

# БИЛЕТЫ ПО КУРСУ «ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ»

---

**Авторы:** Хоружий Кирилл  
Евгений Примаков  
Малахов Ислам

**От:** 28 декабря 2020 г.

## Содержание

<b>Электрическое поле</b>	<b>2</b>
1.1 Электрические заряды и закон Кулона . . . . .	2
1.2 Электрическое поле и основная задача электростатики . . . . .	4
1.3 Электрическое поле в веществе . . . . .	5
1.4 Энергия электрического поля и емкость . . . . .	6
<b>Магнитное поле</b>	<b>7</b>
2.6 Постоянное магнитное поле . . . . .	7
2.7 Магнитный момент тока . . . . .	9
2.8 Магнитное поле в веществе . . . . .	10
2.9 Электромагнитная индукция . . . . .	11
2.10 Взаимоиндукция, теорема взаимности, магнитная энергия . . . . .	12
2.11 Магнитные свойства вещества . . . . .	13
<b>Электрические цепи</b>	<b>14</b>
3.13 Квазистационарные электрические цепи . . . . .	14
3.14 Вынужденные колебания под действием синусоидальной силы . . . . .	16
3.15 Комплексная форма представления колебаний . . . . .	18
3.17 Спектральный анализ линейных систем . . . . .	19
3.18 Шумы . . . . .	21
3.19 Некоторые виды вынужденных колебаний . . . . .	22
<b>Теория поля</b>	<b>23</b>
4.20 Уравнения Максвелла . . . . .	23
4.21 Вектор Умова-Пойтинга . . . . .	25
4.22 Волновое уравнение . . . . .	26
4.23 Волны на границе диэлектриков . . . . .	28
4.24 Длинные провода . . . . .	30
4.25 Волноводы . . . . .	31
<b>Плазма</b>	<b>32</b>
5.26 Элементы физики плазмы . . . . .	32
5.27 Проникновение поля в среду . . . . .	33

## 1.1 Электрические заряды и закон Кулона

Взаимодействие частиц друг с другом можно описывать с помощью понятия силового поля. Частица создает вокруг себя поле; на всякую другую частицу, находящуюся в этом поле, действует некоторая сила.

Оказывается, что свойства частицы в отношении ее взаимодействия с электромагнитным полем определяются всего одним параметром – так называемым зарядом частицы.

### Уравнение движения пробного заряда

Как было показано в введение, уравнение движения частицы в электромагнитном поле запишется, как

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \underbrace{-\frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}}_{\text{про } E} - e + \underbrace{\frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{A}]}_{\text{про } H}$$

Так как первая часть не зависит от скорости, то естественно ввести следующие величины

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi && \text{— напряженность электрического поля} \\ \mathbf{H} &= \text{rot } \mathbf{A} && \text{— напряженность магнитного поля} \end{aligned}$$

Теперь уравнение движения в ЭМ поле примет вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \quad \text{— сила Лоренца.} \quad (1.1)$$

Таким образом может определить  $\mathbf{E}$ , как отношение силы  $\mathbf{F}$ , действующей на неподвижный заряд, помещенный в данную точку поля к величине этого заряда  $q$ :  $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$ .

### Теорема Гаусса

Как было показано в введение, верно что

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

Или, в интегральной форме, по теореме Стокса

$$\int \text{div } \mathbf{E} dV = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi \int \rho dV.$$

### Закон сохранения заряда

Изменение заряда в объеме в единицу времени:

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV,$$

где минус появился из-за выбора направления нормали к поверхности. Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = -\oint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} = -\int \text{div } \mathbf{j} dV, \Rightarrow \int \left( \text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \right) = 0, \Rightarrow \boxed{\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}. \quad (1.2)$$

Таким образом алгебраическая сумма зарядов электрически замкнутой системы сохраняется. Требование релятивистской инвариантности приводит к тому, что закон сохранения заряда имеет локальный характер: изменение заряда в любом наперед заданном объеме равно потоку заряда через его границу.

### Принцип суперпозиции

Как показывает опыт, электромагнитное поле подчиняется так называемому принципу суперпозиции: поле, создаваемое системой зарядов, представляет собой результат простого сложения полей, которые создаются каждым из зарядов в отдельности. Это значит, что напряженности результирующего поля в каждой точке равны сумме (векторной) напряженностей в этой точке каждого из полей в отдельности.

Всякое решение уравнений поля является полем, которое может быть осуществлено в природе. Согласно принципу суперпозиции сумма любых таких полей тоже должна быть полем, которое может быть осуществлено в природе, т. е. должно удовлетворять уравнениям поля.

Как известно, линейные дифференциальные уравнения как раз отличаются тем свойством, что сумма любых его решений тоже является решением. Следовательно, уравнения для поля должны быть линейными дифференциальными уравнениями.

## Закон Кулона

Рассмотрим точечный заряд, окружим его сферой и запишем для неё теорему Гаусса:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = 4\pi e, \quad \Rightarrow \quad E = \frac{e}{R^2}, \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E} = \frac{e}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R},$$

что верно в силу радиальной симметрии. Так мы получили *закон Кулона*.

Потенциал же  $\varphi = e/R$ , или, для системы зарядов,

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{R_a}, \quad \text{или} \quad \varphi = \int \frac{\rho}{R} dV.$$

*Забавный факт:* подстановка в уравнение Пуассона приводит к уравнению вида  $\Delta(1/R) = -4\pi \cdot \delta(R)$ .

## Дипольный момент

Чуть подробнее остановимся на системе зарядов и дипольном моменте. Рассмотрим поле от системы зарядов на большом расстоянии от этой системы. Выберем начало координат где-то внутри этой системы. В точке, нам интересной,  $R_0$

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a|}.$$

Нам интересен случай  $\mathbf{R}_0 \gg \mathbf{r}_0$ , так что разложим в ряд до второго члена по  $\mathbf{r}_a/R_0$ . Вспомнив, что  $f(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}) \approx f(\mathbf{R}_0) - \mathbf{r} \cdot \text{grad} f(\mathbf{R}_0)$  получим

$$\varphi = \frac{\sum e_a}{R_0} - \sum e_a \mathbf{r}_a \cdot \text{grad} \frac{1}{R_0}.$$

Теперь естественно ввести *дипольный момент* системы  $\mathbf{p} = \sum_a e_a \mathbf{r}_a$ . Важно, что если  $\sum e_a = 0$ , то  $\mathbf{d}$  не зависит от выбора начала координат. Действительно:

$$\mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a + \mathbf{l}, \quad \mathbf{d}' = \sum e_a \mathbf{r}'_a + \mathbf{l} \sum e_a = \mathbf{p}.$$

Теперь естественно разделить

$$\mathbf{d} = \sum e_a^+ \mathbf{r}_a^+ - \sum e_a^- \mathbf{r}_a^- = \mathbf{R}^+ \sum e_a^+ - \mathbf{R}^- \sum e_a^-, \quad \text{где} \quad \mathbf{R}^+ = \frac{\sum e_a^+ \mathbf{r}_a^+}{\sum e_a^+}, \quad \mathbf{R}^- = \frac{\sum e_a^- \mathbf{r}_a^-}{\sum e_a^-}.$$

В случае  $\sum e_a^+ = \sum e_a^- = e$ , естественно ввести  $\mathbf{R}_{+-} = \mathbf{R}^+ - \mathbf{R}^-$ , тогда  $\mathbf{d} = e \mathbf{R}_{+-}$ . Потенциал в таком случае

$$\sigma = -\mathbf{d} \cdot \text{grad} \frac{1}{R_0} = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}_0}{R_0^3}, \quad (1.3)$$

тогда  $E$

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{R}_0}{R_0^3} = -\frac{1}{R_0^3} \text{grad} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}_0) - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}_0) \text{grad} \frac{1}{R_0^3}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{R_0^3} \left[ 3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{n} - \mathbf{p} \right]}, \quad \text{где} \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}_0}{|\mathbf{R}_0|}. \quad (1.4)$$

В частности, выбрав ось  $Oz$  по  $\mathbf{p}$ , найдём, что

$$E_z = \frac{p}{R_0^3} (3 \cos^2 \theta - 1); \quad E_x = \frac{p}{R_0^3} (3 \sin^2 \theta - 1);$$

Или, разбив на радиальную и тангенциальные составляющие:

$$E_R = 2 \frac{p}{R^3} \cos \theta, \quad E_\tau = -2 \frac{p}{R^3} \sin \theta.$$

## Гауссова система единиц (СГС) и система СИ.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

## 1.2 Электрическое поле и основная задача электростатики

Вместо поиска  $\mathbf{E}$  достаточно найти  $\varphi$ ,

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \\ \text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho \end{cases} \Rightarrow \text{div grad } \varphi \equiv \Delta\varphi = \begin{cases} -4\pi\rho & \text{ур. Пуассона} \\ 0 & \text{ур. Лапласа} \end{cases}$$

Как может быть поставлена задача? Заданы граничные значения, найти распределения зарядов. Заданы заряды, найти распределения. Что-то задано, что-то не задано. Во всех трёх случаях **решение уравнения Пуассона единственно**.

К слову, так как  $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ , а при  $A_i = \text{const}$  верно, что  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ , то электростатическое поле потенциально. Также это можно увидеть в работе ЭМ сил, при перемещении заряда по замкнутому контуру:

$$A_{\text{замкн}}/q = \oint_{(L)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f} = 0.$$

### Разность потенциалов

**Def 1.1.** Если на участке цепи не действуют сторонние силы, работа по перемещению включает только работу потенциального электрического поля и *электрическое напряжение*  $U_{AB}$  между  $A$  и  $B$  совпадает с разностью потенциалов  $\varphi_A - \varphi_B = A_{AB}^{\text{el}}/q$ . В общем случае  $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B + \mathcal{E}_{AB}$ .

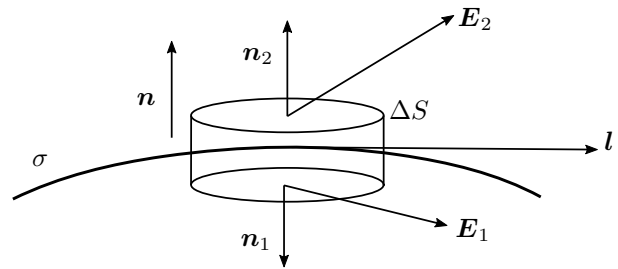
### Граничные условия на заряженной поверхности

По теореме Гаусса верно, что

$$\begin{aligned} E_{2n_2} \Delta S + E_{1n_1} \Delta S &= 4\pi\sigma \Delta S, \\ E_{2n} - E_{1n} &= 4\pi\sigma \end{aligned}$$

По теореме циркуляции верно, что

$$\begin{aligned} E_{2l} \Delta l - E_{1l} \Delta l &= 0 \\ E_{2l} - E_{1l} &= 0. \end{aligned}$$

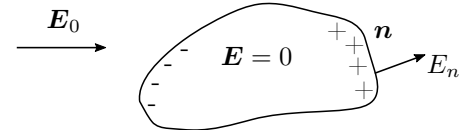


### Проводники

**Def 1.2** (пусть так). *Проводник* – костяк частиц, окруженных *свободными* электронами, которые в пределах тела могут перемещаться на какие угодно расстояния.

В частности, для проводников, верно, что

$$\begin{aligned} E_n &= 4\pi\sigma \\ E_\tau &= 0 \end{aligned}$$



Собственно, объёмных зарядов в проводнике нет, поверхностные есть и компенсируют внешнее поле. Аналогично работает решетка Фарадея, электростатическое поле не проникает в проводники.

### Метод изображений

Если существует некоторая эквипотенциальная поверхность разделяющая пространство на два полупространства, то можем считать что эта поверхность является проводящей. И наоборот, проводящую поверхность можно заменить, на системы зарядов в полупространстве, ей ограниченном, создающих эквипотенциальную поверхность.

### 1.3 Электрическое поле в веществе

*Диэлектрики* – непроводники электричества. В них возбуждаются индукционные заряды, привязанные к кастету частиц, – *поляризационные*, или *связанные заряды*.

Альтернативный вариант – наличие дипольного момента у молекул. При наличии электрического поля дипольные моменты ориентируются, диэлектрик поляризуется. *Вектор поляризации* – дипольный момент единицы объема диэлектрика, возникающий при его поляризации.

