Первое задание по курсу «Аналитическая Механика»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *5 октября 2020 г.*

Содержание

1.1 Криволинейные координаты

T1.

Найдём коварианные и контрвариантные компоненты $\boldsymbol{a}$. Учитывая, что тензор однозначно задаётся координатами в некотором базисе:

$$\daleth \boldsymbol{b} = a^i \boldsymbol{g}_i \ \Big|_{\cdot \boldsymbol{g}^j} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{g}^j) = a^i (\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j) = a^i \delta_i^j = a^j \quad \Rightarrow \quad a^i \boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{a}.$$

Аналогично

$$\daleth \boldsymbol{b} = a_i \boldsymbol{g}^i \ \Big|_{\cdot \boldsymbol{g}_j} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{g}_j) = a_i (\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_j) = a_i \delta_j^i = a_j \quad \Rightarrow \quad a_i \boldsymbol{g}^i = \boldsymbol{a}.$$

Теперь научимся жонглировать индексами.

$$\daleth \boldsymbol{b}^i = g^{ij} \boldsymbol{g}_j \ \Big|_{\cdot \boldsymbol{g}^n} \quad \Rightarrow \quad g^{ij} \boldsymbol{g}_g \boldsymbol{g}^n = g^{ij} \delta_j^n = g^{in} = (\boldsymbol{k}^i \cdot \boldsymbol{g}^n) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g}^i = g^{ij} \boldsymbol{g}_j.$$

Для $g_{ij} \boldsymbol{g}^j = \boldsymbol{g}_i$ доказательство аналогично. Наконец,

$$\delta_i^j = (\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j) = \big(g_{ik} \boldsymbol{g}^k \cdot g^{jn} \boldsymbol{g}_n \big) = g_{ik} g^{jn} \delta_n^k = g_{ik} g^{kj}.$$

Теперь, для жонглирования над координатой:

$$\daleth \boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{g}^i \ \Big|_{\cdot \boldsymbol{g}^j} \quad \Rightarrow \quad a^j = g^{ij} a_i.$$

T2.

Найдём локальный базис/матрицу перехода из ПДСК для $\boldsymbol{r}(\sigma, \tau, z)$:

$$\boldsymbol{r}(\sigma, \tau, z) = \begin{pmatrix} \sigma\tau \\ (\tau^2 - \sigma^2)/2 \\ z \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \tau & \sigma & 0 \\ -\sigma & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad g_{ij} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J} = \mathrm{diag}(\tau^2 + \sigma^2, \tau^2 + \sigma^2, 1).$$

Зафиксировав значения всех кроме одной переменных найдём координатные линии, затем построим координатные поверхности (см. рис. 1).

T3.

Найдём метрический тензор g_{ij} для криволинейных координат (r, φ), задающих положение точки на параболоиде $z = a(x^2 - y^2)$, при $a = \mathrm{const}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ ar^2\cos(2\varphi) \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} \quad \Rightarrow \quad g_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 2ar\cos(2\varphi) \end{pmatrix}; \quad g_\varphi = \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ -2ar^2\sin(2\varphi) \end{pmatrix}$$

Тогда метрический тензор:

$$\begin{aligned} g_{ig} &= (\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j); \\ g_{11} &= 4a^2r^2\cos^2(2\varphi) + \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi); \\ g_{12} &= g_{21} = -2a^2r^3\sin(4\varphi); \\ g_{22} &= 4a^2r^4\sin^2(2\varphi) + r^2\sin^2(\varphi) + r^2\cos^2(\varphi). \end{aligned}$$

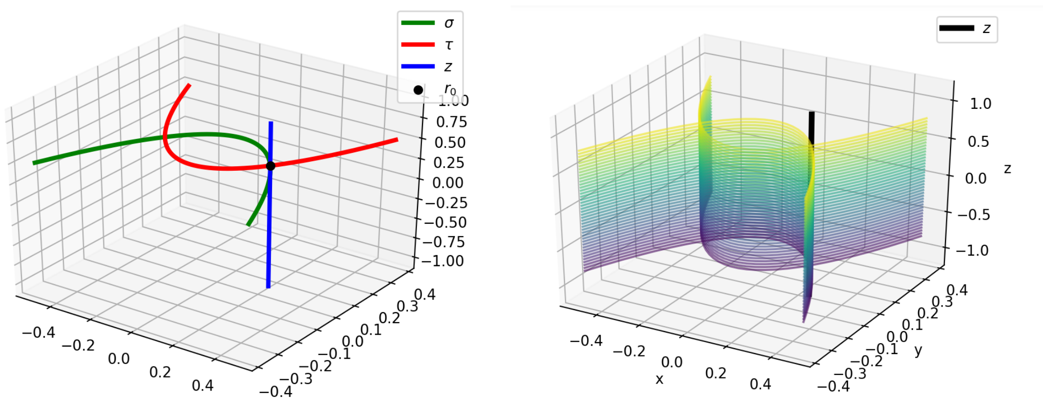


Рис. 1: Координатные линии и координатные поверхности.

