

ЗАМЕТКИ КУРСА «ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ»

Автор: Хоружий Кирилл

От: 29 октября 2020 г.

Содержание

1	Закон Кулона и теорема Гаусса	1
2	Потенциал электрического поля.	2
2.1	Дифференциальная форма записи	3
2.2	Граничные условия на заряженной поверхности	3
3	Проводники	3
3.1	Основная задача электростатики	3
4	Диэлектрики	4
4.1	Теорема Гаусса	4
4.2	Граничные условия на границе двух диэлектриков	4
4.3	Поле системы зарядов в однородном диэлектрике	5
5	Энергия электрического поля	5
6	Виды диэлектриков	5
7	Теория постоянных токов	6
8	Магнитное поле в вакууме	7
8.1	Сила Ампера	7
8.2	Закон Био-Савара	7
8.3	Сила Лоренца	7
9	Магнитное поле в намагничивающихся средах	8
9.1	Уравнения максвелла для магнитного поля в веществе	8
9.2	Различные вещества	8
9.3	Граничные условия	9
10	Электромагнитная индукция	9
10.1	Понимания	9
10.2	Сила Лоренца	9
10.3	Индуктивность проводов	9
10.4	Магнитная энергия	10
10.5	Уравнения Максвелла	11

1 Закон Кулона и теорема Гаусса

Здесь попробуем индуктивно построить содержательную теорию, **начнём с двух экспериментальных фактов**, положенных в основу теории. Закона Кулона (сгсэ)

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.1)$$

и, введя вектор напряженности электростатического поля $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$, принцип суперпозиции:

$$\mathbf{E} = \sum \mathbf{E}_i. \quad (1.2)$$

Дипольный момент

Простейшим примером системы зарядов является диполь $q_1 + q_2 = 0$, для которого введём $\mathbf{p} = ql$:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r_1^2} \frac{\mathbf{r}_1}{r_1} - \frac{q}{r_2^2} \frac{\mathbf{r}_2}{r_2} \quad l \ll r_2, r_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}}{r^3} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}$$

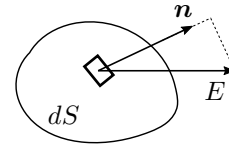
Для заряженной нити верно, что

$$E = 2 \frac{\lambda}{r}.$$

Теперь дойдём до двух теорем (кусочки уравнений Максвелла), описывающих электростатическое поле.

Thr 1.1 (теорема Гаусса). Для потока \mathbf{E} через замкнутую поверхность S верно, что

$$\oint_S E_n dS = \oint_S (\mathbf{E} d\mathbf{S}) = 4\pi q_{\text{вн.}} \quad (1.3)$$



△.

I. Доказательство (из закона Кулона) для сферы вокруг точечного заряда очевидно.

II. Рассмотрим произвольную поверхность Ω , содержащую заряд, и телесный угол в онной:

$$E_n dS = E \cos \alpha dS = E dS'$$

То есть поток через наклонную площадку равен потоку через тот же телесный угол через некоторую вспомогательную сферу. Так как $s_1/s_2 = r_1^2/r_2^2$ и $E_1/E_2 = r_2^2/r_1^2$, получается интегрировать по Ω то же самое, что и интегрировать по выбранной хорошей сфере.

III. Рассмотрим теперь некоторую Ω , не содержащую заряд. Посмотрим на телесный угол от q . По модулю потоки через них одинаковые, а знаки противоположны, следовательно вклада в поток через Ω нет.

IV. Для сложного распределения зарядов, по принципу суперпозиции верно, что

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i \quad \Rightarrow \quad \oint_S E_n dS = \sum_i \oint_S \mathbf{E}_i dS.$$

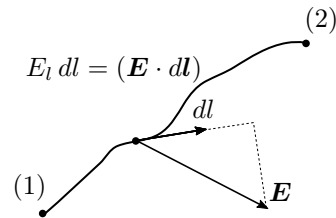
□

2 Потенциал электрического поля.

Thr 2.1 (Теорема о циркуляции). Для заряда, при квазистатическом перемещении, верно, что

$$A_{\text{замкн}} = \oint_{(L)} (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (2.2)$$



△.

