Билеты к экзамену по «Аналитической Механике», ФОПФ

Авторы: Хоружий Кирилл
Примак Евгений

От: *19 января 2021 г.*

Содержание

1 Кинематика точки

Для точки P движущейся относительно некоторого неподвижного тела (свяжем с ним точку O), можно ввести следующие характеристики:

Def 1.1 (Радиус вектор, скорость и ускорение точки P)**.**

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP}, \qquad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\boldsymbol{t}}, \qquad \boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}.$$

Def 1.2. Для задания движения точки, зная её траекторию, можно сопоставить ей дуговую координату $\sigma(t)$ и получить выражения для скорости и ускорения, выраженные в осях *естественного трёхгранника* $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$. Таким образом для $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\sigma(t))$:

$$\boldsymbol{\tau}(\sigma) = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{n}(\sigma),$$

где ρ – радиус кривизны. Для кривой в $\mathbb{R}^3$ добавим ещё вектор b для правой тройки. Таким образом получим формулы Френе:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{n}, \qquad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\tau} + \varkappa\boldsymbol{b}, \qquad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\varkappa\boldsymbol{n}.$$

Таким образом сможем в компонентах трёхгранника выписать скорость и ускорение точки:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} = v_\tau\boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d_\tau}{dt}\boldsymbol{\tau} + v_\tau\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d^2\sigma}{dt^2}\boldsymbol{\tau} + \frac{v_\tau^2}{\rho}\boldsymbol{n}.$$

Как видно, ускорение точки представилось в видео $w = w_n + w_\tau$ — *нормальной* и *тангенциальной* составляющей.

Lem 1.3 (Из матана)**.** *Для $f_i \in C^2 \colon U \mapsto V$, если X – касательный вектор в точке $p \in U$, то $X(f)$ можно определить как:*

$$X(f) = X(x^i)\frac{\partial f(p)}{\partial x^i}, \text{ а координаты этого вектора в криволинейных координатах: } X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Каждую материальную точку можем определить $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N$ – итого $\mathbb{R}^{3N}$. Но есть некоторые ограничения вида

$$f_i(\boldsymbol{r}, t) = 0.$$

Вложим в фазовое пространство многообразие M, в котором локально всё хорошо. Тогда $\dim M = n$ – число степеней свободы, а параметризация $q_1, \ldots, q_N$ – криволинейные координаты. В каждой $A \in M$ верно, что $\dot{\boldsymbol{q}} \in TM_A$, то есть

$$TM = \bigcup_q T_qM \ni (q, \dot{q}) \tag{1}$$

И такБ движение точки можно задать, если её криволинейные координаты — известне функции $q(t)$.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_3) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

Def 1.4. *Коэффициентами Ламе* такие H^i. С их помощью удобно выразить единичные базисные векторы криволинейных координат:

$$H_i = \left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q^i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q^i}\right)^2}. \qquad e^i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q^i}.$$

Далее будем координатными векторами называть $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q^i}$. Разложение произвольного вектора по локальному базису имеет вид:

$$\boldsymbol{a} = a^i\boldsymbol{g}_i = a_j\boldsymbol{g}^j.$$

Здесь $\boldsymbol{g}^j$ — векторы двойственного базиса к базису из $\boldsymbol{g}_i$. В двойственном же (взаимном) базисе из матана мы видели:

$$X(f) = df(X) = \partial_x f, \qquad dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j, \qquad a = a_i dx^i.$$

Таким образом получаем скорость точки и её ковариантную компоненту:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} = \boldsymbol{g}_i\dot{q}^i, \qquad v^i = \boldsymbol{q}^i.$$

И для ускорения:

$$w_k = \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right)_k = \frac{(d\boldsymbol{v})_k}{dt} = g_{kj}\frac{dv^j}{dt} + \Gamma_{kij}v^j v^i.$$

2 Описание движения твёрдого тела

Def 2.1. *Твёрдое телое* — множество точек, расстояние между которыми не меняется: $\forall j, j, t\colon |\boldsymbol{r}_i(t) - \boldsymbol{r}_j| = \text{const}$.

Точка O это полюс. Во-первых перенесем начало координат в O. Введём систему координат $O_{\xi\nu\zeta}$ связанную с телом, – тело относительно неё не движется

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OA},\ \boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{OA} = \text{const в } O_{\xi\nu\zeta}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r}(t) = R(t)\boldsymbol{\rho}.$$

Ортогональность матрицы R даёт возможность описать её тремя независимыми параметрами. Один из вариантов сделать это – углы Эйлера.

Пусть начальная ПДСК (x, y, z), а конечная – (X, Y, Z), при чём $xy \cap XY = ON$ – линия узлов.

1) $\alpha\colon Ox \to ON$, угол *прецессии*;
2) $\beta\colon Oz \to OZ$, угол *нутации*;
3) $\gamma\colon OX \to ON$, угол *собственного вращения*.

Повороты системы на эти углы называются прецессия, нутация и поворот на собственный угол (вращение).

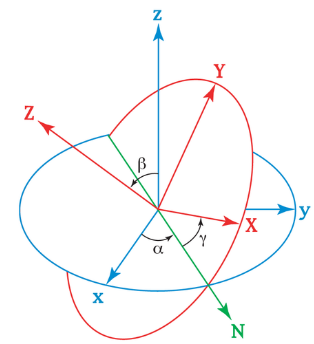

Рис. 1: Углы Эйлера

Матричная запись углов Эйлера:

$$R_Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin a & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_X(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \qquad R_Z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin\psi & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Thr 2.2 (Теорема Эйлера)**.** *Произвольное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку, можно осуществить посредством вращения вокруг некоторой оси, проходящей через эту точку.*

Thr 2.3 (Теорема Шаля)**.** *Самое общее перемещение твердого тела разлагается на поступательное перемещение, при котором произвольно выбранный полюс переходит из своего первоначального положения в конечное, и на вращение вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс. Это разложение можно совершить не единственным способом, выбирая за полюс различные точки тела; при этом направление и длина поступательного перемещения будут изменяться при выборе различных полюсов, а направление оси вращения и угол поворота вокруг нее не зависят от выбора полюса.*

Thr 2.4 (Теорема Моцци)**.** *Самое общее перемещение твердого тела является винтовым перемещением.*

Con 2.5 (Теорема Бернулли-Шаля)**.** *Самое общее перемещение плоской фигуры в своей плоскости есть либо поступательное перемещение, либо вращение вокруг точки. Эта точка называется центром конечного вращения.*

3 Приложения к твердому телу

Проведём два вектора $\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{r}_O$:

$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + R(t)\boldsymbol{\rho} \quad \overset{d/dt}{\Rightarrow} \quad \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \dot{R}\rho = \boldsymbol{v}_O + \dot{R}R^{-1}\boldsymbol{r}$$

но,

$$RR^{\mathrm{T}} = E, \dot{R}R^{\mathrm{T}} + R\dot{R}^{\mathrm{T}} = 0, \dot{R}R^{\mathrm{T}} = -R\dot{R}^{\mathrm{T}}, (\dot{R}R^{-1})^{\mathrm{T}} = -\dot{R}R^{-1}.$$

То есть $\dot{R}R^{-1}$ кососимметрична. Тогда пусть

$$\dot{R}R^{-1} = \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & w_y \\ w_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

Thr 3.1 (формула Эйлера). *Существует единственный вектор*[1] $\boldsymbol{\omega}$, *называемый* ***угловой скоростью тела***, *с помощью которого скорость* $\boldsymbol{v}$ *точки тела может быть представлена в виде*

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \quad - \quad \textit{\textbf{формула Эйлера}}.$$

Тогда, например, при постоянном радиус векторе верно, что

$$\boldsymbol{v}_A = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}, \qquad \text{при условии } a = \text{const}.$$

Можно вывести ускорение точки твёрдого тела

$$\mathbf{w}_A = \mathbf{w}_O + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$
$$\mathbf{w}_A = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \quad - \quad \textbf{формула Ривальса},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ – *угловое ускорение.*

22 Сплошная среда и её напряжение

Тензор напряжений

В недеформированном теле молекулы находятся друг с другом в механическом и тепловом равновесии. При деформировании же взаимное расположение меняется и равновесие нарушается.

