

# ЗАМЕТКИ КУРСА «АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

---

Автор: Хоружий Кирилл

От: 20 октября 2020 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>(-) Криволинейные координаты</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Кинематика точки</b>	<b>2</b>
2.1	Естественный трёхгранник . . . . .	2
2.2	Компоненты скорости и ускорения . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Кинематика твёрдого тела</b>	<b>2</b>
3.1	Углы Эйлера . . . . .	2
3.2	Основные теоремы о конечных перемещениях твёрдого тела . . . . .	3
3.3	Скорости и ускорения точек твёрдого тела в общем случае движения . . . . .	3
3.4	(-) Частные случаи. . . . .	4
3.5	Кинематические инварианты и кинематический винт . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Сложное движение точки и твёрдого тела</b>	<b>4</b>
4.1	Сложение скоростей и ускорений . . . . .	4
4.2	Главный момент и главный вектор . . . . .	5
4.3	Общие основания кинематики системы . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Основные теоремы динамики</b>	<b>7</b>
5.1	Аксиоматика . . . . .	7
5.2	Основные теоремы динамики . . . . .	7
5.3	Вычисление динамических величин . . . . .	7
<b>6</b>	<b>Основные теоремы динамики в неИСО</b>	<b>8</b>
<b>7</b>	<b>Движение точки в центральном поле</b>	<b>8</b>
7.1	Уравнение Бине . . . . .	8
7.2	Метрика Шварцшильда . . . . .	9
<b>8</b>	<b>Элементы механики сплошных сред (МСС)</b>	<b>10</b>
8.1	Переменные Лагранжа и Эйлера . . . . .	10
8.2	Деформации . . . . .	10
8.3	Напряжение . . . . .	11
8.4	Обобщенный закон Гука . . . . .	11
<b>9</b>	<b>Задачи с семинара</b>	<b>12</b>
9.1	Задачи с II семинара . . . . .	12
9.2	Задачи с III семинара . . . . .	13
9.3	Задачи с IV семинара . . . . .	13
9.4	Задачи с V семинара . . . . .	14
9.5	Задачи с VII семинара . . . . .	14

# 1 (-) Криволинейные координаты

## 2 Кинематика точки

Пусть  $\mathbf{r}(t), t \in \mathbb{R}$  – движение точки и траектория движения.

**Def 2.1.**

$$\text{Скорость: } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}; \quad \text{ускорение: } \mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (2.1)$$

### 2.1 Естественный трёхгранник

Из геометрии  $\lvert s(t) \rvert$  – длина кривой. Тогда

$$\mathbf{v} = \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{ds}}_{\boldsymbol{\tau}} \frac{ds}{dt} = v\boldsymbol{\tau}. \quad (2.2)$$

Дифференцируя (2.2)

$$\mathbf{w} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v \underbrace{\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}}_{\mathbf{n}/\rho} \frac{ds}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{w}_\tau} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}}_{\mathbf{w}_n}. \quad (2.3)$$

где  $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  – базис, преследующий точку.

### 2.2 Компоненты скорости и ускорения

Есть локальный базис. Тогда компоненты скорости

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i \mathbf{g}_i = v^i \mathbf{g}_i \quad \Rightarrow \quad v^i = \dot{q}^i. \quad (2.4)$$

Для компоненты ускорения:

$$w_i = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{g}_i) = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_i) - (\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{g}_i}{dt}).$$

Но, во-первых:

$$\frac{d\mathbf{g}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^i}.$$

Во-вторых:

$$\mathbf{v} = \dot{q}^i \mathbf{g}_i \quad \left| \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \right| \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} (\underbrace{\dot{q}^1 \mathbf{g}_1}_0 + \underbrace{\dot{q}^2 \mathbf{g}_2}_{\mathbf{g}_2} + \underbrace{\dot{q}^3 \mathbf{g}_3}_0) = \mathbf{g}_k \quad (2.5)$$

Тогда

$$w_i = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}^i}) - (\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}^i}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{\partial \dot{q}^i} \frac{1}{2} - \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{\partial \dot{q}^i} \frac{1}{2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{q}^i} \Rightarrow \boxed{mw_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}} \quad (2.6)$$

## 3 Кинематика твердого тела

**Def 3.1.** Абсолютно твёрдым телом<sup>1</sup> назовём множество такое, что

$$\forall i, j, t: \quad |\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)| = \text{const}.$$

Точка  $O$  это полюс. Во-первых перенесем начало координат в  $O$ . Введём систему координат  $O_{\xi\nu\zeta}$  связанную с телом, – тело относительно неё не движется.

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}, \quad \boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{OA} = \text{const в } O_{\xi\nu\zeta}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}(t) = R(t)\boldsymbol{\rho}.$$

### 3.1 Углы Эйлера

<sup>1</sup>Для краткости просто *твёрдое тело*.

Ортогональность матрицы  $R$  даёт возможность описать её тремя независимыми параметрами. Один из вариантов сделать это – углы Эйлера.

Пусть начальная ПДСК  $(x, y, z)$ , а конечная –  $(X, Y, Z)$ , при чём  $xy \cap XY = ON$  – линия узлов.

- 1)  $\alpha: Ox \rightarrow ON$ , угол прецессии;
- 2)  $\beta: Oz \rightarrow OZ$ , угол нутации;
- 3)  $\gamma: OX \rightarrow ON$ , угол собственного вращения.

Повороты системы на эти углы называются прецессия, нутация и поворот на собственный угол (вращение).

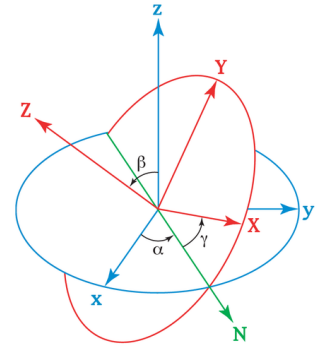


Рис. 1: Углы Эйлера

Матричная запись углов Эйлера:

$$R_Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и,

$$R_X(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta \cos \beta & \end{pmatrix}, \quad R_Z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin \psi & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

### 3.2 Основные теоремы о конечных перемещениях твёрдого тела

Далее бездоказательно приведём некоторые основные теоремы о конечных перемещениях твёрдого тела.