I. Рассмотрим поле точечного заряда Q и перемещение с \mathbf{r} до $\mathbf{r} + d\mathbf{l}_r + (d\mathbf{l} - d\mathbf{l}_r)$. Тогда $dA = (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = \frac{Q}{r^2} dl_r$, то есть $A \equiv A(r_1, r_2)$.

II. Для поля в принципе вышесказанное верно по принципу суперпозиции.

□

Def 2.2. Разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между точками \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 называется $A = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} d\mathbf{l}$, при перемещении единичного положительного заряда. Потенциал определен с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

В частности, для точечного заряда, при $\varphi_\infty = 0$, верно

$$\varphi(r) = \int_r^\infty \frac{Q(r)}{r^2} dr = \frac{Q}{r}.$$

А для двух зарядов, $+q, -q$

$$\varphi = -\frac{q}{r_1} + \frac{q}{r_2} = q \frac{(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} \quad r \gg l \Rightarrow \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r}$$

2.1 Дифференциальная форма записи

Вектор напряженности электростатического поля

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (2.3)$$

Действительно,

$$d\varphi = -(\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx_i = d\mathbf{l} \cdot \nabla \varphi, \text{ где } \nabla \varphi \equiv \text{grad } \varphi.$$

А теперь рассмотрим некоторый элементарный параллелепипед. Тогда поток через левую грань это $-E_x dy dz$, а через правую это $(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx) dy dz$. Тогда суммарный поток через мааленький параллелепипед равен $dV \partial E / \partial x$, а теорема Гаусса примет вид

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z} \right) dV = 4\pi \rho dV \Rightarrow \boxed{\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho}. \quad (2.4)$$

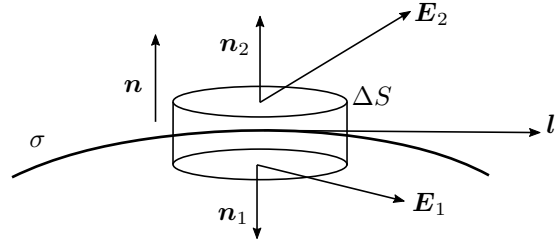
2.2 Граничные условия на заряженной поверхности

По теореме Гаусса верно, что

$$E_{2n_2} \Delta S + E_{1n_1} \Delta S = 4\pi \sigma \Delta S, \\ E_{2n} - E_{1n} = 4\pi \sigma$$

По теореме циркуляции верно, что

$$E_{2l} \Delta l - E_{1l} \Delta l = 0 \\ E_{2l} - E_{1l} = 0.$$



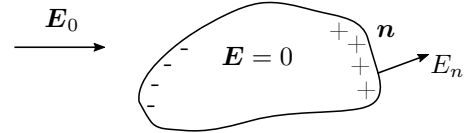
3 Проводники

Def 3.1 (пусть так). *Проводник* – костяк частиц, окруженных свободными электронами, которые в пределах тела могут перемещаться на какие угодно расстояния.

В частности, для проводников, верно, что

$$E_n = 4\pi \sigma \quad (3.1)$$

$$E_\tau = 0 \quad (3.2)$$



Собственно, объёмных зарядов в проводнике нет, поверхностные есть и компенсируют внешнее поле. Аналогично работает решетка Фарадея, электростатическое поле не проникает в проводники.

3.1 Основная задача электростатики

Вместо поиска \mathbf{E} достаточно найти φ , воспользовавшись (2.3) и (2.4), получим

$$\text{div grad } \varphi \equiv \delta \varphi = \begin{cases} -4\pi \rho & \text{ур. Пуассона} \\ 0 & \text{ур. Лапласа} \end{cases}$$

Как может быть поставлена задача? Заданы граничные значение, найти распределения зарядов. Заданы заряды, найти распределения. Что-то задано, что-то не задано. Во всех трёх случаях **решение уравнения Лапласа единственно**.

Метод изображений

Если существует некоторая эквипотенциальная поверхность разделяющая пространство на два полупространства, то можем считать что эта поверхность является проводящей.

4 Диэлектрики

Def 4.1. *Диэлектрики* – непроводники электричества. В них возбуждаются индукционные заряды, привязанные к кастегу частиц, – *поляризационные*, или *связанные заряды*.

