Заметки курса «Электричество и магнетизм»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *2 октября 2020 г.*

Содержание

1 Закон Кулона и теорема Гаусса

Здесь попробуем индуктивно построить содержательную теорию, **начнём с двух эксперементальных фактов**, положенных в основу теории. Закона Кулона (сгсэ)

$$\boldsymbol{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{1.1}$$

и, введя вектор напряженности электростатического поля $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/q$, принцип суперпозиции:

$$\boldsymbol{E} = \sum \boldsymbol{E}_i. \tag{1.2}$$

Дипольный момент

Простейшим примером системы зарядов является диполь $q_1 + q_2 = 0$, для которого введём $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$:

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{r_1^2}\frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1} - \frac{q}{r_1^2}\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2} \quad \overset{l \ll r_2, r_1}{\Longrightarrow} \quad \boldsymbol{E} = \frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}}{r^3} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}$$

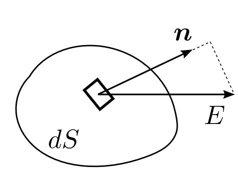
Для заряженной нити верно, что

$$E = 2\frac{\varkappa}{r}.$$

Теперь дойдём до двух теорем (кусочки уравнений Максвелла), описывающих электростатическое поле.

Thr 1.1 (теорема Гаусса)**.** *Для потока $\boldsymbol{E}$ через замкнутую поверхность S верно, что*

$$\oint_S E_n \, dS = \boxed{\oint_S (\boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S}) = 4\pi q_{\text{вн}}.} \tag{1.3}$$



△.

I. Доказательство (из закона Кулона) для сферы вокруг точечного заряда очевидно.

II. Рассмотрим произвольную поверхность Ω, содержащую заряд, и телесный угол в онной:

$$E_n\,dS = E\cos\alpha\,dS = E\,dS'$$

То есть поток через наклонную площадку равен потоку через тот же телесный угол через некоторую вспомогательную сферу. Так как $s_1/s_2 = r_1^2/r_2^2$ и $E_1/E_2 = r_2^2/r_1^2$, получается интегрировать по Ω то же самое, что и интегрировать по выбранной хорошей сфере.

III. Рассмотрим теперь некоторую Ω, не содержащую заряд. Посмотрим на телесный угол от q. По модулю потоки через них одинаковые, а знаки противоположны, следовательно вклада в поток через Ω нет.

IV. Для сложного распределения зарядов, по принципу суперпозиции верно, что

$$\boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i \quad \Rightarrow \quad \oint_S E_n\,dS = \sum_i \oint_S \boldsymbol{E}_i\,dS.$$

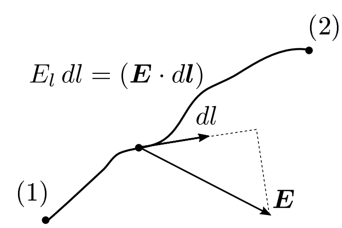
□

2 Потенциал электрического поля.

Thr 2.1 (Теорема о циркуляции)**.** *Для заряда, при квазистатическом перемещении, верно, что*

$$A_{\text{замкн}} = \boxed{\oint_{(L)} (\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}) = 0} \tag{2.1}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0 \tag{2.2}$$



△.

I. Рассмотрим поле точечного заряда Q и перемещение с $\boldsymbol{r}$ до $\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{l}_r + (d\boldsymbol{l} - d\boldsymbol{l}_r)$. Тогда $dA = (\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}) = \frac{Q}{r^2}dl_r$, то есть $A \equiv A(r_1, r_2)$.

II. Для поля в принципе вышесказанное верно по принципу суперпозиции.

□

Def 2.2. *Разностью потенциалов* $\varphi_1 - \varphi_2$ между точками $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ называется $A = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{E}d\boldsymbol{l}$, при перемещении единичного положительного заряда. Потенциал определен с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

В частности, для точечного заряда, при $\varphi_\infty = 0$, верно

$$\varphi(r) = \int_r^\infty \frac{Q(r)}{r^2}\,dr = \frac{Q}{r}.$$

А для двух зарядов, $+q, -q$

$$\varphi = -\frac{q}{r_1} + \frac{q}{r_2} = q\frac{(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} \quad \overset{r\gg l}{\Rightarrow} \quad \varphi = \frac{1}{r^2}\frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{r}$$