Рассмотрим скошенный параллелепипед. На основаниях параллелепипеда возникнут поляризационные заряды с поверхностной плотностью  $\sigma_{\text{пол}}$ . Взяв его площадь за  $S$ , найдём дипольный момент равный  $\sigma_{\text{пол}}Sl$ . Тогда вектор поляризации будет

$$\mathbf{P} = \frac{\sigma_{\text{пол}} S}{V} \mathbf{l}, \quad (1.5)$$

что верно и для анизотропных кристаллов где  $\mathbf{E} \nparallel \mathbf{P}$ .

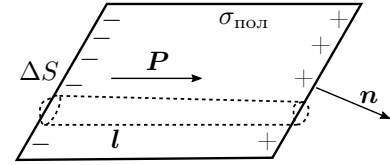
Пусть  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к основанию параллелепипеда, тогда  $V = S(\mathbf{l} \cdot \mathbf{n})$ .

Подставив  $V$  в предыдущую формулу, получим, что

$$\sigma_{\text{пол}} = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}) = P_n$$

Или, более общо,

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \mathbf{p}_i$$



В случае неоднородной поляризации верно, что поляризационные заряды могут появиться и на поверхности. Выделим  $V$ , ограниченный  $S$ , смещённый заряд равен  $-P_n dS$ , тогда через  $S$  поступает

$$q_{\text{пол}} = - \oint P_n dS = - \oint (\mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}). \quad (1.6)$$

Стоит заметить, что в теорему о циркуляции не входят заряды, соответственно для диэлектриков верно, что

$$\oint_{(L)} \mathbf{E}_l d\mathbf{l} = 0.$$

Далее чаще всего мы будем сталкиваться с линейной поляризацией, когда

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D} = \underbrace{\mathbf{E}(1 + 4\pi\alpha)}_{\varepsilon} = \varepsilon \mathbf{E},$$

где  $\alpha$  – *поляризуемость диэлектрика*, а  $\varepsilon$  – *диэлектрическая проницаемость*.

Запишем теорему Гаусса для электрического поля в диэлектрике. Знаем, что  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{пол}} + \mathbf{E}_{\text{св}}$ .

$$\oint \mathbf{E}_n dS = 4\pi(q + q_{\text{пол}}) \quad \Rightarrow \quad \oint \underbrace{(\mathbf{E}_n + 4\pi P_n)}_{D_n} dS = 4\pi q. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\oint \mathbf{D}_n dS = 4\pi q_{\text{св}}} \quad (1.7)$$

где  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$  – вектор *электрической индукции*, или *электрического смещения*. Поток вектора  $\mathbf{D}$  определяется только свободными зарядами.

Можно посмотреть на это в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi(\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}), \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi(\rho + \rho_{\text{пол}}) \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{пол}} = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \end{aligned}$$

Найдём граничные условия: повторяя рассуждения, как для проводников, найдём, что

$$D_{1n} = D_{2n},$$

а в случае линейных диэлектриков верно

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}, \quad \Leftrightarrow \quad E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma_{\text{пол}}.$$

Аналогично, из теоремы о циркуляции получим, что

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0.$$

Для точечного заряда в однородном диэлектрике, по теореме Гаусса

$$\left. \begin{aligned} D \cdot 4\pi r^2 &= 4\pi \\ D &= \varepsilon E \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{E = \frac{q}{\varepsilon r^2}} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{E}_0, \quad \text{где } \mathbf{E}_0 \text{ – поле в ситуации без среды.}$$

## 1.4 Энергия электрического поля и емкость

Рассказ про объёмную плотность энергии сводится к повторению билета №21, что приведёт к объёмной плотности энергии ЭМ поля

$$\mathcal{W} = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}.$$

Найдём теперь энергию системы зарядов. Считая поле постоянным, а заряды неподвижными

$$\mathcal{U} = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV, \quad \text{— энергия системы зарядов,}$$

где  $\mathbf{E}$  — поле от всех зарядов, а интеграл берется по всему пространству. Вспомнив уравнения Максвелла, немного перепишем выражение в

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E} \operatorname{grad} \varphi dV = -\frac{1}{8\pi} \underbrace{\int \operatorname{div} (\mathbf{E} \cdot \varphi) dV}_{\oint \vec{E} \cdot d\vec{f}=0} + \frac{1}{8\pi} \int \varphi \operatorname{div} \mathbf{E} dV.$$

Таким образом

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int \rho \varphi dV, \quad \text{или, в случае дискретного распределения,} \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum e_a \varphi_a.$$

Тут мы встречаем проблему заряда, находящегося в потенциале собственного поля, но, так как эта величина не зависит от конфигурации зарядов, то его мы проигнорируем, от греха подальше

$$\mathcal{U}' = \frac{1}{2} \sum e_a \varphi'_a, \quad \text{где} \quad \varphi'_a = \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b}{R_{ab}}, \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{U}' = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}. \quad (1.8)$$

### Проводники

В случае *проводников* заряд распределен по поверхности, потенциал вдоль которой не меняется, тогда энергия такой системы

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \sum_i \oint_{S_i} \varphi_i \sigma dS = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i \oint \sigma dS = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i Q_i,$$

где  $\varphi_i$  и  $Q_i$  — потенциал и заряд  $i$ -го проводника,  $\sigma$  — плотность заряда.

Так как решение задачи Пуассона единственно, то  $\varphi(\mathbf{r})$  однозначно определяется потенциалами проводников  $\varphi_i$ , поэтому  $Q_i$  — некоторые однозначные функции  $\varphi_i$ . Из-за линейности уравнений поля, эти функции могут быть только линейными, поэтому существует связь вида

$$Q_i = \sum_k C_{ik} \varphi_k, \quad \varphi_i = \sum_k S_{ik} Q_k.$$

Постоянные коэффициенты  $C_{ik}$  называются *емкостными коэффициентами* системы проводников, а  $S_{ik}$  — *потенциальными коэффициентами*. При этом  $C_{ii}$  называют *собственными емкостями*, а  $C_{ik}$ ,  $i \neq k$  — *коэффициентами взаимной емкости* или *коэффициентами электростатической индукции*.

Можно показать, что  $C_{ik} = C_{ki}$ , что ещё называют *соотношением взаимности*. Это позволяет прийти к следующей теореме

**Thr 1.3** (теорема взаимности Грина). *Если есть две конфигурации системы:  $\{\varphi_i; Q_i\}$  и  $\{\varphi'_i; Q'_i\}$ , то всегда верно, что  $\sum Q'_i \varphi_i = \sum Q_k \varphi'_k$ .*

Для одиночного проводника  $Q = C\varphi$ , где  $C$  — *собственная емкость* проводника. В частности, для металлического шарика радиуса  $a$  с зарядом  $Q$ , находящегося в среде с  $\varepsilon$ , получится  $\varphi = Q/(\varepsilon a)$ , т.е.  $C = \varepsilon a$ .

### Конденсатор

В случае двух проводников, с зарядами  $Q_1 = -Q_2 = Q$ , имеем *конденсатор*, коэффициент  $C$  которого называется *емкостью*.

Найдём емкость конденсатора. Из №3 билета понятно, что поле внутри  $E = 2\pi\sigma/\varepsilon \times 2$ . Далее, по определению, вспомнив что  $C_{12} = C_{21}$ , и  $C_{11} = C_{22} = C$ , получим

$$\begin{cases} Q_1 = Q = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 \\ Q_2 = -Q = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2 \end{cases} \Rightarrow Q = C_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) = Cl \frac{4\pi}{\varepsilon} \left( \frac{Q}{S} \right), \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{S}{l}. \quad (1.9)$$

*Комментарий:* Энергию диполя во внешнем поле смотреть в первом билете.

## 2.6 Постоянное магнитное поле

В 1820 году датский ученый Ганс Христиан Эрстед совершил выдающееся открытие – магнитное действие электрического тока... Как было показано ранее,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}], \quad - \text{ сила Лоренца.} \quad (2.10)$$

Здесь введено обозначение  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$  – напряженность магнитного поля. Это поле, действующее на движущиеся электрические заряды и на тела, обладающие магнитным моментом.

Если взять провод, по которому течёт ток  $I$  и засунуть его в магнитное поле, то погонная сила будет иметь вид

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{c} I [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}], \quad - \text{ сила Ампера.} \quad (2.11)$$

### Закон Био-Савара-Лапласа

Рассмотри поле  $\mathbf{H}$ , создаваемое зарядами, совершающими *финитное* движение – остаются в конечной области пространства, сохраняя конечный импульс. Такое движение будет иметь стационарный характер и интересно будет рассмотреть усредненное по  $t$  магнитное поле, создаваемое зарядами, соответственно  $\mathbf{H} \neq \mathbf{H}(t)$ .

Усредненные по времени уравнения Максвелла примут вид

$$\text{div} \langle \mathbf{H} \rangle = 0, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \Rightarrow \quad \text{rot} \langle \mathbf{H} \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \mathbf{j} \rangle. \quad (2.12)$$

Вспомним, что

$$\text{rot} \langle \mathbf{A} \rangle = \langle \mathbf{H} \rangle, \quad \Rightarrow \quad \text{grad div} \langle \mathbf{A} \rangle - \Delta \langle \mathbf{A} \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \mathbf{j} \rangle,$$

теперь по калибровочной инвариантности выберем  $\langle \mathbf{A} \rangle : \text{div} \langle \mathbf{A} \rangle = 0$ . Тогда

$$\Delta \langle \mathbf{A} \rangle = -\frac{4\pi}{c} \langle \mathbf{j} \rangle, \quad (2.13)$$

что *очень похоже на уравнение Пуассона*, но вместо  $\rho$  стоит  $\langle \mathbf{j} \rangle / c$ . Аналогично поиску  $\varphi$ , находим

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R} dV, \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{A} \rangle = \frac{1}{c} \int \frac{\langle \mathbf{j} \rangle}{R} dV.$$

Теперь, зная  $\langle \mathbf{A} \rangle$ , можно найти

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \text{rot} \langle \mathbf{A} \rangle = \frac{1}{c} \text{rot} \int \frac{\langle \mathbf{j} \rangle}{R} dV.$$

Так как  $\text{rot}$  происходит по координатам точки наблюдения, то можем занести его под  $\int$ , считая  $\mathbf{j} = \text{const}$ . Вспомним, что

$$\text{rot } f\mathbf{a} = f \text{rot } \mathbf{a} + [\text{grad } f \times \mathbf{a}], \quad \Rightarrow \quad \text{rot} \frac{\langle \mathbf{j} \rangle}{R} = \left[ \text{grad} \frac{1}{R} \times \langle \mathbf{j} \rangle \right] = \frac{[\langle \mathbf{j} \rangle \times \mathbf{R}]}{R^3},$$

подставляя в формулу для  $\langle \mathbf{H} \rangle$ , получаем *закон Био-Савара-Лапласа*

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{c} \int \frac{[\langle \mathbf{j} \rangle \times \mathbf{R}]}{R^3} dV, \quad (2.14)$$

где  $\mathbf{R}$  – направление из  $dV$  в точку наблюдения.

### Теорема Гаусса для магнитного поля

И вновь обращаемся к уравнениям Максвелла, а именно

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \int_V \text{div } \mathbf{H} dV = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{f} = 0. \quad (2.15)$$

И, из другого уравнения

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.16)$$

Интегрируя по некоторой поверхности, по формуле Стокса,

$$\int \text{rot } \mathbf{H} d\mathbf{f} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{E} d\mathbf{f} + \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} d\mathbf{f}.$$

Теперь естественно ввести величину *тока смещения*  $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} / 4\pi$ , и получить уравнение вида

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \left( \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) d\mathbf{f}.$$

**Коллекционирование магнитных бабочек**

Из теореме о циркуляции  **$H$**  можем найти, прямой провод с током окружают самозамкнутый кружочки с

$$H = \frac{2I}{cr}.$$

Интересен случай с линейной плотностью тока  $i = I/l$ , тогда

$$dB_\tau = \frac{i}{c} d\Omega, \quad \Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha).$$

где  $\Omega$  – телесный угол. Теперь легко получить поле внутри соленоида:

$$B = \frac{4\pi}{c} i.$$

Аналогичное значение мы получим для «магнитного конденсатора». Для тороидальной катушки с разрывом, по теореме о циркуляции

$$H_0 \Delta l + H(l - \Delta l) = NI, \quad \Rightarrow \quad H_0 = \frac{\mu NI}{(\mu - 1)\Delta l + l}, \quad H \approx \frac{IN}{l}.$$



## 2.7 Магнитный момент тока

Рассмотрим  $\langle \mathbf{H} \rangle$ , как предыдущем билете, перейдя от  $j$  к  $\rho v$ .

