Конспект лекций курса «Анализ на многообразиях» А.В. Пенского

Авторы: Хоружий Кирилл

От: *1 ноября 2020 г.*

Содержание

1 Лекция № 1

1.1 Векторы как дифференцирование функций

Что такое вектор? С одной стороны можем посмотреть на производную функции по направлению

$$\partial_X f(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(f(A+\varepsilon X) - F(A)\right). \tag{1.1}$$

Что очень просто выглядит в декартовых координатах

$$\partial_X f(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \ldots = \frac{d}{d\varepsilon} f\left(A^1 + \varepsilon X^1, \ldots, A^n + \varepsilon X N\right)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial f}{\partial x^1}\left(A^1, \ldots, A^n\right) X^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\left(A^1, \ldots, A^n\right).$$

Таким образом

$$\partial_X f(A) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(A). \tag{1.2}$$

Таким образом построили отображение

$$X \mapsto \partial_X\big|_A.$$

Выпишем несколько свойств такого оператора

$$\partial_X(f+g)(A) = \partial_X f(A) + \partial_X g(A)$$
$$\partial_X(fg)(A) = (\partial_X f(A))g(A) + f(A)(\partial_X g(A)).$$

Что соответсвует правилу Лейбница.

1.2 Дифференцирование как вектор

Теперь зайдём с другой стороны. Рассмотрим $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим отображение D

$$D\colon C^\infty(U) \to \mathbb{R},$$

удоволетворяющее свойствам

$$D(f+g) = Df + Dg$$
$$D(fg) = (Df)\cdot g(A) + f(A)\cdot(Dg).$$

Что и назовём дифференцированием в точке A.

Легко показать, что $D(\mathrm{const}) = 0$, $D\lambda f = \lambda Df$ и $f(A) = g(A) = 0 \Rightarrow D(fg) = 0$. Вспомним теперь формулу Тейлора в координатах $u^1, \ldots, u^n$.

$$f(u^1, \ldots, u^n) = f(A^1, \ldots, A^n) + \frac{\partial f}{\partial u^i}(A^1, \ldots, A^n)\cdot(u^i - A^i) + h_{ij}(u^1, \ldots, u^n)(u^i - A^i)\cdot(u^j - A^j).$$

Тогда

$$D(f) = 0 + \underbrace{D(u^i - A^i)}_{X^i}\frac{\partial f}{\partial u^i}(A^1, \ldots, A^n).$$

Таким образом

$$Df = X^i \frac{\partial f}{\partial u^i}\left(A^1, \ldots, A^n\right). \tag{1.3}$$

Итого

1. В ДСК $X \mapsto \partial_X\big|_A$.

2. В ДСК D имеет вид $\partial_X\big|_A$ для некоторого X.

3. Получили взаимно-однозначное соответствие векторы – дифференцирование.

4. Определим векторы, как дифференцирование. Это определение `инвариантно`.

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \tag{1.4}$$

   где $(X^1, \ldots, X^n)$ – координаты вектора в координатах $(u^1, \ldots, u^n)$.

1.3 Замена координат

Допустим выбрали некоторые $(u^1, \ldots, u^n)$ и $(v^1, \ldots, v^n)$. Тогда
$$D = X^i \frac{\partial}{\partial u^i} = Y^j \frac{\partial}{\partial v^j}.$$
По правилу дифференцирования сложной функции
$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = \frac{\partial v^j}{\partial u^i}\frac{\partial f}{\partial v^j}, \qquad \Rightarrow \qquad X^i \frac{\partial}{\partial u^i} = \underbrace{X^i \frac{\partial v^j}{\partial u^i}}_{Y^j} \frac{\partial}{\partial v^j}.$$
Получили формулу изменения координат вектора при смене системы[1] координат
$$Y^j = \frac{\partial v^j}{\partial u^i} X^i \qquad \Leftrightarrow \qquad Y = JX. \tag{1.5}$$

