Второе задание по курсу «Аналитическая Механика»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *20 ноября 2020 г.*

Содержание

1 Динамика II

1.8 Геометрия масс

11.8(7)

Запишем тензор квадрата расстояния

$$\widetilde{r_i}^{\mathrm{T}}\widetilde{r_i} = \begin{pmatrix} y_i^2+z_i^2 & -x_iy_i & -x_iz_i \\ -x_iy_i & x_i^2+y_i^2 & -y_iz_i \\ -x_iz_i & -y_iz_i & x_i^2+y_i^2 \end{pmatrix} = \hat{j}_i, \tag{1.1}$$

суммируя, получим

$$\hat{J}_0 = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

В силу симметрии системы $J_x = J_y = J_z$, выбрав сферические координаты найдём J_z:

$$J_z = \int_M (y^2+x^2)\,dm = \rho\int_V (y^2+x^2)\,dV = \rho\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2} r^4\sin^3\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta = \frac{2}{5}R^5\frac{1}{R^2}\left(\frac{4}{3}R^3\rho\pi\right) = \frac{2}{5}MR^2. \tag{1.3}$$

11.12

Тензор инерции твердого тела в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ имеет такой вид

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}, \qquad D \neq 0.$$

Хотелось бы его к диагональному виду привести. Повернем оси вокруг оси Ox на некоторый угол α и приведём к диагональному виду

$$S^{\mathrm{T}}\hat{J}S = \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

После нескольких монотонных операций (ограничив все на плоскость Oxy) получаем

$$S^{\mathrm{T}}JS\Big|_{Oyz} = \begin{pmatrix} B\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + D\sin 2\alpha & B\sin 2\alpha/2 - C\sin 2\alpha/2 - D\cos 2\alpha \\ B\sin 2\alpha/2 - C\sin 2\alpha/2 - D\cos 2\alpha & B\cos^2\alpha + C\cos^2\alpha - D\sin 2\alpha \end{pmatrix},$$

откуда находим α

$$\cos 2\alpha = \frac{B-C}{\sqrt{4D^2+(B-C)^2}}$$

и, соответсвенно,

$$A' = A, \quad B' = \frac{1}{2}\left(B+C+\sqrt{(B-C)^2+4D^2}\right), \quad C' = \frac{1}{2}\left(B+C-\sqrt{(B-C)^2+4D^2}\right). \tag{1.4}$$

Направляющие же векторы найдём, повернув базисные векторы,

$$S\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_2'\\ \boldsymbol{e}_3'\end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{e}_2' = (\boldsymbol{e}_2 + \operatorname{tg}\alpha\,\boldsymbol{e}_3)/n_2, \\ \boldsymbol{e}_3' = (-\operatorname{tg}\alpha\,\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)/n_3 \end{cases}$$

Возвращаясь в трёхмерие наш новый базис (который остается отнормировать)

$$\boldsymbol{e}_1' = (1,\ 0,\ 0), \quad \boldsymbol{e}_2' = (0,\ D,\ (B'-B)), \quad \boldsymbol{e}_3' = (0,\ C'-C,\ D). \tag{1.5}$$

11.18

Поместим начало координат в центр масс (потому что так привычнее считать) и найдём тензор инерции по (1.1) и (1.2), аналогично (1.3), несколько раз проинтегрировав по параллелепипеду

$$J_z = \rho\int_V (x^2+y^2)\,dV = \rho\int\limits_{-a/2}^{a/2}dx\int\limits_{-b/2}^{b/2}dy\int\limits_{-c/2}^{c/2}dz\ (x^2+y^2) = \frac{1}{12}m(a^2+b^2),$$