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \frac{1}{c} \sum \left\langle \frac{e_a \mathbf{v}_a}{R_a} \right\rangle = \frac{1}{c} \sum \left\langle \frac{e_a \mathbf{v}_a}{\|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a\|} \right\rangle,$$

и аналогично раскладывая в ряд до первого порядка  $\mathbf{r}_a/R_0$ :

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \frac{1}{cR_0} \sum e \langle \mathbf{v} \rangle - \frac{1}{c} \sum e \left\langle \left( \mathbf{r} \cdot \text{grad} \frac{1}{R_0} \right) \mathbf{v} \right\rangle = \frac{1}{c} \sum e \left\langle \left( \mathbf{r} \cdot \text{grad} \frac{1}{R_0} \right) \mathbf{v} \right\rangle.$$

Вспомнив, что  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ , считая  $\mathbf{R}_0 = \text{const}$  –

$$\sum e (R_0 \cdot \mathbf{r}) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{d}{dt} \sum e \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_0)}_{=0} + \frac{1}{2} \sum e \underbrace{\{ \mathbf{v} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_0) - \mathbf{r} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_0) \}}_{[\mathbf{r} \times \mathbf{v}] \times \mathbf{R}_0},$$

и теперь введём

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum e [\mathbf{r} \times \mathbf{v}], \quad - \text{магнитный момент системы.} \quad (2.17)$$

Тогда

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \frac{1}{R_0^3} \left[ \langle \mathbf{m} \rangle \times \mathbf{R}_0 \right] = \left[ \text{grad} \frac{1}{R_0} \times \langle \mathbf{m} \rangle \right]$$

Вспомним, что

$$\text{rot} [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a} \text{ div } \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{ div } \mathbf{a},$$

и получим

$$\langle \mathbf{H} \rangle = \text{rot} \langle \mathbf{A} \rangle = \text{rot} \left[ \langle \mathbf{m} \rangle \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} \right] = \langle \mathbf{m} \rangle \text{div} \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} - (\langle \mathbf{m} \rangle \cdot \nabla) \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3}.$$

Раскрыв по правилу Лейбница

$$\left( \langle \mathbf{m} \rangle \cdot \nabla \right) \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} = \frac{1}{R_0^3} (\langle \mathbf{m} \rangle \cdot \nabla) \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_0 \left( \langle \mathbf{m} \rangle \cdot \nabla \frac{1}{R_0^3} \right) = \frac{1}{R_0^3} \left( \langle \mathbf{m} \rangle - 3 \mathbf{R}_0 (\langle \mathbf{m} \rangle \cdot \mathbf{R}_0) / R_0^2 \right).$$

И наконец, сквозь тернии, находим очень знакомую формулу

$$\boxed{\langle \mathbf{H} \rangle = \frac{1}{R_0^3} \left( 3 \mathbf{n} (\langle \mathbf{m} \rangle \cdot \mathbf{n}) - \langle \mathbf{m} \rangle \right), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}_0}{R_0},} \quad (2.18)$$

таким образом мы нашли вектор напряженности магнитного поля вокруг магнитного диполя!

### Сила и момент сил

Результирующая сила, действующая на виток с током в постоянном магнитном поле, дается выражением

$$\mathbf{F} = \frac{I}{c} \oint [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]. \quad (2.19)$$

В случае плоского витка с током (плоскость которого параллельна магнитному полю), разобьем его на  $I d\mathbf{l}_1$  и  $I d\mathbf{l}_2$ . Действующие на них силы Ампера нормальны к плоскости витка и противоположны по направлению.

$$F_1 = \frac{I}{c} B dl_1 \sin \alpha = \frac{I}{c} B dh,$$

аналогично для  $F_2$ , соответственно эти силы образуют момент

$$dM = \frac{I}{c} B a dh = \frac{I}{c} B dS, \quad \Rightarrow \quad M = \frac{I}{c} BS,$$

где  $S$  – площадь витка. Введем вектор площади контура  $\mathbf{S}$ , тогда

$$\mathbf{M} = [\mathbf{m} \times \mathbf{B}], \quad \mathbf{m} = \frac{I}{c} \mathbf{S}, \quad (2.20)$$

где вектор  $\mathbf{m}$  – *магнитный момент тока*. В случае нормального направления к магнитному полю, сила ампера будет только растягивать или сжимать виток. В случае криволинейной поверхности, следует ввести  $\mathbf{S} = \int d\mathbf{S}$ , где интегрирование производится по поверхности.

Если расположить катушку (много витков) так, чтобы  $\mathbf{m} \perp \mathbf{B}$ , то получим

$$\mathbf{B} = \frac{1}{m^2} \left[ \mathbf{M} \times \mathbf{m} \right],$$

что позволят на практике проверить закон Био-Савара-Лапласа.

## 2.8 Магнитное поле в веществе

Магнетизм вещества обусловлен тремя причинами: 1) орбитальным движением электронов вокруг атомных ядер; 2) собственным вращением, или спином, электронов; 3) собственным вращением, или спином, атомных ядер.

Атомы вещества, совершая беспорядочное тепловое движение, в отсутствие внешнего магнитного поля обычно ориентированы хаотически. При наложении внешнего магнитного поля атомы полностью или частично ориентируются в направлении этого поля, и тогда компенсация нарушается — тело *намагничивается*. Тела способные к намагничиванию называют *магнетиками*, а очень способные к этому называются ещё *ферромагнетиками*. В теории Максвелла речь идёт об усреднённом по времени поле от частиц совершающих финитное движение.

Молекулярные токи принято характеризовать вектором *намагничиваемости*  $\mathbf{M}$ . Рассмотрим косой цилиндр:

Пусть поверхностные токи текут в плоскости параллельной торцам цилиндра. Если  $\mathbf{m}$  — средний магнитный момент молекулы, то  $\mathbf{M} = n\mathbf{m}$ . То есть  $\mathbf{M}$  будет перпендикулярен плоскостям торцов цилиндра. Пусть  $\alpha$  — угол между  $\mathbf{M}$  и осью цилиндра  $\mathbf{L}$ , тогда как для магнитного момента:  $V\mathbf{M} = S\mathbf{L}\mathbf{M} \cos \alpha$ . С другой стороны  $V\mathbf{M} = \mathbf{I}_{\text{мол}}\mathbf{S}/c = L i_{\text{мол}}\mathbf{S}/c$ . Приравнявая получаем (где  $\mathbf{l}$  — единичный вектор по оси):

$$i_{\text{мол}} = i_{\text{м}} = c\mathbf{M} \cos \alpha = c(\mathbf{M} \cdot \mathbf{l}) = cM_1. \quad (2.21)$$

Орбитальные и спиновые вращения электронов и атомных ядер в отношении возбуждаемого ими магнитного поля эквивалентны *орбитальным* токам — токам циркулирующим в атомах вещества. Учтём эти токи в циркуляции индукции магнитного поля:

$$\oint_{(L)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} (I_{\text{проводов}} + I_{\text{молекулярный}}). \quad (2.22)$$

Выразим молекулярный ток через вектор намагничивания  $\mathbf{M}$ :

$$i_{\text{м}} d\mathbf{l} = cM_1 d\mathbf{l} = c(\mathbf{M} d\mathbf{l}) \quad \rightsquigarrow \quad I_{\text{мол}} = c \oint_{(L)} (\mathbf{M} d\mathbf{l}). \quad (2.23)$$

Внесём это выражение в циркуляцию вектора магнитной индукции:

$$\oint \underbrace{(\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M})}_{\mathbf{H}} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I_{\text{проводов}} \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + c \text{rot } \mathbf{M}. \quad (2.24)$$

Ввели вектор напряжённости магнитного поля:  $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ . Который подобно индукции электрического поля будет включать в себя молекулярные токи оставляя “свободные”. Тогда уравнения Максвелла примут более удобный вид:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (2.25)$$

Из уравнений Максвелла так же получим граничные условия.

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad B_{1n} = B_{2n} \quad (2.26)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} I \quad \rightsquigarrow \quad H_{2t} - H_{1t} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (2.27)$$

В выводе циркуляции будем предполагать, что вдоль границы раздела течет поверхностный ток проводимости с линейной плотностью  $i$ . Применим теорему о циркуляции к бесконечно малому прямоугольному контуру, высота которого пренебрежимо мала по сравнению с длиной основания. Тогда можно пренебречь вкладом в циркуляцию, который вносят боковые стороны. И получить написанную выше формулу.

## 2.9 Электромагнитная индукция

Майкл Фарадей в 1831 году открыл *электромагнитную индукцию*.

На движущуюся перемычку в замкнутом контуре, через которую проходит магнитное поле, действует сила Лоренца, которая будет ускорят электроны в ней:

$$e\mathbf{E} = \mathbf{F} = \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]. \quad (2.28)$$

Сила создаваемая этим полем  $\mathbf{E}$  называется *электродвижущей силой*. В целом для магнитного потока пронизывающего рамку:

$$\varepsilon = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.29)$$

Джеймс Кларк Максвелл же расширил понятие электромагнитной индукции, из его уравнений следует, что всякое изменение потока магнитного поля во времени возбуждает электрическое поле в пространстве, даже в отсутствии проводников:

$$\oint_S (\mathbf{E} ds) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.30)$$

Электрическое поле возбуждаемое магнитным полем, в силу отсутствия зарядов является не потенциальным, а вихревым.

**Правило Ленца:** индукционный ток всегда имеет такое направление, что он ослабляет действие причины, возбуждающей этот ток.

Что видно из выражения для электромагнитной индукции, которая всегда действует против изменения магнитного потока. Позже Ле Шателье и Браун обобщили правило Ленца на все физические явления.

Продемонстрировать правило можно, как это сделал Элиу Томсон. Катушка с сердечником ставится теперь вертикально. На железный сердечник надевается широкое толстое алюминиевое кольцо. В катушку посылается переменный ток от городской сети, возбуждающий в кольце индукционный ток противоположного направления. Эти токи отталкиваются. Если замкнуть ток в катушке, то сила отталкивания подбросит алюминиевое кольцо.

В массивных проводниках, движущихся в магнитных полях или помещенных в переменные магнитные поля, возбуждаются вихревые индукционные токи, называемые токами Фуко. По физической природе они ничем не отличаются от индукционных токов, возбуждаемых в линейных проводах.

## 2.10 Взаимоиндукция, теорема взаимности, магнитная энергия

Предполагаем, что ферромагнетиков нет, тогда  $\mathbf{B}$  и  $\Phi$  пропорциональны току:

$$\Phi = LI^{(m)} = \frac{1}{c}LI, \quad (2.31)$$

где  $I^{(m)}$  – сила тока в СГСМ, а  $I$  – сила того же тока в СИ,  $L$  же не зависит от силы тока и называется *индуктивностью провода* или *самоиндукцией*. Чем тоньше провод, тем больше его индуктивность.

