Заметки курса «Аналитическая Механика»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *3 октября 2020 г.*

Содержание

1 Кинематика точки

Пусть $\boldsymbol{r}(t), t \in \mathbb{R}$ – движение точки и траектория движения.

Def 1.1.

$$\textit{Скорость}: \quad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}; \qquad \textit{ускорение}: \quad \boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}. \tag{1.1}$$

1.1 Естественный трёхгранник

Из геометрии $\exists s(t)$ – длина кривой. Тогда

$$\boldsymbol{v} = \underbrace{\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}}_{\boldsymbol{\tau}} \frac{ds}{dt} = v\boldsymbol{\tau}. \tag{1.2}$$

Дифференцируя (1.2)

$$\boldsymbol{w} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v \underbrace{\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}}_{\boldsymbol{n}/\rho} \frac{ds}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\tau}}} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{n}}}. \tag{1.3}$$

где $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ – базис, преследующий точку.

1.2 Компоненты скорости и ускорения

Есть локальный базис. Тогда компоненты скорости

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i \boldsymbol{g}_i = v^i \boldsymbol{g}_i \quad \Rightarrow \quad v^i = \dot{q}^i. \tag{1.4}$$

Для компоненты ускорения:

$$w_i = (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{g}_i) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}_i) - (\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{g}_i}{dt}).$$

Но, во-первых:

$$\frac{d\boldsymbol{g}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial q^i}.$$

Во-вторых:

$$\boldsymbol{v} = \dot{g}^i\boldsymbol{g}_i \ \left|\frac{\partial}{\partial\dot{q}^k}\right. \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\dot{q}^k} = \frac{\partial}{\partial\dot{q}^k}(\underbrace{\dot{g}^1\boldsymbol{g}_1}_{0}+\underbrace{\dot{g}^2\boldsymbol{g}_2}_{\boldsymbol{g}_2}+\underbrace{\dot{g}^3\boldsymbol{g}_3}_{0}) = \boldsymbol{g}_k \tag{1.5}$$

Тогда

$$w_i = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\dot{q}^i}) - (\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\dot{q}^i}) = \frac{d}{dt}\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial\dot{q}^i}\frac{1}{2} - \frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial\dot{q}^i}\frac{1}{2} = \frac{d}{dt}\frac{\partial(v^2/2)}{\partial\dot{q}^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i} \;\Rightarrow\; \boxed{mw_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i}} \tag{1.6}$$

2 Кинематика твердого тела

Def 2.1. *Абсолютно твёрдым телом*[1] назовём множество такое, что

$$\forall i,j,t: \quad |\boldsymbol{r}_i(t) - \boldsymbol{r}_j(t)| = \text{const}.$$

Точка O это полюс. Во-первых перенесем начало координат в O. Введём систему координат $O_{\xi\nu\zeta}$ связанную с телом, – тело относительно неё не движется.

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OA},\ \boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{OA} = \text{const в } O_{\xi\nu\zeta}, \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{r}(t) = R(t)\boldsymbol{\rho}.$$

2.1 Углы Эйлера

Ортогональность матрицы R даёт возможность описать её тремя независимыми параметрами. Один из вариантов сделать это – углы Эйлера.

Пусть начальная ПДСК (x,y,z), а конечная – (X,Y,Z), при чём $xy\cap XY = ON$ – линия узлов.

1) $\alpha\colon Ox\to ON$, угол *прецессии*;
2) $\beta\colon Oz\to OZ$, угол *нутации*;
3) $\gamma\colon OX\to ON$, угол *собственного вращения*.

Повороты системы на эти углы называются прецессия, нутация и поворот на собственный угол (вращение).

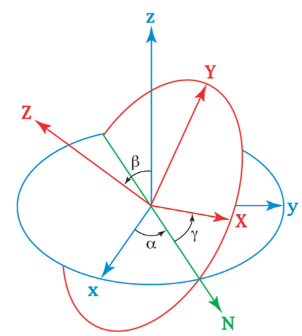


Рис. 1: Углы Эйлера

Матричная запись углов Эйлера:

$$R_Z(\alpha) = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin a & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ R_X(\beta) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta\\ 0 & \sin\beta\cos\beta & \end{pmatrix},\ R_Z(\gamma) = \begin{pmatrix}\cos(\gamma) & -\sin\psi & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

2.2 Основные теоремы о конечных перемещениях твёрдого тела

Далее бездоказательно приведём некоторые основные теоремы о конечных перемещениях твёрдого тела.

