

БИЛЕТЫ К ЭКЗАМЕНУ «КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ»

Авторы: Примак Евгений
 Хоружий Кирилл

От: 10 января 2021 г.

Содержание

Свёртка и приближение функций бесконечно гладкими	3
1 Свёртка функций и её свойства	3
2 Бесконечно гладкие функции с компактным носителем	3
3 Приближение функций бесконечно гладкими	3
Дифференцируемые отображения и криволинейные замены координат	4
4 Дифференцируемые отображения и дифференцирование композиции	4
5 Системы криволинейных координат и теорема об обратном отображении	4
6 Теоремы о системе неявных функций	4
7 Теорема о расщеплении гладкого отображения	5
Дифференциал, гессиан, и исследование функции на экстремум	6
9 Локальные экстремумы функции и необходимое условие экстремума	6
10 Необходимые и достаточные условия экстремума C^2 функций	6
11 Условные экстремумы и необходимое условие в терминах первых производных	6
12 Необходимые и достаточные условия в терминах вторых производных	6
Векторы и дифференциальные формы первой степени	7
13 Вектор, как дифференцирование	7
14 Касательное пространство и дифференциал отображения	7
15 Диф-формы I степени	7
Диф-формы высших степеней	8
16 Определение и свойства диф-форм высших степеней	8
17 Внешнее умножение диф-форм	8
18 Внешнее дифференцирование	8
19 Обратный образ диф-форм	8
Интегрирование дифференциальных форм	9
20 Интегрирование диф-формы объёма	9
21 Представление диф-формы в каноническом виде	9
22 Поведение интеграла от формы при линейной замене координат	9
23 Гладкое разбиение единицы	9
24 Поведение интеграла от формы при гладкой замене координат	9
25 Формулы гладкой замены переменных в интеграле Лебега от функции	9
Многообразия (с краем) и формула Стокса	10
26 Вложенные многообразия	10
27 Абстрактное определение гладкого многообразия	10
28 Диф-формы, векторные поля и d на многообразии	10
29 Гладкие отображения многообразий	11
30 Ориентируемость многообразия	11
31 Определение интеграла диф-формы по ориентированному многообразию	12
32 Общая формула Стокса	12
33 Частные случаи формулы Стокса	12

Решения	13
1 Свёртка функций и её свойства	13
2 Бесконечно гладкие функции с компактным носителем	13
3 Приближение функций бесконечно гладкими	13
6 Теоремы о системе неявных функций	13
Призраки прошлого и настоящего	14
239 Прошлого	14
556 Настоящего	14

Свёртка и приближение функций бесконечно гладкими

1 Свёртка функций и её свойства

Def 1.1 (Свертка функции). Свёртку ещё пишут как $h = f * g$.

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t) dt,$$

Свёртка также ассоциативна: $f * (g * h) = (f * g) * h$, для функций с конечным интегралом. Чтобы интеграл существовал, можно заметить, что если одна из функций ограничена, а другая имеет конечный интеграл, тогда и свёртка будет ограничена, кроме того:

Thr 1.2. Если f и g имеют конечный интегралы, то $h = f * g$ определена почти всюду и верно неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g| dx < \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g| dx,$$

и равенство:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f * g dx = \int_{\mathbb{R}^n} f dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g dx.$$

Lem 1.3. Если свёртка $g * f$ — **ограничена**, где g — имеет конечный интеграл, а f и $\partial_x f$ — ограничены, то возможно дифференцирование под знаком интеграла (239.1), и мы получаем:

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(x-t)}{\partial x_i} g(t) dt = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g.$$

2 Бесконечно гладкие функции с компактным носителем

Возьмём $f \in C^\infty$ такую, что $\forall k f^{(k)}(0) = 0$. Из неё составим $\varphi \in C^\infty$ большую нуля на $(-1, 1)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ e^{-1/x}, & x > 0. \end{cases} \quad \varphi(x) = f(x+1)f(1-x).$$

Lem 2.1. $\forall \varepsilon > 0 \exists$ бесконечно гладкая $\varphi_\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, $\varphi_\varepsilon(x) \neq 0 \forall x \in U_\varepsilon(0)$, **такая что** $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1$.

Lem 2.2. $\forall \varepsilon > \delta > 0 \exists$ бесконечно гладкая $\psi_{\varepsilon, \delta}: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$, $\psi_{\varepsilon, \delta}(x) \neq 0 \forall x \in U_\varepsilon(0)$ и $\psi_{\varepsilon, \delta}(x) \neq 0 \forall x \in U_\delta(0)$.

3 Приближение функций бесконечно гладкими

Пусть $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, неотрицательная $\varphi \in C^\infty$, $\varphi \neq 0$ при $|x| \leq 1$ и пусть $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$. Положим $\varphi_k(x) = k^n \varphi(kx)$, у которых так же будут $\int = 1$ и которые $\varphi_k \neq 0$ при $|x| \leq 1/k$.

Thr 3.1. Для непрерывной $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ определим свёртки:

$$f_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\varphi_k dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\varphi_k(x-t) dt \quad \rightsquigarrow \quad f_k \in C^\infty, f_k \rightarrow f \text{ равномерно на компактах в } \mathbb{R}^n.$$

Thr 3.2. Если f имеет непр. производные до m -го порядка, то производные f_k до m -го порядка равномерно сходятся на компактах к соответствующим f' .

Thr 3.3. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $f \in \mathcal{L}_c$. Тогда свёртки $f * \varphi_k$ с функциями из теоремы 3.1 сколь угодно близко приближают f в среднем.

