Билеты к экзамену «Кратные интегралы и теория поля»

Авторы: Примак Евгений
Хоружий Кирилл

От: *7 января 2021 г.*

Содержание

Свёртка и приближение функций бесконечно гладкими

1 Свёртка функций и её свойства

Def 1.1 (Свертка функции)**.** Свёртку ещё пишут как $h = f * g$.
$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t)\,dt,$$

Свёртка также ассоциативна: $f * (g * h) = (f * g) * h$, для функций с конечным интегралом. Чтобы интеграл существовал, можно заметить, что если одна из функций ограничена, а другая имеет конечный интеграл, тогда и свёртка будет ограничена, кроме того:

Thr 1.2. *Если f и g имеют конечный интегралы,* ***то*** *$h = f * g$ определена почти всюду и верно неравенство*
$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g|\,dx < \int_{\mathbb{R}^n} |f|\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g|\,dx,$$
и равенство:
$$\int_{\mathbb{R}^n} f * g\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g\,dx.$$

Lem 1.3. *Если свёртка $g * f$ —* ***ограничена****, где g – имеет конечный интеграл, а f и $\partial_x f$ – ограничены,* ***то*** *возможно дифференцирование под знаком интеграла (**??**), и мы получаем:*
$$\frac{\partial (f * g)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(x-t)}{\partial x_i} g(t)\,dt = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g.$$

2 Бесконечно гладкие функции с компактным носителем

Возьмём $f \in C^\infty$ такую, что $\forall k f^{(k)}(0) = 0$. Из неё составим $\varphi \in C^\infty$ большую нуля на $(-1, 1)$:
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ e^{-1/x}, & x > 0. \end{cases} \qquad \varphi(x) = f(x+1)f(1-x).$$

Lem 2.1. *$\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ бесконечно гладкая $\varphi_\varepsilon \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, $\varphi_\varepsilon(x) \neq 0 \; \forall x \in U_\varepsilon(0)$,* ***такая что*** *$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = 1$.*

Lem 2.2. *$\forall \varepsilon > \delta > 0 \; \exists$ бесконечно гладкая $\psi_{\varepsilon,\delta} \colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$, $\psi_{\varepsilon,\delta}(x) \neq 0 \; \forall x \in U_\varepsilon(0)$ и $\psi_{\varepsilon,\delta}(x) \neq 0 \; \forall x \in U_\delta(0)$.*

3 Приближение функций бесконечно гладкими

Пусть $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, неотрицательная $\varphi \in C^\infty$, $\varphi \neq 0$ при $|x| \leqslant 1$ и пусть $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$. Положим $\varphi_k(x) = k^n \varphi(kx)$, у которых так же будут $\int = 1$ и которые $\varphi_k \neq 0$ при $|x| \leqslant 1/k$.

Thr 3.1. *Для непрерывной $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определим свёртки:*
$$f_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\varphi_k\,dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\varphi_k(x-t)\,dt \quad \rightsquigarrow \quad f_k \in C^\infty,\; f_k \to f \text{ равномерно на компактах в } \mathbb{R}^n.$$

Thr 3.2. *Если f имеет непр. производные до m-го порядка, то производные f_k до m-го порядка равномерно сходятся на компактах к соответствующим f'.*

Thr 3.3. *Пусть $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $f \in \mathcal{L}_c$. Тогда свёртки $f * \varphi_k$ с функциями из теоремы 3.1 сколь угодно близко приближают f в среднем.*

Дифференцируемые отображения и криволинейные замены координат

4 Дифференцируемые отображения и дифференицрование композиции

Def 4.1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. Отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ называется *дифференцируемым* в точке $x_0 \in U$, если

$$f(x) = f(x_0) + Df_{x_0}(x - x_0) + o(|x - x_0|), \qquad x \to x_0,$$

где $Df_{x_0}\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ – линейное отображение, называемое *производной* f в точке x_0.

Def 4.2. Функция f называется *непрерывно дифференцируемой* на U, если оно дифференцируемо в каждой точке и Df_x непрерывно зависит от x.

Thr 4.3 (Дифференицрование композиции)**.** *Если f дифференцируемо в точке x_0, g дифференцируемо в точке $y_0 = f(x_0)$, то композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке x_0, и $D(g \circ f)_{x_0} = Dg_{y_0} \circ Df_{x_0}$.*

Def 4.4. Производная функции f по направлению $v \in Rn$ в точке x называется

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \left(\frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \right)$$

Lem 4.5. *Если функция дифференцируема в точке x, то в этой точке*

$$\frac{\partial f}{\partial v} = Df_x(v).$$

В частности для функционалов, верно что $\partial f / \partial v = df_x(v)$. Более того, выбрав в качестве v базисные векторы e_i, поймём что

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} x^i,$$

где dx^i – дифференциалы координатных функций, образующие двойственный базис.