Объединяя,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 16a^2r^2\sin^4(\varphi) - 16a^2r^2\sin^2(\varphi) + 4a^2r^2 + 1 & -2a^2r^3\sin(4\varphi) \\ -2a^2r^3\sin(4\varphi) & -16a^2r^4\sin^4(\varphi) + 16a^2r^4\sin^2(\varphi) + r^2 \end{pmatrix}.$$

Или,

$$g^{ij} = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-16a^2r^2\sin^4(\varphi)+16a^2r^2\sin^2(\varphi)+1}{4a^2r^2+1} & \frac{2a^2r\sin(4\varphi)}{4a^2r^2+1} \\ \frac{2a^2r\sin(4\varphi)}{4a^2r^2+1} & \frac{16a^2r^2\sin^4(\varphi)-16a^2r^2\sin^2(\varphi)+4a^2r^2+1}{4a^2r^4+r^2} \end{pmatrix}.$$

Соответсвенно,

$$\boldsymbol{g}^r = g^{rr}g_r + g^{r\varphi}g_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\left(8a^2r^2\sin^2(\varphi)+1\right)\cos(\varphi)}{4a^2r^2+1} \\ \frac{\left(8a^2r^2\cos^2(\varphi)+1\right)\sin(\varphi)}{4a^2r^2+1} \\ \frac{2ar\cos(2\varphi)}{4a^2r^2+1} \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{g}^\varphi == g^{\varphi r}g_r + g^{\varphi\varphi}g_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\left(-8a^2r^2\sin^2(\varphi)+4a^2r^2-1\right)\sin(\varphi)}{r(4a^2r^2+1)} \\ \frac{\left(8a^2r^2\cos^2(\varphi)-4a^2r^2+1\right)\cos(\varphi)}{r(4a^2r^2+1)} \\ -\frac{2a\sin(2\varphi)}{4a^2r^2+1} \end{pmatrix}.$$

На всякий случай проверим в *SymPy*, что

$$\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}^r = 1; \qquad \boldsymbol{g}_\varphi\boldsymbol{g}^\varphi = 1; \qquad \boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}^\varphi = 0; \qquad g^{ij}g_{ji} = \delta_i^j.$$

Вот.

T4.

Пусть $R = x^2 + y^2 + z^2$, найдём частную производную $\partial R/\partial x$тогда

1. $R(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$ $\partial R/\partial x = 2x.$
2. $R(x, r, z) = r^2 + z^2.$ $\partial R/\partial x = 0.$
3. $R(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 - y^2)^2.$ $\partial R/\partial x = 2x + 4x(x^2 - y^2).$
4. $R(x, r) = r^2 + (x^2 - y^2)^2 = r^2 + (2x^2 - r^2)^2.$ $\partial R/\partial x = 16x^3 - 8xr^2.$
5. $R(x, z) = x^2 + (x^2 - z) + z^2 = 2x^2 - z + z^2.$ $\partial R/\partial x = 4x.$

T5.

Для первого выражения, обозначим $(\boldsymbol{g}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial q^k}) \overset{\text{def}}{=} \Xi^j_{ik}$.

$$\Gamma_{ijk} = \left(\boldsymbol{g}_i, \frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial q^k}\right) = \left(\boldsymbol{g}_i, \frac{\partial (g_{jn}\boldsymbol{g}^n)}{\partial q^k}\right) = g_{jn} \underbrace{\left(\boldsymbol{g}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{g}^n}{\partial q^k}\right)}_{\Xi^j_{ik}} + \frac{\partial g_{jn}}{\partial q^k} \underbrace{(\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^n)}_{\delta^n_i} = g_{jn}\Xi^j_{ik} + \underbrace{\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}}_{\partial g_{jn}/\partial q^k}.$$

Домножив обе части на g^{nj}, получим

$$\Xi^j_{ik} g_{jn} g^{nj} = \boxed{\left(\boldsymbol{g}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial q^k}\right) = -\Gamma_{jik} g^{jn}}$$

Для второго выражения рассмотрим значение квадрата произведения при фиксированных $i \neq j \neq k$:

$$\underbrace{(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k)^2}_{\det g_{mn}} \cdot \underbrace{(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}^k)^2}_{\det g^{nk}} = \det g_{mn} g^{np} = \det \delta^p_m = 1. \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k) \cdot (\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}^k) = 3! = 6.$$

Важно заметить, что -1 не является возможным значением произведения таких смешанных произведений, т.к. левой тройке в первом сомножители будет соответствовать тройка во втором сомножителе.