Альтернативный вариант, – наличие дипольного момента у молекул. При наличии электрического поля дипольные моменты ориентируются, диэлектрик попользуется.

Def 4.2. *Вектор поляризации* – дипольный момент единицы объема диэлектрика, возникающий при его поляризации.

Рассмотрим скошенный параллелепипед. На основаниях параллелепипеда возникнут поляризационные заряды с поверхностной плотностью $\sigma_{\text{пол}}$. Взяв его площадь за S , найдём дипольный момент равный $\sigma_{\text{пол}}Sl$. Тогда вектор поляризации будет

$$\mathbf{P} = \frac{\sigma_{\text{пол}} S}{V} \mathbf{l}, \quad (4.1)$$

что верно и для анизотропных кристаллов где $\mathbf{E} \nparallel \mathbf{P}$.

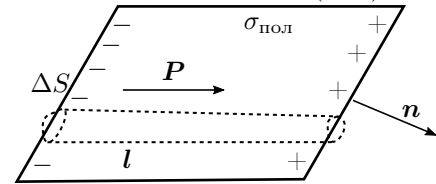
Пусть \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к основанию параллелепипеда, тогда $V = S(\mathbf{l} \cdot \mathbf{n})$.

Подставив V в предыдущую формулу, получим, что

$$\sigma_{\text{пол}} = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}) = P_n \quad (4.2)$$

Или, более общо,

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \mathbf{p}_i$$



В случае неоднородной поляризации верно, что поляризационные заряды могут появиться и на поверхности. Выделим V , ограниченный S , смещённый заряд равен $-P_n dS$, тогда через S поступает

$$q_{\text{пол}} = - \oint P_n dS = - \oint (\mathbf{P} \times d\mathbf{S}). \quad (4.3)$$

Стоит заметить, что в теорему о циркуляции не входят заряды, соответственно для диэлектриков верно, что

$$\oint_{(L)} E_l dl = 0.$$

Далее чаще всего мы будем сталкиваться с линейной поляризацией, когда

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \underbrace{\mathbf{E}(1 + 4\pi\alpha)}_{\varepsilon} = \varepsilon \mathbf{E},$$

где α – *поляризуемость диэлектрика*, а ε – *диэлектрическая проницаемость*.

4.1 Теорема Гаусса

Запишем теорему Гаусса для электрического поля в диэлектрике. Знаем, что $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{пол}} + \mathbf{E}_{\text{св}}$.

$$\oint E_n dS = 4\pi(q + q_{\text{пол}}) \quad \Rightarrow \quad \oint \underbrace{(E_n + 4\pi P_n)}_{D_n} dS = 4\pi q. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\oint D_n dS = 4\pi q_{\text{св}}} \quad (4.4)$$

где $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$. – вектор *электрической индукции*, или *электрического смещения*. Поток вектора \mathbf{D} определяется только свободными зарядами.

Можно посмотреть на это в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi(\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}), \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi(\rho + \rho_{\text{пол}}) \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{пол}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \end{aligned}$$

4.2 Граничные условия на границе двух диэлектриков

Повтора рассуждения для проводников, найдём, что

$$D_{1n} = D_{2n},$$

а в случае линейных диэлектриков верно

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}.$$

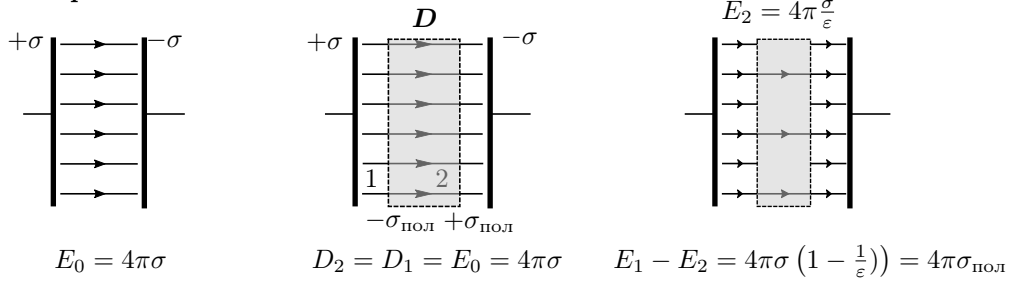
Или

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma_{\text{пол}}.$$

Аналогично, из теоремы о циркуляции получим, что

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0.$$

Плоский конденсатор



То есть на грани пластинки $\sigma_{\text{пол}} = \sigma \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

