Задание по курсу «Аналитическая Механика I»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *2 декабря 2020 г.*

Содержание

1 Кинематика

1.1 Криволинейные координаты

T1.

Найдём ковариантные и контрвариантные компоненты $\boldsymbol{a}$. Учитывая, что тензор однозначно задаётся координатами в некотором базисе:

$$\exists \boldsymbol{b} = a^i \boldsymbol{g}_i \ \Big|_{\cdot \boldsymbol{g}^j} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{g}^j) = a^i (\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j) = a^i \delta_i^j = a^j \quad \Rightarrow \quad a^i \boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{a}.$$

Аналогично

$$\exists \boldsymbol{b} = a_i \boldsymbol{g}^i \ \Big|_{\cdot \boldsymbol{g}_j} \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{g}_j) = a_i (\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}_j) = a_i \delta_j^i = a_j \quad \Rightarrow \quad a_i \boldsymbol{g}^i = \boldsymbol{a}.$$

Теперь научимся жонглировать индексами.

$$\exists \boldsymbol{b}^i = g^{ij} \boldsymbol{g}_j \ \Big|_{\cdot \boldsymbol{g}^n} \quad \Rightarrow \quad g^{ij} \boldsymbol{g}_g \boldsymbol{g}^n = g^{ij} \delta_j^n = g^{in} = (\boldsymbol{k}^i \cdot \boldsymbol{g}^n) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g}^i = g^{ij} \boldsymbol{g}_j.$$

Для $g_{ij} \boldsymbol{g}^j = \boldsymbol{g}_i$ доказательство аналогично. Наконец,

$$\delta_i^j = (\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j) = \left(g_{ik} \boldsymbol{g}^k \cdot g^{jn} \boldsymbol{g}_n \right) = g_{ik} g^{jn} \delta_n^k = g_{ik} g^{kj}.$$

Теперь, для жонглирования над координатой:

$$\exists \boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{g}^i \ \Big|_{\cdot \boldsymbol{g}^j} \quad \Rightarrow \quad a^j = g^{ij} a_i.$$

T2.

Найдём локальный базис/матрицу перехода из ПДСК для $\boldsymbol{r}(\sigma, \tau, z)$:

$$\boldsymbol{r}(\sigma, \tau, z) = \begin{pmatrix} \sigma\tau \\ (\tau^2 - \sigma^2)/2 \\ z \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \tau & \sigma & 0 \\ -\sigma & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad g_{ij} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J} = \operatorname{diag}(\tau^2 + \sigma^2, \tau^2 + \sigma^2, 1).$$

Зафиксировав значения всех кроме одной переменных найдём координатные линии, затем построим координатные поверхности (см. рис. 1).

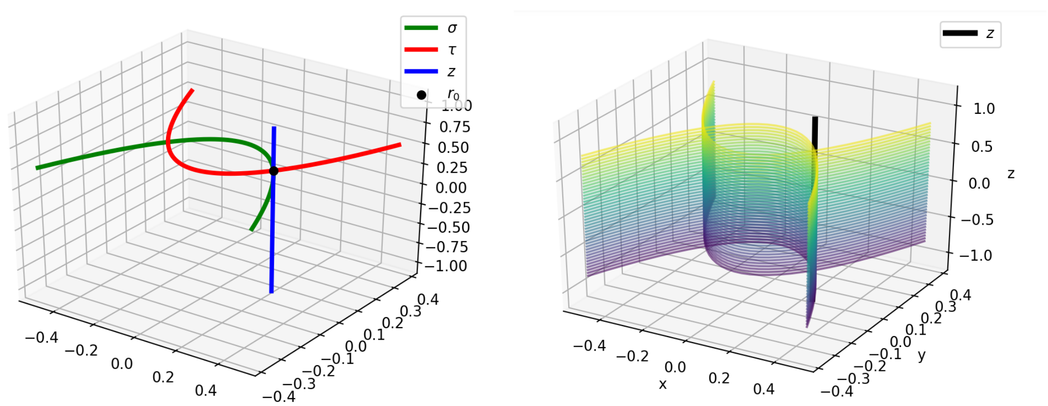


Рис. 1: Координатные линии и координатные поверхности.

T3.

Найдём метрический тензор g_{ij} для криволинейных координат (r, φ), задающих положение точки на параболоиде $z = a(x^2 - y^2)$, при $a = \mathrm{const}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$.

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ ar^2 \cos(2\varphi) \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} \quad \Rightarrow \quad g_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 2ar\cos(2\varphi) \end{pmatrix}; \quad g_\varphi = \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ -2ar^2 \sin(2\varphi) \end{pmatrix}$$

Тогда метрический тензор:

$$\begin{aligned}
&g_{ig} = (\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j);\\
&g_{11} = 4a^2r^2\cos^2(2\varphi) + \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi);\\
&g_{12} = g_{21} = -2a^2r^3\sin(4\varphi);\\
&g_{22} = 4a^2r^4\sin^2(2\varphi) + r^2\sin^2(\varphi) + r^2\cos^2(\varphi).
\end{aligned}$$

Объединяя,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 16a^2r^2\sin^4(\varphi) - 16a^2r^2\sin^2(\varphi) + 4a^2r^2 + 1 & -2a^2r^3\sin(4\varphi) \\ -2a^2r^3\sin(4\varphi) & -16a^2r^4\sin^4(\varphi) + 16a^2r^4\sin^2(\varphi) + r^2 \end{pmatrix}.$$

Или,

$$g^{ij} = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-16a^2r^2\sin^4(\varphi)+16a^2r^2\sin^2(\varphi)+1}{4a^2r^2+1} & \frac{2a^2r\sin(4\varphi)}{4a^2r^2+1} \\ \frac{2a^2r\sin(4\varphi)}{4a^2r^2+1} & \frac{16a^2r^2\sin^4(\varphi)-16a^2r^2\sin^2(\varphi)+4a^2r^2+1}{4a^2r^4+r^2} \end{pmatrix}.$$

Соответсвенно,

$$\boldsymbol{g}^r = g^{rr}g_r + g^{r\varphi}g_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\left(8a^2r^2\sin^2(\varphi)+1\right)\cos(\varphi)}{4a^2r^2+1} \\ \frac{\left(8a^2r^2\cos^2(\varphi)+1\right)\sin(\varphi)}{4a^2r^2+1} \\ \frac{2ar\cos(2\varphi)}{4a^2r^2+1} \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{g}^\varphi == g^{\varphi r}g_r + g^{\varphi\varphi}g_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\left(-8a^2r^2\sin^2(\varphi)+4a^2r^2-1\right)\sin(\varphi)}{r(4a^2r^2+1)} \\ \frac{\left(8a^2r^2\cos^2(\varphi)-4a^2r^2+1\right)\cos(\varphi)}{r(4a^2r^2+1)} \\ -\frac{2a\sin(2\varphi)}{4a^2r^2+1} \end{pmatrix}.$$

На всякий случай проверим в $SymPy$, что

$$\boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}^r = 1; \qquad \boldsymbol{g}_\varphi\boldsymbol{g}^\varphi = 1; \qquad \boldsymbol{g}_r\boldsymbol{g}^\varphi = 0; \qquad g^{ij}g_{ji} = \delta_i^j.$$

Вот.

T4.

Пусть $R = x^2 + y^2 + z^2$, найдём частную производную $\partial R/\partial x$тогда

1. $R(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2.$ $\qquad \partial R/\partial x = 2x.$
2. $R(x,r,z) = r^2 + z^2.$ $\qquad \partial R/\partial x = 0.$
3. $R(x,y) = x^2 + y^2 + (x^2 - y^2)^2.$ $\qquad \partial R/\partial x = 2x + 4x(x^2 - y^2).$
4. $R(x,r) = r^2 + (x^2 - y^2)^2 = r^2 + (2x^2 - r^2)^2.$ $\qquad \partial R/\partial x = 16x^3 - 8xr^2.$
5. $R(x,z) = x^2 + (x^2 - z) + z^2 = 2x^2 - z + z^2.$ $\qquad \partial R/\partial x = 4x.$

T5.

Для первого выражения, обозначим $(\boldsymbol{g}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{g}^j}{\partial q^k}) \overset{\text{def}}{=} \Xi_{ik}^j$.

$$\Gamma_{ijk} = \left(\boldsymbol{g}_i, \frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial q^k}\right) = \left(\boldsymbol{g}_i, \frac{\partial(g_{jn}\boldsymbol{g}^n)}{\partial q^k}\right) = g_{jn}\underbrace{\left(\boldsymbol{g}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{g}^n}{\partial q^k}\right)}_{\Xi_{ik}^n} + \frac{\partial g_{jn}}{\partial q^k}\underbrace{(\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^n)}_{\delta_i^n} = g_{jn}\Xi_{ik}^n + \underbrace{\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}}_{\partial g_{jn}/\partial q^k}.$$

Домножив обе части на g^{jm}, получим

$$\Xi_{ik}^n g_{nj}g^{jm} = \Xi_{ik}^n\delta_n^m = \Xi_{ik}^m = \boxed{\left(\boldsymbol{g}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{g}^m}{\partial q^k}\right) = -\Gamma_{jik}g^{jm}}$$

Для второго выражения рассмотрим значение квадрата произведения при фиксированных $i \neq j \neq k$:

$$\underbrace{(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k)^2}_{\det g_{mn}} \cdot \underbrace{(\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}^k)^2}_{\det g^{nk}} = \det g_{mn}g^{np} = \det \delta_m^p = 1. \qquad \Rightarrow \qquad (\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k) \cdot (\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}^j, \boldsymbol{g}^k) = 3! = 6.$$

Важно заметить, что -1 не является возможным значением произведения таких смешанных произведений, т.к. левой тройке в первом сомножители будет соответствовать тройка во втором сомножителе.

