Билеты по курсу «Электричество и магнетизм»

Авторы: Хоружий Кирилл
Евгений Примак
Малахов Ислам

От: *25 декабря 2020 г.*

Содержание

1.1 Электрические заряды и закон Кулона

Взаимодействие частиц друг с другом можно описывать с помощью понятия силового поля.Частица создает вокруг себя поле; на всякую другую частицу, находящуюся в этом поле, действует некоторая сила.

Оказывается, что свойства частицы в отношении ее взаимодействия с электромагнитным полем определяются всего одним параметром – так называемым зарядом частицы.

Уравнение движения пробного заряда

Как было показано в введение, уравнение движения частицы в электромагнитном поле запишется, как

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \underbrace{-\frac{e}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - e}_{\text{про } E} + \underbrace{\frac{e}{c}\left[\boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{A}\right]}_{\text{про } H}$$

Так как первая часть не зависит от скорости, то естетсвенно ввести следующие величины

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi \qquad \text{— \textit{напряженность электрического поля}}$$

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A} \qquad \text{— \textit{напряженность магнитного поля}}$$

Теперь уравнение движения в ЭМ поле примет вид

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}\left[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}\right], \quad \text{— \textit{сила Лоренца.}} \tag{1.1}$$

Таким образом может определить $\boldsymbol{E}$, как отношение силы $\boldsymbol{F}$, действующей на неподвижный заряд, помещенный в данную точку поля к величине этого заряда q: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/q$.

Теорема Гаусса

Как было показано в введение, верно что

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho.$$

Или, в интегральной форме, по теореме Стокса

$$\int \operatorname{div}\boldsymbol{E}\, dV = \oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{f} = 4\pi \int \rho\, dV.$$

Закон сохранения заряда

Изменение заряда в объеме в единицу времени:

$$\oint \rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{f} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV,$$

где минус появился из-за выбора направлени нормали к поверхности. Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = -\oint \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{f} = -\int \operatorname{div}\boldsymbol{j}\, dV, \quad \Rightarrow \quad \int\left(\operatorname{div}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{div}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0}. \tag{1.2}$$

Таким образом алгебраическая сумма зарядов электрически замкнутой системы сохраняется. Требование релятивистской инвариантности приводит к тому, что закон сохранения заряда имеет локальный характер: изменение заряда в любом наперёд заданном объёме равно потоку заряда через его границу.

Принцип суперпозиции

Как показывает опыт, электромагнитное поле подчиняется так называемому принципу суперпозиции: поле, создаваемое системой зарядов, представляет собой результат простого сложения полей, которые создаются каждым из зарядов в отдельности. Это значит, что напряженности результирующего поля в каждой точке равны сумме (векторной) напряженностей в этой точке каждого из полей в отдельности.

Всякое решение уравнений поля является полем, которое может быть осуществлено в природе. Согласно принципу суперпозиции сумма любых таких полей тоже должна быть полем, которое может быть осуществлено в природе, т. е. должно удовлетворять уравнениям поля.

Как известно, линейные дифференциальные уравнения как раз отличаются тем свойством, что сумма любых его решений тоже является решением. Следовательно, уравнения для поля должны быть линейными дифференциальными уравнениями.

Закон Кулона

Рассмотрим точечный заряд, окружим его сферой и запишем для неё теорему Гаусса:

$$\oint_{\partial S} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{f} = 4\pi e, \quad \Rightarrow \quad E = \frac{e}{R^2}, \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{E} = \frac{e}{R^2}\frac{\boldsymbol{R}}{R},$$

что верно в силу радиальной симметрии. Так мы получили *закон Кулона.*

Потенциал же $\varphi = e/R$, или, для системы зарядов,

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{R_a}, \quad \text{или} \quad \varphi = \int \frac{\rho}{R}\, dV.$$

Забавный факт: подстановка в уравнение пуассона приводит к уравнению вида $\Delta(1/R) = -4\pi \cdot \delta(R)$.

Дипольный момент

Чуть подробнее остановимся на системе зарядов и дипольном моменте. Рассмотримм поле от системы зарядов на большом расстоянии от этой системы. Выберем начало координат где-то внутри этой системы. В точке, нам интересной, R_0

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{|\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{r}_a|}.$$

Нам интересен случай $\boldsymbol{R}_0 \gg \boldsymbol{r}_0$, так что разложим в ряд до второго члена по $\boldsymbol{r}_a/R_0$. Вспомнив, что $f(\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{r}) \approx f(\boldsymbol{R}_0) - \boldsymbol{r}\,\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{R}_0)$ получим

$$\varphi = \frac{\sum e_a}{R_0} - \sum e_a \boldsymbol{r}_a\, \mathrm{grad}\, \frac{1}{R_0}.$$

