Билеты к экзамену «Кратные интегралы и теория поля»

Авторы: Примак Евгений
Хоружий Кирилл

От: *9 января 2021 г.*

Содержание

Свёртка и приближение функций бесконечно гладкими 2
1 Свёртка функций и её свойства . . . 2
2 Бесконечно гладкие функции с компактным носителем . . . 2
3 Приближение функций бесконечно гладкими . . . 2

Дифференцируемые отображения и криволинейные замены координат 3
4 Дифференцируемые отображения и дифференцирование композиции . . . 3
5 Системы криволинейных координат и теорема об обратном отображении . . . 3
6 Теоремы о системе неявных функций . . . 3
7 Теорема о расщеплении гладкого отображения . . . 4

Векторы и дифференциальны формы первой степени 5
13 Вектор, как дифференцирование . . . 5
14 Касательное пространство и дифференциал отображения . . . 5
15 Диф-формы I степени . . . 5

Диф-формы высших степеней 6
16 Определение и свойства диф-форм высших степеней . . . 6
17 Внешнее умножение диф-форм . . . 6
18 Внешнее дифференцирование . . . 6
19 Обратный образ диф-форм . . . 6

Интегрирование дифференциальных форм 7
20 Интегрирование диф-формы объёма . . . 7
21 Представление диф-формы в каноническом виде . . . 7
22 Поведение интеграла от формы при линейной замене координат . . . 7
23 Гладкое разбиение единицы . . . 7
24 Поведение интеграла от формы при гладкой замене координат . . . 7
25 Формулы гладкой замены переменных в интеграле Лебега от функции . . . 7

Многообразия (с краем) и формула Стокса 8
26 Вложенные многообразия . . . 8

Решения 9
1 Свёртка функций и её свойства . . . 9
2 Бесконечно гладкие функции с компактным носителем . . . 9
3 Приближение функций бесконечно гладкими . . . 9
6 Теоремы о системе неявных функций . . . 9

Свёртка и приближение функций бесконечно гладкими

1 Свёртка функций и её свойства

Def 1.1 (Свертка функции)**.** Свёртку ещё пишут как $h = f * g$.

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t)\,dt,$$

Свёртка также ассоциативна: $f * (g * h) = (f * g) * h$, для функций с конечным интегралом. Чтобы интеграл существовал, можно заметить, что если одна из функций ограничена, а другая имеет конечный интеграл, тогда и свёртка будет ограничена, кроме того:

Thr 1.2. *Если f и g имеют конечный интегралы,* ***то*** *$h = f * g$ определена почти всюду и верно неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g|\,dx < \int_{\mathbb{R}^n} |f|\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g|\,dx,$$

и равенство:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f * g\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g\,dx.$$

Lem 1.3. *Если свёртка $g * f$ —* ***ограничена****, где g – имеет конечный интеграл, а f и $\partial_x f$ – ограничены,* ***то*** *возможно дифференцирование под знаком интеграла (6.1), и мы получаем:*

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(x-t)}{\partial x_i} g(t)\,dt = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g.$$

2 Бесконечно гладкие функции с компактным носителем

Возьмём $f \in C^\infty$ такую, что $\forall k f^{(k)}(0) = 0$. Из неё составим $\varphi \in C^\infty$ большую нуля на $(-1, 1)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ e^{-1/x}, & x > 0. \end{cases} \qquad \varphi(x) = f(x+1)f(1-x).$$

Lem 2.1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ *бесконечно гладкая* $\varphi_\varepsilon \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, $\varphi_\varepsilon(x) \neq 0\ \forall x \in U_\varepsilon(0)$, ***такая что*** $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = 1$.

Lem 2.2. $\forall \varepsilon > \delta > 0\ \exists$ *бесконечно гладкая* $\psi_{\varepsilon,\delta} \colon \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, $\psi_{\varepsilon,\delta}(x) \neq 0\ \forall x \in U_\varepsilon(0)$ *и* $\psi_{\varepsilon,\delta}(x) \neq 0\ \forall x \in U_\delta(0)$.