**Thr 3.2** (Теорема Эйлера). *Произвольное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку, можно осуществить посредством вращения вокруг некоторой оси, проходящей через эту точку.*

**Thr 3.3** (Теорема Шаля). *Самое общее перемещение твердого тела разлагается на поступательное перемещение, при котором произвольно выбранный полюс переходит из своего первоначального положения в конечное, и на вращение вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс. Это разложение можно совершить не единственным способом, выбирая за полюс различные точки тела; при этом направление и длина поступательного перемещения будут изменяться при выборе различных полюсов, а направление оси вращения и угол поворота вокруг нее не зависят от выбора полюса.*

**Thr 3.4** (Теорема Моцци). *Самое общее перемещение твердого тела является винтовым перемещением.*

**Con 3.5** (Теорема Бернулли-Шаля). *Самое общее перемещение плоской фигуры в своей плоскости есть либо поступательное перемещение, либо вращение вокруг точки. Эта точка называется центром конечного вращения.*

### 3.3 Скорости и ускорения точек твердого тела в общем случае движения

Проведём два вектора  $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_O$ :

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_O + \mathbf{r} = \mathbf{r}_O + R(t)\boldsymbol{\rho} \quad \xRightarrow{d/dt} \quad \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \dot{R}\boldsymbol{\rho} = \mathbf{v}_O + \dot{R}R^{-1}\mathbf{r}$$

но,

$$RR^T = E, \dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0, \dot{R}R^T = -R\dot{R}^T, (\dot{R}R^{-1})^T = -\dot{R}R^{-1}.$$

То есть  $\dot{R}R^{-1}$  кососимметрична. Тогда пусть

$$\dot{R}R^{-1} = \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

**Thr 3.6** (формула Эйлера). *Существует единственный вектор<sup>2</sup>  $\boldsymbol{\omega}$ , называемый угловой скоростью тела, с помощью которого скорость  $\mathbf{v}$  точки тела может быть представлена в виде*

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad - \quad \text{формула Эйлера.} \quad (3.2)$$

Тогда, например, при постоянном радиус векторе верно, что

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}, \quad \text{при условии } \mathbf{a} = \text{const.}$$

<sup>2</sup>Псевдовектор же, нет?

Можно вывести ускорение точки твёрдого тела

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_A &= \mathbf{w}_O + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \\ \mathbf{w}_A &= \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad - \quad \text{формула Ривальса},\end{aligned}$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt$  – угловое ускорение.

### 3.4 (-) Частные случаи.

Оставим частные случаи в покое.

### 3.5 Кинематические инварианты и кинематический винт

Вернемся к общему случаю движения твёрдого тела. В (3.6) угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  точки  $P$  инвариантна к выбору точки, соответственно  $\boldsymbol{\omega}^2$  – первый кинематический инвариант. Домножив (3.6) скалярно на  $\boldsymbol{\omega}$ , получим, что  $I_2 = (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega})$ , – второй кинематический инвариант.

Сейчас легко доказать thr. (3.4), точнее надо показать существование такой прямой  $MN$ , все точки которой имеют скорости,  $\parallel \boldsymbol{\omega}$ .

Выберем некоторый полюс,  $O$ , со скоростью  $\mathbf{v}_O$  и угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ . Тогда верно, что

$$\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OS} = p\boldsymbol{\omega}, \quad (p \neq 0).$$

## 4 Сложное движение точки и твёрдого тела

### 4.1 Сложение скоростей и ускорений

**Def 4.1.**

*Абсолютной скоростью (ускорением)* называют скорость (ускорение) относительно неподвижной системы координат.

*Относительной скоростью (ускорением)* называют скорость (ускорение) относительно подвижной системы координат.

*Переносной скоростью (ускорением)* такой точки  $A'$ , которая в рассматриваемый момент времени совпадает с точкой  $A$ , но которая не движется относительно подвижной системы координат. называют абсолютную скорость (ускорение).

**Thr 4.2** (сложение скоростей). Пусть  $\mathbf{a}$  – абсолютная скорость,  $\mathbf{e}$  – переносная,  $\mathbf{r}$  – относительная.

$$\mathbf{v}^a = \mathbf{v}^e + \mathbf{v}^r \quad (4.1)$$

**Thr 4.3** (сложение ускорений). Пусть  $\mathbf{a}$  – абсолютное,  $\mathbf{e}$  – переносное,  $\mathbf{r}$  – относительное,  $\mathbf{c}$  – кориолисово.

$$\mathbf{w}^a = \mathbf{w}^e + \mathbf{w}^r + \mathbf{w}^c. \quad (4.2)$$

$\triangle$ . Запишем скорость  $\mathbf{v}_A^a$  относительно двух систем координат:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \mathbf{r} \text{ в } xyz, \quad \overrightarrow{OA} = \boldsymbol{\rho} \text{ в } \xi\eta\zeta, \quad \xRightarrow{d/dt} \quad \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \dot{R}\boldsymbol{\rho} + R\dot{\boldsymbol{\rho}}. \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_A^a = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_A^r \\ \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (R\boldsymbol{\rho}) + R\dot{\boldsymbol{\rho}} \quad \xRightarrow{d/dt} \quad \mathbf{w}_A^a = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\underbrace{\dot{R}\boldsymbol{\rho} + R\dot{\boldsymbol{\rho}}}_{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}) + \dot{R}\dot{\boldsymbol{\rho}} + R\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \\ &= \mathbf{w}_A^e + \boldsymbol{\omega} \times R\dot{\boldsymbol{\rho}} + \underbrace{\dot{R}R^{-1}}_{\boldsymbol{\omega} \times} \underbrace{R\dot{\boldsymbol{\rho}}}_{\mathbf{v}_A^r} + \underbrace{R\ddot{\boldsymbol{\rho}}}_{\mathbf{w}_A^r} = \mathbf{w}_A^e + \mathbf{w}_A^r + \boxed{2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A^r}\end{aligned}$$