Теперь естественно ввести *дипольный момент* системы $\boldsymbol{p} = \sum_a e_a \boldsymbol{r}_a$. Важно, что если $\sum e_a = 0$, то $\boldsymbol{d}$ не зависит от выбора начала координат. Действительно:

$$\boldsymbol{r}'_a = \boldsymbol{r}_a + \boldsymbol{l}, \qquad \boldsymbol{d}' = \sum e_a \boldsymbol{r}'_a + \boldsymbol{l} \sum e_a = \boldsymbol{p}.$$

Теперь естественно разделить

$$\boldsymbol{d} = \sum e_a^+ \boldsymbol{r}_a^+ - \sum e_a^- \boldsymbol{r}_a^- = \boldsymbol{R}^+ \sum e_a^+ - \boldsymbol{R}^- \sum e_a^-, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{R}^+ = \frac{\sum e_a^+ \boldsymbol{r}_a^+}{\sum e_a^+}, \ \boldsymbol{R}^- = \frac{\sum e_a^- \boldsymbol{r}_a^-}{\sum e_a^-}.$$

В случае $\sum e_a^+ = \sum e_a^- = e$, естественно ввести $\boldsymbol{R}_{+-} = \boldsymbol{R}^+ - \boldsymbol{R}^-$, тогда $\boldsymbol{d} = e\boldsymbol{R}_{+-}$. Потенциал в таком случае

$$\sigma = -\boldsymbol{d}\, \mathrm{grad}\, \frac{1}{R_0} = \frac{\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{R}_0}{R_0^3}, \tag{1.3}$$

тогда E

$$\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\, \frac{\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{R}_0}{R_0^3} = -\frac{1}{R_0^3}\, \mathrm{grad}\, (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{R}_0) - (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{R}_0)\, \mathrm{grad}\, \frac{1}{R_0^3}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{E} = \frac{1}{R_0^3}\left[3\,(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{p})\,\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p}\right]}, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{R}_0}{|R_0|}. \tag{1.4}$$

В частности, выбрав ось Oz по $\boldsymbol{p}$, найдём, что

$$E_z = \frac{p}{R_0^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right); \qquad E_x = \frac{p}{R_0^3}\left(3\sin^2\theta - 1\right);$$

Или, разбив на радиальную и тангенцальные состовляющие:

$$E_R = 2\frac{p}{R)^3}\cos\theta, \qquad E_\tau = -2\frac{p}{R_0^3}\sin\theta.$$

Гауссова система единиц (СГС) и система СИ.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

1.2 Электрическое поле и основная задача электростатики

Вместо поиска $\boldsymbol{E}$ достаточно найти φ,

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi \\ \operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi \equiv \Delta\varphi = \begin{cases} -4\pi\rho & \text{ур. Пуассона} \\ 0 & \text{ур. Лапласа} \end{cases}$$

Как может быть поставлена задача? Заданы граничные значения, найти распределения зарядов. Заданы заряды, найти распределения. Что-то задано, что-то не задано. Во всех трёх случаях **решение уравнения Пуассона единственно**.

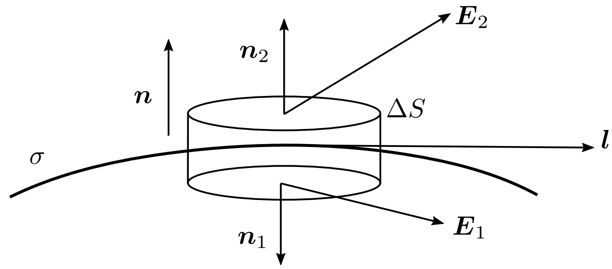
К слову, так как $\varphi = \varphi(\boldsymbol{r})$, а при $A_i = \text{const}$ верно, что $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, то электростатическое поле потенциально. Также это можно увидеть в работе ЭМ сил, при перемещении заряда по замкнутому контуру:

$$A_{\text{замкн}}/q = \oint_{(L)} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{f} = 0.$$

Разность потенциалов

Def 1.1. Если на участке цепи не действуют сторонние силы, работа по перемещению включает только работу потенциального электрического поля и *электрическое напряжение* U_{AB} между A и B совпадает с разностью потенциалов $\varphi_A - \varphi_B = A^{\text{el}}_{AB}/q$. В общем случае $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B + \mathscr{E}_{AB}$.

Граничные условия на заряженной поверхности



По теореме Гаусса верно, что

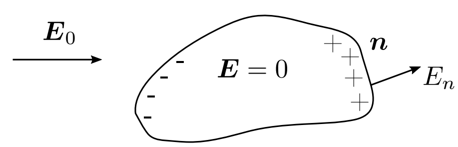
$$E_{2n_2}\cancel{\Delta S} + E_{1n_1}\cancel{\Delta S} = 4\pi\sigma\cancel{\Delta S},$$
$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$$

По теореме циркуляции верно, что

$$E_{2l}\cancel{\Delta} l - E_{1l}\cancel{\Delta} l = 0$$
$$E_{2l} - E_{1l} = 0.$$

Проводники

Def 1.2 (пусть так)**.** *Проводник* – костяк частиц, окруженных *свободными* электронами, которые в пределах тела могут перемещаться на какие угодно расстояния.