1.2 Кинематика точки

1.12*

Параметризуем движение точки некоторым $\varphi(t)$:

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -a\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y} = b\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -a\dot{\varphi}^2\cos\varphi - a\ddot{\varphi}\sin\varphi = 0 \\ \ddot{y} = -b\dot{\varphi}^2\sin\varphi + b\ddot{\varphi}\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}\,\mathrm{tg}\,\varphi = 0. \tag{1.1}$$

Решением этого уравнения является

$$\varphi(t) = \arccos(c_1 + c_2 t).$$

С учётом начальных условий получим ($x(0) = 0$, $\dot{x} =$), что

$$\dot{\varphi}c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{v_0}{a}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \arccos(v_0 t/a).$$

Немного упростим выражения для $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = -\frac{v_0}{a\sin\varphi}, \quad \ddot{\varphi} = -\frac{\dot{\varphi}^2}{\mathrm{tg}\,\varphi},$$

теперь найдём $\ddot{y}(\sin\varphi)$:

$$\ddot{y} = -b\dot{f}\sin\varphi + v\ddot{\varphi}\cos\varphi = -b\frac{v_0^2}{a^2\sin^2\varphi}\sin\varphi - b\left(\frac{v_0}{a}\right)^2\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi} = -\frac{b}{a^2}v_0^2\left(\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{\sin^3\varphi}\right) = -\frac{b}{a^2}v_0^2\frac{1}{\sin^3\varphi}.$$

Подставив $y = b\sin\varphi$, найдём

$$\ddot{y}\left(y = \frac{b}{2}\right) = -\frac{8b}{a^2}v_0^2.$$

1.19

Знаем, что в полярных координатах

$$\begin{cases} r = \dfrac{p}{1 + e\cos\varphi} \\ r^2\dot{\varphi} = c = \mathrm{const} \end{cases} \quad \text{в полярных координатах} \quad \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}. \tag{1.2}$$

Вспомним, что

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = \frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right).$$

Найдём $\ddot{r}$:

$$r + er\cos\varphi = p \overset{d/dt}{\Rightarrow} \dot{r} + e\dot{r}\cos\varphi - er\dot{\varphi}\sin\varphi = 0 \overset{d/dt}{\Rightarrow} \ddot{r}(1 + e\cos\varphi) - e\dot{r}\sin\varphi\left(\dot{\varphi} - \frac{c}{r^2}\right) - \frac{ec}{r}\frac{c}{r^2}\cos\varphi = 0$$

Выразим и подставим $\dot{\varphi}$ и получим

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}, \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = \frac{c^2}{r^2 p}\left(\frac{p}{r} - 1\right), \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_r = -\frac{c^2}{pr^2}, \quad w_\varphi = 0.}$$

1.37(в)

Найдём скорость точки и проекции её ускорения на касательные к координатным линиям для координат параболического цилиндра σ, τ, z. Для начала найдём координатные векторы и метрический тензор:

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\tau \\ \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2) \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g}_\sigma = \begin{pmatrix} \tau \\ -\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{g}_\tau = \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{g}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} \tau^2 + \sigma^2 & 0 \\ 0 & \tau^2 + \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$v^2 = \dot{\sigma}^2(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{\tau}^2(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{z}^2, \quad v = \sqrt{(\dot{\tau}^2 + \dot{\sigma}^2)(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{z}^2}$$

Для i-ой ковариантной координаты ускорения верно, что

$$w_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial(v^2/2)}{\partial\dot{q}^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i}. \tag{1.3}$$

С учётом коэффициенты Ламе ($H_\tau = H_\sigma = \sqrt{\sigma^2+\tau^2}, H_z = 1$), найдём проекции

$$\begin{aligned}
w_\tau &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\left(\ddot{\tau}(\tau^2+\sigma^2) + \dot{\tau}^2\tau + 2\dot{\sigma}\dot{\tau}\sigma - \tau\dot{\sigma}^2\right);\\
w_\sigma &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\left(\ddot{\sigma}(\tau^2+\sigma^2) + \dot{\sigma}^2\sigma + 2\dot{\tau}\dot{\sigma}\tau - \sigma\dot{\tau}^2\right);\\
w_z &= \ddot{z}.
\end{aligned}$$

1.45

Выразим орты сопровождающий трехгранника ($\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$) через $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$, с учётом $w \times \boldsymbol{v} \neq 0$, $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{v} > 0$. Так как $\boldsymbol{v} \nparallel \boldsymbol{w}$, то

$$\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|}.$$

Выразим $\boldsymbol{\tau}$.

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}, \qquad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = v\dot{\tau}, \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\tau} = \frac{\boldsymbol{v}}{v}.$$

И найдём $\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\tau}]$, раскрывая двойное векторное произведение (формула Лагранжа), получим

$$\boldsymbol{n} = \left[\frac{\boldsymbol{v}}{v}\times\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}}{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|}\right] = \frac{(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v} - v^2\boldsymbol{w}}{v|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}|}.$$

T6.

Рассмотрим движение точки в цилиндрических координатах:

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\\ z\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad g_{ij} = \operatorname{diag}(1, r^2, 1)$$

Для начала выразим ковариантные координаты ускорений:

$$w_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial(v^2/2)}{\partial q\delta^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i} \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{aligned} w_r &= \ddot{r} - r\dot{f}^2\\ w_\varphi &= \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\\ w_z &= \ddot{z}.\end{aligned}\right.$$

По условию хотим, чтобы $w_\varphi = w_z = 0, r = \text{const}$. Проинтегрировав дважды по времени получим систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi = c_1 t + c_2;\\ z = c_3 t + c_4,\end{cases}$$

Где c_1, c_2, c_3, c_4 –некоторые константы. Построим полученные траектории положив $c_2 = c_4 = 0$ и отмасштабировав к $c_1 = 1$ (см. рис. (2)).

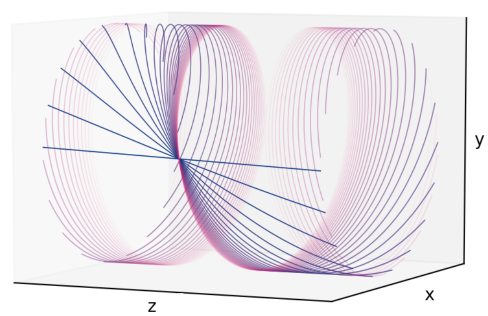


Рис. 2: Возможные геодезические цилиндра.

T7.

Найдём $\partial v_k/\partial v_j$, при $v_k = v_k(q^i, v^i)$. Далее будем пользоваться тем, что $g_{ig} = g_{ig}(q^i)$.

$$v_k(q^i, v^i) = g_{ki}v^i \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial v_k}{\partial v^j} = g_{ki}\frac{\partial v^i}{\partial v^j} = g_{ki}\delta^i_j = g_{kj}.$$

Теперь найдём $\partial v_k/\partial q^j$, при $v_k = v_k(q^i, v^i)$.

$$\frac{\partial v_k(q^i, v^i)}{\partial q^j} = v^i\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j}\right) = v^i\left(\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial q^j}, \boldsymbol{g}_i\right) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial q^j}, \boldsymbol{g}_k\right)\right) = v^i\left(\Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji}\right).$$

Теперь найдём $\partial v_k/\partial q^j$, при $v_k = v_k(q^i, v_i)$. Но тут так как функция выражается через саму себя, то при частном дифференцировании, $v_k = \text{const}$, тогда $\partial v_k(q^i, v_i)/\partial q^j = 0$.

T8.*

Найдём $v_i\dot{v}^i - v^i\dot{v}_i$. Перейдём к контравариантным координатам:

$$v_i\dot{v}^i - v^i\dot{v}_i = g_{ij}v^i\dot{v}^j - v^i\frac{d}{dt}\left(g_{ij}v^j\right) = g_{ij}v^j\dot{v}^i - v^iv^j\dot{g}_{ij} - g_{ij}v^i\dot{v}^j$$

В силу симметричности метрического тензора $g_{ij} = g_{ji}$, получим, что

$$v_i\dot{v}^i - v^i\dot{v}_i = -v^iv^j\dot{g}_{ij}.$$

Подставил для параболических и полярных координат, сходится.

1.3 Кинематика твёрдого тела

3.24

Запишем $\boldsymbol{v}_B$, выбрав в качестве полюса точку A и точку C.

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AB} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega}_{BC}\times\overrightarrow{CB}, \tag{1.4}$$

или, расписав по координатам,

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-r\cos\alpha\\ r\sin\alpha\\0\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AB}} + \begin{pmatrix}v\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_C\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\omega_{BC}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3r\cos\alpha\\-3r\sin\alpha\\0\end{pmatrix},$$

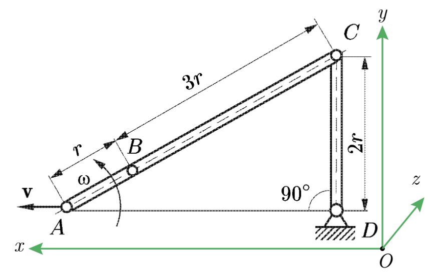


Рис. 3: К задаче 3.24.

получим два содержательных уравнения

$$\left.\begin{aligned}-r\omega\sin\alpha + v &= v_c + 3r\omega_{BC}\sin\alpha\\ -r\omega\cos\alpha + 0 &= 0 \ + 3r\omega_{BC}\cos\alpha\end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\boldsymbol{\omega}_{BC} = -\frac{\boldsymbol{\omega}}{3},\qquad \boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}.}$$

Для поиска $\mathbf{w}_C$, запишем условия жёсткости стержней BC и CD. Дифференцируя по времени, получим

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{v}_B\cdot\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{v}_C\cdot\overrightarrow{BC};\\ &\boldsymbol{v}_C\cdot\overrightarrow{DC} = 0.\end{aligned}\right\} \overset{d/dt}{\Rightarrow} \begin{cases}\mathbf{w}_B\cdot\overrightarrow{BC} + \boldsymbol{v}_B\cdot\dot{\overrightarrow{BC}} = \mathbf{w}_C\cdot\overrightarrow{BC} + \boldsymbol{v}_C\cdot\dot{\overrightarrow{BC}};\\ \mathbf{w}_C\cdot\overrightarrow{DC} + \boldsymbol{v}_C\cdot\dot{\overrightarrow{DC}} = 0.\end{cases} \tag{1.5}$$

Выразим $\mathbf{w}_B$ из уравнения Ривальса:

$$\mathbf{w}_B = \underbrace{\mathbf{w}_A}_{0} + \underbrace{\dot{\omega}_{AB}\times\overrightarrow{AB}}_{0} + \boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{AB}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-r\omega\sin\alpha\\-r\omega\cos\alpha\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\omega^2\cos\alpha\\-r\omega^2\sin\alpha\\0\end{pmatrix}.$$

В первом уравнении (1.5), зная $\dot{\overrightarrow{BC}} = \boldsymbol{\omega}_{BC}\times\overrightarrow{BC} = (\omega r\sin\alpha,\ \omega r\cos\alpha,\ 0)^{\mathrm{T}}$ и $\boldsymbol{v}_B$ из (1.4), получим

$$\mathbf{w}_C\cdot\overrightarrow{BC} = -4\omega^2r^2. \tag{1.6}$$

Во втором уравнении (1.5), зная $\dot{\overrightarrow{DC}} = \boldsymbol{\omega}_{DC}\times\overrightarrow{DC} = \boldsymbol{v}_C$, получим

$$\mathbf{w}_C\cdot\overrightarrow{DC} = -v^2. \tag{1.7}$$

Из (4.22), мы знаем $(\mathbf{w}_C)_y$, расписав в (1.6) проекцию на BC покоординатно, получим

$$\left.\begin{aligned}-4\omega^2r^2 &= 3r(-\mathrm{w}_{Cx}\cos\alpha + \mathrm{w}_{Cy}\sin\alpha);\\ \mathrm{w}_{Cy} &= -v^2/2r.\end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{w}_C = \begin{pmatrix}\mathrm{w}_{Cx}\\\mathrm{w}_{Cy}\\0\end{pmatrix},\quad \text{где}\quad \mathrm{w}_{Cx} = \frac{8\sqrt{3}}{9}\omega^2r - \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{v^2}{r},\ \mathrm{w}_{Cy} = -\frac{v^2}{2r}.$$

Собственно[1], $\|\mathbf{w}_C\|^2 = \frac{64}{27}\omega^4r^2 - \frac{8}{9}\omega^2v^2 + \frac{1}{3}v^4/r^2$.