4.3 Поле системы зарядов в однородном диэлектрике

Для точечного заряда в однородном диэлектрике, по теореме Гаусса

$$\left. \begin{array}{l} D \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q \\ D = \varepsilon E \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{E = \frac{q}{\varepsilon r^2}}.$$

То есть в общем случае, по принципу суперпозиции, в диэлектрике

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E}_0.$$

5 Энергия электрического поля

Рассмотрим систему из двух зарядов q_1 и q_2 . Тогда энергия взаимодействия

$$W = q_1\varphi_{21} = q_2\varphi_{12} = \frac{1}{2} (q_1\varphi_{21} + q_2\varphi_{12}).$$

Или, в общем случае

$$W = \frac{1}{2} \sum_{ij} W_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{ij} (q_i \varphi_i^j) = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i,$$

где под φ_i имеется ввиду потенциал q_i заряда. В случае непрерывно заряженного тела

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi \rho dV.$$

Например, для конденсатора

$$W = \frac{1}{2} \varphi_1 \int_{(1)} dq + \frac{1}{2} \varphi_2 \int_{(2)} dq = \frac{1}{2} q(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{1}{2} qU = \frac{cU^2}{2} = \frac{q^2}{2c}.$$

Вопрос: где локализована энергия? Ответ: в зарядах или в поле. В частности, для конденсатора

$$W = \frac{1}{2} cU^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon S E^2 d^2}{4\pi d} = \underbrace{\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}}_{\mathcal{W}_\Theta} V,$$

где $\mathcal{W}_\Theta = \varepsilon E^2 / 8\pi$ — *объемная плотность* электрической энергии. В общем же случае

$$W_\Theta = \int \mathcal{W}_\Theta dV. \quad (5.1)$$

6 Виды диэлектриков

Посмотрим на энергию внутри вакуума и диэлектрика, $E^2/8\pi$ и $E^2/\varepsilon 8\pi$. Энергия электрического поля определяется через работу внешних сил, которую необходимо затратить, чтобы это поле создать. Собственно,

во втором случае есть ещё добавки. рассмотрим диэлектрик с упругими диполями, то есть пусть

$$F = \kappa l.$$

Пусть диполь попал во внешнее поле, тогда

$$Eq \cdot \frac{l}{2} = \kappa l \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} E p.$$

Тогда вся энергия, чтобы создать в этой среде поле

$$W = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{EP}{2} = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{1}{2} E^2 \alpha = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{E^2}{8\pi} (\varepsilon - 1) = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}.$$

А если работать с диэлектриками с собственным дипольным моментом? Тогда ещё появиться некоторое тепло, которое необходимо отдать термостату, увеличивая упорядоченность системы. Постараемся обобщить, для этого вспомним, что

Def 6.1. *Свободная энергия* – функция состояния, приращение которой в обратимом изотермическом процессе равно совершаемой работе внешних сил.

Так вот, то что мы называем энергией электрического поля (в диэлектриках), на самом деле это объёмная плотность свободной энергии $\Psi = U - TS$.

7 Теория постоянных токов

Def 7.1. *Сила тока* – заряд, протекший через сечений проводника в единицу времени,

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (7.1)$$

Плотность тока – ток, протекающий через единичное сечение.

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{u}. \quad (7.2)$$

Law 7.2 (закон Ома). Для класса линейных проводников верно, что при наличии разности потенциалов U

$$I = \frac{U}{R} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}, \quad (7.3)$$

где $\lambda = 1/\rho$, обратное удельное сопротивление.

В СГСЭ, кстати, $\dim \rho = \text{с}$, а в СИ 1 ед. СГСЭ $\rho = 9 \cdot 10^9 \text{ Ом}$.

