Заметки курса «Аналитическая Механика»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *19 сентября 2020 г.*

Содержание

2 Кинематика точки **1**
2.1 Естественный трёхгранник . . . 1
2.2 Компоненты скорости и ускорения . . . 1

3 Кинематика твердого тела **2**

4 Задачи с семинара **3**
4.1 Задачи с II семинара . . . 3
4.2 Задачи с III семинара . . . 4

2 Кинематика точки

Пусть $\boldsymbol{r}(t), t \in \mathbb{R}$ – движение точки и траектория движения.

Def 2.1.

$$\textit{Скорость}: \quad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}; \qquad \textit{ускорение}: \quad \boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}. \tag{2.1}$$

2.1 Естественный трёхгранник

Из геометрии $\exists s(t)$ – длина кривой. Тогда

$$\boldsymbol{v} = \underbrace{\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}}_{\boldsymbol{\tau}}\frac{ds}{dt} = v\boldsymbol{\tau}. \tag{2.2}$$

Дифференцируя (2.2)

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\boldsymbol{\tau} + v\underbrace{\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}}_{\boldsymbol{n}/\rho}\frac{ds}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{w_\tau}} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{w_n}}. \tag{2.3}$$

где $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ – базис, преследующий точку.

2.2 Компоненты скорости и ускорения

Есть локальный базис. Тогда компоненты скорости

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i\boldsymbol{g}_i = v^i\boldsymbol{g}_i \quad \Rightarrow \quad v^i = \dot{q}^i. \tag{2.4}$$

Для компоненты ускорения:

$$w_i = (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{g}_i) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}_i) - (\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{g}_i}{dt}).$$

Но, во-первых:

$$\frac{d\boldsymbol{g}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial q^i}.$$

Во-вторых:

$$\boldsymbol{v} = \dot{g}^i\boldsymbol{g}_i \;\Big|\frac{\partial}{\partial\dot{q}^k} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\dot{q}^k} = \frac{\partial}{\partial\dot{q}^k}(\underbrace{\dot{g}^1\boldsymbol{g}_1}_{0} + \underbrace{\dot{g}^2\boldsymbol{g}_2}_{\boldsymbol{g}_2} + \underbrace{\dot{g}^3\boldsymbol{g}_3}_{0}) = \boldsymbol{g}_k \tag{2.5}$$

Тогда

$$w_i = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}^i}) - (\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}^i}) = \frac{d}{dt}\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial \dot{q}^i}\frac{1}{2} - \frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial \dot{q}^i}\frac{1}{2} = \frac{d}{dt}\frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i} \quad\Rightarrow\quad \boxed{mw_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i}} \tag{2.6}$$

3 Кинематика твердого тела

Def 3.1. *Твёрдым телом* назовём множество такое, что

$$\forall i, j, t: \quad |\boldsymbol{r}_i(t) - \boldsymbol{r}_j(t)| = \text{const}.$$

Точка O это полюс. Во-первыхх перенесем начало координат в O. Введём систему координат $O_{\xi\nu\zeta}$ связанную с телом, – тело относительно неё не движется.

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OA},\ \boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{OA} = \text{const в } O_{\xi\nu\zeta}, \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{r}(t) = R(t)\boldsymbol{\rho}.$$

Проведём два вектора $\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{r}_O$:

$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + R(t)\boldsymbol{\rho} \quad \overset{d/dt}{\Rightarrow} \quad \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \dot{R}\rho = \boldsymbol{v}_O + \dot{R}R^{-1}\boldsymbol{r}$$

но,

$$RR^{\mathrm{T}} = E, \dot{R}R^{\mathrm{T}} + R\dot{R}^{\mathrm{T}} = 0, \dot{R}R^{\mathrm{T}} = -R\dot{R}^{\mathrm{T}}, (\dot{R}R^{-1})^{\mathrm{T}} = -\dot{R}R^{-1}.$$

То есть $\dot{R}R^{-1}$ кососимметрична. Тогда пусть

$$\dot{R}R^{-1} = \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & w_y \\ w_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда можно ввести некоторый оператор, а-ля *угловая скорость*[1], и получить

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \quad - \quad \textbf{формула Эйлера}.$$

Следствие 1

$$\boldsymbol{v}_A = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a}, \quad \text{при условии } a = \text{const}$$

Следствие 2

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_A &= \boldsymbol{w}_O + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \\ \boldsymbol{w}_A &= \boldsymbol{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \quad - \quad \textbf{формула Ривальса}, \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{w}/dt$ – *угловое ускорение.*

Точка:	$\boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^3$,	$n = 3$	Твёрдое тело:	$\boldsymbol{r}, R \in \mathbb{R}^3\times SO(3)$,	$n = 6$
		$\boldsymbol{v}$			$\boldsymbol{\omega}$
		$\boldsymbol{w}$			$\boldsymbol{\varepsilon}$

[1] Определение?