3 Приближение функций бесконечно гладкими

Пусть $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, неотрицательная $\varphi \in C^\infty$, $\varphi \neq 0$ при $|x| \leqslant 1$ и пусть $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$. Положим $\varphi_k(x) = k^n \varphi(kx)$, у которых так же будут $\int = 1$ и которые $\varphi_k \neq 0$ при $|x| \leqslant 1/k$.

Thr 3.1. *Для непрерывной $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определим свёртки:*

$$f_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\varphi_k\,dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\varphi_k(x-t)\,dt \quad \rightsquigarrow \quad f_k \in C^\infty,\ f_k \to f \text{ равномерно на компактах в } \mathbb{R}^n.$$

Thr 3.2. *Если f имеет непр. производные до m-го порядка, то производные f_k до m-го порядка равномерно сходятся на компактах к соответствующим f'.*

Thr 3.3. *Пусть $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $f \in \mathcal{L}_c$. Тогда свёртки $f * \varphi_k$ с функциями из теоремы 3.1 сколь угодно близко приближают f в среднем.*

Дифференцируемые отображения и криволинейные замены координат

4 Дифференцируемые отображения и дифференцирование композиции

Def 4.1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. Отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ называется *дифференцируемым* в точке $x_0 \in U$, если

$$f(x) = f(x_0) + Df_{x_0}(x - x_0) + o(|x - x_0|), \qquad x \to x_0,$$

где $Df_{x_0}\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ – линейное отображение, называемое *производной* f в точке x_0.

Def 4.2. Функция f называется *непрерывно дифференцируемой* на U, если оно дифференцируемо в каждой точке и Df_x непрерывно зависит от x.

Thr 4.3 (Дифференицрование композиции)**.** *Если f дифференцируемо в точке x_0, g дифференцируемо в точке $y_0 = f(x_0)$, то композиция $g \circ f$ дифференцируема в точке x_0, и $D(g \circ f)_{x_0} = Dg_{y_0} \circ Df_{x_0}$.*

Def 4.4. Производная функции f по направлению $v \in Rn$ в точке x называется

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \left(\frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \right)$$

Lem 4.5. *Если функция дифференцируема в точке x, то в этой точке*

$$\frac{\partial f}{\partial v} = Df_x(v).$$

В частности для функционалов, верно что $\partial f/\partial v = df_x(v)$. Более того, выбрав в качестве v базисные векторы e_i, поймём что

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} x^i,$$

где dx^i – дифференциалы координатных функций, образующие двойственный базис.

Thr 4.6. *Если отображение $f\colon U \mapsto \mathbb{R}^m$ из открытого $U \subseteq \mathbb{R}^n$ задано в координатах, как $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$, для $i = 1, \ldots, m$ и функции f_i имеют непрерывные частные производные на U, то f непрерывно дифференцируемо на U.*

5 Системы криволинейных координат и теорема об обратном отображении

Def 5.1. *Криволинейная замена координат* — бесконечно гладкое отображение $\varphi\colon U \mapsto V$ такое, что φ^{-1} определено и тоже бесконечно гладко.

Lem 5.2. *Пусть открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$ выпукло. Для непрерывно дифференцируемого отображения $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ найдётся непрерывное отображение $A\colon U \times U \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, такое что $\forall x',\ x'' \in U$*

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = A(x', x'')(x'' - x')$$

и $A(x, x) = D\varphi_x$.

Thr 5.3 (Теорема об обратном отображении)**.** ***Если*** *отображение $\varphi\colon U \mapsto \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо в окрестности точки x* ***и*** *его дифференциал $D\varphi_x$ являетсяя невырожденным линейным преобразованием,* ***то*** *это отображение взаимно однозначно отображает некоторую окрестность $V \ni x$ на окрестность $W \ni y$, где $y = \varphi(x)$. Обратное отображение $\varphi^{-1}\colon W \to V$ тоже непрерывно дифференцируемо.*

Def 5.4. *Криволинейной системой координат* в окрестности точки $p \in \mathbb{R}^n$ называется набор таких функций, которые явяются координатами гладкого отображения окрестности p на некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ с гладким обратным[1] отображением.