□

Теперь немного про твёрдое тело, зная, что  $\boldsymbol{\omega}^r = \omega_\xi \mathbf{e}_\xi + \omega_\eta \mathbf{e}_\eta + \omega_\zeta \mathbf{e}_\zeta$ , найдём<sup>3</sup> угловое ускорение  $\boldsymbol{\varepsilon}^a$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^a = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{d\boldsymbol{\omega}^r}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{d}{dt} (\omega^i \mathbf{e}_i) = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \underbrace{\dot{\omega}^i \mathbf{e}_i}_{\boldsymbol{\varepsilon}^r} + \underbrace{\omega^i \dot{\mathbf{e}}_i}_{\boldsymbol{\omega}^e \times \boldsymbol{\omega}^r} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^r + \boldsymbol{\omega}^e \times \boldsymbol{\omega}^r.$$

<sup>3</sup>Получить!

## 4.2 Главный момент и главный вектор

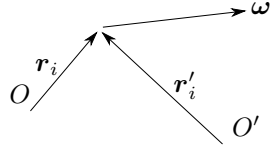
Имеется  $m$  мгновенно поступательных движений  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  и  $n$  мгновенно вращательных движений<sup>4</sup>  $\boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_n$ . Уже знаем, что  $\forall j$  мы можем представить  $\mathbf{v}_j$  как пару  $\boldsymbol{\omega}'_j, \boldsymbol{\omega}''_j$ . Получается, что  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_n$  представим в виду  $2m + n$  мгновенных вращений.

Введём два важных вектора

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_i \quad - \text{ суммарный вектор мгновенных угловых скоростей, } \textit{главный вектор};$$

$$\mathbf{V} = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\omega}_i \quad - \text{ суммарный вектор мгновенных поступательных движений, } \textit{главный момент}.$$

Таким образом свели  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_n$  к паре  $\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V}$ , соответствующей выбранному центру приведения.



Найдём  $\mathbf{V}_{O'}$ :

$$\mathbf{V}_{O'} = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \boldsymbol{\omega}_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j + \sum_{i=1}^n (\overrightarrow{O'O} + \mathbf{r}_i) \times \boldsymbol{\omega}_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j + \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\omega}_i}_{\mathbf{V}_0} + \overrightarrow{O'O} \times \underbrace{\sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_i}_{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{V}_0 + \overrightarrow{O'O} \times \boldsymbol{\Omega}.$$

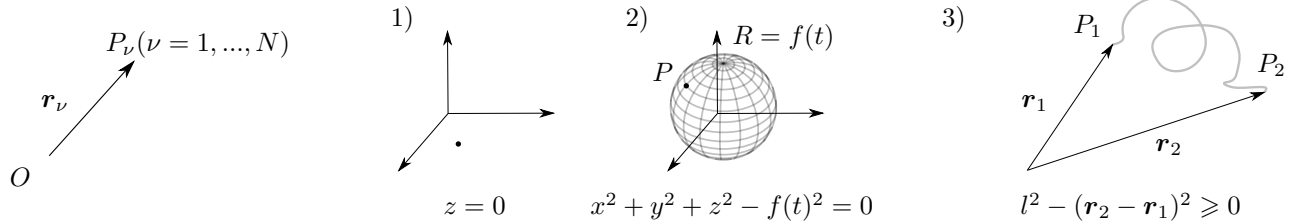
Таблица 1: Простейшие типы движений.

$(\mathbf{V}_0, \boldsymbol{\Omega})$	$\boldsymbol{\Omega}$	$\mathbf{V}_0$	простейшее мгновенное движение
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	мгновенно винтовое движение
$0$	$\neq 0$	$0$	мгновенное вращение, ось $\ni O$
$0$	$\neq 0$	$\neq 0$	мгновенное вращение, ось $\not\ni O$
$0$	$0$	$\neq 0$	мгновенно поступательное движение
$0$	$0$	$0$	мгновенный покой

## 4.3 Общие основания кинематики системы

Свободные и несвободные системы. Связи.

Рассмотрим некоторые частные случаи кинематических связей в системе.



В общем случае связь запишем, как

$$f(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) \geq 0.$$

В частности, при  $f(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) = 0$ , связь называется *двухсторонней*, или *удерживающей*. При неравенстве, соответственно, связь *односторонняя*, *освобождающая*. Связь вида  $f(\mathbf{r}_\nu, t) = 0$  называется *геометрической*, *конечная*, *голономная*. Связь вида  $f(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) = 0$  называется *дифференциальной*, или *кинематической*. Иногда кинематическая связь может быть представлена как геометрическая, такая связь называется *интегрируемой*.

**Def 4.4.** Если на систему материальных точек не наложены дифференциальные неинтегрируемые связи, то она называется голономной. Если же среди связей, наложенных на систему есть дифференциальные неинтегрируемые связи, то система называется неголономной.

<sup>4</sup>Скользкий вектор – это ?

Хотелось бы построить некоторую общую теория для случая, когда этих связей несколько. В частности пусть есть  $r$  геометрических связей.

$$f_\alpha(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r), \quad (4.3)$$

И несколько дифференциальных линейных связей

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{a}_{\beta\nu}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \cdot \mathbf{v}_\nu + a_\beta(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad (\beta = 1, \dots, s) \quad (4.4)$$

Стоит сказать, что

$$3N - r - s \geq 1.$$

**Def 4.5.** Геометрические связи называются стационарными или склерономными, если  $t$  не входит в их уравнения (4.3). Дифференциальные связи (4.4) называются *стационарными* или *склерономными* если функции  $\mathbf{a}_{\beta\nu}$  не зависят явно от  $t$ , а функции  $a_\beta \equiv 0$ . Система называется *склерономной*, если она либо свободная, либо на нее наложены только стационарные связи. Система называется *реономной*, если среди наложенных на нее связей есть хотя бы одна нестационарная.