Условие стационарности

Пусть в некоторый узел втекает I_1, \dots, I_n , тогда

$$\oint_{(S)} j_n dS = -\dot{Q}.$$

Это «закон сохранения заряда», или уравнение непрерывности. В частности, в стационарном случае

$$\boxed{\oint j_n dS = 0}. \quad (7.4)$$

Получается (??), что поле зарядов, которые участвуют в протекании постоянных токов можно описывает с помощью электростатических формул, то есть применять теорему Гаусса и теорему о циркуляции.

По теореме Гаусса и условия стационарности,

$$0 = \oint j_n dS = \lambda \oint E_n dS = \lambda 4\pi q,$$

то есть для проводников с постоянным током всё ещё верно, что внутреннего заряда в проводниках нет, а есть только поверхностный.

Невозможна стационарная ситуация с постоянным током только на потенциальных силах. Для участка цепи, в котором действуют сторонние силы, можно записать

$$\mathbf{j} = \lambda (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{стор}}). \quad (7.5)$$

Def 7.3. *ЭДС* – электро-движущая сила, работа совершаемая сторонними силами при перемещении единичного заряда по рассматриваемому участку,

$$\mathcal{E} = \int_{(l)} E_l^{\text{стор}} dl. \quad (7.6)$$

Правила Кирхгофа

Рассмотрим узел, в который втекает I_1, \dots, I_n . Из условия стационарности получим (I). Рассмотрев замкнутый участок цепи, получим (II) правило Кирхгофа. Действительно, $j_l = \lambda(E_l + E_l^{\text{стор}})$, или

$$\oint \frac{I dl}{\lambda S} = \oint (E_l + E_l^{\text{стор}}) dl, \quad \text{где} \quad \oint \frac{I dl}{\lambda S} = IR.$$

Но для каждого участка $I_i R_i = \Delta\varphi_i + \mathcal{E}_i$. Это с учётом направления тока.

$$\text{I. } \sum I_i = 0.$$

$$\text{II. } \bigcirc I_i R_i = \bigcirc \mathcal{E}_i$$

Оказывается, для любой цепи, записав уравнения Кирхгофа для всех узлов и всех независимых контуров, получим разрешимую единственным образом систему уравнений (ну или хотя бы столько, сколько можно).

8 Магнитное поле в вакууме

8.1 Сила Ампера

Ампер ввел элементы тока, тогда

$$d\mathbf{F} = K_1 I [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}], \quad (8.1)$$

где \mathbf{B} – индукция магнитного поля, силовая характеристика магнитного поля.

8.2 Закон Био-Савара

Ещё один экспериментальный факт:

$$d\mathbf{B} = K_2 I \frac{[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{r^3}. \quad (8.2)$$

Осталось поговорить про коэффициенты¹ K_1 и K_2 . Из $I^{(M)} = \frac{1}{c} I^{(\Theta)}$, получим
в СГСМ: в системе Гаусса:

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= I [\mathbf{l} \times \mathbf{B}] & d\mathbf{F} &= \frac{I}{c} [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}] \\ d\mathbf{B} &= I \frac{[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{r^3}. & d\mathbf{B} &= \frac{I}{c} \frac{[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{r^3}. \end{aligned}$$

Подставляя $\mathbf{j} = nq\mathbf{v}$, получим формулу следующего раздела.

8.3 Сила Лоренца

Law 8.1. Сила, действующая на движущийся точечный заряд q в магнитном поле, получен обобщением опытных фактов,

$$\mathbf{F}_m = \frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad (8.3)$$

где вектор $\mathbf{B} \neq f(q, v)$ характеризует магнитное поле, напряженность магнитного поля.

Из этого можем найти, что

$$\mathbf{B} = \frac{c}{qv_{\perp}^2} [\mathbf{F}_m \times \mathbf{v}_{\perp}],$$

что однозначно определяет \mathbf{B} .

В предположение, что электрическое и магнитное поля действуют независимо, то $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m$, т.е.

$$\mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right),$$

где \mathbf{F} – сила Лоренца.

¹В системе Гаусса $I, q, \Delta\varphi$ измерятся в СГСЭ, а B, H, L, M в СГСМ.