2.1 Дифференциальная форма записи

Вектор напряженности электростатического поля

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi.} \tag{2.3}$$

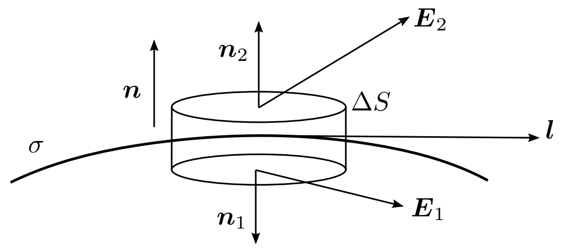
Действительно,

$$d\varphi = -(\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}) = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}dx_i = d\boldsymbol{l}\cdot\nabla\varphi, \text{ где } \nabla\varphi \equiv \operatorname{grad}\varphi.$$

А теперь рассмотрим некоторый элементарный параллелепипед. Тогда поток через левую грань это $-E_x\,dy\,dz$, а через правую это $\left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz$. Тогда суммарный поток через мааленький параллелепипед равен $dV\,\partial E/\partial x$, а теорема Гаусса примет вид

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z}\right)dV = 4\pi\rho\,dV \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho}. \tag{2.4}$$

2.2 Граничные условия на заряженной поверхности



По теореме Гаусса верно, что

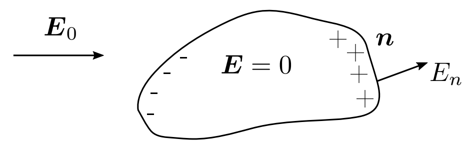
$$E_{2n_2}\cancel{\Delta S} + E_{1n_1}\cancel{\Delta S} = 4\pi\sigma\cancel{\Delta S},$$
$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$$

По теореме циркуляции верно, что

$$E_{2l}\cancel{\Delta} l - E_{1l}\cancel{\Delta} l = 0$$
$$E_{2l} - E_{1l} = 0.$$

3 Проводники

Def 3.1 (пусть так)**.** *Проводник* – костяк частиц, окруженных *свободными* электронами, которые в пределах тела могут перемещаться на какие угодно расстояния.



В частности, для проводников, верно, что

$$E_n = 4\pi\sigma \tag{3.1}$$
$$E_\tau = 0 \tag{3.2}$$

Собственно, объёмных зарядов в проводнике нет, поверхностные есть и компенсируют внешнее поле. Аналогично работает решетка Фарадея, электростатическое поле не проникает в проводники.

3.1 Основная задача электростатики

Вместо поиска $\boldsymbol{E}$ достаточно найти φ, воспользовавшись (2.3) и (2.4), получим

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi \equiv \delta\varphi = \begin{cases} -4\pi\rho & \text{ур. Пуассона} \\ 0 & \text{ур. Лапласа} \end{cases}$$

Как может быть поставлена задача? Заданы граничные значение, найти распределения зарядов. Заданы заряды, найти распределения. Что-то задано, что-то не задано. Во всех трёх случаях **решение уравнения Лапласа единственно**.

Метод изображений

Если существует некоторая эквипотенциальная поверхность разделяющая пространство на два полупространства, то можем считать что эта поверхность является проводящей.

4 Диэлектрики

Def 4.1. *Диэлектрики* – непроводники электричества. В них возбуждаются индукционные заряды, привязанные к кастету частиц, – *поляризационные*, или *связанные заряды*.

Альтернативный вариант, – наличие дипольного момента у молекул. При наличии электрического поля дипольные моменты ориентируются, диэлектрик попользуется.

Def 4.2. *Вектор поляризации* – дипольный момент единицы объема диэлектрика, возникающий при его поляризации.

Рассмотрим скошенный параллелепипед. На основаниях параллелепипеда возникнут поляризационные заряды с поверхностной плотностью $\sigma_{\text{пол}}$. Взяв его площадь за S, найдём дипольный момент равный $\sigma_{\text{пол}}S\boldsymbol{l}$. Тогда вектор поляризации будет

$$\boldsymbol{P} = \frac{\sigma_{\text{пол}}S}{V}\boldsymbol{l}, \tag{4.1}$$

что верно и для анизотропных кристаллов где $\boldsymbol{E} \nparallel \boldsymbol{P}$.

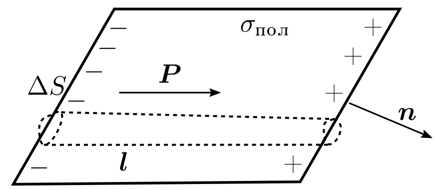
Пусть $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор внешней нормали к основанию параллелепипеда, тогда $V = S(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n})$.