6 Теоремы о системе неявных функций

Thr 6.1 (Теорема о неявной функции)**.** *Пусть функции $f_1, \ldots, f_k$ непрерывно дифференцируемы в окрестности $p \in \mathbb{R}^n$ и*

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \neq 0$$

[1]По теореме об обратном отображении для проверки системы преобразования достаточно проверить невырожденность $(\partial y_i/\partial x_j)$ в точке p, или линейную независимость dy^i в точке p.

в этой окрестности. Пусть $f_i(p) = y_i$, $i = 1, \ldots, k$. *Тогда найдётся окрестность точки* p *вида* $U \times V$, $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^{n-k}$, *такая что в этой окрестности множество решений системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x) = y_1, \\ \qquad \ldots \\ f_k(x) = y_k, \end{cases}$$

совпадает с графиком непрерывно дифференцируемого отображения $\varphi \colon V \to U$, *заданного в координатах как*

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, \ldots, y_k,\ x_{k+1}, \ldots, x_n), \\ \quad \ldots \\ x_k = \varphi_k(y_1, \ldots, y_k,\ x_{k+1}, \ldots, x_n), \end{cases}$$

то есть отображения $\mathbb{R}^{n-k} \mapsto \mathbb{R}^k$.

7 Теорема о расщеплении гладкого отображения

Thr 7.1 (Теорема о расщеплении отображения на элементарные)**.** *Если отображение* φ *непрерывно дифференцируемо в окрестности точки* $p \in \mathbb{R}^n$ *и имеет обратимый* $D\varphi_x$, *то его можно представить в виде композиции перестановки координат, отображений координат и элементарных отображений, непрерывно дифференцируемо и возрастающим образом меняющих только одну координату* $y_i = \psi_i(x_1, \ldots, x_n)$.

Thr 7.2. *Теоремы об обратном отображении, о неявной функции и о расщеплении отображения дают отображения класса* C^k *при* $k \geqslant 1$, *если исходные отображени были класса* C^k.

Векторы и дифференциальные формы первой степени

13 Вектор, как дифференцирование

Lem 13.1. *Всякую гладкую функцию, определенную в некоторой окрестности $x_0 \in \mathbb{R}^n$, в возможно меньшей окрестности x_0, можно представить в виде*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \partial_k f|_{x_0}\ (x^k - x_0^k),$$

с гладкими $\partial_k f$.

Def 13.2. Определим *касательный вектор* в точке $p \in U$ открытого множества $U \subseteq \mathbb{R}^n$ как $\mathbb{R}$-линейное отображение $X\colon C^\infty(U) \mapsto \mathbb{R}$, удовлетворяющее

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g).$$

Касательное пространство T_pU к U в точке p состоит из всех касательных векторов в точке p.

Lem 13.3. *Если X – касательный вектор в точке $p \in U$, то для любой окресности $V \ni p$, $V \subseteq U$, выражение $X(f)$ может зависеть только от значений f в V, а не на всём U.*

В силу предыдущих лем мы можем перейти в окрестность, где f представима в виде (**??**), тогда

$$X(f) = X(f(p)) + \sum_{i=1}^{n} X(x_i)\partial_i f|_p + \sum_{i=1}^{n} x_i(p)X(\partial_i f|_p) = \sum_{i=1}^{n} X(x_i)\ \partial_i f|_p.$$

Числа $X_i = X(x_i)$ называются координатами касательного вектора в данной криволинейной системе координат, тогда весь вектор в точке p записывается, как $X = X^i\partial_i$.

14 Касательное пространство и дифференциал отображения

Def 14.1. *Векторным полем* на открытом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$ называется выбор касательного вектора $X(p) \in T_pU$ для каждой точки $p \in U$, гладко[2] зависящий от p.

Lem 14.2. *Для открытого $U \subseteq \mathbb{R}^n$ всякое $\mathbb{R}$-линейное отображение $X\colon C^\infty \mapsto C^\infty(U)$, удовлетворяющее правилу Лейбница $X(fg) = X(f)g + fx(g)$ задаётся векторным полем на U.*

Def 14.3. Пусть есть вектор $X \in T_pU$, $q = \varphi(p)$, тогда *прямой*[3] *образ вектора* $\varphi_*(X)$ определяется по формуле

$$\varphi_*(X)f = X(f \circ \varphi), \qquad \Rightarrow\ (\varphi_* X)^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} X^j \quad \Leftrightarrow \quad \text{переписать в матричном виде}.$$

Def 14.4. Отображение $\varphi\colon U \mapsto V$ задаёт *гомоморфизм алгебр* (операция, сохраняющая умножение, сложение, и переводящая const в const): $\varphi^*\colon C^\infty(V) \mapsto C^\infty(U)$ по формуле

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi.$$

вектор даёт дифференцирование алгебры $X\colon C^\infty(U) \mapsto \mathbb{R}$, и тогда $\varphi_* X = X \circ \varphi^*$ тоже дифференцирование алгебры.