Дифференцируемые отображения и криволинейные замены координат

4 Дифференцируемые отображения и дифференцирование композиции

Def 4.1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. Отображение $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется *дифференцируемым* в точке $x_0 \in U$, если

$$f(x) = f(x_0) + Df_{x_0}(x - x_0) + o(|x - x_0|), \quad x \rightarrow x_0,$$

где $Df_{x_0}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ – линейное отображение, называемое *производной* f в точке x_0 .

Def 4.2. Функция f называется *непрерывно дифференцируемой* на U , если оно дифференцируемо в каждой точке и Df_x непрерывно зависит от x .

Thr 4.3 (Дифференцирование композиции). Если f дифференцируемо в точке x_0 , g дифференцируемо в точке $y_0 = f(x_0)$, то композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке x_0 , и $D(g \circ f)_{x_0} = Dg_{y_0} \circ Df_{x_0}$.

Def 4.4. Производная функции f по направлению $v \in \mathbb{R}^n$ в точке x называется

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \right)$$

Lem 4.5. Если функция дифференцируема в точке x , то в этой точке

$$\frac{\partial f}{\partial v} = Df_x(v).$$

В частности для функционалов, верно что $\partial f / \partial v = df_x(v)$. Более того, выбрав в качестве v базисные векторы e_i , поймаем что

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} x^i,$$

где dx^i – дифференциалы координатных функций, образующие двойственный базис.

Thr 4.6. Если отображение $f: U \mapsto \mathbb{R}^m$ из открытого $U \subseteq \mathbb{R}^n$ задано в координатах, как $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$, для $i = 1, \dots, m$ и функции f_i имеют непрерывные частные производные на U , то f непрерывно дифференцируемо на U .

5 Системы криволинейных координат и теорема об обратном отображении

Def 5.1. Криволинейная замена координат – бесконечно гладкое отображение $\varphi: U \mapsto V$ такое, что φ^{-1} определено и тоже бесконечно гладко.

Lem 5.2. Пусть открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$ выпукло. Для непрерывно дифференцируемого отображения $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ найдётся непрерывное отображение $A: U \times U \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, такое что $\forall x', x'' \in U$

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = A(x', x'')(x'' - x')$$

и $A(x, x) = D\varphi_x$.

Thr 5.3 (Теорема об обратном отображении). Если отображение $\varphi: U \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо в окрестности точки x и его дифференциал $D\varphi_x$ является невырожденным линейным преобразованием, то это отображение взаимно однозначно отображает некоторую окрестность $V \ni x$ на окрестность $W \ni y$, где $y = \varphi(x)$. Обратное отображение $\varphi^{-1}: W \rightarrow V$ тоже непрерывно дифференцируемо.

Def 5.4. Криволинейной системой координат в окрестности точки $p \in \mathbb{R}^n$ называется набор таких функций, которые являются координатами гладкого отображения окрестности p на некоторое открытое множество в \mathbb{R}^n с гладким обратным¹ отображением.

6 Теоремы о системе неявных функций

Thr 6.1 (Теорема о неявной функции). Пусть функции f_1, \dots, f_k непрерывно дифференцируемы в окрестности $p \in \mathbb{R}^n$ и

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \neq 0$$

¹По теореме об обратном отображении для проверки системы преобразования достаточно проверить невырожденность $(\partial y_i / \partial x_j)$ в точке p , или линейную независимость dy^i в точке p .

в этой окрестности. Пусть $f_i(p) = y_i$, $i = 1, \dots, k$. Тогда найдётся окрестность точки p вида $U \times V$, $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^{n-k}$, такая что в этой окрестности множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x) = y_1, \\ \dots \\ f_k(x) = y_k, \end{cases}$$

совпадает с графиком непрерывно дифференцируемого отображения $\varphi: V \rightarrow U$, заданного в координатах как

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n), \\ \dots \\ x_k = \varphi_k(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n), \end{cases}$$

то есть отображения $\mathbb{R}^{n-k} \mapsto \mathbb{R}^k$.

7 Теорема о расщеплении гладкого отображения

Thr 7.1 (Теорема о расщеплении отображения на элементарные). Если отображение φ непрерывно дифференцируемо в окрестности точки $p \in \mathbb{R}^n$ и имеет обратимый $D\varphi_x$, то его можно представить в виде композиции перестановки координат, отображений координат и элементарных отображений, непрерывно дифференцируемо и возрастающим образом меняющих только одну координату $y_i = \psi_i(x_1, \dots, x_n)$.

Thr 7.2. Теоремы об обратном отображении, о неявной функции и о расщеплении отображения дают отображения класса C^k при $k \geq 1$, если исходные отображения были класса C^k .

Дифференциал, гессиан, и исследование функции на экстремум

9 Локальные экстремумы функции и необходимое условие экстремума

Def 9.1. Точка p называется локальным экстремумом функции f , если она является точкой экстремума (максимума или минимума) ограничения f на некоторую окрестность p .

Thr 9.2 (Необходимое условие экстремума).

$$\begin{cases} f \in C^1(U(p)) \\ p - \text{def(9.1)} \end{cases} \Rightarrow df_p = 0.$$

Lem 9.3. Если квадратичная форма $Q > 0$, то $\exists \varepsilon > 0: Q(v) \geq \varepsilon|v|^2 (\forall v)$.