Подставив V в предыдущую формулу, получим, что

$$\sigma_{\text{пол}} = (\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}) = P_n \tag{4.2}$$

Или, более общо,

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \boldsymbol{p}_i$$



В случае неоднородной поляризации верно, что поляризационные заряды могут появиться и на поверхности. Выделим V, ограниченный S, смещённый заряд равен $-P_n\,dS$, тогда через S поступает

$$q_{\text{пол}} = -\oint P_n\,dS = -\oint (\boldsymbol{P} \times\, d\boldsymbol{S})\,. \tag{4.3}$$

Стоит заметить, что в теорему о циркуляции не входят заряды, соотвественно для диэлектриков верно, что

$$\oint_{(L)} E_l\,dl = 0.$$

Далее чаще всего мы будем сталкиваться с линейной поляризацией, когда

$$\boldsymbol{P} = \alpha \boldsymbol{E}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}\underbrace{(1 + 4\pi\alpha)}_{\varepsilon} = \varepsilon \boldsymbol{E},$$

где α – *поляризуемость диэлектрика*, а ε – *диэлектрическая проницаемость*.

4.1 Теорема Гаусса

Запишем теорему Гаусса для электрического поля в диэлектрике. Знаем, что $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\text{пол}} + \boldsymbol{E}_{\text{св}}$.

$$\oint E_n\,dS = 4\pi(q + q_{\text{пол}}) \quad \Rightarrow \quad \oint \underbrace{(E_n + 4\pi P_n)}_{D_n}\,dS = 4\pi q. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\oint D_n\,dS = 4\pi q_{\text{св}}} \tag{4.4}$$

где $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}$. – вектор *электрической индукции*, или *электрического смещения*. Поток вектора $\boldsymbol{D}$ определяется только свободными зарядами.

Можно посмотреть на это в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\left(\rho - \operatorname{div} \boldsymbol{P}\right), \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi(\rho + \rho_{\text{пол}}) \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{пол}} = -\operatorname{div} \boldsymbol{P}. \end{aligned}$$

4.2 Граничные условия на границе двух диэлектриков

Повторя рассуждения для проводников, найдём, что

$$D_{1n} = D_{2n},$$

а в случае линейных диэлектриков верно

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}.$$

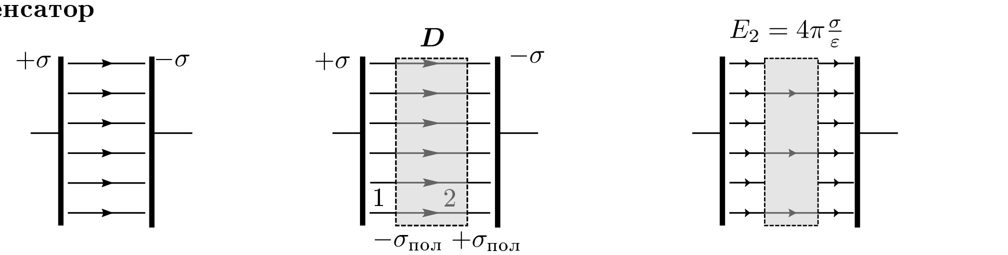
Или

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma_{\text{пол}}.$$

Аналогично, из теоремы о циркуляции получим, что

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0.$$

Плоский конденсатор



$E_0 = 4\pi\sigma$ $\qquad$ $D_2 = D_1 = E_0 = 4\pi\sigma$ $\qquad$ $E_1 - E_2 = 4\pi\sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\big) = 4\pi\sigma_{\text{пол}}$

То есть на грани пластинки $\sigma_{\text{пол}} = \sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

4.3 Поле системы зарядов в однородном диэлектрике

Для точечного заряда в однородном диэлектрике, по теореме Гаусса

$$\left.\begin{aligned} &D\cdot 4\pi r^2 = 4\pi \\ &D = \varepsilon E \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{q}{\varepsilon r^2}.}$$

То ест в общем случае, по принципу суперпозиции, в диэлектрике

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0.$$

5 Энергия электрического поля

Рассмотрим систему из двух зарядов q_1 и q_2. Тогда энергия взаимодействия

$$W = q_1\varphi_{21} = q_2\varphi_{12} = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_{21} + q_2\varphi_{12}\right).$$

Или, в общем случае

$$W = \frac{1}{2}\sum_{ij} W_{ij} = \frac{1}{2}\left(q_i\varphi_i^j\right) = \frac{1}{2}\sum q_i\varphi_i,$$

где под φ_i имеется ввиду потенциал q_i заряда. В случае непрерывно заряженного тела

$$W = \frac{1}{2}\int \varphi\rho\, dV.$$

Например, для конденсатора

$$W = \frac{1}{2}\varphi_1\int_{(1)} dq + \frac{1}{2}\varphi_2\int_{(2)} dq = \frac{1}{2}q(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{1}{2}qU = \frac{cU^2}{2} = \frac{q^2}{2c}.$$

Вопрос: где локализована энергия? Ответ: в зарядах или в поле. В частности, для конденсатора

$$W = \frac{1}{2}cU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S E^2 d^2}{4\pi d} = \underbrace{\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}}_{\mathcal{W}_Э} V,$$