Def 22.1. В результате возникают *внутренние напряжения* — силы, стремящиеся вернуть тело в равновесие, которые обуславливаются молекулярными силами, обладающими незначительным радиусом действия.

Выделим в теле объём и рассмотрим суммарную действующую на него силу. *С одной стороны*, эта сила может быть представлена: $\int \boldsymbol{F} dV$, для $\boldsymbol{F}$ — силы на единицу объема. *С другой стороны*, силы, с которыми действуют различные части объёма друг на друга не приведут к появлению никакой внешней силы. Поэтому искомая полная сила будет состоят из сил действующих на объём со стороны окружающих его частей тела. В силу пренебрежимой малости радиуса молекулярных сил, внешние силы будут представленны как суммы сил на каждый элемент поверхности объёма.

Def 22.2. $\int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x^k} = \oint \sigma^{ik} df_k$. В последнем равенстве σ^{ik} — *тензор напряжений*(симметричный). То есть $\sigma^{ik} df_k$ есть i-ая компонента силы, действующей на элемент поверхности $d\boldsymbol{f}$.

Так, на единичную площадку, перпендикулярную оси x, действуют нормальная к ней сила σ_{xx} и тангенциальные σ_{yx} и σ_{zx}. Знак силы $\sigma^{ik} df_k$, которая является действующей на ограниченный поверхностью объём со стороны окружающих тел — положительный. Для напряжений же извне, перед интегралом нужно поставить знак минус.

Всесторонее и не только сжатие

При таком сжатии на каждую единицу поверхности тела действует одинаковое по величине давление p, направленное везде по нормали к поверхности внутрь объёма тела. А на элемент df_i действует сила $-p df_i = \sigma^{ik} df_k$. Таким образом при всестороннем сжатии тензор напряжений: $\sigma^{ik} = -p\delta^{ik}$.

В общем случае ещё и диагональные элементы тензора напряжений не нуль. То есть, помимо нормальной силы, действуют ещё и тангенциальные «скалывающие» напряжения, стремящиеся сдвинуть параллельные элементы поверхности друг относительно друга.

В равновесии силы внутренних напряжений должны уравновешивать друг друга, то есть:

$$F_i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x^k} = 0.$$

И если тело находится в поле тяжести, то в равновесии:

$$\boldsymbol{F} + \rho g = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x^k} + \rho g^i - 0.$$

Внешние силы

Обычно именно внешние силы вызывают деформацию, однако они будут просто входить в граничные условия к уравнениям равновесия. Внешняя сила $\boldsymbol{P}$ должна компенсироваться силой $\sigma^{ik} df_k$:

$$P^i df = -\sigma^{ik} df_k = 0 \quad \Rightarrow \quad df_k = n_k df \quad \Rightarrow \quad \sigma^{ik} n_k = P^i,$$

[1] Псевдоветор же, нет?

где n — единичный вектор нормали к площадке. Таким образом получили условие, которое должно выполняться на всей поверхности находящегося в равновесии тела.

23 Перемещение сплошной среды

Пусть каждой точке среды соответсвует ξ^1, ξ^2, ξ^3, собственно (ξ, t) – *лгранжевы переменные. Закон движения среды* в таком случае это

$$\boldsymbol{r}(\xi, t), \tag{2}$$

скорость же

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{r}(\xi, t)}{\partial t}, \qquad \mathbf{w} = \frac{\partial \boldsymbol{v}(\xi, t)}{\partial t},$$

и так далее.

Альтернативно можеем задать (x, t) – эйлерово описание. Тогда

$$\boldsymbol{v}(x, t), \mathbf{w}(x, t) \qquad \text{– поля скоростей и ускорений.}$$

В частности, представляя движение по шоссе, полоса 1,2,3 и участок трассы – эйлерово описание среды. Если же мы будем следить за каждой машиной, то это будет лагранжево описание.

24 Тензоры деформаций и перемещений

Подход к деформации

Под влиянием приложенных внешних сил твердые тела в той или иной степени *деформируются*, то есть меняют свою форму и объём. Рассмотрим точку деформируемого тела $\boldsymbol{r}(x^1, x^2, x^3)$, которая после деформации станет $\boldsymbol{r}'$.

Def 24.1. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$ — *вектор деформации.* Координаты y^i смещенной точки могут быть выражены через x^i, таким образом $\boldsymbol{u}(x^i)$ полностью определяет деформацию тела.

Рассмотрим две близкие точки, расстояние между ними до деформации $d(l')^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$, а после $d`l^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2$. Записав через деформацию (здесь $u_i = g_{ik}u^k$):

$$d(l')^2 = (dx^i + du_i)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x^k} dx^k\right) \quad \Rightarrow \quad d(l')^2 = dl^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x^k} dx^i dx^k + \frac{\partial u_i}{\partial x^k}\frac{\partial u_i}{\partial x^l} dx^k dx^l.$$

Поменяем во втором члене индексы i и k, а в третьем i и l:

$$d(l')^2 = dl^2 + 2u_{ik}dx^i dx^k, \qquad \text{где } u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_i}{\partial x^k} + \frac{u_k}{\partial x^i} + \frac{u_i}{\partial x^l}\frac{u_l}{\partial x^k}\right).$$

Как и всякий симметричный тензор, можно привести тензор u_{ik} в каждой данной точке к главным осям. Это значит, что в каждой данной точке можно выбрать такую систему координат — главные оси тензора, — в которой из всех компонент u_{ik} отличны от нуля только диагональные компоненты u_{11}, u_{22}, u_{33}.

При малых же деформациях, за исключением редких случаем, и вектор деформации оказывается малым, тогда можем пренебречь последним членом в полученном нами значении для тензора деформации:

Def 24.2 (Тензор деформации в малом приближении)**.**

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i}\right).$$

Изменение объёма при деформации

Относительные удлинения элементов длины вдоль направлений главных осей тензора деформации с нашей точностью: $\sqrt{1 + 2u_{ii}} - 1 \approx u_{ii}$.

Малый элемент объёма тогда претерпит следующее изменение:

$$dV' = dV(1 + u_{11})(1 + u_{22})(1 + u_{33})dV(1 + u_{11} + u_{22} + u_{33}) \quad \Rightarrow \quad u_{ii} = \frac{dV' - dV}{dV}.$$

Для несжимаемого тела, тогда u_{ii} — сумма диагональных компонент тензора в главных осях — нулевая. Такая деформация называется *сдвигом.*

Тензор скорости деформации

Def 24.3. *Тензором скорости деформации* назовём просто $\dot{u}_{ij} = \frac{du_{ij}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right)$.