Thr 2.2 (Теорема Эйлера)**.** *Произвольное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку, можно осуществить посредством вращения вокруг некоторой оси, проходящей через эту точку.*

Thr 2.3 (Теорема Шаля)**.** *Самое общее перемещение твердого тела разлагается на поступательное перемещение, при котором произвольно выбранный полюс переходит из своего первоначального положения в конечное, и на вращение вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс. Это разложение можно совершить не единственным способом, выбирая за полюс различные точки тела; при этом направление и длина поступательного перемещения будут изменяться при выборе различных полюсов, а направление оси вращения и угол поворота вокруг нее не зависят от выбора полюса.*

[1] Для краткости просто *твёрдое тело*.

Thr 2.4 (Теорема Моцци)**.** *Самое общее перемещение твердого тела является винтовым перемещением.*

Con 2.5 (Теорема Бернулли-Шаля)**.** *Самое общее перемещение плоской фигуры в своей плоскости есть либо поступательное перемещение, либо вращение вокруг точки. Эта точка называется центром конечного вращения.*

2.3 Скорости и ускорения точек твердого тела в общем случае движения

Проведём два вектора $\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{r}_O$:

$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + R(t)\boldsymbol{\rho} \quad \overset{d/dt}{\Rightarrow} \quad \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \dot{R}\rho = \boldsymbol{v}_O + \dot{R}R^{-1}\boldsymbol{r}$$

но,

$$RR^{\mathrm{T}} = E, \dot{R}R^{\mathrm{T}} + R\dot{R}^{\mathrm{T}} = 0, \dot{R}R^{\mathrm{T}} = -R\dot{R}^{\mathrm{T}}, (\dot{R}R^{-1})^{\mathrm{T}} = -\dot{R}R^{-1}.$$

То есть $\dot{R}R^{-1}$ кососимметрична. Тогда пусть

$$\dot{R}R^{-1} = \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & w_y \\ w_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

Thr 2.6 (формула Эйлера)**.** *Существует единственный вектор*[2] $\boldsymbol{\omega}$*, называемый* ***угловой скоростью тела****, с помощью которого скорость* $\boldsymbol{v}$ *точки тела может быть представлена в виде*

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \quad - \quad \textbf{\textit{формула Эйлера}}. \tag{2.2}$$

Тогда, например, при постоянном радиус векторе верно, что

$$\boldsymbol{v}_A = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}, \qquad \text{при условии } a = \text{const}.$$

Можно вывести ускорение точки твёрдого тела

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_A &= \mathbf{w}_O + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \\ \mathbf{w}_A &= \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \quad - \quad \textbf{формула Ривальса}, \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ – *угловое ускорение.*

2.4 (-) Частные случаи.

Оставим частные случаи в покое.

2.5 Кинематические инварианты и кинематический винт

Вернемся к общему случаю движения твёрдого тела. В (2.6) угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ точки P инвариантна к выбору точки, соответственно ω^2 – *первый кинематический инвариант.* Домножив (2.6) скалярно на $\boldsymbol{\omega}$, получим, что $I_2 = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\omega})$, – *второй кинематический инвариант.*

Сейчас легко доказать thr. (2.4), точнее надо показать существование такой прямой MN, все точки которой имеют скорости, $\parallel \boldsymbol{\omega}$.

Выберем некоторый полюс, O, со скоростью $\boldsymbol{v}_O$ и угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Тогда верно, что

$$\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OS} = p\boldsymbol{\omega}, \qquad (p \neq 0).$$

3 Сложное движение точки и твёрдого тела

3.1 Сложение скоростей и ускорений

Def 3.1.

Абсолютной скоростью (ускорением) называют скорость (ускорение) относительно неподвижной системы координат.

Относительной скоростью (ускорением) называют скорость (ускорение) относительно подвижной системы координат.

