Билеты по курсу «Электричество и магнетизм»

Авторы: Хоружий Кирилл
Евгений Примак
Малахов Ислам

От: *25 декабря 2020 г.*

Содержание

1.2 Эллектрическое поле и основная задача электростатики

Вместо поиска $\boldsymbol{E}$ достаточно найти φ,

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi \\ \operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi \equiv \Delta\varphi = \begin{cases} -4\pi\rho & \text{ур. Пуассона} \\ 0 & \text{ур. Лапласа} \end{cases}$$

Как может быть поставлена задача? Заданы граничные значения, найти распределения зарядов. Заданы заряды, найти распределения. Что-то задано, что-то не задано. Во всех трёх случаях **решение уравнения Пуассона единственно**.

К слову, так как $\varphi = \varphi(\boldsymbol{r})$, а при $A_i = \text{const}$ верно, что $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, то электростатическое поле потенциально. Также это можно увидеть в работе ЭМ сил, при перемещении заряда по замкнутому контуру:

$$A_{\text{замкн}}/q = \oint_{(L)} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{f} = 0.$$

Разность потенциалов

Def 1.1. Если на участке цепи не действуют сторонние силы, работа по перемещению включает только работу потенциального электрического поля и *электрическое напряжение* U_{AB} между A и B совпадает с разностью потенциалов $\varphi_A - \varphi_B = A^{\text{el}}_{AB}/q$. В общем случае $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B + \mathscr{E}_{AB}$.

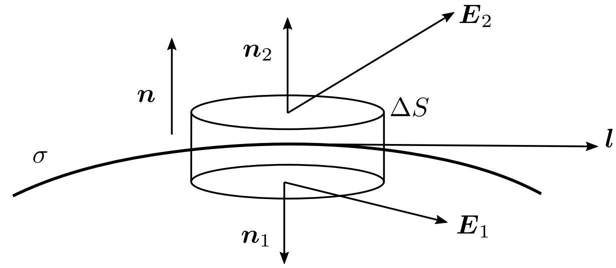
Граничные условия на заряженной поверхности

По теореме Гаусса верно, что

$$E_{2n_2}\cancel{\Delta S} + E_{1n_1}\cancel{\Delta S} = 4\pi\sigma\cancel{\Delta S},$$
$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$$

По теореме циркуляции верно, что

$$E_{2l}\cancel{\Delta}l - E_{1l}\cancel{\Delta}l = 0$$
$$E_{2l} - E_{1l} = 0.$$

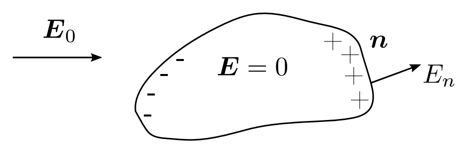


Проводники

Def 1.2 (пусть так)**.** *Проводник* – костяк частиц, окруженных *свободными* электронами, которые в пределах тела могут перемещаться на какие угодно расстояния.

В частности, для проводников, верно, что

$$E_n = 4\pi\sigma$$
$$E_\tau = 0$$



Собственно, объёмных зарядов в проводнике нет, поверхностные есть и компенсируют внешнее поле. Аналогично работает решетка Фарадея, электростатическое поле не проникает в проводники.

Метод изображений

Если существует некоторая эквипотенциальная поверхность разделяющая пространство на два полупространства, то можем считать что эта поверхность является проводящей. И наоборот, проводящую поверхность можно заменить, на системы зарядов в полупространстве, ей ограниченном, создающих эквипотенциальную поверхность.

1.3 Эллектрическое поле в веществе

в

1.20 Уравнения Максвелла

Естественно ввести *тензор электромагнитного поля*:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}_{ik}, \qquad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}^{ik} \tag{1.1}$$

Тогда уравнения Максвелла запишутся в виде

$$\boxed{\varepsilon^{iklm}\partial_k F_{lm} = 0, \qquad \partial_k F^{ik} = -\frac{4\pi}{c} j^i}, \tag{1.2}$$

где $j^i = (\rho c, \boldsymbol{j})$. Прямой подстановкой тензора ЭМ поля нетрудно убедиться, что

Дифференциальная форма в СГС:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.4}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.5}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1.6}$$

Интегральная форма в СГС:

$$\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{s} = 4\pi Q \tag{1.7}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = 0 \tag{1.8}$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{1.9}$$

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{s}. \tag{1.10}$$

$\boldsymbol{E}$ — напряженность электрического поля;
$\boldsymbol{H}$ — напряженность магнитного поля;
$\boldsymbol{D}$ — электрическая индукция;
$\boldsymbol{B}$ — магнитная индукция.

