Билеты к экзамену по «Аналитической Механике», ФОПФ

Авторы: Хоружий Кирилл
Примак Евгений

От: *18 января 2021 г.*

Содержание

31 Уравнение Лагранжа второго рода . . . 2
32 Разрешимость уравнений Лагранжа . . . 2
33 Изменение полной мехнической энергии голономной системы . . . 2
34 Обобщенный потенциал и первые интегралы лагранжевых систем . . . 3
35 Гамильтонов формализм, уравнения и интеграл Якоби . . . 4
36 Принцип наименьшего действия . . . 6

31 Уравнение Лагранжа второго рода

Def 31.1. *Обобщенная сила* Q_k – величина коэффициента ∂q^k при вариации δA, то есть $\delta A = Q_k \delta q^k$.

Thr 31.2 (Уравнения Лагранжа второго рода)**.** *Каждая механическая система характеризуется определенной функцией* $L(q, \dot{q}, t)$*. Для голономных системы с конфигурационном многообразием степени* n*, верно что*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Где для потенциальных систем $L = T - \Pi$*. В более общем случае можно записать, что*

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} - Q^k\right)\delta q^k = 0, \qquad Q^k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^k}.$$

$\triangle$. Запишем второй закон Ньютона: $(m_i \mathbf{w}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i)\big|_{\cdot\, d\boldsymbol{r}_i}$, где $\boldsymbol{R}_i$ – реакции связи. Хотим записать уравнение в общековариантном виде. То есть мы «замораживаем» время, так чтобы $\boldsymbol{R} \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0$. На таких перемещениях работа реакция связи равна 0.

$$\left[\sum m_i \left(\mathbf{w}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^k}\right) - \left(\boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^k}\right) - \underbrace{\left(\boldsymbol{R}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^k}\right)}_{\cdot \delta q^k \to 0}\right] \cdot \delta q^k = 0;$$

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}\sum \frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q^k}\sum \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum \boldsymbol{F}_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^k}\right]\delta q^k = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \sum_k \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} - Q^k\right]\delta q^k = 0.$$

Проблема остается в неголономных системах, где δq^k не являются независимыми, получается, что уравнения Лагранжа справедливы для голономных систем.

Вспоминая, что

$$\delta A = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = \sum_i \left(\boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q^k}\right)\delta q^k = \sum_k \frac{\delta A_k}{\delta q^k}\delta q^k = Q_k \delta q^k.$$

Тогда пусть $\Pi(q, t)$: $Q^k = -\partial \Pi / \partial q^k$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q^k} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

То есть получили систему уравнений на $2n$ переменных. $\square$

32 Разрешимость уравнений Лагранжа

Подставим разложение кинетической энергии в уравнения Лагранжа, оставив только слагаемые с обобщёнными ускорениями $f_j(q, \dot{q}, t) = a_{jk}\ddot{q}^j$.

$$T = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu^2 = \frac{1}{2}\sum_\nu \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\underbrace{a_{jk}\dot{q}^j \dot{q}^k}_{2T_2} + \underbrace{a_j \dot{q}^j}_{2T_1} + \underbrace{a_0}_{2T_0}\right],$$

где коэффициенты, соответственно, равны

$$a_{jk}(q, t) = \sum_\nu m_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^k}, \qquad a_j(q, t) = \sum_\nu m_\nu \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q^j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}, \qquad a_0 = \sum_\nu m_\nu \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t}\right)^2.$$

Для склерономных систем $\partial \boldsymbol{r}_\nu / \partial t = 0$, соотвественно $T = a_{jk}\dot{q}^j \dot{q}^k$, при чём $a_{jk} \equiv a_{jk}(q)$.

Теперь подставим значение T в уравнения Лагранжа, и получим, что $a_{ik}\ddot{q}^k = f_i$, где $f_1 = f_1(q, \dot{q}, t)$. Уравнений в системе n, причём a_{jk} является положительно определенной формой[1], соответственно невырожденной.

Thr 32.1. *Уравнения Лагранжа второго рода разрешимы относительно обобщенных ускорений*

33 Изменение полной мехнической энергии голономной системы

Пусть есть также непотенциальные силы, часть обобщенных сил, соответстующих непотенциальным силам, обозначим Q_i^*, тогда

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i^*, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i^*.$$

[1] Требует отдельного доказательства.