1.4 Коммутатор

Для матриц известен коммутатор вида
$$[A, B] = AB - BA.$$
Аналогично для дифференцирования
$$[\partial_X, \partial_Y]\, f = \partial_X \partial_Y f - \partial_Y \partial_X f = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}\left(Y^j \frac{\partial f}{\partial u^j}\right) - Y^j \frac{\partial}{\partial u^j}\left(X^i \frac{\partial f}{\partial u^i}\right) = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i}\frac{\partial f}{\partial u^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial u^j}\frac{\partial f}{\partial u^j}$$
Таким образом
$$[\partial_X, \partial_Y]\, f = \left[X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial x^j}{\partial u^i}\right] \frac{\partial f}{\partial u^i}. \tag{1.6}$$
Это, как ни странно, дифференциальный оператор первого порядка. Это значит что есть такое векторное поле $[X, Y]$, что
$$\partial_{[X,Y]} = [\partial_X, \partial_Y]\, f.$$
Таким образом $[X, Y]$ существует и равен
$$[X, Y] = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial x^j}{\partial u^i}. \tag{1.7}$$

2 Лекция № 2

2.1 Обратный образ

Пусть
$$X^n \xrightarrow{F} X^k \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}.$$
Или можем рассмотреть отображение
$$X^n \xrightarrow{F^*\varphi} \mathbb{R}, \qquad \text{где} \qquad F^*\varphi \overset{\text{def}}{=} \varphi \circ F,$$
что и является обратным образом.

Пусть теперь $P \in X^n$ отображается в $F(P) \in X^k$. Пусть $W(P) \in X^n$, постороим $d_p F(W)$ – вектор $F(P) \in X^k$. Пусть $\varphi \in C^\infty(X^k)$, тогда
$$\underbrace{d_P F(W)}_{\text{вектор}}\ \varphi \overset{\text{def}}{=} W(F^*\varphi). \tag{2.1}$$

Def 2.1. $d_P F$ – *дифференциал* F в точке P.

Пусть $\varphi \circ \Psi = \varphi(v^1, \ldots, v^k)$ в координатах $v^1, \ldots, v^k$. Тогда
$$F^*\varphi = \varphi(F) \qquad \Rightarrow \qquad F^*\varphi(u^1, \ldots, u^k) = \underbrace{\varphi(v^1(u^1, \ldots, u^n), \ldots, v^k(u^1, \ldots, u^n))}_{F^*\varphi \text{ в координатах } u^1, \ldots, u^n} = \varphi \circ F \circ \Phi,$$

[1] «В Царство небесное войдут только те кто думают про вектор, как про дифференцирование, потому что там нет координат.»

где Φ – координатное отображение. Теперь вектор W

$$W = W^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \dots + W^n \frac{\partial}{\partial u^n} = W^i \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

Соответсвенно, по определению

$$d_P F(W)\ \varphi \overset{\text{def}}{=} W F^* \varphi, \tag{2.2}$$

расписывая, получим

$$W F^* \varphi = W^i \frac{\partial}{\partial u^i} \varphi(v^1(u^1, \dots, u^n), \dots) = W^i \frac{\partial \varphi}{\partial v^j} \frac{\partial v^j}{\partial u^i} = \underbrace{\frac{\partial v^j}{\partial u^i} W^i \frac{\partial}{\partial v^j}}_{d_p F(W)}\ \varphi.$$

А это кто? А вот матрица Якоби F, записанного в координатах $v^1, \dots, v^k$

$$\begin{bmatrix} d_P F(W)^{\,1} \\ \vdots \\ d_P F(W)^{\,k} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & \dfrac{\partial v^j}{\partial u^i} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^1 \\ \vdots \\ W^n \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Тогда выясняется, что $d_P F$ – линейное отображение. Действительно,

$$d_P F(W_1 + W_2)\varphi = (W_1 + W_2) F^* \varphi = W_1 D^* \varphi + W_2 F^* \varphi = (d_P F(W_1) + d_P F(W_2))\, \varphi.$$

2.2 Тензор

Есть пространство V с векторами и двойственное V^* с ковекторами, пространство линейных функций. Тогда $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ – базис в V, $\boldsymbol{e}^1, \dots, \boldsymbol{e}^n$ – двойственный базис в V^*, т.е. $\boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}_j = \delta^i_j$.

Для начала скажем, что W – вектор и он же линейная функция на ковекторах.

$$W(\xi) = \xi(W) = \langle W, \xi \rangle,$$

что называется спариванием вектора и ковектора.

