

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

Автор: Хоружий Кирилл

От: 5 октября 2020 г.

Содержание

1.1	Криволинейные координаты	1
1.2	Кинематика точки	3
1.3	Кинематика твёрдого тела	5
1.4	Сложное движение точки и твёрдого тела	8

1.1 Криволинейные координаты

Т1.

Найдём ковариантные и контрвариантные компоненты \mathbf{a} . Учитывая, что тензор однозначно задаётся координатами в некотором базисе:

$$\lceil \mathbf{b} = a^i \mathbf{g}_i \mid \mathbf{g}_j \Rightarrow (\mathbf{b} \cdot \mathbf{g}^j) = a^i (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j) = a^i \delta_i^j = a^j \Rightarrow a^i \mathbf{g}_i = \mathbf{a}.$$

Аналогично

$$\lceil \mathbf{b} = a_i \mathbf{g}^i \mid \mathbf{g}_j \Rightarrow (\mathbf{b} \cdot \mathbf{g}_j) = a_i (\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j) = a_i \delta_j^i = a_j \Rightarrow a_i \mathbf{g}^i = \mathbf{a}.$$

Теперь научимся жонглировать индексами.

$$\lceil \mathbf{b}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j \mid \mathbf{g}^n \Rightarrow g^{ij} \mathbf{g}_j \mathbf{g}^n = g^{ij} \delta_j^n = g^{in} = (\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^n) \Rightarrow \mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j.$$

Для $g_{ij} \mathbf{g}^j = \mathbf{g}_i$ доказательство аналогично. Наконец,

$$\delta_i^j = (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j) = (g_{ik} \mathbf{g}^k \cdot g^{jn} \mathbf{g}_n) = g_{ik} g^{jn} \delta_n^k = g_{ik} g^{kj}.$$

Теперь, для жонглирования над координатой:

$$\lceil \mathbf{a} = a_i \mathbf{g}^i \mid \mathbf{g}_j \Rightarrow a^j = g^{ij} a_i.$$

Т2.

Найдём локальный базис/матрицу перехода из ПДСК для $\mathbf{r}(\sigma, \tau, z)$:

$$\mathbf{r}(\sigma, \tau, z) = \begin{pmatrix} \sigma\tau \\ (\tau^2 - \sigma^2)/2 \\ z \end{pmatrix}; \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \tau & \sigma & 0 \\ -\sigma & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad g_{ij} = \mathbf{J}^T \mathbf{J} = \text{diag}(\tau^2 + \sigma^2, \tau^2 + \sigma^2, 1).$$

Зафиксировав значения всех кроме одной переменных найдём координатные линии, затем построим координатные поверхности (см. рис. 1).

Т3.

Найдём метрический тензор g_{ij} для криволинейных координат (r, φ) , задающих положение точки на параболоиде $z = a(x^2 - y^2)$, при $a = \text{const}$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ ar^2 \cos(2\varphi) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \Rightarrow \mathbf{g}_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 2ar \cos(2\varphi) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{g}_\varphi = \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ -2ar^2 \sin(2\varphi) \end{pmatrix}$$

Тогда метрический тензор:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j); \\ g_{11} &= 4a^2 r^2 \cos^2(2\varphi) + \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi); \\ g_{12} &= g_{21} = -2a^2 r^3 \sin(4\varphi); \\ g_{22} &= 4a^2 r^4 \sin^2(2\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi) + r^2 \cos^2(\varphi). \end{aligned}$$

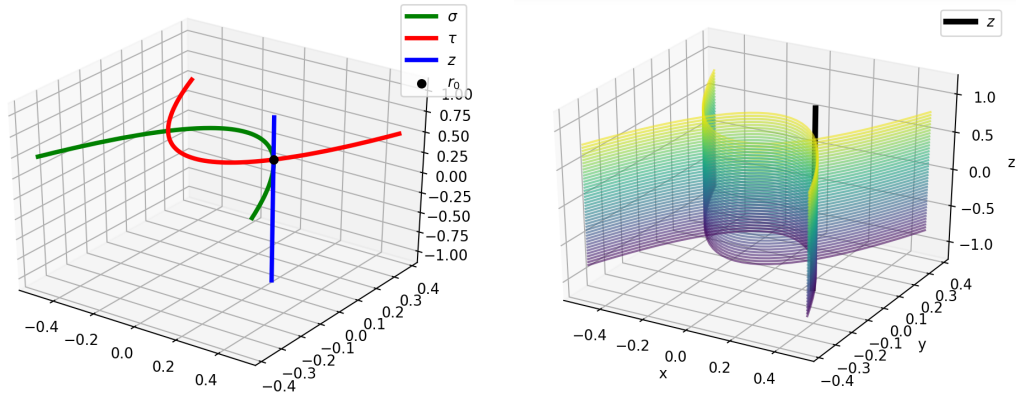


Рис. 1: Координатные линии и координатные поверхности.

