Первое задание по курсу «Аналитическая Механика»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *19 сентября 2020 г.*

Содержание

1.1 Криволинейные координаты

T1.

Найдём ковариинные и контрвариантные компоненты $\boldsymbol{a}$. Учитывая, что тензор однозначно задаётся координатами в некотором базисе:

$$\sqsupset \boldsymbol{b} = a^i \boldsymbol{g}_i \ \Big|_{\cdot \boldsymbol{g}^j} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{g}^j) = a^i(\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j) = a^i\delta_i^j = a^j \quad \Rightarrow \quad a^i\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{a}.$$

Аналогично

$$\sqsupset \boldsymbol{b} = a_i \boldsymbol{g}^i \ \Big|_{\cdot \boldsymbol{g}_j} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{g}_j) = a_i(\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_j) = a_i\delta^i_j = a_j \quad \Rightarrow \quad a_i\boldsymbol{g}^i = \boldsymbol{a}.$$

Теперь научимся жонглировать индексами.

$$\sqsupset \boldsymbol{b}^i = g^{ij}\boldsymbol{g}_j \ \Big|_{\cdot \boldsymbol{g}^n} \quad \Rightarrow \quad g^{ij}\boldsymbol{g}_g\boldsymbol{g}^n = g^{ij}\delta_j^n = g^{in} = (\boldsymbol{k}^i\cdot\boldsymbol{g}^n) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g}^i = g^{ij}\boldsymbol{g}_j.$$

Для $g_{ij}\boldsymbol{g}^j = \boldsymbol{g}_i$ доказательство аналогично. Наконец,

$$\delta_i^j = (\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j) = \left(g_{ik}\boldsymbol{g}^k \cdot g^{jn}\boldsymbol{g}_n\right) = g_{ik}g^{jn}\delta_n^k = g_{ik}g^{kj}.$$

Теперь, для жонглирования над координатой:

$$\sqsupset \boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{g}^i \ \Big|_{\cdot \boldsymbol{g}^j} \quad \Rightarrow \quad a^j = g^{ij}a_i.$$

T2.

Найдём локальный базис/матрицу перехода из ПДСК для $\boldsymbol{r}(\sigma,\tau,z)$:

$$\boldsymbol{r}(\sigma,\tau,z) = \begin{pmatrix} \sigma\tau \\ (\tau^2-\sigma^2)/2 \\ z \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \tau & \sigma & 0 \\ -\sigma & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad g_{ij} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}(\tau^2+\sigma^2, \tau^2+\sigma^2, 1).$$

Зафиксировав значения всех кроме одной переменных найдём координатные линии, затем построим координатные поверхности (см. рис. 1).

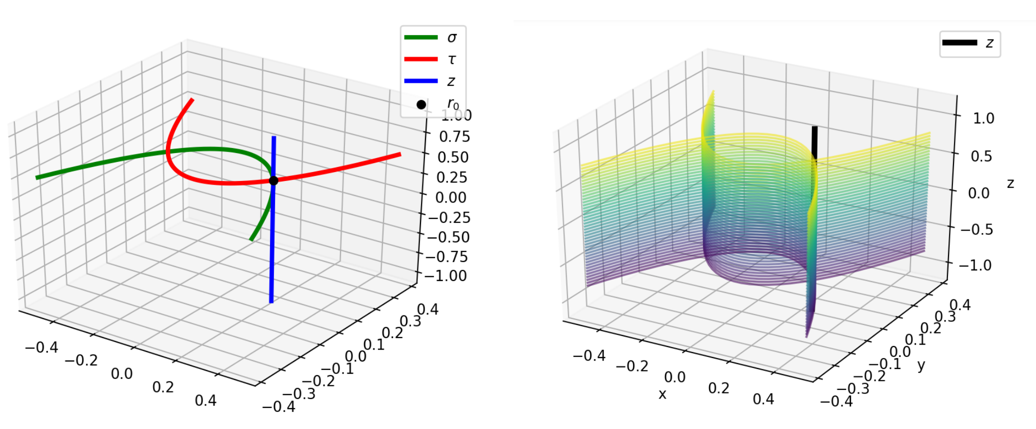

Рис. 1: Координатные линии и координатные поверхности.

T3.

