

# ЗАМЕТКИ КУРСА «ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ»

---

Автор: Хоружий Кирилл

От: 11 октября 2020 г.

## Содержание

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Закон Кулона и теорема Гаусса</b>               | <b>1</b> |
| <b>2</b> | <b>Потенциал электрического поля.</b>              | <b>2</b> |
| 2.1      | Дифференциальная форма записи                      | 2        |
| 2.2      | Граничные условия на заряженной поверхности        | 3        |
| <b>3</b> | <b>Проводники</b>                                  | <b>3</b> |
| 3.1      | Основная задача электростатики                     | 3        |
| <b>4</b> | <b>Диэлектрики</b>                                 | <b>3</b> |
| 4.1      | Теорема Гаусса                                     | 4        |
| 4.2      | Граничные условия на границе двух диэлектриков     | 4        |
| 4.3      | Поле системы зарядов в однородном диэлектрике      | 5        |
| <b>5</b> | <b>Энергия электрического поля</b>                 | <b>5</b> |
| <b>6</b> | <b>Виды диэлектриков</b>                           | <b>5</b> |
| <b>7</b> | <b>Теория постоянных токов</b>                     | <b>6</b> |
| <b>8</b> | <b>Магнитное поле в намагничивающихся средах</b>   | <b>7</b> |
| 8.1      | Уравнения максвелла для магнитного поля в веществе | 7        |
| 8.2      | Различные вещества                                 | 8        |
| 8.3      | Граничные условия                                  | 8        |
| <b>9</b> | <b>Электромагнитная индукция</b>                   | <b>8</b> |

## 1 Закон Кулона и теорема Гаусса

Здесь попробуем индуктивно построить содержательную теорию, **начнём с двух экспериментальных фактов**, положенных в основу теории. Закона Кулона (сгсэ)

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.1)$$

и, введя вектор напряженности электростатического поля  $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$ , принцип суперпозиции:

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i. \quad (1.2)$$

### Дипольный момент

Простейшим примером системы зарядов является диполь  $q_1 + q_2 = 0$ , для которого введём  $\mathbf{p} = ql$ :

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r_1^2} \frac{\mathbf{r}_1}{r_1} - \frac{q}{r_2^2} \frac{\mathbf{r}_2}{r_2} \quad l \ll r_2, r_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}}{r^3} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}$$

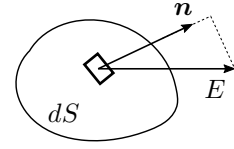
Для заряженной нити верно, что

$$E = 2 \frac{\mathcal{K}}{r}.$$

Теперь дойдём до двух теорем (кусочки уравнений Максвелла), описывающих электростатическое поле.

**Thr 1.1** (теорема Гаусса). Для потока  $\mathbf{E}$  через замкнутую поверхность  $S$  верно, что

$$\oint_S \mathbf{E}_n dS = \oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = 4\pi q_{\text{вн.}} \quad (1.3)$$



△.

I. Доказательство (из закона Кулона) для сферы вокруг точечного заряда очевидно.

II. Рассмотрим произвольную поверхность  $\Omega$ , содержащую заряд, и телесный угол в онной:

$$E_n dS = E \cos \alpha dS = E dS'$$

То есть поток через наклонную площадку равен потоку через тот же телесный угол через некоторую вспомогательную сферу. Так как  $s_1/s_2 = r_1^2/r_2^2$  и  $E_1/E_2 = r_2^2/r_1^2$ , получается интегрировать по  $\Omega$  то же самое, что и интегрировать по выбранной хорошей сфере.

III. Рассмотрим теперь некоторую  $\Omega$ , не содержащую заряд. Посмотрим на телесный угол от  $q$ . По модулю потоки через них одинаковые, а знаки противоположны, следовательно вклад в поток через  $\Omega$  нет.

IV. Для сложного распределения зарядов, по принципу суперпозиции верно, что

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i \Rightarrow \oint_S \mathbf{E}_n dS = \sum_i \oint_S \mathbf{E}_i dS.$$

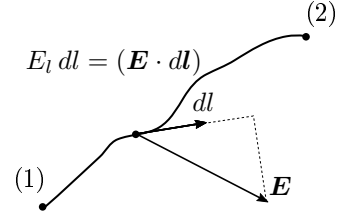
□

## 2 Потенциал электрического поля.

**Thr 2.1** (Теорема о циркуляции). Для заряда, при квазистатическом перемещении, верно, что

$$A_{\text{замкн}} = \oint_{(L)} (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (2.2)$$



△.