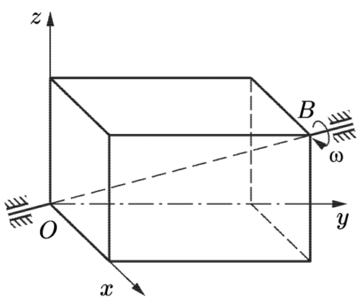

Рис. 1: К задаче 11.18

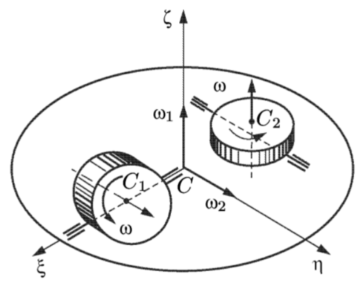

Рис. 2: К задаче 11.27

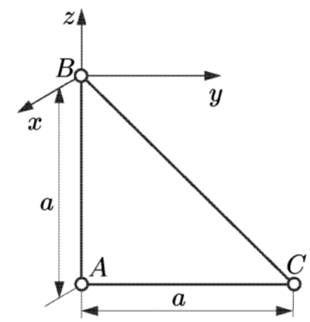

Рис. 3: К задаче 11.27

аналогичные результаты получим для J_y, J_x

$$J_y = \ \dots\ = \frac{1}{12}m(a^2+c^2), \qquad J_x = \ \dots\ = \frac{1}{12}m(b^2+c^2).$$

Остается найти осевые моменты инерции

$$J_{xy} = \rho\int_V xy\,dV = \rho\frac{1}{16}a^2b^2c^2 = \frac{1}{16}mab, \quad J_yz = \ \dots\ = \frac{1}{16}mbc, \quad J_xz = \ \dots\ = \frac{1}{16}mac.$$

Таким образом

$$\hat{J}_O = \frac{1}{48}m\begin{pmatrix} 4(b^2+c^2) & -3ab & -3ac \\ -3ab & 4(a^2+c^2) & -3bc \\ -3ac & -3bc & 4(a^2+b^2)\end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Кинетический момент найдём по определению, как

$$\mathbf{K}_O = \hat{J}_O\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{K}_A = \hat{J}_A\boldsymbol{\omega},$$

где ω и $\hat{J}_A$

$$\hat{J}_A = \hat{J} + m\hat{j}_{OA}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,(a,\ b,\ c)^{\mathrm{T}}$$

Заметим что $\hat{j}_{OA}$ будет аналогичен (1.1), тогда осталось найти $\mathbf{K}_O$:

$$\mathbf{K}_O = \hat{J}_O\boldsymbol{\omega} = \frac{\omega m}{48\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix} a(b^2+c^2) \\ b(a^2+c^2) \\ c(a^2+b^2)\end{pmatrix}.$$

11.27

Проинтегрировав как в задачах 11.18 и 11.8(7) найдём, что относительно центра масс тензор инерции $\hat{J}_O$ диска в главных осях имеет вид

$$\hat{J}_C = \frac{1}{4}mR^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Кинетическая энергия тела может быть найдена, как

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\hat{J}_O\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}mv_O^2.$$

Запишем T для случая $\boldsymbol{\omega}_1 \parallel Oz$, как сумму вращательной и поступательной энергии для двух дисков.

Поступательные, в силу геометрии системы, у дисков равны, первый диск вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{D}1} = (0,\ 0,\ \omega+\omega_1)$, а второй с $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{D}2} = (0,\ \omega,\ \omega_1)$. Тензор инерции для второго диска аналогичен (1.7), только с 2 по оси Oy. Собирая всё вместе

$$T = 2\times\frac{1}{2}m\omega_1^2a^2 + \underbrace{\frac{1}{4}mR^2(\omega+\omega_1)^2}_{\vec{\omega}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{D}1}\hat{J}_{0,\mathrm{D}1}\vec{\omega}_{\mathrm{D}1}} + \underbrace{\frac{1}{8}mR^2\omega_1^2 + \frac{1}{4}mR^2\omega^2}_{\vec{\omega}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{D}2}\hat{J}_{0,\mathrm{D}2}\vec{\omega}_{\mathrm{D}2}} = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \left(a^2+\frac{3}{8}R^2\right)\omega_1^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega\omega_1.$$

Также заметим, что вопросы задачи симметричны с точностью до замены дисков, что упрощает нам дело в плане поиска и записи ответа:

$$T_i = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \left(a^2 + \frac{3}{8}R^2\right)\omega_i^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega\omega_i, \qquad i = 1, 2. \tag{1.8}$$