Найдём метрический тензор g_{ij} для криволинейных координат (r,φ), задающих положение точки на параболоиде $z=a(x^2-y^2)$, при $a=\mathrm{const}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

$$\boldsymbol{r}=\begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\\ r\sin(\varphi)\\ ar^2\cos(2\varphi)\end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{g}_i=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}\quad\Rightarrow\quad g_r=\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\\ 2ar\cos(2\varphi)\end{pmatrix};\quad g_\varphi=\begin{pmatrix}-r\sin(\varphi)\\ r\cos(\varphi)\\ -2ar^2\sin(2\varphi)\end{pmatrix}$$

Тогда метрический тензор:

$$\begin{aligned} &g_{ig}=(\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j);\\ &g_{11}=4a^2r^2\cos^2(2\varphi)+\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi);\\ &g_{12}=g_{21}=-2a^2r^3\sin(4\varphi);\\ &g_{22}=4a^2r^4\sin^2(2\varphi)+r^2\sin^2(\varphi)+r^2\cos^2(\varphi).\end{aligned}$$

Объединяя,

$$g_{ij}=\begin{pmatrix}16a^2r^2\sin^4(\varphi)-16a^2r^2\sin^2(\varphi)+4a^2r^2+1 & -2a^2r^3\sin(4\varphi)\\ -2a^2r^3\sin(4\varphi) & -16a^2r^4\sin^4(\varphi)+16a^2r^4\sin^2(\varphi)+r^2\end{pmatrix}.$$

Или,

$$g^{ij}=(g_{ij})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-16a^2r^2\sin^4(\varphi)+16a^2r^2\sin^2(\varphi)+1}{4a^2r^2+1} & \frac{2a^2r\sin(4\varphi)}{4a^2r^2+1}\\ \frac{2a^2r\sin(4\varphi)}{4a^2r^2+1} & \frac{16a^2r^2\sin^4(\varphi)-16a^2r^2\sin^2(\varphi)+4a^2r^2+1}{4a^2r^4+r^2}\end{pmatrix}.$$

Соответсвенно,

$$\boldsymbol{g}^r=g^{rr}g_r+g^{r\varphi}g_\varphi=\begin{pmatrix}\frac{\left(8a^2r^2\sin^2(\varphi)+1\right)\cos(\varphi)}{4a^2r^2+1}\\ \frac{\left(8a^2r^2\cos^2(\varphi)+1\right)\sin(\varphi)}{4a^2r^2+1}\\ \frac{2ar\cos(2\varphi)}{4a^2r^2+1}\end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{g}^\varphi==g^{\varphi r}g_r+g^{\varphi\varphi}g_\varphi=\begin{pmatrix}\frac{\left(-8a^2r^2\sin^2(\varphi)+4a^2r^2-1\right)\sin(\varphi)}{r(4a^2r^2+1)}\\ \frac{\left(8a^2r^2\cos^2(\varphi)-4a^2r^2+1\right)\cos(\varphi)}{r(4a^2r^2+1)}\\ -\frac{2a\sin(2\varphi)}{4a^2r^2+1}\end{pmatrix}.$$

На всякий случай проверим в *SymPy*, что

$$\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}^r=1;\qquad \boldsymbol{g}_\varphi\boldsymbol{g}^\varphi=1;\qquad \boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}^\varphi=0;\qquad g^{ij}g_{ji}=\delta^j_i.$$

Вот.

T4.

Пусть $R=x^2+y^2+z^2$, найдём частную производную $\partial R/\partial x$тогда

1. $R(x,y,z)=x^2+y^2+z^2.$ $\quad\partial R/\partial x=2x.$
2. $R(x,r,z)=r^2+z^2.$ $\quad\partial R/\partial x=0.$
3. $R(x,y)=x^2+y^2+(x^2-y^2)^2.$ $\quad\partial R/\partial x=2x+4x(x^2-y^2).$
4. $R(x,r)=r^2+(x^2-y^2)^2=r^2+(2x^2-r^2)^2.$ $\quad\partial R/\partial x=16x^3-8xr^2.$
5. $R(x,z)=x^2+(x^2-z)+z^2=2x^2-z+z^2.$ $\quad\partial R/\partial x=4x.$

T5.

Для первого выражения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial q^k}&=\frac{\partial g^{ig}}{\partial q^k}\boldsymbol{g}_i+\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial q^k}g^{ig};\\ \boldsymbol{g}_i\frac{\partial(\boldsymbol{g}^j\cdot\boldsymbol{g}^i)}{\partial q^k}&=2\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial q^k}\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{g}_i=2\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial q^k}\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad 2\left(\boldsymbol{g}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial q^k}\right)+\Gamma_{ijk}=\left(\boldsymbol{g}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{g}^i}{\partial q^k}\right)\quad\Rightarrow\quad(1)=-\Gamma_{ijk}g^{ij}.\tag{1.1}$$