10 Необходимые и достаточные условия экстремума C^2 функций

Thr 10.1 (Необходимые условия экстремума).

$$\begin{cases} f \in C^2(U(p)) \\ p - \text{def(9.1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_2 f_p \geq 0 - \min \\ d_2 f_p \leq 0 - \max \end{cases}$$

Thr 10.2 (Достаточные условия экстремума).

$$\begin{cases} f \in C^2(U(p)) \\ p - \text{def(9.1)} \\ df_p = 0 \text{ и } d_2 f_p > 0 \end{cases} \Rightarrow p - \text{точка строгого локального максимума}$$

11 Условные экстремумы и необходимое условие в терминах первых производных

Def 11.1. Условный экстремум f — экстремум ограничения f на множество S , задаваемое системой C^1 уравнений $\varphi_1(x) = \dots = \varphi_m(x) = 0$.

Забегая вперёд, нам самом деле нам нужно: $\dim \langle d\varphi_1, \dots, d\varphi_m \rangle = m$.

Thr 11.2 (Необходимые условия условного экстремума в терминах первых производных).

$$\begin{cases} f, \varphi_1, \dots, \varphi_m \in C^1(U(p)) \\ \dim \langle d\varphi_1, \dots, d\varphi_m \rangle = m \\ p - \text{def(11.1)} \end{cases} \Rightarrow df_p = \lambda_1 d\varphi_{1,p} + \dots + \lambda_m d\varphi_{m,p}.$$

12 Необходимые и достаточные условия в терминах вторых производных

Удобно положить: $L(x) = f(x) - \lambda_1 \varphi_1(x) - \dots - \lambda_m \varphi_m(x)$. Это называется *функцией Лагранжа*, а λ_i — *множители Лагранжа*.

Thr 12.1 (Необходимые условия условного экстремума).

$$\begin{cases} f, \varphi_1, \dots, \varphi_m \in C^2(U(p)) \\ \dim \langle d\varphi_1, \dots, d\varphi_m \rangle = m \\ p - \text{def(11.1)} \\ v: d\varphi_{1,p}(v) = \dots = d\varphi_{m,p}(v) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dL_p = 0 \\ \begin{cases} d_2 L_p \geq 0 (\text{для минимума}) \\ d_2 L_p \leq 0 (\text{для максимума}) \end{cases} \end{cases}$$

Thr 12.2 (Достаточные условия условного экстремума).

$$\begin{cases} f, \varphi_1, \dots, \varphi_m \in C^2(U(p)) \\ \dim \langle d\varphi_1, \dots, d\varphi_m \rangle = m \\ dL_p = 0 \\ \varphi_1(p) = \dots = \varphi_m(p) = 0 \\ v(\neq 0): d\varphi_{1,p}(v) = \dots = d\varphi_{m,p}(v) = 0 \\ d_2 L(v) > 0 \text{ или } d_2 L(v) < 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ имеет строгий условный экстремум в } p.$$

Векторы и дифференциальные формы первой степени

13 Вектор, как дифференцирование

Lem 13.1. Всякую гладкую функцию, определенную в некоторой окрестности $x_0 \in \mathbb{R}^n$, в возможно меньшей окрестности x_0 , можно представить в виде

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \partial_k f|_{x_0} (x^k - x_0^k),$$

с гладкими $\partial_k f$.

Def 13.2. Определим касательный вектор в точке $p \in U$ открытого множества $U \subseteq \mathbb{R}^n$ как \mathbb{R} -линейное отображение $X: C^\infty(U) \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющее

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g).$$

Касательное пространство $T_p U$ к U в точке p состоит из всех касательных векторов в точке p .

Lem 13.3. Если X – касательный вектор в точке $p \in U$, то для любой окрестности $V \ni p$, $V \subseteq U$, выражение $X(f)$ может зависеть только от значений f в V , а не на всём U .

В силу предыдущих лем мы можем перейти в окрестность, где f представима в виде (13.1), тогда

$$X(f) = X(f(p)) + \sum_{i=1}^n X(x_i) \partial_i f|_p + \sum_{i=1}^n x_i(p) X(\partial_i f|_p) = \sum_{i=1}^n X(x_i) \partial_i f|_p.$$

Числа $X_i = X(x_i)$ называются координатами касательного вектора в данной криволинейной системе координат, тогда весь вектор в точке p записывается, как $X = X^i \partial_i$.

14 Касательное пространство и дифференциал отображения

Def 14.1. Векторным полем на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$ называется выбор касательного вектора $X(p) \in T_p U$ для каждой точки $p \in U$, гладко² зависящий от p .

Lem 14.2. Для открытого $U \subseteq \mathbb{R}^n$ всякое \mathbb{R} -линейное отображение $X: C^\infty \mapsto C^\infty(U)$, удовлетворяющее правилу Лейбница $X(fg) = X(f)g + fX(g)$ задаётся векторным полем на U .

Def 14.3. Пусть есть вектор $X \in T_p U$, $q = \varphi(p)$, тогда прямой³ образ вектора $\varphi_*(X)$ определяется по формуле

$$\varphi_*(X)f = X(f \circ \varphi), \quad \Rightarrow (\varphi_* X)^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} X^j \Leftrightarrow \text{переписать в матричном виде.}$$

Def 14.4. Отображение $\varphi: U \mapsto V$ задаёт гомоморфизм алгебр (операция, сохраняющая умножение, сложение, и переводящая const в const): $\varphi^*: C^\infty(V) \mapsto C^\infty(U)$ по формуле

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi.$$

вектор даёт дифференцирование алгебры $X: C^\infty(U) \mapsto \mathbb{R}$, и тогда $\varphi_* X = X \circ \varphi^*$ тоже дифференцирование алгебры.