Объединяя,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 16a^2r^2 \sin^4(\varphi) - 16a^2r^2 \sin^2(\varphi) + 4a^2r^2 + 1 & -2a^2r^3 \sin(4\varphi) \\ -2a^2r^3 \sin(4\varphi) & -16a^2r^4 \sin^4(\varphi) + 16a^2r^4 \sin^2(\varphi) + r^2 \end{pmatrix}.$$

Или,

$$g^{ij} = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-16a^2r^2 \sin^4(\varphi) + 16a^2r^2 \sin^2(\varphi) + 1}{4a^2r^2 + 1} & \frac{2a^2r \sin(4\varphi)}{4a^2r^2 + 1} \\ \frac{2a^2r \sin(4\varphi)}{4a^2r^2 + 1} & \frac{16a^2r^2 \sin^4(\varphi) - 16a^2r^2 \sin^2(\varphi) + 4a^2r^2 + 1}{4a^2r^4 + r^2} \end{pmatrix}.$$

Соответственно,

$$g^r = g^{rr}g_r + g^{r\varphi}g_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{(8a^2r^2 \sin^2(\varphi) + 1) \cos(\varphi)}{4a^2r^2 + 1} \\ \frac{(8a^2r^2 \cos^2(\varphi) + 1) \sin(\varphi)}{4a^2r^2 + 1} \\ \frac{2ar \cos(2\varphi)}{4a^2r^2 + 1} \end{pmatrix}; \quad g^\varphi = g^{\varphi r}g_r + g^{\varphi\varphi}g_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{(-8a^2r^2 \sin^2(\varphi) + 4a^2r^2 - 1) \sin(\varphi)}{r(4a^2r^2 + 1)} \\ \frac{(8a^2r^2 \cos^2(\varphi) - 4a^2r^2 + 1) \cos(\varphi)}{r(4a^2r^2 + 1)} \\ -\frac{2a \sin(2\varphi)}{4a^2r^2 + 1} \end{pmatrix}.$$

На всякий случай проверим в *SymPy*, что

$$g_r g^r = 1; \quad g_\varphi g^\varphi = 1; \quad g_r g^\varphi = 0; \quad g^{ij} g_{ji} = \delta_i^j.$$

Вот.

Т4.

Пусть $R = x^2 + y^2 + z^2$, найдём частную производную $\partial R / \partial x$ тогда

1. $R(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2. \quad \partial R / \partial x = 2x.$
2. $R(x, r, z) = r^2 + z^2. \quad \partial R / \partial x = 0.$
3. $R(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 - y^2)^2. \quad \partial R / \partial x = 2x + 4x(x^2 - y^2).$
4. $R(x, r) = r^2 + (x^2 - y^2)^2 = r^2 + (2x^2 - r^2)^2. \quad \partial R / \partial x = 16x^3 - 8xr^2.$
5. $R(x, z) = x^2 + (x^2 - z) + z^2 = 2x^2 - z + z^2. \quad \partial R / \partial x = 4x.$

Т5.

Для первого выражения, обозначим $(g_i \cdot \frac{\partial g^j}{\partial q^k}) \stackrel{\text{def}}{=} \Xi_{ik}^j$.

$$\Gamma_{ijk} = \left(g_i, \frac{\partial g_j}{\partial q^k} \right) = \left(g_i, \frac{\partial (g_{jn} g^n)}{\partial q^k} \right) = g_{jn} \underbrace{\left(g_i, \frac{\partial g^n}{\partial q^k} \right)}_{\Xi_{ik}^n} + \frac{\partial g_{jn}}{\partial q^k} \underbrace{(g_i \cdot g^n)}_{\delta_i^n} = g_{jn} \Xi_{ik}^n + \underbrace{\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}}_{\partial g_{jn} / \partial q^k}.$$

Домножив обе части на g^{nj} , получим

$$\Xi_{ik}^j g_{jn} g^{nj} = \boxed{\left(g_i, \frac{\partial g^j}{\partial q^k} \right) = -\Gamma_{jik} g^{jn}}$$

Для второго выражения рассмотрим значение квадрата произведения при фиксированных $i \neq j \neq k$:

$$\underbrace{(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k)^2}_{\det g_{mn}} \cdot \underbrace{(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}^k)^2}_{\det g^{nk}} = \det g_{mn} g^{np} = \det \delta_m^p = 1. \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k) \cdot (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}^k) = 3! = 6.$$

Важно заметить, что -1 не является возможным значением произведения таких смешанных произведений, т.к. левой тройке в первом сомножителе будет соответствовать тройка во втором сомножителе.