4.4

Запишем в координатах ω_1 и ω_2.

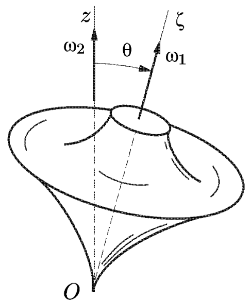
$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{pmatrix}0\\\omega_1\sin\theta\\\omega_1\cos\theta\end{pmatrix};\qquad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\\omega_2\end{pmatrix}.$$

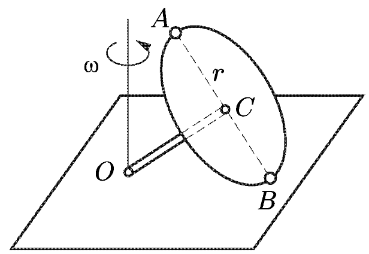
[1] Вычисления доступны здесь.

Так как оси ω_1 и ω_2 пересекаются, угловая скорость и угловое ускорение можно найти, как

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \sin\theta \\ \omega_2 + \omega_1 \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{pmatrix} \omega_1\omega_2 \sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что очень похоже на правду.





Рисунки к задачам 4.4 и 4.10.

4.10

Запишем $\boldsymbol{v}_c$, как результат движения стержня и диска. Пусть Ω – угловая скорость вращения диска, $\parallel OB$.

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OC}.$$

Другими словами, в координатной записи,

$$\begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{r}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{r}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega = -\sqrt{3}\omega}.$$

Угловое ускорение стержня найдём, как движение в СО стержня,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^a = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\varepsilon \\ -\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3}\omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\varepsilon \\ 0 \\ \sqrt{3}\omega^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon^a = \sqrt{3\left(\varepsilon^2 + \omega^4\right)}},$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon}^r = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}\right) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\omega \\ -\omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\varepsilon \\ -\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь, из сложения ускорений,

$$\mathbf{w}^a = \underbrace{\mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}}_{\mathbf{w}^e} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}^r}_{\mathbf{w}^c} + \mathbf{w}^r,$$

найдём $\mathbf{w}^a_B$:

$$\mathbf{w}^a_B = \mathbf{0} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{OB} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OB}\right) + 2\boldsymbol{\omega} \times \left(-\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OB}\right) + \mathbf{w}^r_B.$$

Теперь найдём $\mathbf{w}^r_B$, как

$$\mathbf{w}^r_B = \mathbf{w}^r_\tau + \mathbf{w}^r_n = -\varepsilon r \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \omega^2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -r \\ r\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя, дойдём до

$$\boxed{\mathbf{w}^a_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3}\omega^2 r \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{w}^r_B\| = 2\sqrt{3}\omega^2 r,$$

что, достаточно, логично.

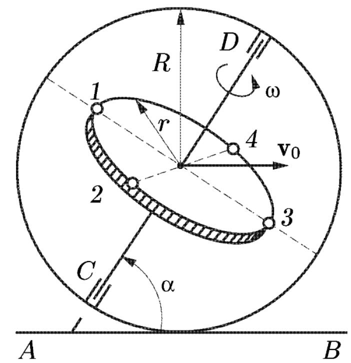
Аналогично найдём $\mathbf{w}^r_A$:

$$\mathbf{w}^r_B = \mathbf{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} r - \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} r + 2\omega^2 r \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} - \varepsilon r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{w}^r_B = r \begin{pmatrix} 3\omega^2 \\ 2\sqrt{3}\omega^2 \\ -3\varepsilon \end{pmatrix}}.$$

И найдём норму ускорения точки A

$$\|\mathbf{w}_A^a\| = \sqrt{21\omega^4 r^2 + 9\varepsilon^2 r^2}.$$

4.12



Расмотрим движение интересных нам точек, как движение в СО обруча, с

$$\boldsymbol{v}^e = \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\omega}^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v/R \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}^e = \mathbf{0}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{0}.$$

Найдём радиус векторы до интересных нам точек:

$$\overrightarrow{O1} = \begin{pmatrix} -r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{O2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{O3} = \begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ -r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{O4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}.$$

Тогда, из теоремы о сложении скоростей, получим значения для $\boldsymbol{v}_i^a$:

$$\boldsymbol{v}_i^a = \underbrace{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}^e \times \overrightarrow{Oi}}_{\boldsymbol{v}_i^e} + \underbrace{\boldsymbol{\omega}^r \times \overrightarrow{Oi}}_{\boldsymbol{v}_i^r}.$$

Подставляя значения, получим, что

$$\boldsymbol{v}_1^a = \begin{pmatrix} v\,(R + r\cos\alpha)/R \\ rv\sin\alpha/R \\ \omega r \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2^a = \begin{pmatrix} \omega r\sin\alpha + v \\ -\omega r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3^a = \begin{pmatrix} v\,(R - r\cos\alpha)/R \\ -rv\sin\alpha/R \\ -\omega r \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4^a = \begin{pmatrix} -\omega r\sin\alpha + v \\ \omega r\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Или, переходя к значениями $\|\boldsymbol{v}_i^a\|$:

$$\|\boldsymbol{v}_1^a\| = \left(/R^2\omega^2 r^2 + R^2 v^2 + 2Rrv^2\cos(\alpha) + r^2 v^2\right)/R^2, \qquad \|\boldsymbol{v}_2^a\| = \omega^2 r^2 + 2\omega r v\sin(\alpha) + v^2,$$
$$\|\boldsymbol{v}_3^a\| = \left(R^2\omega^2 r^2 + R^2 v^2 - 2Rrv^2\cos(\alpha) + r^2 v^2\right)/R^2, \qquad \|\boldsymbol{v}_4^a\| = \omega^2 r^2 - 2\omega r v\sin(\alpha) + v^2.$$

Что соответсвует ответам учебника.

Теперь, из теоремы о сложении скоростей, найдём $\mathbf{w}_i^a$

$$\mathbf{w}_i^a = \underbrace{0 + 0 + \boldsymbol{\omega}^e \times \boldsymbol{\omega}^e \times \overrightarrow{Oi}}_{\mathbf{w}^e} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega}^e \times \left(\boldsymbol{\omega}^r \times \overrightarrow{Oi}\right)}_{\mathbf{w}^c} + \underbrace{-\,\omega^2 \cdot \overrightarrow{Oi}}_{\mathbf{w}_i^r}.$$

Подставляя значения, получим, что

$$\mathbf{w}_1^a = \frac{r\left(R^2\omega^2 + v^2\right)}{R^2}\begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2^a = -\omega r\begin{pmatrix} 2v\cos\alpha/R \\ 2v\sin\alpha/R \\ \omega \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{w}_3^a = \frac{r\left(R^2\omega^2 + v^2\right)}{R^2}\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_4^a = \omega r\begin{pmatrix} 2v\cos\alpha/R \\ 2v\sin\alpha/R \\ \omega \end{pmatrix}.$$

Или, переходя к нормам, получим, что

$$\|\mathbf{w}_1^a\| = \frac{r^2\left(R^2\omega^2 + v^2\right)^2}{R^4}, \quad \|\mathbf{w}_2^a\| = \frac{\omega^2 r^2\left(R^2\omega^2 + 4v^2\right)}{R^2}, \|\mathbf{w}_3^a\| = \frac{r^2\left(R^2\omega^2 + v^2\right)^2}{R^4}, \quad \|\mathbf{w}_4^a\| = \frac{\omega^2 r^2\left(R^2\omega^2 + 4v^2\right)}{R^2}.$$

4.32

Нам известно $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^{\mathrm{T}}$, из задачи **1.45** знаем, как выразить направляющие трёхгранника Френе $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}$, через $\dot{\boldsymbol{r}}$ и $\ddot{\boldsymbol{r}}$, соотвественно считаем известными $\rho, \varkappa$. В выводе теоремы сложения ускорений использовалось, что

$$\frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega}^e \times \boldsymbol{e}_i. \tag{1.8}$$

Также мы знаем, что

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nu}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\tau} + \varkappa\boldsymbol{\beta}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\varkappa\boldsymbol{\nu}. \tag{1.9}$$

Тогда, из покоординатной записи, в $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta})$,получим систему уравнений, решая которую получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}v \\ \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}v \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nu}v &= \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\tau} \\ -v\varkappa\boldsymbol{\nu} &= \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\beta} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \omega_\tau &= v\varkappa \\ \omega_\nu &= 0 \\ \omega_\beta &= v/\rho \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau})(\varkappa\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\beta}/\rho)}.$$

4.37

Пусть $\boldsymbol{\omega}^r$ – угловая скорость тела в СО Земли, посмотрим на угловое ускорение твёрдого тела относительно СО, в данный момент времени совпадащей с направлениями: $\boldsymbol{e}_i \parallel \boldsymbol{\omega}_i$, с полюсом в неподвижной точке тела.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^a = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}_1\frac{\boldsymbol{\omega}_1}{\omega_1} + \dot{\omega}_2\frac{\boldsymbol{\omega}_2}{\omega_2} + \dot{\omega}_3\frac{\boldsymbol{\omega}_3}{\omega_3} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} = \dot{\omega}_1\frac{\boldsymbol{\omega}_1}{\omega_1} + \dot{\omega}_2\frac{\boldsymbol{\omega}_2}{\omega_2} + \dot{\omega}_3\frac{\boldsymbol{\omega}_3}{\omega_3},$$

так как оси жёстко связаны с самим телом.