**Ограничения, налагаемые связями на положения, скорости, ускорения и перемещения точек системы.**

Пусть задан некоторый момент  $t = t^*$ . Тогда *возможными положениями* назовём  $\mathbf{r}_\nu$  такие, что для них верно (4.3), (4.4).

Какие возможны скорости?

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \mathbf{v}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r). \quad (4.5)$$

Совокупность векторов  $\mathbf{v}_\nu = \mathbf{v}_\nu^*$ , удовлетворяющая линейным уравнениям (4.4) и (4.5) в возможном для данного момента времени положении системы, назовем возможными скоростями.

Какие возможны ускорения?

$$(4.5), (4.4) \xrightarrow{d/dt} \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \mathbf{w}_\nu + \sum_{\nu,\mu=1}^N \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu \partial \mathbf{r}_\mu} \mathbf{v}_\mu \cdot \mathbf{v}_\nu + 2 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t \partial \mathbf{r}_\nu} \mathbf{v}_\nu + \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t^2} = 0 \quad \alpha \in [1, r] \quad (4.6)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot \mathbf{w}_\nu + \sum_{\nu,\mu=1}^N \frac{\partial \mathbf{a}_{\beta\nu}}{\partial \mathbf{r}_\mu} \mathbf{v}_\mu \cdot \mathbf{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial \mathbf{a}_{\beta\nu}}{\partial t} \cdot \mathbf{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial a_\beta}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \mathbf{v}_\nu + \frac{\partial a_\beta}{\partial t} = 0 \quad \beta \in [1, s] \quad (4.7)$$

Совокупность векторов  $\mathbf{w}_\nu = \mathbf{w}_\nu^*$ , удовлетворяющая линейным уравнениям (4.6) и (4.7) в возможном для данного момента времени положении системы (+скорости), назовем возможными ускорениями.

Рассмотрим возможные перемещения  $\Delta \mathbf{r}_\nu$  системы за  $\Delta t$  из её возможного положения  $\mathbf{r}_\nu^*$  в момент  $t = t^*$ . Тогда

$$\Delta \mathbf{r}_\nu = \mathbf{v}_\nu^* \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{w}_\nu^* (\Delta t)^2 + \dots \quad (\nu = 1, \dots, N). \quad (4.8)$$

Пренебрегая нелинейными членами, получим, что  $\Delta \mathbf{r}_\nu = \mathbf{v}_\nu^* \Delta t$ . Тогда, домножив (4.4), (4.5) на  $\Delta t$ , получим систему уравнений, которой удовлетворяют линейные по  $\Delta t$  возможные перемещения:

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \Delta \mathbf{r}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Delta t = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r), \quad (4.9)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot \Delta \mathbf{r}_\nu + a_\beta \Delta t = 0, \quad (\beta = 1, \dots, s), \quad (4.10)$$

где функции  $\mathbf{a}_{\beta\nu}, a_\beta$  и частные производные вычисляются при  $t = t^*$ ,  $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu^*$ .

## Действительные и виртуальные перемещения

Пусть задано положение системы для  $t, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ . Тогда для  $t = t^* + dt$  запишем, что

$$\mathbf{r}_\nu(t^* + dt) - \mathbf{r}_\nu(t^*) = \mathbf{v}_\nu^* dt + \frac{1}{2} \mathbf{w}_\nu^* (dt)^2 + \dots, \quad (4.11)$$

где  $\mathbf{w}_{\nu_0}^*$  – ускорения точек системы при  $t = t^*$ . Величины (4.11) – действительные (истинные) перемещения точек системы за время  $dt$ . Тогда получим систему уравнений, аналогичную (4.9), (4.10):

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_{\nu}} \cdot d\mathbf{r}_{\nu} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} dt = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r), \quad (4.12)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot d\mathbf{r}_{\nu} + a_{\beta} dt = 0, \quad (\beta = 1, \dots, s). \quad (4.13)$$

Помимо действительных перемещений есть *виртуальные*. Ими называется совокупность величин  $\delta\mathbf{r}_{\nu}$ , удовлетворяющая линейным однородным уравнениям

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_{\nu}} \cdot \delta\mathbf{r}_{\nu} = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r), \quad (4.14)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot \delta\mathbf{r}_{\nu} = 0, \quad (\beta = 1, \dots, s), \quad (4.15)$$

Если система склерономна, то действительное перемещение будет одним из виртуальных.

**Def 4.6.** *Синхронное варьирование* – переход из одного положения в другое, при фиксированном времени

$$\mathbf{r}_{\nu}^* \rightarrow \mathbf{r}_{\nu}^* + \delta\mathbf{r}_{\nu}.$$

При синхронном варьировании мы не рассматриваем процесс движения и сравниваем допускаемые связями бесконечно близкие положения (конфигурации) системы для данного фиксированного момента времени.

Рассмотрим две совокупности возможных перемещений с одним и тем же значением величины  $\Delta t$ . Согласно разложению по Тейлору,

$$\Delta_1 \mathbf{r}_{\nu} = \mathbf{v}_{\nu_1}^* \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{\nu_1}^* (\Delta t)^2 + \dots,$$

$$\Delta_2 \mathbf{r}_{\nu} = \mathbf{v}_{\nu_2}^* \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{\nu_2}^* (\Delta t)^2 + \dots,$$

и рассмотрим их разность

$$\Delta_1 \mathbf{r}_{\nu} - \Delta_2 \mathbf{r}_{\nu} = (\mathbf{v}_{\nu_1}^* \Delta t - \mathbf{v}_{\nu_2}^* \Delta t) + \left( \frac{1}{2} \mathbf{w}_{\nu_1}^* (\Delta t)^2 - \frac{1}{2} \mathbf{w}_{\nu_2}^* (\Delta t)^2 \right) + \dots$$

## 5 Основные теоремы динамики

### 5.1 Аксиоматика

...

### 5.2 Основные теоремы динамики

Пусть  $\mathbf{Q}$  – количество движения,  $\mathbf{K}_A$  – кинематический момент относительно полюса  $A$ . Далее,  $T$  – механическая энергия,  $\delta A^{\text{всех}} = \sum (\mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i)$  и  $-d\Pi = \delta A$ , где  $\Pi$  – потенциальная энергия.