1.2 Кинематика точки

1.12*

Параметризуем движение точки некоторым $\varphi(t)$:

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -a\dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} = b\dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -a\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - a\ddot{\varphi} \sin \varphi = 0 \\ \ddot{y} = -b\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + b\ddot{\varphi} \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi = 0. \quad (1.1)$$

Решением этого уравнения является

$$\varphi(t) = \arccos(c_1 + c_2 t).$$

С учётом начальных условий получим $(x(0) = 0, \dot{x} = 0)$, что

$$\dot{\varphi} c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{v_0}{a}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \arccos(v_0 t / a).$$

Немного упростим выражения для $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = -\frac{v_0}{a \sin \varphi}, \quad \ddot{\varphi} = -\frac{\dot{\varphi}^2}{\operatorname{tg} \varphi},$$

теперь найдём $\ddot{y}(\sin \varphi)$:

$$\ddot{y} = -b\dot{\varphi} \sin \varphi + v\ddot{\varphi} \cos \varphi = -b\frac{v_0^2}{a^2 \sin^2 \varphi} \sin \varphi - b\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi \operatorname{tg} \varphi} = -\frac{b}{a^2} v_0^2 \left(\frac{1}{\sin \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^3 \varphi} \right) = -\frac{b}{a^2} v_0^2 \frac{1}{\sin^3 \varphi}.$$

Подставив $y = b \sin \varphi$, найдём

$$\ddot{y} \left(y = \frac{b}{2} \right) = -\frac{8b}{a^2} v_0^2.$$

1.19

Знаем, что в полярных координатах

$$\begin{cases} r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \\ r^2 \dot{\varphi} = c = \text{const} \end{cases} \quad \text{в полярных координатах} \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}. \quad (1.2)$$

Вспомним, что

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}).$$

Найдём \ddot{r} :

$$r + er \cos \varphi = p \xrightarrow{d/dt} \dot{r} + e\dot{r} \cos \varphi - er\dot{\varphi} \sin \varphi = 0 \xrightarrow{d/dt} \ddot{r}(1 + e \cos \varphi) - e\dot{r} \sin \varphi \left(\dot{\varphi} - \frac{c}{r^2} \right) - \frac{ec}{r} \frac{c}{r^2} \cos \varphi = 0$$

Выразим и подставим $\dot{\varphi}$ и получим

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}, \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = \frac{c^2}{r^2 p} \left(\frac{p}{r} - 1 \right), \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_r = -\frac{c^2}{pr^2}, \quad w_\varphi = 0.}$$

1.37(в)

Найдём скорость точки и проекции её ускорения на касательные к координатным линиям для координат параболического цилиндра σ, τ, z . Для начала найдём координатные векторы и метрический тензор:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2) \\ \sigma\tau \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{g}_\sigma = \begin{pmatrix} \tau \\ -\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{g}_\tau = \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{g}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} \tau^2 + \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^2 + \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$v^2 = \dot{\sigma}^2(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{\tau}^2(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{z}^2, \quad v = \sqrt{(\dot{\tau}^2 + \dot{\sigma}^2)(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{z}^2}$$

Для i -ой ковариантной координаты ускорения верно, что

$$w_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i}. \quad (1.3)$$

С учётом коэффициенты Ламе ($H_\tau = H_\sigma = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$, $H_z = 1$), найдём проекции

$$\begin{aligned} w_\tau &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} (\ddot{\tau}(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{\tau}^2 \tau + 2\dot{\sigma}\dot{\tau}\sigma - \tau\dot{\sigma}^2); \\ w_\sigma &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} (\ddot{\sigma}(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{\sigma}^2 \sigma + 2\dot{\tau}\dot{\sigma}\tau - \sigma\dot{\tau}^2); \\ w_z &= \ddot{z}. \end{aligned}$$

1.45

Выразим орты сопровождающий трехгранника $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ через \mathbf{v} и \mathbf{w} , с учётом $\mathbf{w} \times \mathbf{v} \neq 0$, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} > 0$. Так как $\mathbf{v} \nparallel \mathbf{w}$, то

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|}.$$

Выразим $\boldsymbol{\tau}$.