I. Рассмотрим поле точечного заряда  $Q$  и перемещение с  $\mathbf{r}$  до  $\mathbf{r} + d\mathbf{l}_r + (d\mathbf{l} - d\mathbf{l}_r)$ . Тогда  $dA = (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = \frac{Q}{r^2} dl_r$ , то есть  $A \equiv A(r_1, r_2)$ .

II. Для поля в принципе вышесказанное верно по принципу суперпозиции.

□

**Def 2.2.** Разностью потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  между точками  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  называется  $A = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} d\mathbf{l}$ , при перемещении единичного положительного заряда. Потенциал определен с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

В частности, для точечного заряда, при  $\varphi_\infty = 0$ , верно

$$\varphi(r) = \int_r^\infty \frac{Q(r)}{r^2} dr = \frac{Q}{r}.$$

А для двух зарядов,  $+q, -q$

$$\varphi = -\frac{q}{r_1} + \frac{q}{r_2} = q \frac{(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} \quad r \gg l \Rightarrow \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r}$$

### 2.1 Дифференциальная форма записи

Вектор напряженности электростатического поля

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (2.3)$$

Действительно,

$$d\varphi = -(\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx_i = d\mathbf{l} \cdot \nabla \varphi, \text{ где } \nabla \varphi \equiv \text{grad } \varphi.$$

А теперь рассмотрим некоторый элементарный параллелепипед. Тогда поток через левую грань это  $-E_x dy dz$ , а через правую это  $(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx) dy dz$ . Тогда суммарный поток через маленький параллелепипед равен  $dV \partial E / \partial x$ , а теорема Гаусса примет вид

$$\left( \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z} \right) dV = 4\pi\rho dV \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho}. \quad (2.4)$$

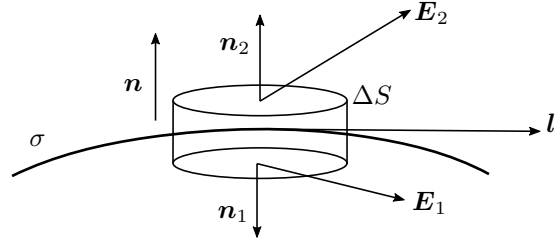
## 2.2 Граничные условия на заряженной поверхности

По теореме Гаусса верно, что

$$E_{2n_2} \Delta S + E_{1n_1} \Delta S = 4\pi\sigma \Delta S, \\ E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$$

По теореме циркуляции верно, что

$$E_{2l} \Delta l - E_{1l} \Delta l = 0 \\ E_{2l} - E_{1l} = 0.$$



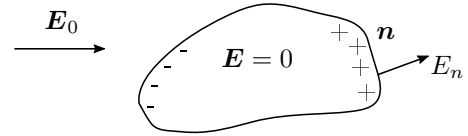
## 3 Проводники

**Def 3.1** (пусть так). *Проводник* – костьяк частиц, окруженных *свободными* электронами, которые в пределах тела могут перемещаться на какие угодно расстояния.

В частности, для проводников, верно, что

$$E_n = 4\pi\sigma \quad (3.1)$$

$$E_\tau = 0 \quad (3.2)$$



Собственно, объёмных зарядов в проводнике нет, поверхностные есть и компенсируют внешнее поле. Аналогично работает решетка Фарадея, электростатическое поле не проникает в проводники.

### 3.1 Основная задача электростатики

Вместо поиска  $\mathbf{E}$  достаточно найти  $\varphi$ , воспользовавшись (2.3) и (2.4), получим

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi \equiv \delta\varphi = \begin{cases} -4\pi\rho & \text{ур. Пуассона} \\ 0 & \text{ур. Лапласа} \end{cases}$$

Как может быть поставлена задача? Заданы граничные значения, найти распределения зарядов. Заданы заряды, найти распределения. Что-то задано, что-то не задано. Во всех трёх случаях **решение уравнения Лапласа единственно**.

### Метод изображений

Если существует некоторая эквипотенциальная поверхность разделяющая пространство на два полупространства, то можем считать что эта поверхность является проводящей.

## 4 Диэлектрики

**Def 4.1.** *Диэлектрики* – непроводники электричества. В них возбуждаются индукционные заряды, привязанные к кастету частиц, – *поляризационные*, или *связанные заряды*.

Альтернативный вариант, – наличие дипольного момента у молекул. При наличии электрического поля дипольные моменты ориентируются, диэлектрик попользуется.

