Конспект второго тома курса теоретической физики «Теория поля»

Авторы: Хоружий Кирилл
Примак Евгений

От: *5 сентября 2020 г.*

Содержание

2 Канонические уравнения

2.8 Принцип наименьшего действия

В силу необходимости инвариантности интеграла, действие для свободной частицы должно иметь вид

$$S = -\alpha \int_a^b ds,$$

где интеграл берется вдоль мировой линии. В силу экстремальности интеграла $\alpha > 0$.

Действие можно представить в виде интеграла по времени, из значения собственного времени найдём

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt, \qquad \Big/ dt' = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.\Big/ \qquad S = -\int_{t_1}^{t_2} \alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{2.1}$$

При $c \to \infty$ выражение должно перейти в классическое выражение, тогда

$$L = -\alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = mc.$$

Таким образом, действие для свободной материальнной точки равно

$$S = -mc\int_a^b ds, \tag{2.2}$$

а функция Лагранжа

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{2.3}$$

3 Заряд в электромагнитном поле

3.16 Четырёхмерный потенциал поля

Действие для частицы в ЭМ поле – (2.2) + взаимодействие частицы с полем. **Оказывается**, что это определяется одним параметром – *зарядом*[1] частицы e. Свойства поля характеризуются 4-вектором A_i, так называемым 4-*потенциалом*, компоненты которого – $f(\boldsymbol{x}, t)$. Эти величины входят в действие в виде члена

$$-\frac{e}{c}\int_a^b A_i dx^i,$$

где функции $A_i(x_i)$ берутся в точках мировой линии частицы. Множитель $1/c$ – для удобства.

Таким образом, действие для заряда в ЭМ поле имеет вид

$$S = \int_a^b \left(-mc\,ds - \frac{e}{c}A_i\,dx^i\right). \tag{3.1}$$

Def 3.1. Три пространственные компоненты 4-вектора A^i образуют трёхмерный вектор $\boldsymbol{A}$, называемый *векторным потенциалом* поля. Временную же компоненту называю *скалярным потенциалом*, обозначим её как $A^0 = \varphi$. Таким образом,

$$A^i = (\varphi, \boldsymbol{A}). \tag{3.2}$$

Поэтому интеграл действия можно написать в виде

$$S = \int_a^b \left(-mc\,ds + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\,d\boldsymbol{r} - e\varphi\,dt\right),$$

или, вводя скорость частицы $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$ и переходя к интегрированию по времени, в виде

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} - e\varphi\right)dt. \tag{3.3}$$

Подынтегральное выражение есть функция Лагранжа для заряда в ЭМ поле:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} - e\varphi. \tag{3.4}$$

Отличие от (2.3) для свободной частицы в члене $\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} - e\varphi$, который и описывают взаимодействие заряда с полем.

[1] О единицах измерения см. §4.

Производная $\partial L/\partial \boldsymbol{v}$ есть *обобщенный импульс* частицы; обозначим его $\boldsymbol{P}$. Находим

$$\boldsymbol{P} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}. \tag{3.5}$$

Про Гамильтониан:

Из функции Лагранжа можно найти функцию Гамильтона частицы в поле по **известной общей** формуле

$$\mathscr{H} = \boldsymbol{v}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} - L. \tag{3.6}$$

Подставляя сюда (3.4)

$$\mathscr{H} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + e\varphi. \tag{3.7}$$

Функция Гамильтона, однако, должна быть выражена не через скорость, а через обобщенный импульс частицы. По предыдущим двум формулам видно, что соотношение между $\mathscr{H} - e\varphi$ и $\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}$ – такое же, как и в отсутствие поля (совпадение?), т.е.

$$\left(\frac{\mathscr{H} - e\varphi}{c}\right)^2 = m^2c^2 + \left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2, \tag{3.8}$$

или иначе:

$$\mathscr{H} = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2} + e\varphi. \tag{3.9}$$

Для малых скоростей, т.е. в классической механике, функция Лагранжа (3.4) переходит в

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} - e\varphi. \tag{3.10}$$

В этом приближении

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A},$$

и мы находим следующее выражение для функции Гамильтона:

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + e\varphi. \tag{3.11}$$

Наконец, выпишем уравнение Гамильтона–Якоби для частицы в электромагнитном поле. Оно получается заменой функции Гамильтона обобщенного импульса $\boldsymbol{P}$ на $\partial S/\partial \boldsymbol{r}$, а самого $\mathscr{H}$ – на $-\partial S/\partial t$. Таким образом, получим из (3.8)

$$\left(\operatorname{grad} S - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\varphi\right)^2 + m^2c^2 = 0 \tag{3.12}$$

3.17 Уравнения движения заряда в поле

Допустим, заряд e не велик, тогда его действием на поле можно пренебречь. То есть поле не зависит ни от координат, ни от скорости заряда.

Итак, надо бы найти уравнение движения заряда в заданном электромагнитном поле. Эти уравнения получаются варьированием действия, т.е. даются уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}, \tag{3.13}$$

где L определяется формулой (3.4).