[2] Псевдоветор же, нет?

Переносной скоростью (ускорением) такой точки A', которая в рассматриваемый момент времени совпадает с точкой A, но которая не движется относительно подвижной системы координат. называют абсолютную скорость (ускорение).

Thr 3.2 (сложение скоростей)**.** *Пусть a – абсолютная скорость, e – переносная, r – относительная.*

$$\boldsymbol{v}^a = \boldsymbol{v}^e + \boldsymbol{v}^r \tag{3.1}$$

Thr 3.3 (сложение ускорений)**.** *Пусть a – абсолютное, e – переносное, r – относительное, c – кориолисово.*

$$\mathbf{w}^a = \mathbf{w}^e + \mathbf{w}^r + \mathbf{w}^c. \tag{3.2}$$

$\triangle$. Запишем скорость $\boldsymbol{v}^a_A$ относительно двух систем координат:

$$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{r} \text{ в } xyz, \quad \overrightarrow{OA} = \boldsymbol{\rho} \text{ в } \xi\eta\zeta, \qquad \overset{d/dt}{\Rightarrow} \qquad \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \dot{R}\boldsymbol{\rho} + R\dot{\boldsymbol{\rho}}. \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{v}^a_A = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}^r_A$$

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (R\boldsymbol{\rho}) + R\dot{\boldsymbol{\rho}} \quad \overset{d/dt}{\Rightarrow} \quad \mathbf{w}^a_A = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\underbrace{\dot{R}\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}} + R\dot{\boldsymbol{\rho}}) + \dot{R}\dot{\boldsymbol{r}} + R\dot{\boldsymbol{\rho}} =$$

$$= \mathbf{w}^e_A + \boldsymbol{\omega} \times R\dot{\boldsymbol{r}} + \underbrace{\dot{R}R^{-1}}_{\boldsymbol{\omega}\times}\underbrace{R\dot{\boldsymbol{\rho}}}_{\boldsymbol{v}^r_a} + \underbrace{R\ddot{\boldsymbol{\rho}}}_{\mathbf{w}^r_A} = \mathbf{w}^e_A + \mathbf{w}^r_A + \boxed{2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}^r_A}$$

$\square$

Теперь немного про твёрдое тело, зная, что $\boldsymbol{\omega}^r = \omega_\xi \boldsymbol{e}_\xi + \omega_\eta \boldsymbol{e}_\eta + \omega_\zeta \boldsymbol{e}_\zeta$, найдём[3] угловое ускорение ε^a

$$\boldsymbol{\varepsilon}^a = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{d\boldsymbol{\omega}^r}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{d}{dt}\left(\omega^i \boldsymbol{e}_i\right) = \boldsymbol{\varepsilon} + \underbrace{\dot{\omega}^i \boldsymbol{e}_i}_{\boldsymbol{\varepsilon}^r} + \underbrace{\omega^i \dot{\boldsymbol{e}}_i}_{\boldsymbol{\omega}^e \times \boldsymbol{\omega}^r} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^r + \boldsymbol{\omega}^e \times \boldsymbol{\omega}^r.$$

3.2 Главный момент и главный вектор

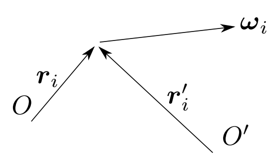
Имеется m мгновенно поступательных движений $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ и n мгновенно вращательных движений[4] $\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$. Уже знаем, что $\forall j$ мы можем представить $\boldsymbol{v}_j$ как пару $\boldsymbol{\omega}'_j, \boldsymbol{\omega}''_j$. Получается, что $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ представим в виду $2m + n$ мгновенных вращений.

Введём два важных вектора

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i$$ – суммарный вектор мгновенных угловых скоростей, *главный вектор*;

$$\boldsymbol{V} = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{v}_j + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{\omega}_i$$ – суммарный вектор мгновенных поступательных движений, *главный момент*.

Таким образом свели $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ к паре $\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{V}$, соответствующей выбранному центру приведения.