Тогда рассмотрим движение элемента объёма тела во времени: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r})$, до первого члена малости:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^j}\delta x^j \quad\Rightarrow\quad (\boldsymbol{v}_0 = 0) \quad\Rightarrow\quad v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x^j}\delta x^j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right)\delta x^j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right)\delta x^j.$$

Получаем уравнение, где с помощью замены, и вернув начальную скорость, явно можем показать, что

Thr 24.4 (Теорема Гельмгольца)**.** *Тензор скоростей деформации можно разложить на сумму симметричного и кососимметричного:*

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + u_{ij}\delta x^j e^i + \boldsymbol{\omega} \times \delta\boldsymbol{r}.$$

Обобщенный закон Гука

Пусть E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона. Тогда

$$u_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}, \qquad u_{22} = u_{33} = -\frac{\mu}{E}\sigma_{11}.$$

Перепишем это в виду

$$u_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\mu}{E}\sigma_{22} - \frac{\mu}{E}\sigma_{33} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{11} - \frac{\mu}{E}\operatorname{tr}\sigma.$$

Или, в матричном виде

$$\begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \frac{1+\mu}{E}\begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} - \frac{\mu}{E}\operatorname{tr}\sigma\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В тензорном виде

$$u_{ik} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{ik} - \frac{\mu}{E}\delta_{ik}\operatorname{tr}\sigma.$$

Выразим u:

$$\operatorname{tr} u = \frac{1+\mu}{E}\operatorname{tr}\sigma - \frac{3\mu}{E}\operatorname{tr}\sigma \qquad\Rightarrow\qquad \operatorname{tr}\sigma = \frac{E}{1-2\mu}\operatorname{tr} u.$$

Так и получаем *обобщенный закон гука*:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\mu}\left[u_{ik} + \frac{\mu}{1-2\mu}\delta_{ik}\operatorname{tr} u\right]$$

25 Элементы гидродинамики

Уравнение непрерывности

Def 25.1 (Предмет рассмотрения)**.** Ввиду макроскопического рассмотрения *жидкости*(газы) в гидродинамике представлется как сплошная среда, то есть малый элемент объёма жидкости содержит ещё достаточно больше количество молекул, относительно межмолекулярного расстояния.

Для описания движения жидкости требуется задать распределение скорости жидкости $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ и какие-либо её две термодинамические величины, как, например, плотность и давление. Важно отметить, что все эти величины относятся не к отдельной частице, а к точке в пространстве в определенное время.

Thr 25.2 (Уравнение непрерывности)**.**

$\triangle$. В маленьком объёме V_0 количество жидкости есть $\int_{V_0}\rho dV$. Через элемент поверхности, ограничивающей V_0, в единицу времени протекает $\rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{f}$ жидкости — положительно или отрицательное число, в зависимости от того, вытекает или втекает жидкость соответственно. Тогда приравниваем для вытекания жидкости два наших рассуждения:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV = \oint \rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{f} \qquad\Rightarrow\qquad \int\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\boldsymbol{v}\right)dV = 0 \qquad\Rightarrow\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\boldsymbol{v} = 0.$$

Последнее следует из того, что равенство должно иметь для любого объёма, таким образом получили искомое *уравнение непрерывности.* $\square$

Уравнение Эйлера

Thr 25.3 (Уравнение Эйлера)**.**

$\triangle$. Выделим в жидкости некоторый объём, полная сила, действующая на этот объём: $-\oint p d\boldsymbol{f} = -\int \operatorname{grad} p dV$, где интеграл из взятого по поверхности объёма преобразуется в сам рассматриваемый объём. Таким образом получили, что на единицу объёма жидкости будет действовать сила:

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p.$$

Однако стоящая здесь скорость определяет изменение скорости именно элемента объёма, а не точки в пространстве. Запишем это изменение скорости:

$$d\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}dt + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^i}dx^i = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}dt + (d\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p.$$

Последнее и есть искомое уравнение Эйлера. $\square$

Если же жидкость движется во внешнем поле тяжести, то, на каждый элемент объёма будет действовать сила, которая просто добавится к изначальному уравнению:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \boldsymbol{g}.$$

Уравнение Навье-Стокса

Чтобы нормально учесть вязкость, нужно поговорить про *поток импульса*. Импульс единицы объёма жидкости есть $\rho\boldsymbol{v}$, скорость изменения его компоненты:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v^i = \rho\frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t}v^i.$$

Уравнения непрерывности и Эйлера запишутся в тензорном виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v^k)}{\partial x^k}, \qquad \frac{\partial v^i}{\partial t} = -v^k\frac{\partial v^i}{\partial x^k} - \frac{1}{\rho}\delta^{ik}\frac{\partial p}{\partial x^k}.$$

Тогда получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v^i = -\rho v^k\frac{\partial v^i}{\partial x^k} - \delta^{ik}\frac{\partial p}{\partial x^k} - v^i\frac{\partial \rho v^k}{\partial x^k} = -\delta^{ik}\frac{\partial p}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial x^k}\rho v^i v^k = -\frac{\partial \Pi^{ik}}{\partial x^k}.$$

Def 25.4. Π^{ik} — *тензор плотности потока импульса*: $\Pi^{ik} = p\delta^{ik} + \rho v^i v^k$.

Таким образом уравнение Эйлера у нас записалось в виде: $\frac{\partial}{\partial t}\rho v^i = -\frac{\partial \Pi^{ik}}{\partial x^k}$. Поток импульса представляет собой чисто обратимый перенос импульса, связанный с просто механическим передвижением различных участков жидкости и с действующими в жидкости силами давления. *Вязкость* (внутреннее трение) жидкости проявляется в наличии ещё дополнительного, необратимого переноса импульса из мест с большой скоростью в места с меньшей.

Поэтому уравнение движения вязкой жидкости можно получить, прибавив к идеальному потоку импульса дополнительный член ${\sigma^{ik}}_{visc}$, определяющий такой вязкий перенос: $\Pi^{ik} = p\delta^{ik} + \rho v^i v^k - {\sigma^{ik}}_{visc} = -\sigma^{ik} + \rho v^i v^k$.

Def 25.5. Таким образом: $\sigma^{ik} = -p\delta^{ik} + {\sigma^{ik}}_{visc}$ называют *тензором напряжений*, а ${\sigma^{ik}}_{visc}$ — вязким тензором напряжений.

Чтобы написать выражение для вязкого напряжения сделаем пару оговорок. *Во первых*, градиенты скорости движения участков жидкости относительно друг друга не велики, тогда ${\sigma^{ik}}_{visc}$ зависит лишь от первых производных скорости по координатам, линейно. *Во вторых*, не зависящие от первых производных величины должны обращаться в нуль как для скорости потока $\boldsymbol{v} = \text{const}$ и тензор должен быть нулевым. *В третьих*, ${\sigma^{ik}}_{visc} = 0$ когда жидкость совершает целое равномерное вращение, поскольку никакого внутреннего трения тогда не будет. Для такого равномерного вращения с $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]$ линейными комбинациями производных обращающимися в нуль будут: $\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i}$.