Производная $\partial L/\partial \boldsymbol{v}$ есть обобщенный импульс частицы (3.5). Далее имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} \equiv \operatorname{grad} L = \frac{e}{c}\operatorname{grad} \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} - e\operatorname{grad}\varphi. \tag{3.14}$$

Но по **известной** формуле векторного анализа

$$\operatorname{grad} \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a} + [\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}],$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – любые два вектора. Применяем эту формулу к $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$ и помня, что дифференцирование по $\boldsymbol{r}$ производится при постоянном $\boldsymbol{v}$, находим

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}] - e\operatorname{grad}\varphi.$$

Уравнения Лагранжа, следовательно, имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)=\frac{e}{c}\left(\boldsymbol{v}\nabla\right)\boldsymbol{A}+\frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}]-e\operatorname{grad}\varphi.$$

Но полный дифференциал $(d\boldsymbol{A}/dt)\,dt$ складывается из двух вещей: из изменения $(\partial\boldsymbol{A}/\partial t)\,dt$ векторного потенциала со временем в данной точке пространства и из изменения при переходе от одной точки пространства к другой на расстояние $d\boldsymbol{r}$. Это вторая часть равна[2] $(d\boldsymbol{r}\nabla)\boldsymbol{A}$. Таким образом,

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{A}.$$

Подставляя это в предыдущее уравнение, получаем

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\underbrace{-\frac{e}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-e\operatorname{grad}\varphi}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\frac{e}{c}\left[\boldsymbol{v}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\right]}_{\mathrm{II}} \tag{3.15}$$

где I часть не зависит от скорости частицы. II часть зависит от этой скорости: пропорциональна величине скорости и перпендикулярна к ней.

Def 3.2. Силу первого рода, отнесенную к заряду, равному единицу, называют *напряженностью электрического поля –* $\boldsymbol{E}$.

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-\operatorname{grad}\varphi. \tag{3.16}$$

Def 3.3. Множитель при скорости, точнее при $\boldsymbol{v}/c$, в силе II рода, действующей на единичный заряд, называют *напряженностью магнитного поля –* $\boldsymbol{H}$.

$$\boldsymbol{H}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}. \tag{3.17}$$

Def 3.4. Если в электромагнитном поле $\boldsymbol{E}\neq 0$, а $\boldsymbol{H}=0$, то говорят об *электрическом поле*; если же $\boldsymbol{E}=0$, $\boldsymbol{H}\neq 0$, то поле называют *магнитным*. В общем случае электромагнитное поле является наложением полей электрического и магнитного.

Отметим, что $\boldsymbol{E}$ представляет собой полярный, а $\boldsymbol{H}$ – аксиальный вектор. Уравнение движения заряда в электромагнитном поле можно теперь написать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=e\boldsymbol{E}+\frac{e}{c}\left[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}\right]. \tag{3.18}$$

Стоящее справа выражение носит название *лоренцевой силы*. Первая её части – сила, с которой действует электрическое поле на заряд, – не зависит от скорости заряда и ориентирована по направлению поля $\boldsymbol{E}$. Вторая часть – сила, оказываемая магнитным полем на зарядЮ – пропорциональная скорости заряда и направлена перпендикулярно к этой скорости и к направлению магнитного поля $\boldsymbol{H}$.

Для скоростей $\ll c$, импульс $\boldsymbol{p}\approx m\boldsymbol{v}$, и уравнение движения переходит в

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=e\boldsymbol{E}+\frac{e}{c}\left[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}\right]. \tag{3.19}$$

Выведем ещё уравнение, определяющее изменение кинетической энергии частицы со временем:

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Так как

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dt}=\boldsymbol{v}\frac{d\boldsymbol{p}}{dt};$$

подставляя $d\boldsymbol{p}/dt$ из (3.18) и замечая, что $[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\boldsymbol{v}=0$, имеем

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dt}=e\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}. \tag{3.20}$$

Изменение кинетической энергии со временем есть работа поля над частицей в единицу времени. Видно, что работа равна произведению скорости заряда на силу, с которой действует на него электрическое поле. Работа поля за время dt, т.е. при перемещении заряда на $d\boldsymbol{r}$, равна $e\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{r}$.

Подчеркнем, что работу над зарядом производит только электрическое поле; магнитное поле не производит работы над движущимся в нем зарядом. Последнее связано с тем, что сила, с которой магнитное поле действует на частицу, всегда перпендикулярна к ее скорости.

[2] Почему???

Про обращение времени:

Уравнения механики инвариантны по отношению к перемене знака у времени, т.е. по отношению к замене будущего прошедшим. Легко видеть, что то же самое имеет место и в ЭМ поле в теории относительности. При этом, однако, вместе с заменой t на $-t$надо изменить знак магнитного поля. Действительно, уравнения движения (3.18) не меняются, если произвести замену

$$t \to -t, \quad \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{H} \to -\boldsymbol{H}. \tag{3.21}$$

При этом, согласно (3.16), (3.17), скалярный потенциал не меняется, а векторный меняет знак:

$$\varphi \to \varphi, \boldsymbol{A} \to -\boldsymbol{A}. \tag{3.22}$$

Таким образом, если в электромагнитном поле возможно некоторое движение, то возможно и обратное движение в поле с обратным направлением $\boldsymbol{H}$.