Величина	Thr об изменение	Первые интегралы системы
$\mathbf{Q} = \sum m_i \mathbf{v}_i$	$d\mathbf{Q}/dt = \mathbf{R}^{\text{внеш}}$	$\mathbf{Q} = \text{const}$
$\mathbf{K}_A = \sum \mathbf{r}_{A_i} \times (m_i \mathbf{v}_i)$	$d\mathbf{K}_A/dt = \mathbf{M}_A^{\text{внеш}} + \mathbf{Q} \times \mathbf{v}_A$	$\mathbf{K}_A = \text{const}$
$T = \sum m_i v_i^2 / 2$	$dT = \delta A^{\text{всех}}$	$T + \Pi = \text{const}$

### 5.3 Вычисление динамических величин

Формула переноса полюса

$$\mathbf{R}_A = \sum (\overrightarrow{AB} + \mathbf{r}_{Bi}) \times m_i \mathbf{v}_i = \overrightarrow{AB} \times \sum m_i \mathbf{v}_i + \sum \mathbf{r}_{Bi} \times m_i \mathbf{v}_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{K}_A = \mathbf{K}_B + \mathbf{Q} \times \overrightarrow{BA}}$$

## Теорема Кёнига

Выберем некоторую СК (книгову СК), движущуюся поступательно.

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + T_{c\xi\eta\zeta}^r.$$

В частности, для твёрдого тела

$$T_{c\xi\eta\zeta}^r = \sum \frac{1}{2}m_i(v_i^r)^2 = \sum \frac{1}{2}m_i\omega^2\rho_{Ci}^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i\rho_{Ci}^2 = \frac{1}{2}J_\omega\omega^2.$$

Тогда, для твёрдого тела,

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_\omega\omega^2$$

## 6 Основные теоремы динамики в неИСО

Знаем, что

$$\mathbf{w}_i^a = \mathbf{w}_i^e + \mathbf{w}_i^c + \mathbf{w}_i^r.$$

Подставляя это во II закон Ньютона получим, что

$$m_i\mathbf{w}_i^r = \mathbf{F}_i - m_i\mathbf{w}_i^e - m_i\mathbf{w}_i^c. \quad (6.1)$$

Ниже введём некоторые определения, а именно  $\mathbf{J}_i^e$  – *переносная сила инерции*,  $\mathbf{J}_i^c$  – *кориолисова сила инерции*. Далее  $\mathbf{w}_0$  – ускорение центра масс.

Величина	Thr об изменение	Определения
$\mathbf{Q}$	$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{\text{внеш}} + \mathbf{J}^e + \mathbf{J}^c$	$\mathbf{J}^e = -\sum m_i\mathbf{w}_i^e = -m_0\mathbf{w}_0^e$ $\mathbf{J}^c = -\sum m_i\mathbf{w}_i^c = -m_0\mathbf{w}_0^c$
$\mathbf{K}_A$	$\dot{\mathbf{K}}_A = \mathbf{M}_A^{\text{внеш}} + \mathbf{M}_A^e + \mathbf{M}_A^c + \mathbf{Q}^r \times \mathbf{v}_A^r$	$\mathbf{M}_A^c = -\sum \mathbf{r}_{Ai} \times m_i\mathbf{w}_i^c$ $\mathbf{M}_A^e = -\sum \mathbf{r}_{Ai} \times m_i\mathbf{w}_i^e$
$T$	$dT = \delta A^{\text{вс},r} + \delta A^{e,r}$	$\delta A^{\text{вс},r} = \sum F_i d\mathbf{r}_i^r$ $\delta A^{e,r} = \sum -m_i\mathbf{w}_i^e \cdot d\mathbf{r}_i^r$

Для кинетической энергии в изменение нет слагаемого от кориолисовых сил, в силу

$$\delta A_i^{c,r} = -m_i(2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0^r) \cdot (\mathbf{v}_0^r dt) \equiv 0.$$

## 7 Движение точки в центральном поле

### 7.1 Уравнение Бине

**Def 7.1.** Полем центральных сил называется поле, в котором сила действующая на точку такая, что

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Логично перейти к  $(r, \varphi, \theta)$ . Тогда

$$m\mathbf{w} = F(r)\frac{\mathbf{r}}{r} \Rightarrow \begin{cases} m\mathbf{w}_r = F(r) \\ m\mathbf{w}_\varphi = 0 \\ m\mathbf{w}_\theta = 0 \end{cases}$$

Теперь, получится, знаем, что

$$\mathbf{w}_\theta = -\ddot{r}\theta + 2\dot{r}\dot{\theta} + r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = 0,$$

и, учитывая, что  $\theta(0) = \pi/2$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$ , тогда  $\theta(t) = \pi/2$ , это с точки зрения диффузов. А с точки зрения физики кинетический момент сохраняется, то есть

$$\mathbf{K}_0 = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{const.} \Rightarrow \mathbf{r}, \mathbf{v} \in \text{постоянной плоскости.}$$

Тогда  $\theta$  мы можем просто выбросить.



Приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F(r) \\ m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F(r) \\ r^2\dot{\varphi} = \frac{K_0}{m} = \text{const.} \end{cases} \quad (7.1)$$

Это, собственно, соответствует закону Кеплера о сохранение секториальной скорости.

Первое уравнение как-то не очень, перейдём от  $d/dt$  к  $d/d\varphi$ . Тогда  $r(t) \rightarrow u(\varphi) = \frac{1}{r}$  – переменная Бине.

$$\dot{r} = \frac{d(1/u)}{dt} = -cu',$$

а для второй производной

$$\ddot{r} = -c^2 u^2 u''.$$

Тогда уравнение перепишем, как

$$-c^2 u^2 u'' - c^2 u^3 = \frac{F(u)}{m},$$

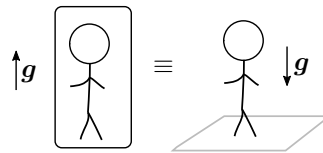
получая диффур вида

$$\boxed{u'' + u = \frac{-F(u)}{mc^2 u^2}} \quad \text{– уравнение Бине.} \quad (7.2)$$

Так мы свели всё к гармоническому осцилятору.