1.2 Кинематика точки

1.12*

Параметризуем движение точки некоторым $\varphi(t)$:

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -a\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y} = b\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -a\dot{\varphi}^2\cos\varphi - a\ddot{\varphi}\sin\varphi = 0 \\ \ddot{y} = -b\dot{\varphi}^2\sin\varphi + b\ddot{\varphi}\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}\operatorname{tg}\varphi = 0. \tag{1.1}$$

Решением этого уравнения является

$$\varphi(t) = \arccos(c_1 + c_2 t).$$

С учётом начальных условий получим ($x(0) = 0$, $\dot{x} =$), что

$$\dot{\varphi} c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{v_0}{a}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \arccos(v_0 t/a).$$

Немного упростим выражения для $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = -\frac{v_0}{a\sin\varphi}, \quad \ddot{\varphi} = -\frac{\dot{\varphi}^2}{\operatorname{tg}\varphi},$$

теперь найдём $\ddot{y}(\sin\varphi)$:

$$\ddot{y} = -b\dot{f}\sin\varphi + v\ddot{\varphi}\cos\varphi = -b\frac{v_0^2}{a^2\sin^2\varphi}\sin\varphi - b\left(\frac{v_0}{a}\right)^2\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi\operatorname{tg}\varphi} = -\frac{b}{a^2}v_0^2\left(\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{\sin^3\varphi}\right) = -\frac{b}{a^2}v_0^2\frac{1}{\sin^3\varphi}.$$

Подставив $y = b\sin\varphi$, найдём

$$\ddot{y}\left(y = \frac{b}{2}\right) = -\frac{8b}{a^2}v_0^2.$$

1.19

Знаем, что в полярных координатах

$$\begin{cases} r = \dfrac{p}{1 + e\cos\varphi} \\ r^2\dot{\varphi} = c = \text{const} \end{cases} \quad \text{в полярных координатах} \quad \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}. \tag{1.2}$$

Вспомним, что

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = \frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right).$$

Найдём $\ddot{r}$:

$$r + er\cos\varphi = p \overset{d/dt}{\Rightarrow} \dot{r} + e\dot{r}\cos\varphi - er\dot{\varphi}\sin\varphi = 0 \overset{d/dt}{\Rightarrow} \ddot{r}(1 + e\cos\varphi) - e\dot{r}\sin\varphi\left(\dot{\varphi} - \frac{c}{r^2}\right) - \frac{ec}{r}\frac{c}{r^2}\cos\varphi = 0$$

Выразим и подставим $\dot{\varphi}$ и получим

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}, \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = \frac{c^2}{r^2 p}\left(\frac{p}{r} - 1\right), \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_r = -\frac{c^2}{pr^2}, \quad w_\varphi = 0.}$$

1.37(в)

Найдём скорость точки и проекции её ускорения на касательные к координатным линиям для координат параболического цилиндра σ, τ, z. Для начала найдём координатные векторы и метрический тензор:

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\tau \\ \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2) \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g}_\sigma = \begin{pmatrix} \tau \\ -\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{g}_\tau = \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{g}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} \tau^2 + \sigma^2 & 0 \\ 0 & \tau^2 + \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$v^2 = \dot{\sigma}^2(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{\tau}^2(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{z}^2, \quad v = \sqrt{(\dot{\tau}^2 + \dot{\sigma}^2)(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{z}^2}$$

Для i-ой ковариантной координаты ускорения верно, что

$$w_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial(v^2/2)}{\partial\dot{q}^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i}. \tag{1.3}$$

С учётом коэффициенты Ламе ($H_\tau = H_\sigma = \sqrt{\sigma^2+\tau^2}, H_z = 1$), найдём проекции

$$\begin{aligned} w_\tau &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\left(\ddot{\tau}(\tau^2+\sigma^2) + \dot{\tau}^2\tau + 2\dot{\sigma}\dot{\tau}\sigma - \tau\dot{\sigma}^2\right); \\ w_\sigma &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\left(\ddot{\sigma}(\tau^2+\sigma^2) + \dot{\sigma}^2\sigma + 2\dot{\tau}\dot{\sigma}\tau - \sigma\dot{\tau}^2\right); \\ w_z &= \ddot{z}. \end{aligned}$$

1.45

Выразим орты сопровождающий трехгранника $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ через $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$, с учётом $w \times \boldsymbol{v} \neq 0$, $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{v} > 0$. Так как $\boldsymbol{v} \nparallel \boldsymbol{w}$, то

$$\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|}.$$

Выразим $\boldsymbol{\tau}$.