15 Диф-формы I степени

Def 15.1. Дифференциальная 1-форма – это ковекторное поле. Иначе, элемент двойственного пространства $(T_p U)^* \equiv T_p^* U$, линейная форма на касательном пространстве, гладко зависящая от p . Дифференциал функции f от векторного поля X это $df(X) \stackrel{\text{def}}{=} Xf$.

Дифференциалы dx_1, \dots, dx_n дают базис $T_p^* U$, двойственный к $\partial_1, \dots, \partial_n$, в смысле $dx^i \partial_j = \delta_j^i$. По этому базису можно разложить любую форму в точке, а применяя это $\forall p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ видим, что $\omega^1 = \alpha_i dx^i$.

При замене координат компоненты ω^1 преобразуются как дифференциалы функции, то есть

$$\alpha = \alpha_j dx^j = \tilde{\alpha}_i dy^i = \underbrace{\tilde{\alpha}_i \partial_j y^i}_{\alpha_j} dx^j, \quad \Rightarrow \quad \alpha_j = \tilde{\alpha}_i \partial_j y^i \Leftrightarrow \text{переписать в матричном виде.}$$

²Гладкая зависимость понимается в смысле гладкой зависимости координат векторного поля $X_i(p)$ в точке p .

³Производную отображения φ в точке p можно определить как $\varphi_*: T_p U \mapsto T_q V$ при $q = \varphi(p)$. Иначе можем обозначать, как $F\varphi_p$.

Диф-формы высших степеней

16 Определение и свойства диф-форм высших степеней

Def 16.1. Определим дифференциальную форму степени k на открытом $U \subseteq \mathbb{R}^n$ как кососимметричное отображение наборов из k гладких векторных полей X_1, \dots, X_k на U в $C^\infty(U)$, линейное по каждому аргументу и относительно умножения на бесконечно гладкие функции.

Lem 16.2. Значение выражения $\alpha(X_1, \dots, X_k)$ в точке p зависит только от значений векторных полей X_i в точке p .

Пространство диф-форм степени k на $U \subseteq \mathbb{R}^n$ обозначим $\Omega^k(U)$. Интересно, что $\Omega^n(U)$ в фиксированной системе координат выглядит как $C^\infty(U)$, но при замене координат ведёт себя иначе.

Свойства диф-форм?

17 Внешнее умножение диф-форм

Def 17.1. Внешнее умножение $\Omega^k(U) \times \Omega^l(U) \mapsto \Omega^{k+l}(U)$, можно определить как $\alpha \wedge \beta = \text{Alt}(\alpha \otimes \beta)$, при чём $(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k)(\partial_1, \dots, \partial_k) = 1$.

Здесь можно написать про операцию альтернирования.

18 Внешнее дифференцирование

Lem 18.1. На гладких диф-формах на U существует единственный \mathbb{R} -линейный оператор $\delta: \Omega^k(U) \mapsto \Omega^{k+1}(U)$, удовлетворяющий условиям: 1) $d(f) = df$; 2) $d^2 = 0$; 3) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta$ (а-ля правило Лейбница). Более того, операция d определена инвариантно.

19 Обратный образ диф-форм

Def 19.1 (Обратный образ). Для всякого гладкого отображения $\varphi: U \mapsto V$ между открытыми подмножествами евклидовых пространств определено отображение пространств дифференциальных форм $\varphi^*: \Omega^k(V) \mapsto \Omega^k(U)$, действующее по формуле⁴

$$\varphi^* \alpha(X_1, \dots, X_k) = \alpha(\varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_k).$$

Для функции $f \in C^\infty(V) = \Omega^0(V)$ оказывается $\varphi^* f = f \circ \varphi$, что совпадает с замены переменных в функции. Для форм первой степени $\alpha \circ \varphi_*$, где $\alpha|_{f(p)}$, а $\varphi_*|_p$.

Lem 19.2. Взятие обратного образа диф-форм коммутирует с внешним умножением и внешним дифференцированием.

Таким образом взятие обратного образа происходит формально подстановкой⁵ выражений новых переменных через старые в коэффициенты формы и в дифференциалы новых переменных.

Task 19.3. Для двух гладких отображений открытых подмножеств евклидова пространства, $\varphi: U \mapsto V$ и $\psi: V \mapsto W$, имеет место соотношения

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*, \quad (\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*.$$

⁴Важно заметить, что если левая часть вычисляется в точке $p \in U$, то правая в $\varphi(p)$.

⁵Было бы здорово посмотреть на задачи 6.96 и 6.97.

Интегрирование дифференциальных форм

20 Интегрирование диф-формы объёма

Def 20.1. Диф-форма с *компактным носителем* на \mathbb{R}^n – форма определенная⁶ на всём \mathbb{R}^n и равная 0 за пределами некоторого компакта.

Def 20.2. Для гладкой⁷ формы с компактным носителем $\nu = a(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \in \Omega_c^n(U)$ определим в какой-то фиксированной системе координат

$$\int_U \nu \stackrel{\text{def}}{=} \int_U a(x) dx_1 \dots dx_n.$$

Lem 20.3. Если $\lambda \in \Omega_c^{n-1}(U)$, то⁸ $\int_U d\lambda = 0$.

