Задание по курсу «Аналитическая Механика I»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *10 декабря 2020 г.*

1 Контрольная работа II

Задача №1

Рассмторим движение твёржого тела с неподвижной точкой O, в частности рассмотрим случай Лагранжа. Хотелось бы найти первые инегралы и какое-нибудь хорошее дифференциальное уравнение для системы, при условии что $(\boldsymbol{K}_O)_z = 0$ и $\omega_\xi = 0$.

Запишем кинематические и динамические уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} p = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi, \\ q = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi, \\ r = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi. \end{cases}, \qquad \begin{cases} I_1\dot p + (I_3 - I_2)qr = M_\xi \\ I_2\dot q + (I_1 - I_3)pr = M_\eta \\ I_3\dot r + (I_2 - I_1)pq = M_\zeta \end{cases}, \qquad \hat{J}_O = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$

При чём в случае Лагранжа сразу находим первый интеграл системы:

$$\boldsymbol{M}_O = \overrightarrow{OP} \times (m\boldsymbol{g}), \quad \Rightarrow \quad c\dot r = M_\xi = 0, \quad \Rightarrow \quad \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi = r = \text{const}. \tag{1.1}$$

По условию $(\boldsymbol{K}_O)_z = 0$ и $\omega_\xi = 0$. В таком случае энергия системы

$$T + \Pi = \frac{1}{2}A(p^2 + q^2) + mgl\cos\theta = \text{const} = \frac{h}{2}.$$

Подставляя значения из кинематических уравнений, получаем

$$A\left(\dot\psi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2\right) + 2mgl\cos\theta = h = \text{const}. \tag{1.2}$$

Так как $(\boldsymbol{K}_0)_z = \text{const} = 0$, то

$$Cr\cos\theta + A\dot\psi\sin^2\theta = (\boldsymbol{K}_0)_z = 0, \quad \Rightarrow \quad A\dot\psi\sin^2\theta = 0.$$

Из последних двух выражений находим, что

$$A\dot\theta^2 + 2mgl\cos\theta = h, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot\theta = \frac{mgl}{A}\sin\theta}, \tag{1.3}$$

что и является искомым дифференциальным уравнением второго порядка, относительно угла нутации.

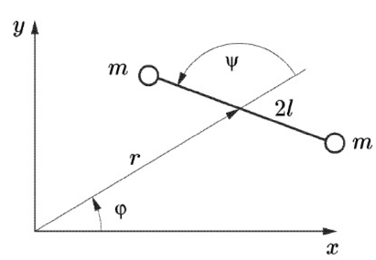

Рис. 1: К задаче №2

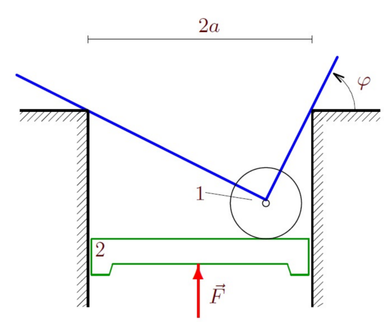

Рис. 2: К задаче №3

Задача №2

Для системы, представленной на рис. 1 найдём лагранжиан. Потенциальная энергия системы (считая, что в $(0,0)$ находится тело массы $M \gg m$),

$$\Pi = -\frac{2GMm}{r} \overset{\text{def}\,\varkappa}{=} -\varkappa\frac{m}{r}.$$

Положение массивных тел, из геометрии системы, можем записать, как

$$r_{1,\,2} = r\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} \pm l\begin{pmatrix}-\cos(\varphi+\psi)\\ \sin(\varphi+\psi)\end{pmatrix}.$$

Кинетиечская энергия системы теперь может быть записана как

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2\right),$$

где

$$\begin{cases}\dot{r}_1 = \dot{r}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}\dot{\varphi} + l\begin{pmatrix}\sin(\varphi+\psi)\\ \cos(\varphi+\psi)\end{pmatrix}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}),\\ \dot{r}_2 = \dot{r}\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}\dot{\varphi} - l\begin{pmatrix}\sin(\varphi+\psi)\\ \cos(\varphi+\psi)\end{pmatrix}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}),\end{cases} \tag{1.4}$$

что позволяет, наконец, записать лагранжиан системы

$$L = T - \Pi, \qquad \Rightarrow \qquad L/m = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + l^2\left(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\right)^2 + \frac{\varkappa}{r}. \tag{1.5}$$

Так как на систему действуют только радиальные силы, то

$$\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt} = \boldsymbol{M}_O = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{r}_1\times\dot{\boldsymbol{r}}_1 + \boldsymbol{r}_2\times\dot{\boldsymbol{r}}_2 = \text{const}. \tag{1.6}$$

Также сохраняется энергия системы,

$$T + \Pi = \text{const}, \qquad \Rightarrow \qquad \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + l^2\left(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\right)^2 + \frac{\varkappa}{r} = \text{const}. \tag{1.7}$$

Задача №3

Аналогично предыдущей задачи, найдём уравнения движения системы (рис. 3) в форме Лагранжа. Выберем в качестве начала координат правый верхний угол системы,выбрав оси, как показано на рисунке. По всей видимости будем считать в угла стержни «прикрепленными» к опорам так, чтобы не было отрыва – иначе задача не имеет смысла.