Пусть есть некоторая $B(W, Y)$ – билинейная функция от двух векторов. А теперь посмотрим на линейный оператор $A\colon V \to V$, билинейную функцию от вектора и ковектора.

$$A(W, \xi) = \langle A(W), \xi \rangle$$

Обобщим до понятия тензора:

$$T\colon \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{p} \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{q} \to \mathbb{R},$$

где T полилинейная функция от p ковекторов и q векторов, тензор типа p, q. Они образуют линейное пространство

$$T \in \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{q} = \mathbb{T}^p_q(V).$$

3 Лекция № 3

3.1 Дифференциальная форма

В линейной алгебре есть ковекторы, а вот в дифференциальной геометрии ковекторные поля суть дифференциальные 1-формы.

Def 3.1. *Дифференциальная 1-форма* – это ковекторное поле.

Def 3.2. *Дифференциал* функции f от векторного поля X это $df(X) \overset{\text{def}}{=} Xf$.

Что это нам даёт? Ну, во-первых, пусть $x^1, \dots, x^n$ – некоторые координаты.

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Тогда

$$df(X) = Xf = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Но, заметим, что $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ – базис в каждой точке. Рассмотрим теперь $f = x^i$ и $X = \frac{\partial}{\partial x^j}$, тогда
$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j. \tag{3.1}$$
Из этого следует, что $dx^1, \ldots, dx^n$ – двойственный к $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ базис в V^*. Тогда в этом базисе
$$df = \omega_i\, dx^i.$$
Заметим, что
$$\underbrace{\omega_i\, dx^i}_{df}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \omega_i \delta^i_j = \omega_j, \quad \Rightarrow \quad \omega_j = df\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$
Тогда
$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i. \tag{3.2}$$
Получается ковектор df расписывается по базису dx^i двойственного пространства с координатами $\partial f/\partial x^i$.

А для общей 1-формы
$$\omega = \omega_i\, dx^i,$$
где $\omega^1, \ldots, \omega^n$ – координаты ω в локальной системе координат.

Def 3.3. ω гладкая, если $\forall X$, где X – гладкое поле, верно, что $\omega(X)$ – гладкая функция.

Lem 3.4. *$\omega = \omega_i\, dx^i$ – гладкая $\Leftrightarrow$ ω_i – гладкая форма $\forall i$.*

3.2 Билинейные формы

Пространство билинейных форм на V – $V^* \otimes V^* = S^2V^* \oplus \Lambda^2 V^*$. Что ж, в $V*$ базис $\boldsymbol{e}^1, \ldots, \boldsymbol{e}^n$, в S^2V^* базис
$$e^i \cdot e^j(X, Y) = \frac{1}{2}\left(X^iY^j + X^jY^i\right),$$
а скалярное произведение
$$g = g_{ij} dx^i \cdot dx^j.$$
В кососимметрических же $\Lambda^2 V^*$ базис
$$e^i \wedge e^j(X, Y) = X^iY^j - X^jY^i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n. \tag{3.3}$$
В таком случае, если есть некоторая кососимметрическая ω, то
$$\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij}\, dx^i \wedge dx^j.$$

Def 3.5. Поле кососимметрических билинейных форм – дифференциальные 2-формы.

Возьмём два поля и засунем в 2-форму, получим функцию.

3.3 Полилинейные формы

Пусть V – векторное пространство, $\Lambda^k V^k$ – векторное пространство кососимметрических полилинейных функций от k векторов.
$$\omega\left(X_1, \ldots, X_k\right) \in \mathbb{R}.$$
Введём некоторое внешнее умножение
$$\wedge \colon \Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \to \Lambda^{k+l} V^*.$$
Пусть $\sigma \in \Lambda^k V^*$, $\tau \in \Lambda^l V^*$, тогда
$$\sigma \wedge \tau\left(X_1, \ldots, X_{k+l}\right) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \operatorname{sign}(\pi)\ \sigma\left(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(k)}\right)\ \tau\left(X_{\pi(k+1)}, \ldots, X_{\pi(k+l)}\right).$$

Если в V базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, то в $\Lambda^k V$ в качестве базиса можно взять
$$e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}, \qquad i_1 < \ldots < i_k.$$

Def 3.6. Дифференциальная k-форма – поле полилинейных кососимметрических форм от k векторов, причем

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1,\ldots,i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}, \tag{3.4}$$

где $\omega_{i_1,\ldots,i_k} = \omega\left(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k}\right)$ – гладкие функции..

