

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

Автор: Хоружий Кирилл

От: 21 сентября 2020 г.

Содержание

1.1 Криволинейные координаты	1
1.2 Кинематика точки	3

1.1 Криволинейные координаты

T1.

Найдём ковариантные и контрвариантные компоненты \mathbf{a} . Учтывая, что тензор однозначно задаётся координатами в некотором базисе:

$$\lceil \mathbf{b} = a^i \mathbf{g}_i \mid \mathbf{g}_j \Rightarrow (\mathbf{b} \cdot \mathbf{g}^j) = a^i (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j) = a^i \delta_i^j = a^j \Rightarrow a^i \mathbf{g}_i = \mathbf{a}.$$

Аналогично

$$\lceil \mathbf{b} = a_i \mathbf{g}^i \mid \mathbf{g}_j \Rightarrow (\mathbf{b} \cdot \mathbf{g}_j) = a_i (\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j) = a_i \delta_j^i = a_j \Rightarrow a_i \mathbf{g}^i = \mathbf{a}.$$

Теперь научимся жонглировать индексами.

$$\lceil \mathbf{b}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j \mid \mathbf{g}^n \Rightarrow g^{ij} \mathbf{g}_j \mathbf{g}^n = g^{ij} \delta_j^n = g^{in} = (\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^n) \Rightarrow \mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j.$$

Для $g_{ij} \mathbf{g}^j = \mathbf{g}_i$ доказательство аналогично. Наконец,

$$\delta_i^j = (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j) = (g_{ik} \mathbf{g}^k \cdot g^{jn} \mathbf{g}_n) = g_{ik} g^{jn} \delta_n^k = g_{ik} g^{kj}.$$

Теперь, для жонглирования над координатой:

$$\lceil \mathbf{a} = a_i \mathbf{g}^i \mid \mathbf{g}_j \Rightarrow a^j = g^{ij} a_i.$$

T2.

Найдём локальный базис/матрицу перехода из ПДСК для $\mathbf{r}(\sigma, \tau, z)$:

$$\mathbf{r}(\sigma, \tau, z) = \begin{pmatrix} \sigma\tau \\ (\tau^2 - \sigma^2)/2 \\ z \end{pmatrix}; \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \tau & \sigma & 0 \\ -\sigma & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad g_{ij} = \mathbf{J}^T \mathbf{J} = \text{diag}(\tau^2 + \sigma^2, \tau^2 + \sigma^2, 1).$$

Зафиксировав значения всех кроме одной переменных найдём координатные линии, затем построим координатные поверхности (см. рис. 1).

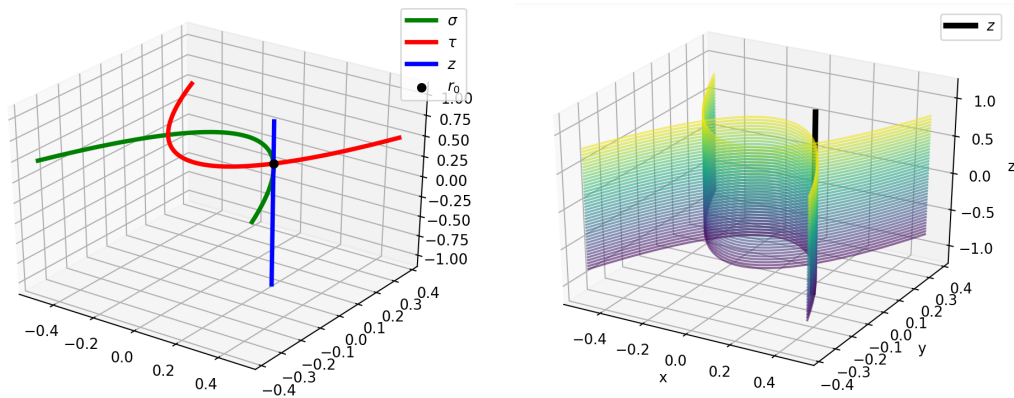


Рис. 1: Координатные линии и координатные поверхности.

Т3.

