Второе задание по курсу «Аналитическая Механика»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *30 ноября 2020 г.*

Содержание

1 Динамика II

1.8 Геометрия масс

11.8(7)

Запишем тензор квадрата расстояния

$$\widetilde{r_i}^{\mathrm{T}}\widetilde{r_i} = \begin{pmatrix} y_i^2+z_i^2 & -x_iy_i & -x_iz_i \\ -x_iy_i & x_i^2+y_i^2 & -y_iz_i \\ -x_iz_i & -y_iz_i & x_i^2+y_i^2 \end{pmatrix} = \hat{j}_i, \tag{1.1}$$

суммируя, получим

$$\hat{J}_0 = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

В силу симметрии системы $J_x = J_y = J_z$, выбрав сферические координаты найдём J_z:

$$J_z = \int_M (y^2+x^2)\,dm = \rho\int_V (y^2+x^2)\,dV = \rho \int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2} r^4\sin^3\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta = \frac{2}{5}R^5\frac{1}{R^2}\left(\frac{4}{3}R^3\rho\pi\right) = \frac{2}{5}MR^2. \tag{1.3}$$

11.12

Тензор инерции твердого тела в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ имеет такой вид

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}, \qquad D \neq 0.$$

Хотелось бы его к диагональному виду привести. Повернем оси вокруг оси Ox на некоторый угол α и приведём к диагональному виду

$$S^{\mathrm{T}}\hat{J}S = \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

После нескольких монотонных операций (ограничив все на плоскость Oxy) получаем

$$S^{\mathrm{T}}JS\Big|_{Oyz} = \begin{pmatrix} B\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + D\sin 2\alpha & B\sin 2\alpha/2 - C\sin 2\alpha/2 - D\cos 2\alpha \\ B\sin 2\alpha/2 - C\sin 2\alpha/2 - D\cos 2\alpha & B\cos^2\alpha + C\cos^2\alpha - D\sin 2\alpha \end{pmatrix},$$

откуда находим α

$$\cos 2\alpha = \frac{B-C}{\sqrt{4D^2+(B-C)^2}}$$

и, соответсвенно,

$$A' = A, \quad B' = \frac{1}{2}\left(B+C+\sqrt{(B-C)^2+4D^2}\right), \quad C' = \frac{1}{2}\left(B+C-\sqrt{(B-C)^2+4D^2}\right). \tag{1.4}$$

Направляющие же векторы найдём, повернув базисные векторы,

$$S\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_2'\\ \boldsymbol{e}_3'\end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{e}_2' = (\boldsymbol{e}_2 + \operatorname{tg}\alpha\,\boldsymbol{e}_3)/n_2, \\ \boldsymbol{e}_3' = (-\operatorname{tg}\alpha\,\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)/n_3 \end{cases}$$

Возвращаясь в трёхмерие наш новый базис (который остается отнормировать)

$$\boldsymbol{e}_1' = (1,\ 0,\ 0)\,, \quad \boldsymbol{e}_2' = (0,\ D,\ (B'-B))\,, \quad \boldsymbol{e}_3' = (0,\ C'-C,\ D)\,. \tag{1.5}$$

11.18

Поместим начало координат в центр масс (потому что так привычнее считать) и найдём тензор инерции по (1.1) и (1.2), аналогично (1.3), несколько раз проинтегрировав по параллелепипеду

$$J_z = \rho\int_V (x^2+y^2)\,dV = \rho\int\limits_{-a/2}^{a/2}dx\int\limits_{-b/2}^{b/2}dy\int\limits_{-c/2}^{c/2}dz\;(x^2+y^2) = \frac{1}{12}m(a^2+b^2),$$

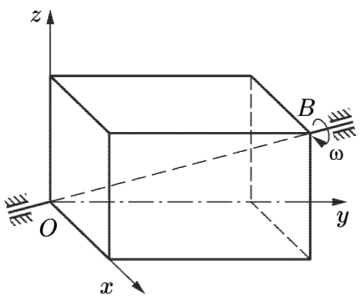

Рис. 1: К задаче 11.18

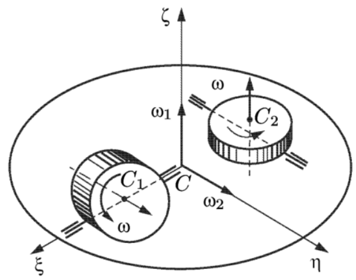

Рис. 2: К задаче 11.27

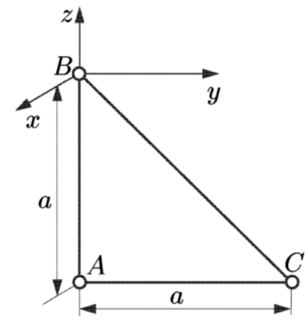

Рис. 3: К задаче 11.27

аналогичные результаты получим для J_y, J_x

$$J_y = \ \ldots \ = \frac{1}{12}m(a^2+c^2), \qquad J_x = \ \ldots \ = \frac{1}{12}m(b^2+c^2).$$

Остается найти осевые моменты инерции

$$J_{xy} = \rho\int_V xy\,dV = \rho\frac{1}{16}a^2b^2c^2 = \frac{1}{16}mab, \quad J_yz = \ \ldots \ = \frac{1}{16}mbc, \quad J_xz = \ \ldots \ = \frac{1}{16}mac.$$

Таким образом

$$\hat{J}_O = \frac{1}{48}m\begin{pmatrix} 4(b^2+c^2) & -3ab & -3ac \\ -3ab & 4(a^2+c^2) & -3bc \\ -3ac & -3bc & 4(a^2+b^2) \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Кинетический момент найдём по определению, как

$$\mathbf{K}_O = \hat{J}_O\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{K}_A = \hat{J}_A\boldsymbol{\omega},$$

где ω и $\hat{J}_A$

$$\hat{J}_A = \hat{J} + m\hat{j}_{OA}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,(a,\ b,\ c)^{\mathrm{T}}$$

Заметим что $\hat{j}_{OA}$ будет аналогичен (1.1), тогда осталось найти $\mathbf{K}_O$:

$$\mathbf{K}_O = \hat{J}_O\boldsymbol{\omega} = \frac{\omega m}{48\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix} a(b^2+c^2) \\ b(a^2+c^2) \\ c(a^2+b^2) \end{pmatrix}.$$

11.27

Проинтегрировав как в задачах 11.18 и 11.8(7) найдём, что относительно центра масс тензор инерции $\hat{J}_O$ диска в главных осях имеет вид

$$\hat{J}_C = \frac{1}{4}mR^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Кинетическая энергия тела может быть найдена, как

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\hat{J}_O\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}mv_O^2.$$

Запишем T для случая $\boldsymbol{\omega}_1 \parallel Oz$, как сумму вращательной и поступательной энергии для двух дисков.

Поступательные, в силу геометрии системы, у дисков равны, первый диск вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{D1}} = (0,\ 0,\ \omega+\omega_1)$, а второй с $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{D2}} = (0,\ \omega,\ \omega_1)$. Тензор инерции для второго диска аналогичен (1.7), только с 2 по оси Oy. Собирая всё вместе

$$T = 2\times\frac{1}{2}m\omega_1^2a^2 + \underbrace{\frac{1}{4}mR^2(\omega+\omega_1)^2}_{\vec{\omega}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{D1}}\hat{J}_{0,\mathrm{D1}}\vec{\omega}_{\mathrm{D1}}} + \underbrace{\frac{1}{8}mR^2\omega_1^2 + \frac{1}{4}mR^2\omega^2}_{\vec{\omega}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{D2}}\hat{J}_{0,\mathrm{D2}}\vec{\omega}_{\mathrm{D2}}} = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \left(a^2+\frac{3}{8}R^2\right)\omega_1^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega\omega_1.$$

Также заметим, что вопросы задачи симметричны с точностью до замены дисков, что упрощает нам дело в плане поиска и записи ответа:

$$T_i = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \left(a^2 + \frac{3}{8}R^2\right)\omega_i^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega\omega_i, \qquad i = 1, 2. \tag{1.8}$$

11.92

Найдём тензор инерции для точки B по (1.2):

$$\hat{J}_B = ma^2\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вспоминая результаты задачи №11.12, где подобное приведение к главным осям решено в общем виде, находим

$$B' = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{5}\right), \qquad C' = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right).$$

Главные оси же параллельны векторам

$$\boldsymbol{e}_1' = (1,\ 0,\ 0), \quad \boldsymbol{e}_2' = \left(0,\ -2,\ \sqrt{5}-1\right), \quad \boldsymbol{e}_3' = \left(0,\ 1-\sqrt{5},\ -2\right).$$

Отнормировав которые найдём новый базис.