3.4 Внешний дифференциал

Обозначим $\Omega^k(U)$ – пространство дифференциальных k-форм на некоторой $U \in \mathbb{A}^n$. Также будем говорить, что $X^\infty(U) = \Omega^0(u)$ – 0-формы. У нас уже есть такое отображение

$$\Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{?} \ldots$$

Ну и введём тогда операцию внешнего дифференцирования

$$d\colon \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U). \tag{3.5}$$

Введём её аксиоматически[2]

1) $d\left(\omega_1 + \omega_2\right) = d\omega_1 + d\omega_2$;
2) $d(\sigma \wedge \tau) = (d\sigma) \wedge \tau + (-1)^{|\sigma|} \sigma \wedge (d\tau)$;
3) $d^2 = 0$, т.е. $d(d\omega) = 0$;
4) $f \in \Omega^0(U) = C^\infty(U) \;\Rightarrow\; df(X) = Xf$.

Thr 3.7. *Внешний дифференциал d существует и единственнен.*

$\triangle$.

I. Пусть существует внешний дифференциал. Тогда получим, что
$$d\omega = d\left(\sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}. \tag{3.6}$$
Собственно, подобный ответ является единственным.

II. Докажем теперь существование. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ – координаты, тогда определим d, как (3.6). Легко показать, что такое определение удоволетворяет всем свойствам.

$\square$

4 Лекция № 4

4.1 Обращение с обратным образом (?)

На данный момент у нас есть отображения для $U \in \mathbb{R}^n$ и $V \in \mathbb{R}^k$, считая $U \xrightarrow{F} V$

$$C^\infty(U) \xleftarrow{F^*} C^\infty(V) \qquad\qquad U \xrightarrow{F} V \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

$$T_P U \xrightarrow{d_P F} T_{F(P)} V \qquad\qquad U \xrightarrow{F^*\varphi} \mathbb{R}, \quad \text{где} \quad F^*\varphi \overset{\text{def}}{=} \varphi \circ F,$$

$$\overbrace{d_P F \underbrace{X}_{\in T_P U}}^{\in T_{F(P)} V} \underbrace{\varphi}_{\in C^\infty(V)} = X \underbrace{F^*\varphi}_{\in C^\infty(U)}. \tag{4.1}$$

С формами ситуация схожая с функциями, то есть

$$C^\infty(V) = \Gamma^0(V),$$

получается

$$\Omega^k(U) \xleftarrow{F^*} \Omega^k(V),$$

$$T_U U \xrightarrow{d_P F} T_{F(P)}(V).$$

Теперь пусть $X_1, \ldots, X_k$ – векторное поле на U, тогда

$$(F^*\omega)(X_1, \ldots, X_k) = \omega\left(dF(X_1), \ldots, dF(X_k)\right).$$

[2] Формы образуют градуированную алгебру. Это такой эмпирический факт: в градуированной алгебре дифференциал должен быть с таким знаком и счастье будет.

Собственно, факт:

$$dF^*\omega = F^*\, d\omega. \tag{4.2}$$

И ещё факт

$$F^*(\sigma \wedge \tau) = F^*\sigma \wedge F^*\tau. \tag{4.3}$$

4.2 Кривые

Кривые должны быть гладкими, но этого недостаточно. Поэтому требуем и *регулярность*:

$$\forall x, y\colon F(x,y) = 0 \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) \neq (0,0), \tag{4.4}$$

а в параметрическом задание

$$\forall t \in (a,b) \qquad \dot{\boldsymbol{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \neq (0,0). \tag{4.5}$$

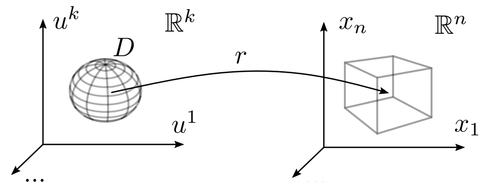
Пусть $F(x,y) = 0$ – регулярная гладкая неявно заданная кривая. Тогда в окрестности любой своей точки её можно задать как регулярную гладкую параметрическую кривую. В самом деле,

$$F(x_0, y_0) = 0, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)} \neq 0\right), \qquad \Rightarrow \qquad \exists \varphi \in U(x_0,y_0)\colon F(x,y) \Leftrightarrow x = \varphi(y).$$

А вот пусть теперь есть гладкая регулярная параметризованная регулярная кривая $(x,y)(t)\colon (\dot{x}, \dot{y}) \neq 0$. Пусть $\dot{x} \neq 0$, тогда по терeме об обратной функции $t = t(x)$.