9 Магнитное поле в намагничивающихся средах

9.1 Уравнения максвелла для магнитного поля в веществе

Посмотрим на рамку с током в магнитном поле. Для неё верно, что суммарная сила, действующая на рамку,

$$\mathbf{B} \oint d\mathbf{F} = \frac{I}{c} \oint [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}] = \frac{I}{c} \left[\oint d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \right] = 0.$$

Однако момент, действующий на рамку, не равен 0,

$$S = ab, \quad F = \frac{I}{c} bB \quad \Rightarrow \quad M = \frac{IS}{c} \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_m = \frac{IS}{c} \mathbf{n} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \times \mathbf{B}].$$

Посмотрим теперь на рамку в неоднородном магнитном поле. Рассмотрим рамку такую, что $\mathbf{p}_m \parallel \mathbf{B}$, тогда $I d\mathbf{l}$ имеет проекцию на \mathbf{n} , получается, что

$$F_x = (p_m)_x \frac{\partial B_x}{\partial x}.$$

Возвращая к полю, предполагается, что внутри молекул формируются *молекулярные токи*, создающие дополнительный магнитный момент, а при наличие внешнего поля происходит ориентация этих моментов. Тогда теорема о циркуляции магнитного поля в веществе запишется, как

$$\oint_{(L)} (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}) = \frac{4\pi}{c} (I_{\text{пров}} + I_{\text{мол}}). \quad (9.1)$$

Стоит заметить, что в теории Максвелла имеется ввиду, что

$$\mathbf{B} = \langle \mathbf{B}_\mu \rangle.$$

Характеристика, описывающая состояние намагниченого вещества в точке – магнитный дипольный момент, единице объема:

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\Delta V} \sum (\mathbf{p}_m)_i.$$

Можем записать, что

$$\oint \mathcal{I}_l d\mathbf{l} = \frac{I_{\text{мол}}}{c}. \quad (9.2)$$

Тогда уравнение перепишется, как

$$\oint_{(L)} (\mathbf{B} d\mathbf{l}) = \frac{4\pi}{c} I_{\text{пров}} + 4\pi \oint_{(L)} (\mathcal{I} d\mathbf{l}). \quad (9.3)$$

$$\oint_{(L)} \underbrace{(\mathbf{B} - 4\pi \mathcal{I})}_{\mathbf{H}} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I_{\text{пров}}, \quad (9.4)$$

здесь принимается определение $\boxed{\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathcal{I}}$ – *напряженность магнитного поля*.

Далее нас интересует линейная намагничиваемость:

$$\mathcal{I} = \kappa \mathbf{H},$$

где κ – магнитная восприимчивость. Тогда можем записать, что

$$\mathbf{H} \underbrace{(1 + 4\pi \kappa)}_{\mu} = \mathbf{B}, \quad (9.5)$$

что записано в системе Гаусса. В СИ верно, что

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathcal{I}.$$

9.2 Различные вещества

I. Парамагнетики, $\kappa \in [10^{-3}, 10^{-6}]$, пример: алюминий.

II. Диамагнетики, $\kappa < 0$, пример: золото, серебро, см. модель Ланжевена.

III. Ферромагнетики, $\kappa \in [10^3, 10^6]$, пример: железо, никель.

9.3 Граничные условия

Рассмотрим границу двух веществ с μ_1 и μ_2 . Тогда

$$\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n},$$

а для тангенциальной компоненты

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_N.$$

10 Электромагнитная индукция

10.1 Понимания

Def 10.1 (Понимание Фарадея). Для движущейся перемычки в замкнутом контуре, помещенного в магнитное поле, можно записать силу лоренца, которая будет толкать каждый носитель заряда в ней как:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{e} = \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

Электродвижущая сила, создаваемая этим полем называется *электродвижущей силой*. И для магнитного потока пронизывающего площадь рамки:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \quad (10.1)$$

Def 10.2 (Понимание Максвелла). Всякое изменение магнитного поля во времени возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле. Циркуляция \mathbf{E} по \forall замкнутому контуру определяется:

$$\oint_s (\mathbf{E} d\mathbf{s}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (10.2)$$

где $\Phi = \oint_s \mathbf{B} d\mathbf{S}$ — магнитный поток, пронизывающий неподвижный контур s .

Сущность в таком понимании прежде всего в возбуждении электрического поля, а не тока. Электромагнитная индукция может наблюдаться и тогда, когда в пространстве нет проводников вообще.

