# Дифференцируемые отображения и криволинейные замены координат

## 4 Дифференцируемые отображения и дифференицрование композиции

**Def 4.1.** Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. Отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ называется *дифференцируемым* в точке $x_0 \in U$, если

$$f(x) = f(x_0) + Df_{x_0}(x - x_0) + o(|x - x_0|), \qquad x \to x_0,$$

где $Df_{x_0}\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ – линейное отображение, называемое *производной* $f$ в точке $x_0$.

**Def 4.2.** Функция $f$ называется *непрерывно дифференцируемой* на $U$, если оно дифференцируемо в каждой точке и $Df_x$ непрерывно зависит от $x$.

**Thr 4.3** (Дифференицрование композиции)**.** *Если $f$ дифференцируемо в точке $x_0$, $g$ дифференцируемо в точке $y_0 = f(x_0)$, то композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке $x_0$, и $D(g \circ f)_{x_0} = Dg_{y_0} \circ Df_{x_0}$.*

**Def 4.4.** Производная функции $f$ по направлению $v \in Rn$ в точке $x$ называется

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \to 0}\left(\frac{f(x + tv) - f(x)}{t}\right)$$

**Lem 4.5.** *Если функция дифференцируема в точке $x$, то в этой точке*

$$\frac{\partial f}{\partial v} = Df_x(v).$$

*В частности для функционалов, верно что $\partial f/\partial v = df_x(v)$. Более того, выбрав в качестве $v$ базисные векторы $e_i$, поймём что*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} x^i,$$

*где $dx^i$ – дифференциалы координатных функций, образующие двойственный базис.*

**Thr 4.6.** *Если отображение $f\colon U \mapsto \mathbb{R}^m$ из открытого $U \subseteq \mathbb{R}^n$ задано в координатах, как $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$, для $i = 1, \ldots, m$ и функции $f_i$ имеют непрерывные частные производные на $U$, то $f$ непрерывно дифференцируемо на $U$.*

## 5 Системы криволинейных координат и теорема об обратном отображении

**Def 5.1.** *Криволинейная замена координат* — бесконечно гладкое отображение $\varphi\colon U \to V$ такое, что $\varphi^{-1}$ определено и тоже бесконечно гладко.

**Lem 5.2.** *Пусть открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$ выпукло. Для непрерывно дифференцируемого отображения $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ найдётся непрерывное отображение $A\colon U \times U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, такое что $\forall x',\ x'' \in U$*

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = A(x', x'')(x'' - x')$$

*и $A(x, x) = D\varphi_x$.*

**Thr 5.3** (Теорема об обратном отображении)**.** ***Если*** *отображение $\varphi\colon U \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо в окрестности точки $x$* ***и*** *его дифференциал $D\varphi_x$ являетсяя невырожденным линейным преобразованием,* ***то*** *это отображение взаимно однозначно отображает некоторую окрестность $V \ni x$ на окрестность $W \ni y$, где $y = \varphi(x)$. Обратное отображение $\varphi^{-1}\colon W \to V$ тоже непрерывно дифференцируемо.*

**Def 5.4.** *Криволинейной системой координат* в окрестности точки $p \in \mathbb{R}^n$ называется набор таких функций, которые явяются координатами гладкого отображения окрестности $p$ на некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ с гладким обратным[1] отображением.

## 6 Теоремы о системе неявных функций

**Thr 6.1** (Теорема о неявной функции)**.** *Пусть функции $f_1, \ldots, f_k$ непрерывно дифференцируемы в окрестности $p \in \mathbb{R}^n$ и*

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \neq 0$$

[1] По теореме об обратном отображении для проверки системы преобразования достаточно проверить невырожденность $(\partial y_i/\partial x_j)$ в точке $p$, или линейную независимость $dy^i$ в точке $p$.

*в этой окрестности. Пусть* $f_i(p) = y_i$. *Тогда найдётся окрестности точки* $p$ *вида* $U \times V$, $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^{n-k}$, *такая что в этой окрестности множество решений системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x) = y_1, \\ \qquad \dots \\ f_k(x) = y_k, \end{cases}$$

*совпадает с графиком непрерывно дифференцируемого отображения* $\varphi \colon V \to U$, *заданного в координатах как*

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, \dots, y_k,\ x_{k+1}, \dots, x_n), \\ \quad \dots \\ x_k = \varphi_1(y_1, \dots, y_k,\ x_{k+1}, \dots, x_n). \end{cases}$$

## 7 Теорема о расщеплении гладкого отображения

**Thr 7.1** (Теорема о расщеплении отображения на элементарные)**.** *Если отображение* $\varphi$ *непрерывно дифференцируемо в окрестности точки* $p \in \mathbb{R}^n$ *и имеет обратимый* $D\varphi_x$, *то его можно представить в виде композиции перестановки координат, отображений координат и элементарных отображений, непрерывно дифференцируемо и возрастающим образом меняющих только одну координату* $y_i = \psi_i(x_1, \dots, x_n)$.

**Thr 7.2.** *Теоремы об обратном отображении, о неявной функции и о расщеплении отображения дают отображения класса* $C^k$ *при* $k \geqslant 1$, *если исходные отображени были класса* $C^k$.

# Векторы и дифференциальны формы первой степени

## 13 Вектор, как дифференцирование

**Lem 13.1.** *Всякую гладкую функцию, определенную в некоторой окрестности* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *в возмоно меньшей окрестности* $x_0$, *можно представить в виде*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{0,k}) g_k(x),$$

*с гладкими* $g_k$.