4.3 Явно заданные поверхности

Регулярная (не особая) гладкая k-мерна поверхность в n-мерном афинном пространстве, заданная параметрически.



Формально,

$$r\colon D \in \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, \qquad \text{при чем} \qquad \begin{cases} 1) \text{ гладкость:} & \boldsymbol{r} \equiv [x^1(u^1, \ldots, u^k), \ldots, x^n(u^1, \ldots, u^k)] \\ 2) \text{ регуярность:} & \operatorname{rg}(\partial x^i / \partial u^j) = k. \end{cases}$$

где подразумевается $r \in C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$. Регулярность же, по сути, это утверждение о том что в J существует невырожденный минор $k \times k$.

Пусть это $(\partial x^i / \partial u^j)$, где $i, j = 1, \ldots, k$. Тогда, по теореме об обратной функции, в окрестности этой точки

$$\begin{aligned} u^1 &= u^1(x^1, \ldots, x^k) \\ &\ldots \\ u^k &= u^k(x^1, \ldots, x^k). \end{aligned}$$

Тогда, это просто график отображения

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^{k+1}(u^1(x^1, \ldots, x^k), \ldots, u^k\left(x_1, \ldots, x^k\right)) \\ &\ldots \\ x^n &= x^n(u^1(x^1, \ldots, x^k), \ldots, u^k\left(x_1, \ldots, x^k\right)) \end{aligned}$$

такого, что

$$\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$$

Так, например, для сферы, можно выразить $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

4.4 Неявно заданные поверхности

Гладкая регулярная k-мерная поверхность в n-мерном афинном пространстве, заданная неявно. Тогда есть $n-k$ уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \dots, x^n) = 0 \\ \dots \\ F^{n-k}(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{F} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}, \quad \boldsymbol{F} = 0.$$

Аналогично мы требуем гладкость: $F^i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, и регулярность в тех точках, где $\boldsymbol{F} = 0$. Условие регулярности в таком случае

$$\operatorname{rg}\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right) = n - k. \tag{4.6}$$

Lem 4.1. *Гладкая регулярная неявно заданная поверхность, может рассматриваться, как параметрическая.*

$\triangle$.

I. Пусть в точке P
$$\operatorname{rg}\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right) = n - k.$$

II. Тогда можем считать, что есть невырожденный минор $\operatorname{rg}\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right)(P)$, где $i = 1, \dots, n-k$ и $j = k+1, \dots, n$.

III. По теореме о неявной функции
$$\begin{cases} x^{k+1} = x^{k+1}(x^1, \dots, x^k) \\ \dots \\ x^n = x^n(x^1, \dots, x^k) \end{cases} \quad — \quad \text{гладкие.}$$

IV. Тогда понятно, как утроен параметрический вид:
$$\left.\begin{aligned} x^1 &= u^1 \\ &\dots \\ x^k &= u^k \\ x^{k+1} &= x^{k+1}(u^1, \dots, u^k) \\ &\dots \\ x^n &= x^n(u^1, \dots, u^k) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ & * & \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rg} J = k.$$

$\square$

Def 4.2. Назовем $x^1, \dots, x^n$ *координатами объемлющего пространства*, а $u^1, \dots, u^k$ *локальными координатами.*

4.5 Гладкие функции и пути на поверхности

Функции

Def 4.3. Пусть есть гладкая функция $F(x^1, \dots, x^n)$ – гладкая в окрестности Σ, тогда $F\big|_\Sigma$ – *гладкая* на поверхности Σ.

Def 4.4. Пусть $f(u^1, \dots, u^k)$ – гладкая, тогда f – гладкая функция на Σ.

Докажем равносильность двух следующих определений.

$\triangle$. $\Rightarrow$ Пусть $F(x^1, \dots, x^n)$ – гладкая, тогда и $F(x^1(u^1, \dots, u^k), \dots, x^n(u^1, \dots, u^k))$ – гладкая.

$\Leftarrow$ Пусть есть $f(u^1, \dots, u^k)$ – гладкая, тогда и $f(u^1(x^1, \dots, x^k), \dots, u^k(x^1, \dots, x^k))$ – тоже гладкая.