Найдём $\boldsymbol{V}_{O'}$:

$$\boldsymbol{V}_{O'} = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{v}_j + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{\omega}_i = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{v}_j + \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{O'O} + \boldsymbol{r}_i\right) \times \boldsymbol{\omega}_i = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{v}_j + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{\omega}_i}_{\boldsymbol{V}_0} + \overrightarrow{O'O} \times \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i}_{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{V}_0 + \overrightarrow{O'O} \times \boldsymbol{\Omega}.$$

3.3 Общие основания кинематики системы

Свободные и несвободные системы. Связи.

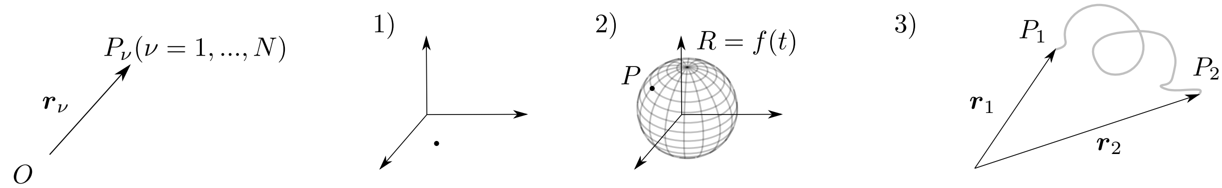
Рассмотрим некоторые частные случаи кинематических связей в системе.

[3] Получить!

[4] Скользящий вектор – это ?

Таблица 1: Простейшие типы движений.

$(\boldsymbol{V}_0, \boldsymbol{\Omega})$	$\boldsymbol{\Omega}$	$\boldsymbol{V}_0$	простейшее мгновенное движение
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	мгновенно винтовое движение
0	$\neq 0$	0	мгновенное вращение, ось $\ni O$
		$\neq 0$	мгновенное вращение, ось $\not\ni O$
0	0	$\neq 0$	мгновенно поступательное движение
0	0	0	мгновенный покой



$z = 0$ $\qquad x^2 + y^2 + z^2 - f(t)^2 = 0$ $\qquad l^2 - (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)^2 \geqslant 0$

В общем случае связь запишем, как

$$f(\boldsymbol{r}_\nu, \boldsymbol{v}_\nu, t) \geqslant 0.$$

В частности, при $f(\boldsymbol{r}_\nu, \boldsymbol{v}_\nu, t) = 0$, связь называет *двухсторонней*, или *удерживающей*. При неравенстве, соотвественно, связь *односторонняя*, *освобождающая*. Связь вида $f(\boldsymbol{r}_\nu, t) = 0$ называется *геометрической*, *конечная*, *голономная*. Связь вида $f(\boldsymbol{r}_\nu, \boldsymbol{v}_\nu, t) = 0$ называется *дифференциальной*, или *кинематической*. Иногда кинематическая связь может быть представлена как геометрическая, такая связь называется *интегрируемой*.

Def 3.4. Если на систему материальных точек не наложены дифференциальные неинтегрируемые связи, то она называется голономной. Если же среди связей, наложенных на систему есть дифференциальные неинтегрируемые связи, то система называется неголономной.

Хотелось бы построить некоторую общую теория для случая, когда этих связей несколько. В частности пусть есть r геометрических связей.

$$f_\alpha(\boldsymbol{r}, t) = 0, \qquad (\alpha = 1, \ldots, r), \tag{3.3}$$

И несколько дифференциальных линейных связей

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\beta\nu}(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t) \cdot \boldsymbol{v}_\nu + a_\beta(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t) = 0, \qquad (\beta = 1, \ldots, s) \tag{3.4}$$

Стоит сказать, что

$$3N - r - s \geqslant 1.$$

Def 3.5. Геометрические связи называются стационарными или склерономными, если t не входит в их уравнения (3.3). Дифференциальные связи (3.4) называются *стационарными* или *склерономными* если функции $\boldsymbol{a}_{\beta\nu}$ не зависят явно от t, а функции $a_\beta \equiv 0$. Система называется *склерономной*, если она либо свободная, либо на нее наложены только стационарные связи. Система называется *реономной*, если среди наложенных на нее связей есть хотя бы одна нестационарная.