11.92

Найдём тензор инерции для точки B по (1.2):

$$\hat{J}_B = ma^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вспоминая результаты задачи №11.12, где подобное приведение к главным осям решено в общем виде, находим

$$B' = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right), \qquad C' = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right).$$

Главные оси же параллельны векторам

$$\boldsymbol{e}_1' = (1,\ 0,\ 0), \quad \boldsymbol{e}_2' = \left(0,\ -2,\ \sqrt{5} - 1\right), \quad \boldsymbol{e}_3' = \left(0,\ 1 - \sqrt{5},\ -2\right).$$

Отнормировав которые найдём новый базис.

Тензор инерции точки A и эллипсоид инерции, соответственно, равны

$$\hat{J}_A = ma^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M = \{2x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

где M, как можно заметить, является эллипсоидом инерции ($J_y = J_z$).

1.9 Динамика твёрдого тела

11.45

Твердое тело с неподвижной точкой движется под действием момента

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\omega},$$

где вектор $\boldsymbol{a}$ вращается вместе с твёрдым телом. Хотим перейти к динамическим уравнениям Эйлера, так что

$$\hat{J}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_\xi \\ a_\eta \\ a_\zeta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_O = \begin{pmatrix} a_\eta r - a_\zeta q \\ a_\zeta p - a_\xi r \\ a_\xi r - a_\eta p \end{pmatrix}.$$

Для начала попробуем в лоб, домножив динамические уравнения эйлера на p, q, r соответсвенно

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = -M_\xi \\ B\dot{q} + (A - C)pr = -M_\eta \\ C\dot{r} + (B - A)pq = -M_\zeta \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad A\dot{p}p + B\dot{q}q + C\dot{r}r = 0.$$

Не густо.

Пойдём в чуть более низкоуровневую запись

$$\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt} = \dot{K}_{Oi}\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Т.к. $\dot{a}_i\boldsymbol{e}_i = 0$, то

$$(\dot{K}_{Oi} + \dot{a}_i)\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{K}_O + \boldsymbol{a}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{K}_O + \boldsymbol{a}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{K}_0 + \boldsymbol{a} = \text{const}}\ \text{— первый I интеграл.}$$

Теперь, т.к. $\boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{M}_O$ предположим, что $T = \text{const}$. Действительно

$$dT = \partial A = \cancel{(\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{v}_O)}\,dt + \cancel{(\boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega})}\,dt = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{T = \text{const}}\ \text{– второй I интеграл.}$$

11.59

Есть твёрдое тело в отсутсвие внешних сил с $\boldsymbol{K}_O = \text{const}$ и $A = B \neq C$. Выберем в качестве оси динамической симметрии ось $O\zeta$. Запишем динамические уравнения Эйлера

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-A)qr = 0 \\ A\dot{q} - (C-A)pr = 0 \\ C\dot{r} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C\dot{r} = 0, \quad Cr_0 = K_O\cos\theta = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r(t) = r_0 & = \text{const} \\ \theta(t) = \theta & = \text{const} \end{cases}$$

Посмотрим теперь на $\|\boldsymbol{K}_O\|$

$$K_O^2 = A^2(p^2+q^2) + (K_O\cos\theta)^2 \quad \Rightarrow \quad p^2+q^2 = \left(\frac{K_0\sin\theta}{A}\right)^2.$$

Теперь посмотрим на $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{\boldsymbol{\psi}} + \cancel{\dot{\boldsymbol{\theta}}},$$

проецируя всё на базис $O\xi\eta\zeta$ нахожим, что

$$\begin{cases} r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \\ \sqrt{p^2+q^2} = \dot{\psi}\sin\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\psi} = K_O/A & = \text{const} \\ \dot{\varphi} = r_0\,(1 - C/A) & = \text{const} \end{cases}$$

Теперь мы готов записать *параметры регулярной прецессии в случае Эйлера*:

$$\cos\theta = \frac{Cr_0}{K_0}, \quad \dot{\psi} = \frac{K_O}{A}, \quad \dot{\varphi} = r_0\left(1 - \frac{C}{A}\right), \qquad K_O = \sqrt{C^2r_0^2 + A^2(\omega_0^2 - r_0^2)}. \tag{1.9}$$

11.63

Для начала поймём куда диск движется, точнее найдем (или хотя бы сделаем шаги в эту сторону) мгновенную ось вращения проходящую через точку A и некоторую точку C.