Индуктивность соленоида:

$$B = \frac{4\pi}{c} \frac{IN\mu}{l} \quad \Phi = \frac{4\pi}{c} \frac{\mu N^2 S}{l} I \quad \Rightarrow \quad L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l} \quad (2.32)$$

**Магнитная энергия.** Для витка с током, в котором с помощью внешних сил потечёт ток, а значит будет нарастать и магнитный поток через него, возникнет ЭДС, тогда элементарная работа внешних сил:

$$\delta A^{\text{внеш}} = -\mathcal{E}^{\text{инд}} I dt = \frac{1}{c} I d\Phi. \quad (2.33)$$

Если среда не обладает гистерезисом, в частности является пара/диамагнетиком, работа внешних сил пойдёт только на увеличение магнитной энергии, так что (будем предполагать, что  $\Phi = LI/c$ ):

$$dW_m = \frac{I}{c} d\Phi \quad \Rightarrow \quad W_m = \frac{L}{2} \left( \frac{I}{c} \right)^2 = \frac{1}{2c} I\Phi = \frac{\Phi^2}{2L}. \quad (2.34)$$

Обобщим формулу выше на случай произвольного числа витков. Тогда работа внешних сил для одного витка осталась прежней, но для получения энергии нам придётся суммировать по всем виткам.

$$W_m = \frac{1}{c} \sum I'_i d\Phi'_i. \quad (2.35)$$

Величина интеграла не зависит от того, как у витков по отношению друг другу возрастает ток, одновременно ли это происходит или в каждом витке по очереди. Для удобства будем считать, что токи наращиваются одновременно так, чтобы они оставались пропорциональны друг другу. Таким образом будем требовать, чтобы в любой момент времени  $I'_i = \lambda I_i$ , где  $\lambda \in [0, 1]_t$  не зависит от выбранного кольца  $i$ . Ток без штриха – ток в конечном состоянии. При  $\mu = \text{const}$  поток магнитного поля от тока линейен, тогда  $\Phi'_i = \lambda \Phi_i$ , а потому  $d\Phi'_i = \Phi_i d\lambda$ .

$$W_m = \frac{1}{c} \sum I_i \Phi_i \int_0^1 \lambda d\lambda \quad \rightsquigarrow \quad W_m = \frac{1}{2c} \sum I_i \Phi_i = \frac{1}{2c^2} \sum \sum L_{ik} I_i I_k \quad (2.36)$$

Остаётся доказать теорему о **взаимности**:  $L_{ik} = L_{ki}$ . Достаточно доказать для пары витков.

Чтобы бесконечно мало изменить токи  $I_1$  и  $I_2$  нужно затратить работу:  $\delta A^{\text{внеш}} = (I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2)/c = dW_m$ . Эта энергия задаётся выражением (2.36), а её приращение тогда:

$$dW_m = \frac{1}{2c} (I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2) + \frac{1}{2c} (\Phi_1 dI_1 + \Phi_2 dI_2) = \frac{1}{c} (I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2). \quad (2.37)$$

Получаем:

$$I_1 d\Phi_1 + I_2 d\Phi_2 = \Phi_1 dI_1 + \Phi_2 dI_2 \quad (2.38)$$

Это выражение справедливо  $\forall dI_1$  и  $dI_2$ , последний мы для удобства занулим. Тогда для потоков имеет:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{c} (L_{11}I_1 + L_{12}I_2) & d\Phi_1 &= \frac{1}{c} L_{11} dI_1 \\ \Phi_2 &= \frac{1}{c} (L_{21}I_1 + L_{22}I_2) & d\Phi_2 &= \frac{1}{c} L_{21} dI_1 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Подставляем их в (2.38):  $L_{11}I_1 dI_1 + L_{21}I_2 dI_1 = (L_{11}I_1 + L_{12}I_2) dI_1$ . Откуда следует, что  $L_{12} = L_{21}$

Про *локализацию магнитной энергии пространстве* поговорим на примере соленоида. Пренебрегая краевыми эффектами  $H^{\text{in}} = 4\pi I/(cl)$ , откуда ток  $I = clH/(4\pi)$ . Пусть  $S$  – площадь поперечного сечения, тогда  $\Phi = BS$ , и следовательно:

$$dW_m = \frac{I}{c} d\Phi = \frac{1}{4\pi} lSH dB = \frac{V}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}). \quad (2.40)$$

Если  $\omega_m$  – магнитная энергия на единицу объёма, то для её дифференциала можно записать:

$$\delta A^{\text{внеш}} = \delta \omega_m = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}) \quad \rightsquigarrow \quad W_m = \int \omega_m dV. \quad (2.41)$$

В случае пара-/диамагнитных сред  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  получаем

$$\omega_m = \frac{1}{8\pi} \mu H^2 = \frac{1}{8\pi} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} = \frac{B^2}{8\pi\mu} \quad (2.42)$$

## 2.11 Магнитные свойства вещества

Для диамагнитных и парамагнитных сред зависимость  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{B}$  линейна и для изотропных сред запишется в виде  $\mathbf{M} = \chi_1 \mathbf{B}$ . Однако исторически сложилось линейно связывать  $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ , что равносильно.

Имея  $\mathbf{B} = 4\pi \mathbf{M} + \mathbf{H}$ , подставим,  $\mu = 1 + 4\pi\chi$ , получим:  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ . Величина  $\chi$  – *магнитная восприимчивость*, а  $\mu$  – *магнитная проницаемость*.

### Диамагнетики

*Диамагнетики* — вещества для которых  $\chi < 0$ , а следовательно  $\mu < 1$ . Диамагнетизм наблюдается у веществ у атомов которых в отсутствие магнитного поля не обладают магнитными моментами.

При наличии внешнего постоянного магнитного поля внутреннее движение электронов атомов не изменяется, но атом в целом получает дополнительное вращение с угловой скоростью  $\mathbf{\Omega} = \frac{e}{2mc} \mathbf{B}$ . Этот результат называется *теоремой Лармора*, а сама частота – ларморовская. Например это золото, серебро,  $\chi$  также мала.

### Парамагнетики

*Парамагнетики* — вещества для которых  $\chi > 0$  (но мала), а следовательно  $\mu > 1$ . Например, это алюминий,  $\chi \in [10^{-6}; 10^{-3}]$ . Парамагнетизм наблюдается у тех веществ, у которых атомы обладают магнитными моментами в отсутствие внешнего магнитного поля. В силу хаотичности тело всё равно остаётся не намагниченным.

### Ферромагнетики

Наблюдается эффект гистерезиса – петли в  $I(H)$ , что приводит существованию постоянных магнитов. Здесь  $\chi \in [10^3, 10^6]$ .

### Магнитные свойства сверхпроводников

Сверхпроводник первого рода – сверхпроводник, целиком переходящий в сверхпроводящее состояние. Для второго рода существуют области, где переход не происходит.

Сверхпроводящий шарик в магнитном поле приобретает магнитный момент

$$\mathbf{p}_m = -\frac{1}{2} R^3 \mathbf{B}, \quad (\mathbf{p}_e = R^3 \mathbf{E}).$$

Соответственно будет выталкиваться из магнитного поля.

При низких температурах металлы переходят к состоянию, при котором у них наблюдается *сверхпроводимость* — полное отсутствие электрического сопротивления постоянному току. Температурная точка сверхпроводящего перехода – фазовый переход второго рода.

Магнитное поле никогда не проникает в толщу сверхпроводника. То есть  $\mathbf{B} = 0$ , это свойства появляется независимо от того в каких условиях произошёл переход в сверхпроводящее состояние. В действительности магнитное поле проникает в сверхпроводник на небольшую глубину, большую по сравнению с межуатомными расстояниями.

По граничным условиям тогда получаем, что на поверхности нормальная составляющая внешнего поля тоже равна нулю. То есть магнитное поле снаружи касательно к сверхпроводнику, магнитные силовые линии огибают его.

### 3.13 Квазистационарные электрические цепи

#### Условие квазистационарности

Условие квазистационарности заключается в том, что характерное время изменения макроскопических величин (таких как ток, напряжение, частота или импеданс) в цепи должно быть сильно меньшим времени распространения сигнала в цепи (размер цепи делить на скорость света).

#### Зарядка и разрядка конденсатора

Зарядка и разрядка конденсатора описывается следующим дифференциальным уравнением и его решением ( $U_c$  – напряжение на конденсаторе):

$$E = U_c + RC\dot{U}_c; \quad U_c = E - ke^{-RCt}$$

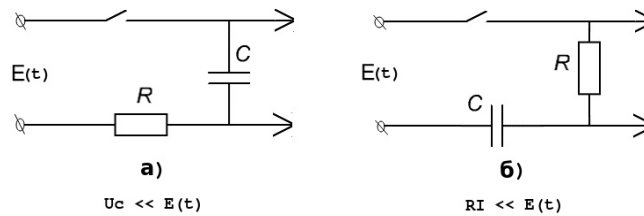
где  $k$  – постоянная интегрирования, зависит от начального напряжения на конденсаторе, а  $RC$  – характерное время зарядки конденсатора.

#### Установлени тока в катушке индуктивности

Если в схеме для конденсатора заменить его на индуктивность, то получим следующее уравнение и его решение ( $k$  – постоянная интегрирования, зависящая от начального тока):

$$E = IR + \dot{I}L; \quad I = \frac{E}{R} + ke^{-\frac{R}{L}t}; \quad k = I_{\text{нач}} - \frac{E}{R}$$

#### Интегрирующие и дифференцирующие цепочки



Если в нарисованной выше схеме подавать вместо  $E$  какой-то сигнал, то в случае а):

$$E(t) = U_c + \dot{U}_c CR \approx \dot{U}_c R; \quad U_c \approx \frac{1}{RC} \int E(t) dt,$$

В случае б):

$$E(t) = U_c + \dot{U}_c CR \approx U_c; \quad U_R \approx RC \frac{dE(t)}{dt}.$$

#### Свободные колебания в линейных системах. Колебательный RLC-контур.

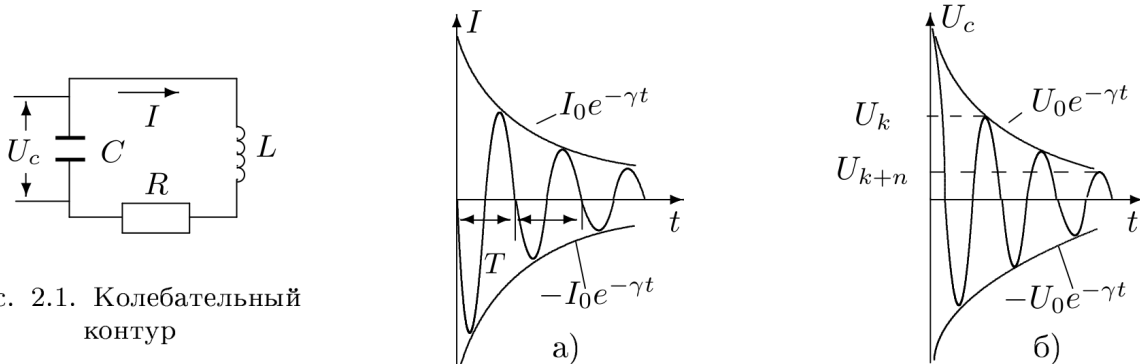


Рис. 2.1. Колебательный контур

Рис. 2.2. Затухающие колебания ( $\gamma < \omega_0$ )

Если контур состоит из последовательно стоящих резистора, конденсатора и индуктивности то процессы в нём

описываются дифференциальным уравнением

$$U_c + \dot{U}_c RC + \ddot{U}_c CL = 0 \Leftrightarrow \ddot{U}_c + \dot{U}_c \frac{R}{L} + \frac{U_c}{LC} = 0 \Leftrightarrow \ddot{U}_c + 2\gamma \dot{U}_c + \omega_0^2 U_c = 0; \quad \text{где } \gamma = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

Решением будет  $U_c(t) = A_1 e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$ , ( $A_1 + A_2 = U_c(0)$ ;  $C\dot{U}_c(t) = I(0)$ ).

Для тока уравнение и решение точно такое же, а коэффициенты находятся из  $A_1 + A_2 = I(0)$ ;  $I(0)R + U_c(0) + L\dot{I}(0) = 0$ .