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}, \qquad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = v\dot{\tau}, \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{v}}{v}.$$

И найдём $\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\tau}]$, раскрывая двойное векторное произведение (формула Лагранжа), получим

$$\boldsymbol{n} = \left[\frac{\boldsymbol{v}}{v} \times \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|}\right] = \frac{(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v} - v^2\boldsymbol{w}}{v|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|}.$$

T6.

Рассмотрим движение точки в цилиндрических координатах:

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g_{ij} = \mathrm{diag}(1, r^2, 1)$$

Для начала выразим ковариантные координаты ускорений:

$$w_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial(v^2/2)}{\partial q\delta^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i} \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{aligned} & w_r = \ddot{r} - r\dot{f}^2 \\ & w_\varphi = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) \\ & w_z = \ddot{z}. \end{aligned}\right.$$

По условию хотим, чтобы $w_\varphi = w_z = 0, r = \mathrm{const}$. Проинтегрировав дважды по времени получим систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi = c_1 t + c_2; \\ z = c_3 t + c_4, \end{cases}$$

Где c_1, c_2, c_3, c_4 –некоторые константы. Построим полученные траектории положив $c_2 = c_4 = 0$ и отмасштабировав к $c_1 = 1$ (см. рис. (2)).

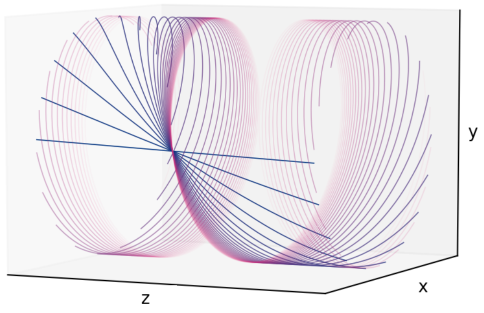


Рис. 2: Возможные геодезические цилиндра.

T7.

Найдём $\partial v_k/\partial v_j$, при $v_k = v_k(q^i, v^i)$. Далее будем пользоваться тем, что $g_{ig} = g_{ig}(q^i)$.

$$v_k(q^i, v^i) = g_{ki}v^i \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial v_k}{\partial v^j} = g_{ki}\frac{\partial v^i}{\partial v^j} = g_{ki}\delta^i_j = g_{kj}.$$

Теперь найдём $\partial v_k/\partial q^j$, при $v_k = v_k(q^i, v^i)$.

$$\frac{\partial v_k(q^i, v^i)}{\partial q^j} = v^i\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j}\right) = v^i\left(\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial q^j}, \boldsymbol{g}_i\right) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial q^j}, \boldsymbol{g}_k\right)\right) = v^i\left(\Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji}\right).$$

Теперь найдём $\partial v_k/\partial q^j$, при $v_k = v_k(q^i, v_i)$. Но тут так как функция выражается через саму себя, то при частном дифференцировании, $v_k = \mathrm{const}$, тогда $\partial v_k(q^i, v_i)/\partial q^j = 0$.

T8.*

Найдём $v_i\dot{v}^i - v^i\dot{v}_i$. Перейдём к контравариантным координатам:

$$v_i\dot{v}^i - v^i\dot{v}_i = g_{ij}v^i v^j - v^i\frac{d}{dt}\left(g_{ij}v^j\right) = g_{ij}v^j\dot{v}^i - v^i v^j\dot{g}_{ij} - g_{ij}v^i\dot{v}^j$$

В силу симметричности метрического тензора $g_{ij} = g_{ji}$, получим, что

$$v_i\dot{v}^i - v^i\dot{v}_i = -v^i v^j\dot{g}_{ij}.$$

Подставил для параболических и полярных координат, сходится.

1.3 Кинематика твёрдого тела

3.24

Запишем $\boldsymbol{v}_B$, выбрав в качестве полюса точку A и точку C.