Thr 4.6. *Если отображение $f\colon U \mapsto \mathbb{R}^m$ из открытого $U \subseteq \mathbb{R}^n$ задано в координатах, как $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$, для $i = 1, \ldots, m$ и функции f_i имеют непрерывные частные производные на U, то f непрерывно дифференцируемо на U.*

5 Системы криволинейных координат и теорема об обратном отображении

Def 5.1. *Криволинейная замена координат* — бесконечно гладкое отображение $\varphi\colon U \to V$ такое, что φ^{-1} определено и тоже бесконечно гладко.

Lem 5.2. *Пусть открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$ выпукло. Для непрерывно дифференцируемого отображения $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ найдётся непрерывное отображение $A\colon U \times U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, такое что $\forall x',\ x'' \in U$*

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = A(x', x'')(x'' - x')$$

и $A(x, x) = D\varphi_x$.

Thr 5.3 (Теорема об обратном отображении)**.** ***Если** отображение $\varphi\colon U \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо в окрестности точки x **и** его дифференциал $D\varphi_x$ являетсяя невырожденным линейным преобразованием, **то** это отображение взаимно однозначно отображает некоторую окрестность $V \ni x$ на окрестность $W \ni y$, где $y = \varphi(x)$. Обратное отображение $\varphi^{-1}\colon W \to V$ тоже непрерывно дифференцируемо.*

Def 5.4. *Криволинейной системой координат* в окрестности точки $p \in \mathbb{R}^n$ называется набор таких функций, которые явяются координатами гладкого отображения окрестности p на некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ с гладким обратным[1] отображением.

6 Теоремы о системе неявных функций

Thr 6.1 (Теорема о неявной функции)**.** *Пусть функции $f_1, \ldots, f_k$ непрерывно дифференцируемы в окрестности $p \in \mathbb{R}^n$ и*

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \neq 0$$

[1] По теореме об обратном отображении для проверки системы преобразования достаточно проверить невырожденность $(\partial y_i / \partial x_j)$ в точке p, или линейную независимость dy^i в точке p.

в этой окрестности. Пусть $f_i(p) = y_i$, $i = 1, \ldots, k$. *Тогда найдётся окрестность точки* p *вида* $U \times V$, $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^{n-k}$, *такая что в этой окрестности множество решений системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x) = y_1, \\ \qquad \ldots \\ f_k(x) = y_k, \end{cases}$$

совпадает с графиком непрерывно дифференцируемого отображения $\varphi \colon V \to U$, *заданного в координатах как*

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, \ldots, y_k,\ x_{k+1}, \ldots, x_n), \\ \quad \ldots \\ x_k = \varphi_k(y_1, \ldots, y_k,\ x_{k+1}, \ldots, x_n), \end{cases}$$

то есть отображения $\mathbb{R}^{n-k} \mapsto \mathbb{R}^k$.

7 Теорема о расщеплении гладкого отображения

Thr 7.1 (Теорема о расщеплении отображения на элементарные)**.** *Если отображение* φ *непрерывно дифференцируемо в окрестности точки* $p \in \mathbb{R}^n$ *и имеет обратимый* $D\varphi_x$, *то его можно представить в виде композиции перестановки координат, отображений координат и элементарных отображений, непрерывно дифференцируемо и возрастающим образом меняющих только одну координату* $y_i = \psi_i(x_1, \ldots, x_n)$.

Thr 7.2. *Теоремы об обратном отображении, о неявной функции и о расщеплении отображения дают отображения класса* C^k *при* $k \geqslant 1$, *если исходные отображени были класса* C^k.

Векторы и дифференциальные формы первой степени

13 Вектор, как дифференцирование

Lem 13.1. *Всякую гладкую функцию, определенную в некоторой окрестности $x_0 \in \mathbb{R}^n$, в возможно меньшей окрестности x_0, можно представить в виде*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \partial_k f|_{x_0} \, (x^k - x_0^k), \tag{0.1}$$

с гладкими $\partial_k f$.

Def 13.2. Определим *касательный вектор* в точке $p \in U$ открытого множества $U \subseteq \mathbb{R}^n$ как $\mathbb{R}$-линейное отображение $X\colon C^\infty(U) \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющее

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g).$$

Касательное пространство T_pU к U в точке p состоит из всех касательных векторов в точке p.