Тензор инерции точки A и эллипсоид инерции, соответственно, равны

$$\hat{J}_A = ma^2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M = \{2x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

где M, как можно заметить, является эллипсоидом инерции ($J_y = J_z$).

1.9 Динамика твёрдого тела

11.45

Твердое тело с неподвижной точкой движется под действием момента

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\omega},$$

где вектор $\boldsymbol{a}$ вращается вместе с твёрдым телом. Хотим перейти к динамическим уравнениям Эйлера, так что

$$\hat{J}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_\xi \\ a_\eta \\ a_\zeta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_O = \begin{pmatrix} a_\eta r - a_\zeta q \\ a_\zeta p - a_\xi r \\ a_\xi r - a_\eta p \end{pmatrix}.$$

Для начала попробуем в лоб, домножив динамические уравнения эйлера на p, q, r соответсвенно

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = -M_\xi \\ B\dot{q} + (A-C)pr = -M_\eta \\ C\dot{r} + (B-A)pq = -M_\zeta \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad A\dot{p}p + B\dot{q}q + C\dot{r}r = 0.$$

Не густо.

Пойдём в чуть более низкоуровневую запись

$$\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt} = \dot{K}_{Oi}\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{\omega}.$$

Т.к. $\dot{a}_i\boldsymbol{e}_i = 0$, то

$$(\dot{K}_{Oi} + \dot{a}_i)\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{K}_O + \boldsymbol{a}) = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{K}_O + \boldsymbol{a}) = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\boldsymbol{K}_0 + \boldsymbol{a} = \text{const}} \text{ — первый I интеграл.}$$

Теперь, т.к. $\boldsymbol{\omega}\perp\boldsymbol{M}_O$ предположим, что $T = \text{const}$. Действительно

$$dT = \partial A = \cancel{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_O)}\,dt + \cancel{(\boldsymbol{M}_O\cdot\boldsymbol{\omega})}\,dt = 0 \qquad\Rightarrow\qquad \boxed{T = \text{const}} \text{ – второй I интеграл.}$$

11.59

Есть твёрдое тело в отсутсвие внешних сил с $\boldsymbol{K}_O = \text{const}$ и $A = B \neq C$. Выберем в качестве оси динамической симметрии ось $O\zeta$. Запишем динамические уравнения Эйлера

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-A)qr = 0 \\ A\dot{q} - (C-A)pr = 0 \\ \qquad\qquad C\dot{r} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C\dot{r} = 0, \quad Cr_0 = K_O\cos\theta = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r(t) = r_0 & = \text{const} \\ \theta(t) = \theta & = \text{const} \end{cases}$$

Посмотрим теперь на $\|\boldsymbol{K}_O\|$

$$K_O^2 = A^2(p^2+q^2) + (K_O\cos\theta)^2 \quad \Rightarrow \quad p^2+q^2 = \left(\frac{K_0\sin\theta}{A}\right)^2.$$

Теперь посмотрим на $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{\boldsymbol{\psi}} + \cancel{\dot{\boldsymbol{\theta}}},$$

проецируя всё на базис $O\xi\eta\zeta$ нахожим, что

$$\begin{cases} r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \\ \sqrt{p^2+q^2} = \dot{\psi}\sin\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\psi} = K_O/A & = \text{const} \\ \dot{\varphi} = r_0\,(1 - C/A) & = \text{const} \end{cases}$$

Теперь мы готов записать *параметры регулярной прецессии в случае Эйлера*:

$$\cos\theta = \frac{Cr_0}{K_0}, \qquad \dot{\psi} = \frac{K_O}{A}, \qquad \dot{\varphi} = r_0\left(1 - \frac{C}{A}\right), \qquad K_O = \sqrt{C^2r_0^2 + A^2(\omega_0^2 - r_0^2)}. \tag{1.9}$$

11.63

Для начала поймём куда диск движется, точнее найдем (или хотя бы сделаем шаги в эту сторону) мгновенную ось вращения проходящую через точку A и некоторую точку C.

Для начала посмотрим на геометрию системы (введя неизвестные a, b, c):

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -r \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} r \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{CA} = 0 \\ \boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{CB} \\ \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{CD} \end{cases}, \quad \begin{cases} \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \\ \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \end{cases},$$

Для удобства далее будем считать $\boldsymbol{\omega} = k\overrightarrow{CA}$. Посчитаем векторы скоростей в нашеих обозначениях

$$\boldsymbol{v}_D = kr\begin{pmatrix} c \\ c \\ -b-a \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_B = k\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{AB} = kr\begin{pmatrix} c \\ -c \\ b-a \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = b$$

Так как мы знаем абсолютные значения скоростей точек, то запишем

$$v_D^2 - v_B^2 = v_0^2 = 4a^2k^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v_0}{2rk}.$$

Подставив теперь значения a в v_B^2 получим

$$v_B^2 = 2k^2c^2r^2 = v_0^2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{v_0\sqrt{2}}{2kr}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{v_0}{2r}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Теперь найдём скорость центра масс

$$\boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{CO} = \boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{r}_{CA} + \overrightarrow{AO}\right) = \boldsymbol{\omega}\times\begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{v_0}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r}_O(t) = \begin{pmatrix} v_0t/\sqrt{2} \\ 0 \\ -gt^2/2 + v_0t/2 \end{pmatrix}.$$

Теперь мы знаем как будет двигаться в условиях гравитации наш диск (его центр масс)!

Теперь посмотрим на вращение диска относительно центра масс. Для этого пересядем в СО падающую с $\boldsymbol{g}$, теперь $\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{0}$ и мы пришли к случаю Эйлера (который подробно был рассмотрен в задаче №11.59).

Для начала вспомним, что для диска кинетический момент

$$\boldsymbol{K}_O = \hat{J}_O\boldsymbol{\omega} = \frac{mr^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\frac{v_0}{2r} = \frac{mrv_0}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \text{const}, \quad \Rightarrow \quad K_O = \frac{\sqrt{10}}{8}mrv_0.$$

Зная $\boldsymbol{K}_O$ можем найти ось прецессии $\boldsymbol{e} \parallel \boldsymbol{K}_O$
$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(1,\ 1,\ 2\sqrt{2}\right).$$
Подставляя параметры системы в уравнения (1.9), найдём
$$\dot\psi = \frac{K_O}{A} = \frac{\sqrt{10}}{2}\frac{v_0}{r}, \qquad \dot\varphi = r_0\left(1-\frac{C}{A}\right) = -\frac{v_0\sqrt{2}}{2r}, \qquad \cos\theta = \frac{Cr_0}{K_O} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

11.72

Решим чуть более общую задачу о движении тяжелого симметричного волчка с неподвижней нижней точкой. Начало координат O совпадает с неподвижной точкой волчка, расстояние до центра масс равно l.