**Если**  $\omega_0 > \gamma$ , то можно сразу найти синусоидальное (периодическое) решение:

$$U_c(t) = B_1 e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta_1); \quad I(t) = -B_2 e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta_2); \quad \text{где } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

При условии  $U_c(0) = U_0$ ;  $I(0) = 0$ ; получаем:  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ;  $B_2 = \frac{U_0}{L\omega}$ ;  $\theta_1 = -\arctan(\gamma/\omega)$ ;  $B_1 = U_0\omega_0/\omega$

Коэффициент  $\frac{U_0}{L\omega}$  можно найти из уравнения:  $\frac{dI}{dt}(0)L + I(0)R + U_0 = 0$

**Если**  $\omega_0 \leq \gamma$ , то решение называется аperiодическим:

$$U_c = U_0 e^{-\gamma t} \left( \frac{\gamma}{\varkappa} \operatorname{sh} \varkappa t + \operatorname{ch} \varkappa t \right); \quad I = -\frac{U_0}{L\varkappa} e^{-\gamma t} \operatorname{sh} \varkappa t; \quad \text{где } \varkappa = i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = i\omega$$

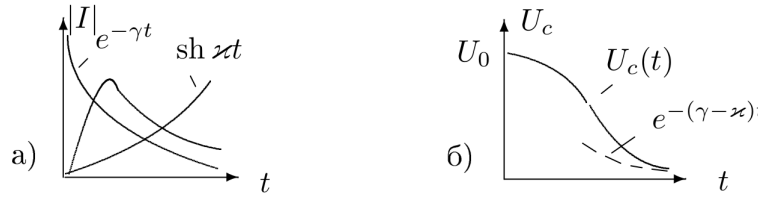


Рис. 2.3. Аperiодический режим ( $\gamma \geq \omega_0$ )

$R = 2\sqrt{L/C}$  и сам процесс, соответствующий режиму  $\omega_0 = \gamma$  называют критическими:

$$\text{Предельным переходом из прошлого выражения: } I = -\frac{U_0}{L} t e^{-\gamma t}; \quad U_c = U_0 e^{-\gamma t} (1 + \gamma t)$$

**Коэффициент затухания, логарифмический декремент и добротность. Энергетический смысл добротности.**

Добротность называют величину:  $Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}$ , где  $W$  - энергия в контуре в какой-то момент времени,  $\Delta W$  - потери в контуре за период. Будем рассматривать добротность только при слабом затухании  $\gamma \ll \omega_0$ .

$$U_c \approx U_0 e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t; \quad W = \frac{CU^2}{2} = CU_0^2 e^{-2\gamma t} \quad (\text{удобнее рассматривать моменты когда } I = 0)$$

Потеря энергии за период равна (учтём что  $\gamma \ll \omega_0$ ; или  $2\gamma T \ll 1$ )

$$\Delta W = \frac{CU_0^2}{2} (e^{-2\gamma t} - e^{-2\gamma(t+T)}) = W(1 - e^{-2\gamma T}) \approx 2\gamma TW$$

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W} = \frac{\pi}{\gamma T} \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Логарифмическим коэффициентом затухания  $\theta$  называется логарифм отношения двух последовательных максимальных отклонений в одну сторону.

$$\theta = \ln \frac{U_k}{U_{k+1}} = \ln e^{\gamma T} = \gamma T = \frac{\pi}{Q}$$

### 3.14 Вынужденные колебания под действием синусоидальной силы

#### Вынужденные колебания под действием синусоидальной силы.

Если в колебательный контур вставить последовательно источник переменного синусоидального напряжения, то получится неоднородное уравнение, решением которого будут затухающие колебания + стационарное решение:

$$U_c + \dot{U}_c CR + \ddot{U}_c CL = E \cos \omega t;$$

$$U_c(t) = A_1 e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + \frac{E \cos(\omega t + \arctan(R\omega C/(1 - \omega^2 LC)))}{\sqrt{\omega^4 L^2 C^2 + \omega^2 (C^2 R^2 - 2LC) + 1}}$$

Чтобы не работать со столь сложными уравнениями можно прийти к простой идее, что стационарное решение в лучшем случае должно давать такие же синусоидальные колебания тока и напряжения на всех элементах цепи (предполагаем что такое решение уравнения в цепях есть всегда). В таком случае колебания напряжения и тока на элементе можно описать вращением постоянного по длине вектора в комплексной плоскости, ведь комплексная часть решения в уравнении слева и справа сокращается, что даёт нам возможность задать  $E \cos \omega t$  так же вращающимся вектором  $E e^{i\omega t}$  (равенство векторов даёт равенство проекций на действительную ось, что нам и нужно). Заметим, что для конденсатора, индуктивности и резистора в случае гармонических колебаний выполняются обобщённые законы Ома:

$$U_c = -\frac{i}{\omega C} I_c; U_L = i\omega L I_L; U_R = R I_R \quad (U_R, I_R, U_c, I_c, U_L, I_L \text{ комплексные в общем случае})$$

Данный факт позволяет нам складывать импедансы ("сопротивления" элементов в общем случае) параллельно и последовательно также как и для резисторов. Таким образом получаем:

$$E = I \cdot (R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}); |E| = |I| \cdot |(R + i\omega L - \frac{i}{\omega C})|;$$

Таким образом легко получить сдвиг фаз как угол между векторами  $E$  и  $I$ :  $\varphi = \arctan(R\omega C/(1 - \omega^2 LC))$

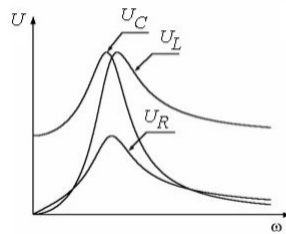
#### Амплитудная и фазовая характеристики. Резонанс.

Найдём зависимости амплитуды  $U_c$ ,  $U_L$  и  $I$  в контуре от частоты:

$$U_c = E / \sqrt{\omega^4 L^2 C^2 + \omega^2 (C^2 R^2 - 2LC) + 1};$$

$$U_L = E / \sqrt{(1 - \frac{1}{\omega^2 LC})^2 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}};$$

$$I = E / \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}$$



$$\text{Для } U_c \quad \omega_{\text{рез}}^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2$$

$$\text{Для } U_L \quad \omega_{\text{рез}}^2 = \frac{1}{LC - R^2 C^2}$$

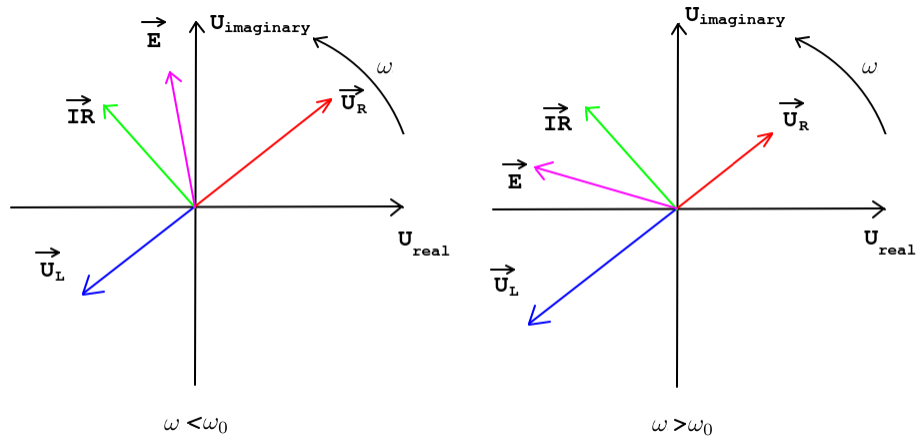
$$\text{Для } U_R \text{ или } I \quad \omega_{\text{рез}} = \omega_0$$

Важно заметить, что частоты эти не совпадают и даже не всегда существуют.

Найдём фазовочастотные характеристики для  $U_c$ ,  $U_L$  и  $I$  в контуре:

$$\phi_c = -\arctan(R\omega C/(1 - \omega^2 LC)); \phi_I = \arctan((1 - \omega^2 LC)/R\omega C); \phi_L = -\arctan(R\omega C/(1 - \omega^2 LC)) = \pi + \phi_c;$$





### Ширина резонанса и ее связь с добротностью.

Формулу для тока в RLC цепи можно переписать как:

$$I = \frac{E/(2\gamma L)}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0})^2 (\frac{\omega_0}{2\gamma})^2}}; I_{\text{рез}} = E/R$$

Тогда если использовать формулу для добротности свободных колебаний (и так сойдёт!):

$$\frac{I}{I_{\text{рез}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0})^2 Q^2}}$$

А если ещё  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{|\omega - \omega_0|}{\omega_0} \ll 1$  и  $Q \gg 1$  (иначе формулу для добротности нельзя было использовать):

$$\frac{I}{I_{\text{рез}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{2\Delta\omega}{\omega_0})^2 Q^2}}$$

Наложим условие и найдём соотношение для ширины кривой и добротности:

$$\frac{I}{I_{\text{рез}}} = 1/\sqrt{2}; Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\Omega}$$

В параллельном контуре при приближении к резонансу  $\omega = \omega_0$  резко возрастает сопротивление, так что удобнее было бы рассматривать зависимость напряжения на цепи в зависимости от частоты при подключённом источнике синусоидального тока (амплитуда тока постоянна). В таком случае форма резонансной кривой и её ширина такая же как и в рассмотренном выше случае

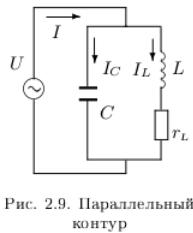


Рис. 2.9. Параллельный контур

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r_L} = \frac{1}{r_L \omega_0 C} \quad U_0 = I_0 Z_0 = \frac{I_0 \Omega L}{\sqrt{[1 - (\Omega/\omega_0)^2]^2 + (r_L \Omega C)^2}}.$$

$$\frac{U_0(\Omega)}{U_{0,p}} = \frac{r_L \Omega C}{\sqrt{[1 - (\Omega/\omega_0)^2]^2 + (r_L \Omega C)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega_0}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2}}.$$

### Процесс установления вынужденных колебаний, биения.

Процесс установления колебаний это вынужденные колебания + затухающие (свободные). Всерьёз находить эти коэффициенты из начальных условий вас вряд ли заставят.

Биения возникают при сложении очень близких по частоте колебаний. Например, когда в RLC цепи начинают подавать сигнал, близкий к резонансному. В таком случае складываются затухающие и стационарные колебания. Если подать сигнал с частотой, очень близкой к резонансной, то биения не будут видны, так как разность фаз между сигналами не успеет сильно вырасти за характерное время затухания свободных колебаний. Условие возникновения биений:

$$\Delta\omega \ll \frac{\omega}{Q}, \quad \Rightarrow \quad U = U_0(1 - e^{-\gamma t})\cos(\omega_0 t - \phi); \quad \theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_0 - U_k}{U_0 - U_{k+n}}.$$

### 3.15 Комплексная форма представления колебаний

#### Метод комплексных амплитуд

Рассмотрим  $U = U_0 \cos(\Omega t + \varphi)$ . По методу комплексных амплитуд

$$U = U_0 e^{i(\Omega t + \varphi)}.$$

Он применим всегда, когда  $\text{Re}$  и  $\text{Im}$  не смешиваются.

Можем ввести импеданс – комплексное сопротивление, при чём  $\text{Re}(z)$  – активное сопротивление,  $\text{Im } z$  – реактивное сопротивление.

#### Мощность переменного тока

Рассмотрим некоторый элемент

$$I = I_0 \cos(\Omega t + \psi) = \text{Re } I_0 e^{i\psi} e^{i\Omega t}, \quad U = U_0 \cos(\Omega t + \varphi) = \text{Re } U_0 e^{i\varphi} e^{i\Omega t}.$$

Мгновенное значение мощности

$$P = UI = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos(\psi - \varphi) + \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos(2\Omega t + \varphi + \psi), \quad \Rightarrow \quad \langle P \rangle_T = \frac{1}{T} \int P dt = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos(\psi - \varphi).$$

Можно исправить метод комплексных амплитуд сопряжением.

$$\langle P \rangle_T = \frac{1}{2} \tilde{I} \tilde{U}^*, \quad I_{\text{эфф}} = \frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad U_{\text{эфф}} = \frac{1}{T} \int_0^T U^2 dt.$$

### 3.17 Спектральный анализ линейных систем

#### Спектральное разложение

Представим  $\mathcal{E}$ , как

$$\mathcal{E} = \sum_j a_j \cos(\omega_j t + \varphi_j).$$

Тогда мы в линейной системе всегда можем работать с синусоидальной возбуждающей силой.