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = v\boldsymbol{\tau}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{v}}{v}.$$

И найдём $\mathbf{n} = [\mathbf{b} \times \boldsymbol{\tau}]$, раскрывая двойное векторное произведение (формула Лагранжа), получим

$$\mathbf{n} = \left[\frac{\mathbf{v}}{v} \times \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|} \right] = \frac{(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} - v^2 \mathbf{w}}{v|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|}.$$

Т6.

Рассмотрим движение точки в цилиндрических координатах:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \text{diag}(1, r^2, 1)$$

Для начала выразим ковариантные координаты ускорений:

$$w_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ w_\varphi = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) \\ w_z = \ddot{z}. \end{cases}$$

По условию хотим, чтобы $w_\varphi = w_z = 0$, $r = \text{const}$. Проинтегрировав дважды по времени получим систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi = c_1 t + c_2; \\ z = c_3 t + c_4, \end{cases}$$

Где c_1, c_2, c_3, c_4 —некоторые константы. Построим полученные траектории положив $c_2 = c_4 = 0$ и отмасштабировав к $c_1 = 1$ (см. рис. (2)).

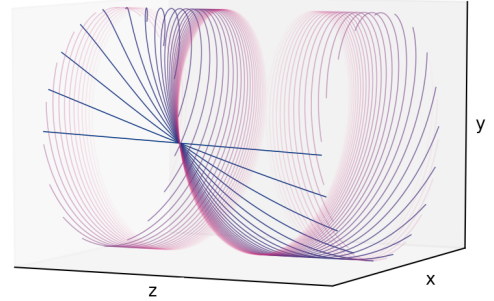


Рис. 2: Возможные геодезические цилиндра.

Т7.

Найдём $\partial v_k / \partial v_j$, при $v_k = v_k(q^i, v^i)$. Далее будем пользоваться тем, что $g_{ig} = g_{ig}(q^i)$.

$$v_k(q^i, v^i) = g_{ki} v^i \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_k}{\partial v^j} = g_{ki} \frac{\partial v^i}{\partial v^j} = g_{ki} \delta_j^i = g_{kj}.$$

Теперь найдём $\partial v_k / \partial q^j$, при $v_k = v_k(q^i, v^i)$.

$$\frac{\partial v_k(q^i, v^i)}{\partial q^j} = v^i \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} \right) = v^i \left(\left(\frac{\partial g_k}{\partial q^j}, \mathbf{g}_i \right) + \left(\frac{\partial g_i}{\partial q^j}, \mathbf{g}_k \right) \right) = v^i (\Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji}).$$

Теперь найдём $\partial v_k / \partial q^j$, при $v_k = v_k(q^i, v_i)$. Но тут так как функция выражается через саму себя, то при частном дифференцировании, $v_k = \text{const}$, тогда $\partial v_k(q^i, v_i) / \partial q^j = 0$.

Т8.*

Найдём $v_i \dot{v}^i - v^i \dot{v}_i$. Перейдём к контравариантным координатам:

$$v_i \dot{v}^i - v^i \dot{v}_i = g_{ij} v^i v^j - v^i \frac{d}{dt} (g_{ij} v^j) = g_{ij} v^j \dot{v}^i - v^i v^j \dot{g}_{ij} - g_{ij} v^i \dot{v}^j$$

В силу симметричности метрического тензора $g_{ij} = g_{ji}$, получим, что

$$v_i \dot{v}^i - v^i \dot{v}_i = -v^i v^j \dot{g}_{ij}.$$

Подставил для параболических и полярных координат, сходится.

1.3 Кинематика твёрдого тела

3.24

Запишем \mathbf{v}_B , выбрав в качестве полюса точку A и точку C .

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB} + \mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \overrightarrow{CB}, \quad (1.4)$$

или, расписав по координатам,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}} + \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{BC} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3r \cos \alpha \\ 3r \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix},$$

получим два содержательных уравнения

$$\left. \begin{aligned} -r\omega \sin \alpha + v &= v_C + 3r\omega_{BC} \sin \alpha \\ -r\omega \cos \alpha + 0 &= 0 + 3r\omega_{BC} \cos \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\omega_{BC} = -\frac{\omega}{3}, \quad v_C = v.}$$

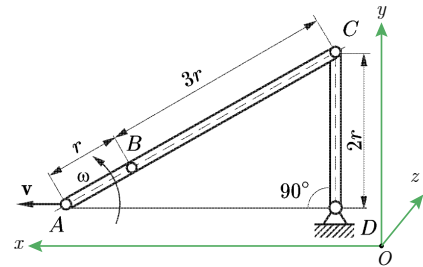


Рис. 3: К задаче 3.24.