В частности, для проводников, верно, что

$$E_n = 4\pi\sigma$$
$$E_\tau = 0$$

Собственно, объёмных зарядов в проводнике нет, поверхностные есть и компенсируют внешнее поле. Аналогично работает решетка Фарадея, электростатическое поле не проникает в проводники.

Метод изображений

Если существует некоторая эквипотенциальная поверхность разделяющая пространство на два полупространства, то можем считать что эта поверхность является проводящей. И наоборот, проводящую поверхность можно заменить, на системы зарядов в полупространстве, ей ограниченном, создающих эквипотенциальную поверхность.

1.3 Электрическое поле в веществе

Диэлектрики – непроводники электричества. В них возбуждаются индукционные заряды, привязанные к кастету частиц, – *поляризационные*, или *связанные заряды.*

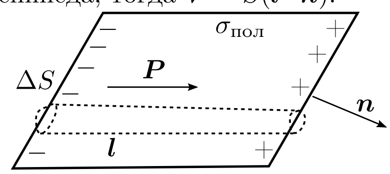
Альтернативный вариант – наличие дипольного момента у молекул. При наличии электрического поля дипольные моменты ориентируются, диэлектрик поляризуется. *Вектор поляризации* – дипольный момент единицы объема диэлектрика, возникающий при его поляризации.

Рассмотрим скошенный параллелепипед. На основаниях параллелепипеда возникнут поляризационные заряды с поверхностной плотностью $\sigma_{\text{пол}}$. Взяв его площадь за S, найдём дипольный момент равный $\sigma_{\text{пол}} S \boldsymbol{l}$. Тогда вектор поляризации будет

$$\boldsymbol{P} = \frac{\sigma_{\text{пол}} S}{V} \boldsymbol{l}, \tag{1.5}$$

что верно и для анизотропных кристаллов где $\boldsymbol{E} \nparallel \boldsymbol{P}$.

Пусть $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор внешней нормали к основанию параллелепипеда, тогда $V = S(\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{n})$. Подставив V в предыдущую формулу, получим, что



$$\sigma_{\text{пол}} = (\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}) = P_n$$

Или, более общо,

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \boldsymbol{p}_i$$

В случае неоднородной поляризации верно, что поляризационные заряды могут появиться и на поверхности. Выделим V, ограниченный S, смещённый заряд равен $-P_n\, dS$, тогда через S поступает

$$q_{\text{пол}} = -\oint P_n\, dS = -\oint (\boldsymbol{P} \cdot\, d\boldsymbol{S}). \tag{1.6}$$

Стоит заметить, что в теорему о циркуляции не входят заряды, соотвественно для диэлектриков верно, что

$$\oint_{(L)} E_l\, dl = 0.$$

Далее чаще всего мы будем сталкиваться с линейной поляризацией, когда

$$\boldsymbol{P} = \alpha \boldsymbol{E}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} \underbrace{(1 + 4\pi\alpha)}_{\varepsilon} = \varepsilon \boldsymbol{E},$$

где α – *поляризуемость диэлектрика*, а ε – *диэлектрическая проницаемость.*

Запишем теорему Гаусса для электрического поля в диэлектрике. Знаем, что $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\text{пол}} + \boldsymbol{E}_{\text{св}}$.

$$\oint E_n\, dS = 4\pi(q + q_{\text{пол}}) \quad \Rightarrow \quad \oint \underbrace{(E_n + 4\pi P_n)}_{D_n}\, dS = 4\pi q. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\oint D_n\, dS = 4\pi q_{\text{св}}} \tag{1.7}$$

где $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}$. – вектор *электрической индукции*, или *электрического смещения.* Поток вектора $\boldsymbol{D}$ определяется только свободными зарядами.

