис)

Хотелось бы выразить лапласиан Δp через частные производные в произвольной криволинейной системе координат. Легко показать, что

$$\Delta p = \operatorname{div}\operatorname{grad} p. \tag{2.13}$$

Так что начнём с вида $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ и $\operatorname{grad} f$ в криволинейной системе координат. Понадеемся, что достаточно рассмотреть случай криволинейных координат, образующих ортогональный базис в каждой точке пространства.

В криволинейных координатах базисные направления сформированы векторами $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{r}) \overset{\text{def}}{=} \partial\boldsymbol{r}/\partial q^i$. Для удобства введём единичные орты координатных направлений для ортогональной системы

$$\boldsymbol{e}_1(q) = \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}},0,0\right),\qquad \boldsymbol{e}_2(q) = \left(0,\frac{1}{\sqrt{g_{22}}},0\right),\qquad \boldsymbol{e}_3(q) = \left(0,0,\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\right). \tag{2.14}$$

Тогда

$$dq^j(\boldsymbol{e}_i) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\delta^i_j,\qquad dq^i\wedge dq^j(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}}\delta^i_k\delta^j_l. \tag{2.15}$$

Известно, что градиент функции соответствует дифференциальной 1-форме. Её (по вектору $\boldsymbol{A}$) можно записать как $\omega^1_A = a_i\,dq^i$. С учётом введеного базиса можно записать, что $\boldsymbol{A} = A^i\boldsymbol{e}_i$, $\forall\boldsymbol{A}\in T\mathbb{R}^3_q$. Из (2.15) получим, что

$$\omega^1_A(\boldsymbol{e}_i) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_i) = A^i = \frac{a_i}{\sqrt{g_{ii}}},$$

следовательно $a_i = A^i\sqrt{E_i}$, и, соответственно

$$\omega^1_A = A^i\sqrt{g_{ii}}dq^i. \tag{2.16}$$

Аналогично, пусть теперь $\operatorname{grad} f = A^i\boldsymbol{e}_i$. По определению

$$\omega^1_{\operatorname{grad} f} = d\omega^0_f = df = \frac{\partial f}{\partial q^i}dq^i.\qquad\Rightarrow\qquad \boxed{\operatorname{grad} f = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\frac{\partial f}{\partial q^i}\boldsymbol{e}_i.}$$

Теперь найдём $\operatorname{div}\boldsymbol{B}$, как дифференциальную 3-форму. Для начала поймём, что для вектора $\boldsymbol{B}(q) = (B^i\boldsymbol{e}_i)(q)$ форма

$$\omega^2_B = b_1dq^2\wedge dt^3 + b_2dq^3\wedge dt^1 + b_3dq^1\wedge dt^2 \tag{2.17}$$

имеет следующий вид:

$$\omega^2_B(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{B},\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3) = B^1.$$

С другой стороны, из (2.15) и (2.17),

$$\omega^2_B(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3) = b_1dq^2\wedge dq^3(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3) = \frac{b_1}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}.$$

Получаем, что $b_1 = B^1\sqrt{g_{22}g_{33}}$, аналогично можем получить, что $b_2 = B^2\sqrt{g_{11}g_{33}}$, $b_3 = B^3\sqrt{g_{11}g_{22}}$.

Теперь, из определения, получаем

$$\omega^3_{\operatorname{div} B} = d\omega^2_B = \sum_{\substack{i\neq j\neq k\\ P(i,g,k)=1}}^{3}\frac{\partial\sqrt{g_{jj}g_{kk}}B^i}{\partial q^i}dq^i\wedge dq^j\wedge dq^k.$$

Тогда

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\left(\frac{\partial\sqrt{g_{22}g_{33}}B^1}{\partial q^1} + \frac{\partial\sqrt{g_{33}g_{11}}B^1}{\partial q^2} + \frac{\partial\sqrt{g_{11}g_{22}}B^1}{\partial q^3}\right) \tag{2.18}$$

Собирая всё вместе получаем, что

$$\Delta f = \operatorname{div}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\frac{\partial f}{\partial q^i}\boldsymbol{e}_i\right) = \frac{1}{\det g}\sum_{\substack{i\neq j\neq k\\ P(i,g,k)=1}}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\left[\sqrt{\frac{g_{jj}g_{kk}}{g_{ii}}}\frac{\partial f}{\partial q^i}\right]\right). \tag{2.19}$$

В частности, для полярных

$$g_{ij} = \operatorname{diag}\left(1, r^2, 1\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

T15*.

Запишем ковариантную производную вектора и ковектора:

$$\nabla_j v_m = \frac{\partial v_m}{\partial q^i} - \Gamma^i_{kj}v_i, \qquad \nabla_k v^j = \frac{\partial v^i}{\partial q^k} + \Gamma^i_{kj}v^j. \tag{2.20}$$

В таком случае

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j - \nabla_j v_i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial q^i} + \Gamma^k_{ji}v_k - \frac{\partial v_i}{\partial q^j} - \Gamma^k_{ij}v_k\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial q^i} - \frac{\partial v_i}{\partial q^j}\right),$$

что и требовалось доказать.

Перейдём к следующему заданию. Корректнее сказать, что **псевдо**вектор вихря ω может быть представлен $\omega_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j$, т.к. при выводе критически важно, что

$$\left[\boldsymbol{e}^1 \times \boldsymbol{e}^2\right] = \boldsymbol{e}^3, \tag{2.21}$$

соотвественно $\boldsymbol{\omega}$ не инвариантен к зеркальному отображению базиса.

Судя по символу Леви-Чевиты речь идёт о трёхмерной задаче, так что нам достаточно показать что

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{ij}\left[\boldsymbol{e}^i \times \boldsymbol{e}^j\right], \qquad \text{где} \qquad \omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^3 & -\omega^2 \\ -\omega^3 & 0 & \omega^1 \\ \omega^2 & -\omega^1 & 0 \end{pmatrix}_{ij}, \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\\ \omega^3\end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad \omega^\gamma = \frac{1}{2}\varepsilon^{\gamma\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}, \tag{2.22}$$

что проверяется прямой подстановкой:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega^3\underbrace{\left[\boldsymbol{e}^1 \times \boldsymbol{e}^2\right]}_{\boldsymbol{e}^3} + \left(-\omega^3\right)\underbrace{\left[\boldsymbol{e}^2 \times \boldsymbol{e}^1\right]}_{-\boldsymbol{e}^3} + \ldots = \begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\\ \omega^3\end{pmatrix}.$$