Запишем кинематические и динамические уравнения Эйлера
$$\begin{cases} p = \dot\varphi\sin\theta\sin\psi + \dot\theta\cos\psi, \\ q = \dot\varphi\sin\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi, \\ r = \dot\varphi\cos\theta + \dot\psi. \end{cases}, \qquad \begin{cases} I_1\dot p + (I_3 - I_2)qr = -M_\xi \\ I_2\dot q + (I_1 - I_3)pr = -M_\eta \\ I_3\dot r + (I_2 - I_1)pq = -M_\zeta \end{cases}, \qquad \hat J_O = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$
Кинетическая энергия волчка (с учетом параллельного переноса тензора инерции с центра масс к точке O)
$$T = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\hat J_O\boldsymbol{\omega} = \frac{I_1 + ml^2}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2.$$
Потенциальная энергия, соответсвенно, равна
$$\Pi = mgl\cos\theta.$$
Собирая вместе, находим
$$L = T - \Pi.$$
Понятно, что $K_3 = \mathrm{const}$, докажем также что $K_z = \mathrm{const}$. Действительно,
$$\frac{dK_z}{dt} = \boldsymbol{M}_A\Big|_Z + \cancel{\boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{v}_O} = 0 \qquad\Rightarrow\qquad K_z = \mathrm{const}.$$
Явно выпишем их
$$\begin{cases} K_3 = \partial L/\partial\dot\psi = I_3\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right) \\ K_z = \partial L/\partial\dot\varphi = \left((I_1 + ml^2)\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta\right)\dot\varphi + I_3\dot\psi\cos\theta. \end{cases} \tag{1.10}$$
Кроме того, в системе сохраняется энергия
$$E = T + \Pi = \frac{1}{2}(I_1 + ml^2)\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 + mgl\cos\theta.$$
Из (1.10) находим явные выражения для $\dot\varphi$ и $\dot\theta$
$$\dot\varphi = \frac{K_z - K_3\cos\theta}{(I_1 + ml^2)\sin^2\theta},$$
$$\dot\psi = \frac{K_3}{I_3} - \cos\theta\frac{K_z - K_3\cos\theta}{(I + ml^2)\sin^2\theta}.$$
Подставляя это в выражения для энергии E получим
$$E = \frac{1}{2}(I_1 + ml^2)\dot\theta^2 + \frac{(K_z - K_3\cos\theta)^2}{2(I_1 + ml^2)\sin^2\theta} + \frac{K_3^2}{2I_3} + mgl\cos\theta. \tag{1.11}$$
Таким образом мы находим
$$\dot\theta = \frac{d\theta}{dt} = f_{\dot\theta}(E, K_z, K_3) \qquad\Rightarrow\qquad t = \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{f_{\dot\theta}(E, K_z, K_3)}, \tag{1.12}$$
что и является нашим искомым решением в квадратурах. Конкретно для №11.72 следует положить $I_3 = 0$ и, в силу доступного для стержня произволя, $\dot\psi = 0$. Слагаемые вида K_3/I_3 в таком случае просто не возникнут, решение сохранится.

11.118

Как и в решение к №11.72 у нас симметричный волчок. Требуется определить начальную угловую скорость прецессии $\dot\varphi_0$, чтобы $\dot\theta = 0$. Формально можем поставить задачу несколько иначе, какой должен быть момент

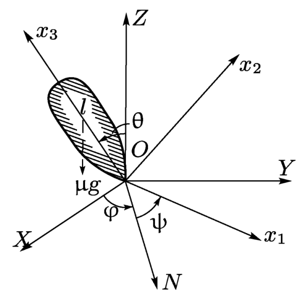

Рис. 4: К задаче 11.72

внешних сил $\boldsymbol{M}_O$ чтобы происходила регулярная прецессия $\dot{\theta} = 0$?

Для начала введём отдельно $\boldsymbol{\omega}_1 \parallel O\xi$ и $\boldsymbol{\omega}_2 \parallel OZ$. По раннее проделанной работе с регулярной прецессией, мы знаем, что K_z и K_3 постоянны, соответсвенно $\omega_1, \omega_2, \omega = \text{const}$. Аналогично случаю Эйлера (см. №???)

$$(K_O)_\xi = Cr, \qquad (K_O)_Z = A\sqrt{q^2+q^2}.$$

То есть $\boldsymbol{K}_O \in O\xi Z$ и $K_O = \text{const}$. Но, т.к. плоскость $O\xi Z$ вращаеся с угловой скорсотью $\boldsymbol{\omega}_2$ то и вектор $\boldsymbol{K}_O$ аналогично. Тогда для $\boldsymbol{M}_O$ верно, что

$$\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{M}_O. \tag{1.13}$$

Нетрудно показать, что

$$\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{K}_O = \frac{\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1}{\|\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1\|} \omega_2 \sin\theta \left(C(\omega_1 + \omega_2\cos\theta) - A\omega_2\cos\theta\right)$$

Т.к. $\|\omega_2 \times \omega_1\| = \omega_1\omega_2\sin\theta$, то

$$\boldsymbol{M}_O = (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1)\left[C + (C-A)\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta\right]. \tag{1.14}$$

Это *основная формула гироскопии*, так что, наверное, можно было принять её на веру. В частном случае, когда $\omega_1 \gg \omega_2$ можно приближенно записать эту формулу, как

$$\boldsymbol{M}_O = C\left(\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1\right). \tag{1.15}$$

Конкретно для нашей задачи (1.14) перепишется как

$$\dot{\varphi}\omega\sin\theta\left(C + (C-A)\frac{\dot{\varphi}}{\omega}\cos\theta\right) = mgl\sin\theta,$$

т.к. мы действительно требуем регулярной прецессии. Так получаем квадратное уравнение вида

$$(C-A)\dot{\varphi}^2\cos\theta + C\omega\varphi - mgl = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\varphi} = \frac{-C\omega \pm \sqrt{C^2\omega^2 + (C-A)mgl\cos\theta}}{2(C-A)\cos\theta}. \tag{1.16}$$

Стоит заметить, что при $C^2\omega^2 + (C-A)mgl\cos\theta < 0$ регулярная прецессия, по всей видимости, невозможна. При $\omega >> \dot{\varphi}$ угловая прецессия будет равна

$$\dot{\varphi} = \frac{mgl}{C\omega}, \tag{1.17}$$

и, как видно, не зависит от угла нутации.

Теперь про силы. Запишем II закон Ньтона в проекции на вертикаль и нормаль к вертикали, повернутую на $+\varphi$ от X, получим

$$\begin{cases} N_x = m\dot{\varphi}^2 l\sin\theta \\ N_y - mg = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad N = m\sqrt{g^2 + \dot{\varphi}^2 l^2\sin^2\theta}. \tag{1.18}$$

T.16*

Запишем динамические уравнения Эйлера

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = -M_\xi \\ B\dot{q} + (A-C)pr = -M_\eta \\ C\dot{r} + (B-A)pq = -M_\zeta \end{cases}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \qquad \hat{J}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

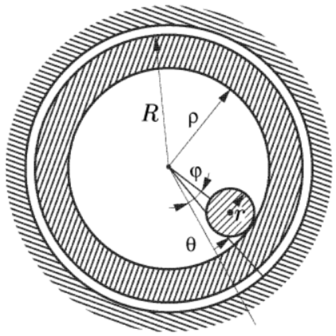

Рис. 5: К задаче 12.46

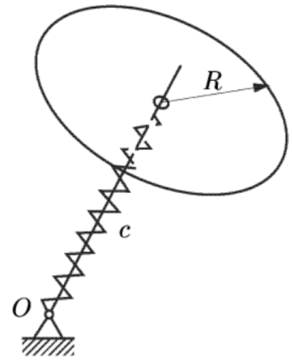

Рис. 6: К задаче 12.59

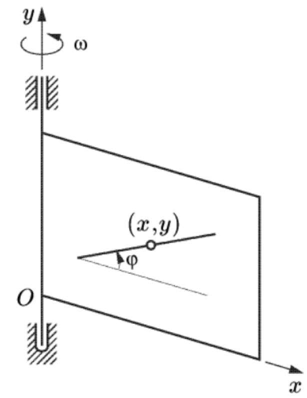

Рис. 7: К задаче 12.61

Тело вращается относительно закрепленного центра масс O. По условию

$$\boldsymbol{M}_O = -\gamma\boldsymbol{\omega}, \qquad A = B > C.$$

Хочется доказать, что мгновенная ось вращения тела асимптотически стремится стать ортогональной оси динамической симметрии тела ($O\zeta$). Если чуть формализовать, то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\|\boldsymbol{\omega}^\zeta\|}{\|\boldsymbol{\omega}^{\xi\eta}\|} = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2}} = 0, \tag{1.20}$$

равносильно поставленному условию.