15 Диф-формы I степени

Def 15.1. *Дифференциальная 1-форма* – это ковекторное поле. Иначе, элемент двойственного пространства $(T_pU)^* \equiv T_p^*U$, линейная форма на касательнм пространстве, гладко зависящая от p. *Дифференциал* функции f от векторного поля X это $df(X) \stackrel{\text{def}}{=} Xf$.

Дифференциалы $dx_1, \dots, dx_n$ дают базис T_p^*U, двойственный к $\partial_1, \dots, \partial_n$, в смысле $dx^i \partial_j = \delta^i_j$. По этому базису можно разложить любую форму в точке, а применяя это $\forall p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ видим, что $\omega^1 = \alpha_i dx^i$.

При замене координат компоненты ω^1 преобразуются как дифференциалы функции, то есть

$$\alpha = \alpha_j dx^j = \tilde{\alpha}_i dy^i = \underbrace{\tilde{\alpha}_i \partial_j y^i}_{\alpha_j} dx^j, \quad \Rightarrow \quad \alpha_j = \tilde{\alpha}_i \partial_j y^i \quad \Leftrightarrow \quad \text{переписать в матричном виде}.$$

[2] Гладкая зависимость понимается в смысле гладкой зависимости координат векторного поля $X_i(p)$ в точке p.

[3] Производную отображения φ в точке p можно определить как $\varphi_*\colon T_pU \mapsto T_qV$ при $q = \varphi(p)$. Иначе можем обозначать, как $F\varphi_p$.

Диф-формы высших степеней

16 Определение и свойства диф-форм высших степеней

Def 16.1. Определим *дифференциальную форму степени* k на открытом $U \subseteq \mathbb{R}^n$ как кососимметричное отображение наборов из k гладких векторных полей $X_1, \ldots, X_k$ на U в $C^\infty(U)$, линейное по каждому аргументу и относительно умножения на бесконечно гладкие функции.

Lem 16.2. *Значение выражения $\alpha(X_1, \ldots, X_k)$ в точке p зависит только от значений векторных полей X_i в точке p.*

Пространство диф-форм степени k на $U \subseteq \mathbb{R}^n$ обозначим $\Omega^k(U)$. Интересно, что $\Omega^n(U)$ в фиксированной системе координат выглядит как $C^\infty(U)$, но при замене координат ведёт себя иначе.

Свойства диф-форм?

17 Внешнее умножение диф-форм

Def 17.1. *Внешнее умножение* $\Omega^k(U) \times \Omega^l(U) \mapsto \Omega^{k+l}(U)$, можно определить как $\alpha \wedge \beta = \operatorname{Alt}(\alpha \otimes \beta)$, при чём $(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k)(\partial_1, \ldots, \partial_k) = 1$.

Здесь можно написать про операцию альтернирования.

18 Внешнее дифференцирование

Lem 18.1. *На гладких диф-формах на U существует единсвтенный $\mathbb{R}$-линейный оператор $\delta\colon \Omega^k(U) \mapsto \Omega^{k+1}(U)$, удовлетворяющий условиям: 1) $d(f) = df$; 2) $d^2 = 0$; 3) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta$ (а-ля правило Лейбница). Более того, операция d определена инвариантно.*

19 Обратный образ диф-форм

Def 19.1 (Обратный образ)**.** Для всякого гладкого отображения $\varphi\colon U \mapsto V$ между открытими подмножествами евклидовых пространств определено отображение пространств дифференциальных форм $\varphi^*\colon \Omega^k(V) \mapsto \Omega^k(U)$, действующее по формуле[4]

$$\varphi^* \alpha(X_1, \ldots, X_k) = \alpha(\varphi_* X_1, \ldots, \varphi_* X_k).$$

Для функции $f \in C^\infty(V) = \Omega^0(V)$ оказывается $\varphi^* f = f \circ \varphi$, что совпадает с замены переменных в функции. Для форм первой степени $\alpha \circ \varphi_*$, где $\alpha|_{f(p)}$, а $\varphi_*|_p$. Чего?