Можно посмотреть на это в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\left(\rho - \operatorname{div} \boldsymbol{P}\right), \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi(\rho + \rho_{\text{пол}}) \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{пол}} = -\operatorname{div} \boldsymbol{P}. \end{aligned}$$

Найдём граничные условия: повторяя рассуждения, как для проводников, найдём, что

$$D_{1n} = D_{2n},$$

а в случае линейных диэлектриков верно

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}, \quad \Leftrightarrow \quad E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma_{\text{пол}}.$$

Аналогично, из теоремы о циркуляции получим, что

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0.$$

Для точечного заряда в однородном диэлектрике, по теореме Гаусса

$$\left.\begin{aligned} &D \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \\ &D = \varepsilon E \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{q}{\varepsilon r^2}.} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0, \quad \text{где } \boldsymbol{E}_0 \text{ – поле в ситуации без среды.}$$

1.4 Энергия электрического поля и емкость

Рассказ про объёмную плотность энергии сводится к повторению билета №21, что приведёт к объёмной плотности энергии ЭМ поля
$$\mathcal{W} = \frac{E^2+H^2}{8\pi}.$$
Найдём теперь энергию системы зарядов. Считая поле постоянным, а заряды неподвижными
$$\mathcal{U} = \frac{1}{8\pi}\int E^2\,dV, \quad \text{— энергия системы зарядов,}$$
где $\boldsymbol{E}$ – поле от всех зарядов, а интеграл берется по всему пространству. Вспомнив уравнения Максвелла, немного перепишем выражение в
$$\mathcal{U} = -\frac{1}{8\pi}\int \boldsymbol{E}\,\mathrm{grad}\,\varphi\,dV = -\frac{1}{8\pi}\underbrace{\int \mathrm{div}\,(\boldsymbol{E}\cdot\varphi)\;dV}_{\oint \vec{E}\varphi\cdot d\vec{f}=0} + \frac{1}{8\pi}\int \varphi\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}\,dV.$$
Таким образом
$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\,dV, \quad \text{или, в случае дискретного распределения,} \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2}\sum e_a\varphi_a.$$
Тут мы встречаем проблему заряда, находящегося в потенциале собственного поля, но, так как эта величина не зависит от конфигурации зарядов, то его мы проигнорируем, от греха подалбше
$$\mathcal{U}' = \frac{1}{2}\sum e_a\varphi'_a, \quad \text{где} \quad \varphi'_a = \sum_{b(\neq a)}\frac{e_b}{R_{ab}}, \quad \Leftrightarrow \quad U' = \frac{1}{2}\sum_{a\neq b}\frac{e_a e_b}{R_{ab}}. \tag{1.8}$$

Проводники

В случае *проводников* заряд распределен по поверхности, потенциал вдоль которой не меняется, тогда энергия такой системы
$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}\sum_i\oint_{S_i}\varphi_i\sigma\,dS = \frac{1}{2}\sum_i\varphi_i\oint\sigma\,dS = \frac{1}{2}\sum_i\varphi_i Q_i,$$
где φ_i и Q_i – потенциал и заряд i-го проводника, σ – плотность заряда.

Так как рашение задачи Пуассона единственно, то $\varphi(\boldsymbol{r})$ однозначно определяется потенциалами проводников φ_i, поэтому Q_i – некоторые однозначные функции φ_i. Из-за линейности уравнений поля, эти функции могут быть только линейными, поэтому существует связь вида
$$Q_i = \sum_k C_{ik}\varphi_k, \qquad \varphi_i = \sum_k S_{ik}Q_k.$$
Постоянные коэффициенты C_{ik} называются *емкостными коэффициентами* системы проводников, а S_{ik} – *потенциальными коэффициентами*. При этом C_{ii} называют *собственными емкостями*, а C_{ik}, $i\neq k$ – *коэффициенами взаимной емкости* или *коэффициентами электростатической индукции*.

Можно показать, что $C_{ik} = C_{ki}$, что ещё называют *соотношением взаимности*. Это позволяет прийти к следующей теореме

Thr 1.3 (теорема взаимности Грина)**.** *Если есть две конфигурации системы:* $\{\varphi_i; Q_i\}$ *и* $\{\varphi'_i; Q'_i\}$*, то всегда верно, что* $\sum Q'_i\varphi_i = \sum Q_k\varphi'_k$.

Для одиночного проводника $Q = C\varphi$, где C – *собственная емкость* проводника. В частности, для металлического шарика радиуса a с зарядом Q, находящегося в среде с ε, получится $\varphi = Q/(\varepsilon a)$, т.е. $C = \varepsilon a$.

Конденсатор

В случае двух прводников, с зарядами $Q_1 = -Q_2 = Q$, имеем *конденсатор*, коэффициент C которого называется *емкостью*.

Найдём емкость конденсатора. Из №3 билета понятно, что поле внутри $E = 2\pi\sigma/\varepsilon\times 2$. Далее, по определению, вспомнив что $C_{12} = C_{21}$, и $C_{11} = C_{22} = C$, получим
$$\begin{cases} Q_1 = Q = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 \\ Q_2 = -Q = C_{21}\varphi_1 + C_{21}\varphi_2 \end{cases} \Rightarrow \quad Q = C_{12}(\varphi_2-\varphi_1) = Cl\frac{4\pi}{\varepsilon}\left(\frac{Q}{S}\right), \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{S}{l}. \tag{1.9}$$

Комментарий: Энергию диполя во внешнем поле смотреть в первом билете.