Для поиска \mathbf{w}_C , запишем условия жёсткости стержней BC и CD . Дифференцируя по времени, получим

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_B \cdot \overrightarrow{BC} &= \mathbf{v}_C \cdot \overrightarrow{BC}; \\ \mathbf{v}_C \cdot \overrightarrow{DC} &= 0. \end{aligned} \right\} \xRightarrow{d/dt} \left\{ \begin{aligned} \mathbf{w}_B \cdot \overrightarrow{BC} + \mathbf{v}_B \cdot \dot{\overrightarrow{BC}} &= \mathbf{w}_C \cdot \overrightarrow{BC} + \mathbf{v}_C \cdot \dot{\overrightarrow{BC}}; \\ \mathbf{w}_C \cdot \overrightarrow{DC} + \mathbf{v}_C \cdot \dot{\overrightarrow{DC}} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (1.5)$$

Выразим \mathbf{w}_B из уравнения Ривальса:

$$\mathbf{w}_B = \underbrace{\mathbf{w}_A}_0 + \underbrace{\dot{\omega}_{AB} \times \overrightarrow{AB}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \alpha \\ -r \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\omega^2 \cos \alpha \\ -r\omega^2 \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В первом уравнении (1.5), зная $\dot{\overrightarrow{BC}} = \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \overrightarrow{BC} = (\omega r \sin \alpha, \omega r \cos \alpha, 0)^T$ и \mathbf{v}_B из (1.4), получим

$$\mathbf{w}_C \cdot \overrightarrow{BC} = -4\omega^2 r^2. \quad (1.6)$$

Во втором уравнении (1.5), зная $\dot{\overrightarrow{DC}} = \boldsymbol{\omega}_{DC} \times \overrightarrow{DC} = \mathbf{v}_C$, получим

$$\mathbf{w}_C \cdot \overrightarrow{DC} = -v^2. \quad (1.7)$$

Из (1.7), мы знаем $(\mathbf{w}_C)_y$, расписав в (1.6) проекцию на BC покомпонентно, получим

$$\left. \begin{aligned} -4\omega^2 r^2 &= 3r(-w_{Cx} \cos \alpha + w_{Cy} \sin \alpha); \\ w_{Cy} &= -v^2/2r. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{w}_C = \begin{pmatrix} w_{Cx} \\ w_{Cy} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } w_{Cx} = \frac{8\sqrt{3}}{9}\omega^2 r - \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{v^2}{r}, \quad w_{Cy} = -\frac{v^2}{2r}.$$

Собственно¹, $\|\mathbf{w}_C\|^2 = \frac{64}{27}\omega^4 r^2 - \frac{8}{9}\omega^2 v^2 + \frac{1}{3}v^4/r^2$.

¹Вычисления доступны здесь.

4.4

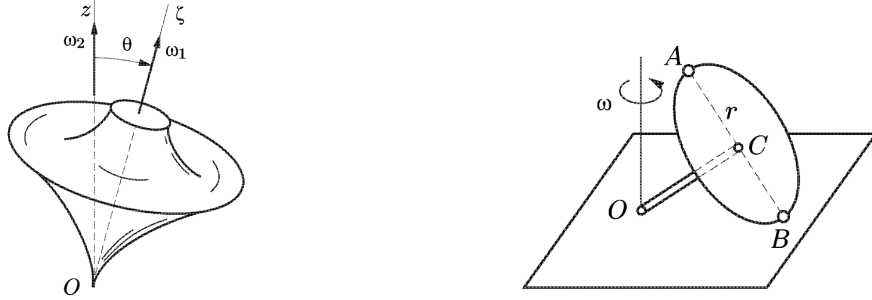
Запишем в координатах ω_1 и ω_2 .

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \sin \theta \\ \omega_1 \cos \theta \end{pmatrix}; \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{pmatrix}.$$

Так как оси ω_1 и ω_2 пересекаются, угловая скорость и угловое ускорение можно найти, как

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \sin \theta \\ \omega_2 + \omega_1 \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \omega_1 \times \omega_2 = \begin{pmatrix} \omega_1 \omega_2 \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что очень похоже на правду.



Рисунки к задачам 4.4 и 4.10.