Конкретизируем динамические уравнения Эйлера под наш случай:

$$A\dot{p} + (C-A)qr = -\gamma p \tag{1.21}$$

$$A\dot{q} - (C-A)pr = -\gamma q \tag{1.22}$$

$$C\dot{r} = -\gamma r \tag{1.23}$$

Из (1.23) найдём

$$r = \omega^\zeta = r_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{C}t\right).$$

Теперь посмотрим на $p\cdot(1.21) + q\cdot(1.22)$ равное полному дифференциалу по времени

$$p\dot{p} + q\dot{q} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(p^2+q^2\right) = -\frac{\gamma}{A}\left(p^2+q^2\right).$$

Естественно решить это уравнение относительно $\omega^{\xi\eta}$

$$\omega^{\xi\eta} = -\frac{\gamma}{A}\omega^{\xi\eta} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{p^2+q^2} = \omega^{\xi\eta} = \omega_0^{\xi\eta}\exp\left(-\frac{\gamma}{A}t\right).$$

Подставляя всё в (1.20) находим

$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{\omega^\zeta}{\omega^{\xi\eta}}\right] = \frac{r_0}{\omega_0^{\xi\eta}}\cdot\lim_{t\to\infty}\left[\exp\left(\frac{\gamma}{AC}\underbrace{(C-A)}_{<0}t\right)\right] = 0, \qquad \text{Q. E. D.}$$

2 Аналитическая механика

2.10 Уравнения Лагранжа

12.6 (в)

Проверим, является ли интегрируемой связь

$$\dot{y} - z\dot{x} = 0.$$

В случае интегрируемости связи существовали бы запрещенные положения системы. Покажем же что в действительности мы можем попасть из любой точки в любую. В силу отсутсвия ограничений на $\dot{z}$, мы свободно можем перемещаться вдоль оси z при $\dot{x}, \dot{y} = 0$. Пусть мы оказались в $z = 2$, тогда при движении

$$\daleth\ \dot{x}\,dt = \xi, \quad \dot{y}\,dt = 2\xi, \qquad \Rightarrow \qquad (0,0,2) \longrightarrow (\xi, 2\xi, 2).$$

Теперь по $\dot{x}, \dot{y} = 0$ перейдём в $z = 1$, тогда

$$\urcorner\ \dot{x}\,dt = -\xi, \quad \dot{y}\,dt = -\xi, \qquad \Rightarrow \qquad (\xi, 2\xi, 1) \longrightarrow (0, \xi, 1).$$

Собирая всё вместе,

$$(0,0,0) \overset{\vec{r}=(0,0,\neq 0)}{\longrightarrow} (0,0,2) \overset{\vec{r}\,dt=(\xi,2\xi,2)}{\longrightarrow} (\xi, 2\xi, 2) \overset{\vec{r}=(0,0,\neq 0)}{\longrightarrow} (0,0,1) \overset{\vec{r}\,dt=(-\xi,-\xi,1)}{\longrightarrow} (0,\xi,1) \overset{\vec{r}=(0,0,\neq 0)}{\longrightarrow} (0,\xi,0).$$

Получается допустимы перемещения из $\boldsymbol{r}_1$ в $\boldsymbol{r}_2$ $\forall \boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$, следовательно **связь не является интегрируемой**.

12.12

Найдём уравнения движения для двух материальных точек, массами m_1 и m_2, притягивающихся по закону Ньютона. В качестве обобщенных координат выберем x, y, z центра масс системы, расстояние между точками r и углы φ, θ, определяющие направление прямой.

Потенциальная энергия системы Π

$$\Pi = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}.$$

Для каждого из тел можем записать расстояние до центра масс и абсолютное положение:

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} r, \qquad r_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} r, \qquad \begin{cases} x_1 = x + r_1 \sin\theta\cos\varphi, \\ y_1 = y + r_1 \sin\theta\cos\varphi, \\ z_1 = z + r_1\cos\theta. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = x + r_2 \sin\theta\cos\varphi, \\ y_2 = y + r_2 \sin\theta\cos\varphi, \\ z_2 = z + r_2\cos\theta. \end{cases}$$

Вспомнив, что для сферических координат(r,θ,φ) метрический тензор $g_{ij} = \operatorname{diag}\big(1,\ r^2,\ r^2\sin^2\theta\big)$, найдём квадрат относительной скорости

$$v_1^2(r_1) = g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j = r_1^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + r_1^2\dot{\theta}^2 + \dot{r_1}^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_1^2(r_1) = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 \cdot v_1^2(r).$$

Теперь можем записать кинетическую энергию движения (T_1, T_2 – кинетические энергии движения тел относительно центра масс) :

$$T_1 + T_2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{d}{dt}(x,\ y,\ z)\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\right) + \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right).$$

И, наконец, лагранжиан системы

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\right) + \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) + \gamma\frac{m_1 m_2}{r}. \tag{2.1}$$

Найдём уравнения движения системы относительно центра масс:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \dfrac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{r}} - \dfrac{\partial L}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\varphi}\left(r\dot{\theta}\sin(2\theta) + \dot{r}\dot{\varphi}(1-\cos 2\theta)\right) + \dfrac{1}{2}r\ddot{\varphi}\,(1-\cos 2\theta) = 0, \\ \gamma(m_1+m_2) - r^3\left(\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\right) + r^2\ddot{r} = 0, \\ 2\dot{\theta}\dot{r} + r\ddot{\theta} - \dfrac{1}{2}r\sin(2\theta)\dot{\varphi}^2 = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

И для центра масс:

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = 0, \qquad \ddot{z} = 0. \tag{2.3}$$

Что логично, на центр масс не действует никаких сил.

Теперь к интегралам системы. Пусть $\frac{d}{dt}(x_1,y_1,z_1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{v}_1$, аналогично для второго тела. Во-первых сохраняется количество движения системы ($x,\ y,\ z$ не входят явно в L), также не входят $t,\ \varphi$, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \\ L \neq L(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = \text{const}, \\ r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta = \text{const}, \\ E = \Pi + T = \text{const}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Вообще, в силу отсутсвия внешних сил на систему, сохраняется кинетический момент,

$$\boldsymbol{K} = m_1\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{v}_2 = \text{const}. \tag{2.5}$$

12.29

Два однородных стержня длины l каждый образую плоский двойной маятник. Составим уравнения движения в форме Лагранжа.

Выберем начала координат в точке подвеса. Тогда координаты центра масс второго стержня

$$\begin{cases} x_2 = l\sin\varphi_1 + (l/2)\sin\varphi_2, \\ y_2 = l\cos\varphi_1 + (l/2)\cos\varphi_2. \end{cases}$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = -mg\left(\frac{l}{2}\cos\varphi_1\right) - mg\left(l\cos\varphi_1 + \frac{l}{2}\cos\varphi_2\right).$$

Кинетическая энергия первого стержня

$$T_1 = \frac{1}{2}I_1\dot\varphi_1^2 = \frac{l^2 m}{6}\dot\varphi^2.$$

Для второго стержня найдём кинетическую энергию, рассмотрев его вращение относительно центра масс:

$$T_2 = \frac{1}{2}m\left(\dot x_2^2 + \dot y_2^2\right) + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot\varphi_2^2.$$

Лагранжиан системы:

$$L = T - \Pi = ml^2\left[\frac{g}{2l}\left(3\sin\varphi_1 + \cos\varphi_2\right) + \frac{1}{2}\cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot\varphi_1\dot\varphi_2 + \frac{2}{3}\dot\varphi^2 + \frac{1}{6}\dot\varphi_2^2\right]. \tag{2.6}$$

Тогда уравнения движения системы

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot\varphi_1} - \dfrac{\partial L}{\partial\varphi_1} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot\varphi_2} - \dfrac{\partial L}{\partial\varphi_2} = 0. \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 9(g/l)\sin\varphi_1 + 3\sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot\varphi_2^2 + 3\cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot\varphi_2 + 8\ddot\varphi_1 = 0, \\ 3(g/l)\sin\varphi_2 - 3\sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot\varphi_1^2 + 3\cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot\varphi_1 + 2\ddot\varphi_2 = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

12.46

Составим уравнения движения в форме Лагранжа для системы, представленнйо на рис. 5 Для начала запишем потенциальную энергию системы, как

$$\Pi = -(\rho - r)\cos(\varphi+\theta).$$

Момент инерции полого цилиндра:

$$I_1 = \int_\rho^R \sigma r^2\, dV \quad \overset{dV = h2\pi r\, dr}{\longrightarrow} \quad I_1 = 2\pi\sigma h\int_\rho^R r^3\, dr = \frac{1}{2}\left(R^2-\rho^2\right)\left(R^2+\rho^2\right)\pi h\sigma = \frac{1}{2}M\left(R^2+\rho^2\right).$$

Тогда его кинетическая энергия

$$T_1 = \frac{1}{4}M\left(R^2+\rho^2\right)\dot\theta^2.$$

Скорость центра масс сплошного цилиндра:

$$v_2 = \dot\varphi(\rho - r).$$

Пусть цилиндр катится с угловой скоростью ω, тогда запишем условие того, что он не проскальзывает

$$(\rho - r)\dot\varphi = \rho\dot\theta + \omega r, \qquad\Rightarrow\qquad \omega = (\rho - r)\dot\varphi - \rho\dot\theta.$$