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AB} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega}_{BC}\times\overrightarrow{CB}, \tag{1.4}$$

или, расписав по координатам,

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-r\cos\alpha\\ r\sin\alpha\\ 0\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AB}} + \begin{pmatrix}v\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_C\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\omega_{BC}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3r\cos\alpha\\3r\sin\alpha\\0\end{pmatrix},$$

получим два содержательных уравнения

$$\left.\begin{aligned}-r\omega\sin\alpha + v &= v_c + 3r\omega_{BC}\sin\alpha\\ -r\omega\cos\alpha + 0 &= 0\ \ + 3r\omega_{BC}\cos\alpha\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\boldsymbol{\omega}_{BC} = -\frac{\boldsymbol{\omega}}{3},\qquad \boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}.}$$

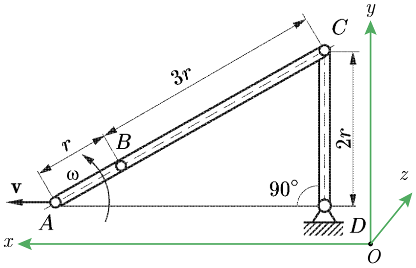


Рис. 3: К задаче 3.24.

Для поиска $\mathbf{w}_C$, запишем условия жёсткости стержней BC и CD. Дифференцируя по времени, получим

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{v}_B\cdot\overrightarrow{BC} &= \boldsymbol{v}_C\cdot\overrightarrow{BC};\\ \boldsymbol{v}_C\cdot\overrightarrow{DC} &= 0.\end{aligned}\right\}\ \overset{d/dt}{\Rightarrow}\ \left\{\begin{aligned}&\mathbf{w}_B\cdot\overrightarrow{BC} + \boldsymbol{v}_B\cdot\dot{\overrightarrow{BC}} = \mathbf{w}_C\cdot\overrightarrow{BC} + \boldsymbol{v}_C\cdot\dot{\overrightarrow{BC}};\\ &\mathbf{w}_C\cdot\overrightarrow{DC} + \boldsymbol{v}_C\cdot\dot{\overrightarrow{DC}} = 0.\end{aligned}\right. \tag{1.5}$$

Выразим $\mathbf{w}_B$ из уравнения Ривальса:

$$\mathbf{w}_B = \underbrace{\mathbf{w}_A}_{0} + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\omega}}_{AB}\times\overrightarrow{AB}}_{0} + \boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AB}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-r\omega\sin\alpha\\-r\omega\cos\alpha\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\omega^2\cos\alpha\\-r\omega^2\sin\alpha\\0\end{pmatrix}.$$

В первом уравнении (1.5), зная $\dot{\overrightarrow{BC}} = \boldsymbol{\omega}_{BC}\times\overrightarrow{BC} = (\omega r\sin\alpha,\ \omega r\cos\alpha,\ 0)^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{v}_B$ из (1.4), получим

$$\mathbf{w}_C\cdot\overrightarrow{BC} = -4\omega^2 r^2. \tag{1.6}$$

Во втором уравнении (1.5), зная $\dot{\overrightarrow{DC}} = \boldsymbol{\omega}_{DC}\times\overrightarrow{DC} = \boldsymbol{v}_C$, получим

$$\mathbf{w}_C\cdot\overrightarrow{DC} = -v^2. \tag{1.7}$$

Из (1.7), мы знаем $(\mathbf{w}_C)_y$, расписав в (1.6) проекцию на BC покоординатно, получим

$$\left.\begin{aligned}-4\omega^2r^2 &= 3r(-\mathrm{w}_{Cx}\cos\alpha + \mathrm{w}_{Cy}\sin\alpha);\\ \mathrm{w}_{Cy} &= -v^2/2r.\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{w}_C = \begin{pmatrix}\mathrm{w}_{Cx}\\\mathrm{w}_{Cy}\\0\end{pmatrix},\quad\text{где}\quad \mathrm{w}_{Cx} = \frac{8\sqrt{3}}{9}\omega^2 r - \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{v^2}{r},\ \mathrm{w}_{Cy} = -\frac{v^2}{2r}.$$

Собственно[1], $\|\mathbf{w}_C\|^2 = \frac{64}{27}\omega^4r^2 - \frac{8}{9}\omega^2v^2 + \frac{1}{3}v^4/r^2$.

---

[1] Вычисления доступны здесь.

4.4

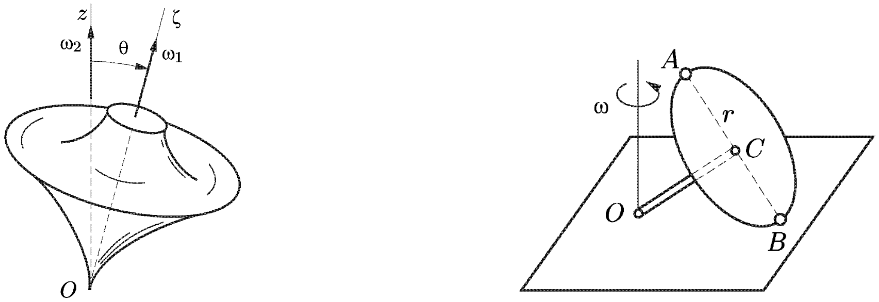
Запишем в координатах ω_1 и ω_2.