Для второго выражения рассмотрим значение квадрата произведения при фиксированных $i\neq j\neq k$:

$$\underbrace{(\boldsymbol{g}_i,\boldsymbol{g}_j,\boldsymbol{g}_k)^2}_{\det g_{mn}}\cdot\underbrace{(\boldsymbol{g}^i,\boldsymbol{g}^j,\boldsymbol{g}^k)^2}_{\det g^{nk}}=\det g_{mn}g^{np}=\det\delta^p_m=1.\qquad\Rightarrow\qquad(\boldsymbol{g}_i,\boldsymbol{g}_j,\boldsymbol{g}_k)\cdot(\boldsymbol{g}^i,\boldsymbol{g}^j,\boldsymbol{g}^k)=3!=6.$$

Важно заметить, что -1 не является возможным значением произведения таких смешанных произведений, т.к. левой тройке в первом сомножители будет соответствовать тройка во втором сомножителе.

1.2 Кинематика точки

1.12*

Параметризуем движение точки некоторым $\varphi(t)$:

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -a\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y} = b\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -a\dot{\varphi}^2\cos\varphi - a\ddot{\varphi}\sin\varphi = 0 \\ \ddot{y} = -b\dot{\varphi}^2\sin\varphi + b\ddot{\varphi}\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}\,\mathrm{tg}\,\varphi = 0. \tag{1.2}$$

Решением этого уравнения является

$$\varphi(t) = \arccos(c_1 + c_2 t).$$

С учётом начальных условий получим ($x(0) = 0$, $\dot{x} =$), что

$$\dot{\varphi}c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{v_0}{a}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \arccos(v_0 t/a).$$

Немного упростим выражения для $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = -\frac{v_0}{a\sin\varphi}, \quad \ddot{\varphi} = -\frac{\dot{\varphi}^2}{\mathrm{tg}\,\varphi},$$

теперь найдём $\ddot{y}(\sin\varphi)$:

$$\ddot{y} = -b\dot{f}\sin\varphi + v\ddot{\varphi}\cos\varphi = -b\frac{v_0^2}{a^2\sin^2\varphi}\sin\varphi - b\left(\frac{v_0}{a}\right)^2\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi} = -\frac{b}{a^2}v_0^2\left(\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{\sin^3\varphi}\right) = -\frac{b}{a^2}v_0^2\frac{1}{\sin^3\varphi}.$$

Подставив $y = b\sin\varphi$, найдём

$$\ddot{y}\left(y = \frac{b}{2}\right) = -\frac{8b}{a^2}v_0^2.$$

1.19

Знаем, что в полярных координатах

$$\begin{cases} r = \dfrac{p}{1 + e\cos\varphi} \\ r^2\dot{\varphi} = c = \mathrm{const} \end{cases} \quad \text{в полярных координатах} \quad \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}. \tag{1.3}$$

Вспомним, что

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = \frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right).$$

Найдём $\ddot{r}$:

$$r + er\cos\varphi = p \overset{d/dt}{\Rightarrow} \dot{r} + e\dot{r}\cos\varphi - er\dot{\varphi}\sin\varphi = 0 \overset{d/dt}{\Rightarrow} \ddot{r}(1 + e\cos\varphi) - e\dot{r}\sin\varphi\left(\dot{\varphi} - \frac{c}{r^2}\right) - \frac{ec}{r}\frac{c}{r^2}\cos\varphi = 0$$

Выразим и подставим $\dot{\varphi}$ и получим

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}, \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = \frac{c^2}{r^2 p}\left(\frac{p}{r} - 1\right), \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_r = -\frac{c^2}{pr^2}, \quad w_\varphi = 0.}$$

1.37(в)

Найдём скорость точки и проекции её ускорения на касательные к координатным линиям для координат параболического цилиндра σ, τ, z. Для начала найдём координатные векторы и метрический тензор:

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\tau \\ \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2) \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g}_\sigma = \begin{pmatrix} \tau \\ -\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{g}_\tau = \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{g}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} \tau^2 + \sigma^2 & 0 & \\ 0 & \tau^2 + \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$v^2 = \dot{\sigma}^2(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{\tau}^2(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{z}^2, \quad v = \sqrt{(\dot{\tau}^2 + \dot{\sigma}^2)(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{z}^2}$$

Для i-ой ковариантной координаты ускорения верно, что

$$w_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial(v^2/2)}{\partial\dot{q}^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i}. \tag{1.4}$$