**Def 4.2.** *Вектор поляризации* – дипольный момент единицы объема диэлектрика, возникающий при его поляризации.

Рассмотрим скошенный параллелепипед. На основаниях параллелепипеда возникнут поляризационные заряды с поверхностной плотностью  $\sigma_{\text{пол}}$ . Взяв его площадь за  $S$ , найдём дипольный момент равный  $\sigma_{\text{пол}}Sl$ . Тогда вектор поляризации будет

$$\mathbf{P} = \frac{\sigma_{\text{пол}} S}{V} \mathbf{l}, \quad (4.1)$$

что верно и для анизотропных кристаллов где  $\mathbf{E} \nparallel \mathbf{P}$ .

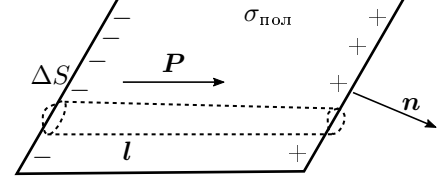
Пусть  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к основанию параллелепипеда, тогда  $V = S(\mathbf{l} \cdot \mathbf{n})$ .

Подставив  $V$  в предыдущую формулу, получим, что

$$\sigma_{\text{пол}} = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}) = P_n \quad (4.2)$$

Или, более общо,

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \mathbf{p}_i$$



В случае неоднородной поляризации верно, что поляризационные заряды могут появиться и на поверхности. Выделим  $V$ , ограниченный  $S$ , смещённый заряд равен  $-P_n dS$ , тогда через  $S$  поступает

$$q_{\text{пол}} = - \oint P_n dS = - \oint (\mathbf{P} \times d\mathbf{S}). \quad (4.3)$$

Стоит заметить, что в теорему о циркуляции не входят заряды, соответственно для диэлектриков верно, что

$$\oint_{(L)} \mathbf{E}_l d\mathbf{l} = 0.$$

Далее чаще всего мы будем сталкиваться с линейной поляризацией, когда

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \underbrace{\mathbf{E} (1 + 4\pi\alpha)}_{\varepsilon} = \varepsilon \mathbf{E},$$

где  $\alpha$  – *поляризуемость диэлектрика*, а  $\varepsilon$  – *диэлектрическая проницаемость*.

## 4.1 Теорема Гаусса

Запишем теорему Гаусса для электрического поля в диэлектрике. Знаем, что  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{пол}} + \mathbf{E}_{\text{св}}$ .

$$\oint \mathbf{E}_n dS = 4\pi(q + q_{\text{пол}}) \quad \Rightarrow \quad \oint \underbrace{(\mathbf{E}_n + 4\pi P_n)}_{D_n} dS = 4\pi q. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\oint \mathbf{D}_n dS = 4\pi q_{\text{св}}} \quad (4.4)$$

где  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ . – вектор *электрической индукции*, или *электрического смещения*. Поток вектора  $\mathbf{D}$  определяется только свободными зарядами.

Можно посмотреть на это в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi(\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}), \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi(\rho + \rho_{\text{пол}}) \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{пол}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \end{aligned}$$

## 4.2 Граничные условия на границе двух диэлектриков

Повторя рассуждения для проводников, найдём, что

$$D_{1n} = D_{2n},$$

а в случае линейных диэлектриков верно

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}.$$

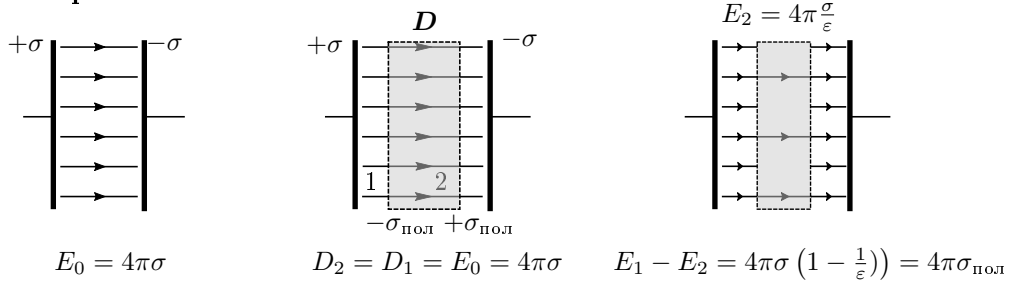
Или

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma_{\text{пол}}.$$

Аналогично, из теоремы о циркуляции получим, что

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0.$$

### Плоский конденсатор



То есть на грани пластинки  $\sigma_{\text{пол}} = \sigma \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)$ .