21 Представление диф-формы в каноническом виде

Lem 21.1. Пусть $U = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$, где $(a_i, b_i) \ni 0$. Пусть $\varphi: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$ – гладкая функция с компактным носителем, содержащимся в каждом (a_i, b_i) , и с единичным интегралом. Для всякой $\nu \in \Omega_c^n(U)$ найдётся число I и форма $\lambda \in \Omega_c^{n-1}(U)$, такие что $\nu = I\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n + d\lambda$.

Con 21.2. Пусть $U = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ – произведение интервалов. Факторпространство $\Omega_c^n(U)/d\Omega_c^{n-1}(U)$ одномерно. Получается, что всевозможные способы определить интеграл формы $\nu \in \Omega_c^n(U)$ так, чтобы интеграл от $d\lambda$ равнялся нулю, могут отличаться только умножением на константу. *Ещё раз.*

22 Поведение интеграла от формы при линейной замене координат

Lem 22.1 (Поведение интеграла формы при линейной замене координат). Интеграл дифференциальной формы $\nu \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ при отображении A^* , соответствующем линейному преобразованию $A: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ меняет или не меняет знак в зависимости от знака определителя $\det A$, то есть

$$\int_{\mathbb{R}^n} A^* \nu = (\text{sign } \det A) \int_{\mathbb{R}^n} \nu.$$

23 Гладкое разбиение единицы

Lem 23.1 (Разбиение единицы в окрестности компакта в \mathbb{R}^n). Для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}_\alpha$ компакта $K \subseteq \mathbb{R}^n$ найдётся набор неотрицательных гладких функций $\{\rho_\alpha\}_\alpha: \mathbb{R}^n \mapsto [0, 1]$ с компактными носителями $\text{supp } \rho_\alpha$ таких, что $\forall \alpha \text{ } \text{supp } \rho_\alpha \subset U_\alpha$, и только конечное число из них не равно нулю и $\sum_\alpha \rho_\alpha(x) \equiv 1$ в некоторой окрестности K . Это называется *разбиение единицы, подчиненное покрытию*.

Task 23.2. Для связной области $U \subset \mathbb{R}^n$ пространство $\Omega_c^n(U)/d\Omega_c^{n-1}(U)$ одномерно.

24 Поведение интеграла от формы при гладкой замене координат

Thr 24.1 (Поведение интеграла формы относительно гладкой замены координат). Интеграл дифференциальной формы $\nu \in \Omega_c^n(V)$ при отображении φ^* , соответствующем диффеоморфизму $\varphi: U \mapsto V$ между областями в \mathbb{R}^n меняет или не меняет знак в зависимости от знака⁹ якобиана J_φ , то есть

$$\int_U \varphi^* \nu = (\text{sign } J_\varphi) \int_V \nu.$$

25 Формулы гладкой замены переменных в интеграле Лебега от функции

Con 25.1 (Криволинейная замена переменных в кратном интеграле). При диффеоморфизме¹⁰ $\varphi: U \mapsto V$ для интегрируемой по Лебегу на V функции f имеет место формула

$$\int_V f(y) dy = \int_U f(\varphi(x)) |J_\varphi| dx.$$

⁶Вообще можно рассматривать $\Omega_c^k(U) \subseteq \Omega_c^k(\mathbb{R}^n)$.

⁷Т.к $a(x)$ – гладкая с компактным носителем, этот интеграл \exists , как повторный интеграл Римана, или как интеграл Лебега.

⁸Таким образом интеграл оказывается определен как линейный функционал на факторпространстве $\Omega_c^n(U)/d\Omega_c^{n-1}(U)$.

⁹Так как U и V связны, то знак якобиана один и тот же во всех точках области.

¹⁰Вообще достаточно непрерывной дифференцируемости.

Многообразия (с краем) и формула Стокса

26 Вложенные многообразия

Def 26.1. Замкнутое подмножество $M \subseteq \mathbb{R}^N$ называется *вложенным многообразием размерности n* , если $\forall p \in M \exists U_\varepsilon(p)$ и криволинейная система координат в ней, в которой включение $M \subset \mathbb{R}^N$ в пересечении с некоторой окрестностью нуля.

Яркий пример¹¹ – работа с условными экстремумами. Если M задаётся гладкими уравнениями $f_1 = \dots = f_{N-n} = 0$ и дифференциалы этих уравнений линейно независимы в каждой точке M , то M будет вложенным многообразием размерности n , так как определяющие его функции можно считать частью системы координат $y_{n+1} = f_1, \dots, y_N = f_{N-n}$ в окрестности каждой точки $p \in M$, и M в такой окрестности выглядит в точности как $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^N$ около нуля, а функции y_1, \dots, y_n задают систему координат в M , пересеченном с окрестностью p .

Def 26.2. Замкнутое подмножество $M \subseteq \mathbb{R}^N$ называется *вложенным многообразием с краем*¹² *размерности n* , если для $\forall p \in M \exists U_\varepsilon(p)$ и криволинейная система координат в ней, в которой включение $M \subseteq \mathbb{R}^N$ **либо** превращается в стандартное вложение $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^N$, **либо** превращается в стандартное вложение $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, пересеченное с окрестностью 0.

Def 26.3. Из определения M понятно, что $\forall p \in M$ есть окрестность¹³ в многообразии $M \cap U$ и отображение $\varphi: M \cap U \mapsto \mathbb{R}^n$, являющееся диффеоморфизмом между $M \cap U$ и $\varphi(M \cap U)$, которое называется *координатной картой* многообразия M .