Lem 19.2. *Взятие обратного образа диф-форм коммутирует с внешним умножением и внешним дифференцированием.*

Таким образом взятие обратного образа происходит формально подстановкой[5] выражений новых переменных через старые в коэффициенты формы и в дифференциалы новых переменных.

[4] Важно заметить, что если левая часть вычисляется в точке $p \in U$, то правая в $\varphi(p)$.

[5] Было бы здорово посмотреть на задачи 6.96 и 6.97.

Интегрирование дифференциальных форм

20 Интегрирование диф-формы объёма

Def 20.1. Диф-форма с *компактным носителем* на $\mathbb{R}^n$ – форма определенная[6] на всём $\mathbb{R}^n$ и равная 0 за пределами некоторого компакта.

Def 20.2. Для гладкой[7] формы с компактным носителем $\nu = a(x)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \in \Omega^n_c(U)$ определим в какой-то фиксированной системе координат

$$\int_U \nu \stackrel{\text{def}}{=} \int_U a(x)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Lem 20.3. *Если $\lambda \in \Omega_c^{n-1}(U)$, то*[8] $\int_U d\lambda = 0$.

21 Представление диф-формы в каноническом виде

Lem 21.1. *Пусть $U = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$, где $(a_i, b_i) \ni 0$. Пусть $\varphi\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$ – гладкая функция с компактным носителем, содержащимся в каждом (a_i, b_i), и с единичным интегралом. Для всякой $\nu \in \Omega_c^n(U)$ найдётся число I и форма $\lambda \in \Omega_c^{n-1}(U)$, такие что $\nu = I\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n + d\lambda$.*

Con 21.2. *Пусть $U = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ – произведение интервалов. Факторпространство $\Omega_c^n(U)/d\Omega_c^{n-1}(U)$ одномерно. Получается, что всевозможные способы определить интеграл формы $\nu \in \Omega_c^n(U)$ так, чтобы интеграл от $d\lambda$ равнялся нулю, могут отличаться только умножением на константу. Ещё раз.*

22 Поведение интеграла от формы при линейной замене координат

Lem 22.1 (Поведение интеграла формы при линейной замене координат)**.** *Интеграл дифференциальной формы $\nu \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ при отображении A^*, соответствующем линейному преобразованию $A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ меняет или не меняет знак в зависимости от знака определителя* $\det A$, *то есть*

$$\int_{\mathbb{R}^n} A^*\nu = (\operatorname{sign}\det A) \int_{\mathbb{R}^n} \nu.$$

23 Гладкое разбиение единицы

Lem 23.1 (Разбиение единицы в окрестности компакта в $\mathbb{R}^n$)**.** *Для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}_\alpha$ компакта $K \subseteq \mathbb{R}^n$ найдётся набор неотрицательных гладких функций $\{\rho_\alpha\}_\alpha \colon \mathbb{R}^n \mapsto [0,1]$ с компактными носителями $supp\,\rho_\alpha$ таких, что $\forall\alpha$ $supp\,\rho_\alpha \subset U_\alpha$, и только конечное число из них не равно нулю и $\sum_\alpha \rho_\alpha(x) \equiv 1$ в некоторой окрестности K. Это называется <u>разбиение единицы, подчиненное покрытию</u>.*

Task 23.2. Для связной области $U \subset \mathbb{R}^n$ пространство $\Omega_c^n(U)/\, d\Omega_c^{n-1}(U)$ одномерно.