2.6 Постоянное магнитное поле

В 1820 году датский ученый Ганс Христиан Эрстед свершил выдающееся открытие – магнитное действие электрического тока... Как было показано раннее,

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}\left[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right], \quad — \quad \textit{сила Лоренца.} \tag{2.10}$$

Здесь введено обозначение $\boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ – напряженность магнитного поля. Это поле, действующее на движущиеся электрические заряды и на тела, обладающие магнитным моментом.

Если взять провод, по которому течёт ток I и засунуть его в магнитное поле, то погонная сила будет иметь вид

$$d\boldsymbol{F} = \frac{1}{c}I\left[d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}\right], \quad — \textit{сила Ампера.} \tag{2.11}$$

Закон Био-Савара-Лапласа

Рассмотри поле $\boldsymbol{H}$, создаваемое зарядами, совершающими *финитное* движение – остаются в конечной области пространства, сохраняя конечный импульс. Такое движение будет иметь стационарный характер и интересно будет рассмотреть усредненное по t магнитное поле, создаваемое зарядами, соответсвенно $\boldsymbol{H} \neq \boldsymbol{H}(t)$.

Усредненные по времени уравнения Максвелла примут вид

$$\operatorname{div}\langle\boldsymbol{H}\rangle = 0, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \ \Rightarrow \ \operatorname{rot}\langle\boldsymbol{H}\rangle = \frac{4\pi}{c}\langle\boldsymbol{j}\rangle. \tag{2.12}$$

Вспомним, что

$$\operatorname{rot}\langle\boldsymbol{A}\rangle = \langle\boldsymbol{H}\rangle, \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{grad}\operatorname{div}\langle\boldsymbol{A}\rangle - \Delta\langle\boldsymbol{A}\rangle = \frac{4\pi}{c}\langle\boldsymbol{j}\rangle,$$

теперь по калибровочной инвариантности выберем $\langle\boldsymbol{A}\rangle : \operatorname{div}\langle\boldsymbol{A}\rangle = 0$. Тогда

$$\Delta\langle\boldsymbol{A}\rangle = -\frac{4\pi}{c}\langle\boldsymbol{j}\rangle, \tag{2.13}$$

что *очень похоже на уравнение Пуассона*, но вместо ρ стоит $\langle\boldsymbol{j}\rangle/c$. Аналогично поиску φ, находим

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R}\,dV, \qquad \Rightarrow \qquad \langle\boldsymbol{A}\rangle = \frac{1}{c}\int\frac{\langle\boldsymbol{j}\rangle}{R}\,dV.$$

Теперь, зная $\langle\boldsymbol{A}\rangle$, можно найти

$$\langle\boldsymbol{H}\rangle = \operatorname{rot}\langle\boldsymbol{A}\rangle = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\int\frac{\langle\boldsymbol{j}\rangle}{R}\,dV.$$

Так как rot происходит по координатам точки наблюдения, то можем занести его под $\int$, считая $\boldsymbol{j} = \text{const}$. Вспомним, что

$$\operatorname{rot} f\boldsymbol{a} = f\operatorname{rot}\boldsymbol{a} + \left[\operatorname{grad} f\times\boldsymbol{a}\right], \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{rot}\frac{\langle\boldsymbol{j}\rangle}{R} = \left[\operatorname{grad}\frac{1}{R}\times\langle\boldsymbol{j}\rangle\right] = \frac{[\langle\boldsymbol{j}\rangle\times\boldsymbol{R}]}{R^3},$$

подставляя в формулу для $\langle\boldsymbol{H}\rangle$, получаем *закон Био-Савара-Лапласа*

$$\langle\boldsymbol{H}\rangle = \frac{1}{c}\int\frac{[\langle\boldsymbol{j}\rangle\times\boldsymbol{R}]}{R^3}\,dV, \tag{2.14}$$

где $\boldsymbol{R}$ – направление из dV в точку наблюдения.

Теорема Гаусса для магнитного поля

И вновь обращаемся к уравнениям Максвелла, а именно

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0, \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_V \operatorname{div}\boldsymbol{H}\,dV = \oint\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{f} = 0. \tag{2.15}$$

И, из другуго уравнения

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{\boldsymbol{j}} + \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{2.16}$$

Интегрируя по некоторой поверхности, по формуле Стокса,

$$\int\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{f} = \oint\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{f} + \frac{4\pi}{c}\int\boldsymbol{j}\,d\boldsymbol{f}.$$

Теперь естественно ввести величину *тока смещения* $\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}/4\pi$, и получить уравнение вида

$$\oint\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c}\int\left(\boldsymbol{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)d\boldsymbol{f}.$$