## 7.2 Метрика Шварцшильда

Заметим (Эйнштейн заметил), что



тогда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) d\tau^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 - (r \sin \theta)^2 d\varphi^2 - r^2 d\theta^2.$$

Здесь 4 независимых переменных  $(\tau, r, \varphi, \theta)$ , где три из сферических координат, а  $\tau$  – физическое время.

Также введен радиус Шварцшильда  $a = 2GM$ .

Движение точек рассматриваем, как движение по геодезическим, то есть  $\mathbf{w}_i = 0$ , где  $i \in \{\tau, r, \varphi, \theta\}$ , и положим  $v^2 = 1$ . Из раннее полученного,  $\theta(t) = \pi/2$ , то есть в некотором смысле движение плоское.

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{\tau}^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 = 1 \quad (7.3)$$

$$\mathbf{w}_\tau = \frac{d}{dt} \frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{\tau}} - \underbrace{\frac{\partial(v^2/2)}{\partial \tau}}_0 = \frac{d}{dt} \left[ \left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{\tau} \right] = 0 \quad (7.4)$$

$$\mathbf{w}_\varphi = -\frac{d}{dt} [r^2 \dot{\varphi}] = 0 \quad (7.5)$$

Тогда у нас есть первый интеграл

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{\tau} = \mathcal{D}. \quad (7.6)$$

И другой первый интеграл

$$r^2 \dot{\varphi} = \mathcal{C}. \quad (7.7)$$

Подставляя, получим, что

$$\mathcal{D}^2 - \mathcal{C}^2 u'^2 = 1 - au + \mathcal{C}^2 u^3 (1 - au). \quad (7.8)$$

Применяя  $d/d\varphi$  и полагая  $\mathcal{C} = c$ , получим

$$u'' + u = \frac{3}{2} au^2 + \frac{a}{2c^2} = -\frac{F}{mc^2 u^2}. \quad (7.9)$$

Получается, что мы можем или говорить про движение по геодезическим в метрике Шварцшильда, или движение в центральном поле с силой

$$F = -m \left( \frac{3}{2} ac^2 u^4 + \frac{a}{2} u^2 \right). \quad (7.10)$$

## 8 Элементы механики сплошных сред (МСС)

### 8.1 Переменные Лагранжа и Эйлера

Пусть каждой точке среды соответствует  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ , собственно  $(\xi, t)$  – *лагранжевы переменные*. Закон движения среды в таком случае это

$$\mathbf{r}(\xi, t), \quad (8.1)$$

скорость же

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}(\xi, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{v}(\xi, t)}{\partial t},$$

и так далее.

Альтернативно можем задать  $(x, t)$  – эйлерово описание. Тогда

$$\mathbf{v}(x, t), \mathbf{w}(x, t) \quad \text{– поля скоростей и ускорений.}$$

В частности, представляя движение по шоссе, полоса 1,2,3 и участок трассы – эйлерово описание среды. Если же мы будем следить за каждой машиной, то это будет лагранжево описание.

#### Задача 1

Пусть

$$v_1 = \frac{-x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad v_2 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Найти  $\mathbf{r}(\xi, t)$ . Легко получить, что

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = 1.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \alpha), \quad x_2 = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \alpha).$$

Переменные запишутся как

$$\xi_1 = \frac{\cos \alpha}{\omega}, \quad \xi_2 = \frac{\sin \alpha}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1/2}, \alpha = \arcsin(\omega \xi_2).$$

Получается, что

$$\mathbf{r}(\xi, t) = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \alpha) \\ \sin(\omega t + \alpha) \end{pmatrix}.$$

### 8.2 Деформации

Пусть

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r},$$

где  $\mathbf{u}$  – вектор деформации. Тогда

$$dx'_i = dx_i + du_i = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k.$$

Введём некоторый  $ds'$

$$(ds')^2 = dx'_i dx'_i; \quad ds^2 = dx_i dx_i.$$

Подставляя, получим, что

$$(ds')^2 = ds^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \right) \approx ds^2 + 2\varepsilon_{ik} dx_i dx_k,$$

где  $\varepsilon_{ik}$  – *тензор малых деформаций*:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right),$$

который в главных осях диагонален.

Тогда

$$ds' = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{ii}} dx_i.$$

В общем смысл в том, что

$$\frac{dx'_i - dx_i}{dx_i} \approx 1 + \frac{1}{2}(2\varepsilon_{ii}) - 1 = \varepsilon_{ii}.$$

Или

$$\frac{dV' - dV}{dV} = \text{tr } \varepsilon = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div } \mathbf{u}.$$

Тогда, в частности,

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad - \quad \text{несжимаемая среда.}$$

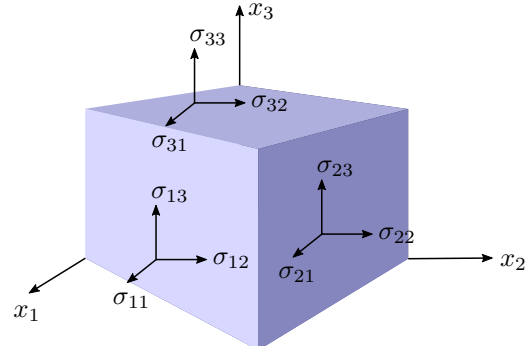
### 8.3 Напряжение

Ну, собственно,

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}, \quad \int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x} dV = \oint \sigma_{ik} dA_k.$$

Кстати,

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}. \quad (8.2)$$



### 8.4 Обобщенный закон Гука

Пусть  $E$  – модуль Юнга,  $\mu$  – коэффициент Пуассона. Тогда

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\mu}{E}\sigma_{11}.$$

Перепишем это в виду

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\mu}{E}\sigma_{22} - \frac{\mu}{E}\sigma_{33} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{11} - \frac{\mu}{E}\text{tr } \sigma.$$