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \sin\theta \\ \omega_1 \cos\theta \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{pmatrix}.$$

Так как оси ω_1 и ω_2 пересекаются, угловая скорость и угловое ускорение можно найти, как

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \sin\theta \\ \omega_2 + \omega_1 \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{pmatrix} \omega_1\omega_2 \sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что очень похоже на правду.



Рисунки к задачам 4.4 и 4.10.

4.10

Запишем $\boldsymbol{v}_c$, как результат движения стержня и диска. Пусть Ω – угловая скорость вращения диска, $\parallel OB$.

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OC}.$$

Другими словами, в координатной записи,

$$\begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{r}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{r}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega = -\sqrt{3}\omega}.$$

Угловое ускорение стержня найдём, как движение в СО стержня,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^a = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\varepsilon \\ -\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3}\omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\varepsilon \\ 0 \\ \sqrt{3}\omega^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon^a = \sqrt{3\left(\varepsilon^2 + \omega^4\right)}},$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon}^r = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}\right) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} -\sqrt{3}\omega \\ -\omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\varepsilon \\ -\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь, из сложения ускорений,

$$\mathbf{w}^a = \underbrace{\mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}}_{\mathbf{w}^e} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}^r}_{\mathbf{w}^c} + \mathbf{w}^r,$$

найдём $\mathbf{w}^a_B$:

$$\mathbf{w}^a_B = \mathbf{0} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{OB} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OB}\right) + 2\boldsymbol{\omega} \times \left(-\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OB}\right) + \mathbf{w}^r_B.$$

Теперь найдём $\mathbf{w}^r_B$, как

$$\mathbf{w}^r_B = \mathbf{w}^r_\tau + \mathbf{w}^r_n = -\varepsilon r \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \omega^2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -r \\ r\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя, дойдём до

$$\boxed{\mathbf{w}^a_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3}\omega^2 r \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{w}^r_B\| = 2\sqrt{3}\omega^2 r,$$

что, достаточно, логично.

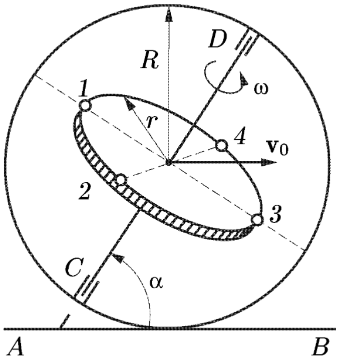
Аналогично найдём $\mathbf{w}_A^r$:

$$\mathbf{w}_B^r = \mathbf{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} r - \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} r + 2\omega^2 r \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} - \varepsilon r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{w}_B^r = r \begin{pmatrix} 3\omega^2 \\ 2\sqrt{3}\omega^2 \\ -3\varepsilon \end{pmatrix}}.$$

И найдём норму ускорения точки A

$$\|\mathbf{w}_A^a\| = \sqrt{21\omega^4 r^2 + 9\varepsilon^2 r^2}.$$

4.12



Расмотрим движение интересных нам точек, как движение в СО обруча, с

$$\boldsymbol{v}^e = \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{\omega}^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v/R \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{w}^e = \mathbf{0}; \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{0}.$$

Найдём радиус векторы до интересных нам точек:

$$\overrightarrow{O1} = \begin{pmatrix} -r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{O2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{O3} = \begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ -r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{O4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}.$$

Тогда, из теоремы о сложении скоростей, получим значения для $\boldsymbol{v}_i^a$:

$$\boldsymbol{v}_i^a = \underbrace{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}^e \times \overrightarrow{Oi}}_{\boldsymbol{v}_i^e} + \underbrace{\boldsymbol{\omega}^r \times \overrightarrow{Oi}}_{\boldsymbol{v}_i^r}.$$

