1 Закон Кулона и теорема Гаусса

Здесь попробуем индуктивно построить содержательную теорию, **начнём с двух эксперементальных фактов**, положенных в основу теории. Закона Кулона (сгсэ)

$$\boldsymbol{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{1.1}$$

и, введя вектор напряженности электростатического поля $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/q$, принцип суперпозиции:

$$\boldsymbol{E} = \sum \boldsymbol{E}_i. \tag{1.2}$$

Дипольный момент

Простейшим примером системы зарядов является диполь $q_1 + q_2 = 0$, для которого введём $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$:

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{r_1^2}\frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1} - \frac{q}{r_1^2}\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2} \quad \overset{l \ll r_2, r_1}{\Longrightarrow} \quad \boldsymbol{E} = \frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}}{r^3} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}$$

Для заряженной нити верно, что

$$E = 2\frac{\varkappa}{r}.$$

Теперь дойдём до двух теорем (кусочки уравнений Максвелла), описывающих электростатическое поле.

Thr 1.1 (теорема Гаусса)**.** *Для потока $\boldsymbol{E}$ через замкнутую поверхность S верно, что*

$$\oint_S E_n\, dS = \oint_S (\boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S}) = 4\pi q_{\text{вн}}. \tag{1.3}$$

$\triangle$.

I. Доказательство (из закона Кулона) для сферы вокруг точечного заряда очевидно.

II. Рассмотрим произвольную поверхность Ω, содержащую заряд, и телесный угол в онной:

$$E_n\, dS = E\cos\alpha\, dS = E\, dS'$$

То есть поток через наклонную площадку равен потоку через тот же телесный угол через некоторую вспомогательную сферу. Так как $s_1/s_2 = r_1^2/r_2^2$ и $E_1/E_2 = r_2^2/r_1^2$, получается интегрировать по Ω то же самое, что и интегрировать по выбранной хорошей сфере.

III. Рассмотрим теперь некоторую Ω, не содержащую заряд. Посмотрим на телесный угол от q. По модулю потоки через них одинаковые, а знаки противоположны, следовательно вклада в поток через Ω нет.

IV. Для сложного распределения зарядов, по принципу суперпозиции верно, что

$$\boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i \quad \Rightarrow \quad \oint_S E_n\, dS = \sum_i \oint_S \boldsymbol{E}_i\, dS.$$

$\square$