Def 26.4. Набор карт, районы действия которых в совокупности покрывают всё многообразие, называется *атласом* многообразия.

27 Абстрактное определение гладкого многообразия

Def 27.1 (Абстрактное определение многообразия). *Гладкое n -мерное многообразие M* – хаусдорфово топологическое пространство со счётной базой, покрытое открытыми картами U_i так, что для каждой карты задано отображение $\varphi_i: U_i \mapsto \mathbb{R}^n$ являющееся гомеоморфизмом на открытое подмножество \mathbb{R}^n , и для пары таких отображений (карт) φ_i и φ_j композиция $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ является диффеоморфизмом на своей естественной области определения.

Def 27.2. *Гладкое n -мерное многообразие с краем M* отличается тем, что некоторые из карт являются не такими, как описано выше, а являются гомеоморфизмами на относительно открытое подмножество полупространства $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$, в котором точки из $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ образуют *край* в этой карте, а замены координат $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ переводят край в одной карте в край в другой карте.

28 Диф-формы, векторные поля и d на многообразии

Def 28.1. *Дифференциальной формой $\alpha \in \Omega^k(M)$ на многообразии* мы будем называть набор диф-форм α_i на образах карт $\varphi_i: U_i \mapsto \mathbb{R}^n$, которые обладают свойством

$$(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})^* \alpha_i = \alpha_j$$

на естественной области определения $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ в \mathbb{R}^n , для всяких двух карт φ_i, φ_j .

Можно неформально сказать, что глобальная форма собирается из локальных форм, если одна локальная форма переходит в другую при замене одной карты на другую, причём делает это именно так, как это происходит в раннее изученном случае, когда многообразие является областью в \mathbb{R}^n .

Достаточно рассматривать набор карт, покрывающих многообразие M . Для в любой другой координатной карте φ соответствующее представление $\alpha \in \Omega^k(\varphi(U))$ будет выглядеть как $\alpha = (\varphi_i \circ \varphi^{-1})^* \alpha_i$ на множестве $\varphi(U \cap U_i)$. По определению диф-формы и (19.3) оказывается

$$(\varphi_j \circ \varphi^{-1})^* \alpha_j = (\varphi_j \circ \varphi^{-1})^* (\varphi_i \circ \varphi_j)^* \alpha_i = (\varphi_i \circ \varphi^{-1})^* \alpha_i.$$

на $\varphi(U \cap U_i \cap U_j)$.

В силу установленной ранее независимости от выбора системы криволинейных координат операции \wedge и d верно определены для форм на многообразиях.

Простой и естественный способ получить диф-форму на $M \subset \mathbb{R}^N$ – ограничить какую-то диф-форму из евклидова пространства, или из окрестности M , или положить $\alpha_i = (\varphi_i^{-1})^* \alpha$ для $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^N)$.

¹¹Так, например, любая сфера в \mathbb{R}^n является вложенным многообразием размерности $n - 1$.

¹²Край ∂M многообразия с краем M сам по себе является $(n - 1)$ -мерным многообразием без края.

¹³Относительно открытое подмножество многообразия.

Касательный вектор к вложенному многообразию $M \subset \mathbb{R}^N$ также можно рассматривать как касательный вектор к \mathbb{R}^N , так как любой вектор X в некоторой точке образа карты φ_i можно перенести в \mathbb{R}^n отображением $(\varphi_i^{-1})_*$.

Для гладкого отображения многообразий корректно определена производная $Df_p: T_p M \mapsto T_{f(p)} N$ в каждой точке $p \in M$, которую мы также называли прямым образом вектора φ_* , что и является линейным отображением касательных пространств в точке.

Отображение обратного образа диф-форм $f^*: \Omega^k(N) \mapsto \Omega^k(M)$ как

$$f^* \alpha|_p(X_1, \dots, X_k) = \alpha|_{f(p)}(f_* X_1, \dots, f_* X_k)$$

Для векторных полей $f_* = (f^{-1})^*$.

29 Гладкие отображения многообразий

Def 29.1. Функция $f: M \mapsto \mathbb{R}$ называется *гладкой функцией на многообразии*, $f \in C^\infty(M)$, если в каждой координатной карте $\varphi: U \mapsto \mathbb{R}^n$ эта функция $(f \circ \varphi^{-1})$ является гладкой функцией на образе $\varphi(U)$.

Def 29.2. *Гладкой структурой* на топологическом пространстве называется максимальный по включению атлас, с которым пространство становится многообразием.

Def 29.3. *Гладким отображением* между многообразиями $f: M \mapsto N$ размерностей m и n называется непрерывное отображение, которое в окрестности каждой точки, в достаточно малых координатных картах, выглядит как гладкое отображение из \mathbb{R}^m в \mathbb{R}^n .

Def 29.4. Гладкое обратимое отображение $f: M \mapsto N$ с обратным гладким назовётся *диффеоморфизмом многообразий*.

Task 29.5. Если взять некоторое *компактное* гладкое многообразие M (область параметров) и гладкое отображение $f: M \mapsto \mathbb{R}^n$, такое, что $\text{rg } Df_p = \dim M \ \forall p$, то $f(M)$ будет вложенным многообразием.

Lem 29.6. Для гладкого отображения $f: M \mapsto \mathbb{R}^n$ с $\text{rg } Df \equiv m = \dim M$, для всякой $p \in M$ найдётся окрестность $U \ni p$ такая, что $f(U)$ в некоторой криволинейной системе координат в окрестности $f(p)$ является открытым подмножеством стандартно вложенного $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n$.