Это всё даёт нам мотивацию для не шибко сильных потоков несжимаемой жидкости согласится с Сэром Исааком Ньютоном, и написать тензор вязкого напряжения, как *тензор скорости деформации*:

$${\sigma^{ik}}_{visc} = \eta\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i}\right), \qquad \Rightarrow \qquad \sigma^{ik} = -p\delta^{ik} + \eta\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i}\right).$$

А уравнение Эйлера тогда для несжимаемой жидкости запишется:

$$\rho\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k\frac{\partial v^i}{\partial x^k}\right) = -\delta^{ik}\frac{\partial p}{\partial x^k} + \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\eta\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i}\right)\right].$$

а в более человеческом, привычном глазу, виде:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\triangle)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\boldsymbol{v}.$$

Def 25.6. Коэффициент η называется — *динамическим коэффициентом вязкости*, а отношение $\eta/\rho = \nu$ — *кинематической вязкостью.*

31 Уравнение Лагранжа второго рода

Def 31.1. *Обобщенная сила* Q_k – величина коэффициента ∂q^k при вариации δA, то есть $\delta A = Q_k \delta q^k$.

Thr 31.2 (Уравнения Лагранжа второго рода)**.** *Каждая механическая система характеризуется определенной функцией* $L(q, \dot{q}, t)$*. Для голономных системы с конфигурационном многообразием степени* n*, верно что*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Где для потенциальных систем $L = T - \Pi$*. В более общем случае можно записать, что*

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} - Q^k\right)\delta q^k = 0, \qquad Q^k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^k}.$$

$\triangle$. Запишем второй закон Ньютона: $(m_i \mathbf{w}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i)\big|_{\cdot\, d\boldsymbol{r}_i}$, где $\boldsymbol{R}_i$ – реакции связи. Хотим записать уравнение в общековариантном виде. То есть мы «замораживаем» время, так чтобы $\boldsymbol{R}\cdot\delta\boldsymbol{r} = 0$. На таких перемещениях работа реакция связи равна 0.

$$\left[\sum m_i \left(\mathbf{w}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^k}\right) - \left(\boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^k}\right) - \underbrace{\left(\boldsymbol{R}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^k}\right)}_{\cdot \delta q^k \to 0}\right] \cdot \delta q^k = 0;$$

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}\sum \frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q^k}\sum \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum \boldsymbol{F}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^k}\right]\delta q^k = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \sum_k \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} - Q_k\right]\delta q^k = 0.$$

Проблема остается в неголономных системах, где δq^k не являются независимыми, получается, что уравнения Лагранжа справедливы для голономных систем.

Вспоминая, что

$$\delta A = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_i \left(\boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^k}\right)\delta q^k \overset{?}{=} \sum_k \frac{\delta A_k}{\delta q^k}\delta q^k = Q_k \delta q^k.$$

Тогда пусть $\Pi(q,t)\colon Q_k = -\partial\Pi/\partial q^k$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T-\Pi)}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial(T-\Pi)}{\partial q^k} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

То есть получили систему уравнений на $2n$ переменных. $\square$

32 Разрешимость уравнений Лагранжа

Подставим разложение кинетической энергии в уравнения Лагранжа, оставив только слагаемые с обобщёнными ускорениями $f_j(q, \dot{q}, t) = a_{jk}\ddot{q}^j$.

$$T = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu^2 = \frac{1}{2}\sum_\nu \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\underbrace{a_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k}_{2T_2} + \underbrace{a_j\dot{q}^j}_{2T_1} + \underbrace{a_0}_{2T_0}\right],$$

где коэффициенты, соответственно, равны

$$a_{jk}(q,t) = \sum_\nu m_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^k}, \qquad a_j(q,t) = \sum_\nu m_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^j}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}, \qquad a_0 = \sum_\nu m_\nu \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}\right)^2.$$

Для склерономных систем $\partial \boldsymbol{r}_\nu/\partial t = 0$, соотвественно $T = a_{jk}\dot{q}^j\dot{q}^k$, при чём $a_{jk} \equiv a_{jk}(q)$.

Теперь подставим значение T в уравнения Лагранжа, и получим, что $a_{ik}\ddot{q}^k = f_i$, где $f_1 = f_1(q, \dot{q}, t)$. Уравнений в системе n, причём a_{jk} является положительно определенной формой[2], соответственно невырожденной.

Thr 32.1. *Уравнения Лагранжа второго рода разрешимы относительно обобщенных ускорений*

[2] Требует отдельного доказательства.

33 Изменение полной мехнической энергии голономной системы

Пусть есть также непотенциальные силы, часть обобщенных сил, соответстующих непотенциальным силам, обозначим Q_i^*, тогда

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i^*, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i^*.$$

Найдём производную по времени от кинетической энергии

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial \dot q^i}\ddot q^i + \frac{\partial T}{\partial q^i}\dot q_i + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q^i}\dot q^i\right) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i}\right)\dot q^i + \frac{\partial T}{\partial t}.$$

По *теореме Эйлера об однороных функциях* для $f(x_1, \ldots, x_n)$ k-й степени верно что

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}x^i = kf, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot q^i}\dot q^i = 2T_2 + T_1.$$

В таком случае последнее равенство перепишется, как

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{d}{dt}(2T_2 + T_1) + \frac{\partial \Pi}{\partial q^i}\dot q^i - Q_i^*\dot q^i + \frac{\partial T}{\partial t} = \\ &= \frac{d}{dt}(2T_2 + 2T_1 + 2T_0) - \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) + \frac{d\Pi}{dt} - \frac{\partial \Pi}{\partial t} - Q_i^*\dot q^i + \frac{\partial T}{\partial t}.\end{aligned}$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

Thr 33.1. *Полная мехническая энергия голономной системы $E = T + \Pi$ изменяется следующим образом:*

$$\frac{dE}{dt} = N^* + \frac{d}{dt}(T_1 + 2T_0) + \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Где $N^* = {Q^*}_i\dot q^i$ – мощность непотенциальных сил.

Def 33.2. Голономная склерономная система с $\Pi \equiv \Pi(q)$ называется *консервативной*, при чём $dE/dt = 0$.

Гироскопические силы

Def 33.3. Непотенициальные силы называют *гироскопическими*, если их мощность равна 0.

Пусть ${Q^*}_i = \gamma_{ik}\dot q^k$. Если $\gamma_{ik} = -\gamma_{ki}$, то силы ${Q^*}_i$ гиросокопические, соответсвенно кососимметричность γ_{ik} необходима и достаточна.

Более того, имеет место равенство

$$\sum_\nu \boldsymbol{F}_\nu \cdot \boldsymbol{v}_\nu = \sum_\nu \boldsymbol{F}_\nu \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^i}\dot q^i + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}\right) = \Bigg(\overbrace{\sum_\nu \boldsymbol{F}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^i}}^{Q_i}\Bigg)\dot q^i + \sum_\nu \boldsymbol{F}_\nu \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}, \quad \overset{\partial \vec r_\nu/\partial t = 0}{=} \quad \sum_\nu \boldsymbol{F}_\nu \cdot \boldsymbol{v}_\nu = Q_i\dot q^i.$$

Поэтому для склерономных систем $N^* = 0$ выражается в $\sum_\nu \boldsymbol{F}_\nu^* \cdot \boldsymbol{v}_\nu = 0$.