Подставляя значения, получим, что

$$\boldsymbol{v}_1^a = \begin{pmatrix} v\,(R + r\cos\alpha)/R \\ rv\sin\alpha/R \\ \omega r \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2^a = \begin{pmatrix} \omega r\sin\alpha + v \\ -\omega r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3^a = \begin{pmatrix} v\,(R - r\cos\alpha)/R \\ -rv\sin\alpha/R \\ -\omega r \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4^a = \begin{pmatrix} -\omega r\sin\alpha + v \\ \omega r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Или, переходя к значениями $\|\boldsymbol{v}_i^a\|$:

$$\|\boldsymbol{v}_1^a\| = \left(/R^2\omega^2 r^2 + R^2 v^2 + 2Rrv^2\cos(\alpha) + r^2 v^2\right)/R^2, \qquad \|\boldsymbol{v}_2^a\| = \omega^2 r^2 + 2\omega rv\sin(\alpha) + v^2,$$
$$\|\boldsymbol{v}_3^a\| = \left(R^2\omega^2 r^2 + R^2 v^2 - 2Rrv^2\cos(\alpha) + r^2 v^2\right)/R^2, \qquad \|\boldsymbol{v}_4^a\| = \omega^2 r^2 - 2\omega rv\sin(\alpha) + v^2.$$

Что соответсвует ответам учебника.

Теперь, из теоремы о сложении скоростей, найдём $\mathbf{w}_i^a$

$$\mathbf{w}_i^a = \underbrace{0 + 0 + \boldsymbol{\omega}^e \times \boldsymbol{\omega}^e \times \overrightarrow{Oi}}_{\mathbf{w}^e} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega}^e \times \left(\boldsymbol{\omega}^r \times \overrightarrow{Oi}\right)}_{\mathbf{w}^c} + \underbrace{-\,\omega^2 \cdot \overrightarrow{Oi}}_{\mathbf{w}_i^r}.$$

Подставляя значения, получим, что

$$\mathbf{w}_1^a = \frac{r\left(R^2\omega^2 + v^2\right)}{R^2} \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2^a = -\omega r \begin{pmatrix} 2v\cos\alpha/R \\ 2v\sin\alpha/R \\ \omega \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{w}_3^a = \frac{r\left(R^2\omega^2 + v^2\right)}{R^2} \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_4^a = \omega r \begin{pmatrix} 2v\cos\alpha/R \\ 2v\sin\alpha/R \\ \omega \end{pmatrix}.$$

Или, переходя к нормам, получим, что

$$\|\mathbf{w}_1^a\| = \frac{r^2\left(R^2\omega^2 + v^2\right)^2}{R^4}, \quad \|\mathbf{w}_2^a\| = \frac{\omega^2 r^2\left(R^2\omega^2 + 4v^2\right)}{R^2}, \|\mathbf{w}_3^a\| = \frac{r^2\left(R^2\omega^2 + v^2\right)^2}{R^4}, \quad \|\mathbf{w}_4^a\| = \frac{\omega^2 r^2\left(R^2\omega^2 + 4v^2\right)}{R^2}.$$

4.32

Нам известно $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^{\mathrm{T}}$, из задачи **1.45** знаем, как выразить направляющие трёхгранника Френе $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}$, через $\dot{\boldsymbol{r}}$ и $\ddot{\boldsymbol{r}}$, соотвественно считаем известными $\rho, \varkappa$. В выводе теоремы сложения ускорений использовалось, что

$$\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega}^e \times \boldsymbol{e}_i. \tag{1.8}$$

Также мы знаем, что
$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nu}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\tau} + \varkappa\boldsymbol{\beta}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\varkappa\boldsymbol{\nu}. \tag{1.9}$$
Тогда, из покоординатной записи, в $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta})$,получим систему уравнений, решая которую получим
$$\left.\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}v \\ \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}v \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nu}v &= \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\tau} \\ -v\varkappa\boldsymbol{\nu} &= \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\beta} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \omega_1 &= v\varkappa \\ \omega_2 &= 0 \\ \omega_3 &= v/\rho \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau})(\varkappa\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\beta}/\rho)}.$$

4.37

Пусть $\boldsymbol{\omega}^r$ – угловая скорость тела в СО Земли, посмотрим на угловое ускорение твёрдого тела относительно СО, в данный момент времени совпадащей с направлениями: $\boldsymbol{e}_i \parallel \boldsymbol{\omega}_i$, с полюсом в неподвижной точке тела.
$$\boldsymbol{\varepsilon}^a = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}_1\frac{\boldsymbol{\omega}_1}{\omega_1} + \dot{\omega}_2\frac{\boldsymbol{\omega}_2}{\omega_2} + \dot{\omega}_3\frac{\boldsymbol{\omega}_3}{\omega_3} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} = \dot{\omega}_1\frac{\boldsymbol{\omega}_1}{\omega_1} + \dot{\omega}_2\frac{\boldsymbol{\omega}_2}{\omega_2} + \dot{\omega}_3\frac{\boldsymbol{\omega}_3}{\omega_3},$$
так как оси жёстко связаны с самим телом.