4 Задачи с семинара

4.1 Задачи с II семинара

О геодезических на гиперболоиде.

Уравнение гиперболоида – $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Def 4.1. *Геодезическая* – линия в пространстве, по которой движется точка при нулевых компонентах ускорения в локальном базисе, задающем касательное пространство.

$$w_i = (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{g}_i) = 0.$$

Пусть $q = \{\varphi, h = z\}$, тогда $z^y + y^2 = 1 + h^2$. Тогда

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x = \sqrt{1+h^2}\cos\varphi \\ y = \sqrt{1+h^2}\sin\varphi \\ z = h \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{g}_\varphi = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = \sqrt{1+h^2}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{g}_h = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial h} = \begin{pmatrix} h/\sqrt{1+h^2}\cdot\cos\varphi \\ h/\sqrt{1+h^2}\cdot\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Метрический тензор

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1+h^2 & 0 \\ 0 & \frac{1+2h^2}{1+h^2} \end{pmatrix}.$$

Найдём v:

$$v^2 = g_{ji}v^i v^j = (1+h^2)\dot\varphi^2 + \frac{1+2h^2}{1+h^2}\dot h^2.$$

Теперь можно домножить на dt^2 и найти коэффициенты, с которыми учитываем расстояния. То есть

$$ds^2 = g_{ij}\,dq^i\,dq^j \tag{4.1}$$

Для ускорений:

$$\begin{aligned} w_\varphi &= \frac{d}{dt}\left[(1+h^2)\dot\varphi\right] = 0; \\ w_h &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1+2h^2}{1+h^2}h\right] - h\dot\varphi^2 - \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1+2h^2}{1+h^2}\right)\frac{\dot h^2}{2} = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\left.\begin{aligned} w_\varphi = 0 \\ w_h = 0 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad w_\tau = 0 \quad\Rightarrow\quad v^2 = \text{const}, \quad \daleth v^2 = 1.$$

Ну, тогда перейдём к

$$\left.\begin{aligned} w_\varphi = 0 \\ w_h = 0 \end{aligned}\right\} \quad\Leftrightarrow\quad \left.\begin{aligned} w_\varphi = 0 \\ v^2 = 1 \end{aligned}\right\} \text{ т.к. } w_\tau v = 0 = (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}) = w_i v^i = (w_\varphi\dot\varphi + w_h\dot h) = w_h\dot h \Rightarrow \left[\begin{aligned} \dot h = 0 \\ w_h = 0 \end{aligned}\right.$$

Так перейдём к уравнению

$$\frac{c^2}{1+h^2} + \frac{1+2h^2}{1+h^2}\dot h^2 = 1 \quad\Rightarrow\quad \dot h^2 = \frac{1+h^2-c^2}{1+2h^2}.$$

И сменим параметризацию $h(t) \to h(\varphi)$.

$$\frac{dh}{d\varphi} = \frac{\dot h}{\dot\varphi} = \frac{1+h^2}{c}\sqrt{\frac{1+h^2-c^2}{1+2h^2}}.$$

Получили двухпараметрическое[2] семейство геодезических.

Посмотрим на частные случаи. Например, $h == h_0$. Тогда[3] $w_h = 0 \Leftrightarrow h_0 = 0$, $c = \pm 1$. Или, $c = 1/\sqrt{2} \Rightarrow dh/d\varphi = 1 + h^2$. Тогда $h = \operatorname{tg}\varphi$.

[2] Потому что константа интегрирования.
[3] Проверить!

4.2 Задачи с III семинара

✗Задача 4.10

Диск катится без проскальзывания.

$$\underbrace{\boldsymbol{v}_B}_{=0} = \underbrace{\boldsymbol{v}_O}_{=0} + \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{OB} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} || \overrightarrow{OB}.$$

Также

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{BC}$$
$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OC}.$$