Найдём метрический тензор g_{ij} для криволинейных координат (r, φ) , задающих положение точки на параболоиде $z = a(x^2 - y^2)$, при $a = \text{const}$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ ar^2 \cos(2\varphi) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \Rightarrow g_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 2ar \cos(2\varphi) \end{pmatrix}; \quad g_\varphi = \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ -2ar^2 \sin(2\varphi) \end{pmatrix}$$

Тогда метрический тензор:

$$\begin{aligned} g_{ii} &= (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_i); \\ g_{11} &= 4a^2 r^2 \cos^2(2\varphi) + \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi); \\ g_{12} &= g_{21} = -2a^2 r^3 \sin(4\varphi); \\ g_{22} &= 4a^2 r^4 \sin^2(2\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi) + r^2 \cos^2(\varphi). \end{aligned}$$

Объединяя,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 16a^2 r^2 \sin^4(\varphi) - 16a^2 r^2 \sin^2(\varphi) + 4a^2 r^2 + 1 & -2a^2 r^3 \sin(4\varphi) \\ -2a^2 r^3 \sin(4\varphi) & -16a^2 r^4 \sin^4(\varphi) + 16a^2 r^4 \sin^2(\varphi) + r^2 \end{pmatrix}.$$

Или,

$$g^{ij} = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-16a^2 r^2 \sin^4(\varphi) + 16a^2 r^2 \sin^2(\varphi) + 1}{4a^2 r^2 + 1} & \frac{2a^2 r \sin(4\varphi)}{4a^2 r^2 + 1} \\ \frac{2a^2 r \sin(4\varphi)}{4a^2 r^2 + 1} & \frac{16a^2 r^2 \sin^4(\varphi) - 16a^2 r^2 \sin^2(\varphi) + 4a^2 r^2 + 1}{4a^2 r^4 + r^2} \end{pmatrix}.$$

Соответственно,

$$\mathbf{g}^r = g^{rr} \mathbf{g}_r + g^{r\varphi} \mathbf{g}_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{(8a^2 r^2 \sin^2(\varphi) + 1) \cos(\varphi)}{4a^2 r^2 + 1} \\ \frac{(8a^2 r^2 \cos^2(\varphi) + 1) \sin(\varphi)}{4a^2 r^2 + 1} \\ \frac{2ar \cos(2\varphi)}{4a^2 r^2 + 1} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{g}^\varphi = g^{\varphi r} \mathbf{g}_r + g^{\varphi\varphi} \mathbf{g}_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{(-8a^2 r^2 \sin^2(\varphi) + 4a^2 r^2 - 1) \sin(\varphi)}{r(4a^2 r^2 + 1)} \\ \frac{(8a^2 r^2 \cos^2(\varphi) - 4a^2 r^2 + 1) \cos(\varphi)}{r(4a^2 r^2 + 1)} \\ -\frac{2a \sin(2\varphi)}{4a^2 r^2 + 1} \end{pmatrix}.$$

На всякий случай проверим в *SymPy*, что

$$\mathbf{g}_r \mathbf{g}^r = 1; \quad \mathbf{g}_\varphi \mathbf{g}^\varphi = 1; \quad \mathbf{g}_r \mathbf{g}^\varphi = 0; \quad g^{ij} g_{ji} = \delta_i^j.$$

Вот.

Т4.

Пусть $R = x^2 + y^2 + z^2$, найдём частную производную $\partial R / \partial x$ тогда

1. $R(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$ $\partial R / \partial x = 2x.$
2. $R(x, r, z) = r^2 + z^2.$ $\partial R / \partial x = 0.$
3. $R(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 - y^2)^2.$ $\partial R / \partial x = 2x + 4x(x^2 - y^2).$
4. $R(x, r) = r^2 + (x^2 - y^2)^2 = r^2 + (2x^2 - r^2)^2.$ $\partial R / \partial x = 16x^3 - 8xr^2.$
5. $R(x, z) = x^2 + (x^2 - z) + z^2 = 2x^2 - z + z^2.$ $\partial R / \partial x = 4x.$

Т5.