Ограничения, налагаемые связями на положения, скорости, ускорения и перемещения точек системы.

Пусть задан некоторый момент $t = t*$. Тогда *возможными положениями* назовём $\boldsymbol{r}_\nu$ такие, что для них верно (3.3), (3.4).

Какие возможны скорости?

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \boldsymbol{v}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0, \qquad (\alpha = 1, \ldots, r). \tag{3.5}$$

Совокупность векторов $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^*$, удовлетворяющая линейным уравнениям (3.4) и (3.5) в возможном для данного момента времени положении системы, назовем возможными скоростями.

Какие возможны ускорения?

$$(3.5),(3.4) \overset{d/dt}{\Rightarrow} \sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\cdot \mathbf{w}_\nu + \sum_{\nu,\mu=1}^{N}\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu \partial \boldsymbol{r}_\mu}\boldsymbol{v}_\mu\cdot\boldsymbol{v}_\nu + 2\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t\partial \boldsymbol{r}_\nu}\boldsymbol{v}_\nu + \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t^2} = 0 \qquad \alpha\in[1,r] \quad (3.6)$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{a}_{\beta\nu}\cdot\mathbf{w}_\nu + \sum_{\nu,\mu=1}^{N}\frac{\partial \boldsymbol{a}_{\beta\nu}}{\partial \boldsymbol{r}_\mu}\boldsymbol{v}_\mu\cdot\boldsymbol{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial \boldsymbol{a}_{\beta\nu}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial a_\beta}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\cdot\boldsymbol{v}_\nu + \frac{\partial a_\beta}{\partial t} = 0 \qquad \beta\in[1,s] \quad (3.7)$$

Совокупность векторов $\mathbf{w}_\nu = \mathbf{w}_\nu^*$, удовлетворяющая линейным уравнениям (3.6) и (3.7) в возможном для данного момента времени положении системы (+скорости), назовем возможными скоростями.

Рассмотрим возможные перемещения $\Delta\boldsymbol{r}_\nu$ системы за Δt из её возможного положения $\boldsymbol{r}_\nu^*$ в момент $t=t^*$. Тогда

$$\Delta\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}^*\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{w}_\nu^*(\Delta t)^2 + \ldots \qquad (\nu=1,\ldots,N). \tag{3.8}$$

Пренебрегая нелинейными членами, получим, что $\Delta\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^*\Delta t$. Тогда, домножив (3.4), (3.5) на Δt, получим систему уравнений, которой удовлетворяют линейные по Δt возможные перемещения:

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\cdot\Delta\boldsymbol{r}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\Delta t = 0, \qquad (\alpha=1,\ldots,r), \tag{3.9}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{a}_{\beta\nu}\cdot\Delta\boldsymbol{r}_\nu + a_\beta\Delta t = 0, \qquad (\beta=1,\ldots,s), \tag{3.10}$$

где функции $\boldsymbol{a}_{\beta\nu}, a_\beta$ и частные производные вычисляются при $t=t^*,\ \boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu^*$.

Действительные и виртуальные перемещения

Пусть задано положение системы для $t,\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\mathbf{w}$. Тогда для $t=t^*+dt$ запишем, что

$$\boldsymbol{r}_\nu(t^*+dt) - \boldsymbol{r}_\nu(t^*) = \boldsymbol{v}_{\nu_0}^*\,dt + \frac{1}{2}\mathbf{w}_{\nu_0}^*(dt)^2 + \ldots, \tag{3.11}$$

где $\mathbf{w}_{\nu_0}^*$ – ускорения точек системы при $t=t^*$. Величины (3.11) – *действительные (истинные) перемещения* точек системы за время dt. Тогда получим систему уравнений, аналогичную (3.9), (3.10):

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\cdot d\boldsymbol{r}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t}dt = 0, \qquad (\alpha=1,\ldots,r), \tag{3.12}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{a}_{\beta\nu}\cdot d\boldsymbol{r}_\nu + a_\beta dt = 0, \qquad (\beta=1,\ldots,s). \tag{3.13}$$

Помимо действительных перемещений есть *виртуальные*. Ими называется совокупность величин $\delta\boldsymbol{r}_\nu$, удовлетворяющая линейным однородным уравнениям

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu = 0, \qquad (\alpha=1,\ldots,r), \tag{3.14}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N}\boldsymbol{a}_{\beta\nu}\cdot\delta\boldsymbol{r}_\nu = 0, \qquad (\beta=1,\ldots,s), \tag{3.15}$$

Если система склерономна, то действительное перемещение будет одним из виртуальных.