Для начала посмотрим на геометрию системы (введя неизвестные a, b, c):

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -r \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} r \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{CA} = 0 \\ \boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{CB} \\ \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{CD} \end{cases}, \quad \begin{cases} \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \\ \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \end{cases},$$

Для удобства далее будем считать $\boldsymbol{\omega} = k\overrightarrow{CA}$. Посчитаем векторы скоростей в нашеих обозначениях

$$\boldsymbol{v}_D = kr\begin{pmatrix} c \\ c \\ -b-a \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_B = k\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{AB} = kr\begin{pmatrix} c \\ -c \\ b-a \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = b$$

Так как мы знаем абсолютные значения скоростей точек, то запишем

$$v_D^2 - v_B^2 = v_0^2 = 4a^2k^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v_0}{2rk}.$$

Подставив теперь значения a в v_B^2 получим

$$v_B^2 = 2k^2c^2r^2 = v_0^2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{v_0\sqrt{2}}{2kr}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{v_0}{2r}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Теперь найдём скорость центра масс

$$\boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{CO} = \boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{r}_{CA} + \overrightarrow{AO}\right) = \boldsymbol{\omega}\times\begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{v_0}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r}_O(t) = \begin{pmatrix} v_0t/\sqrt{2} \\ 0 \\ -gt^2/2 + v_0t/2 \end{pmatrix}.$$

Теперь мы знаем как будет двигаться в условиях гравитации наш диск (его центр масс)!

Теперь посмотрим на вращение диска относительно центра масс. Для этого пересядем в СО падающую с $\boldsymbol{g}$, теперь $\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{0}$ и мы пришли к случаю Эйлера (который подробно был рассмотрен в задаче №11.59).

Для начала вспомним, что для диска кинетический момент

$$\boldsymbol{K}_O = \hat{J}_O\boldsymbol{\omega} = \frac{mr^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\frac{v_0}{2r} = \frac{mrv_0}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \text{const}, \quad \Rightarrow \quad K_O = \frac{\sqrt{10}}{8}mrv_0.$$

Зная $\boldsymbol{K}_O$ можем найти ось прецессии $\boldsymbol{e} \parallel \boldsymbol{K}_O$
$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(1,\ 1,\ 2\sqrt{2}\right).$$
Подставляя параметры системы в уравнения (1.9), найдём
$$\dot{\psi} = \frac{K_O}{A} = \frac{\sqrt{10}}{2}\frac{v_0}{r}, \qquad \dot{\varphi} = r_0\left(1 - \frac{C}{A}\right) = -\frac{v_0\sqrt{2}}{2r}, \qquad \cos\theta = \frac{Cr_0}{K_O} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

11.72

Решим чуть более общую задачу о движении тяжелого симметричного волчка с неподвижней нижней точкой. Начало координат O совпадает с неподвижной точкой волчка, расстояние до центра масс равно l.