4.10

Запишем \mathbf{v}_C , как результат движения стержня и диска. Пусть Ω – угловая скорость вращения диска, $\parallel OB$.

$$\mathbf{v}_C = \Omega \times \overrightarrow{BC} = \Omega \times \overrightarrow{OC} = \omega \times \overrightarrow{OC}.$$

Другими словами, в координатной записи,

$$\begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{r}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{r}{2} \Rightarrow \boxed{\Omega = -\sqrt{3}\omega}.$$

Угловое ускорение стержня найдём, как движение в СО стержня,

$$\varepsilon^a = \varepsilon + \varepsilon^r + \omega \times \Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\varepsilon \\ -\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3}\omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\varepsilon \\ 0 \\ \sqrt{3}\omega^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\varepsilon^a = \sqrt{3}(\varepsilon^2 + \omega^4)},$$

где

$$\varepsilon^r = \dot{\omega} = \frac{d}{dt}(\Omega - \omega) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\omega \\ -\omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\varepsilon \\ -\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь, из сложения ускорений,

$$\mathbf{w}^a = \underbrace{\mathbf{w}_0 + \varepsilon \times \mathbf{r} + \omega \times \omega \times \mathbf{r}}_{\mathbf{w}^e} + \underbrace{2\omega \times \mathbf{v}^r}_{\mathbf{w}^c} + \mathbf{w}^r,$$

найдем \mathbf{w}_B^a :

$$\mathbf{w}_B^a = \mathbf{0} + \varepsilon \times \overrightarrow{OB} + \omega \times (\omega \times \overrightarrow{OB}) + 2\omega \times (-\omega \times \overrightarrow{OB}) + \mathbf{w}_B^r.$$

Теперь найдём \mathbf{w}_B^r , как

$$\mathbf{w}_B^r = \mathbf{w}_\tau^r + \mathbf{w}_n^r = -\varepsilon r \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \omega^2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -r \\ r\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя, дойдём до

$$\boxed{\mathbf{w}_B^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3}\omega^2 r \\ 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow \|\mathbf{w}_B^r\| = 2\sqrt{3}\omega^2 r,$$

что, достаточно, логично.

Аналогично найдём \mathbf{w}_A^r :

$$\mathbf{w}_B^r = \mathbf{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} r - \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} r + 2\omega^2 r \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} - \varepsilon r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \Rightarrow \boxed{\mathbf{w}_B^r = r \begin{pmatrix} 3\omega^2 \\ 2\sqrt{3}\omega^2 \\ -3\varepsilon \end{pmatrix}}.$$

И найдём норму ускорения точки A

$$\|\mathbf{w}_A^a\| = \sqrt{21\omega^4 r^2 + 9\varepsilon^2 r^2}.$$

4.12

Рассмотрим движение интересных нам точек, как движение в СО обруча, с

$$\mathbf{v}^e = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\omega}^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v/R \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}^e = \mathbf{0}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{0}.$$

Найдём радиус векторы до интересных нам точек:

$$\vec{O1} = \begin{pmatrix} -r \sin \alpha \\ r \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{O2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}; \quad \vec{O3} = \begin{pmatrix} r \sin \alpha \\ -r \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{O4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}.$$

Тогда, из теоремы о сложении скоростей, получим значения для \mathbf{v}_i^a :

$$\mathbf{v}_i^a = \underbrace{\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}^e \times \vec{O_i}}_{\mathbf{v}_i^e} + \underbrace{\boldsymbol{\omega}^r \times \vec{O_i}}_{\mathbf{v}_i^r}.$$

Подставляя значения, получим, что

$$\mathbf{v}_1^a = \begin{pmatrix} v(R + r \cos \alpha)/R \\ rv \sin \alpha / R \\ \omega r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2^a = \begin{pmatrix} \omega r \sin \alpha + v \\ -\omega r \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3^a = \begin{pmatrix} v(R - r \cos \alpha)/R \\ -rv \sin \alpha / R \\ -\omega r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4^a = \begin{pmatrix} -\omega r \sin \alpha + v \\ \omega r \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Или, переходя к значениями $\|\mathbf{v}_i^a\|$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_1^a\| &= (R^2 \omega^2 r^2 + R^2 v^2 + 2Rrv^2 \cos(\alpha) + r^2 v^2) / R^2, & \|\mathbf{v}_2^a\| &= \omega^2 r^2 + 2\omega r v \sin(\alpha) + v^2, \\ \|\mathbf{v}_3^a\| &= (R^2 \omega^2 r^2 + R^2 v^2 - 2Rrv^2 \cos(\alpha) + r^2 v^2) / R^2, & \|\mathbf{v}_4^a\| &= \omega^2 r^2 - 2\omega r v \sin(\alpha) + v^2. \end{aligned}$$

Что соответствует ответам учебника.