где $\mathcal{W}_Э = \varepsilon E^2/8\pi$ – *объемная плотность* электрической энергии. В общем же случае

$$W_Э = \int \mathcal{W}_Э\, dV. \tag{5.1}$$

6 Виды диэлектриков

Посмотрим на энергию внутри вакуума и диэлектрика, $E^2/8\pi$ и $E^2/\varepsilon 8\pi$. Энергия электрического поля определяется через работу внешних сил, которую необходимо затратить, чтобы это поле создать. Собственно, во втором случае есть ещё добавки. рассмотрим диэлектрик с упругими диполями, то есть пусть

$$F = \varkappa l.$$

Пусть диполь попал во внешнее поле, тогда

$$Eq\cdot\frac{l}{2} = \varkappa l\cdot\frac{l}{2} = \frac{1}{2}Ep.$$

Тогда вся энергия, чтобы создать в этой среде поле

$$W = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{EP}{2} = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{1}{2}E^2\alpha = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{E^2}{8\pi}(\varepsilon - 1) = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}.$$

А если работать с диэлектриками с собственным дипольным моментом? Тогда ещё появиться некоторое тепло, которое необходимо отдать термостату, увеличивая упорядоченность системы. Постараемся обобщить, для этого вспомним, что

Def 6.1. *Свободная энергия* – функция состояния, приращение которой в обратимом изотермическом процессе равно совершаемой работе внешних сил.

Так вот, то что мы называем энергией электрического поля (в диэлектриках), на самом деле это объёмная плотность свободной энергии $\Psi = U - TS$.

7 Теория постоянных токов

Def 7.1. *Сила тока* – заряд, протекший через сечений проводника в единицу времени,

$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{7.1}$$

Плотность тока – ток, протекающий через единичное сечение.

$$\boldsymbol{j} = ne\boldsymbol{u}. \tag{7.2}$$

Law 7.2 (закон Ома)**.** *Для класса линейных проводников верно, что при наличии разности потенциалов U*

$$I = \frac{U}{R} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{j} = \lambda \boldsymbol{E}, \tag{7.3}$$

где $\lambda = 1/\rho$, обратное удельное сопротивление.

В СГСЭ, кстати, $\dim \rho = \text{c}$, а в СИ 1 ед. СГСЭ $\rho = 9 \cdot 10^9$ Ом.

Условие стационарности

Пусть в некоторый узел втекает $I_1, \ldots, I_n$, тогда

$$\oint_{(S)} j_n\, dS = -\dot{Q}.$$

Это «закон сохранения заряда», или уравнение непрерывности. В частности, в стационарном случае

$$\boxed{\oint j_n\, dS = 0}. \tag{7.4}$$

Получается (??), что поле зарядов, которые участвуют в протекании постоянных токов можно описывает с помощью электростатических формул, то есть применять теорему Гаусса и теорему о циркуляции.

По теореме Гаусса и условия стационарности,

$$0 = \oint j_n\, dS = \lambda \oint E_n\, dS = \lambda 4\pi q,$$

то есть для проводников с постоянным током всё ещё верно, что внутреннего заряда в проводниках нет, а есть только поверхностный.

Невозможна стационарная ситуация с постоянных током только на потенциальных силах. Для участка цепи, в котором действуют сторонние силы, можно записать

$$\boldsymbol{j} = \lambda \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\text{стор}}\right). \tag{7.5}$$

Def 7.3. *ЭДС* – электро-движущая сила, работа совершаемая сторонними силами при перемещении единичного заряда по рассматриваемому участку,

$$\mathcal{E} = \int_{(I)} E_l^{\text{стор}}\, dl. \tag{7.6}$$

Правила Кирхгофа

Рассмотрим узел, в который втекает $I_1, \ldots, I_n$. Из условия стационарности получим (I). Рассмотрев замкнутый участок цепи, получим (II) правило Кирхгофа. Действительно, $j_l = \lambda \left(E_l + E_l^{\text{стор}}\right)$, или

$$\oint \frac{I\, dl}{\lambda S} = \oint \left(E_l + E_l^{\text{стор}}\right) dl, \quad \text{где} \quad \oint \frac{I\, dl}{\lambda S} = IR.$$

Но для каждого участка $I_i R_i = \Delta\varphi_i + \mathcal{E}_i$. Это с учётом направления тока.

I. $\sum I_i = 0.$

II. $\sum I_i R_i = \sum \mathcal{E}_i$

Оказывается, для любой цепи, записав уравнения Кирхгофа для всех узлов и всех независимых контуров, получим разрешимую единственным образом систему уравнений (ну или хотя бы столько, сколько можно).