Lem 13.3. *Если X – касательный вектор в точке $p \in U$, то для любой окресности $V \ni p$, $V \subseteq U$, выражение $X(f)$ может зависеть только от значений f в V, а не на всём U.*

В силу предыдущих лем мы можем перейти в окрестность, где f представима в виде (0.1), тогда

$$X(f) = X(f(p)) + \sum_{i=1}^{n} X(x_i)\partial_i f|_p + \sum_{i=1}^{n} x_i(p) X(\partial_i f|_p) = \sum_{i=1}^{n} X(x_i) \, \partial_i f|_p.$$

Числа $X_i = X(x_i)$ называются координатами касательного вектора в данной криволинейной системе координат, тогда весь вектор в точке p записывается, как $X = X^i\partial_i$.

14 Касательное пространство и дифференциал отображения

Def 14.1. *Векторным полем* на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$ называется выбор касательного вектора $X(p) \in T_pU$ для каждой точки $p \in U$, гладко[2] зависящий от p.

Lem 14.2. *Для открытого $U \subseteq \mathbb{R}^n$ всякое $\mathbb{R}$-линейное отображение $X\colon C^\infty \mapsto C^\infty(U)$, удовлетворяющее правилу Лейбница $X(fg) = X(f)g + fx(g)$ задаётся векторным полем на U.*

Def 14.3. Пусть есть вектор $X \in T_pU$, $q = \varphi(p)$, тогда *прямой*[3] *образ вектора* $\varphi_*(X)$ определяется по формуле

$$\varphi_*(X)f = X(f \circ \varphi), \qquad \Rightarrow \; (\varphi_* X)^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} X^j.$$

Def 14.4. Отображение $\varphi\colon U \mapsto V$ задаёт *гомоморфизм алшебр* (операция, сохраняющая умножение, сложение, и переводящая const в const): $\varphi^*\colon C^\infty(V) \mapsto C^\infty(U)$ по формуле

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi.$$

вектор даёт дифференцирование алгебры $X\colon C^\infty(U) \mapsto \mathbb{R}$, и тогда $\varphi_* X = X \circ \varphi^*$ тоже дифференцирование алгебры.

15 Диф-формы I степени

Def 15.1. *Дифференциальная 1-форма* – это ковекторное поле. Иначе, элемент двойственного пространства $(T_pU)^* \equiv T_p^*U$, линейная форма на касательнм пространстве, гладко зависящая от p. *Дифференциал* функции f от векторного поля X это $df(X) \overset{\text{def}}{=} Xf$.

Дифференциалы $dx_1, \ldots, dx_n$ дают базис T_p^*U, двойственный к $\partial_1, \ldots, \partial_n$, в смысле $dx^i\partial_j = \delta^i_j$. По этому базису можно разложить любую форму в точке, а применяя это $\forall p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ видим, что $\omega^1 = \alpha_i dx^i$.

При замене координат компоненты ω^1 преобразуются как дифференциалы функции, то есть

$$\alpha = \alpha_j dx^j = \tilde{\alpha}_i dy^i = \underbrace{\tilde{\alpha}_i \partial_j y^i}_{\alpha_j} dx^j, \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_j = \tilde{\alpha}_i \partial_j y^i.$$

[2] Гладкая зависимость понимается в смысле гладкой зависимости координат векторного поля $X_i(p)$ в точке p.

[3] Производную отображения φ в точке p можно определить как $\varphi_*\colon T_pU \mapsto T_qV$ при $q = \varphi(p)$. Иначе можем обозначать, как $F\varphi_p$.

Диф-формы высших степеней

16 Определение и свойства диф-форм высших степеней

Def 16.1. Определим *дифференциальную форму степени* k на открытом $U \subseteq \mathbb{R}^n$ как кососимметричное отображение наборов из k гладких векторных полей $X_1, \ldots, X_k$ на U в $C^\infty(U)$, линейное по каждому аргументу и относительно умножения на бесконечно гладкие функции.

Lem 16.2. *Значение выражения* $\alpha(X_1, \ldots, X_k)$ *в точке* p *зависит только от значений векторных полей* X_i *в точке* p.

Пространство диф-форм степени k на $U \subseteq \mathbb{R}^n$ обозначим $\Omega^k(U)$. Интересно, что $\Omega^n(U)$ в фиксированной системе координат выглядит как $C^\infty(U)$, но при замене координат ведёт себя иначе.

Свойства диф-форм?

17 Внешнее умножение диф-форм

Def 17.1. *Внешнее умножение* $\Omega^k(U) \times \Omega^l(U) \mapsto \Omega^{k+l}(U)$, можно определить как $\alpha \wedge \beta = \operatorname{Alt}(\alpha \otimes \beta)$, при чём $(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k)(\partial_1, \ldots, \partial_k) = 1$.

Здесь можно написать про операцию альтернирования.