Или, в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \frac{1+\mu}{E} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} - \frac{\mu}{E} \text{tr } \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В тензорном виде

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{ik} - \frac{\mu}{E}\delta_{ik} \text{tr } \sigma.$$

Выразим  $\varepsilon$ :

$$\text{tr } \varepsilon = \frac{1+\mu}{E} \text{tr } \sigma - \frac{3\mu}{E} \text{tr } \sigma \quad \Rightarrow \quad \text{tr } \sigma = \frac{E}{1-2\mu} \text{tr } \varepsilon.$$

Так и получаем *обобщенный закон Гука*:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\mu} \left[ \varepsilon_{ik} + \frac{\mu}{1-2\mu} \delta_{ik} \text{tr } \varepsilon \right] \quad (8.3)$$

#### Задача: самосжимающийся шар

Запишем

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = -f_i.$$

Тогда, после некоторых преобразований, получим, что

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{E}{1+\mu} \left[ \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{2(1-2\mu)} \text{grad div } \mathbf{u} \right].$$

Вспомним, что

$$\Delta \mathbf{u} = \text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u} = \text{grad div } \mathbf{u}.$$

Перейдём к уравнению

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{r} = kr. \right) \quad (8.4)$$

Верно, что

$$\frac{d(r^2 u)}{dr} = \frac{kr^4}{2} + c_1 r^2.$$

Логично, что на границе  $\sigma_{11} = 0$ . То есть

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\mu} \left[ \varepsilon_{11} + \frac{\mu}{1-2\mu} \text{tr} \varepsilon \right] = 0.$$

Но  $\varepsilon_{rr} = du/dr = \varepsilon_{11}$ ,  $\text{tr} \varepsilon = \text{div} \mathbf{u}$ , из этого можем найти  $c_1$ .

## 9 Задачи с семинара

### 9.1 Задачи с II семинара

**О геодезических на гиперboloиде.**

Уравнение гиперboloида  $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$ .

**Def 9.1.** *Геодезическая* – линия в пространстве, по которой движется точка при нулевых компонентах ускорения в локальном базисе, задающем касательное пространство.

$$w_i = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{g}_i) = 0.$$

Пусть  $q = \{\varphi, h = z\}$ , тогда  $z^y + y^2 = 1 + h^2$ . Тогда

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x = \sqrt{1+h^2} \cos \varphi \\ y = \sqrt{1+h^2} \sin \varphi \\ z = h \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \sqrt{1+h^2} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_h = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial h} = \begin{pmatrix} h/\sqrt{1+h^2} \cdot \cos \varphi \\ h/\sqrt{1+h^2} \cdot \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Метрический тензор

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1+h^2 & 0 \\ 0 & \frac{1+2h^2}{1+h^2} \end{pmatrix}.$$

Найдём  $v$ :

$$v^2 = g_{ji} v^i v^j = (1+h^2) \dot{\varphi}^2 + \frac{1+2h^2}{1+h^2} \dot{h}^2.$$

Теперь можно домножить на  $dt^2$  и найти коэффициенты, с которыми учитываем расстояния. То есть

$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j \quad (9.1)$$

Для ускорений:

$$\begin{aligned} w_\varphi &= \frac{d}{dt} [(1+h^2)\dot{\varphi}] = 0; \\ w_h &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1+2h^2}{1+h^2} \dot{h} \right] - h\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{1+2h^2}{1+h^2} \right) \frac{\dot{h}^2}{2} = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\left. \begin{matrix} w_\varphi = 0 \\ w_h = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow w_\tau = 0 \Rightarrow v^2 = \text{const}, \quad \square v^2 = 1.$$

Ну, тогда перейдём к

$$\left. \begin{matrix} w_\varphi = 0 \\ w_h = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} w_\varphi = 0 \\ v^2 = 1 \end{matrix} \right\} \text{ т.к. } w_\tau v = 0 = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) = w_i v^i = (w_\varphi \dot{\varphi} + w_h \dot{h}) = w_h \dot{h} \Rightarrow \begin{cases} \dot{h} = 0 \\ w_h = 0 \end{cases}$$

Так перейдём к уравнению

$$\frac{c^2}{1+h^2} + \frac{1+2h^2}{1+h^2} \dot{h}^2 = 1 \Rightarrow \dot{h}^2 = \frac{1+h^2-c^2}{1+2h^2}.$$

И сменим параметризацию  $h(t) \rightarrow h(\varphi)$ .

$$\frac{dh}{d\varphi} = \frac{\dot{h}}{\dot{\varphi}} = \frac{1+h^2}{c} \sqrt{\frac{1+h^2-c^2}{1+2h^2}}.$$

Получили двухпараметрическое<sup>5</sup> семейство геодезических.

Посмотрим на частные случаи. Например,  $h = h_0$ . Тогда<sup>6</sup>  $w_h = 0 \Leftrightarrow h_0 = 0, c = \pm 1$ . Или,  $c = 1/\sqrt{2} \Rightarrow dh/d\varphi = 1 + h^2$ . Тогда  $h = \tan \varphi$ .

## 9.2 Задачи с III семинара

### Задача 4.10

Диск катится без проскальзывания.

$$\underbrace{\mathbf{v}_B}_{=0} = \underbrace{\mathbf{v}_O}_{=0} + \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{OB} \Rightarrow \boldsymbol{\Omega} \parallel \overrightarrow{OB}.$$

Также

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_C &= \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{BC} \\ \mathbf{v}_C &= \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OC}. \end{aligned}$$

## 9.3 Задачи с IV семинара

### Задача 2.12

Знаем, что  $\omega_1, \omega_2 = \text{const}$ . Во-первых свяжем подвижную систему координат с пушкой: « $\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ » Во-вторых,

$$\mathbf{v}^a = \mathbf{v}^e + \mathbf{v}^r, \quad \mathbf{v}^r = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}$$