Диссипативные силы

Def 33.4. Непотенциальные силы называются диссипативными, если их $N^* \leqslant 0$, но $N^* \not\equiv 0$. При $\Pi = \Pi(q)$ и диссипативности сил $dE/dt \leqslant 0$, тогда система называется диссипативной. В случае определенно-отрицательной $N^*(\dot q)$ дисспация называется *полной*, а в случае знакопостоянной отрицательной N^* *частичной*.

Def 33.5. *Диссипативной функцией Рэлея* называется положительная квадратичная форма R такая, что

$$R = \frac{1}{2}b_{ik}\dot q^i\dot q^k, \qquad {Q^*}_i = -\frac{\partial R}{\partial \dot q^i} = -b_{ik}\dot q^k.$$

Тогда для склерономной системы можность N^* непотенциальных сил равна

$$\sum_\nu \boldsymbol{F}_\nu^* \cdot \boldsymbol{v}_\nu = Q_i^*\dot q^i = -2R \leqslant 0.$$

34 Обобщенный потенциал и первые интегралы лагранжевых систем

Путь существует функция $V(q, \dot q, t)$ такая, что обобщенные силы Q_i определяются по формулам

$$Q_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot q^i} - \frac{\partial V}{\partial q^i}.$$

Тогда функция V называется обобщенным потенциалом. Действительно, при $L = T - V$ уравнения движения запишутся в той же форме. Дифференцируя по времени выясним, что

$$Q_i = \frac{\partial^2 V}{\partial \dot q^i \partial \dot q^k}\ddot q^k + f_i,$$

где $f_i \equiv f_i(q, \dot{q}, t)$. Но так как зависимость $Q_i(\ddot{q})$ это странно, то

$$V = A_i(q,t)\dot{q}^i + V_0(q,t).$$

Тогда обобщенные силы

$$Q_i = \frac{dA_i}{dt} - \frac{\partial}{\partial q^i}\left(A_k\dot{q}^k + V_0\right) = -\frac{\partial V_0}{\partial q^i} + \frac{\partial A_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial A_i}{\partial q^k} - \frac{\partial A_k}{\partial q^i}\right)\dot{q}^k.$$

Если $\partial A_i/\partial t = 0$, то Q_i складываются из потенциальных $\partial V_0/\partial q_i$ и гироскопических $Q_i^* = \gamma_{ik}\dot{q}^k$, где $\gamma_{ik} = \partial_k A_i - \partial_i A_k$. Если система склерономна и $V_0 \neq V_0(t)$, то $T + V_0$ остается постоянной.

В случае существования обобщенного потенциала L всё так же многочлен второй степени относительно q, $\dot{q}$, при чём $L_2 = T_2$, так что уравнения остаются разрешимы относительно обобщенных ускорений.

Натуральные системы

Def 34.1. Системы, в которых силы имеют обычный $\Pi(q_i, t)$ или обобщенный $V(q^i, \dot{q}^i, t)$ потенциал, называются *натуральными.* В таких системах $L = T - \Pi$. Более общие системы $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ не представимы в виде однако при выполнении условия,

$$\det\left[\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^k}\right] \neq 0,$$

то есть ненулевого гессиана лагранжиана, уравнения Лагранжа остаются разрешимы относительно обобщенных ускорений.

Первые интегралы (вooобще про первые интегралы читайте билет №35)

Def 34.2. *Первым интегралом* системы дифференциальных уравнений называется функция $f(q,\ \dot{q},\ t)$ (фазовых переменных), сохраняющая свои значения на любом решении этой системы.

Def 34.3. Распространенным первым интегралом являются *циклические* интегралы $\partial L/\partial\dot{q}^k$. Переменная q^k называется *циклической*, если она не входит в выражение для L.

35 Гамильтонов формализм, уравнения и интеграл Якоби

Преобразование Лежандра

Def 35.1. В уравнениях Лагранжа второго рода движения голономной системы в потенциальном поле сил, функция Лагранжа зависит от $q,\ \dot{q},\ t$ – *переменные Лагранжа.* Если в качестве параметров взять $q,\ p,\ t$, где p_i – *обобщенные импульсы*[3], определяемые как $p_i = \partial L/\partial\dot{q}^i$. То получим набор $q,\ p,\ t$ – *переменные Гамильтона.*

В силу невырожденности $\partial L/(\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j) = J_p$, то есть по *теореме о неявной функции* эти равенства разрешимы относительно переменных $\dot{q}^i$. Через преобразование Лежандра естестественно ввести функцию

$$H(q,p,t) = p_i\dot{q}^i - L(q,\dot{q},t), \qquad \dot{q} \equiv \dot{q}(q,p,t).$$

Уравнения Гамильтона

Полный дифференциал функции Гамильтона можем выразиь двумя способами:

$$\left.\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial q^i}\,dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\,dp_i + \frac{\partial H}{\partial t}\,dt, \\ dH &= \dot{q}^i\,dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i}\,dq^i - \frac{\partial L}{\partial t}\,dt. \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \begin{gathered} \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i,\quad \frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial L}{\partial q^i} \end{gathered} \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dq^i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \end{aligned}\right.$$

Эти уравнения называются *уравнениями Гамильтона*, или *каноническими уравнениями.*

Физический смысл функции Гамильтона

Пусть система натуральна, тогда $L = L_2 + L_1 + L_0$, и, соответсвенно,

$$H = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\dot{q}^i - L.$$

По теореме Эйлера об однородных функциях

$$\frac{\partial L_2}{\partial\dot{q}^i}\dot{q}^i = 2L_2, \qquad \frac{\partial L_1}{\partial\dot{q}^i}\dot{q}^i = L_1, \quad\Rightarrow\quad H = L_2 - L_0.$$

[3]Обобщенный импульс p_i – ковектор, а не вектор!

пусть $T = T_2 + T_1 + T_0$, если силы имеют обычный потенциал Π, то $L_0 = T_0 - \Pi$,
$$H = T_2 - T_0 + \Pi.$$
Если же силы имеют обобщенный потенциал $V = V_1 + V_0$, то $L_0 = T_0 - V_0$, и
$$H = T_2 - T_0 + V_0.$$
В случае натуральных и склерономных систем $T_1 = T_0 = 0$ и $T = T_2$, тогда $H = T + \Pi$. Т.е. для натуральных склерономных систем с обычным потенциалом сил функция Гамильтона H представляет собой полную механическую энергию.

Интеграл Якоби

Найдём полную производную H по времени,
$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t}.$$
Система называется *обобщенно консервативной*, если $\partial H/\partial t = 0$, т.е $H(q^i, p_i) = h$, собственно, H называют *обобщенной полной энергией*, а поледнее равенство – *обобщенным интегралом энергии.*

Def 35.2. Для натуральной системы с обычным потенциалом сил, если $\partial H/\partial t = 0$, то
$$H = T_2 - T_0 + \Pi = h = \text{const}.$$
Соотноешние, где h – произвольная постоянная, называют *интегралом Якоби.*

Есть и другая формулировка для интеграла Якоби голономной склерономной системы. Действительно, при $\partial L/\partial t = 0$, интеграл Якоби перейдёт в
$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i = \text{const}.$$

Уравнения Уиттекера

Если $\partial H/\partial t = 0$, то $H(q,p) = h$, где $h = \text{const}$ определяемая из н.у. В $2n$-мерном пространстве $q,\ p$ интеграл Якобми задаёт гиперповерхность, рассмотрим движение с $H = h$.

