1 Геометрия масс твёрдого тела

1.1 Тензор инерции

Движение тела может быть разбито на поступательное плюс вращательное. Есть три классические величины: $\boldsymbol{Q} = m\boldsymbol{v}_C$, $T = \frac{mv^2}{2} + T^{\cdots}_{\cdots}$, $\boldsymbol{K}$. Мгновенная ось вращения проходит через точку O.

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i \equiv \widetilde{r}_i \boldsymbol{\omega}, \qquad \widetilde{r}_i = \begin{pmatrix} 0 & z_i & -y_i \\ -z_i & 0 & x_i \\ y_i & -x_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Известно, что

$$v_i^2 = \left(\widetilde{r}_i \boldsymbol{\omega}\right)^{\mathrm{T}} \left(\widetilde{r}_i \boldsymbol{\omega}\right) = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \widetilde{r}_i^{\,\mathrm{T}} \widetilde{r}_i \boldsymbol{\omega}.$$

Так приходим к

Def 1.1. Тензором величину назовём величину

$$\hat{J}_0 = \sum m_i \widetilde{r}_i^{\,\mathrm{T}} \widetilde{r}_i. \tag{1.1}$$

Тогда кинетическую энергию запишем, как

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \hat{J}_0 \boldsymbol{\omega}. \tag{1.2}$$

Но опыт кричит о том, что там момент инерции, действительно

$$J_e = \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}} \hat{J}_0 \boldsymbol{e}. \tag{1.3}$$

Найдём его элементы:

$$\widetilde{r}_i^{\,\mathrm{T}} \widetilde{r}_i = \begin{pmatrix} y_1^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + y_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} = \hat{j}_i, \tag{1.4}$$

суммируя, получим

$$\hat{J}_0 = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

где J_x – *осевые моменты инерции*, а J_{xy} – центробежные момент инерции.

Но, в силу симметричности тензора, существуют такие оси, что

$$\hat{J}_0 = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

1.2 Кинетический момент

Кинетический момент найдём из

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \boldsymbol{v}_i \left[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i\right] = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2} \sum m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{K}_O, \tag{1.7}$$

тогда

$$\boxed{\boldsymbol{K}_O = \hat{J}_O \boldsymbol{\omega}}. \tag{1.8}$$

На самом деле

$$\hat{J}_0 \colon \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3 \to \boldsymbol{K}_O \in \mathbb{R}^{\nVdash},$$
$$\boldsymbol{\omega}, \Omega \colon \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3 \to \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Вообще, получается $\boldsymbol{K}_O \nparallel \boldsymbol{\omega}$.

Введём оси $\xi\eta\zeta$, тогда в них

$$\hat{J}_0 = \mathrm{diag}(A, B, C), \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right), \qquad \boldsymbol{K}_O = \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

1.3 Компоненты тензора инерции в других СО

1.3.1 Поворот

Во-первых, посмотрим на поворот

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_1^{\mathrm{T}}\hat{J}_{O1}\boldsymbol{\omega}_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\hat{J}_{O2}\boldsymbol{\omega}_2, \qquad \boldsymbol{\omega}_1 = R\boldsymbol{\omega}_2,$$

Тогда

$$\boxed{\hat{J}_{O1} = R^{-1}\hat{J}_{O2}R}. \tag{1.10}$$

1.3.2 Параллельный перенос (Т. Гюйгенса-Штейнера)

Запишем

$$\hat{J}_O = \hat{J}_C + m\,\hat{j}_{CO}, \tag{1.11}$$

если $\vec{CO} = (\xi\eta\zeta)$, то

$$\hat{j}_{CO} = \begin{pmatrix} \eta^2+\zeta^2 & -\xi\eta & -\xi\zeta \\ -\xi\eta & \xi^2+\zeta^2 & -\eta\zeta \\ -\xi\zeta & -\eta\zeta & \xi^2+\eta^2 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

1.4 Цилиндр

Перейдём к переменным r, φ, z, тогда, например

$$J_z = \int \left(x^2+y^2\right)\rho\,dV = \frac{M}{\pi R^2 H}\iiint r^2 r\,dr\,d\varphi\,dz. \tag{1.13}$$

Считая, получим

$$\hat{J}_C = \operatorname{diag}\left(\frac{MR^2}{4}+\frac{MH^2}{12},\ \frac{MR^2}{4}+\frac{MH^2}{12},\ \frac{MR^2}{2}\right). \tag{1.14}$$

В частности, при $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} R & 0 & -H/2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, получим

$$\hat{J}_A = \hat{J}_C + m\hat{j}_{CA} = \begin{pmatrix} A & 0 & \frac{1}{2}MRH \\ 0 & B & 0 \\ \frac{1}{2}MRH & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Теперь приведем к главным осям, поворотом относительно оси z:

$$\hat{J}'_A = \operatorname{diag}\left(A', B', C'\right) = R^{\mathrm{T}}\hat{J}_A R, \qquad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Решая, получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 4\sqrt{3}.$$

Подставляя, найдём

$$\hat{J}'_A = \frac{mR^2}{4}\operatorname{diag}\left(2, 9, 9\right).$$

Ну или просто к главным осям привести можно, через собственные числа.

1.5 Диск

Есть некоторая квадратная рама (полное условие см. дополнение). Для простоты положим $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Найдём $T, \boldsymbol{N}_A, \boldsymbol{N}_B$.

Во-первых,

$$T = \frac{1}{2}mV_O^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}\hat{J}_O\boldsymbol{\Omega},$$

где $v_O = \omega a/2$. Выберем такие оси, что

$$\hat{J}_O = \frac{1}{4}mR^2\operatorname{diag}\left(1, 1, 2\right).$$

Посчитаем теперь $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} O & \omega\sqrt{2}/2 & \omega\sqrt{2}/2+\omega \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Из теоремы об изменение импульса

$$m\mathbf{w}_O = \boldsymbol{N}_A + \boldsymbol{N}_B, \qquad m\frac{\omega^2\ a^2/4}{a/2} = N_A + N_B.$$

А ещё знаем, что

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{K}_A = \boldsymbol{\omega}_1 \times \left[\left(\hat{J}_O + m\hat{j}_{OA}\right)\boldsymbol{\Omega}\right] = \overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{N}_B.$$
$$\frac{d}{dt}\mathbf{K}_A = \boldsymbol{\omega}_1 \times \left[\left(\hat{J}_O + m\hat{j}_{OA}\right)\boldsymbol{\Omega}\right] = \overrightarrow{AB} \times \mathbf{N}_B.$$

2 Семинар

$$t^2 + 7 = 11$$

Хотелось бы заметить, что α

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix} \quad \overset{so}{\Longrightarrow} \quad f \xrightarrow{\varphi} \circ$$