4.50

Знаем, что скорость некоторой точки твёрдого тела можем записать, как

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 + \begin{pmatrix} \omega_y r_z - \omega_z r_y \\ \omega_z r_x - \omega_x r_z \\ \omega_x r_y - \omega_y r_x \end{pmatrix}.$$

Тогда, прямой подстановкой, получим, что

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \cancel{\operatorname{rot}\boldsymbol{v}_0} + \operatorname{rot}\begin{pmatrix} \omega_y r_z - \omega_z r_y \\ \omega_z r_x - \omega_x r_z \\ \omega_x r_y - \omega_y r_x \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\boldsymbol{v}.$$

1.4 Сложное движение точки и твёрдого тела

2.15

Для началача найдём, что

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{OP} = \boldsymbol{r}_p^r &= \boldsymbol{a}\cdot(1+\sin\omega_0 t) \\ \boldsymbol{v}_p^r &= \boldsymbol{a}\cdot\omega_0\cos\omega_0 t \\ \mathbf{w}_p^r &= -\boldsymbol{a}\cdot\omega_0^2\sin\omega_0 t \end{aligned}\right\} \text{ в СО стержня, где } \boldsymbol{a} = a\begin{pmatrix} \sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем абсолютную скорость $\boldsymbol{v}_p^a$ точки P,

$$\boldsymbol{v}_p^a = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_p^r + \boldsymbol{v}_p^r = a\omega(1+\sin\omega_0 t)\begin{pmatrix} -\cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} + a\omega_0\cos\omega_0 t\begin{pmatrix} \sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда норма $\|\boldsymbol{v}_p^a\|$ такая, что

$$\|\boldsymbol{v}_p^a\|^2 = a^2\left(\omega^2(1+\sin\omega_0 t) + \omega_0^2\cos\omega_0 t\right).$$

Запишем абсолютное ускорение $\mathbf{w}_p^a$ точки P,

$$\mathbf{w}_p^a = -\omega^2\boldsymbol{r}_p^r + 0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_p^r + 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_p^r + \mathbf{w}_p^r = \left(a(\omega^2+\omega_0^2)\sin\omega_0 t + \omega^2\right)\begin{pmatrix} -\sin\omega t \\ -\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix} + 2a\omega\omega_0\cos\omega_0 t\begin{pmatrix} -\cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда норма $\|\mathbf{w}_p^a\|^2$ такая, что

$$\|\mathbf{w}_p^a\|^2 = \left(a(\omega^2+\omega_0^2)\sin\omega_0 t + \omega^2\right)^2 + 4a^2\omega^2\omega_0^2\cos^2\omega_0 t.$$

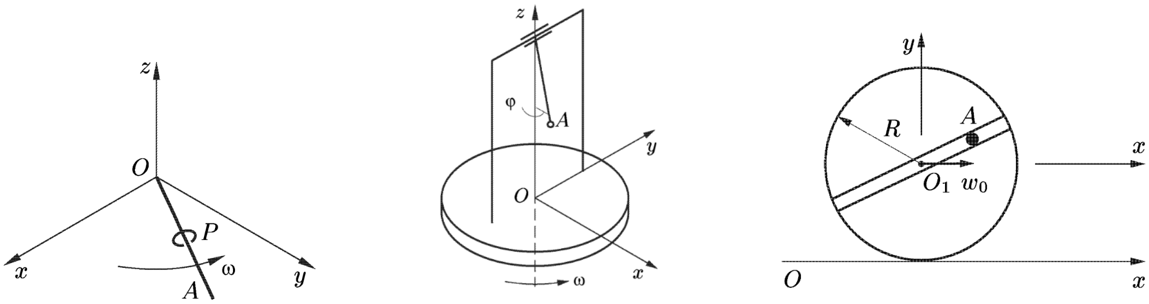


Рис. 4: Рисунки к задачам 2.15, 2.19 и 2.35.

2.19

Для начала найдём и выразим все интересные нам векторы:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 \sin\omega_0 t \\ \dot\varphi &= \varphi_0\omega_0 \cos\omega_0 t \\ \ddot\varphi &= -\varphi_0\omega_0^2 \sin\omega_0 t \end{aligned}\right\}, \mathbf{w}_0 = -\begin{pmatrix}\omega^2 r\sin\varphi \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\omega}_m = \begin{pmatrix}0 \\ -\dot\varphi \\ 0\end{pmatrix}, \overrightarrow{BA} = r\begin{pmatrix}\sin\varphi \\ 0 \\ -\cos\varphi\end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}^r = \begin{pmatrix}0 \\ -\ddot\varphi \\ 0\end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{\omega}_m$ – угловая скорость $\overrightarrow{AB}$ относительно конструкции.

Во-первых, скорость $\boldsymbol{v}_A^a$ такая, что

$$\boldsymbol{v}_A^a = \boldsymbol{v}^e + \boldsymbol{v}^r = \boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OA} + \boldsymbol{\omega}_m \times \overrightarrow{BA} = r\begin{pmatrix}\dot\varphi\cos\varphi \\ \omega\sin\varphi \\ \dot\varphi\sin\varphi,\end{pmatrix}$$

а норма $\|\boldsymbol{v}_A^a\|$ в точке $t = t_0 = \pi/2\omega_0$ такая, что

$$\|\boldsymbol{v}_A^a\|^2 = r^2\left(\dot\varphi + \omega^2\sin^2\varphi\right) \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{v}_A^a\|^2\Big|_{t=t_0} = r^2\omega^2\sin^2\varphi_0.$$

Во-вторых, ускорение $\mathbf{w}_A^a$ такое, что

$$\mathbf{w}_A^a = \mathbf{w}_0 + 0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{BA} + 2\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}_m\times\overrightarrow{BA}\right) + \mathbf{w}^r.$$

Подставляя значения для $t = t_0$, получим, что

$$\mathbf{w}_A^a = -r\begin{pmatrix}\omega^2\sin\varphi_0 + \varphi_0\omega_0^2\cos\varphi_0 \\ 0 \\ \varphi_0\omega_0^2\sin\varphi_0\end{pmatrix}.$$

Соответсвенно, норма ускорения точки A

$$\begin{aligned}\|\mathbf{w}_A^a\|^2 &= r^2(\omega^4\sin^2\varphi_0 + \omega^2\omega_0^2\varphi_0\sin^2\varphi_0 + \varphi_0^2\omega_0^4\cos^2\varphi_0 + \varphi_0^2\omega_0^4\sin^2\varphi_0) = \\ &= r^2(\omega^4\sin^2\varphi_0 + \omega^2\omega_0^2\varphi_0\sin^2\varphi_0 + \varphi_0^2\omega_0^4).\end{aligned}$$

2.35

Снова предварительно запишем необходимые нам величины,

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{O_1A} = \boldsymbol{r}_A^r &= \boldsymbol{a}\sin\omega t, \\ \boldsymbol{v}_A^r &= \boldsymbol{a}\omega\cos\omega t, \\ \mathbf{w}_A^r &= -\boldsymbol{a}\omega^2\sin\omega t \end{aligned}\right\}, \quad \boldsymbol{a} = a\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0\end{pmatrix}, \quad \varphi = -\frac{\mathrm{w}_0 t^2}{2R}, \quad \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{\Omega}R = \mathbf{w}_0 t, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ \mathrm{w}_0/R\end{pmatrix}.$$

где $\varphi(t)$ и $\boldsymbol{\Omega}(t)$ мы знаем из условия $\mathbf{w}_0 = \mathrm{const}$.

Скорость $\boldsymbol{v}_A^a$ такая, что

$$\boldsymbol{v}_A^a = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_A^r + \boldsymbol{v}_A^r \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_x = \mathrm{w}_0 t\left(R + a\sin\varphi\sin\omega t\right)/R + a\omega\cos\varphi\cos\omega t \\ v_y = a\omega\sin\varphi\cos\omega t - \mathrm{w}_0 t a\cos\varphi\sin\omega t/R \\ v_z = 0 \end{cases}$$

а норма

$$\|\boldsymbol{v}_A^a\|^2 = \frac{{\mathrm{w}_0}^2 t^2}{R^2}a^2\sin^2\omega t + a^2\omega^2\cos^2\omega t + \mathrm{w}_0^2 t^2 + 2\frac{\mathrm{w}_0 t}{R}a\left(\mathrm{w}_0 t\sin\varphi\sin\omega t + R\omega\cos\varphi\cos\omega t\right).$$

или, преобразуя, получим, что

$$\|\boldsymbol{v}_A^a\|^2 = \left(\frac{\mathrm{w}_0 t}{R} a \sin\omega t \mathrm{w}_0 t \sin\varphi\right)^2 + \left(a\omega\cos\omega t + w_0 t\cos\varphi\right)^2.$$

Ускорение $\mathbf{w}_A^a$ такое, что

$$\mathbf{w}_A^a = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}_A^r + \Omega\times\Omega\times\boldsymbol{r}_A^r + 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_A^r + \mathbf{w}_A^r.$$

Подставляя значения, получим

$$\mathbf{w}^c = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} 2\omega a t \mathrm{w}_0 \sin(\varphi)\cos(\omega t) \\ -2\omega a t \mathrm{w}_0 \cos(\varphi)\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}^e = \frac{1}{R^2}\begin{pmatrix} \mathrm{w}_0\left(R^2 + Ra\sin(\varphi)\sin(\omega t) - at^2\mathrm{w}_0\sin(\omega t)\cos(\varphi)\right) \\ -a\mathrm{w}_0\left(R\cos(\varphi) + t^2\mathrm{w}_0\sin(\varphi)\right)\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Суммруя, получим, что

$$\begin{cases} \left(\mathbf{w}_A^a\right)_x = \dfrac{1}{R^2}\left(R^2\left(-\omega^2 a\sin(\omega t)\cos(\varphi) + \mathrm{w}_0\right) + Ra\mathrm{w}_0\left(2\omega t\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right)\sin(\varphi) - at^2\mathrm{w}_0^2\sin(\omega t)\cos(\varphi)\right) \\ \left(\mathbf{w}_A^a\right)_y = \dfrac{1}{R^2}\left(-a\left(R^2\omega^2\sin(\varphi)\sin(\omega t) + R\mathrm{w}_0\left(2\omega t\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right)\cos(\varphi) + t^2\mathrm{w}_0^2\sin(\varphi)\sin(\omega t)\right)\right) \\ \left(\mathbf{w}_A^a\right)_z = 0. \end{cases}$$

4.14 и 4.15*

Сделаем задачу чуть менее абстрактной. Представим кольцевую железную дорогу, плоскость которой нормальна к $\boldsymbol{\omega}_1$. Наш агент №1 сидит в вагоне поезда и на столе, поверхность которого нормальна к $\boldsymbol{\omega}_2$, запускает игрушечную кольцевую жилезную дорогу с игрушечным агентом №2 в вагоне поезда. Агент №2 запускает поезд на столе, поверхность которого нормальна к $\boldsymbol{\omega}_3$ ...