18 Внешнее дифференцирование

Lem 18.1. *На гладких диф-формах на* U *существует единсвтенный* $\mathbb{R}$*-линейный оператор* $\delta \colon \Omega^k(U) \mapsto \Omega^{k+1}(U)$, *удовлетворяющий условиям: 1)* $d(f) = df$*; 2)* $d^2 = 0$*; 3)* $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta$ *(а-ля правило Лейбница). Более того, операция* d *определена инвариантно.*

19 Обратный образ диф-форм

$$\alpha + \frac{\alpha}{\beta}$$

Решения (BETA)

1 Свёртка функций и её свойства

1.2. 1) $f(y)g(x) \in \mathcal{L}$ и по thr. Фубини: $\int |f \cdot g| = \int |f| \cdot \int |g|$;
2) то же верно для $f(x-t)g(t)$, отличие в лин. замене коор-т с $\det = 1$;
3) требуемое равенство напрямую из (1) и (2) замена: $x - t = y$;
4) для неравенства интегрируем по x: $|\int f(x-t)g(t)\,dt| \leqslant \int |f(x-t)g(t)|\,dt$. □

2 Бесконечно гладкие функции с компактным носителем

2.1. 1) для введённой φ достаточно: $\varphi_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n) = A\varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_1}{\varepsilon}\right) \ldots \varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_n}{\varepsilon}\right)$.
2) $\psi(x) = B\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$, выбирем B: $\psi(x) \equiv 0\ \forall x \leqslant -1$ и $\psi(x) \equiv 1\ \forall x \geqslant -1$;
3) достаточно положить: $\psi_{\varepsilon,\delta}(x) = \psi\left(\frac{\delta+\varepsilon-2|x|}{\varepsilon-\delta}\right)$. □

3 Приближение функций бесконечно гладкими

3.1. 1) $f_k(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}}^{n} (f(x-t) - f(x))\varphi_k(t)\,dt$;
2) Пусть f р-но непр. в $U_\delta(K \subset \mathbb{R}^n)$ и пусть $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ при $|x-y| < \delta$ там же;
3) Выбирая k: $1/k < \delta$, тогда $\varphi_k(t) \neq 0$ при $|t| < \delta$ и тогда $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$ при $x \in K$.
4) при $x \in K$ верна р-ная сходимость: $|f_k(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)\,dx = \varepsilon$.
5) продифференцируем по параметру $\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\varphi_k(x-t)\,dt$;
6) производная (5) при $x \in K$ будет зависеть только значений f в $U_{1/k}(K)$, то есть f можно считать интегрируемой при дифференцировании по параметру, что позволяет применять теорему. □

3.2. По различным $\partial_{x_i} f * \varphi_k(x)$ получим по лемме 1.3, для производных свёрток схожее равенство, с самой f, а значит и р-ную сходимость.

$$\frac{\partial^m (f * \varphi_k)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} = \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} * \varphi_k.$$

□

3.3. 1) по thr(**??**) $f = h + g$, где g – эл. ступ., $\int_{\mathbb{R}^n} |h|\,dx < \varepsilon$;
2) по thr(1.2): $\int_{\mathbb{R}^n} |h * \varphi_k|\,dx < \varepsilon$. То есть, если окажется: $\int_{\mathbb{R}^n} |g - g * `f_k|\,dx < \varepsilon$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f - f * \varphi_k|\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |g - g * \varphi_k|\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} |h|\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} |h * \varphi_k|\,dx < 3\varepsilon.$$

3) Раскладывая g в сумму х-их χ_P, останется доказать для одной χ_P;
4) $\chi_P - \chi_P - \varphi_k \neq 0$ только в $U_{1/k}(\partial P)$ и по модулю $\leqslant 1$;
5) То есть после интегрирования получим не более $\mu(U_{1/k}(\partial P))$.
6) Напрямую можно убедиться, что эта $\mu \to 0$ при $k \to 0$. □

6 Теоремы о системе неявных функций

6.1.
1. По условию $df_1, \ldots, df_k,\ dx_{k+1}, \ldots, dx_n$ – линейно независимы. Тогда $f_1, \ldots, f_k, x_{k+1,\ldots,x_n}$ дают криволинейную систему координат.
2. Тогда старые координаты (НД) выражаются через новые: $x_i = \varphi_i(f_1, \ldots, f_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$, при чём выберем $\boldsymbol{x}$: $f_i = y_i$. $\Rightarrow$ Sol СУ содержится в графике отображения $\varphi\colon V \mapsto U$, при достаточно малых V, U: $\varphi(V) \subseteq U$.
3. Но график отображения содержится в Sol(СУ), т.к. в точке $p = (y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ значения $f_i = y_i$, т.к. $\varphi_i(p)$ даст такие $x_1, \ldots, x_k$, что $f_i(x_i) = y_i$. Q. E. D.

□