Такое движение описывается системой с $2n-2$ уравнений, причём она может быть записана в виде канонических уравнений. Пусть $\partial H/\partial p_1 \neq 0$, тогда
$$p_1 = -K(q^1, \ldots, q^n, p_2, \ldots, p_n, h), \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_j = -\dfrac{\partial H}{\partial q^j} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dq^j}{dq^1} = \frac{\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_j}\right)}{\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_1}\right)}, \qquad \frac{dp_j}{dq^1} = -\frac{\left(\dfrac{\partial H}{\partial q^j}\right)}{\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_1}\right)},$$
для $j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n$. Подставляя p_1 получим
$$\frac{\partial H}{\partial q^j} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial q^j} = 0, \qquad\qquad (j = 2,\ 3,\ \ldots, n);$$
$$\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial p_j} = 0, \qquad\qquad (j = 2,\ 3,\ \ldots, n).$$
Допиливая до надлежащего вида, окончательно находим
$$\frac{dq^j}{dq^1} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \qquad \frac{dp_j}{dq^1} = -\frac{\partial K}{\partial q^j}, \qquad (j = 2,\ 3,\ \ldots, n).$$
Эти уравнения описывают движения системы при $H = h = \text{const}$, и называются *уравнениями Уиттекера.*

Уравнения Якоби

Уравнения Уиттекера имеют структуру уравнений Гамильтона, соответственно их можно зписать в виде уравнений типа Лагранжа, при гессиане K по p неравным 0. Пусть P – преобразование Лежандра функции K по p_j $(j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$. Тогда
$$P = P(q^2, \ldots, q^n, \tilde{q}^2, \ldots, \tilde{q}^n, q^1, h) = \sum_{j=2}^{n} \tilde{q}^j p_j - K,$$
где $\tilde{q}^j = dq^j/dq^1$. Величины p_j выражаются через $\tilde{q}^2,\ \ldots,\ \tilde{q}_n$ из уравнений
$$\tilde{q}^j = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \qquad (j = 2,\ 3,\ \ldots, n),$$

т.е. из первых $n-1$ уравнений Уиттекера. При помощи функции P эти уравнения могут быть записаны в эквивалентной форме:

$$\frac{d}{dq^1}\frac{\partial P}{\partial q'_j} - \frac{\partial P}{\partial q^j} = 0 \qquad (j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Это уравнения типа Лагранжа, называются *уравнениями Якоби.*

Преобразовывая выражение для P найдём, что

$$P = \sum_{j=2}^{n} q_j \tilde{q}^j + p_1 = \sum_{i=1}^{n} p_1 \tilde{q}_i = \frac{1}{\dot{q}^1}\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i = \frac{1}{\dot{q}^1}(L+H).$$

Тогда в случае консервативной системы $L = T - \Pi$, $H = T + \Pi$, и

$$P = \frac{2T}{\dot{q}^1}, \quad T = \frac{1}{2}a_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k = (\dot{q}^1)^2 G(q^1, \ldots, q^n, \tilde{q}^2, \ldots, \tilde{q}^n), \quad G = \frac{1}{2}a_{ik}\tilde{q}^i\tilde{q}^k. \quad \Rightarrow \quad \tilde{q}^1 = \sqrt{\frac{h-\Pi}{G}}$$

Таким образом выражение для

$$P = 2\sqrt{(h-\Pi)G}.$$

Скобки Пуассона

Def 35.3. Пусть u, $v \in C^2(q,p,t)$, тогда выражение

$$\{u, v\} = \frac{\partial u}{\partial q^i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q^i}$$

называют *скобкой Пуассона* функций u и v.

Вообще, можно было бы ввести алгебры Ли и показать, что пространство гладких функций $f(t,x,p)$ является алгеброй Ли относительно скобки Пуассона. Выражается это в выполнение следующих свойств:

1. $\{y, x\} = -\{x, y\}, \quad \forall x, y \in C^2$ (кососимметричность);
2. $\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y\} = \lambda_1\{x_1, y_1\} + \lambda_2\{x_2, y\}, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (линейность по первому аргументу);
3. $\{x, \{y, z\} + \{y, \{z, x\}\} + \{z, \{x, y\}\} = 0$ (тождество Якоби).

Def 35.4. *Производной* функции $f(t,q,p)$ *в силу гамильтоновой системы* в точке (t_0, x_0, p^0) называется

$$\frac{df(t_0, x_0, p^0)}{dt} \overset{\text{def}}{=} \frac{d}{d}\left(f(t, q(t), p(t))\big|_{t=t_0}\right),$$

где $q(t)$ и $p(t)$ – решения гамилтоновой системы с н.у. $q(t_0) = q_0$ и $p(t_0) = p^0$.

Выразим производную в силу системы через скобку Пуассоа:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}, \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}.$$

Lem 35.5. *Уравнение вида*

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0$$

является необходимым и достаточным условием того, что $f(t,q,p)$ являлась бы первым интегралом гамилтоновой системы.

Thr 35.6 (теорема Пуассона)**.** *Если f и g – два интеграла движения, то $\{f, g\} = const$ также является интегралом движения.*

Def 35.7. *Гамильтоновым полем* для функции $f \in C^1$ называется векторное поле $\boldsymbol{f}$, определяемое формулой

$$\omega[\boldsymbol{f}(q,p), \boldsymbol{v}] = df(q,p)[\boldsymbol{v}], \quad \forall \boldsymbol{v} \in T_{q,p}, \qquad \omega = dq^i \wedge dp_i.$$

В координатах это выразится в

$$\boldsymbol{f} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Более того $\boldsymbol{f}(\varphi) = \{f, \varphi\}$, где φ – некоторая гладкая функция.

Thr 35.8 (о связи скобки Пуассона и скобки Ли)**.** *Пусть $f, g \in C^2$. Тогда гамильтоново поле скобки пуассона $\{f, g\}$ совпадает со скобкой Ли гамильтоновых полей $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{f}$:*

$$\overrightarrow{\{f, g\}} = [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}].$$

36 Принцип наименьшего действия

Пара слов от Льва Давидовича

Def 36.1. *Действием по Гамильтону* называют функционал вида
$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)\, dt.$$
Переходя к однопараметрическому семейству кривых $\gamma(\alpha, t)$ получим *вариацию действия*
$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(\alpha, t), \dot{\gamma}(\alpha, t), t)\, dt, \qquad \delta S = \frac{dS}{d\alpha}\delta\alpha.$$

Thr 36.2 (принцип Гамильтона)**.** *Кривая $\gamma(\alpha, t)$ является экстремалью действия тогда и только тогда, когда является решением уравнений Лагранжа*
$$\delta S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma(\alpha, t) \in \mathrm{Sol}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0\right).$$

$\triangle$. Давайте просто проварьируем Лагранжиан, тогда
$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\frac{\partial q^i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \alpha}\right)\delta\alpha\, dt = \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i\right) dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\partial q\bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\delta q^i\, dt = 0.$$
таким образом уравнения Лагранжа выполнены. $\square$

Истинные и окольные пути

Def 36.3. Совокупность траекторий, которые описаны перемещениями из начальных положений a_ν в конечные b_ν, образуют *истинный* (*действительный, прямой*) путь системы γ_ν.