Тогда кинетическая энергия сплошного цилиндра

$$T_2 = \frac{1}{2}m\Big(\dot\varphi(\rho-r)\Big)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\omega^2.$$

Лагранжиан системы:

$$L = mg(\rho-r)\cos\varphi + m\left(\frac{1}{2}\dot\varphi^2(\rho-r)^2 + \frac{1}{4}\Big(\dot\theta\rho - \dot\varphi(\rho-r)\Big)^2\right) + \frac{1}{4}M\left(R^2+\rho^2\right)\dot\theta^2. \tag{2.8}$$

Соответсвенно, уравнения движения системы

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot\varphi} - \dfrac{\partial L}{\partial\varphi} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot\theta} - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = 0. \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} -\ddot\theta\rho + 3\ddot\varphi\left(\rho - r\right) + 2g\sin\left(\varphi\right) = 0, \\ M\ddot\theta\left(R^2+\rho^2\right) + \rho m\Big(\ddot\theta\rho - \ddot\varphi\left(\rho-r\right)\Big) = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

12.59

Составим уравнения движения в форме Лагранжа для системы, представленнйо на рис. 6. Для начала перейдём в сферические координаты:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\cos\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Для начала запишем потенциальную энергию системы, как

$$\Pi = mgz + \frac{1}{2}k(r_0 - r)^2.$$

Как уже было показано в №12.12 скорость центра масс диска

$$v^2 = g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j = r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2.$$

Также запишем кинематические уравнения Эйлера и момент инерции диска:

$$\boldsymbol{\omega}\ \overset{\text{в СО диска}}{=} \begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} \omega_1 = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ \omega_2 = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, , \\ \omega_3 = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}, \end{cases} \qquad \hat{J} = \frac{mR^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Кинетическую энергию диска тогда найдём, как

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\hat{J}\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}m\left(r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\right).$$

Соответственно, лагранжиан системы:

$$\begin{aligned} L/m = &+ \frac{1}{8}R^2\left(\dot{\psi}^2\cos^2\theta + \dot{\psi}^2 + 4\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\varphi}^2\right) + \\ &+ \frac{1}{2}r^2\left(\dot{\theta}^2 r^2 + \dot{\varphi}^2 r^2\sin^2\theta + \dot{r}^2\right) - \\ &- gr\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{k}{m}\left(r_0 - r\right)^2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Уравнения движения системы:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial\psi} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0. \tag{2.11}$$

Подставляя L, получим уравнения движения в чуть менее элегантной форме:

$$\begin{aligned} R^2\left(\ddot{\psi}\cos(\theta) + \ddot{\varphi} - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin(\theta)\right) + 2\ddot{\varphi}r^2\sin^2(\theta) + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}r^2\sin(2\theta) + 4\dot{\varphi}\dot{r}r\sin^2(\theta) &= 0, \\ R^2\ddot{\theta} + R^2\dot{\psi}\left(\dot{\psi}\cos(\theta) + 2\dot{\varphi}\right)\sin(\theta) + 4\ddot{\theta}r^2 + 8\dot{\theta}\dot{r}r - 2\dot{\varphi}^2 r^2\sin(2\theta) - 4gr\sin(\theta) &= 0, \\ \ddot{\psi}\cos^2(\theta) + \ddot{\psi} + 2\ddot{\varphi}\cos(\theta) - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin(2\theta) - 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin(\theta) &= 0, \\ 2\ddot{r}m + 2gm\cos(\theta) - 2k\left(-r + r_0\right) - 2mr\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2(\theta)\right) &= 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

12.61

Составим уравнения движения в форме Лагранжа для системы, представленнйо на рис. 7. Хотелось бы найти уравнения относительного движения стержня в форме Лагранжа.

Потенциальная энергия стержня

$$\Pi = mgy.$$

Записав кинетическую энергию,, рассматривая движение центра масс и вращение относительно него, найдём

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}m\left(\dot{y}^2 + \omega^2 x^2 + \dot{x}^2\right) + \frac{1}{12}ml^2\left(\dot{\varphi}^2 + \omega^2\cos^2\varphi\right) - mgy. \tag{2.13}$$

В угловой скорости появляется добавка $\omega\cos\varphi$ как проекции $\boldsymbol{\omega}$ на нормаль к стержню.

Уравнения движения системы найдём, как

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{x} = \omega^2 x, \\ \ddot{y} = g, \\ \ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin(2\varphi)/2. \end{cases} \tag{2.14}$$

12.88

Пусть на диск действует сила реакции опоры $\boldsymbol{N}_1$, на опору со стороны диска действует $\boldsymbol{N}_2 = -\boldsymbol{N}_1$. Связь по опрделению является идеальной, если

$$\delta A = \sum_i (\boldsymbol{N}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i) = 0.$$

В рассматриваемой системе в проекцию на ось Oy $\delta r_1 = \delta r_2$. Тогда

$$OY: \quad \delta A = N_1 \delta r_1 + N_2 \delta r_2 = (N_1 - N_1)\delta r_1 = 0,$$

следовательно **связь является идеальной**.

12.73

Выберем начало координат в положение равновесия. Запишем второй закон Ньютона для системы:

$$m\ddot{x} = -cx - \beta v.$$

Формально, мы хотим найти такой $L(x, \dot{x}, t)$, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0.$$

При отсутствии вязкого трения L имел бы вид

$$L^* = T - \Pi = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}cx^2.$$

Как мы видим $L^* \neq L(t)$, соответсвенно энергия такой системы сохраняется. Мы же рассматриваем систему с вязким трением, которая в пределе с $\beta \to 0$ приходила бы к $L = L^*$ так что будем искать L вида

$$L = f(t) \cdot L^*.$$

В таком случае

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = f(t)m\ddot{x} + \underbrace{\dot{f}(t)m}_{=f(t)\beta}\dot{x} + f(t)cx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0.$$

Воплощая в жизнь стремление сократить уравнение на $f(t)$ находим, что

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{\beta}{m}f(t), \quad \Rightarrow \quad f(t) = \exp\left(\frac{\beta}{m}t\right).$$

Тогда уравнене движения осциллятора с вязким трением можно записать, как уравнение лагранжа второго рода, для лагранжаиана

$$L(x, t) = \exp\left(\frac{\beta}{m}t\right) \cdot \frac{1}{2}\left(m\dot{x}^2 + cx^2\right). \tag{2.15}$$

12.82

Знаем, что символ Кристофеля

$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^i}\right).$$

Кинетическая энергия склерономной системы в обобщенных координатах запишется как

$$T = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j.$$

Хотелось бы в терминах сивола Кристофеля записать уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i.$$

Для начала найдём
$$\frac{\partial T}{\partial q^k} = \frac{1}{2}\dot{q}^i\dot{q}^j\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}.$$
Теперь
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} = \frac{1}{2}g_{ij}\left(\dot{q}^j\delta^i_k + q\delta^i\delta^j_k\right) = g_{kj}\dot{q}^j.$$
Дифференцируя по времени, получим
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} = g_{kj}\ddot{q}^j + \dot{q}^j\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt}\right) = g_{kj}\ddot{q}^j + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}\dot{q}^j\dot{q}^i.$$
Теперь заметим, что
$$\dot{q}^i\dot{q}^j\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} = \dot{q}^j\dot{q}^i\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j}.$$
Тогда
$$Q_k = g_{kj}\ddot{q}^j + \frac{1}{2}\dot{q}^j\dot{q}^i\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right), \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_{kj}\ddot{q}^j + \Gamma_{k,ij}\dot{q}^j\dot{q}^i = Q_k}. \tag{2.16}$$

2.11 Принцип Гамильтона-Остроградского

21.7

Запишем лагранжиан системы
$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mx^2\omega^2.$$
В условиях сказано, что $\omega = \omega(t)$ – для простоты уравнений будем считать $\omega = \text{const}$.