Найдём производную по времени от кинетической энергии
$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial \dot q^i}\ddot q^i+\frac{\partial T}{\partial q^i}\dot q_i+\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q^i}\dot q^i\right)-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^i}-\frac{\partial T}{\partial q^i}\right)\dot q^i+\frac{\partial T}{\partial t}.$$
По *теореме Эйлера об однороных функциях* для $f(x_1,\ldots,x_n)$ k-й степени верно что
$$\frac{\partial f}{\partial x^i}x^i=kf,\qquad\Rightarrow\qquad \frac{\partial T}{\partial \dot q^i}\dot q^i=2T_2+T_1.$$
В таком случае последнее равенство перепишется, как
$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt}&=\frac{d}{dt}(2T_2+T_1)+\frac{\partial \Pi}{\partial q^i}\dot q^i-Q_i^*\dot q^i+\frac{\partial T}{\partial t}=\\&=\frac{d}{dt}(2T_2+2T_1+2T_0)-\frac{d}{dt}(T_1+2T_0)+\frac{d\Pi}{dt}-\frac{\partial \Pi}{\partial t}-Q_i^*\dot q^i+\frac{\partial T}{\partial t}.\end{aligned}$$
Таким образом мы доказали следующую теорему.

Thr 33.1. *Полная мехническая энергия голономной системы $E=T+\Pi$ изменяется следующим образом:*
$$\frac{dE}{dt}=N^*+\frac{d}{dt}(T_1+2T_0)+\frac{\partial \Pi}{\partial t}-\frac{\partial T}{\partial t}.$$
Где $N^*={Q^*}_i\dot q^i$ – мощность непотенциальных сил.

Def 33.2. Голономная склерономная система с $\Pi\equiv\Pi(q)$ называется *консервативной*, при чём $dE/dt=0$.

Гироскопические силы

Def 33.3. Непотенициальные силы называют *гироскопическими*, если их мощность равна 0.

Пусть ${Q^*}_i=\gamma_{ik}\dot q^k$. Если $\gamma_{ik}=-\gamma_{ki}$, то силы ${Q^*}_i$ гиросокопические, соответсвенно кососимметричность γ_{ik} необходима и достаточна.

Более того, имеет место равенство
$$\sum_\nu \boldsymbol F_\nu\cdot\boldsymbol v_\nu=\sum_\nu \boldsymbol F_\nu\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol r_\nu}{\partial q^i}\dot q^i+\frac{\partial \boldsymbol r_\nu}{\partial t}\right)=\Bigg(\overbrace{\sum_\nu \boldsymbol F_\nu\cdot\frac{\partial \boldsymbol r_\nu}{\partial q^i}}^{Q_i}\Bigg)\dot q^i+\sum_\nu \boldsymbol F_\nu\cdot\frac{\partial \boldsymbol r_\nu}{\partial t},\quad \overset{\partial\vec r_\nu/\partial t=0}{=}\quad \sum_\nu \boldsymbol F_\nu\cdot\boldsymbol v_\nu=Q_i\dot q^i.$$
Поэтому для склерономных систем $N^*=0$ выражается в $\sum_\nu \boldsymbol F_\nu^*\cdot\boldsymbol v_\nu=0$.

Диссипативные силы

Def 33.4. Непотенциальные силы называются диссипативными, если их $N^*\leqslant 0$, но $N^*\not\equiv 0$. При $\Pi=\Pi(q)$ и диссипативности сил $dE/dt\leqslant 0$, тогда система называется диссипативной. В случае определенно-отрицательной $N^*(\dot q)$ дисспация называется *полной*, а в случае знакопостоянной отрицательной N^* *частичной.*

Def 33.5. *Диссипативной функцией Рэлея* называется положительная квадратичная форма R такая, что
$$R=\frac12 b_{ik}\dot q^i\dot q^k,\qquad {Q^*}_i=-\frac{\partial R}{\partial \dot q^i}=-b_{ik}\dot q^k.$$
Тогда для склерономной системы можность N^* непотенциальных сил равна
$$\sum_\nu \boldsymbol F_\nu^*\cdot\boldsymbol v_\nu=Q_i^*\dot q^i=-2R\leqslant 0.$$

34 Обобщенный потенциал и первые интегралы лагранжевых систем

Путь существует функция $V(q,\dot q,t)$ такая, что обобщенные силы Q_i определяются по формулам
$$Q_i=\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot q^i}-\frac{\partial V}{\partial q^i}.$$
Тогда функция V называется обобщенным потенциалом. Действительно, при $L=T-V$ уравнения движения запишутся в той же форме. Дифференцируя по времени выясним, что
$$Q_i=\frac{\partial^2 V}{\partial \dot q^i\partial \dot q^k}\ddot q^k+f_i,$$
где $f_i\equiv f_i(q,\dot q,t)$. Но так как зависимость $Q_i(\ddot q)$ это странно, то
$$V=A_i(q,t)\dot q^i+V_0(q,t).$$