Для первого выражения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}^j}{\partial q^k} &= \frac{\partial g^{ij}}{\partial q^k} \mathbf{g}_i + \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial q^k} g^{ij}; \\ g_i \frac{\partial (\mathbf{g}^j \cdot \mathbf{g}^i)}{\partial q^k} &= \delta_i^j \frac{\partial \mathbf{g}^j}{\partial q^k} + \frac{\partial \mathbf{g}^i}{\partial q^k} \delta_i^j = 2 \frac{\partial \mathbf{g}^j}{\partial q^k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 \left(\mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{g}^j}{\partial q^k} \right) + \Gamma_{ijk} g^{ij} = \left(\mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{g}^j}{\partial q^k} \right) \Rightarrow (1) = -\Gamma_{ijk} g^{ij}. \quad (1.1)$$

Для второго выражения рассмотрим значение квадрата произведения при фиксированных $i \neq j \neq k$:

$$\underbrace{(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k)^2}_{\det g_{mn}} \cdot \underbrace{(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}^k)^2}_{\det g^{nk}} = \det g_{mn} g^{np} = \det \delta_m^p = 1. \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k) \cdot (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}^k) = 3! = 6.$$

Важно заметить, что -1 не является возможным значением произведения таких смешанных произведений, т.к. левой тройке в первом сомножителе будет соответствовать тройка во втором сомножителе.

1.2 Кинематика точки

1.12*

Параметризуем движение точки некоторым $\varphi(t)$:

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -a\dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} = b\dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -a\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - a\ddot{\varphi} \sin \varphi = 0 \\ \ddot{y} = -b\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + b\ddot{\varphi} \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi = 0. \quad (1.2)$$

Решением этого уравнения является

$$\varphi(t) = \arccos(c_1 + c_2 t).$$

С учётом начальных условий получим $(x(0) = 0, \dot{x} = 0)$, что

$$\dot{\varphi} c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{v_0}{a}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \arccos(v_0 t / a).$$

Немного упростим выражения для $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = -\frac{v_0}{a \sin \varphi}, \quad \ddot{\varphi} = -\frac{\dot{\varphi}^2}{\operatorname{tg} \varphi},$$

теперь найдём $\ddot{y}(\sin \varphi)$:

$$\ddot{y} = -b\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + v\ddot{\varphi} \cos \varphi = -b\frac{v_0^2}{a^2 \sin^2 \varphi} \sin \varphi - b\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi \operatorname{tg} \varphi} = -\frac{b}{a^2} v_0^2 \left(\frac{1}{\sin \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^3 \varphi} \right) = -\frac{b}{a^2} v_0^2 \frac{1}{\sin^3 \varphi}.$$

Подставив $y = b \sin \varphi$, найдём

$$\ddot{y} \left(y = \frac{b}{2} \right) = -\frac{8b}{a^2} v_0^2.$$

1.19

Знаем, что в полярных координатах

$$\begin{cases} r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \\ r^2 \dot{\varphi} = c = \text{const} \end{cases} \quad \text{в полярных координатах} \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}. \quad (1.3)$$

Вспомним, что

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}).$$

Найдём \ddot{r} :

$$r + er \cos \varphi = p \xrightarrow{d/dt} \dot{r} + e\dot{r} \cos \varphi - er\dot{\varphi} \sin \varphi = 0 \xrightarrow{d/dt} \ddot{r}(1 + e \cos \varphi) - e\dot{r} \sin \varphi \left(\dot{\varphi} - \frac{c}{r^2} \right) - \frac{ec}{r} \frac{c}{r^2} \cos \varphi = 0$$

Выразим и подставим $\dot{\varphi}$ и получим

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}, \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = \frac{c^2}{r^2 p} \left(\frac{p}{r} - 1 \right), \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_r = -\frac{c^2}{pr^2}, \quad w_\varphi = 0.}$$

1.37(в)

Найдём скорость точки и проекции её ускорения на касательные к координатным линиям для координат параболического цилиндра σ, τ, z . Для начала найдём координатные векторы и метрический тензор:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma \tau \\ \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2) \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{g}_\sigma = \begin{pmatrix} \tau \\ -\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{g}_\tau = \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{g}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} \tau^2 + \sigma^2 & 0 \\ 0 & \tau^2 + \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$v^2 = \dot{\sigma}^2(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{\tau}^2(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{z}^2, \quad v = \sqrt{(\dot{\tau}^2 + \dot{\sigma}^2)(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{z}^2}$$