30 Ориентируемость многообразия

Def 30.1. Гладкое многообразие M называется *ориентируемым*, если можно выбрать покрывающий атлас так, что якобианы замен координат между любыми двумя картами атласа будут положительными.

Если в исходном атласе был задан некоторый объект, например векторное поле X , то во всякой новой карте ψ мы тоже будем иметь векторное поле, собранное из прямых образов $(\psi \circ \varphi^{-1})_* X_\varphi$ полученных с имеющихся карт φ и образов X_φ в них.

Def 30.2. *Ориентацией* гладкого многообразия M называется атлас с положительными якобианами перехода между картами, максимальный по включению среди всех таких атласов.

Lem 30.3. Связное многообразие либо неориентируемо, либо допускает два класса ориентации.

Lem 30.4. Многообразие M размерности n ориентируемо тогда и только тогда, когда существует дифференциальная форма $\nu \in \Omega^n(M)$, которая ни в одной точке не равна нулю.

Lem 30.5. Многообразие ориентируемо тогда и только тогда, когда на нём не существует противоречивой (дезориентирующей) цепочки карт.

Def 30.6. Для n -мерного ориентированного многообразия с краем M введём ориентацию на его крае ∂M следующим образом. Пусть карта M с координатами x_1, \dots, x_n соответствует ориентации M , причём образ отображения карты удовлетворяет неравенству $x_1 \leq 0$, а образ края соответствует равенству $x_1 = 0$. Тогда карта на соответствующей части ∂M из координат x_2, \dots, x_n по определению объявляется положительной. Если же многообразие в этой карте задано неравенством в другую сторону, $x_1 \geq 0$, то карта x_2, \dots, x_n на его краю по определению объявляется отрицательной.

Lem 30.7. Предыдущее определение корректно задаёт ориентацию на ∂M .

31 Определение интеграла диф-формы по ориентированному многообразию

Lem 31.1 (Разбиение единицы в окрестности компакта на многообразии). Пусть M – гладкое многообразие, а $K \subseteq M$ – его компактное подмножество. Для любого покрытия $\{U_\alpha\}_\alpha$ компакта K открытыми множествами найдётся набор неотрицательных гладких функций $\{\rho_\alpha\}_\alpha$ с компактными носителями $\text{supp } \rho_\alpha$ таких, что

$$\forall \alpha \text{ supp } \rho_\alpha \subset U_\alpha,$$

только конечное число из них отлично от нуля и $\sum_\alpha \rho_\alpha(x) \equiv 1$ в некоторой окрестности K .

Def 31.2. Интеграл дифференциальной формы $\nu \in \Omega_c^n(M)$ с компактным носителем по ориентированному n -мерному многообразию M определяется с помощью разбиения единицы в окрестности носителя ν

$$\rho_1 + \dots + \rho_m = 1,$$

подчиненного некоторому набору положительно ориентированных карт как

$$\int_M \nu = \sum_i \int_M \rho_i \nu_i,$$

где интегралы справа рассматриваются в координатных картах, содержащих носители соответствующих ρ_i .

Lem 31.3. Определение интеграла не зависит от выбора системы положительных карт в данной ориентации и подчиненного им разбиения единицы.

32 Общая формула Стокса

Thr 32.1 (Формула Стокса). Для ориентированного многообразия с краем¹⁴ $(M, \partial M)$ размерности n и формы $\alpha \in \Omega_c^{n-1}(M)$ выполняется

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha.$$

33 Частные случаи формулы Стокса

\mathbb{R}^1 . Формула Стокса для ориентированной кривой с началом в точке p и концом в точке q сводится к

$$\int_\gamma df = f(q) - f(p).$$

\mathbb{R}^2 . Для компактного множества $G \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей, ориентированного так, что при движении по ∂G множество G оказывается слева, верна формула Грина

$$\int_{\partial G} P dx + Q dy = \int_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

\mathbb{R}^3 . Для компактного множества $G \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей (край в \mathbb{R}^3) верна формула Гаусса-Остроградского

$$\int_{\partial G} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \int_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Кривую можно считать не бесконечно гладкой, а всего лишь кусочно непрерывно дифференцируемой, формула всё равно остаётся верной. С помощью предельного перехода также обобщается случай $s \simeq \mathbb{R}^2$ до множества с кусочно C^2 границей.

Вообще формула Стокса верна не только для вложенных двумерных многообразий, но и для всякого образа гладкого отображения $f: D \mapsto \mathbb{R}^3$ области $D \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно гладкой границей, если интегралы мы понимаем как интегралы обратных образов $f^*(\alpha)$ и $f^*(d\alpha)$ по ∂D и D соответственно. Для практических применений полезно ослабить условие гладкости f до C^2 (в интеграле, в координатном представлении, используются производные f не более чем первого порядка).

¹⁴край рассматривается с согласованной ориентацией.