Тогда обобщенные силы

$$Q_i = \frac{dA_i}{dt} - \frac{\partial}{\partial q^i}\left(A_k \dot{q}^k + V_0\right) = -\frac{\partial V_0}{\partial q^i} + \frac{\partial A_i}{\partial t} + \left(\frac{\partial A_i}{\partial q^k} - \frac{\partial A_k}{\partial q^i}\right)\dot{q}^k.$$

Если $\partial A_i/\partial t = 0$, то Q_i складываются из потенциальных $\partial V_0/\partial q_i$ и гироскопических $Q_i^* = \gamma_{ik}\dot{q}^k$, где $\gamma_{ik} = \partial_k A_i - \partial_i A_k$. Если система склерономна и $V_0 \neq V_0(t)$, то $T + V_0$ остается постоянной.

В случае существования обобщенного потенциала L всё так же многочлен второй степени относительно $q,\ \dot{q}$, при чём $L_2 = T_2$, так что уравнения остаются разрешимы относительно обобщенных ускорений.

Натуральные системы

Def 34.1. Системы, в которых силы имеют обычный $\Pi(q_i, t)$ или обобщенный $V(q^i, \dot{q}^i, t)$ потенциал, называются *натуральными*. В таких системах $L = T - \Pi$. Более общие системы $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ не представимы в виде однако при выполнении условия,

$$\det\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k}\right] \neq 0,$$

то есть ненулевого гессиана лагранжиана, уравнения Лагранжа остаются разрешимы относительно обобщенных ускорений.

Первые интегралы

Распространенным

35 Гамильтонов формализм, уравнения и интеграл Якоби

Преобразование Лежандра

Def 35.1. В уравнениях Лагранжа второго рода движения голономной системы в потенциальном поле сил, функция Лагранжа зависит от $q,\ \dot{q},\ t$ – *переменные Лагранжа*. Если в качестве параметров взять $q,\ p,\ t$, где p_i – *обобщенные импульсы*[2], определяемые как $p_i = \partial L/\partial \dot{q}^i$. То получим набор $q,\ p,\ t$ – *переменные Гамильтона*.

В силу невырожденности $\partial L/(\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j) = J_p$, то есть по *теореме о неявной функции* эти равенства разрешимы относительно переменных $\dot{q}^i$. Через преобразование Лежандра естестественно ввести функцию

$$H(q, p, t) = p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}, t), \qquad \dot{q} \equiv \dot{q}(q, p, t).$$

Уравнения Гамильтона

Полный дифференциал функции Гамильтона можем выразить двумя способами:

$$\left.\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial q^i}\, dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\, dp_i + \frac{\partial H}{\partial t}\, dt, \\ dH &= \dot{q}^i\, dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i}\, dq^i - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt. \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{gathered} \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i, \quad \frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial L}{\partial q^i} \end{gathered} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dq^i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^i}. \end{cases}$$

Эти уравнения называются *уравнениями Гамильтона*, или *каноническими уравнениями*.

Физический смысл функции Гамильтона

Пусть система натуральна, тогда $L = L_2 + L_1 + L_0$, и, соответсвенно,

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i - L.$$

По теореме Эйлера об однородных функциях

$$\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i = 2L_2, \qquad \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i = L_1, \quad \Rightarrow \quad H = L_2 - L_0.$$

пусть $T = T_2 + T_1 + T_0$, если силы имеют обычный потенциал Π, то $L_0 = T_0 - \Pi$,

$$H = T_2 - T_0 + \Pi.$$

Если же силы имеют обобщенный потенциал $V = V_1 + V_0$, то $L_0 = T_0 - V_0$, и

$$H = T_2 - T_0 + V_0.$$

[2] Обобщенный импульс p_i – ковектор, а не вектор!

В случае натуральных и склерономных систем $T_1 = T_0 = 0$ и $T = T_2$, тогда $H = T + \Pi$. Т.е. для натуральных склерономных систем с обычным потенциалом сил функция Гамильтона H представляет собой полную механическую энергию.

Интеграл Якоби

Найдём полную производную H по времени,
$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t}.$$
Система называется *обобщенно консервативной*, если $\partial H/\partial t = 0$, т.е $H(q^i, p_i) = h$, собственно, H называют *обобщенной полной энергией*, а поледнее равенство – *обобщенным интегралом энергии*.