Найдём $\boldsymbol{\varepsilon}_{№2}$ – угловое ускорение агента №2. По словам №1, угловое ускорение равно $\boldsymbol{\omega}_{№2} = \boldsymbol{\omega}_2$, тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{№2} = \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}_1}_{\boldsymbol{\varepsilon}^e} + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}_2 = 0 + \frac{\boldsymbol{\omega}_2}{\omega_2}\dot{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_2.$$

А теперь найдём $\boldsymbol{\varepsilon}_3$. С точки зрения №2 $\boldsymbol{\omega}_{№3} = \boldsymbol{\omega}_3$. Мы знаем, что $\boldsymbol{\omega}_{№2} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$, и знаем $\boldsymbol{\varepsilon}_{№2}$, тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{№3} = \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}_3 = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}_2}{\omega_2}\dot{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_2\right) + \frac{\boldsymbol{\omega}_3}{\omega_3}\dot{\omega}_3 + (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2)\times\boldsymbol{\omega}_3.$$

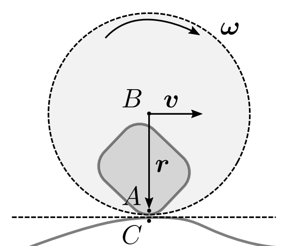
И так далее мы можем продолжать добавлять вектора $\boldsymbol{\omega}_i$ к движению тела, в силу $\boldsymbol{\omega}^a = \boldsymbol{\omega}^e + \boldsymbol{\omega}^r$, при чём мы получим слагаемые вида векторного произведение всех упорядоченных пар $\boldsymbol{\omega}_j$ и $\boldsymbol{\omega}_k$, плюс сумма $\boldsymbol{\varepsilon}_i^r$.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{№N} = \boldsymbol{\varepsilon}_{№(N-1)} + \frac{\boldsymbol{\omega}_N}{\omega_N}\dot{\omega}_N + \boldsymbol{\omega}_{№(N-1)}\times\boldsymbol{\omega}_N.$$

По индукции можем показать, что

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{№N} = \sum_{j=2}^{n}\frac{\boldsymbol{\omega}_j}{\omega_j}\dot{\omega}_j + \sum_{k=2}^{N}\sum_{i=1}^{k-1}\boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{\omega}_k.$$

В частности, при $\dot{\omega}_j = 0$, получим выражение для задачи **4.14**.



к задаче Т9.

Т9.*

Рассмотрим движение выпуклого твёрдого тела по выпуклой поверхности. Они соприкасаются в точках A и C соответсвенно. Пусть есть некоторая неподвижная СО, относительно начала которой будем записыввать радиус векторы. Пусть точка O – мгновенный центр скоростей, тогда скорость некоторой точки тела может быть найдена, как

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_O),$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус вектор этой точки.

Для точки A верно, что $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_O) = 0$, дифференцируя равенство по времени, найдём, что

$$\mathbf{w}_A = \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\underbrace{(\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_O)}_{=0} + \boldsymbol{\omega}\times\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_O) = -\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_O,$$

где $\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_O = 0$, т.к. тело движется без проскальзывания и в данный момент времени A соответсвует мгновенному центру скоростей. Рассматривая движение относительно центра кривизны B, поймём, что $\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O = \dot{\boldsymbol{r}}_O$, получается, $\mathbf{w}_A = -\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$, Q.E.D.

2 Динамика I

2.5 Основные теоремы динамики

5.10

Парметризуем систему движением по оси $z \parallel \boldsymbol{g}$, тогда

$$m\dot{v} = \beta v^2 - mg\frac{R^2}{(R+z)^2}. \tag{2.1}$$

Что аналогично диф. уравнению

$$\ddot{z} = \frac{\beta}{m}\dot{z}^2 - g\frac{R^2}{(R+z)^2}. \tag{2.2}$$

Решим диф. уравнение заменой $\dot{z} = p(v) \equiv v$, тогда $\ddot{z} = p'p$. Пусть теперь $y = v^2$, $x'/2 = p'p$, тогда приходим к однородному диф. уравнению

$$\frac{1}{2}y' - \frac{\beta}{m}x = \frac{-gR^2}{(R+z)^2}. \tag{2.3}$$

Решая, получим, что

$$C(z) = -2g\int\left(1+\frac{z}{R}\right)^{-2}\exp\left(-\frac{2\beta}{m}z\right)\,dz + C_0. \tag{2.4}$$

Из начальных условия находим C_0, получая

$$v^2 = v_0^2\exp\left(-\frac{2\beta}{m}\left(H-h\right)\right) - 2gR^2\exp\left(\frac{2\beta}{m}h\right)\int_H^h\left(R+z\right)^{-2}\exp\left(-\frac{2\beta}{m}z\right)\,dz. \tag{2.5}$$

6.13

Из теоремы об изменение количества движения, ц.м. системы покоится. Т.к. на систему не действуют внешние силы с ненулевым относительно вертикальной оси моментом, то по теореме об изменение кин. момента, он сохраняется $K_0 = K_1$.

Далее всё запишем в проекции на вертикальную ось. В начальный момент времени

$$K_0 = I\omega_0 = \frac{3}{10}kmr^2\omega_0. \tag{2.6}$$

При достижении шариком пола

$$K_1 = I'\omega' + m(kl)^2\omega'. \tag{2.7}$$

По т. Штейнера

$$I'\omega' = I\omega' + kml^2 = \frac{3}{10}kmr^2\omega' + kml^2\omega'. \tag{2.8}$$

Собирая всё вместе получаем, что

$$3k(k+1)\omega_0 = \left(3k(k+1)+10k\right)\omega' \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\omega' = \frac{3(k+1)}{3k+13}\omega_0} \tag{2.9}$$

6.25

Кинетический момент

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{K}_A = \boldsymbol{M}_A^e + \boldsymbol{Q}\times\boldsymbol{v}_A, \tag{2.10}$$

где A – мгновенный центр скоростей, $\boldsymbol{v}_A = 0$. Тогда, в проекции на вертикальную ось, получим, что

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{K}_A = \boldsymbol{M}_A^e = \boldsymbol{l}\times\boldsymbol{F}_{\text{тр}} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{K}_A\Big|_z = \text{const}. \tag{2.11}$$

6.35

Для точек пластины $\boldsymbol{r}_{AC} = \boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_A$, $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{Ai}$. Соответственно

$$\boldsymbol{K}_A = \sum_i \boldsymbol{r}_{Ai}\times m_i\left(\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_A i\right) = \boldsymbol{v}_A\times\sum_i\left(\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_i\right)m_i + \sum_i \boldsymbol{r}_{Ai}\times\left(m_i\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{Ai}\right). \tag{2.12}$$

Раскрывая по правилу Лагранжа, получим, что

$$\boldsymbol{K}_A = m\left(\overrightarrow{AC}\times\boldsymbol{v}_A\right) + I_A\boldsymbol{\omega}, \qquad \text{Q.E.D.} \tag{2.13}$$

7.4

Во-первых запишем кинетическую энергию системы, как

$$T_{\text{сист}} = T_{\text{диска}} + T_{\text{стержня}}. \tag{2.14}$$

Начнем с простого,

$$T_{\text{ст}} = \frac{1}{2}\left(M\frac{l^2}{3}\omega^2\right). \tag{2.15}$$

Точка K – мгновенный центр скоростей, то

$$\boldsymbol{v}_d = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{l} = \boldsymbol{\omega}_d\times\boldsymbol{r} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_d = \omega\frac{l}{r}. \tag{2.16}$$

Аналогично для обруча

$$\boldsymbol{v}_{\text{об}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{об}}\times\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OB} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_{\text{об}} = \omega\frac{R-\rho}{\rho}. \tag{2.17}$$

Теперь можем записать для диска

$$T_{\text{д}} = \frac{1}{2}I_d\omega_d^2 + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{3}{4}m\omega^2 l^2. \tag{2.18}$$

И, наконец, для обруча,

$$T_{\text{об}} = \frac{1}{2}\mu\omega^2(R-\rho) + \frac{1}{2}\mu\rho^2\omega^2\frac{(R-\rho)^2}{\rho^2} = \mu(R-\rho)^2\omega^2. \tag{2.19}$$

Собирая всё вместе, получим

$$\boxed{T = \omega^2\left(\mu\left(l+r-\rho\right)^2 + \frac{3}{4}ml^2 + \frac{1}{6}Ml^2\right)} \tag{2.20}$$

7.12

Изначально, известно, что

$$\begin{cases} F_x = yz\sin\omega t \\ F_y = xz\sin\omega t \\ F_z = xy\sin\omega t \end{cases} \tag{2.21}$$

Проверим, что поле потенциально

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = 0. \tag{2.22}$$

Да, действитеьно потенциально. Тогда выбрав в качетсве 0 потенциальной энергии U нулевой момент времени, получим

$$U = \int_{x_0}^{x} F_x\,dx + \int_{y_0}^{y} F_y\,dy + \int_{z_0}^{z} F_z\,dz \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{U = xyz\sin\omega t} \tag{2.23}$$

9.11

Точка A подвеса математического маятника длины l совершает вертикальные колебания по закону

$$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}\sin(\omega t) = \boldsymbol{r}_A, \qquad \boldsymbol{a}\omega\cos(\omega t) = \boldsymbol{v}_A, \qquad -\boldsymbol{a}\omega^2\sin(\omega t) = -\mathbf{w}^e.$$

Тогда по II закону Ньютона для неИСО

$$m\mathbf{w}^r = \boldsymbol{F} + m\boldsymbol{g} - m\mathbf{w}^e. \tag{2.24}$$

Пусть ось OX противонаправлена силе натяжения нити $\boldsymbol{F}$, OY в плоскости движения, тогда, введём $\boldsymbol{g}' = \boldsymbol{g} - \mathbf{w}^e$ и получим

$$\begin{aligned} OX:&\quad m\mathrm{w}_x = -F + mg'\cos\varphi = 0, \\ OY:&\quad m\mathrm{w}_y = mg'\sin\varphi, \end{aligned}$$

Так приходим к уравнению вида

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{L}\left(g - a\omega^2 \sin(\omega t)\right)\sin(\varphi) = 0. \tag{2.25}$$

В частности, заметим, что $\varphi(t) \equiv 0$ и $\varphi(t) \equiv \pi$ являются частными решениями этого уравнения.