Решения (БЕТА)

1 Свёртка функций и её свойства

- 1.2. 1) $f(y)g(x) \in \mathcal{L}$ и по thr. Фубини: $\int |f \cdot g| = \int |f| \cdot \int |g|$;
 2) то же верно для $f(x-t)g(t)$, отличие в лин. замене коор-т с $\det = 1$;
 3) требуемое равенство напрямую из (1) и (2) замена: $x-t=y$;
 4) для неравенства интегрируем по x : $|\int f(x-t)g(t) dt| \leq \int |f(x-t)g(t)| dt$. □

2 Бесконечно гладкие функции с компактным носителем

- 2.1. 1) для введённой φ достаточно: $\varphi_\varepsilon(x_1, \dots, x_n) = A\varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_1}{\varepsilon}\right) \dots \varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_n}{\varepsilon}\right)$.
 2) $\psi(x) = B \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$, выберем B : $\psi(x) \equiv 0 \forall x \leq -1$ и $\psi(x) \equiv 1 \forall x \geq 1$;
 3) достаточно положить: $\psi_{\varepsilon,\delta}(x) = \psi\left(\frac{\delta+\varepsilon-2|x|}{\varepsilon-\delta}\right)$. □

3 Приближение функций бесконечно гладкими

- 3.1. 1) $f_k(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-t) - f(x))\varphi_k(t) dt$;
 2) Пусть f p -но непр. в $U_\delta(K \subset \mathbb{R}^n)$ и пусть $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ при $|x - y| < \delta$ там же;
 3) Выбирая k : $1/k < \delta$, тогда $\varphi_k(t) \neq 0$ при $|t| < \delta$ и тогда $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$ при $x \in K$.
 4) при $x \in K$ верна p -ная сходимост: $|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x) dx = \varepsilon$.
 5) продифференцируем по параметру $\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\varphi_k(x-t) dt$;
 6) производная (5) при $x \in K$ будет зависеть только значений f в $U_{1/k}(K)$, то есть f можно считать интегрируемой при дифференцировании по параметру, что позволяет применять теорему. □

3.2. По различным $\partial_{x_i} f * \varphi_k(x)$ получим по лемме 1.3, для производных свёрток схожее равенство, с самой f , а значит и p -ную сходимост.

$$\frac{\partial^m (f * \varphi_k)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} = \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} * \varphi_k.$$

□

- 3.3. 1) по thr(239.2) $f = h + g$, где g — эл. ступ., $\int_{\mathbb{R}^n} |h| dx < \varepsilon$;
 2) по thr(1.2): $\int_{\mathbb{R}^n} |h * \varphi_k| dx < \varepsilon$. То есть, если окажется: $\int_{\mathbb{R}^n} |g - g * \varphi_k| dx < \varepsilon$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f - f * \varphi_k| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |g - g * \varphi_k| dx + \int_{\mathbb{R}^n} |h| dx + \int_{\mathbb{R}^n} |h * \varphi_k| dx < 3\varepsilon.$$

 3) Раскладывая g в сумму χ -их χ_P , останется доказать для одной χ_P ;
 4) $\chi_P - \chi_P * \varphi_k \neq 0$ только в $U_{1/k}(\partial P)$ и по модулю ≤ 1 ;
 5) То есть после интегрирования получим не более $\mu(U_{1/k}(\partial P))$.
 6) Напрямую можно убедиться, что эта $\mu \rightarrow 0$ при $k \rightarrow 0$. □

6 Теоремы о системе неявных функций

- 6.1. 1. По условию $df_1, \dots, df_k, dx_{k+1}, \dots, dx_n$ — линейно независимы. Тогда $f_1, \dots, f_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ дают криволинейную систему координат.
 2. Тогда старые координаты (НД) выражаются через новые: $x_i = \varphi_i(f_1, \dots, f_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$, при чём выберем x : $f_i = y_i \Rightarrow \text{Sol CУ}$ содержится в графике отображения $\varphi: V \mapsto U$, при достаточно малых V, U : $\varphi(V) \subseteq U$.
 3. Но график отображения содержится в Sol(CУ) , т.к. в точке $p = (y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ значения $f_i = y_i$, т.к. $\varphi_i(p)$ даст такие x_1, \dots, x_k , что $f_i(x_i) = y_i$. Q. E. D. □

Призраки прошлого и настоящего

239 Прошлого

Thr 239.1 (Дифференцирование под знаком интеграла).

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) \in \mathcal{L}_c^x \quad \forall y \in (a, b) \\ f \text{ дифференцируема по } y \\ \forall x \in X, \forall y \in (a, b) |f'_y(x, y)| \leq g(x) \\ g \geq 0: X \rightarrow \mathbb{R}^+ \in L_c \text{ на } X \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dy} \int_X f(x, y) dx = \int_X f'_y(x, y) dx.$$

Thr 239.2. Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу с конечным интегралом. Тогда f можно сколь угодно близко приблизить в среднем элементарно ступенчатой функцией.

556 Настоящего

Task 556.1 (Замена координат в интеграле для собственных отображений вообще). Пусть гладкое отображение $\varphi: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ является собственным. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^* \nu = C_\varphi \int_{\mathbb{R}^n} \nu, \quad C_\varphi \in \mathbb{Z}.$$

Формула Стокса

Lem 556.2 (формула Стокса в узком смысле). Для компактной двумерной поверхности с краем (то есть вложенного двумерного многообразия с краем) $S \subset \mathbb{R}^3$ верна

$$\int_{\partial S} P dx + Q dy + R dz = \int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Task 556.3. Площадь области, ограниченной замкнутой гладкой кривой без самопересечений $C \subset \mathbb{R}^2$, можно посчитать по формуле:

$$A = \pm \int_C x dy,$$

где знак выбирается в зависимости от ориентации кривой.

Task 556.4. Объём области в \mathbb{R}^3 , ограниченной связной вложенной компактной поверхностью без края $S \subset \mathbb{R}^3$, можно посчитать по формуле:

$$A = \pm \int_S x dy \wedge dz,$$

где знак выбирается в зависимости от ориентации поверхности.