4.50

Знаем, что скорость некоторой точки твёрдого тела можем записать, как
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 + \begin{pmatrix} \omega_y r_z - \omega_z r_y \\ \omega_z r_x - \omega_x r_z \\ \omega_x r_y - \omega_y r_x \end{pmatrix}.$$
Тогда, прямой подстановкой, получим, что
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \cancel{\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_0} + \operatorname{rot}\begin{pmatrix} \omega_y r_z - \omega_z r_y \\ \omega_z r_x - \omega_x r_z \\ \omega_x r_y - \omega_y r_x \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}.$$

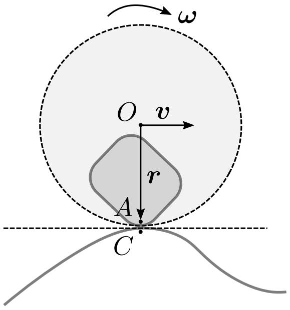
1.4 Сложное движение точки и твёрдого тела

4.14 и 4.15*

Сделаем задачу чуть менее абстрактной. Представим кольцевую железную дорогу, плоскость которой нормальна к $\boldsymbol{\omega}_1$. Наш агент №1 сидит в вагоне поезда и на столе, поверхность которого нормальна к $\boldsymbol{\omega}_2$, запускает игрушечную кольцевую жилезную дорогу с игрушечным агентом №2 в вагоне поезда. Агент №2 запускает поезд на столе, поверхность которого нормальна к $\boldsymbol{\omega}_3$ ...

Найдём $\boldsymbol{\varepsilon}_{№2}$ – угловое ускорение агента №2. По словам №1, угловое ускорение равно $\boldsymbol{\omega}_{№2} = \boldsymbol{\omega}_2$, тогда
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{№2} = \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}_1}_{\boldsymbol{\varepsilon}^e} + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}_2 = 0 + \frac{\boldsymbol{\omega}_2}{\omega_2}\dot{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_2.$$
А теперь найдём $\boldsymbol{\varepsilon}_3$. С точки зрения №2 $\boldsymbol{\omega}_{№3} = \boldsymbol{\omega}_3$. Мы знаем, что $\boldsymbol{\omega}_{№2} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$, и знаем $\boldsymbol{\varepsilon}_{№2}$, тогда
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{№3} = \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}_3 = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_2}{\omega_2}\dot{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_2\right) + \frac{\boldsymbol{\omega}_3}{\omega_3}\dot{\omega}_3 + (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2)\times\boldsymbol{\omega}_3.$$
И так далее мы можем продолжать добавлять вектора $\boldsymbol{\omega}_i$ к движению тела, в силу $\boldsymbol{\omega}^a = \boldsymbol{\omega}^e + \boldsymbol{\omega}^r$, при чём мы получим слагаемые вида векторного произведение всех упорядоченных пар $\boldsymbol{\omega}_j$ и $\boldsymbol{\omega}_k$, плюс сумма $\boldsymbol{\varepsilon}_i^r$.
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{№N} = \boldsymbol{\varepsilon}_{№(N-1)} + \frac{\boldsymbol{\omega}_N}{\omega_N}\dot{\omega}_N + \boldsymbol{\omega}_{№(N-1)}\times\boldsymbol{\omega}_N.$$
По индукции можем показать, что
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{№N} = \sum_{j=2}^{n}\frac{\boldsymbol{\omega}_j}{\omega_j}\dot{\omega}_j + \sum_{k=2}^{N}\sum_{i=1}^{k-1}\boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{\omega}_k.$$
В частности, при $\dot{\omega}_j = 0$, получим выражение для задачи **4.14**.

T9.*



Рассмотрим движение выпуклого твёрдого тела по выпуклой поверхности. В конкретный момент времени они соприкасаются в точках A и C соответсвенно. Можно рассматривать это как движение шара с радиусом кривизын равным радиусу кривизны r твёрдого тела в точке A, по плоскости, содержащей точку C.

Тогда, по формуле Ривальса,

$$\mathbf{w}_A = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \omega \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}).$$

А скорость точки C, относительно твёрдого тела, совпадает с точностью до знака, со скоростью точки O, относительно поверхности, то есть

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times (-\boldsymbol{r}),$$

где $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OA}$.

Теперь заметим, что

$$d\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{\omega} \times (-\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\omega} \times (-\,d\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{\varepsilon}\,dt) \times (-\boldsymbol{r}), \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{w}_A = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon} \times (-\boldsymbol{r})$$

И, собирая всё вместе, получим, что

$$\mathbf{w}_A = \boldsymbol{\varepsilon} \times (-\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \omega \times (-\boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v},$$

что и требовалось доказать.