Запишем кинематические и динамические уравнения Эйлера
$$\begin{cases} p = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \\ q = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi, \\ r = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}. \end{cases}, \qquad \begin{cases} I_1\dot{p} + (I_3 - I_2)qr = -M_\xi \\ I_2\dot{q} + (I_1 - I_3)pr = -M_\eta \\ I_3\dot{r} + (I_2 - I_1)pq = -M_\zeta \end{cases}, \qquad \hat{J}_O = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$
Кинетическая энергия волчка (с учетом параллельного переноса тензора инерции с центра масс к точке O)
$$T = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\hat{J}_O\boldsymbol{\omega} = \frac{I_1 + ml^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2.$$
Потенциальная энергия, соответсвенно, равна
$$\Pi = mgl\cos\theta.$$
Собирая вместе, находим
$$L = T - \Pi.$$
Понятно, что $K_3 = \mathrm{const}$, докажем также что $K_z = \mathrm{const}$. Действительно,
$$\frac{dK_z}{dt} = \boldsymbol{M}_A\Big|_Z + \cancel{\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{v}_O} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad K_z = \mathrm{const}.$$
Явно выпишем их
$$\begin{cases} K_3 = \partial L/\partial\dot{\psi} = I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right) \\ K_z = \partial L/\partial\dot{\varphi} = \left((I_1 + ml^2)\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta\right)\dot{\varphi} + I_3\dot{\psi}\cos\theta. \end{cases} \tag{1.10}$$
Кроме того, в системе сохраняется энергия
$$E = T + \Pi = \frac{1}{2}(I_1 + ml^2)\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2 + mgl\cos\theta.$$
Из (1.10) находим явные выражения для $\dot{\varphi}$ и $\dot{\theta}$
$$\dot{\varphi} = \frac{K_z - K_3\cos\theta}{(I_1 + ml^2)\sin^2\theta},$$
$$\dot{\psi} = \frac{K_3}{I_3} - \cos\theta\frac{K_z - K_3\cos\theta}{(I + ml^2)\sin^2\theta}.$$
Подставляя это в выражения для энергии E получим
$$E = \frac{1}{2}(I_1 + ml^2)\dot{\theta}^2 + \frac{(K_z - K_3\cos\theta)^2}{2(I_1 + ml^2)\sin^2\theta} + \frac{K_3^2}{2I_3} + mgl\cos\theta. \tag{1.11}$$
Таким образом мы находим
$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = f_{\dot{\theta}}(E, K_z, K_3) \qquad \Rightarrow \qquad t = \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{f_{\dot{\theta}}(E, K_z, K_3)}, \tag{1.12}$$
что и является нашим искомым решением в квадратурах. Конкретно для №11.72 следует положить $I_3 = 0$ и, в силу доступного для стержня произволя, $\dot{\psi} = 0$. Слагаемые вида K_3/I_3 в таком случае просто не возникнут, решение сохранится.

11.118

Как и в решение к №11.72 у нас симметричный волчок. Требуется определить начальную угловую скорость прецессии $\dot{\varphi}_0$, чтобы $\dot{\theta} = 0$. Формально можем поставить задачу несколько иначе, какой должен быть момент внешних сил $\boldsymbol{M}_O$ чтобы происходила регулярная прецессия $\dot{\theta} = 0$?

Для начала введём отдельно $\boldsymbol{\omega}_1 \parallel O\xi$ и $\boldsymbol{\omega}_2 \parallel OZ$. По раннее проделанной работе с регулярной прецессией, мы знаем, что K_z и K_3 постоянны, соответсвенно $\omega_1, \omega_2, \omega = \mathrm{const}$. Аналогично случаю Эйлера (см. №???)

$$(K_O)_\xi = Cr, \qquad (K_O)_Z = A\sqrt{q^2+q^2}.$$

То есть $\boldsymbol{K}_O \in O\xi Z$ и $K_O = \mathrm{const}$. Но, т.к. плоскость $O\xi Z$ вращаеся с угловой скорсотью $\boldsymbol{\omega}_2$ то и вектор $\boldsymbol{K}_O$ аналогично. Тогда для $\boldsymbol{M}_O$ верно, что

$$\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{M}_O. \tag{1.13}$$

Нетрудно показать, что

$$\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{K}_O = \frac{\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1}{\|\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1\|}\omega_2 \sin\theta \left(C(\omega_1 + \omega_2\cos\theta) - A\omega_2\cos\theta\right)$$

Т.к. $\|\omega_2 \times \omega_1\| = \omega_1\omega_2\sin\theta$, то

$$\boldsymbol{M}_O = (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1)\left[C + (C-A)\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta\right]. \tag{1.14}$$

Это *основная формула гироскопии*, так что, наверное, можно было принять её на веру. В частном случае, когда $\omega_1 \gg \omega_2$ можно приближенно записать эту формулу, как

$$\boldsymbol{M}_O = C\left(\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1\right). \tag{1.15}$$