9.16

Невесомый стержень вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси Oz, перпендикулярной плоскости рисунка. По диску катится диск радиуса r и массы m, в начальный момент точки O и A совпадали, а диск покоился.

Перейдём в СО стержня, тогда

$$m\mathbf{w}_d^r = m\mathbf{w}_d^a - m\mathbf{w}_d^c - m\mathbf{w}_d^e. \tag{2.26}$$

Так как движение происходит без проскальзывания, сила трения не совершает работу. С учётом II закона Ньютона в неИСО, и тем что сила Кориолиса не изменяет кинетическую энергию системы, получим, что внешний момент

$$\boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{R}_i \times (m_i\boldsymbol{g} - m_i\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i), \qquad \boldsymbol{r}_i = \overrightarrow{OA} + \boldsymbol{R}_i, \tag{2.27}$$

Тогда

$$\boldsymbol{M}_i = m_i\boldsymbol{R}_i \times \overrightarrow{OA}\omega^2 - m_i\boldsymbol{R}_i \times \boldsymbol{\omega}\left(\boldsymbol{\omega}\cdot\overrightarrow{OA}\right) + m_i\boldsymbol{R}_i\times\boldsymbol{g},$$

Суммируя, по теореме об изменение кинетического момент, получим, что

$$I\boldsymbol{\varepsilon}_d = \sum \boldsymbol{M}_i = m\omega^2\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{OA} + m\ \overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{g}.$$

Пусть L – пройденное расстояние, в проекции на ось, сонаправленную с $\boldsymbol{\omega}_d^r$,

$$\frac{d\omega_d^r}{dt} = \frac{2}{3}\frac{L}{R}\omega^2 + \frac{2}{3}\frac{g}{R}\cos\varphi,$$

интегрируя, с учётом начальных условий,

$$(\omega_d^r)^2(L) = \frac{2}{3}\frac{L^2}{R^2}\omega^2 + \frac{4}{3}\frac{L}{R^2}\,g\cos\varphi. \tag{2.28}$$

Запишем теперь Кориолисову силу, как

$$\boldsymbol{F}_i^c = -2\omega\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i)m_i \qquad\Rightarrow\qquad \boldsymbol{F}^c = -2\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}_d^r\times\overrightarrow{AB}\right)\ m.$$

Догда записав II закон Ньютона на ось, сонаправленную с $\boldsymbol{N}$, получим

$$0 = N - mg\sin\varphi - Rm\omega^2 + 2m\omega\omega_d^r R \qquad\Rightarrow\qquad N = mg\sin\varphi + Rm\omega^2 - 2m\omega\sqrt{\frac{2}{3}\omega^2L^2 + \frac{4}{3}gL\cos\varphi} \tag{2.29}$$

Аналогично записав уравнение в проекции на ось, сонаправленную с $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$, найдём

$$m\text{w} = m\varepsilon R = F_{\text{тр}} + Lm\omega^2 + mg\cos\varphi, \qquad\Rightarrow\qquad F_{\text{тр}} = \frac{m}{3}\left(L\omega^2 + g\cos\varphi\right). \tag{2.30}$$

9.27

Посмотрим на систему с точки зрения вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$ плоскости, тогда по теореме об изменение количества движения в неИСО

$$m\mathbf{w}^r = \boldsymbol{R} - m\mathbf{w}^e - m\mathbf{w}^c. \tag{2.31}$$

Выберем в качестве полюса тела центр масс A, тело вращается относительно него с $\boldsymbol{\omega}$, тогда

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{F}^C = \sum_i m_i\left(\boldsymbol{\omega}_0\times(\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{Ci})\right) = m\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega}_0\times\left(\boldsymbol{\omega}\times(\cancel{\sum m_i\boldsymbol{r}_i})\right) = m\boldsymbol{\omega}_0\times\boldsymbol{v}_A.$$

Аналогично для переносной

$$-\boldsymbol{F}^e = \sum m_i\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_i^r = \sum_i m_i\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\left(\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i\right) = m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_A).$$

Таким образом переносные и кориолисовы силы приводятся к равнодействующим, проходящим через центр масс фигуры.

9.32

Шарик движется так, что скорость всех его точек параллельны плоскости, которая вращается с угловой скоростью $\omega(t)$ вокруг неподвижной оси, лежащей вэтой плоскости.

В плоскости введем координаты так, что

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \sin\omega t \\ \cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_y(t)\operatorname{tg}\omega t \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}.$$

По условию

$$\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{n}) = 0, \quad \Rightarrow \quad v_x\cos\omega t = v_y\sin\omega t,$$

где $\boldsymbol{n}$ – нормаль к плоскости, равная, например $(-\cos\omega t,\ \sin\omega t,\ 0)^{\mathrm{T}}$. Знаем, что

$$\mathbf{w}^r = \mathbf{w}^a - \mathbf{w}^e - \mathbf{w}^c, \quad \boldsymbol{v}^r = \boldsymbol{v}^a - \boldsymbol{v}^c = \boldsymbol{v}^a - \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{2.32}$$

Тогда

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \mathbf{w}^a - 2\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{v}^a - \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}. \tag{2.33}$$

2.6 Движение точки в центральном поле сил

8.36

Для начала выразим a и b через h и H:

$$r_1 + r_2 = H + h \quad \Rightarrow \quad b = \frac{H+h}{2}, \quad a = \sqrt{Hh}. \tag{2.34}$$

Запишем теперь уравнение Бине

$$u'' + u = \frac{F}{mc^2u^2} = \frac{\alpha}{mc^2}, \tag{2.35}$$

т.к. $F(u) = \alpha u^2$. Тогда

$$u'' = (u - \frac{\alpha}{mc^2}) \quad \Rightarrow \quad u - \frac{\alpha}{mc^2} = A\cos\varphi + B\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{\frac{\alpha}{mc^2} - A\cos\varphi} \overset{\text{def}}{=} \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \tag{2.36}$$

Из граничных условия находим, что

$$\Big\{ r(\varphi = 0) = H = \frac{p}{1-e}.r(\varphi=\pi) \quad = h = \frac{p}{1+e}. \quad \Rightarrow \quad e = \frac{H-h}{H+h}; \quad p = \frac{2Hh}{H+h}. \tag{2.37}$$

8.48

Рассмотрим движение в поле с силой

$$F = -\frac{\alpha}{m^2}\psi(\varphi) - \frac{\beta}{r^3}. \tag{2.38}$$

Запишем уравнение Бине:

$$u'' + u = \frac{F(u)}{mc^2u^2} = \frac{-\alpha u^2\psi - \beta u^3}{mc^2u^2} \quad \Rightarrow \quad u'' + \underbrace{\left(1 + \frac{\beta}{mc^2}\right)}_{\omega^2} u = \underbrace{-\frac{\alpha}{mc^2}}_{-B}\psi(\varphi). \tag{2.39}$$

Методом вариации постоянных, получчм

$$u(\varphi) = C_1(\varphi)\cos(\omega\varphi) + C_2(\varphi)\sin(\omega\varphi). \tag{2.40}$$

Тогда

$$u' = C_1'\cos\omega\varphi - \omega C_1\sin\omega\varphi + C_2\sin\omega\varphi + \omega C_2\cos\omega\varphi. \tag{2.41}$$

В силу предоставленной нам свободы, потреуем для простоты и адекватности выкладок

$$C_1\cos\omega\varphi + C_2\sin\omega\varphi \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad u' = -\omega C_1\sin\omega\varphi + \omega_2 C_2\cos\omega\varphi. \tag{2.42}$$

Найдём из нашего условия и условия диф. уравнения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1' = -\dfrac{1}{\omega}\psi(\varphi)\sin\omega t \\ C_2' = \dfrac{1}{\omega}\psi(\varphi)\cos\omega t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = -\dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^\varphi \psi(\varphi)\sin\omega\tau\,d\tau + \tilde{C}_1 \\ C_2 = \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^\varphi \psi(\varphi)\cos\omega\tau\,d\tau + \tilde{C}_2 \end{cases} \tag{2.43}$$

Из формулы синуса суммы, получим

$$u(\varphi) = C_1 \sin\omega\varphi + C_2 \cos\omega\varphi + \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(\varphi-\tau)\psi(\varphi)\,d\tau, \tag{2.44}$$

где $\omega(\varphi) = \sqrt{1+\beta/mc^2}$.

8.21

В приближении $m \ll M$, запишем, что

$$\boldsymbol{F}(r) = \frac{kQq}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \varepsilon u^2 \frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

В силу того, что $\dot\varphi = cu^2$, то из момента, когда $\dot\varphi = v_0/r$, найдём $c = v_0 d$. Уравнение Бине примет вид

$$u'' + u = \frac{kQq}{mv_0^2 d^2} \overset{\text{def}}{=} \varkappa. \tag{2.45}$$

Решением будет

$$u = u_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \varkappa. \tag{2.46}$$

При $\varphi \to 0$, получим, что

$$u_0 \cos\varphi_0 = -\varkappa.$$

Дифференцируя же по времени, получим

$$\dot u = -u_0 \sin(\varphi-\varphi_0)\dot\varphi \quad\Rightarrow\quad \dot r = u_0 v_0 d \sin(\varphi - \varphi_0),$$

Таким образом

$$\begin{cases} u_0 = 1/d\sin\varphi_0 \\ u_0 = -\varkappa/\cos\varphi_0 \end{cases}, \quad\Rightarrow\quad \operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{1}{\varkappa d}.$$

Теперь при $u \to 0$, получим

$$\theta' - \varphi_0 = \arccos\left(\frac{-\varkappa}{u_0}\right) = \varphi_0, \quad\Rightarrow\quad \theta = \pi - \theta' = \pi - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\varkappa d} = 2\operatorname{arctg}(\varkappa d),$$

Таким образом приходим к выражению

$$\theta = 2\operatorname{arctg}(\varkappa d). \tag{2.47}$$

T10*.