Коллекционирование магнитных бабочек

Из театреме о циркуляции $\boldsymbol{H}$ можем найти, прямой провод с током окружают самозамкнутый кружочки с
$$H = \frac{2I}{cr}.$$
Интересен случай с линейной плотностью тока $i = I/l$, тогда
$$dB_\tau = \frac{i}{c}\,d\Omega, \qquad \Omega = 2\pi(1-\cos\alpha).$$
где Ω – телесный угол. Теперь легко получить поле внутри соленодиа:
$$B = \frac{4\pi}{c} i.$$
Аналогичное значение мы получим для «магнитного конденсатора». Для тороидальной катушки с разрывом, по теореме о циркуляции
$$H_0 \Delta l + H(l-\Delta l) = NI, \qquad \Rightarrow \qquad H_0 = \frac{\mu NI}{(\mu-1)\Delta l + l}, \qquad H \approx \frac{IN}{l}.$$

2.7 Магнитный момент тока

Рассмотрим $\langle \boldsymbol{H} \rangle$, как предыдущем билете, перейдя от $\boldsymbol{j}$ к $\rho \boldsymbol{v}$.

$$\langle \boldsymbol{A} \rangle = \frac{1}{c} \sum \left\langle \frac{e_a \boldsymbol{v}_a}{R_a} \right\rangle = \frac{1}{c} \sum \left\langle \frac{e_a \boldsymbol{v}_a}{\|\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{r}_a\|} \right\rangle,$$

и аналогично раскладывая в ряд до первого порядка $\boldsymbol{r}_a/R_0$:

$$\langle \boldsymbol{A} \rangle = \frac{1}{cR_0} \sum e \langle \boldsymbol{v} \rangle - \frac{1}{c} \sum e \left\langle \left(\boldsymbol{r} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{R_0} \right) \boldsymbol{v} \right\rangle = \frac{1}{c} \sum e \left\langle \left(\boldsymbol{r} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{R_0} \right) \boldsymbol{v} \right\rangle.$$

Вспомнив, что $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$, считая $\boldsymbol{R}_0 = \text{const}$ –

$$\sum e \left(R_0 \cdot \boldsymbol{r} \right) \boldsymbol{v} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{d}{dt} \sum e \boldsymbol{r} \left(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{R}_0 \right)}_{=0} + \frac{1}{2} \sum e \underbrace{\{ \boldsymbol{v} \left(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{R}_0 \right) - \boldsymbol{r} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{R}_0) \}}_{[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{R}_0},$$

и теперь введём

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2c} \sum e \left[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \right], \quad \text{— \textit{магнитный момент системы.}} \tag{2.17}$$

Тогда

$$\langle \boldsymbol{A} \rangle = \frac{1}{R_0^3} \Big[\langle \boldsymbol{m} \rangle \times \boldsymbol{R}_0 \Big] = \Big[\operatorname{grad} \frac{1}{R_0} \times \langle \boldsymbol{m} \rangle . \Big]$$

Вспомним, что

$$\operatorname{rot} \left[\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \right] = \left(\boldsymbol{b} \cdot \nabla \right) \boldsymbol{a} - \left(\boldsymbol{a} \cdot \nabla \right) \boldsymbol{b} + a \operatorname{div} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \operatorname{div} \boldsymbol{a},$$

и получим

$$\langle \boldsymbol{H} \rangle = \operatorname{rot} \langle \boldsymbol{A} \rangle = \operatorname{rot} \left[\langle \boldsymbol{m} \rangle \frac{\boldsymbol{R}_0}{R_0^3} \right] = \langle \boldsymbol{m} \rangle \operatorname{div} \frac{\boldsymbol{R}_0}{R_0^3} - \left(\langle \boldsymbol{m} \rangle \cdot \nabla \right) \frac{\boldsymbol{R}_0}{R_0^3}.$$

Раскрыв по правилу Лейбница

$$\Big(\langle \boldsymbol{m} \rangle \cdot \nabla \Big) \frac{\boldsymbol{R}_0}{R_0^3} = \frac{1}{R_0^3} \left(\langle \boldsymbol{m} \rangle \cdot \nabla \right) \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{R}_0 \left(\langle \boldsymbol{m} \rangle \cdot \nabla \frac{1}{R_0^3} \right) = \frac{1}{R_0^3} \Big(\langle \boldsymbol{m} \rangle - 3 \boldsymbol{R}_0 \left(\langle \boldsymbol{m} \rangle \cdot \boldsymbol{R}_0 \right) / R_0^2 \Big).$$

И наконец, сквозь тернии, находим очень знакому формулу

$$\boxed{\langle \boldsymbol{H} \rangle = \frac{1}{R_0^3} \Big(3 \boldsymbol{n} \left(\langle \boldsymbol{m} \rangle \cdot \boldsymbol{n} \right) - \langle \boldsymbol{m} \rangle \Big), \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{R}_0}{R_0},} \tag{2.18}$$

таким образом мы нашли вектор напряженности магнитного поля вокруг магнитного диполя!