. Тогда

$$\mathbf{v}^e = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \overrightarrow{O'M} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ l \cos \alpha \\ l \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Теперь про ускорения,

$$\mathbf{w}^a = \mathbf{w}^e + \mathbf{w}^r + \mathbf{w}^c.$$

В частности верно, что

$$\mathbf{w}^c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^r = 2 \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^r = \mathbf{w}_O = \begin{pmatrix} 0 \\ w_0 \cos \alpha \\ w_0 \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Для углового ускорения (можно ввести новую подвижную систему координат или ...), верно что

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1,$$

а для переносного ускорения, по формуле Ривальса,

$$\mathbf{w}^e = \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{O'M} + (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times ((\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \overrightarrow{O'M}).$$

### Другая задача

Введём систему координат, связанную со стержнем  $\eta\xi$ . Верно, что

$$\mathbf{v}_{M'}^a = \mathbf{v}_{M'}^e + \mathbf{v}_{M'}^r, \quad \text{где } \mathbf{v}_{M'}^e = \mathbf{v}_{M'}, \quad \mathbf{v}_{M'}^r = \dot{\xi} \mathbf{e}_\xi, \quad \mathbf{v}_{M'}^a = 0.$$

Но  $\mathbf{v}_M \parallel \mathbf{e}_\xi \parallel AB$ .

### Задача 3.29

Найдём ускорение точки  $M$ ,

$$\mathbf{w}_M = \mathbf{w}_O + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{OM}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OM}) = \mathbf{w}_O - \omega^2 \overrightarrow{OM}.$$

Введём систему координат, связанную с диском  $\eta\xi$ . Верно, что

$$\mathbf{w}_{O'}^a = \mathbf{w}_{O'}^e + \mathbf{w}_{O'}^r + \cancel{\mathbf{w}_{O'}^c} \Rightarrow 0 = \mathbf{w}_O + \omega^2 R \mathbf{e}_\eta$$

<sup>5</sup>Потому что константа интегрирования.

<sup>6</sup>Проверить!

Собирая всё вместе, получим

$$\mathbf{w}_M = -\omega^2 R \mathbf{e}_\eta - \omega^2 |OM| \mathbf{e}_\xi$$

## 9.4 Задачи с V семинара

### Задача 6.28

Допустим диск катится по шероховатой поверхности.

$$\begin{cases} m\mathbf{W}_c = \mathbf{F} + \mathbf{T} + m\mathbf{g} + \mathbf{N} \\ \frac{d\mathbf{K}_c}{dt} = \overrightarrow{CB} \times \mathbf{F} + \overrightarrow{CA} \cdot \mathbf{T} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mW_c = F + T \\ N = mg \\ \frac{mR^2}{2}\varepsilon = FR - TR. \end{cases}$$

Далее,

$$\mathbf{K}_C = \sum \mathbf{r}_{ci} \times M_i(\mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{ci}) = \left( \sum \mathbf{r}_{ci} m_i \right) \times \mathbf{v}_c + \sum m_i \mathbf{r}_{ci} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{ci}) = \boldsymbol{\omega} \sum m_i r_{ci}^2 = \underbrace{\frac{mR^2}{2}}_{J_c} \boldsymbol{\omega}.$$

Выпишем закон сухого трения/закон Кулона в плоском случае

$$\begin{cases} \mathbf{T} = -\mu N \frac{\mathbf{v}_A}{v_A}, & v_A \neq 0, \\ |\mathbf{T}| \leq \mu N, & v_A = 0 \end{cases}$$

Пусть проскальзывания нет.

$$\begin{aligned} v_c = \omega R &\Rightarrow w_c = \varepsilon R. \\ \frac{3}{2}mR\varepsilon = 2F &\Rightarrow \varepsilon = \frac{4F}{2mR}; \quad w_c = \frac{4F}{2m} \\ \text{а) } F = \frac{1}{3}mg, \quad T = mw_c - F = \frac{4}{3}F - F = \frac{1}{9}mg < \mu N \\ \text{б) } F = mg, \quad T = \frac{1}{3}mg > \mu N, \text{ не ок.} \end{aligned}$$

Значит проскальзывание есть, то есть возьмём  $T = \pm mg/8$ . Тогда

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} w_c t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (w_c + \varepsilon R)t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} > 0.$$

Подставляя, получим

$$w_c = \frac{7}{8}g, \quad \varepsilon = \frac{9g}{4R}.$$

### Задача 7.4

Найдём  $T = T_{\text{ст}} + T_{\text{д}} + T_{\text{о}}$ .

$$\begin{aligned} T_{\text{ст}} &= \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \omega^2, \\ T_{\text{д}} &= \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{J_C \omega_{\text{д}}^2}{2}, \quad \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_K + \omega_{\text{д}} \times \frac{\overrightarrow{KC}}{r} \Rightarrow T_{\text{д}} = \frac{3}{4} m \omega^2 l^2. \end{aligned}$$

## 9.5 Задачи с VII семинара

### 8.27

Потенциальная энергия частицы

$$\Pi(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2},$$

где  $\alpha, \beta > 0$ . Найдём силу, как

$$\mathbf{F} = -\text{grad } \Pi \Rightarrow F = -\frac{d\Pi}{dr} = -\frac{\alpha}{r^2} + 2\frac{\beta}{r^3} = -\alpha u^2 + 2\beta u^3.$$

Уравнение движения в центральном поле запишется, как

$$u'' + \underbrace{\left(1 + \frac{2\beta}{mc^2}\right)}_{\omega^2} u = \underbrace{\frac{\alpha}{mc^2}}_a. \quad \Rightarrow \quad u'' + \omega^2 u = a.$$

Тогда

$$u = u_{\text{общ}} + u_{\text{частн}} = A \cos(\omega\varphi + \psi) + \frac{a}{\omega^2}.$$

Наконец, выражая  $r$ , получим

$$r = \left( \frac{a}{\omega^2} + A \cos(\omega\varphi + \psi) \right)^{-1} = \left/ \begin{matrix} p = \omega^2/a \\ e = A\omega^2/a \end{matrix} \right/ = \frac{p}{1 + e \cos(\omega\varphi + \psi)} = \frac{p}{1 + e \cos(\omega\varphi)}$$