### 4.3 Поле системы зарядов в однородном диэлектрике

Для точечного заряда в однородном диэлектрике, по теореме Гаусса

$$\left. \begin{array}{l} D \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q \\ D = \varepsilon E \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{E = \frac{q}{\varepsilon r^2}}.$$

То есть в общем случае, по принципу суперпозиции, в диэлектрике

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E}_0.$$

## 5 Энергия электрического поля

Рассмотрим систему из двух зарядов  $q_1$  и  $q_2$ . Тогда энергия взаимодействия

$$W = q_1 \varphi_{21} = q_2 \varphi_{12} = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_{21} + q_2 \varphi_{12}).$$

Или, в общем случае

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} W_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{ij} (q_i \varphi_i^j) = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i,$$

где под  $\varphi_i$  имеется ввиду потенциал  $q_i$  заряда. В случае непрерывно заряженного тела

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi \rho dV.$$

Например, для конденсатора

$$W = \frac{1}{2} \varphi_1 \int_{(1)} dq + \frac{1}{2} \varphi_2 \int_{(2)} dq = \frac{1}{2} q (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{1}{2} q U = \frac{c U^2}{2} = \frac{q^2}{2c}.$$

Вопрос: где локализована энергия? Ответ: в зарядах или в поле. В частности, для конденсатора

$$W = \frac{1}{2} c U^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon S E^2 d^2}{4\pi d} = \underbrace{\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}}_{\mathcal{W}_\Theta} V,$$

где  $\mathcal{W}_\Theta = \varepsilon E^2 / 8\pi$  — *объемная плотность* электрической энергии. В общем же случае

$$W_\Theta = \int \mathcal{W}_\Theta dV. \quad (5.1)$$

## 6 Виды диэлектриков

Посмотрим на энергию внутри вакуума и диэлектрика,  $E^2/8\pi$  и  $E^2/\varepsilon 8\pi$ . Энергия электрического поля определяется через работу внешних сил, которую необходимо затратить, чтобы это поле создать. Собственно, во втором случае есть ещё добавки. рассмотрим диэлектрик с упругими диполями, то есть пусть

$$F = \kappa l.$$

Пусть диполь попал во внешнее поле, тогда

$$Eq \cdot \frac{l}{2} = \kappa l \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} E p.$$

Тогда вся энергия, чтобы создать в этой среде поле

$$W = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{EP}{2} = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{1}{2}E^2\alpha = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{E^2}{8\pi}(\varepsilon - 1) = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}.$$

А если работать с диэлектриками с собственным дипольным моментом? Тогда ещё появиться некоторое тепло, которое необходимо отдать термостату, увеличивая упорядоченность системы. Постараемся обобщить, для этого вспомним, что

**Def 6.1.** *Свободная энергия* – функция состояния, приращение которой в обратимом изотермическом процессе равно совершаемой работе внешних сил.

Так вот, то что мы называем энергией электрического поля (в диэлектриках), на самом деле это объёмная плотность свободной энергии  $\Psi = U - TS$ .

## 7 Теория постоянных токов

**Def 7.1.** *Сила тока* – заряд, протекший через сечений проводника в единицу времени,

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (7.1)$$

*Плотность тока* – ток, протекающий через единичное сечение.

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{u}. \quad (7.2)$$

**Law 7.2** (закон Ома). *Для класса линейных проводников верно, что при наличии разности потенциалов  $U$*

$$I = \frac{U}{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}, \quad (7.3)$$

где  $\lambda = 1/\rho$ , обратное удельное сопротивление.

В СГСЭ, кстати,  $\dim \rho = \text{с}$ , а в СИ 1 ед. СГСЭ  $\rho = 9 \cdot 10^9 \text{ Ом}$ .

### Условие стационарности

Пусть в некоторый узел втекает  $I_1, \dots, I_n$ , тогда

$$\oint_{(S)} j_n dS = -\dot{Q}.$$

Это «закон сохранения заряда», или уравнение непрерывности. В частности, в стационарном случае

$$\boxed{\oint j_n dS = 0}. \quad (7.4)$$

Получается (??), что поле зарядов, которые участвуют в протекании постоянных токов можно описывает с помощью электростатических формул, то есть применять теорему Гаусса и теорему о циркуляции.

По теореме Гаусса и условия стационарности,

$$0 = \oint j_n dS = \lambda \oint E_n dS = \lambda 4\pi q,$$

то есть для проводников с постоянным током всё ещё верно, что внутреннего заряда в проводниках нет, а есть только поверхностный.