Совокупность γ_ν', бесконечно близких к γ_ν и таких, что движение точки по кривой γ_ν' может происходить без нарушения связей, называют окольным путем системы.

Def 36.4. *Расширенное координатным пространство* помимо криволинейных координат q^i также время t.

Def 36.5. При достаточном удалении точки A_1 от точки A_0 может оказаться, что краевая задача имеет решения, соответствующие бесконечно близким прямым путям в расширенном координатном пространстве. В этом случае точки A_0 и A_1 называют *сопряженными кинетическими фокусами.*

Lem 36.6. *Положение точки на окольном пути задается, как $\boldsymbol{r}_\nu(t) + \delta\boldsymbol{r}_\nu(t)$, где $\delta\boldsymbol{r}_\nu(t_0) = 0$ и $\delta\boldsymbol{r}_\nu(t_1) = 0$. Синхронное варьирование и взятие производной по времени перестановочны.*

Принцип Гамильтона-Остроградского

Рассмотрим прямой путь и совокупность окольных путей. Пусть m_ν – масса точки P_ν, а $\boldsymbol{F}_\nu$ – равнодействующая *активных*[4] сил, приложенных к точке. Тогда
$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu\, dt - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{w}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu\, dt = 0.$$
Рассмотрим разность между значениями $T(t)$ на окольном и прямом путях
$$\delta T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\left(\dot{\boldsymbol{r}}_\nu + \delta\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\cdot\delta\dot{\boldsymbol{r}}_\nu,$$
таким образом
$$\int_{t_0}^{t_1}\delta T\, dt = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\int_{t_0}^{t_1}\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\cdot d\delta\boldsymbol{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu\bigg|_{t_0}^{t_1} - \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{w}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu\, dt = -\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{w}_\nu\cdot\partial\boldsymbol{r}_\nu\, dt.$$
Таким образом мы пришли к следующей теореме:

Thr 36.7 (принцип Гамильтона-Остроградского)**.** *Если величины $\delta\boldsymbol{r}_\nu(t)$ соответствуют синхронному варьированию прямого пути и $\delta\boldsymbol{r}_\nu(t_0) = \delta\boldsymbol{r}_\nu(t_1) = 0$ тогда и только тогда, когда*
$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta T + \sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{F}_\nu\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu\right) dt = 0.$$

[4] Определение бы написать.

$\triangle$. Хотелось бы также показать, что из принципа Гамильтона-Остроградского вытекает уравнения Лагранжа второго рода:

$$\begin{cases} \sum\limits_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = Q_i \delta q^i \\ \delta T = \dfrac{\partial T}{\partial q^i}\delta q^i + \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^{N} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i + \left(\frac{\partial T}{\partial q^i} + Q_i\right)\delta q^i\right] dt = 0.$$

Интегрируя по частям находим, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\delta \dot{q}^i\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} d\delta q^i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\, dt = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\, dt.$$

Таким образом приходим к равенству вида

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i\right)\delta q^i\, dt = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^k} = Q_k.$$

Следовательно принцип Гамильтона-Остроградского может быть положен в основу динамики голономных систем. $\square$

Принцип Гамильтона-Остроградского для систем в потенциальном поле сил

В потенциальном поле сил верно, что

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = -\delta \Pi, \quad \Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta \Pi)\, dt = 0, \quad \overset{L=T-\Pi}{\Rightarrow} \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta L\, dt = 0.$$

Def 36.8. *Действием по Гамильтону* для голономных систем называется интеграл вида

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt.$$

Thr 36.9 (Принцип Гамильтона-Остроградского v2)**.** *Для голономной системы в случае существования потенциала сил среди всех путей выделяется прямой путь тем, что для него $\delta S = 0$.*

Экстремальное свойство действия по Гамильтону

Thr 36.10 (принцип наименьшего действия)**.** *В окрестности, достаточно малой, чтобы отсутствовали кинетические фокусы, действие по Гамильтону на прямом пути будет наименьшим, по сравнению с окольными, проходимыми за то же время.*

$\triangle$. Пусть $[af]$ и $[ac]$ действие на двух различных путях системы. Для их разности имеем

$$[ac] - [af] = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^{N} \left(m_\nu \boldsymbol{v}_\nu \cdot \delta \dot{\boldsymbol{r}}_\nu - \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu\right) dt = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \boldsymbol{v}_\nu(t) \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu(t) + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu - m_\nu \mathbf{w}_\nu) \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu\, dt.$$

где $\boldsymbol{v}_\nu$ и $\partial |pi/\partial \boldsymbol{r}_\nu$ вычисляются по $a_\nu f_\nu$. Учитывая общее уравнение динамики, это соотношение можно переписать в виде

$$[ac] - [af] = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu(f) \cos \alpha_\nu \delta s_\nu,$$

где α_ν – угол между v_ν и $\delta \boldsymbol{r}_\nu$, а δs_ν – длина $f_\nu c_\nu$. Опуская некоторые выкладки, можем теперь получить, что $S_{\text{ок}} > S_{\text{пр}}$. $\square$

40 Принцип Мюпертюи-Лагранжа

Def 40.1. Рассмотрим голономную (обобщенно) консервативную систему. Рассмотрим движение в n-мерном координатном пространстве. Рассмотрим прямые и окольные пути такие, что $H = h = \text{const}$. При таком *изоэнергетическом варьировании* $t_1 - t_0$ не обязательно одинаково для прямого и окольного пути.

Принцип Мопертюи-Лагранжа

Def 40.2. При заданной h уравнения движения могут быть записаны в форме Якоби, они также будут иметь форму уравнений Лагранжа, где $L \to P$, $t \to q_1$. По аналогии с действием S по Гамильтону введём *действие по*

Лагранжу:

$$W = \int_{q^1{}_1}^{q_1^1} P\, dq^1.$$

Thr 40.3 (Принцип Мопертюи-Лагранжа[5]). *Среди всех кинематически возможных путей голономной консервативной системы, прямой путь выделяется тем, что для него действие по Лагранжу W имеет стационарное значение $\delta W = 0$.*

Аналогично экстремальное значение будет принимать действие по Лагранжу при отсутствие кинематических фокусов в рассматриваемой области.

Как было показано раннее функция Якоби P может быть вычислена, как

$$W = \int_{q^1{}_1}^{q_1^1} P\, dq^1 = \int_{q^1{}_1}^{q_1^1} \frac{2T}{\dot{q}^1}\, dq^1 = \int_{t_0}^{t_1} 2T\, dt.$$

Важно заметить, что $T + \Pi = \mathrm{const}$, а вот t_1 не зафиксировано. Иначе можно переписать

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2\, dt = \sum_{\nu=1}^{N} \int_{s_\nu^0}^{s_\nu^1} m_\nu v_\nu\, ds_\nu,$$

т.е. для консервативной системы действие по Лагранжу равно сумме работ количеств движения точек системы на соответствующих их перемещениях.

41 Принцип Якоби и геодезические

Рассмотрим консервативную энергию с n степенями свободы. Кинетическая энергия – $T = \frac{1}{2} a_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k$. Введём в координатном пространстве метрику

$$ds^2 = 2T dt^2 = a_{ik}\, dq^i\, dq^k, \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

т. е. в такой метрике T системы равная изображающей точки в координатном пространстве, если считать, что изображающая точка обладает массой, равной единице.