Теперь, из теоремы о сложении скоростей, найдём \mathbf{w}_i^a

$$\mathbf{w}_i^a = \underbrace{0 + 0 + \boldsymbol{\omega}^e \times \boldsymbol{\omega}^e \times \vec{O_i}}_{\mathbf{w}^e} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega}^e \times (\boldsymbol{\omega}^r \times \vec{O_i})}_{\mathbf{w}^e} + \underbrace{-\omega^2 \cdot \vec{O_i}}_{\mathbf{w}_i^r}.$$

Подставляя значения, получим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1^a &= \frac{r(R^2 \omega^2 + v^2)}{R^2} \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{w}_2^a &= -\omega r \begin{pmatrix} 2v \cos \alpha / R \\ 2v \sin \alpha / R \\ \omega \end{pmatrix}, \\ \mathbf{w}_3^a &= \frac{r(R^2 \omega^2 + v^2)}{R^2} \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{w}_4^a &= \omega r \begin{pmatrix} 2v \cos \alpha / R \\ 2v \sin \alpha / R \\ \omega \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Или, переходя к нормам, получим, что

$$\|\mathbf{w}_1^a\| = \frac{r^2 (R^2 \omega^2 + v^2)^2}{R^4}, \quad \|\mathbf{w}_2^a\| = \frac{\omega^2 r^2 (R^2 \omega^2 + 4v^2)}{R^2}, \quad \|\mathbf{w}_3^a\| = \frac{r^2 (R^2 \omega^2 + v^2)^2}{R^4}, \quad \|\mathbf{w}_4^a\| = \frac{\omega^2 r^2 (R^2 \omega^2 + 4v^2)}{R^2}.$$

4.32

Нам известно $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$, из задачи 1.45 знаем, как выразить направляющие трёхгранника Френе $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}$, через $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$, соответственно считаем известными ρ, κ . В выводе теоремы сложения ускорений использовалось, что

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega}^e \times \mathbf{e}_i. \quad (1.8)$$

Также мы знаем, что

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nu}, \quad \frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\tau} + \kappa\boldsymbol{\beta}, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\kappa\boldsymbol{\nu}. \quad (1.9)$$

Тогда, из покоординатной записи, в $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta})$, получим систему уравнений, решая которую получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}v \\ \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}v \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nu}v &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\tau} \\ -v\kappa\boldsymbol{\nu} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \omega_1 &= v\kappa \\ \omega_2 &= 0 \\ \omega_3 &= v/\rho \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\tau})(\kappa\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\beta}/\rho)}.$$

4.37

Пусть $\boldsymbol{\omega}^r$ – угловая скорость тела в СО Земли, посмотрим на угловое ускорение твёрдого тела относительно СО, в данный момент времени совпадающей с направлениями: $\boldsymbol{e}_i \parallel \boldsymbol{\omega}_i$, с полюсом в неподвижной точке тела.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^a = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \dot{\omega}_1 \frac{\boldsymbol{\omega}_1}{\omega_1} + \dot{\omega}_2 \frac{\boldsymbol{\omega}_2}{\omega_2} + \dot{\omega}_3 \frac{\boldsymbol{\omega}_3}{\omega_3} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \dot{\omega}_1 \frac{\boldsymbol{\omega}_1}{\omega_1} + \dot{\omega}_2 \frac{\boldsymbol{\omega}_2}{\omega_2} + \dot{\omega}_3 \frac{\boldsymbol{\omega}_3}{\omega_3},$$

так как оси жёстко связаны с самим телом.