$\square$

Пути

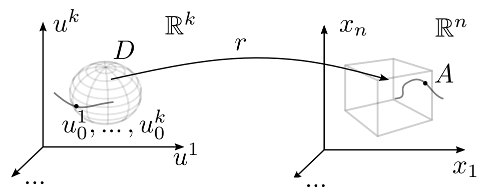
Def 4.5. Путь $\boldsymbol{r}(u^1(t), \dots, u^k(t))$ гладкий, если u^i – гладкие.

Def 4.6. Если $x^1(t), \dots, x^n(t)$ – гладкие, такие что $[x^1(t), \dots, x^n(t)] \in \Sigma$, то и путь $\boldsymbol{r}$ гладкий.

Эти определения равносильны. Получается, что пути можно описывать как в глобальных, так и в локальных координатах. Далее ограничимся рассмотрением путей в локальных координатах, `ничего при этом не потеряв`.

4.6 Векторы на поверхности

Точка A имеет локальные координаты ${u_0}^1, \dots, {u_0}^k$, то есть $A = \boldsymbol{r}({u_0}^1, \dots, {u_0}^k)$.



Если мы посмотрим на путь точки A, то увидим (считая, что в $t = 0$ $\boldsymbol{r} = A$).

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(u^1, \dots, u^k)(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = r_{u^i}(u^1(t), \dots, u^k(t)) \cdot \dot{u}^i(t).$$

где подразумевается, что

$$r_{u^i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^i}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial u^i} \right).$$

При $t = 0$, увидим

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=0} = \underbrace{r_{u^i}({u_0}^1, \dots, {u_0}^k)}_{\text{векторы}} \underbrace{\dot{u}^i(0)}_{\text{числа}},$$

где векторы зависят только от точки A, а числа зависят от конкретной кривой. Получается, что есть некоторые пространство, порожденное этими векторами.

Def 4.7. Назовём *касательным пространством* к Σ в точке A

$$T_A\Sigma = \operatorname{span}\left(r_{u^1}(A), \dots, r_{u^k}(A)\right).$$

Пусть есть некоторый вектор $\boldsymbol{V}$

$$\boldsymbol{V} = \alpha^i r_{u^i}(A).$$

Он может быть получен кривой $u^i = u_0^1 + \alpha^1 t$. Получается, что $T_A\Sigma$ состоит в точности из векторов скорости кривых в точке A.

Lem 4.8. *Размерность* $\dim T_A\Sigma = k$.

$\triangle$. Действительно, по условию регулярности

$$\operatorname{rg}(r_{u^i}) = \operatorname{rg}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right) \overset{\text{reg}}{=} k.$$

`В этом и состоит геометрический смысл условия регулярности.` $\square$

4.7 Замена локальных координат

С одной стороны понятно, что множество всех кривых на поверхности D инвариантно. С другой стороны интересно посмотреть, что же происходит с векторами.

$$\begin{cases} v^1 = v^1(x^1(u^1, \dots, u^k), \dots, x^k(u^1, \dots, u^k)) \\ \quad \dots \\ v^k = v^k(x^1(u^1, \dots, u^k), \dots, x^k(u^1, \dots, u^k)) \end{cases} \quad \text{— диффеоморфизм.}$$

Действительно, Якобиан композиции равен произведению Якобианов, получается композия двух невырожденных преобразований будет невырождена.

$$r_{u^i} = \frac{\partial r}{\partial v^j}\frac{\partial v^j}{\partial u^i} = \underbrace{\frac{\partial v^j}{\partial u^i}}_{J} r_{v^i},$$

получается, что матрица перехода от базиса r_{v^j} к r_{u^i} – матрица Якоби J замены координат.

$$\forall V \in T_A\Sigma \qquad V = V^i r_{v^i} = \underbrace{V^i \frac{\partial r^j}{\partial u^i}}_{\widetilde{V}^j} r_{v^j}.$$

Тогда

$$V = \widetilde{V}^j r_{v^j} \qquad \Rightarrow \qquad \widetilde{V}^j = \frac{\partial v^j}{\partial u^i} V^i. \tag{4.7}$$

Оказывается, что если

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}^1 \\ \dots \\ \widetilde{V}^k \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial v^j}{\partial u^i}\right)_{(A)} \begin{pmatrix} V^1 \\ \dots \\ V^k \end{pmatrix}.$$

5 Лекция № 5

5.1 Производная по направлению

Раньше определили

$$\partial_V f(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(A+\varepsilon V) - f(A)}{\varepsilon},$$

но сложность в том, что $A+\varepsilon V \notin \Sigma$. Но гладкую функцию с поверхности может всегда продлить в некоторую окрестность поверхности. Это продолжение F не единственно.