Если система движется по инерции, т.е. $\Pi = 0$, то из интеграла $T + \Pi = h = \mathrm{const}$ и тогда

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2h}, \quad \Rightarrow \quad W = 2\int_{t_0}^{t_1} T\, dt = 2h(t_1 - t_0) = \sqrt{2h} l,$$

где $l = \sqrt{2h}(t_1 - t_0)$ – длина кривой, пройденной за время $t_1 - t_0$. Из *принцип Якоби* следует, что $\delta l = 0$, т.е. задача свелась к задаче дифгема о поиска геодезической.

Пусть теперь движение в потенциальном поле ($\Pi \neq 0$). Тогда функция Якоби P:

$$W = \int_{q^1{}_1}^{q_1^1} P\, dq^1 = 2\int_{q^1{}_1}^{q_1^1} \sqrt{(h - \Pi)G}\, dq^1 = \sqrt{2}\int_{q^1{}_1}^{q_1^1} \sqrt{(h-\Pi)a_{ik}\, dq^i\, dq^k}.$$

Область движения ограничена $\Pi \leqslant h$, так что введём новую метрику $d\sigma^2$, по формуле

$$d\sigma^2 = (h - \Pi)a_{ik}\, dq^i\, dq^k, \quad \Rightarrow \quad W = \sqrt{2}\sigma,$$

где σ – длина дуги. Теперь нахождение траекторий снова свелось к нахождению геодезической!)

Далее рассмотрим две задачи, раскрывающих эту тему.

Задача о траектории луча (оптический принципа Ферма $\sim$ принципа Мопертеи-Лагранжа)

Найдём траекторию светового луча в среде с показателем преломления

$$n(z) = n_0 + n_z z.$$

Согласно принципу Ферма, введя $(ds)^2 = (dr)^2 + (dz)^2$, считая $dz/dr = \dot{z}$

$$\delta\left(\int_A^B (n_0 + n_z z)\, ds\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \delta\left(\int_A^B z\sqrt{1+\dot{z}^2}\, dr + \frac{n_0}{n_z} l\right) = 0,$$

где

$$l = \int_A^B \sqrt{1 + \dot{z}^2}\, dr.$$

[5]Или *принцип наименьшего действия Якоби.*

Вспомнив (6) и (5), поймём, что решаем изопериметрическую задачу, которую уже решили в предыдущем пункте, решением является траектория по цепной линии, с $\lambda = -n_0/n_z$:
$$z(r) = \frac{n_0}{n_z} + C_1 \operatorname{ch} \frac{r - C_2}{C_1}, \tag{3}$$
где C_1 и C_2 определяются из начальных условий[6].

Задача о цепной линии

Решим задачу о цепной линии. Пусть в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2) закреплена цепь с линейной плотностью ρ и массой M. Для цепной линии сначала найдём центр масс y_0:
$$y_0 = \frac{1}{M}\int_{x_1}^{x_2} y \cdot \underbrace{\rho\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx}_{dm}.$$
Лагранжиан системы
$$L = T - \Pi = Mg \cdot y_0.$$
В силу независимости L от t верно, что
$$\delta S = \delta\left(\int_{t_1}^{t_2} L\,dt\right) = 0, \quad\Rightarrow\quad \delta L = 0, \quad\Rightarrow\quad \delta\Bigg(\int_{x_1}^{x_2} \underbrace{y\sqrt{1+(y'_x)^2}}_{F(x)}\,dx\Bigg) = 0, \tag{4}$$
что позволяет нам решать немного другую задачу.

Мы знаем, что на $\dot q, q$ равносильны следующие условия
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(\dot q, q, t)}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad\Leftrightarrow\quad \delta\left(\int_{t_1}^{t_2} L(\dot q, q, t)\,dt\right) = 0,$$
при фиксированной длине нити l равной
$$l = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{1+\dot y^2}}_{\varphi(x)}\,dx, \tag{5}$$
где $y'_x = \dot y$ (здесь и далее). Тогда введём[7] L^*
$$L^*(y, x) = F(x) - \lambda\varphi(x), \tag{6}$$
для которого верно, что
$$\delta\left(\int_{x_1}^{x_2} L^*(y, \dot y, x)\,dx\right) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d}{dx}\frac{\partial L^*}{\partial \dot y} - \frac{\partial L^*}{\partial x} = 0. \tag{7}$$
Формально мы перещли к решению изопериметрической задачи. Для удобство переобозначим $L^* = L$. Посмотрим на $\partial L/\partial \dot y = L_{\dot y}$:
$$dL_{\dot y}(y, \dot y) = \frac{\partial L_{\dot y}}{\partial y}\,dy + \frac{\partial L_{\dot y}}{\partial \dot y}\,d\dot y, \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial \dot y} - \frac{\partial L}{\partial y} = L_{\dot y, y}\dot y + L_{\dot y, \dot y}\ddot y - L_y = 0.$$
Домножив на $(-\dot y)$ получим, как видно, полный дифференциал ⌣̈
$$\frac{\partial L}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot y}\frac{d\dot y}{dx} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot y}\ddot y\right.}_{\text{прибавил/вычел}} \left. + \dot y\left[\frac{\partial L_{\dot y}}{\partial y}\dot y + \frac{\partial L_{\dot y}}{\partial \dot y}\ddot y\right]\right) = \frac{d}{dx}\left(L - \dot y\frac{\partial L}{\partial \dot y}\right),$$
откуда (7) может быть переписано, как
$$L - \dot y\frac{\partial L}{\partial \dot y} = C_1,$$
то есть да, «энергия» сохраняется, x же явно не входит в L^*.

Конкретно в нашем случае,
$$(y+\lambda)\sqrt{1+\dot y^2} - \dot y(y+\lambda)\frac{\dot y}{\sqrt{1+\dot y^2}} = C_1, \quad\Rightarrow\quad y + \lambda = C_1\sqrt{1+\dot y^2}.$$
Как известно шинус замечателен: $1 + \operatorname{sh}^2\varkappa = \operatorname{ch}^2\varkappa$, так что пусть $\dot y = \operatorname{sh}\varkappa$. Тогда
$$y = C_1\operatorname{ch}\varkappa - \lambda.$$

[6] Предполагая, что мы хотим пустить луч от точки (z_1, r_1) к (z_2, r_2), мы сможем сделать это единственным образом, это и задаст C_1 и C_2.

[7] О причинах такого решения см. метод решения изопериметрической задачи.

Подставив друг в друга последних два выражения, найдём

$$\dot{y} = \frac{dy}{d\varkappa} \cdot \frac{d\varkappa}{dx} = C_1 \frac{d\varkappa}{dx} \operatorname{sh} \varkappa, \qquad \Rightarrow \qquad x = C_1 \varkappa + C_2.$$

Таким образом мы получаем *уравнение цепной линии*

$$\boxed{y = C_1 \operatorname{ch} \frac{x - C_2}{C_1} - \lambda.} \tag{8}$$

Константы могут быть найдены из граничных условий $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ и интеграла (5):

$$\operatorname{sh} \frac{x_2 - C_2}{C_1} - \operatorname{sh} \frac{x_1 - C_2}{C_1} = \frac{l}{C_1}.$$