4.50

Знаем, что скорость некоторой точки твёрдого тела можем записать, как

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 + \begin{pmatrix} \omega_y r_z - \omega_z r_y \\ \omega_z r_x - \omega_x r_z \\ \omega_x r_y - \omega_y r_x \end{pmatrix}.$$

Тогда, прямой подстановкой, получим, что

$$\text{rot } \boldsymbol{v} = \text{rot } \boldsymbol{v}_0 + \text{rot } \begin{pmatrix} \omega_y r_z - \omega_z r_y \\ \omega_z r_x - \omega_x r_z \\ \omega_x r_y - \omega_y r_x \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \boldsymbol{v}.$$

1.4 Сложное движение точки и твёрдого тела

2.15

Для начала найдём, что

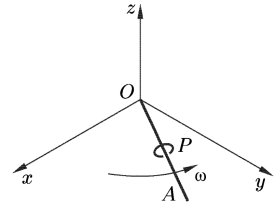
$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \boldsymbol{r}_p = \boldsymbol{a} \cdot (1 + \sin \omega_0 t) \\ \boldsymbol{v}_p &= \boldsymbol{a} \cdot \omega_0 \cos \omega_0 t \\ \boldsymbol{w}_p &= -\boldsymbol{a} \cdot \omega_0^2 \sin \omega_0 t \end{aligned} \right\} \text{ в СО стержня, где } \boldsymbol{a} = a \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем абсолютную скорость \boldsymbol{v}_p^a точки P ,

...

Запишем абсолютное ускорение \boldsymbol{w}_p^a точки P ,

...



4.14 и 4.15*

Сделаем задачу чуть менее абстрактной. Представим кольцевую железную дорогу, плоскость которой нормальна к $\boldsymbol{\omega}_1$. Наш агент №1 сидит в вагоне поезда и на столе, поверхность которого нормальна к $\boldsymbol{\omega}_2$, запускает игрушечную кольцевую железную дорогу с игрушечным агентом №2 в вагоне поезда. Агент №2 запускает поезд на столе, поверхность которого нормальна к $\boldsymbol{\omega}_3$...

Найдём $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{№2}}$ – угловое ускорение агента №2. По словам №1, угловое ускорение равно $\boldsymbol{\omega}_{\text{№2}} = \boldsymbol{\omega}_2$, тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{№2}} = \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}_1}_{\boldsymbol{\varepsilon}^e} + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}_2 = 0 + \frac{\boldsymbol{\omega}_2}{\omega_2}\dot{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2.$$

А теперь найдём $\boldsymbol{\varepsilon}_3$. С точки зрения №2 $\boldsymbol{\omega}_{\text{№3}} = \boldsymbol{\omega}_3$. Мы знаем, что $\boldsymbol{\omega}_{\text{№2}} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$, и знаем $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{№2}}$, тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{№3}} = \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}_3 = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_2}{\omega_2}\dot{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2 \right) + \frac{\boldsymbol{\omega}_3}{\omega_3}\dot{\omega}_3 + (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \boldsymbol{\omega}_3.$$

И так далее мы можем продолжать добавлять вектора ω_i к движению тела, в силу $\omega^a = \omega^e + \omega^r$, при чём мы получим слагаемые вида векторного произведения всех упорядоченных пар ω_j и ω_k , плюс сумма ε_i^r .

$$\varepsilon_{N^*N} = \varepsilon_{N^*(N-1)} + \frac{\omega_N}{\omega_N} \dot{\omega}_N + \omega_{N^*(N-1)} \times \omega_N.$$

По индукции можем показать, что

$$\varepsilon = \varepsilon_{N^*N} = \sum_{j=2}^n \frac{\omega_j}{\omega_j} \dot{\omega}_j + \sum_{k=2}^N \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \times \omega_k.$$

В частности, при $\dot{\omega}_j = 0$, получим выражение для задачи 4.14.

Т9.*

Рассмотрим движение выпуклого твёрдого тела по выпуклой поверхности. В конкретный момент времени они соприкасаются в точках A и C соответственно. Можно рассматривать это как движение шара с радиусом кривизны равным радиусу кривизны r твёрдого тела в точке A , по плоскости, содержащей точку C .

Тогда, по формуле Ривальса,

$$\mathbf{w}_A = \mathbf{w}_O + \varepsilon \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}).$$

А скорость точки C , относительно твёрдого тела, совпадает с точностью до знака, со скоростью точки O , относительно поверхности, то есть

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O = \mathbf{v}_C = \omega \times (-\mathbf{r}),$$

где $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$.

Теперь заметим, что

$$d\mathbf{v} = d\omega \times (-\mathbf{r}) + \omega \times (-d\mathbf{r}) = (\varepsilon dt) \times (-\mathbf{r}), \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w}_A = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \varepsilon \times (-\mathbf{r})$$

И, собирая всё вместе, получим, что

$$\mathbf{w}_A = \varepsilon \times (-\mathbf{r}) + \varepsilon \times \mathbf{r} + \omega \times (-\mathbf{v}) = -\omega \times \mathbf{v},$$

что и требовалось доказать.