Def 3.6. *Синхронное варьирование* – переход из одного положения в другое, при фиксированном времени

$$\boldsymbol{r}_\nu^* \to \boldsymbol{r}_\nu^* + \delta\boldsymbol{r}_\nu.$$

При синхронном варьировании мы не рассматриваем процесс движения и сравниваем допускаемые связями бесконечно близкие положения (конфигурации) системы для данного фиксированного момента времени.

Рассмотрим две совокупности возможных перемещений с одним и тем же значением величины Δt. Согласно разложению по Тейлору,

$$\Delta_1\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}_{\nu_1}^*\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{w}_{\nu_1}^*(\Delta t)^2 + \ldots,$$

$$\Delta_2\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}_{\nu_2}^*\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{w}_{\nu_2}^*(\Delta t)^2 + \ldots,$$

и рассмотрим их разность

$$\Delta_1 \boldsymbol{r}_\nu - \Delta_2 \boldsymbol{r}_\nu = (\boldsymbol{v}^*_{\nu_1}\Delta t - \boldsymbol{v}^*_{\nu_2}\Delta t) + \left(\frac{1}{2}\mathbf{w}^*_{\nu_1}(\Delta t)^2 - \frac{1}{2}\mathbf{w}^*_{\nu_2}(\Delta t)^2\right) + \ldots.$$

4 Задачи с семинара

4.1 Задачи с II семинара

О геодезических на гиперболоиде.

Уравнение гиперболоида – $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Def 4.1. *Геодезическая* – линия в пространстве, по которой движется точка при нулевых компонентах ускорения в локальном базисе, задающем касательное пространство.

$$w_i = (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{g}_i) = 0.$$

Пусть $q = \{\varphi, h = z\}$, тогда $z^y + y^2 = 1 + h^2$. Тогда

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x = \sqrt{1+h^2}\cos\varphi \\ y = \sqrt{1+h^2}\sin\varphi \\ z = h \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{g}_\varphi = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = \sqrt{1+h^2}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{g}_h = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial h} = \begin{pmatrix} h/\sqrt{1+h^2}\cdot\cos\varphi \\ h/\sqrt{1+h^2}\cdot\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Метрический тензор

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1+h^2 & 0 \\ 0 & \frac{1+2h^2}{1+h^2} \end{pmatrix}.$$

Найдём v:

$$v^2 = g_{ji}v^i v^j = (1+h^2)\dot\varphi^2 + \frac{1+2h^2}{1+h^2}\dot h^2.$$

Теперь можно домножить на dt^2 и найти коэффициенты, с которыми учитываем расстояния. То есть

$$ds^2 = g_{ij}\,dq^i\,dq^j \tag{4.1}$$

Для ускорений:

$$w_\varphi = \frac{d}{dt}\left[(1+h^2)\dot\varphi\right] = 0;$$

$$w_h = \frac{d}{dt}\left[\frac{1+2h^2}{1+h^2}h\right] - h\dot\varphi^2 - \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1+2h^2}{1+h^2}\right)\frac{\dot h^2}{2} = 0.$$

Заметим, что

$$\left.\begin{matrix} w_\varphi = 0 \\ w_h = 0 \end{matrix}\right\} \quad\Rightarrow\quad w_\tau = 0 \quad\Rightarrow\quad v^2 = \text{const}, \quad \daleth v^2 = 1.$$

Ну, тогда перейдём к

$$\left.\begin{matrix} w_\varphi = 0 \\ w_h = 0 \end{matrix}\right\} \quad\Leftrightarrow\quad \left.\begin{matrix} w_\varphi = 0 \\ v^2 = 1 \end{matrix}\right\} \text{ т.к. } w_\tau v = 0 = (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}) = w_i v^i = (w_\varphi\dot\varphi + w_h\dot h) = w_h\dot h \Rightarrow \left[\begin{matrix} \dot h = 0 \\ w_h = 0 \end{matrix}\right.$$