Пусть функция  $f(t)$  периодическая с периодом  $T$ , тогда

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} C_n \exp(i\omega_n t), \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-i\omega_n t} dt, \quad \omega_n = \omega_0 n, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

В случае, если  $f(t)$  не является периодической, то спектр перестает быть дискретным

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} A(\omega) \exp(i\omega t) d\omega, \quad A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt.$$

#### Прямоугольный сигнал

Рассмотрим прямоугольный сигнал. Для него

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f_0 \exp(-i\omega t) dt = f_0 \tau \frac{1}{\omega \tau/2} \left( \frac{e^{i\omega \tau/2} - e^{-i\omega \tau/2}}{2i} \right) = f_0 \tau \cdot \left( \frac{\sin \omega \tau/2}{\omega \tau/2} \right)$$

Основная часть спектра лежит в

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}, \quad \Delta\omega \cdot \tau = 2\pi.$$

Рассмотрим теперь последовательность прямоугольных сигналов с шириной  $\tau$  и периодом  $T$ . Тогда

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f_0 \exp(-in\Omega t) dt = \frac{2f_0\tau}{T} \cdot \frac{\sin \omega \tau/2}{\omega \tau/2}$$

#### Амплитудная модуляция

Рассмотрим амплитудную модуляцию

$$U = A(1 + m \cos \Omega t) \cdot \cos \omega_0 t, \quad \Omega \ll \omega_0, \quad m < 1.$$

Тогда

$$U = A \left( 1 + m \underbrace{\frac{1}{2} (e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t})}_{\cos \Omega t} \right) \cdot \underbrace{\exp(i\omega_0 t)}_{\cos \omega_0 t}$$

Раскрыв скобки получаем, что

$$U = A e^{i\omega_0 t} + \frac{Am}{2} e^{i(\omega_0 - \Omega)t} + \frac{Am}{2} e^{i(\omega_0 + \Omega)t}$$

Вообще может быть  $U = F(\tau) \cdot \cos \omega_0 t$ ,  $\tau \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

#### Фазовая модуляция

Рассмотрим фазовую модуляцию

$$U = A \cos(\omega_0 t + m \cos \Omega t), \quad \Omega \ll \omega_0, \quad m \ll 1.$$

Перепишем комплексными амплитудами

$$U = A \cdot e^{i\omega_0 t} \cdot \exp\left(im \frac{1}{2} (e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t})\right) = A e^{i\omega_0 t} \left(1 + \frac{m}{2} i e^{i\Omega t} + \frac{m}{2} i e^{-i\Omega t}\right) = A e^{i\omega_0 t} + \frac{Am}{2} i e^{i(\omega_0 - \Omega)t} + \frac{Am}{2} i e^{i(\omega_0 + \Omega)t}.$$

То есть теперь есть сдвиг по фазе на  $\pi/2$ .

#### Детектирование сигнала

Пусть есть некоторое преобразование из  $f(t)$  в  $g(t)$ , при чем

$$g(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} f^2(t) dt.$$

Давайте  $\Delta t \gg T_0 = 2\pi/\omega_0$ , при этом  $\Delta t \ll \tau$ , то мы сохраним информацию об огибающей, где  $\tau$  – характерное время изменения модулирующей функции. Рассмотрим  $f(t) = A(1 + m \cos \Omega t) \cdot \cos \omega_0 t$  – амплитудную модуляцию.

$$g(t) = \frac{A^2}{\Delta t} (1 + 2m \cos \Omega t).$$

Или, методом комплексных амплитуд,

$$f(t) = A(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t, \quad g(t) = \frac{A^2}{2} (1 + 2m \cos \Omega t),$$

$$g(t) = \frac{1}{2} f(t) \cdot f^*(t).$$

Посмотри теперь историю с фазовой модуляцией, без несущей. Тогда

$$g(t) = \left( \frac{mA}{2} \right)^2 \cdot (1 + \cos 2\Omega t).$$

Или можно сдвинуть фазу несущей на  $\pi/2$ , тогда ситуация аналогична амплитудной модуляции, тогда

$$g(t) = \frac{A}{2} (1 + 2m \cos \Omega t).$$

### 3.18 Шумы

#### Тепловой шум

Что это такое? *Тепловой шум* – беспорядочное тепловое движение носителей. Рассмотрим  $\langle v_{\text{ш}}^2 \rangle$ . Хотелось бы получить формулу

$$\langle v_{\text{ш}}^2 \rangle = 4k_{\text{Б}}TR\Delta f, \quad - \quad \text{формула Найквиста.} \quad (3.43)$$

Какого порядка шумы? При  $R \sim 10^4$  Ом,  $\Delta f \sim 10^3$  Гц, и  $T \sim 300$  К, увидим что  $\sqrt{\langle v_{\text{ш}}^2 \rangle} \sim 4 \cdot 10^{-7}$  В.

Рассмотрим систему с длинной линией, длины  $l$ , и два резистора сопротивлением  $R$ . Пусть системе в термодинамическом равновесии при температуре  $T$  что-то происходит. Оба резистора могут быть закорочены. Возможны волны, такие что

$$n \frac{\lambda_n}{2} = l = n \frac{c}{2f_n}, \quad \Rightarrow \quad \Delta n = \frac{2l}{c} \Delta f.$$

Тут вспомним, что каждая такая мода может быть рассмотрена как колебательная система, на каждую из которых придётся  $k_{\text{Б}}T$ . Тогда

$$\Delta n k_{\text{Б}}T = k_{\text{Б}}T \frac{2l}{c} \Delta f.$$

Найдём теперь выделяющуюся на нагрузке мощность:

$$P = \left( \frac{\mathcal{E}}{2R} \right)^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{4R} = \frac{\langle v_{\text{ш}}^2 \rangle}{4R}$$

Так как время пробега  $\tau = l/c$ , тогда

$$\Delta n k_{\text{Б}}T = 2P\tau, \quad \Rightarrow \quad k_{\text{Б}}T \frac{2l}{c} \Delta f = 2 \frac{\langle v_{\text{ш}}^2 \rangle l}{4R c}, \quad \Rightarrow \quad \langle v_{\text{ш}}^2 \rangle = 4k_{\text{Б}}TR\Delta f,$$

что и требовалось доказать. К слову при  $f > 10^{12}$  Гц начинают влиять квантовые эффекты.

#### Дробовой шум

*Дробовой шум* – шум, обусловленный конечным зарядом носителя. Посмотрим внимательнее на эффект Шотки. Рассмотрим схемы, с последовательно соединенными источником, лампой, амперметром и резистором. Тогда

$$\langle i_{\text{ш}}^2 \rangle = 2eI_0\Delta f.$$

Аналогично рассматриваем некоторый фиксированный диапазон частот. Если нас интересует напряжение на резисторе, то

$$\langle v_{\text{ш}}^2 \rangle = 2eR^2I_0\Delta f.$$

Имеет порядки  $5 \cdot 10^{-5}$  В.

#### Роль шумов в жизни

Как минимум, в автоколебательной системе шумы могут начать автоколебательный процесс. Кстати, идеальных синусоидальных процессов не бывает. Также можем сформулировать критерий измеряемости сигналов

$$\langle v_{\text{ш}}^2 \rangle \approx v_0^2, \quad (3.44)$$

для измерения слабого сигнала  $v_0$ .

### 3.19 Некоторые виды вынужденных колебаний

#### Параметрическое возбуждение колебаний

Положим, что с помощью надлежащего прибора  $L$  или  $C$  колебательного контура периодически меняются во времени. Уравнения описывающие такую систему:

$$\frac{d\Phi}{dt} + RI + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt} \left( L \frac{dq}{dt} \right) + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (3.45)$$

При определенных условиях система становится неустойчивой – случайно возникшее отклонение от состояния равновесия приводит в ней к возникновению и нарастанию колебаний. Это явление, поскольку оно вызывается изменениями параметров системы, называется *параметрическим возбуждением колебаний*, а сами колебания – *параметрическими*.

Нахождение условий возбуждения параметрических колебаний сводится к исследованию решений линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Но и решая линейные уравнения мы получим лишь *условия возбуждения колебаний*, но никак не *установление из стационарной амплитуды*, так как при достаточно больших амплитудах диф-уры становятся нелинейными.

Возьмём колебательный контур, в котором будем через определенные промежутки времени скачкообразно менять  $L$  ( $L_1 > L_2$ ). Соответственно собственные частоты:  $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1 C}$  и  $\omega_2 = 1/\sqrt{L_2 C}$

В контуре всегда текут токи, вызванные случайными внешними наводками или тепловыми флуктуациями. Нам нужно в момент, когда ток в катушке максимален уменьшить индуктивность  $L_1 \rightarrow L_2$ . Магнитный поток при этом останется неизменным, а ток возрастёт  $I_{10} \rightarrow I_{20} = (L_1/L_2)I_{10}$ .

С этого момента в цепи начнутся свободные колебания  $I = I_{20} \cos \omega_2 t$ . Когда через  $t = T_2/4$   $I \rightarrow 0$  уже увеличим  $L_2 \rightarrow L_1$ . Раз в этот момент ток через катушку не течет, то амплитуда не поменяется, а измениться лишь частота:  $I = I_{20} \sin \omega_1 t$ , где  $t$  – время с последнего изменения (здесь и далее). И вновь при максимальном токе уменьшим индуктивность, получив ток  $I_{30} = (L_1/L_2)I_{20} = (L_1/L_2)^2 I_{10}$ .

Получаем безгранично возрастающую амплитуду, без какого либо источника тока или напряжения. Такая раскочка называется *параметрическим резонансом*.

#### Автоколебаниями

*Автоколебаниями* называются вынужденные незатухающие колебания в реальных системах, период и амплитуда которых не зависят от характера внешнего воздействия, а определяются свойствами самой автоколебательной системы. Автоколебания поддерживаются за счет поступления энергии из внешнего источника, причем количество поступающей энергии регулируется самой системой.

В отличие от собственных колебаний, амплитуда автоколебаний не зависит от начальных условий. Автоколебания продолжаются пока не израсходуется энергия источника, поддерживающего их.

Ламповый генератор является важнейшей автоколебательной системой. Колебательный контур подключен к сетке откатенной лампе, которая в свою очередь через питается от источника  $\mathcal{E}$ , и связана катушкой обратной связи с контуром с коэффициентом  $M$ .

Если возбудить в контуре колебания, тогда анодный ток тоже будет колебаться, т.к. напряжение на сетке регулирует его. А именно в определенном диапазоне сеточного напряжения  $I_{\text{анод}} + \text{линеен от } v_{\text{сетки}}$ . Получаем уравнение

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{c} = -M \frac{dI_a}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad L\ddot{v}_c + R\dot{v}_c + \frac{v_c}{C} = -\frac{M}{C} \frac{dI_a}{dt}. \quad (3.46)$$

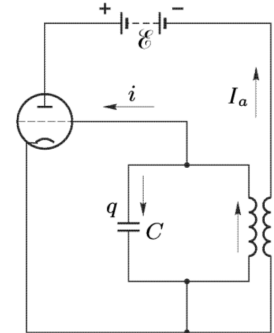
Для определения условий самовозбуждения в полученном уравнении в диапазоне линейности  $I_a(v_c) = I_0 + Sv_c$ , где  $S = dI_a/dv_c$ . Тогда для нашего уравнения :  $dI/dt = Sdv_c/dt$ . Подставляем:

$$L\ddot{v}_c + R\dot{v}_c + \frac{v_c}{C} = -\frac{SM}{C} \dot{v}_c. \quad \rightsquigarrow \quad L\ddot{v}_c + \left( R + \frac{SM}{C} \right) \dot{v}_c + \frac{v_c}{C} = 0. \quad (3.47)$$

Как видим получили будто колебания контура, но с изменённым  $R^* = R + MS/c$ . Когда коэффициент взаимной индукции  $M$  отрицателен – это называется *положительной обратной связью*, для которой  $R^* = R - |M|S/c$ .

Как известно, решение для контура:  $v_c = Ae^{-\delta^* t} \cos(\omega t + \varphi)$ . В нашей системе может случиться так, что  $\delta^* < 0$  сможет при  $|M|S > RC$  – это называется *условием самовозбуждения*.

Мы вновь получили возрастающие колебания, но в анодном токе при увеличении амплитуда сеточного напряжения наступает насыщение, то есть нелинейность и снова нашу систему на разнесёт. Можно найти установившуюся амплитуду с этой нелинейностью.