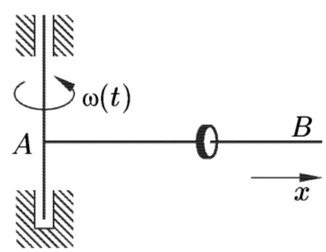

Рис. 8: К задаче 21.7

Действие тогда
$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt, \quad \Rightarrow \quad \delta S = m\dot{x}\delta x\Big|_{t_1}^{t_2} + m\int_0^t\left(-\ddot{x} + x\omega^2\right)\delta x\,dt = 0.$$
Так приходим к
$$\ddot{x} = \omega^2(t)x, \quad \Rightarrow \quad x = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}.$$
Рассмотрим движение от (x_1, t_1) до (x_2, t_2), получим СЛУ:
$$\begin{cases} x_1 = Ae^{\omega t_1} + Be^{-\omega t_1} \\ x_2 = Ae^{\omega t_2} + Be^{-\omega t_2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \det = e^{\omega(t_1 - t_2)} - e^{-\omega(t_1-t_2)} \neq 0, \quad \text{при } t \neq \text{const},$$
что соответствует существованию единственного решения у уравнения.

21.14 и 20.15

Точка массы m може двигаться по гладкой вертикальной плоскости xz, вращающейчя вокруг вектикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω.

Лагранжиан системы
$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{1}{2}mx^2\omega^2. \tag{2.17}$$

Вариация действия

$$\delta S = m\int_A^B \left(\dot{x}\delta x + \dot{z}\delta z + \omega^2 x\delta x - g\delta z\right)\,dt.$$

Посмотрим на действие

$$\begin{aligned} S &= \int_A^B L(x+\delta x, z+\delta z, t)\,dt = \\ &= \int_A^B L(x,z,t)\,dt + \underbrace{m\int_A^B \dot{x}\delta\dot{x} + \dot{z}\delta\dot{z} + \omega^2 x\delta x - g\delta z\,dt}_{\delta S(L(x,z,t))=0} + \frac{1}{2}m\int_A^B (\delta\dot{x})^2 + (\delta\dot{z})^2 + \omega^2(\delta x)^2\,dt, \qquad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

21.35

Хотелось бы от действия S вида

$$S = \int_A^B L\,dt, \qquad L = T - \Pi = \frac{1}{2}p_i\dot{q}^i - \Pi$$

к действию (или *укороченному действию*) $\delta S^* = 0$, где S^* вида

$$S^* = \int_A^B n\,ds, \tag{2.18}$$

где под интегрирование от A до B подразумевается интегрирование интегрирование уравнение от состояния в точке A до состояния в точке B. Можно было бы сразу получить ответ из принципа Мопертюи, так что давайте его выведем.

Перейдём к энергии системы, как функции p и q, где $p_i = \partial L/\partial\dot{q}^i$ – обобщенный импульс. Тогда

$$dS = L\,dt = \left(p_i\dot{q}^i - H\right)\,dt \qquad \Rightarrow \qquad S = S_0 - H\cdot(t_B - t_A), \tag{2.19}$$

так как мы рассматриваем аналогию с консервативной системой, то есть $\dot{H} = 0$. Величина S_0 – *укороченное действие*,

$$S_0 = \int_A^B p_i\dot{q}^i\,dt = 2\int_A^B (H - \Pi)\,dt.$$

Найдём dt, как

$$dt = \frac{ds}{v}, \quad v^2 = 2(H-\Pi)/m \qquad \Rightarrow \qquad dt = \frac{ds}{\sqrt{2(H-\Pi)/m}}.$$

Собирая всё вместе, получаем

$$S_0 = \int_A^B \sqrt{2m(H-\Pi)}\,ds.$$

Вернёмся к варьированию. Если допускать варьирование конечного момента времени, то

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial t}\delta t = -H\delta t, \qquad \Rightarrow \qquad \delta S + H\delta t = 0. \tag{2.20}$$

Подставляя (2.19) в (2.20), получим, что

$$\delta S_0 = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \delta\left(\int_A^B \sqrt{2m(H-\Pi)}\,ds\right) = 0. \tag{2.21}$$

Сравнивая полученное выражение с (2.18), полагая $m = 1$, находим

$$\Pi = -\frac{n^2}{2} + H. \tag{2.22}$$

T17.

Рассмотрим движение точки по цилиндру радиуса r_0. Тогда L

$$L = T - \Pi = T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{q}_i\dot{q}^i = \frac{1}{2}mg_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j = r_0^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2.$$

Тогда вариация действия для системы (свободной материальной точки)

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}\delta x) = \dot{x}\delta x + \dot{x}\delta\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \delta S = m\int_A^B \left(r_0^2\dot{\varphi}\delta\varphi + \dot{z}\delta\dot{z}\right)\,dt = m(r_0^2\dot{\varphi}\delta\varphi + \dot{z}\delta z)\Big|_A^B + \int_A^B \left(-r_0^2\ddot{\varphi}\delta\varphi - \ddot{z}\delta z\right)\,dt = 0.$$

Вариация на A и B тождественно равна 0, в силу прозвольности δz и $\delta\varphi$ получаем, что

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = 0, \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varphi = C_1 t + C_2 \mod 2\pi, \\ z = C_3 t + C_4. \end{cases}$$

так как в силу выбора φ верно, что $\varphi + 2\pi k = \varphi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$. В таком случае

$$C_1 = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{t_B - t_A} + \frac{2\pi}{t_B - t_A} k, \qquad \forall k \in \mathbb{Z},$$

таким образом для свободной материальной точки существует счётное количество истинных путей для перемещения из A в B за фиксированное время $t_B - t_A$.

T18. (I)

Пусть в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2) закреплена цепь с линейной плотностью ρ и массой M. Для цепной линии сначала найдём центр масс y_0:

$$y_0 = \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} y \cdot \underbrace{\rho \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx}_{dm}.$$

Лагранжиан системы

$$L = T - \Pi = Mg \cdot y_0.$$

В силу независимости L от t верно, что

$$\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L\, dt \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \delta L = 0, \quad \Rightarrow \quad \delta \left(\int_{x_1}^{x_2} \underbrace{y \sqrt{1 + (y'_x)^2}}_{F(x)}\, dx \right) = 0, \tag{2.23}$$

что позволяет нам решать немного другую задачу.

Мы знаем, что на $\dot{q}, q$ равносильны следующие условия

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\dot{q}, q, t)}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}, q, t)\, dt \right) = 0,$$

при фиксированной длине нити l равной

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}_{\varphi(x)}\, dx, \tag{2.24}$$

где $y'_x = \dot{y}$ (здесь и далее). Тогда введём[1] L^*

$$L^*(y, x) = F(x) - \lambda \varphi(x), \tag{2.25}$$

для которого верно, что

$$\delta \left(\int_{x_1}^{x_2} L^*(y, \dot{y}, x)\, dx \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L^*}{\partial x} = 0. \tag{2.26}$$

Формально мы перещли к решению изопериметрической задачи. Для удобство переобозначим $L^* = L$. Посмотрим на $\partial L / \partial \dot{y} = L_{\dot{y}}$:

$$dL_{\dot{y}}(y, \dot{y}) = \frac{\partial L_{\dot{y}}}{\partial y}\, dy + \frac{\partial L_{\dot{y}}}{\partial \dot{y}}\, d\dot{y}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = L_{\dot{y}, y} \dot{y} + L_{\dot{y}, \dot{y}} \ddot{y} - L_y = 0.$$

Домножив на $(-\dot{y})$ получим, как видно, полный дифференциал ⌣̈

$$\frac{\partial L}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{d\dot{y}}{dx} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \ddot{y}\right.}_{\text{прибавил/вычел}} \left. + \dot{y} \left[\frac{\partial L_{\dot{y}}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial L_{\dot{y}}}{\partial \dot{y}} \ddot{y} \right] \right) = \frac{d}{dx} \left(L - \dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right),$$

откуда (2.26) может быть переписано, как

$$L - \dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = C_1,$$

то есть да, «энергия» сохраняется, x же явно не входит в L^*.

Конкретно в нашем случае,

$$(y + \lambda) \sqrt{1 + \dot{y}^2} - \dot{y}(y + \lambda) \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = C_1, \quad \Rightarrow \quad y + \lambda = C_1 \sqrt{1 + \dot{y}^2}.$$

[1] О причинах такого решения см. метод решения изопериметрической задачи.