Так перейдём к уравнению

$$\frac{c^2}{1+h^2} + \frac{1+2h^2}{1+h^2}\dot h^2 = 1 \quad\Rightarrow\quad \dot h^2 = \frac{1+h^2-c^2}{1+2h^2}.$$

И сменим параметризацию $h(t) \to h(\varphi)$.

$$\frac{dh}{d\varphi} = \frac{\dot h}{\dot\varphi} = \frac{1+h^2}{c}\sqrt{\frac{1+h^2-c^2}{1+2h^2}}.$$

Получили двухпараметрическое[5] семейство геодезических.

Посмотрим на частные случаи. Например, $h == h_0$. Тогда[6] $w_h = 0 \Leftrightarrow h_0 = 0$, $c = \pm 1$. Или, $c = 1/\sqrt{2} \Rightarrow dh/d\varphi = 1 + h^2$. Тогда $h = \operatorname{tg}\varphi$.

[5] Потому что константа интегрирования.
[6] Проверить!

4.2 Задачи с III семинара

✗Задача 4.10

Диск катится без проскальзывания.

$$\underbrace{\boldsymbol{v}_B}_{=0} = \underbrace{\boldsymbol{v}_O}_{=0} + \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{OB} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} \| \overrightarrow{OB}.$$

Также

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{BC}$$
$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OC}.$$

4.3 Задачи с III семинара

Задача 2.12

Знаем, что $\omega_1, \omega_2 = \text{const}$. Во-первых свяжем подвижную систему координат с пушкой: «$\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$» Во-вторых,

$$\boldsymbol{v}^a = \boldsymbol{v}^e + \boldsymbol{v}^r, \quad \boldsymbol{v}^r = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

. Тогда

$$\boldsymbol{v}^e = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \overrightarrow{O'M} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ l\cos\alpha \\ l\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Теперь про ускорения,

$$\mathbf{w}^a = \mathbf{w}^e + \mathbf{w}^r + \mathbf{w}^c.$$

В частности верно, что

$$\mathbf{w}^c = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}^r = 2\begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ v_0\cos\alpha \\ v_0\sin\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^r = \mathbf{w}_O = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{w}_0\cos\alpha \\ \mathrm{w}_0\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Для углового ускорения (можно ввести новую подвижную систему координат или ...), верно что

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1,$$

а для переносного ускорения, по формуле Ривальса,

$$\mathbf{w}^e = \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{O'M} + (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \Big((\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \overrightarrow{O'M}\Big).$$

Другая задача

Введём систему координат, связанную со стержнем $\eta\xi$. Верно, что

$$\boldsymbol{v}^a_{M'} = \boldsymbol{v}^e_{M'} + \boldsymbol{v}^r_{M'}, \quad \text{где } \boldsymbol{v}^e_{M'} = \boldsymbol{v}_{M'}, \quad \boldsymbol{v}^r_{M'} = \dot{\xi}\boldsymbol{e}_\xi, \quad \boldsymbol{v}^a_{M'} = 0.$$

Но $\boldsymbol{v}_M \| \boldsymbol{e}_\xi \| AB$.

Задача 3.29

Найдём ускорение точки M,

$$\mathbf{w}_M = \mathbf{w}_O + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{OM}}_{0} + \boldsymbol{\omega} \times \Big(\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OM}\Big) = \mathbf{w}_O - \omega^2\overrightarrow{OM}.$$

Введём систему координат, связанную с диском $\eta\xi$. Верно, что

$$\mathbf{w}^a_{O'} = \mathbf{w}^e_{O'} + \mathbf{w}^r_{O'} + \cancel{\mathbf{w}^c_{O'}} \quad \Rightarrow \quad 0 = \mathbf{w}_O + \omega^2 R\boldsymbol{e}_\eta$$

Собирая всё вместе, получим

$$\mathbf{w}_M = -\omega^2 R\boldsymbol{e}_\eta - \omega^2|OM|\boldsymbol{e}_\xi$$