24 Поведение интеграла от формы при гладкой замене координат

Thr 24.1 (Поведение интеграла формы относительно гладкой замены координат)**.** *Интеграл дифференциальной формы $\nu \in \Omega_c^n(V)$ при отображении φ^*, соответствующем диффеоморфизму $\varphi\colon U \mapsto V$ между областями в $\mathbb{R}^n$ меняет или не меняет знак в зависимости от знака*[9] *якобиана J_φ, то есть*

$$\int_U \varphi^*\nu = (\operatorname{sign} J_\varphi) \int_v \nu.$$

25 Формулы гладкой замены переменных в интеграле Лебега от функции

Con 25.1 (Криволинейная замена переменных в кратном интеграле)**.** *При диффеоморфизме*[10] *$\varphi\colon U \mapsto V$ для интегрируемой по Лебегу на V функции f имеет место формула*

$$\int_V f(y)\, dy = \int_U f(\varphi(x))|J_\varphi|\, dx.$$

[6] Вообще можно рассматривать $\Omega_c^k(U) \subseteq \Omega_c^k(\mathbb{R}^n)$.

[7] Т.к $a(x)$ – гладкая с компактным носителем, этот интеграл $\exists$, как повторный интеграл Римана, или как интеграл Лебега.

[8] Таким образом интеграл оказывается определен как линейный функционал на факторпространстве $\Omega_c^n(U)/d\Omega_c^{n-1}(U)$.

[9] Так как U и V связны, то знак якобиана один и тот же во всех точках области.

[10] Вообще достаточно непрерывной дифференцируемости.

Многообразия (с краем) и формула Стокса

26 Вложенные многообразия

Def 26.1. Замкнутое подмножество $M \subseteq \mathbb{R}^N$ называется *вложенным многообразием размерности* n, если $\forall\ p \in M\ \exists U_\varepsilon(p)$ и криволинейная система координат в ней, в которой включение $M \subset \mathbb{R}^N$ в пересечении с некоторой окрестностью нуля.

Яркий пример[11] – работа с условными экстремумами. Если M задаётся гладкими уравнениями $f_1 = \ldots = f_{N_n} = 0$ и дифференциалы этих уравнений линейно независимы в каждой точке M, то M будет вложенным многообразием размерности n, так как определяющие его функции можно считать частью системы координат $y_{n+1} = f_1, \ldots, y_N = f_{N-n}$ в окрестности каждой точки $p \in M$, и M в такой окрестности выглядит в точности как $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^N$ около нуля, а функции $y_1, \ldots, y_n$ задают систему координат в M, пересеченном с окрестностью p.

Def 26.2. Замкнутое подмножество $M \subseteq \mathbb{R}^N$ называется *вложенным многообразием с краем*[12] *размерности* n, если для $\forall\ p \in M\ \exists U_\varepsilon(p)$ и криволинейная система координат в ней, в которой включение $M \subseteq \mathbb{R}^N$ **либо** превращается в стандартное вложение $\mathbb{R}^{\subset}\mathbb{R}^N$, **либо** превращается в стандартное вложение $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^N$, пересеченное с окрестностью 0.

[11] Так, например, любая сфера в $\mathbb{R}^n$ является вложенным многообразием размерности $n-1$.
[12] Край ∂M многообразия с краем M сам по себе является $(n-1)$-мерным многообразием без края.

Решения (BETA)

1 Свёртка функций и её свойства

1.2. 1) $f(y)g(x) \in \mathcal{L}$ и по thr. Фубини: $\int |f \cdot g| = \int |f| \cdot \int |g|$;
2) то же верно для $f(x-t)g(t)$, отличие в лин. замене коор-т с $\det = 1$;
3) требуемое равенство напрямую из (1) и (2) замена: $x - t = y$;
4) для неравенства интегрируем по x: $|\int f(x-t)g(t)\,dt| \leqslant \int |f(x-t)g(t)|\,dt$. □

2 Бесконечно гладкие функции с компактным носителем

2.1. 1) для введённой φ достаточно: $\varphi_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n) = A\varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_1}{\varepsilon}\right)\ldots\varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_n}{\varepsilon}\right)$.
2) $\psi(x) = B\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt$, выбирем B: $\psi(x) \equiv 0\ \forall x \leqslant -1$ и $\psi(x) \equiv 1\ \forall x \geqslant -1$;
3) достаточно положить: $\psi_{\varepsilon,\delta}(x) = \psi\left(\frac{\delta+\varepsilon-2|x|}{\varepsilon-\delta}\right)$. □