Как известно шинус замечателен: $1+\operatorname{sh}^2\varkappa = \operatorname{ch}^2\varkappa$, так что пусть $\dot{y} = \operatorname{sh}\varkappa$. Тогда

$$y = C_1 \operatorname{ch}\varkappa - \lambda.$$

Подставив друг в друга последних два выражения, найдём

$$\dot{y} = \frac{dy}{d\varkappa}\cdot\frac{d\varkappa}{dx} = C_1\frac{d\varkappa}{dx}\operatorname{sh}\varkappa, \quad \Rightarrow \quad x = C_1\varkappa + C_2.$$

Таким образом мы получаем *уравнение цепной линиии*

$$\boxed{y = C_1 \operatorname{ch}\frac{x-C_2}{C_1} - \lambda.} \tag{2.27}$$

Константы могут быть найдены из граничных условий $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ и интеграла (2.24):

$$\operatorname{sh}\frac{x_2-C_2}{C_1} - \operatorname{sh}\frac{x_1-C_2}{C_1} = \frac{l}{C_1}.$$

T18. (II)

Найдём траекторию светового луча в среде с показателем преломления

$$n(z) = n_0 + n_z z.$$

Согласно принципу Ферма, введя $(ds)^2 = (dr)^2 + (dz)^2$, считая $dz/dr = \dot{z}$

$$\delta\left(\int_A^B (n_0 + n_z z)\, ds\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \delta\left(\int_A^B z\sqrt{1+\dot{z}^2}\, dr + \frac{n_0}{n_z} l\right) = 0,$$

где

$$l = \int_A^B \sqrt{1+\dot{z}^2}\, dr.$$

Вспомнив (2.25) и (2.24), поймём, что решаем изопериметрическую задачу, которую уже решили в предыдущем пункте, решением является траектория по цепной линии, с $\lambda = -n_0/n_z$:

$$z(r) = \frac{n_0}{n_z} + C_1 \operatorname{ch}\frac{r-C_2}{C_1}, \tag{2.28}$$

где C_1 и C_2 определяются из начальных условий[2].

T19.

Пока не готово.

2.12 Равновесие. Принцип виртуальных перемещений.

14.37

Переёдём в СО, вращающуюся с $\boldsymbol{\omega}$, соотвественно хочется ввести потенциальное поле для сил инерции и гравитационных.

$$dF_{\text{ц. б.}} = \omega^2 x\, dm, \quad \Rightarrow \quad d\Pi_{\text{и}} = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2\, dm.$$

Тогда потенциал

$$\Pi_{g,1} = -\frac{m}{l}\int_0^{l\sin\varphi}\frac{1}{2}\omega^2 x^2\, dx = -\frac{m_1 l^2}{6}\omega^2\sin^2\varphi.$$

$$\Pi_{g,2} = -\frac{m_2 l^2}{6}\omega^2\sin^2\varphi.$$

Полная энергия системы:

$$\Pi = -gl\cos\varphi\left(m_1 + \frac{3}{2}m_2\right) - \frac{1}{6}\omega^2 l^2\sin^2\varphi(m_1+m_2).$$

Найдём стационарные точки потенциала

$$\frac{\partial E}{\partial\varphi} = \frac{1}{2}gl\sin\varphi(m_1+3m_2) - \frac{1}{3}\omega^2 l^2\sin\varphi\cos\varphi(m_1+m_2) = 0.$$

[2]Предполагая, что мы хотим пустить луч от точки (z_1, r_1) к (z_2, r_2), мы сможем сделать это единственным образом, это и задаст C_1 и C_2.

Находим положения равновесия:

$$\sin\varphi^* = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi^* = 0,\ \pi.$$

При условии, что rhs следующего уравнения $\leqslant 1$, найдём также

$$\cos\varphi^* = \frac{2g(m_1+3m_2)}{2\omega^2(m_1+m_2)}, \qquad \omega^2 \geqslant \frac{3g(m_1+3m_2)}{2l(m_1+m_2)}.$$

14.20

Перейдём в СО точки подвеса. В таком случае можно ввести потенциальное поле, гравитационного поля

$$\boldsymbol{g}' = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{w}.$$

Положение равновесия соответсвует минимуму потенциала, соответственно наименьший $h_{\text{ц. м.}}$ относительно $\boldsymbol{g}'$. В таком случае при $\boldsymbol{w} \parallel \boldsymbol{g}$ ниточка останется висеть вертикально. При $\boldsymbol{g} \nparallel \boldsymbol{w}$, вводя начало координат в точку подвеса

$$y = x\frac{g - w\sin\alpha}{w\cos\alpha}, \qquad a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k. \tag{2.29}$$

14.34

Система движется в потениальном поле с удерживающией связью:

$$\Pi = \sum_{k=1}^n \alpha_k q_k, \qquad \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 > 0, \qquad \sum_{k=1}^n q_k^2 - 1 \leqslant 0.$$

Можно было решить задачу на условный экстремум, введя функцию F:

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k q_k - \lambda\left(\sum_{k=1}^n q_k^2 - 1\right).$$

А моожно посмотреть на n-мерную сферу, которой ограничено положение системы на координатном пространстве. Действующая сила тогда

$$\frac{\partial\Pi}{\partial q^i} = F_i = \alpha_i, \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{F} = (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)^{\mathrm{T}}.$$

Уравнение для сферы

$$\sum q_i^2 = 1.$$

Нас интересует момент, когда радиус вектор сонаправлен с $\boldsymbol{F}$, пусть $\boldsymbol{r} = k\boldsymbol{F}$.

$$(k\alpha_1)^2 + \ldots + (k\alpha_n)^2 = 1, \qquad \Rightarrow \qquad k = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^2\right)^{-1/2}.$$

Соответсвенно искомое положение равновесия

$$\boldsymbol{r} = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^2\right)^{-1/2} (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)^{\mathrm{T}}. \tag{2.30}$$

14.41

Материальная точка может двигаться по линии пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} \mathrm{I}: & -2x_1 + x_2 + x_3 = t \\ \mathrm{II}: & x1 - 2x_2 + x_3 = -t^2. \end{cases}$$

Найдём систему бесконечно малых возможных перемещений. Знаем, что направляющая прямой,

$$\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}} \times \boldsymbol{n}_{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Хотелось бы найти уравнения прямой, в виде

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}k.$$

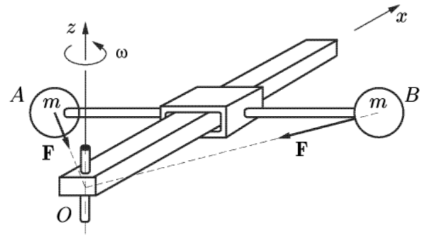

Рис. 9: К задаче 15.5

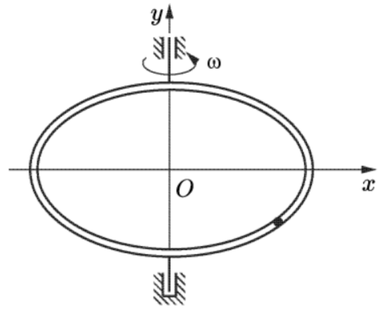

Рис. 10: К задаче 15.9

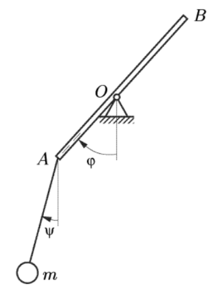

Рис. 11: К задаче 15.13

Подставляя $\boldsymbol{a}$ в уравнения плоскости, найдём, что

$$x_0 = \frac{1}{3}t(t-2), \qquad y_0 = \frac{1}{3}t(2t-1), \qquad z_0 = 0.$$

Тогда

$$\boldsymbol{r} = \frac{t}{3}\begin{pmatrix} t-2 \\ 2t-1 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2t-2 \\ 4t-1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В таком случае возможные перемещения:

$$\delta\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\delta k, \qquad d\boldsymbol{r} = \delta\boldsymbol{r} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\,dt = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\delta k + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2t-2 \\ 4t-1 \\ 0 \end{pmatrix} dt.$$

2.13 Устойчивость равновесия консервативных систем.

15.5

Перейдём в СО, вращающуюся вместе с телом. В таком случае в уравнениях «возникнут» силы инерции. Ввиду того что $\boldsymbol{\omega}\perp\boldsymbol{r}$ запишем

$$\boldsymbol{F}_{\text{и}} = m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l}) + m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}) = 2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} = 2m\omega^2 r.$$

Тогда добавка к потенциалу системы будет

$$\Pi_{\text{и}} = -\omega^2 r^2 m.$$

Силы между гантелями и стержнем аналогичны потенциалу

$$\Pi_{\text{g}} = -\frac{\alpha m}{\rho}\times 2, \qquad \rho = \sqrt{r^2+l^2},$$

где r – расстояние от центра до стержня.