В ОТО движение в центральном поле тяжести описывается как движение в метрике Шварцшильда:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) d\tau^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 - (r\sin\theta)^2 d\varphi^2 - r^2\,d\theta^2.$$

Здесь 4 независимых переменных $(\tau, r, \varphi, \theta)$, где три из сферических координат, а τ – физическое время, также введен радиус Шварцшильда $a = 2GM$.

Движение точек рассматриваем, как движение по геодезическим, то есть $\mathbf{w}_i = 0$, где $i \in \{\tau, r, \varphi, \theta\}$. Движение будет в некотором смысле происходить в одной плоскости, так что пусть $\theta(t) = \pi/2$. Так мы получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} v^2 = \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = \left(1-\dfrac{a}{r}\right)\dot\tau^2 - \left(1-\dfrac{a}{r}\right)^{-1}\dot r^2 - r^2\dot\varphi^2 \\ \mathbf{w}_\tau = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial(v^2/2)}{\partial\dot\tau} - \underbrace{\dfrac{\partial(v^2/2)}{\partial\tau}}_{0} = \dfrac{d}{dt}\left[\left(1-\dfrac{a}{r}\right)\dot\tau\right] = 0 \\ \mathbf{w}_\varphi = -\dfrac{d}{dt}\left[r^2\dot\varphi\right] = 0 \end{cases} \tag{2.48}$$

Таким образом получим пару первых интегралов системы, в частности

$$\left(1-\frac{a}{r}\right)\dot\tau = \mathcal{D},$$
$$r^2\dot\varphi = \mathcal{C}.$$

Подставляя их в выражение для скорости, получим, что

$$\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}\mathcal{D}^2 - \left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - \frac{c^2}{r^2} = v^2.$$

По замене Бине

$$r = \frac{1}{u}, \qquad \dot{r} = r'\dot{\varphi} = \left(\frac{1}{u}\right)' cu^2 = -u'c,$$

перейдём к функции $u(\varphi)$:

$$2c^2u'' + c^2(2u - 3au^2) = v^2. \tag{2.49}$$

Преобразуя, получим

$$\boxed{u'' + u = \frac{a}{2c^2}v^2 + \frac{3}{2}au^2}. \tag{2.50}$$

Найдём теперь видимый радиус черной дыры – минимальное значение прицельного параметра, при котором луч, проходящий через окрестность черной дыры не падает на центр. Для светового луча верно, что $\dot{s}^2 = v^2 = 0$, тогда

$$u'' + u = \frac{3}{2}au^2.$$

Интегрируя, получим

$$\frac{u'^2}{2} + \frac{u^2}{2} = \frac{au^3}{2} + c'.$$

Посмотрим теперь на поведение света при $u \to 0$ верно, что $r\varphi \to b$, тогда

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{r}{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{dr}{d\varphi}\frac{1}{r^2} = \frac{r}{\varphi}\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r\varphi} \quad \Rightarrow \quad u'\big|_{t=0} = \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad c' = \frac{1}{2b^2}$$

Переписав, получим

$$u'^2 = au^3 - u^2 + \frac{1}{b^2}.$$

Вблизи точки с критическим u верно, что $\dot{r} \sim 0$, тогда нас интересует экстремум функции $au^3 - u^2 + b^{-2}$, тогда

$$3au^2 - 2u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r_{\min}} = \left(\frac{3}{2}a\right)^{-1}.$$

Условие падения – уменьшение радиуса (увеличение u) при $r = r_{\min}$:

$$u'^2_{\min} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{8}{27} - \frac{4}{9}\right) + \frac{1}{b^2} = -\frac{4}{27a^2} + \frac{1}{b^2} \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 \leqslant \frac{27}{4}a^2$$

Тогда минимальное значение прицельного параметра, при котором луч, проходящий через окрестность черной дыры не падает на центр

$$\boxed{b_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a}, \tag{2.51}$$

что и является видимым радиусом черной дыры.

2.7 Элементы механики сплошных сред (МСС)

T11.

Движение среды происходит по закону ($\tau = \text{const} > 0$),

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad x = \xi_1\left(1 + \frac{t}{\tau}\right), \qquad y = \xi_2\left(1 + 2\frac{t}{\tau}\right), \qquad z = \xi_3\left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right).$$

Тогда поля скорости и ускорения в лагранжевом описании

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\tau}\begin{pmatrix} \xi_1 & 2\xi_2 & 2\frac{t}{\tau}\xi_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad \mathbf{w} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\tau^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\xi_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Пусть деформация произвола через малый промежуток времени dt, тогда $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}\,dt$. Представим $\partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{r}$, как сумму симметричного и косо-симметричного

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{r}} = u_{ij} + \varphi_{ij},$$

где

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right), \qquad \varphi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right).$$

Подставим $\boldsymbol{v}$ в эйлеровом описании

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\tau+t} & \dfrac{2y}{\tau+t} & \dfrac{2tz}{\tau^2+t^2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \Rightarrow \quad u_{ij} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{t+\tau}, \frac{2}{\tau+t}, \frac{2t}{\tau^2+t^2}\right)_{ij} dt, \quad \varphi_{ij} = 0.$$

Вращательное движение отсутствует.

Как можно заметить из выражения для $\boldsymbol{v}$ неподвижными будут частицы с $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0, \xi_3 = 0$, в начальный момент времени неподвижными будут все частицы с $\xi_3 = 0$.

T12 и T13. (Теория)

В равновесии силы внутренних напряжений должны взаимно компенсироваться, т.е.

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = -F_i = 0. \tag{2.52}$$

Также мы знаем обобщенный закон Гука:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma}\left[u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll}\ \delta_{ik}\right], \tag{2.53}$$

где $\sigma \in [0, 1/2]$ – коэффициент Пуассона, а E – модуль Юнга. Зная, что u_{ik} – симметричный тензор

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right),$$

получим

$$\frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} = 0,$$

что перепишем в векторных обозначениях, в силу $\Delta \boldsymbol{u} = \partial^2 u_i / \partial x_k^2$, а $\partial u_l / \partial x_l = \operatorname{div} \boldsymbol{u}$, тогда

$$\Delta \boldsymbol{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0.$$

Вспомнив, что $\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \Delta \boldsymbol{u} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{u}$,

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} = 0. \tag{2.54}$$

T12 и T13. (общий случай)

Внешние и внутренние радиусы толстостенной сферы равны R_1 и R_2, внутри сферы действует давление p_1, снаружи действует p_2. Найдём деформацию и тензор напряжений для этой сферы.

Введём сферические координаты с началом в центре шара. В силу радиальности $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$, следует, что $\operatorname{rot} u = 0$, тогда уравнение (2.54) примет вид

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \tag{2.55}$$

с учётом (2.65),

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{r} = \mathrm{const} \equiv 3a,$$

тогда

$$d(r^2 u) = 3ar^2\, dr \quad \Rightarrow \quad u = ar + \frac{b}{r^2}.$$

Выпишем компоненты тензора деформации в сферических координатах:

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg}\theta + \frac{u_r}{r}.$$

В остальные не входит u_r, соответственно они равны 0. В частности, для нашего случая

$$u_{rr} = a - \frac{2b}{r^3}, \quad u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = a + \frac{b}{r^3}. \tag{2.56}$$

Также можем найти (диагональный) тензор напряжений :

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\Big[(1-\sigma)u_{rr} + 2\sigma u_{\theta\theta}\Big] = \frac{E}{1-2\sigma} a - \frac{2E}{1+\sigma}\frac{b}{r^3}, \tag{2.57}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\Big[(1+\sigma)u_{\theta\theta} + \sigma u_{rr}\Big] = \sigma_{\varphi\varphi}. \tag{2.58}$$

Также мы знаем следующие граничные условия:

$$\sigma_{rr}\big|_{r=R_1} = -p_1, \qquad \sigma_{rr}\big|_{r=R_2} = -p_2,$$

получаем

$$\boxed{a = \frac{p_1R_1^3 - p_2R_2^3}{R_2^3 - R_1^3}\frac{1-2\sigma}{E}, \qquad b = \frac{R_1^3R_2^3(p_1-p_2)}{R_2^3-R_1^3}\frac{1+\sigma}{2E}.} \tag{2.59}$$

T12 и T13. (тонкая сферическая оболочка)

Рассмотрим теперь случай, когда $h = R_2 - R_1 \ll R$.

$$a \approx \frac{R}{3h}\frac{1-2\sigma}{E}(p_1-p_2), \qquad b \approx \frac{R^4}{3h}(p_1-p_2)\frac{1+\sigma}{2E}.$$

Тогда деформация

$$\left(\text{пусть } \varkappa = \frac{R^2}{3h}(p_1-p_2), \text{ тогда}\right) \qquad u = \varkappa\frac{1-2\sigma}{E} + \varkappa\frac{1+\sigma}{2E} = \frac{r^2(1-\sigma)}{2Eh}(p_1-p_2).$$

Чуть интереснее выражение для σ_{rr} (введено обозначение $p = p_1 - p_2$):

$$\sigma_{rr} = \frac{R_1^3}{R_2^3-R_1^3}\Bigg(\underbrace{p_1 - p_2 - p_2\frac{3h}{R} - \frac{R_2^2}{r^3}(p_1-p_2)}_{p(1-R_2^2/r^3)}\Bigg),$$

посмотрим, однако, на среднее по r значение.

$$\frac{1}{h}(R_1+h)^3\int_{R_1}^{R_1+h}\frac{1}{r^3}\,dr = \frac{R_1+h}{2}\left(\frac{2}{R_1}+\frac{h}{R_1^2}\right),$$

тогда

$$\frac{R_1^3}{R_2^3-R_1^3}\left\langle p\left(1-\frac{R_2^2}{r^3}\right)\right\rangle = \boxed{\langle\sigma_{rr}\rangle = \frac{1}{2}\Big(p_1+p_2\Big).}$$

Найдём остальные компоненты

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{3}{2}\left(\frac{R_1^3}{R_2^3-R_1^3}\right)\Big(p_1-p_2\Big) = \frac{1}{2}\frac{R}{h}(p_1-p_2).$$

T14*. (решение для криволинейных координат, образующих ортогональный базис)

Хотелось бы выразить лапласиан Δp через частные производные в произвольной криволинейной системе координат. Легко показать, что

$$\Delta p = \operatorname{div}\operatorname{grad} p. \tag{2.60}$$

Так что начнём с вида $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ и $\operatorname{grad} f$ в криволинейной системе координат. Понадеемся, что достаточно рассмотреть случай криволинейных координат, образующих ортогональный базис в каждой точке пространства.