Невозможна стационарная ситуация с постоянным током только на потенциальных силах. Для участка цепи, в котором действуют сторонние силы, можно записать

$$\mathbf{j} = \lambda (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}}). \quad (7.5)$$

**Def 7.3.** *ЭДС* – электро-движущая сила, работа совершаемая сторонними силами при перемещении единичного заряда по рассматриваемому участку,

$$\mathcal{E} = \int_{(l)} E_l^{\text{стор}} dl. \quad (7.6)$$

## Правила Кирхгофа

Рассмотрим узел, в который втекает  $I_1, \dots, I_n$ . Из условия стационарности получим (I). Рассмотрев замкнутый участок цепи, получим (II) правило Кирхгофа. Действительно,  $j_l = \lambda(E_l + E_l^{\text{с top}})$ , или

$$\oint \frac{I dl}{\lambda S} = \oint (E_l + E_l^{\text{с top}}) dl, \quad \text{где} \quad \oint \frac{I dl}{\lambda S} = IR.$$

$$\text{I. } \sum I_i = 0.$$

$$\text{II. } \bigcirc I_i R_i = \bigcirc \mathcal{E}_i$$

Но для каждого участка  $I_i R_i = \Delta\varphi_i + \mathcal{E}_i$ . Это с учётом направления тока.

*Оказывается*, для любой цепи, записав уравнения Кирхгофа для всех узлов и всех независимых контуров, получим разрешимую единственным образом систему уравнений (ну или хотя бы столько, сколько можно).

## 8 Магнитное поле в намагничивающихся средах

### 8.1 Уравнения максвелла для магнитного поля в веществе

Посмотрим на рамку с током в магнитном поле. Для неё верно, что суммарная сила, действующая на рамку,

$$\mathbf{B} \oint d\mathbf{F} = \frac{I}{c} \oint [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}] = \frac{I}{c} \left[ \oint d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \right] = 0.$$

Однако момент, действующий на рамку, не равен 0,

$$S = ab, \quad F = \frac{I}{c} bB \Rightarrow M = \frac{IS}{c} \sin \alpha \Rightarrow \mathbf{p}_m = \frac{IS}{c} \mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \times \mathbf{B}].$$

Посмотрим теперь на рамку в неоднородном магнитном поле. Рассмотрим рамку такую, что  $\mathbf{p}_m \parallel \mathbf{B}$ , тогда  $I d\mathbf{l}$  имеет проекцию на  $\mathbf{n}$ , получается, что

$$F_x = (p_m)_x \frac{\partial B_x}{\partial x}.$$

Возвращая к полю, предполагается, что внутри молекул формируются *молекулярные токи*, создающие дополнительный магнитный момент, а при наличие внешнего поля происходит ориентация этих моментов. Тогда теорема о циркуляции магнитного поля в веществе запишется, как

$$\oint_{(L)} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}) = \frac{4\pi}{c} (I_{\text{пров}} + I_{\text{мол}}). \quad (8.1)$$

Стоит заметить, что в теории Максвелла имеется ввиду, что

$$\mathbf{B} = \langle \mathbf{B}_\mu \rangle.$$

Характеристика, описывающая состояние намагниченного вещества в точке – магнитный дипольный момент, единице объема:

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} (\mathbf{p}_m)_i.$$

Можем записать, что

$$\oint \mathcal{I}_l dl = \frac{I_{\text{мол}}}{c}. \quad (8.2)$$

Тогда уравнение переписется, как

$$\oint_{(L)} (\mathbf{B} d\mathbf{l}) = \frac{4\pi}{c} I_{\text{пров}} + 4\pi \oint_{(L)} (\mathcal{I} dl). \quad (8.3)$$

$$\oint_{(L)} \underbrace{(\mathbf{B} - 4\pi \mathcal{I})}_{\mathbf{H}} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I_{\text{пров}}, \quad (8.4)$$

здесь принимается определение  $\boxed{\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathcal{I}}$  – *напряженность магнитного поля*.

Далее нас интересует линейная намагничиваемость:

$$\mathcal{I} = \kappa \mathbf{H},$$

где  $\kappa$  — магнитная восприимчивость. Тогда можем записать, что

$$\underbrace{H(1 + 4\pi\kappa)}_{\mu} = B, \quad (8.5)$$

что записано в системе Гаусса. В СИ верно, что

$$H = \frac{B}{\mu_0} - \mathcal{I}.$$

## 8.2 Различные вещества

- I. Парамагнетики,  $\kappa \in [10^{-3}, 10^{-6}]$ , пример: алюминий.
- II. Диамагнетики,  $\kappa < 0$ , пример: золото, серебро, см. модель Ланжевена.
- III. Ферромагнетики,  $\kappa \in [10^3, 10^6]$ , пример: железо, никель.

## 8.3 Граничные условия

Рассмотрим границу двух веществ с  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Тогда

$$B_{1n} = B_{2n},$$

а для тангенциальной компоненты

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_N.$$

# 9 Электромагнитная индукция