## 4.20 Уравнения Максвелла

Естественно ввести *тензор электромагнитного поля*:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}_{ik}, \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}^{ik} \quad (4.48)$$

Тогда уравнения Максвелла запишутся в виде

$$\boxed{\varepsilon^{iklm} \partial_k F_{lm} = 0, \quad \partial_k F^{ik} = -\frac{4\pi}{c} j^i}, \quad (4.49)$$

где  $j^i = (\rho c, \mathbf{j})$ . Прямой подстановкой тензора ЭМ поля нетрудно убедиться, что

Дифференциальная форма в СГС:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho \quad (4.50)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (4.51)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.52)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.53)$$

Интегральная форма в СГС:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi Q \quad (4.54)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (4.55)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.56)$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.57)$$

$\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля;

$\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля;

$\mathbf{D}$  — электрическая индукция;

$\mathbf{B}$  — магнитная индукция.

### Материальные уравнения

В проводниках связь между плотностью тока и напряжённостью электрического поля выражается в линейном приближении *законом Ома*:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

где  $\sigma$  — *удельная проводимость среды*.

В среде сторонние электрические и магнитные поля вызывают поляризацию  $\mathbf{P}$  и намагничивание вещества  $\mathbf{M}$ . Тогда

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{j}_b = c\nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},$$

Далее, по определению

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$$

Что в случае линейной поляризации или линейной намагниченности можно записать, как

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}, \\ \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = (1 + 4\pi\chi_e) \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = (1 + 4\pi\chi_m) \mathbf{H}. \end{cases}$$

где  $\varepsilon$  — *относительная диэлектрическая проницаемость*,  $\mu$  — *относительная магнитная проницаемость*,  $\chi_e$  — *диэлектрическая восприимчивость*,  $\chi_m$  — *магнитная восприимчивость*.

Наконец, в однородных средах верно, что

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j} + \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{cases}$$

где в оптическом диапазоне принято  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ .

## Граничные условия

Опять же, в СГС,

$$\begin{cases} (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n}_{1,2} = 0, \\ (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{n}_{1,2} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s, \end{cases} \quad \begin{cases} (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n}_{1,2} = -4\pi \rho_s, \\ (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n}_{1,2} = 0, \end{cases}$$

где  $\rho_s$  – поверхностная плотность свободных зарядов,  $\mathbf{j}_s$  – плотность поверхностных свободных токов вдоль границы.

Эти граничные условия показывают непрерывность нормальной компоненты вектора магнитной индукции, и непрерывность на границе областей тангенциальных компонент напряжённости электрического поля.

## Уравнение непрерывности

Источники полей  $\rho, \mathbf{j}$  не могут быть заданы произвольным образом. Применяя операцию дивергенции к четвёртому уравнению (закон Ампера—Максвелла) и используя первое уравнение (закон Гаусса), получаем уравнение непрерывности

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV.$$



## 4.21 Вектор Умова-Пойтинга

Вспомнив пару уравнений Максвелла и домножив на  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$  соответственно, получим

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{c} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c} \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \underbrace{\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}}_{-\operatorname{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]}.$$

Поэтому естественно ввести следующее определение:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \quad \text{— вектор Умова-Пойтинга.} \quad (4.58)$$

Тогда уравнение переписется в следующем виде (теорема Пойтинга в диф-форме):

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \operatorname{div} \mathbf{S}. \quad (4.59)$$

Проинтегрировав по некоторому объёму, поймём, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV = - \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV - \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f}, \quad (4.60)$$

вспомнив скорость изменения кинетической энергии, получим, так называемую, *теорему Пойтинга*

$$\begin{aligned} e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\text{кин}}, \quad \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV = \sum e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}, \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int \frac{E^2 + H^2}{8\pi} dV + \sum \mathcal{E}_{\text{кин}} \right] = - \oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

И теперь уже естественно разделить левую часть на энергию зарядов, и энергию поля:

$$\mathcal{W} = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \quad \text{— плотность энергии ЭМ поля,}$$

а также ввести следующую величину:

$$\oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{f} \quad \text{— поток энергии ЭМ поля.}$$

## 4.22 Волновое уравнение

Пусть есть диэлектрик без свободных зарядов и токов проводимости  $\mathbf{j} = 0$  с  $\mu, \varepsilon$ .

Однако при постоянных полях, как мы уже выяснили, уравнения Максвелл обратятся в тождественный 0, соответственно рассмотрим переменные поля. Давайте выберем 4-потенциал так, чтобы  $\varphi = 0$ . Тогда

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Далее,

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \Rightarrow \quad \text{rot rot } \mathbf{A} = -\nabla \mathbf{A} + \text{grad div } \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}.$$

Выберем потенциал так, чтобы

$$\text{div } \mathbf{A} = 0.$$

Тогда уравнение приобретает вид

$$\nabla \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \quad - \text{уравнение д'Аламбера или волновое уравнение.} \quad (4.62)$$

Применяя к нему  $\text{rot}$  и  $\partial/\partial t$ , можем убедиться, что напряженности  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют таким же волновым уравнениям.

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases}; \quad \begin{cases} \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \end{cases}; \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}] = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} \\ \nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}] = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{B} \end{cases}; \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta \mathbf{E} = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0}. \quad (4.63)$$

Аналогично для  $\mathbf{B}$  мы можем записать, что

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon \mu} \Delta \mathbf{B}.$$

Общее решение такого уравнения имеет вид

$$\xi = f_1(z - vt) + f_2(z + vt).$$

При произвольном виде  $f_1, f_2$  они удовлетворяют волновому уравнению. Тогда

$$v_1^2 f_1'' = \frac{c^2}{\varepsilon \mu} f_1'', \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = c/\sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

Получается, что любое возмущение распространяется с конечной скоростью  $v$ . Какие ещё у нас следствия?

1. Существуют электромагнитные волны;
2. Они поперечны:  $\mathbf{E}, \mathbf{H}: \mathbf{k} \perp \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ ;
3. Распространение происходит с конечной скоростью  $c/\sqrt{\varepsilon \mu}$ ;
4. В вакууме  $v \approx 3 \cdot 10^{10} \approx c$ , таким образом свет – ЭМ волна.

Найдём связь между электрической и магнитными компонентами волны. Пусть

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} \end{cases}, \quad \begin{cases} E_x = f(z \mp vt); \\ B_y = g(z \mp vt), \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'' = \pm \frac{v}{c} g', \quad \Rightarrow \quad f = \pm \frac{v}{c} g + \text{const}.$$

Прямой подстановкой убедились, что

$$E_x = \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} B_y, \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\varepsilon E_x^2 = \mu H_y^2}.$$

### Плоские волны

Рассмотрим частный случай ЭМ волн, когда поле зависит только от одной координаты, скажем  $x$  (и от времени) – *плоская* волна. Тогда уравнения поля примут вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$$

где под  $f$  подразумевается любая компонента  $\mathbf{E}$  или  $\mathbf{H}$ . Перепишем уравнение в виде

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) f = 0$$

и введем новые переменные

$$\xi = t - \frac{x}{c}, \quad \eta = t + \frac{x}{c}, \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{2} (\eta + \xi), \quad x = \frac{c}{2} (\eta - \xi).$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Очевидно, что его решение имеет вид

$$f = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

где  $f_1$  и  $f_2$  – произвольные функции. Таким образом

$$f = f_1 \left( t - \frac{x}{c} \right) + f_2 \left( t + \frac{x}{c} \right). \quad (4.64)$$

Пусть, например,  $f_2 = 0$ . Выясним смысл этого решения. Очевидно, что для

$$t - \frac{x}{c} = \text{const} \Rightarrow f = \text{const} \Rightarrow \text{при } x = \text{const} + ct$$

волна имеет одинаковые значения, то есть распространяется вдоль  $x$  со скоростью, равной скорости света  $c$ . Пусть  $\mathbf{n}$  – единичный вектор вдоль волны, тогда

$$\mathbf{H} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]. \quad (4.65)$$

Повторимся, именно поэтому эм волны называют *поперечными*. Поток энергии в плоской волне

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]] = \frac{c}{4\pi} E^2 \mathbf{n} = \frac{c}{4\pi} H^2 \mathbf{n} = cW \mathbf{n},$$

где  $W = (E^2 + H^2)/8\pi = E^2/4\pi$ , в согласии с распространением со скоростью света.

### Монохроматическая плоская волна

Важный частный случай ЭМ волн – волны, в которых поле является простой периодической функцией, такая волна называется *монохроматической*. Все компоненты зависят от времени посредством множителя  $\cos(\omega t + \alpha)$ , где  $\omega$  – *циклическая частота*. Тогда волновое уравнение примет вид

$$\nabla^2 f + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0, \quad \left( \text{а для сред уравнение Гельмгольца} \begin{cases} \Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \\ \Delta \mathbf{B} + k^2 \mathbf{B} = 0 \end{cases}, \quad k^2 = \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \right)$$

В плоской волне поле является функцией только  $t - x/c$ , поэтому если плоская волна монохроматична, то ее поле является простой периодической функцией. Векторный потенциал такой волны удобнее всего написать в виде вещественной части комплексного выражения:

$$\mathbf{A} = \text{Re}\{\mathbf{A}_0 \exp(-i\omega(t - x/c))\}.$$

Здесь  $\mathbf{A}_0$  – некоторый постоянный комплексный вектор. Очевидно, что и напряженности  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в такой волне будут иметь аналогичный вид с той же частотой  $\omega$ . Величины

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \quad \text{— длина волны.} \quad (4.66)$$

По сути это период изменения поля координате  $x$  в заданный момент времени  $t$ . Вектор

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}, \quad \text{— волновой вектор.} \quad (4.67)$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор в направлении распространения волны. С его помощью уравнение можем переписать в виде

$$\mathbf{A} = \text{Re}\{\mathbf{A}_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t))\},$$

инвариантно к выбору системы координат. Величину, с множителем  $i$  называют *фазой волны*.

До тех пор, пока наши операции линейны, можем опустить знак взятия вещественной части и получить

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)),$$

подставив в волновое уравнение, получим связь между напряженностями и векторным потенциалом плоской монохроматической волны в виде

$$\mathbf{E} = ik\mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = i[\mathbf{k} \times \mathbf{A}]. \quad (4.68)$$

Рассмотрим отдельно  $\mathbf{E}$ . Нетрудно получить, что

$$E_y = b_1 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \alpha), \quad E_z = \pm b_2 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \alpha).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1.$$

Получается, что в каждой точке пространства вектор  $\mathbf{E}$  вращается в плоскости, нормально к распространению волны, при чём его конец описывает эллипс. Такая волна называется *эллиптически поляризованной*.

Если  $b_1$  или  $b_2$  равны 0, то волну называют *линейно поляризованной*.