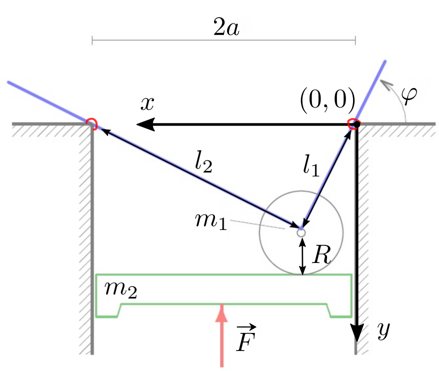

Рис. 3: К задаче №3

Так как на платформу действует постоянная сила $\vec{F}$, потенциальная энергия системы

$$\tilde{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{g} + \frac{\vec{F}}{m_1+m_2} = \boldsymbol{g} + 3\boldsymbol{g} = 4\boldsymbol{g}, \qquad \Pi = -(m_1+m_2)\tilde{\boldsymbol{g}}y_1.$$

Координаты диска и платформы, соотвественно

$$\boldsymbol{r}_{\text{д}} = \boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}l_2\cos\varphi\\ l_2\sin\varphi.\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}_{\text{п}} = \boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix}0\\ l_2\sin\varphi + R\end{pmatrix}.$$

Из геометрии системы, можем понять, что

$$l_2/2a = \cos\varphi, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases}x_1 = 2a\cos^2\varphi\\ y_1 = a\sin(2\varphi).\end{cases}$$

Дифференцируя по времени, найдём скорость диска:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_1 = 2a\dot{\varphi}\begin{pmatrix}-\sin 2\varphi\\ \cos 2\varphi\end{pmatrix}, \quad \omega R = \dot{x}_1 \qquad \Rightarrow \qquad \omega^2 = \frac{1}{R^2}4a^2\dot{\varphi}^2\sin^2 2\varphi.$$

Кинетическая энергия диска, как сумма поступательной и вращательной

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 R^2}{2}\right)\frac{1}{R^2}4a^2\dot{\varphi}^2\sin^2 2\varphi + 2a^2\dot{\varphi}^2 m_1.$$

Для платформу кинетическая энергия, соотвественно

$$T_2 = \frac{m_2}{2}\dot{y}_1^2.$$

К огромному счастью трудящихся полная кинетическая энергия системы оказывается равна

$$T = T_1 + T_2 = 6m_2 a^2\dot{\varphi}^2.$$

Лагранжиан системы

$$L = T - \Pi = 6m_2 a\left(a\dot{\varphi}^2 + 2g\sin 2\varphi\right). \tag{1.8}$$

Запишем уравнение Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0, \quad\Rightarrow\quad \ddot{\varphi} = \frac{2g}{a}\cos(2\varphi). \tag{1.9}$$

Решение этого дифференциального уравнения в терминах аналитических функций не представляется возможным, однако можем посмотреть на происходящее вблизи положения равновесия:

$$\ddot{\varphi} = 0, \quad\Leftrightarrow\quad \varphi = \pi/4.$$

В таком случа рассмотрим α: $2\varphi = \pi/2 + \alpha$,

$$\boxed{\ddot{\alpha} = -\omega^2\sin\alpha,} \quad \omega^2 = \frac{4g}{a}. \tag{1.10}$$

И, при малых α, получили гармонический осциллятор:

$$\alpha = C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t.$$

Из начальных условий (при $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$), находим, что

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{4} + \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right)\cos\omega t, \quad \dot{\varphi} = \left(\frac{\pi}{4} - \varphi_0\right)\omega\sin\omega t.$$

Если нас интересует угловая скорость $\dot{\varphi}$ в момент, когла $\varphi = \varphi_1$, то

$$\dot{\varphi}(t_1) = \pm 2\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot\sqrt{\left(\varphi_1 + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)(\varphi_1 - \varphi_0)}, \quad 0 < \varphi_0 - \pi/4 < \varphi_1 - \pi/4 \ll 1. \tag{1.11}$$