С учётом коэффициенты Ламе ($H_\tau = H_\sigma = \sqrt{\sigma^2+\tau^2}, H_z = 1$), найдём проекции

$$\begin{aligned} w_\tau &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\left(\ddot{\tau}(\tau^2+\sigma^2) + \dot{\tau}^2\tau + 2\dot{\sigma}\dot{\tau}\sigma - \tau\dot{\sigma}^2\right); \\ w_\sigma &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\left(\ddot{\sigma}(\tau^2+\sigma^2) + \dot{\sigma}^2\sigma + 2\dot{\tau}\dot{\sigma}\tau - \sigma\dot{\tau}^2\right); \\ w_z &= \ddot{z}. \end{aligned}$$

1.45

Выразим орты сопровождающий трехгранника $(\dot{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ через $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$, с учётом $w \times \boldsymbol{v} \neq 0$, $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{v} > 0$. Так как $\boldsymbol{v} \nparallel \boldsymbol{w}$, то

$$\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|}.$$

Выразим $\boldsymbol{\tau}$.

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}, \qquad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = v\dot{\tau}, \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{v}}{v}.$$

И найдём $\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\tau}]$, раскрывая двойное векторное произведение (формула Лагранжа), получим

$$\boldsymbol{n} = \left[\frac{\boldsymbol{v}}{v}\times\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|}\right] = \frac{(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v} - v^2\boldsymbol{w}}{v|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|}.$$

T6.

Рассмотрим движение точки в цилиндрических координатах:

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad g_{ij} = \operatorname{diag}(1, r^2, 1)$$

Для начала выразим ковариантные координаты ускорений:

$$w_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial(v^2/2)}{\partial q\delta^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i} \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{aligned} & w_r = \ddot{r} - r\dot{f}^2 \\ & w_\varphi = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) \\ & w_z = \ddot{z}. \end{aligned}\right.$$

По условию хотим, чтобы $w_\varphi = w_z = 0, r = \text{const}$. Проинтегрировав дважды по времени получим систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi = c_1 t + c_2; \\ z = c_3 t + c_4, \end{cases}$$

Где c_1, c_2, c_3, c_4 –некоторые константы. Построим полученные траектории положив $c_2 = c_4 = 0$ и отмасштабировав к $c_1 = 1$ (см. рис. (2)).

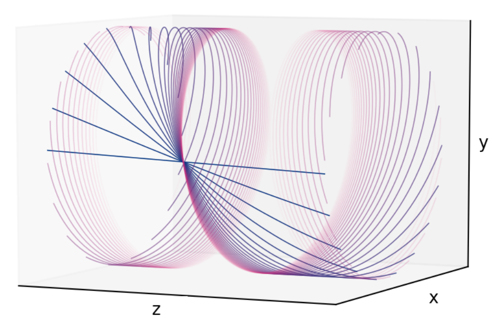

Рис. 2: Возможные геодезические цилиндра.

T7.

Найдём $\partial v_k/\partial v_j$, при $v_k = v_k(q^i, v^i)$. Далее будем пользоваться тем, что $g_{ig} = g_{ig}(q^i)$.

$$v_k(q^i, v^i) = g_{ki}v^i \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial v_k}{\partial v^j} = g_{ki}\frac{\partial v^i}{\partial v^j} = g_{ki}\delta^i_j = g_{kj}.$$

Теперь найдём $\partial v_k/\partial q^j$, при $v_k = v_k(q^i, v^i)$.

$$\frac{\partial v_k(q^i, v^i)}{\partial q^j} = v^i\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j}\right) = v^i\left(\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial q^j}, \boldsymbol{g}_i\right) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial q^j}, \boldsymbol{g}_k\right)\right) = v^i\left(\Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji}\right).$$

Теперь найдём $\partial v_k/\partial q^j$, при $v_k = v_k(q^i, v_i)$. Но тут так как функция выражается через саму себя, то при частном дифференцировании, $v_k = \text{const}$, тогда $\partial v_k(q^i, v_i)/\partial q^j = 0$.

T8.*

Найдём $v_i\dot{v}^i - v^i\dot{v}_i$. Перейдём к контравариантным координатам:

$$v_i\dot{v}^i - v^i\dot{v}_i = g_{ij}v^i v^j - v^i\frac{d}{dt}\left(g_{ij}v^j\right) = g_{ij}v^j\dot{v}^i - v^i v^j\dot{g}_{ij} - g_{ij}v^i\dot{v}^j$$

В силу симметричности метрического тензора $g_{ij} = g_{ji}$, получим, что

$$v_i\dot{v}^i - v^i\dot{v}_i = -v^i v^j\dot{g}_{ij}.$$

Подставил для параболических и полярных координат, сходится.