Запишем теперь потенциал системы

$$\Pi = -\frac{2\alpha m}{\rho} - \omega^2 r^2 m.$$

Найдём стационарные точки потенциала

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} = \frac{2\alpha m r}{(r^2+l^2)^{3/2}} - 2\omega^2 r m = 2mr\left(\frac{\alpha}{(r^2+l^2)^{3/2}} - \omega^2\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} r_1^* = \sqrt{(\alpha/\omega^2)^{2/3} - l^2}, & \omega^2 l^3 < \alpha. \\ r_2^* = 0. \end{cases}$$

И определим локальные экстремумы потенциала

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}(r) = 2m\left(\frac{\alpha}{(r^2+l^2)^{3/2}} - \frac{\alpha r^2}{(r^2+l^2)^{5/2}} - \omega^2\right)..$$

При $r = r_2^*$ верно, что

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}(0) = \frac{2\alpha}{l^3} - 2\omega^2, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} r^* = 0 \text{ – устойчиво при} & \omega^2 l^3 < \alpha, \\ r^* = 0 \text{ – неустойчиво при} & \omega^2 l^3 > \alpha. \end{cases}$$

Чуть сложнее для $r = r_1^*$, заметим, что случай реализуется только при $\omega^2 l^3 < \alpha$:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}(r_1^*) = \underbrace{(\ \dots\ )}_{>0}\left(\alpha^{-2/3}\omega^{4/3}l^2 - 1\right), \qquad a^{-2/3} < \omega^{-4/3}l^{-2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}(r_1^*) < 0.$$

Таким образом $r = r_1^*$ – неустойчивое положение равновесия.

15.9

Параметризуем систему некоторым φ таким, что

$$\begin{cases} x = a\sin\varphi \\ y = b\cos\varphi \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Аналогично предыдущим задачам считаем, что движение происходит в поле потенциальных сил (инерции и гравитации):

$$\Pi_{\text{g}} = mgy = mgb\cos\varphi, \qquad \Pi_{\text{и}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2 a^2 \sin^2\varphi.$$

Далее полагая $m = 1$, найдём стационарные точки потенциала

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \sin\varphi \frac{1}{\omega^2 a^2}\left(\cos\varphi + \frac{bg}{\omega^2 a^2}\right) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \sin\varphi^* = 0 \\ \cos\varphi^* = -\dfrac{bg}{\omega^2 a^2}, \quad bg < \omega^2 a^2 \end{cases}$$

и определим локальные экстремумы потенциала

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \omega^2 a^2\left(1 - 2\cos^2\varphi\right) - bg\cos\varphi.$$

Для $\sin\varphi^* = 0$ и, соответсвенно, $\cos\varphi = \pm 1$, найдём, что

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}(\varphi^*) = -\omega^2 a^2 \mp bg, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} (0, b) & \text{– неустойчиво при} \quad \omega^2 a^2 < bg, \\ (0, -b) & \text{– устойчиво при} \quad \omega^2 a^2 < bg, \\ (0, \pm b) & \text{– неустойчиво при} \quad \omega^2 a^2 > bg. \end{cases}$$

Для $\cos\varphi^* = -bg/\omega^2 a^2$, и соответсвующего $\sin\varphi^*$ найдём, что при $\omega^2 a^2 > gb$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}(\varphi^*) = \left(1 + \frac{bg}{\omega^2 a^2}\right)\left(\omega^2 a^2 - bg\right), \qquad \Rightarrow \qquad \left(\pm a\sqrt{1 - \frac{g^2 b^2}{\omega^4 a^4}}, -b\frac{gb}{\omega^2 a^2}\right) \ \text{– устойчивые.}$$

15.13

Запишем потенциал поля гравитационных сил:

$$\Pi = \frac{1}{2}\frac{l_2}{l_1 + l_2}Mgl_2 - \frac{1}{2}\frac{l_1}{l_1 + l_2}Mgl_1 - (l_1\cos\varphi + l\cos\psi)\,mg.$$

Заметим, что в Π независимо входит $\cos\psi$, в силу $\Pi \to \min$ имеет, что $\cos\psi = 1$, $\psi = 0$. Так как связь односторонняя, то невозможно значение $\psi = \pi$. Далее будем решать одномерую задачу.

Найдём стационарные точки потенциала

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}\frac{Mg}{l_1 + l_2}(\sin\varphi)\left(-l_2^2 + l_1^2 + 2l_1(l_1 + l_2)\frac{m}{M}\right), \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \sin\varphi^* = 0 \\ 2ml_1 = M(l_2 - l_1) \quad \forall\varphi \ \ \text{система равновесна.} \end{cases}$$

И опредлеим локальные экстремумы

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \underbrace{(\ \dots\ )}_{>0}(\cos\varphi)\left(M(l_1 - l_2) + 2l_1 m\right), \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \varphi = 0 \text{ – устойчиво при} \quad 2ml_1 > M(l_2 - l_1) \\ \varphi = \pi \text{ – устойчиво при} \quad 2ml_1 < M(l_2 - l_1) \end{cases}$$

и соотвествующие положения равновесия неустойчивы при обратных знаках в неравенствах.

15.23

Начнём с того, что условие не корректно. Действительно, давайте посмотрим на близкие к 0 положения равновесия системы с потенциалом $\Pi(x) = -x\sin x$. В точке $x = 0$ существует неустойчивое положение равновесия, однако посмотрим на развитие системы из точки $\{-\pi - \delta, 0\}$, увидим, что на фазовой плоскости

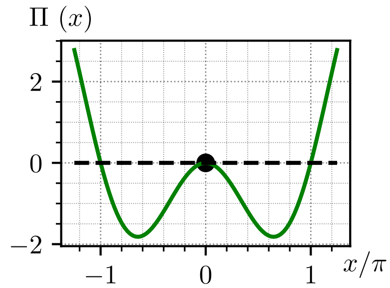

Рис. 12: График $\Pi(x) = -x\sin x$

существует замкнутая орбита (сплюснутая в середине), содержащая $x = 0$. Поэтому докажем, что при наличие устойчивого равновесия, существует замкнутая кривая на фазовой плоскости.

Также хотелось бы что-то сказать при наличие замкнутой траектории о положении равновесия. Можно показать, что при отсутствие других положений равновесия в этой области положение равновесия будет устойчивым. Аналогично можно считать, что положение равновесия устойчиво только если для любой U_ε окрестности существует замкнутая траектория вложенная в U_ε и содержащая точку.

Так как сила $F = F(x)$ и $F(x)$ гладкая, то всегда можно ввести потенциал такой, что

$$-\frac{\partial\Pi(x)}{\partial x} = F(x) = \ddot{x}.$$

Также можно считать, что энергия системы сохраняется, то есть

$$E = \Pi(x) + \frac{1}{2}\dot{x}^2 = \text{const}.$$

Пусть есть устойчивое положение равновесия x^*, тогда мы знаем, что

$$-\frac{\partial\Pi}{\partial x}(x^*) = 0, \qquad \frac{\partial^2\Pi}{\partial x^2}(x^*) > 0.$$

Тогда возьмём в в качетсве крайних точек нашей траектории $x_1 = x^* - \delta_1$ и в качетсве $x_2 = x^* + \delta_2$, где δ_i – достаточно малая величина, чтобы $x' \notin U_\delta(x^*)$, x' – другое положение равновесия/точка перегиба потенциала. Выберем δ_1, δ_2 так, чтобы

$$\Pi(x^* - \delta_1) = \Pi(x^* + \delta_2).$$

Тогда поместив с 0 скоростью точку x_1 получим замкнутую орбиту $[x_1,\ x_2]$.

В другую сторону, пусть есть некоторая замкнутая орбита на $[x_1,\ x_2]$. Тогда верно, что

$$T(x_1) = T(x_2) = 0, \qquad -\frac{\partial\Pi}{\partial x}(x_1) > 0, \qquad -\frac{\partial\Pi}{\partial x}(x_2) < 0.$$

Тогда по непрерывности $\Pi(x)$ существует x^* такой, что $\partial\Pi(x^*)/\partial x = 0$, при чём, так как это единственная точка перегиба потенциала в $[x_1,\ x_2]$, то $\partial^2\Pi/\partial x(x^*) > 0$, Q. E. D.