Конкретно для нашей задачи (1.14) перепишется как

$$\dot{\varphi}\omega\sin\theta\left(C + (C-A)\frac{\dot{\varphi}}{\omega}\cos\theta\right) = mgl\sin\theta,$$

т.к. мы действительно требуем регулярной прецессии. Так получаем квадратное уравнение вида

$$(C-A)\dot{\varphi}^2\cos\theta + C\omega\varphi - mgl = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\varphi} = \frac{-C\omega \pm \sqrt{C^2\omega^2 + (C-A)mgl\cos\theta}}{2(C-A)\cos\theta}. \tag{1.16}$$

Стоит заметить, что при $C^2\omega^2 + (C-A)mgl\cos\theta < 0$ регулярная прецессия, по всей видимости, невозможна. При $\omega \gg \dot{\varphi}$ угловая прецессия будет равна

$$\dot{\varphi} = \frac{mgl}{C\omega}, \tag{1.17}$$

и, как видно, не зависит от угла нутации.

Теперь про силы. Запишем II закон Ньтона в проекции на вертикаль и нормаль к вертикали, повернутую на $+\varphi$ от X, получим

$$\begin{cases} N_x = m\dot{\varphi}^2 l\sin\theta \\ N_y - mg = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad N = m\sqrt{g^2 + \dot{\varphi}^2 l^2\sin^2\theta}. \tag{1.18}$$

T.16*

Запишем динамические уравнения Эйлера

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = -M_\xi \\ B\dot{q} + (A-C)pr = -M_\eta \\ C\dot{r} + (B-A)pq = -M_\zeta \end{cases}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \qquad \hat{J}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

Тело вращается относительно закрепленного центра масс O. По условию

$$\boldsymbol{M}_O = -\gamma\boldsymbol{\omega}, \qquad A = B > C.$$

Хочется доказать, что мгновенная ось вращения тела асимптотически стремится стать ортогональной оси динамической симметрии тела ($O\zeta$). Если чуть формализовать, то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\|\boldsymbol{\omega}^\zeta\|}{\|\boldsymbol{\omega}^{\xi\eta}\|} = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2}} = 0, \tag{1.20}$$

равносильно поставленному условию.

Конкретизируем динамические уравнения Эйлера под наш случай:

$$A\dot{p} + (C-A)qr = -\gamma p \tag{1.21}$$

$$A\dot{q} - (C-A)pr = -\gamma q \tag{1.22}$$

$$C\dot{r} = -\gamma r \tag{1.23}$$

Из (1.23) найдём

$$r = \omega^\zeta = r_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{C}t\right).$$

Теперь посмотрим на $p \cdot (1.21) + q \cdot (1.22)$ равное полному дифференциалу по времени

$$p\dot{p} + q\dot{q} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(p^2 + q^2\right) = -\frac{\gamma}{A}\left(p^2 + q^2\right).$$

Естественно решить это уравнение относительно $\omega^{\xi\eta}$

$$\omega^{\xi\eta} = -\frac{\gamma}{A}\omega^{\xi\eta} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{p^2+q^2} = \omega^{\xi\eta} = \omega_0^{\xi\eta}\exp\left(-\frac{\gamma}{A}t\right).$$

Подставляя всё в (1.20) находим

$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{\omega^\zeta}{\omega^{\xi\eta}}\right] = \frac{r_0}{\omega_0^{\xi\eta}} \cdot \lim_{t\to\infty}\left[\exp\left(\frac{\gamma}{AC}\underbrace{(C-A)}_{<0}t\right)\right] = 0, \qquad \text{Q. E. D.}$$

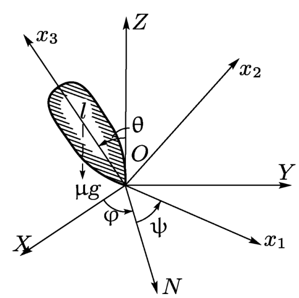

Рис. 4: К задаче 11.72