Решение задачи

Составим матрицу C, записав в её столбцах координаты векторов f_1, f_2, f_3:

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель этой матрицы

$$\det C = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{(2+1)} \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -8.$$

Так как $\det C \neq 0$, то векторы $\boldsymbol{f}_1,\ \boldsymbol{f}_2,\ \boldsymbol{f}_3$ линейно независимы, а потому могут быть приняты в качестве базиса в $\mathbb{R}^3$. Матрица C невырождена, а потому имеет обратную C^{-1}. Найдём её:

$$A_1^1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix},\ A_1^2 = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix},\ A_1^3 = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix},\ A_2^1 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix},\ \ A_2^2 = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix};$$

$$A_2^3 = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},\ A_3^1 = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix},\ A_3^2 = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix},\quad A_3^3 = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Таким образом находим обратную матрицу

$$C^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -3 & -7 & -1 \\ -7 & -11 & -5 \end{pmatrix}.$$

В таком случае новые координаты $y_1,\ y_2,\ y_3$ вектора $\boldsymbol{x}$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -3 & -7 & -1 \\ -7 & -11 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3-10+21 \\ 9+11-7 \\ 21+22-35 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$