Для i -ой ковариантной координаты ускорения верно, что

$$w_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i}. \quad (1.4)$$

С учётом коэффициенты Ламе ($H_\tau = H_\sigma = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$, $H_z = 1$), найдём проекции

$$\begin{aligned} w_\tau &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} (\ddot{\tau}(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{\tau}^2 \tau + 2\dot{\sigma}\dot{\tau}\sigma - \tau\dot{\sigma}^2); \\ w_\sigma &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} (\ddot{\sigma}(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{\sigma}^2 \sigma + 2\dot{\sigma}\dot{\tau}\tau - \sigma\dot{\tau}^2); \\ w_z &= \ddot{z}. \end{aligned}$$

1.45

Выразим орты сопровождающий трехгранника $(\dot{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ через \mathbf{v} и \mathbf{w} , с учётом $\mathbf{w} \times \mathbf{v} \neq 0$, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} > 0$. Так как $\mathbf{v} \nparallel \mathbf{w}$, то

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|}.$$

Выразим $\boldsymbol{\tau}$.

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = v\boldsymbol{\tau}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{v}}{v}.$$

И найдём $\mathbf{n} = [\mathbf{b} \times \boldsymbol{\tau}]$, раскрывая двойное векторное произведение (формула Лагранжа), получим

$$\mathbf{n} = \left[\frac{\mathbf{v}}{v} \times \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|} \right] = \frac{(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} - v^2 \mathbf{w}}{v|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|}.$$

Т6.

Рассмотрим движение точки в цилиндрических координатах:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \text{diag}(1, r^2, 1)$$

Для начала выразим ковариантные координаты ускорений:

$$w_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ w_\varphi = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) \\ w_z = \ddot{z}. \end{cases}$$

По условию хотим, чтобы $w_\varphi = w_z = 0$, $r = \text{const}$. Проинтегрировав дважды по времени получим систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi = c_1 t + c_2; \\ z = c_3 t + c_4, \end{cases}$$

Где c_1, c_2, c_3, c_4 — некоторые константы. Построим полученные траектории положив $c_2 = c_4 = 0$ и отмасштабировав к $c_1 = 1$ (см. рис. (2)).

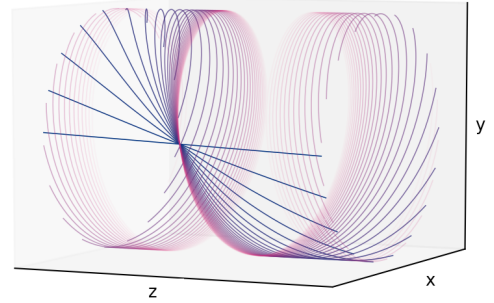


Рис. 2: Возможные геодезические цилиндра.

Т7.

Найдём $\partial v_k / \partial v_j$, при $v_k = v_k(q^i, v^i)$. Далее будем пользоваться тем, что $g_{ig} = g_{ig}(q^i)$.

$$v_k(q^i, v^i) = g_{ki} v^i \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_k}{\partial v^j} = g_{ki} \frac{\partial v^i}{\partial v^j} = g_{ki} \delta_j^i = g_{kj}.$$

Теперь найдём $\partial v_k / \partial q^j$, при $v_k = v_k(q^i, v^i)$.

$$\frac{\partial v_k(q^i, v^i)}{\partial q^j} = v^i \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} \right) = v^i \left(\left(\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial q^j}, \mathbf{g}_i \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial q^j}, \mathbf{g}_k \right) \right) = v^i (\Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji}).$$

Теперь найдём $\partial v_k / \partial q^j$, при $v_k = v_k(q^i, v_i)$. Но тут так как функция выражается через саму себя, то при частном дифференцировании, $v_k = \text{const}$, тогда $\partial v_k(q^i, v_i) / \partial q^j = 0$.

T8.*

Найдём $v_i \dot{v}^i - v^i \dot{v}_i$. Перейдём к контравариантным координатам:

$$v_i \dot{v}^i - v^i \dot{v}_i = g_{ij} v^i v^j - v^i \frac{d}{dt} (g_{ij} v^j) = g_{ij} v^j \dot{v}^i - v^i v^j \dot{g}_{ij} - g_{ij} v^i \dot{v}^j$$

В силу симметричности метрического тензора $g_{ij} = g_{ji}$, получим, что

$$v_i \dot{v}^i - v^i \dot{v}_i = -v^i v^j \dot{g}_{ij}.$$

Подставил для параболических и полярных координат, сходится.