3 Приближение функций бесконечно гладкими

3.1. 1) $f_k(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}}^{n}(f(x-t) - f(x))\varphi_k(t)\,dt$;
2) Пусть f р-но непр. в $U_\delta(K \subset \mathbb{R}^n)$ и пусть $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ при $|x - y| < \delta$ там же;
3) Выбирая k: $1/k < \delta$, тогда $\varphi_k(t) \neq 0$ при $|t| < \delta$ и тогда $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$ при $x \in K$.
4) при $x \in K$ верна р-ная сходимость: $|f_k(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_k(x)\,dx = \varepsilon$.
5) продифференцируем по параметру $\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\varphi_k(x-t)\,dt$;
6) производная (5) при $x \in K$ будет зависеть только значений f в $U_{1/k}(K)$, то есть f можно считать интегрируемой при дифференцировании по параметру, что позволяет применять теорему. □

3.2. По различным $\partial_{x_i} f * \varphi_k(x)$ получим по лемме 1.3, для производных свёрток схожее равенство, с самой f, а значит и р-ную сходимость.

$$\frac{\partial^m(f * \varphi_k)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}} = \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}} * \varphi_k.$$

□

3.3. 1) по thr(6.2) $f = h + g$, где g – эл. ступ., $\int_{\mathbb{R}^n}|h|\,dx < \varepsilon$;
2) по thr(1.2): $\int_{\mathbb{R}^n}|h * \varphi_k|\,dx < \varepsilon$. То есть, если окажется: $\int_{\mathbb{R}^n}|g - g * \text{‘}f_k|\,dx < \varepsilon$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f - f * \varphi_k|\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}|g - g * \varphi_k|\,dx + \int_{\mathbb{R}^n}|h|\,dx + \int_{\mathbb{R}^n}|h * \varphi_k|\,dx < 3\varepsilon.$$

3) Раскладывая g в сумму х-их χ_P, останется доказать для одной χ_P;
4) $\chi_P - \chi_P - \varphi_k \neq 0$ только в $U_{1/k}(\partial P)$ и по модулю $\leqslant 1$;
5) То есть после интегрирования получим не более $\mu(U_{1/k}(\partial P))$.
6) Напрямую можно убедиться, что эта $\mu \to 0$ при $k \to 0$. □

6 Теоремы о системе неявных функций

6.1.
1. По условию $df_1, \ldots, df_k,\ dx_{k+1}, \ldots, dx_n$ – линейно независимы. Тогда $f_1, \ldots, f_k, x_{k+1,\ldots,x_n}$ дают криволинейную систему координат.
2. Тогда старые координаты (НД) выражаются через новые: $x_i = \varphi_i(f_1, \ldots, f_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$, при чём выберем $\boldsymbol{x}$: $f_i = y_i$. $\Rightarrow$ Sol СУ содержится в графике отображения $\varphi\colon V \mapsto U$, при достаточно малых V, U: $\varphi(V) \subseteq U$.
3. Но график отображения содержится в Sol(СУ), т.к. в точке $p = (y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ значения $f_i = y_i$, т.к. $\varphi_i(p)$ даст такие $x_1, \ldots, x_k$, что $f_i(x_i) = y_i$. Q. E. D.

□

Thr 6.1 (Дифференцирование под знаком интеграла).

$$\left.\begin{aligned}&f(x,y)\in\mathcal{L}_c^x\ \forall y\in(a,b)\\&f\ \textit{дифференцируема по } y\\&\forall x\in X,\forall y\in(a,b)|f'_y(x,y)|\leqslant g(x)\\&g\geqslant 0\colon X\to\mathbb{R}^+\in L_c\ \textit{на}\ X\end{aligned}\right\}\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{d}{dy}\int_X f(x,y)\,dx=\int_X f'_y(x,y)\,dx.$$

Thr 6.2. *Пусть функция $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу с конечным интегралом. Тогда f можно сколь угодно близко приблизить в среднем элементарно ступенчатой функцией.*

Task 6.3 (Замена координат в интеграле для собственных отображений вообще). Пусть гладкое отображение $\varphi\colon\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^n$ является собственным. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi^*\nu=C_\varphi\int_{\mathbb{R}^n}\nu,\qquad C_\varphi\in\mathbb{Z}.$$