## 4.23 Волны на границе диэлектриков

### Давление света

При полном поглощении запишем следующее:

$$w = \frac{E^2}{4\pi} = pc, \quad p = \frac{E^2}{4\pi c} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{1}{dS} \frac{d(p dV)}{dt} = \frac{E^2}{4\pi}, \quad \langle P \rangle = \frac{\langle E^2 \rangle}{4\pi}.$$

Или, по-другому

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = \text{rot } \mathbf{H} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = \text{rot } \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \frac{\mathbf{E}}{4\pi} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \cdot \frac{\mathbf{B}}{4\pi} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{f} + \frac{1}{8\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}).$$

Таким образом

$$\frac{\partial}{\partial z} \langle w \rangle = \langle f \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle P \rangle = \int_0^\infty \langle f \rangle dz = w(0) - w(\infty) = w(0) = \frac{\langle E^2 \rangle}{4\pi}.$$

Что и требовалось доказать!) Кстати,

$$\bar{S} = c \cdot \overline{\mathcal{W}_{\text{эл}}}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g}_{\text{эм}} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}].$$

### Формулы Снеллиуса

Скорость распространения света

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Для нормальной и тангенциальной компоненты воспользуемся граничными условиями

$$\begin{aligned} E_2 \cos \psi &= E_1 \cos \varphi - E'_1 \cos \varphi \\ \varepsilon_2 E_2 \sin \psi &= \varepsilon_1 (E_1 \sin \varphi + E'_1 \sin \varphi'), \end{aligned}$$

при чём  $\varepsilon_2 = n_2^2$ . И для  $B$  верно, что

$$B_1 + B'_1 = B_2.$$

Верно, что на границе

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kx \sin \varphi, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{10} e^{i\omega t} e^{-ik_1 x \sin \varphi}, \quad \Rightarrow \quad E_1 \sim \cos(k_1 x \sin \varphi).$$

Вспомним, что  $\sqrt{\varepsilon} E = H \sqrt{\mu} = H$ , тогда

$$\boxed{n_1(E_1 + E'_1) = n_2 E_2}, \quad \boxed{\varphi = \varphi'}.$$

Можем сказать, что

$$n_1 (\hat{E}_{10} e^{ik_1 x \sin \varphi} + \hat{E}'_{10} e^{-ik'_1 x \sin \varphi'}) = n_2 \hat{E}_{20} e^{ik_2 x \sin \psi}.$$

Мы знаем связь для  $k = 2\pi/\lambda$ , соответственно  $k_1 = k'_1$ . Приходим к системе

$$k_1 \sin \varphi = k_2 \sin \psi, \quad \frac{n_1 (\hat{E}_{10} + \hat{E}'_{10})}{n_2 \hat{E}_{20}} = \exp \left( \underbrace{-ix(k_2 \sin \psi - k_1 \sin \varphi)}_{=0} \right).$$

Ещё можем записать, что

$$n = \frac{\varepsilon\mu\omega}{ck}.$$

Получили формулы Снеллиуса.

$$\boxed{n_1 \sin \varphi = n_2 \sin \psi = \frac{n^2 \omega}{ck}}.$$

Запишем формулы Френе. Для  $P$ -поляризации

$$E_2 = E_1 \cdot \left( \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \theta) \cos(\varphi - \psi)} \right), \quad E'_1 = E_1 \cdot \left( \frac{\text{tg}(\varphi - \psi)}{\text{tg}(\varphi + \psi)} \right).$$

Для  $S$ -поляризации

$$E'_1 = -E_1 \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}, \quad E_2 = E_1 \frac{2 \sin \psi \cos \varphi}{\sin(\varphi + \psi)}.$$

При угле между  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{k}_2$  равным  $\pi/2$  волна полностью проникает внутрь. Что ж, действительно,  $\varphi + \psi = \pi/2$ , тогда  $n_1 \sin \varphi = n_2 \sin \psi = n_2 \cos \varphi$ , тогда  $\text{tg } \varphi = n_2/n_1$ .

## Излучение диполя

Рассмотрим антенку-диполь,  $l \ll \lambda$ . Два шарика перезаряжаются, и

$$p = ql = p_0 \cos \omega t.$$

Ток будет равным

$$I = \dot{q} = \frac{\dot{p}}{l} = -\frac{1}{l} \omega p_0 \sin \omega t = I_0 \sin \omega t.$$

Окружим диполь сферой. При  $r \ll \lambda$  можем пренебречь запаздыванием, тогда можем говорить про статические формулы и  $E \sim r^{-3}$  и  $B \sim r^{-2}$ .

Однако наиболее интересен второй случай при  $r \gg \lambda$ . Тогда поле имеет вид сформировавшейся бегущей волны  $\mathbf{k} \nparallel \mathbf{r}$ . Вектор  $\mathbf{E}$  ориентирован по меридиану сферы, вектор  $\mathbf{B}$  ориентирован по широте,  $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{k}$  образуют правую тройку.

$$E = B = \frac{\ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) \sin \theta}{c^2 r}. \quad (4.69)$$

Рассмотрим это подробнее.

$$\ddot{p} \left( t - \frac{r}{c} \right) = \omega_0^2 p_0 \cos \left( \omega \left( t - \frac{r}{c} \right) \right), \quad \Rightarrow \quad \ddot{p} = -\omega^2 p_0 \cos(\omega t - kr).$$

Найдём среднее значение для вектора Пойтинга

$$\bar{S} = \frac{1}{8\pi} E_0^2 n, \quad \Rightarrow \quad \bar{S} = \frac{1}{8\pi c^3} \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{r^2}.$$

Найдём интеграл по поверхности – полный поток энергии

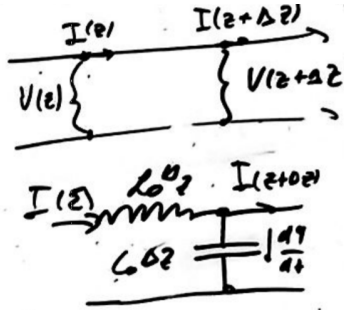
$$\int \bar{S} d\sigma = \int \bar{S} 2\pi r \sin \theta r d\theta = \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^3} = \frac{l^2 \omega^2}{3c^3} I_0^2 = \frac{1}{2} R_{\text{изл}} I_0^2.$$

## 4.24 Длинные провода

Длинная линия — модель линии передачи, продольный размер (длина) которой превышает длину волны, распространяющейся в ней. Такая линия передачи может быть охарактеризована погонными параметрами:  $R_0$  — погонное сопротивление,  $G_0$  — паразитная, погонная проводимость,  $L_0$  — погонная индуктивность,  $C_0$  — погонная емкость.

Рассмотрим два рядом идущих длинных провода (коаксиальный кабель, например). Тогда в  $z$  и  $z + \Delta z$  ток будет различным, как и, соответственно, разность потенциалов.

$$V(z + \Delta z) - V(z) = \frac{L_0 \Delta z}{c^2} \frac{\partial I}{\partial t}, \quad I(z) = I(z + \Delta z) + \frac{\partial q}{\partial t}, \quad q = C_0 \Delta z V.$$



Из этих уравнений легко получить, что

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{L_0}{c^2} \frac{dI}{dt} \\ \frac{\partial I}{\partial z} = -C_0 \frac{\partial U}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{c^2}{L_0 C_0} - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}. \quad (4.70)$$

Решение аналогично будем искать в виде

$$V = f_1(z - vt) + f_2(z + vt), \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (4.71)$$

Кстати, если это всё посчитать для коаксиального кабеля, то

$$L_0 = 2\mu \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad C_0 = \frac{\epsilon}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}}, \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}}.$$

### Коэффициент стоячей волны (standing wave ratio)

Коэффициент стоячей волны — отношение наибольшего значения амплитуды напряжённости электрического или магнитного поля стоячей волны в пучностях линии передачи к амплитуде в узлах. КСВ является мерой согласования нагрузки (например, антенны) с линией передачи.

Наибольшее и наименьшее значения амплитуды соответственно равны

$$A_{\max} = A_{\text{inc}} + A_{\text{ref}}, \quad A_{\min} = A_{\text{inc}} - A_{\text{ref}}, \quad \Rightarrow \quad \text{КСВ} = \frac{A_{\text{inc}} + A_{\text{ref}}}{A_{\text{inc}} - A_{\text{ref}}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|},$$

где  $|\Gamma|$  — коэффициент отражения.

### Согласованная нагрузка

Рассмотрим длинную линию, пусть в цепи

$$U = U_0 \cos(\omega_0 t - kz), \quad I = I_0 \cos(\omega_0 t - kz).$$

Сделаем следующий трюк. Возьмем, и продолжим линию до бесконечности, от которой, очевидно, ничего не отразится. Соответственно нас интересует поиск эквивалентного импеданса системы.

$$U^* = U_0 \exp(i(\omega_0 t - kz)) = U_0 e^{ikz} e^{-i\omega_0 t},$$

$$I^* = I_0 \exp(i(\omega_0 t - kz)) = I_0 e^{ikz} e^{-i\omega_0 t}.$$

Подставив эти выражения в волновое уравнение, и получим

$$ikU^* = i\omega_0 I^*, \quad Z^* = U^*/I^* = \frac{\omega_0}{k}, \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \quad \text{— согласованная нагрузка.}$$

То есть при наличии такого сопротивления на конце линии не будет никакого отражения.

## 4.25 Волноводы

## 5.26 Элементы физики плазмы

**Плазма** — а-ля ионизированный квазинейтральный газ, но с коллективными явлениями. В плазме молекулярных токов нет:  $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ ; обладает высокой электропроводностью. Если в каком-то веществе протекает ток с объёмной плотностью  $\mathbf{j}$ , то возникает сила на единицу объёма с током:  $\mathbf{f} = [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]/c$ .

Давление, которое может быть создано на плазму магнитным полем — **магнитное давление**  $= B^2/8\pi$ . По плазменному шнуру, чтобы он не расплзался, можно пустить такой ток, чтобы возникло магнитное поле

$$\mathbf{B}: nkT = B^2/8\pi.$$

Оценим размеры области, в которой могут происходить заметные нарушения квазинейтральности. Пусть отрицательные заряды сместились на  $l$ , тогда возникнет  $\sigma = nle$ , где  $n$  — концентрация частиц одного знака. Напряженность будет  $E = 4\pi\sigma = 4\pi nle$ , а плотность ЭМ энергии  $E^2/8\pi = 2\pi(nle)^2$ . Энергия ЭМ поля возникает за счёт теплового движения, соответственно не превосходит  $3nk_B T/2 \times 2$ . Так приходим к

$$2\pi(nle)^2 < nkT \Leftrightarrow l < r_D, \quad r_D = \sqrt{\frac{kT}{8\pi e^2 n}} \quad \text{— дебаевский радиус.} \quad (5.72)$$

Имеет смысл радиуса сферы вокруг внесённого в плазму заряда, в которой нарушается квазинейтральность плазмы. Количество частиц в дебаевской сфере, по которой различают ионизированный газ и плазму:  $N \approx nr_D^3$ . И если  $N_D \lesssim 1$ , то это называется ионизованным газом, а если  $N_D \gg 1$  — называется плазмой.

Самый простой пример коллективного взаимодействия — плазменные колебания. Ещё раз предположили, что всё сместилось,  $\sigma = nex$ ,  $E = 4\pi nex$ , соответственно найдём плазменную частоту:

$$m\ddot{x} = -eE = -4\pi e^2 nx, \quad \Rightarrow \quad \omega_{pl} = \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m}},$$

Энергия таких колебаний:

$$W_s = \frac{E^2}{8\pi} = 2\pi(nex)^2 \lesssim nkT \quad \Rightarrow \quad x_{\max} \approx 2r_D, \quad (5.73)$$

где  $x_{\max}$  — максимальная амплитуда таких колебаний (может служить определением дебаевского радиуса).

Для плазмы в переменном электрическом поле:

$$m\ddot{r} = -eE_0 \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad r = \frac{e}{m\omega^2} E_0 \cos \omega t, \quad (5.74)$$

по такому закону будет колебаться каждый электрон. Это значит, что есть дипольный момент. Запишем сразу дипольный момент единицы объёма с такими электронами:

$$P = -ner = -\frac{ne^2}{m\omega^2} E = \alpha E \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 1 + 4\pi\alpha \quad \Rightarrow \quad n^2 = \varepsilon = 1 - \frac{4\pi ne^2}{m\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pl}^2}{\omega^2}, \quad (5.75)$$

таким образом получили дисперсионное выражение для плазмы. От возбуждаемой частоты будут зависеть оптические (электрические) свойства плазмы. При  $\omega_{pl} > \omega$  увидим, что  $\varepsilon < 0$ , и, соответственно,  $n = in'$ , тогда произойдёт отражение от плазмы. Например, для  $n \approx 10^6$ ,  $\nu_{pl} \approx 20$  МГц.

Естественно ввести величину *фазовой скорости* в плазме:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\omega}{k}. \quad (5.76)$$

Нетрудно получить, что

$$c^2 k^2 = \varepsilon \omega^2 = \varepsilon (\omega^2 - \omega_{pl}^2), \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\omega_{pl}^2 + k^2 c^2}}.$$

Получим дисперсионное выражение для плазмы. Или, выражая  $k$ ,

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_{pl}^2}{c^2}}.$$

Центральное выражение называется дисперсионной формулой для плазмы. Её можно выразить в виде последнего выражения, которое похоже на критическую частоту для волновода. Оказывается, что дисперсионное соотношение для волн в волноводе и в плазме одинаковое.



## 5.27 Проникновение поля в среду

Преломление и поглощение волн