Сила и момент сил

Результирующая сила, дейтсвующая на виток с током в постоянном магнитном поле, дается выражением

$$F = \frac{I}{c} \oint \left[d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \right]. \tag{2.19}$$

В случае плоского витка с током, разобьем его на $I\, d\boldsymbol{l}_1$ и $I\, d\boldsymbol{l}_2$. Действующие на них силы Ампера нормальны к плоскости витка и противоположны по направлению.

$$F_1 = \frac{I}{c} B\, dl_1 \sin \alpha = \frac{I}{c} B\, dh,$$

аналогчино для F_2, соотвественно эти силы образуют момент

$$dM = \frac{I}{c} Ba\, dh = \frac{I}{c} B\, dS, \quad \Rightarrow \quad M = \frac{I}{c} B,$$

где S – площадь витка. Введем вектро площади контура S, тогда

$$\boldsymbol{M} = \left[\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} \right], \quad \boldsymbol{m} = \frac{I}{c} \boldsymbol{S}, \tag{2.20}$$

где вектор $\boldsymbol{m}$ – *магнитный момент тока.* В случае нормального направления к магнитному полю, сила ампера будет только растягивать или сжимать виток. В случае криволинейной поверхности, следует ввести $\boldsymbol{S} = \int d\boldsymbol{S}$, где интегрирование производится по поверхности.

Если расположить катушку (много витков) так, чтобы $\boldsymbol{m} \perp \boldsymbol{B}$, то получим

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{m^2} \Big[\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{m} \Big],$$

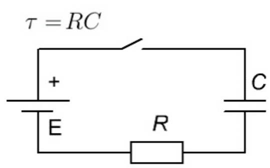
что позволят на практике проверить закон Би-Савара-Лапласа.

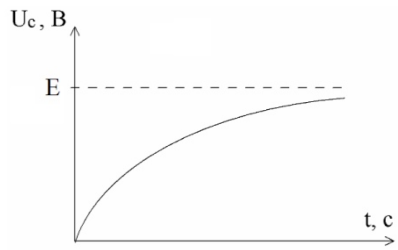
2.13 Квазистационарные электрические цепи

Условие квазистационарности

Условие квазистационарности заключается в том, что характерное время изменения макроскопических величин (таких как ток, напряжение, частота или импеданс) в цепи должно быть сильно меньшим времени распространения сигнала в цепи (размер цепи делить на скорость света).

Зарядка и разядка конденсатора





Зарядка и разрядка конденсатора описывается следующим дифференциальным уравнением и его решением (U_c – напряжение на конденсаторе):

$$E = U_c + RC\dot{U}_c; \qquad U_c = E - ke^{-RCt}$$

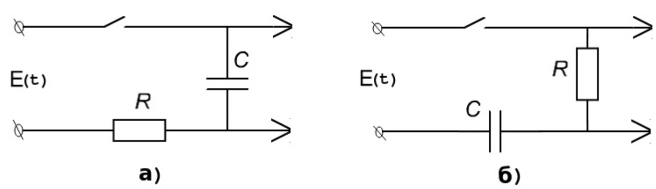
где k - постоянная интегрирования, зависит от начального напряжения на конденсаторе, а RC - характерное время зарядки конденсатора.

Установлени тока в катушке индуктивности

Если в схеме для конденсатора заменить его на индуктивность, то получим следующее уравнение и его решение (k - постоянная интегрирования, зависящая от начального тока):

$$E = IR + \dot{I}L; \qquad I = \frac{E}{R} + ke^{-\frac{R}{L}t}; \qquad k = I_{\text{нач}} - \frac{E}{R}$$

Интегрирующие и дифференцирующие цепочки



а) Uc << E(t)

б) RI << E(t)

Если в нарисованной выше схеме подавать вместо E какой-то сигнал, то в случае а):

$$E(t) = U_c + \dot{U}_c CR \approx \dot{U}_c R; \qquad U_c \approx \frac{1}{RC}\int E(t)dt,$$

В случае б):

$$E(t) = U_c + \dot{U}_c CR \approx U_c; \qquad U_R \approx RC\frac{dE(t)}{dt}.$$

2.20 Уравнения Максвелла

Естественно ввести *тензор электромагнитного поля*:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}_{ik}, \qquad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}^{ik} \tag{2.21}$$

Тогда уравнения Максвелла запишутся в виде

$$\boxed{\varepsilon^{iklm}\partial_k F_{lm} = 0, \qquad \partial_k F^{ik} = -\frac{4\pi}{c} j^i}, \tag{2.22}$$

где $j^i = (\rho c, \boldsymbol{j})$. Прямой подстановкой тензора ЭМ поля нетрудно убедиться, что

Дифференциальная форма в СГС:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho \tag{2.23}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.24}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2.25}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{2.26}$$

Интегральная форма в СГС:

$$\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{s} = 4\pi Q \tag{2.27}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = 0 \tag{2.28}$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{2.29}$$

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{s}. \tag{2.30}$$

$\boldsymbol{E}$ — напряженность электрического поля;
$\boldsymbol{H}$ — напряженность магнитного поля;
$\boldsymbol{D}$ — электрическая индукция;
$\boldsymbol{B}$ — магнитная индукция.