10.2 Сила Лоренца

Def 10.3. *Сила Лоренца* для проводника движущегося в переменном магнитном поле ток возбуждается как магнитной, так и электрической силами:

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right) \quad (10.3)$$

От выбора системы отсчета зависит, какая часть индукционного тока вызывается электрической, а какая магнитной составляющей силы Лоренца. Деление электромагнитного поля на электрическое и магнитное определяется системой отсчета, в которой рассматриваются явления.

С помощью пересадок, в общем случае, нельзя добиться того, чтобы электромагнитное поле сделалось либо чисто электрическим, либо чисто магнитным.

10.3 Индуктивность проводов

Def 10.4. Предполагаем, что ферромагнетиков нет, тогда \mathbf{B} и Φ пропорциональны току:

$$\Phi = LI^{(m)} = \frac{1}{c} LI, \quad (10.4)$$

где $I^{(m)}$ — сила тока в СГСМ, а I — сила того же тока в СИ, L же не зависит от силы тока и называется *индуктивностью провода*. Чем тоньше провод, тем больше его индуктивность.

10.4 Магнитная энергия

Для витка с током, в котором с помощью внешних сил потечёт ток, а значит будет нарастать и магнитный поток через него, возникнет ЭДС, тогда элементарная работа внешних сил:

$$\delta A^{\text{внеш}} = -\mathcal{E}^{\text{инд}} I dt = \frac{1}{c} I d\Phi.$$

Def 10.5. Из верхнего, достаточно общего утверждения, если работа внешней работы пойдёт только на увеличение *магнитной энергии*, то есть диа- или парамагнетик, в частности.

$$dW_m = \frac{1}{c} d\Phi \quad \#_{\text{ферромагнетиков}} \rightsquigarrow W_m = \frac{L}{2} \left(\frac{I}{c} \right)^2 = \frac{1}{2c} I \Phi = \frac{\Phi^2}{2L}, \quad (10.5)$$

где L – самоиндукция проводника с током и константа. Также, для справедливости последней формулы не обязательно виток должен оставаться неподвижным.

Важно, что μ остается постоянной, или же, если проницаемость зависит от температуры, то в процессе намагничивания, чтобы формула работала, надо поддерживать T постоянной.

Тогда W_m будет иметь смысл свободной магнитной энергии системы.

Можно перейти к другому виду записи энергии магнитного поля, энергию, которую запас соленоид, используя:

$$\begin{cases} H = 4\pi I/(cl) \\ \Phi = BS \end{cases} \rightsquigarrow dW_m = \frac{I}{c} d\Phi = \frac{V}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}) \quad (10.6)$$

Если w_m – плотность магнитной энергии в соленоиде, то в общем случае можно записать $W_m = \int w_m dV$, где плотность определяется: $w_m = (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B})/(4\pi)$.

В случае пара- и диамагнитный сред $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ получаем: $w_m = \mu H^2/(8\pi)$

Рассмотрим два витка с током по которым текут токи I_1 и I_2 . В отсутствии ферромагнетиков запишется:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{c} L_{11} I_1 + \frac{1}{c} L_{12} I_2, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{c} L_{21} I_1 + \frac{1}{c} L_{22} I_2. \end{aligned}$$

Можно сформулировать **теорему о взаимности** $L_{ik} = L_{ki}$

Thr 10.6 (О сохранении магнитного потока). *Проводник с током в \forall магнитном поле, движется и деформируется, тогда в нём возбуждается:*

$$I = \frac{\mathcal{E}^{\text{инд}}}{R} = -\frac{1}{cR} \frac{d\Phi}{dt}.$$

Если $R = 0$, то $d\Phi/dt = 0$, то есть при движении идеально проводящего замкнутого провода в магнитном поле остается постоянным магнитный поток, пронизывающий контур провода.

10.5 Уравнения Максвелла

Ди-форма в СГС:	Ин-форма в СГС:	Ди-форма в СИ:	Ин-форма в СГС:
$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$	$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi Q$	$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$	$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$
$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$	$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$
$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$	$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$
$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$	$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \frac{d}{dt} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$

Поле Диполя:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{R_0^3} (3(\mathbf{n}\mathbf{d})\mathbf{n} - \mathbf{d}) \quad (10.7)$$