Def 5.1. Определим

$$\partial_V f(A) \overset{\text{def}}{=} \partial_V F(A),$$

при чём def инвариантно к выбору F.

$\triangle$.

I. Мы дифференцируем только вдоль касательных векторов к Σ, следовательно существует кривая γ на Σ такая, что

$$\begin{aligned} &1)\ \forall t\ \gamma(t) \in \Sigma \\ &2)\ \gamma(0) = A \\ &3)\ \ddot{\gamma}(0) = V. \end{aligned}$$

II. Тогда

$$\underbrace{\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0}}_{*} = \frac{d}{dt} F(\gamma(t))\Big|_{t=0} = \frac{\partial F}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^n)\dot{x}^i(t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial F}{\partial x^i}(A)V^i = \underbrace{\partial_V F(A)}_{**},$$

считая $\gamma(t) = [x^1(t), \dots, x^n(t)]$.

III. Но, т.к. $*$ не зависит от выбора F, то и $**$ не зависит от выбора F. Тогда $\partial_V f(A)$ определена корректно.

IV. К слову, $**$ не зависит от выбора пути, тогда и $*$ не зависит от выбора пути.

$\square$

Получается мы можем определить понятие дифференцирования гладкой функции на поверхности в точке.

Def 5.2. Для $f\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ достаточно быть определенной в некоторой окрестности точки A. Скажем, что D –

дифференцирование на Σ в точкеA, если

$$
\begin{aligned}
&1)\ Df \in \mathbb{R}\\
&2)\ D(f+g) = Df + Dg\\
&3)\ D(fg) = (Df)\cdot g(A) + f(A)\cdot (Dg).
\end{aligned}
$$

Пусть $u^1, \dots, u^k$ – локальные координаты в окрестности точки A.

Lem 5.3. *Для* $\forall D\ \exists V^1, \dots, V^K$ *такой, что*

$$Df = \frac{\partial f}{\partial u^i}(A) V^i.$$

Пусть есть некоторый касательный вектор $W \in T_A\Sigma$

$$W = W^i r_{u^i}(A).$$

Тогда можно рассматривать путь $\gamma(t)$ в локальных координатах такой, что $\gamma(0) = A,\ \dot{\gamma}(0) = W$, то есть для $A = ({u_0}^1, \dots, {u_0}^k)$ и $\gamma(t) = \big[u^1(t), \dots, u^k(t)\big]$ верно, что

$$u^i(0) = u_0^i, \qquad \dot{u}^i(0) = W^i.$$

Тогда

$$\partial_W f(A) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial u^i}(A)\ W^i.$$

Получается, что **каждый** касательный вектор W даёт дифференцирование $\partial_W\big|_A$, и **каждое** дифференцирование в A получается из касательного вектора. Поэтому будем писать просто

$$\boxed{W = \partial_W = W^i \frac{\partial}{\partial u^i}.} \tag{5.1}$$

5.2 Двойственность

Раз есть касательные векторы, то есть и кососимметрические полилинейные функии на них. Так приходим к следующей двойственной структуре:

· $T_P\Sigma$ – *касательное пространство* к Σ в P,

· $T_P^*\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} (T_P\Sigma)^*$ – *кокасательное пространство* к Σ в P.

Получаются векторное поле X: $X(P) \in T_P\Sigma$, и ковекторное поле ξ: $\xi(P) \in T_P^*\Sigma$.

Если $u^1, \dots, u^k$ – локальные координаты на Σ, то

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = r_{u^i} \quad — \quad \text{базис в } T_P\Sigma.$$

Соответственно,

$$du^1, \dots, du^k \quad — \quad \text{базис в } T_P^*\Sigma.$$

А вот

$$du^{i_1} \underset{i_1 < \dots < i_q}{\wedge \dots \wedge} du^{i_q} \quad — \quad \text{базис в } \Lambda^q T_P^*\Sigma,$$

где $\Lambda^q T_P^*\Sigma$ – пространство q-форм.