Материальные уравнения

В проводниках связь между плотностью тока и напряжённостью электрического поля выражается в линейном приближении *законом Ома*:

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E},$$

где σ – *удельная проводимость среды.*

В среде сторонние электрические и магнитные поля вызывают поляризация $\boldsymbol{P}$ и намагничивание вещества $\boldsymbol{M}$. Тогда

$$\rho_{\mathrm{b}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{b}} = c\nabla \times \boldsymbol{M} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t},$$

Далее, по определению

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi \boldsymbol{M}$$

Что в случае линейной поляризации или линейной намагничиваемости можно записать, как

$$\begin{cases} \boldsymbol{P} = \chi_{\mathrm{e}} \boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{M} = \chi_{\mathrm{m}} \boldsymbol{H}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} = (1 + 4\pi\chi_{\mathrm{e}})\boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} = (1 + 4\pi\chi_{\mathrm{m}})\boldsymbol{H}. \end{cases}$$

где ε – ~~*относительная*~~ *диэлектрическая проницаемость*, μ — *относительная магнитная проницаемость*, χ_{e} – *диэлектрическая восприимчивость*, χ_{m} – *магнитная восприимчивость*.

Наконец, в однородных средах верно, что

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi \dfrac{\rho}{\varepsilon}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \dfrac{4\pi}{c}\mu \boldsymbol{j} + \dfrac{\varepsilon\mu}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \end{cases}$$

где в оптическом диапазоне принято $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$.

Граничные условия

Опять же, в СГС,

$$\begin{cases} (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) \times \boldsymbol{n}_{1,2} = 0, \\ (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) \times \boldsymbol{n}_{1,2} = \dfrac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) \cdot \boldsymbol{n}_{1,2} = -4\pi \rho_{\mathrm{s}}, \\ (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) \cdot \boldsymbol{n}_{1,2} = 0, \end{cases}$$

где ρ_{s} – поверхностная плотность свободных зарядов, $\boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}$ – плотность поверхностных свободных токов вдоль границы.

Эти граничные условия показывают непрерывность нормальной компоненты вектора магнитной индукции, и непрерывность на границе областей тангенциальных компонент напряжённостей электрического поля.

Уравнение непрерывности

Источники полей $\rho, \boldsymbol{j}$ не могут быть заданы произвольным образом. Применяя операцию дивергенции к четвёртому уравнению (закон Ампера—Максвелла) и используя первое уравнение (закон Гаусса), получаем уравнение непрерывности

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \qquad \Leftrightarrow \qquad \oint_S \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV.$$

2.21 Вектор Умова-Пойтинга

Вспомнив пару уравнений Максвелла и домножив на $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ соответсвтенно, получим

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c}\boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \underbrace{\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}}_{-\operatorname{div}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}]}.$$

Поэтому естественно ввести следующее определение:

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}] \ \text{— \textit{вектор Умова-Пойтинга}.} \tag{2.31}$$

Тогда уравнение перепишется в следующем виде (теорема Пойтинга в диф-форме):

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{E^2+H^2}{8\pi} = -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} - \operatorname{div}\boldsymbol{S}. \tag{2.32}$$

Проинтегрировав по некоторому объему, поймём, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV = -\int\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\,dV - \oint\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{f}, \tag{2.33}$$

вспомнив скорость изменения кинетической энергии, получим, так называемую, *теорему Пойтинга*

$$\begin{aligned} e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v} &= \frac{d}{dt}\mathcal{E}_{\text{кин}}, \\ \int\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\,dV &= \sum e\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}, \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\left[\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV + \sum\mathcal{E}_{\text{кин}}\right] = -\oint_{\partial V}\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{f}. \tag{2.34}$$

И теперь уже естественно разделить левую часть на энергию зарядов, и энергию поля:

$$\mathcal{W} = \frac{E^2+H^2}{8\pi} \ \text{— \textit{плотность энергии} ЭМ поля,}$$

а также ввести следующую величину:

$$\oint_{\partial V}\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{f} \ \text{— \textit{поток энергии} ЭМ поля.}$$