Def 35.2. Для натуральной системы с обычным потенциалом сил, если $\partial H/\partial t = 0$, то
$$H = T_2 - T_0 + \Pi = h = \mathrm{const}.$$
Соотноешние, где h – произвольная постоянная, называют *интегралом Якоби*.

Есть и другая формулировка для интеграла Якоби голономной склерономной системы. Действительно, при $\partial L/\partial t = 0$, интеграл Якоби перейдёт в
$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^i = \mathrm{const}.$$

Уравнения Уиттекера

Если $\partial H/\partial t = 0$, то $H(q,p) = h$, где $h = \mathrm{const}$ определяемая из н.у. В $2n$-мерном пространстве $q,\ p$ интеграл Якобми задаёт гиперповерхность, рассмотрим движение с $H = h$.

Такое движение описывается системой с $2n-2$ уравнений, причём она может быть записана в виде канонических уравнений. Пусть $\partial H/\partial p_1 \neq 0$, тогда
$$p_1 = -K(q^1, \ldots, q^n, p_2, \ldots, p_n, h), \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_j = -\dfrac{\partial H}{\partial q^j} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{dq^j}{dq^1} = \frac{\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_j}\right)}{\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_1}\right)}, \quad \frac{dp_j}{dq^1} = -\frac{\left(\dfrac{\partial H}{\partial q^j}\right)}{\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_1}\right)},$$
для $j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n$. Подставляя p_1 получим
$$\frac{\partial H}{\partial q^j} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial q^j} = 0, \qquad (j = 2,\ 3,\ \ldots, n);$$
$$\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial K}{\partial p_j} = 0, \qquad (j = 2,\ 3,\ \ldots, n).$$
Допиливая до надлежащего вида, окончательно находим
$$\frac{dq^j}{dq^1} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \qquad \frac{dp_j}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q^j}, \qquad (j = 2,\ 3,\ \ldots, n).$$
Эти уравнения описывают движения системы при $H = h = \mathrm{const}$, и называются *уравнениями Уиттекера*.

Уравнения Якоби

Уравнения Уиттекера имеют структуру уравнений Гамильтона, соответственно их можно зписать в виде уравнений типа Лагранжа, при гессиане K по p неравным 0. Пусть P – преобразование Лежандра функции K по p_j $(j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$. Тогда
$$P = P(q^2, \ldots, q^n, \tilde{q}^2, \ldots, \tilde{q}^n, q^1, h) = \sum_{j=2}^{n} \tilde{q}^j p_j - K,$$
где $\tilde{q}^j = dq^j/dq^1$. Величины p_j выражаются через $\tilde{q}^2,\ \ldots,\ \tilde{q}_n$ из уравнений
$$\tilde{q}^j = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \qquad (j = 2,\ 3,\ \ldots, n),$$
т.е. из первых $n-1$ уравнений Уиттекера. При помощи функции P эти уравнения могут быть записаны в эквивалентной форме:
$$\frac{d}{dq^1}\frac{\partial P}{\partial q'_j} - \frac{\partial P}{\partial q^j} = 0 \qquad (j = 2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Это уравнения типа Лагранжа, называются *уравнениями Якоби*.

Преобразовывая выражение для P найдём, что

$$P = \sum_{j=2}^{n} q_j \tilde{q}^j + p_1 = \sum_{i=1}^{n} p_1 \tilde{q}_i = \frac{1}{\dot{q}^1} \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i = \frac{1}{\dot{q}^1}(L + H).$$

Тогда в случае консервативной системы $L = T - \Pi$, $H = T + \Pi$, и[3]

$$P = \frac{2T}{\dot{q}^1}, \qquad \Rightarrow \qquad P = 2\sqrt{(h - \Pi)G}.$$

36 Принцип наименьшего действия

Def 36.1. *Действием по Гамильтону* называют функционал вида

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t)\, dt.$$

Переходя к однопараметрическому семейству кривых $\gamma(\alpha, t)$ получим *вариацию действия*

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(\alpha, t), \dot{\gamma}(\alpha, t), t)\, dt, \qquad \delta S = \frac{dS}{d\alpha} \delta\alpha.$$

Thr 36.2 (принцип Гамильтона)**.** *Кривая $\gamma(\alpha, t)$ является экстремалью действия тогда и только тогда, когда является решением уравнений Лагранжа*

$$\delta S = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \gamma(\alpha, t) \in \mathrm{Sol}\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0 \right).$$

$\triangle$. Давайте просто проварьируем Лагранжиан, тогда

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \alpha} \right) \delta\alpha\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \partial q \bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i\, dt = 0.$$

таким образом уравнения Лагранжа выполнены. $\square$

[3] Пара выражений в выводе опущены.