Материальные уравнения

В проводниках связь между плотностью тока и напряжённостью электрического поля выражается в линейном приближении *законом Ома*:

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E},$$

где σ – *удельная проводимость среды.*

В среде сторонние электрические и магнитные поля вызывают поляризация $\boldsymbol{P}$ и намагничивание вещества $\boldsymbol{M}$. Тогда

$$\rho_{\mathrm{b}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{b}} = c\nabla \times \boldsymbol{M} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t},$$

Далее, по определению

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi\boldsymbol{M}$$

Что в случае линейной поляризации или линейной намагничиваемости можно записать, как

$$\begin{cases} \boldsymbol{P} = \chi_{\mathrm{e}}\boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{M} = \chi_{\mathrm{m}}\boldsymbol{H}, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} = (1 + 4\pi\chi_{\mathrm{e}})\boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} = (1 + 4\pi\chi_{\mathrm{m}})\boldsymbol{H}. \end{cases}$$

где ε – *относительная диэлектрическая проницаемость*, μ — *относительная магнитная проницаемость*, χ_{e} – *диэлектрическая восприимчивость*, χ_{m} – *магнитная восприимчивость.*

Наконец, в однородных средах верно, что

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\dfrac{\rho}{\varepsilon}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \dfrac{4\pi}{c}\mu\boldsymbol{j} + \dfrac{\varepsilon\mu}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \end{cases}$$

где в оптическом диапазоне принято $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$.

Граничные условия

Опять же, в СГС,

$$\begin{cases} (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) \times \boldsymbol{n}_{1,2} = 0, \\ (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) \times \boldsymbol{n}_{1,2} = \dfrac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) \cdot \boldsymbol{n}_{1,2} = -4\pi \rho_{\mathrm{s}}, \\ (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) \cdot \boldsymbol{n}_{1,2} = 0, \end{cases}$$

где ρ_{s} – поверхностная плотность свободных зарядов, $\boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}$ – плотность поверхностных свободных токов вдоль границы.

Эти граничные условия показывают непрерывность нормальной компоненты вектора магнитной индукции, и непрерывность на границе областей тангенциальных компонент напряжённостей электрического поля.

Уравнение непрерывности

Источники полей $\rho, \boldsymbol{j}$ не могут быть заданы произвольным образом. Применяя операцию дивергенции к четвёртому уравнению (закон Ампера—Максвелла) и используя первое уравнение (закон Гаусса), получаем уравнение непрерывности

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \qquad \Leftrightarrow \qquad \oint_S \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV.$$

1.21 Вектор Умова-Пойтинга

Вспомнив пару уравнений Максвелла и домножив на $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ соответсвтенно, получим

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c}\boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \underbrace{\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}}_{-\operatorname{div}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}]}.$$

Поэтому естественно ввести следующее определение:

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}] \ \text{ — \textit{вектор Умова-Пойтинга}.} \tag{1.11}$$

Тогда уравнение перепишется в следующем виде (теорема Пойтинга в диф-форме):

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{E^2+H^2}{8\pi} = -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} - \operatorname{div}\boldsymbol{S}. \tag{1.12}$$

Проинтегрировав по некоторому объему, поймём, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV = -\int\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\,dV - \oint\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{f}, \tag{1.13}$$

вспомнив скорость изменения кинетической энергии, получим, так называемую, *теорему Пойтинга*

$$\begin{matrix} e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v} = \dfrac{d}{dt}\mathcal{E}_{\text{кин}}, \\ \displaystyle\int\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\,dV = \sum e\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}, \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\left[\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV + \sum\mathcal{E}_{\text{кин}}\right] = -\oint_{\partial V}\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{f}. \tag{1.14}$$

И теперь уже естественно разделить левую часть на энергию зарядов, и энергию поля:

$$\mathcal{W} = \frac{E^2+H^2}{8\pi} \ \text{ — \textit{плотность энергии} ЭМ поля,}$$

а также ввести следующую величину:

$$\oint_{\partial V}\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{f} \ \text{ — \textit{поток энергии} ЭМ поля.}$$