В криволинейных координатах базисные направления сформированы векторами $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{r}) \overset{\text{def}}{=} \partial\boldsymbol{r}/\partial q^i$. Для удобства введём единичные орты координатных направлений для ортогональной системы

$$\boldsymbol{e}_1(q) = \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}, 0, 0\right), \qquad \boldsymbol{e}_2(q) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}, 0\right), \qquad \boldsymbol{e}_3(q) = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\right). \tag{2.61}$$

Тогда

$$dq^j(\boldsymbol{e}_i) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\delta^i_j, \qquad dq^i\wedge dq^j(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}}\delta^i_k\delta^j_l. \tag{2.62}$$

Известно, что градиент функции соответствует дифференциальной 1-форме. Её (по вектору $\boldsymbol{A}$) можно записать как $\omega^1_A = a_i\,dq^i$. С учётом введеного базиса можно записать, что $\boldsymbol{A} = A^i\boldsymbol{e}_i$, $\forall\boldsymbol{A}\in T\mathbb{R}^3_q$. Из (2.62) получим, что

$$\omega^1_A(\boldsymbol{e}_i) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_i) = A^i = \frac{a_i}{\sqrt{g_{ii}}},$$

следовательно $a_i = A^i\sqrt{E_i}$, и, соответственно

$$\omega^1_A = A^i\sqrt{g_{ii}}dq^i. \tag{2.63}$$

Аналогично, пусть теперь $\operatorname{grad} f = A^i \boldsymbol{e}_i$. По определению

$$\omega^1_{\operatorname{grad} f} = d\omega^0_f = df = \frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i. \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\operatorname{grad} f = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\frac{\partial f}{\partial q^i}\boldsymbol{e}_i.}$$

Теперь найдём $\operatorname{div} \boldsymbol{B}$, как дифференциальную 3-форму. Для начала поймём, что для вектора $\boldsymbol{B}(q) = (B^i \boldsymbol{e}_i)(q)$ форма

$$\omega^2_B = b_1 dq^2 \wedge dt^3 + b_2 dq^3 \wedge dt^1 + b_3 dq^1 \wedge dt^2 \tag{2.64}$$

имеет следующий вид:

$$\omega^2_B(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = B^1.$$

С другой стороны, из (2.62) и (2.64),

$$\omega^2_B(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = b_1 dq^2 \wedge dq^3(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = \frac{b_1}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}.$$

Получаем, что $b_1 = B^1\sqrt{g_{22}g_{33}}$, аналогично можем получить, что $b_2 = B^2\sqrt{g_{11}g_{33}}$, $b_3 = B^3\sqrt{g_{11}g_{22}}$.

Теперь, из определения, получаем

$$\omega^3_{\operatorname{div} B} = d\omega^2_B = \sum_{\substack{i\neq j\neq k \\ P(i,g,k)=1}}^{3} \frac{\partial \sqrt{g_{jj}g_{kk}}B^i}{\partial q^i} dq^i \wedge dq^j \wedge dq^k.$$

Тогда

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\left(\frac{\partial\sqrt{g_{22}g_{33}}B^1}{\partial q^1} + \frac{\partial\sqrt{g_{33}g_{11}}B^1}{\partial q^2} + \frac{\partial\sqrt{g_{11}g_{22}}B^1}{\partial q^3}\right) \tag{2.65}$$

Собирая всё вместе получаем, что

$$\Delta f = \operatorname{div}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\frac{\partial f}{\partial q^i}\boldsymbol{e}_i\right) = \frac{1}{\det g}\sum_{\substack{i\neq j\neq k \\ P(i,g,k)=1}}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\left[\sqrt{\frac{g_{jj}g_{kk}}{g_{ii}}}\frac{\partial f}{\partial q^i}\right]\right). \tag{2.66}$$

В частности, для полярных

$$g_{ij} = \operatorname{diag}\left(1, r^2, 1\right) \qquad \Rightarrow \qquad \Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

T15*.

Запишем ковариантную производную вектора и ковектора:

$$\nabla_j v_m = \frac{\partial v_m}{\partial q^i} - \Gamma^i_{kj} v_i, \qquad \nabla_k v^j = \frac{\partial v^i}{\partial q^k} + \Gamma^i_{kj} v^j. \tag{2.67}$$

В таком случае

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\nabla_i v_j - \nabla_j v_i\Big) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial q^i} + \Gamma^k_{ji}v_k - \frac{\partial v_i}{\partial q^j} - \Gamma^k_{ij}v_k\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial q^i} - \frac{\partial v_i}{\partial q^j}\right),$$

что и требовалось доказать.

Перейдём к следующему заданию. Корректнее сказать, что **псевдо**вектор вихря ω может быть представлен $\omega_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j$, т.к. при выводе критически важно, что

$$\left[\boldsymbol{e}^1 \times \boldsymbol{e}^2\right] = \boldsymbol{e}^3, \tag{2.68}$$

соотвественно $\boldsymbol{\omega}$ не инвариантен к зеркальному отображению базиса.

Судя по символу Леви-Чевиты речь идёт о трёхмерной задаче, так что нам достаточно показать что

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{ij}\left[\boldsymbol{e}^i \times \boldsymbol{e}^j\right], \qquad \text{где} \qquad \omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^3 & -\omega^2 \\ -\omega^3 & 0 & \omega^1 \\ \omega^2 & -\omega^1 & 0 \end{pmatrix}_{ij}, \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\\ \omega^3\end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad \omega^\gamma = \frac{1}{2}\varepsilon^{\gamma\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}, \tag{2.69}$$

что проверяется прямой подстановкой:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega^3\underbrace{\left[\boldsymbol{e}^1 \times \boldsymbol{e}^2\right]}_{\boldsymbol{e}^3} + \left(-\omega^3\right)\underbrace{\left[\boldsymbol{e}^2 \times \boldsymbol{e}^1\right]}_{-\boldsymbol{e}^3} + \ldots = \begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\\ \omega^3\end{pmatrix}.$$

3 Контрольная работа I

Задача №1

Введём координаты так, чтобы $OX \parallel \omega$, и $OY \parallel \overrightarrow{OO_1} \equiv \boldsymbol{l}$. Запишем скорость точки O_1 двумя способами
$$\boldsymbol{v}_{O_1} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{l} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r}. \tag{3.1}$$
Скорость точки B
$$\boldsymbol{v}_B^r = 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r},$$
Ускорение точки B
$$\mathbf{w}_B^a = \mathbf{w}_B^r + \mathbf{w}_B^e + \mathbf{w}_B^c. \tag{3.2}$$
Что ж, по порядку
$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_B^r &= 2\boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 r & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \\
\mathbf{w}_B^e &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{l}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 l & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \\
\mathbf{w}_B^c &= 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_B^r = 4\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} 0 & -4\omega\omega_0 r & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},
\end{aligned}$$
где подразумевается, что
$$\omega = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ l \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Также имеет смысл найти из первого уравнения ω_0 и собрать всё вместе
$$\omega_0 = \frac{l}{r}\omega, \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{w}_B^a = -\begin{pmatrix} \omega^2 l^2/r \\ 5\omega l \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача №2

Мы знаем как изменяется со временем угловая скорость:
$$\omega(t) = \boldsymbol{\omega}_{\text{н}} + \int_0^t \boldsymbol{\varepsilon}(t)\, dt. \tag{3.3}$$
Знаем, что
$$\boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \qquad d\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\varepsilon}\, dt = -k\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\, dt. \tag{3.4}$$
Введём систему ккординат, OX которой в начальный момент времени такое, что $\boldsymbol{v}_0 \parallel OX$, а OY нормально к поверхности. Тогда
$$\boldsymbol{\omega}_{\text{н}} = \begin{pmatrix} \omega_{\text{н}} \sin\alpha & \omega_{\text{н}} \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 & r & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$
а из (3.4) получим дифференциальное уравнение
$$d\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = -k \begin{pmatrix} -\omega_z r \\ 0 \\ \omega_x r \end{pmatrix} dt \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} d\omega_x = k\omega_z r\, dt \\ d\omega_y = 0 \\ d\omega_z = -k\omega_x r\, dt \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \omega_z\, d\omega_z = -\omega_x\, d\omega_x.$$
Решая, находим
$$\omega_z^2 + \omega_x^2 = C^2 = \omega_{\text{н}}^2 \sin^2\alpha, \tag{3.5}$$
где C мы находим из момента $t = 0$.

Подставляя значение для ω_z, получим
$$d\omega_x = kr\sqrt{c^2 - \omega_x^2}\, dt, \quad \Rightarrow \quad \omega_x = C\sin(krt + C_t) = \bigg/ \begin{matrix} \omega_x(0) = \omega_{\text{н}} \sin\alpha \\ \Rightarrow C_t = \pi/2 \end{matrix} \bigg/ = \omega_{\text{н}} \sin(\alpha)\cos(krt).$$
Собирая всё вместе, получаем, что
$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_{\text{н}} \sin(\alpha)\cos(krt) \\ \omega_{\text{н}} \cos(\alpha) \\ \omega_{\text{н}} \sin(\alpha)\sin(krt) \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Найдём теперь $\boldsymbol{r}_O(t)$:

$$d\boldsymbol{r}_O = \boldsymbol{v}_O\, dt = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\, dt \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{r}_O = \frac{1}{k}\begin{pmatrix}\omega_{\text{н}}\sin(\alpha)\cos(krt)\\ 0\\ \omega_{\text{н}}\sin(\alpha)\sin(krt)\end{pmatrix} + \boldsymbol{C}_r,$$

где $\boldsymbol{C}_r$ находим из условия $\boldsymbol{r}_O(t=0)=\boldsymbol{r}$. Введём также некоторые обозначения для удобства записи,

$$\varkappa = \frac{1}{k}\omega_{\text{н}}\sin\alpha, \qquad \varphi = krt, \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{r}_O(t) = \varkappa\begin{pmatrix}\cos\varphi - 1\\ r/\varkappa\\ \sin\varphi\end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

В таком случае траектория будет окружностью, в плоскости zx с центром в $(-\varkappa, 0)$ и радиусом $\varkappa$.

Задача №3

Искать центр вращения – дело гиблое, лучше посмотрим с точки зрения A на точку C – центр масс, расположенный в $A+\overrightarrow{AB}/2$. С учётом того, что в начальный момент времени все скорости равны 0, получим

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}^e + \mathbf{w}_C^r, \tag{3.8}$$

где $\mathbf{w}^e = \mathbf{w}_A$, а $\mathbf{w}_C^r$ – вращение с угловым ускорением $\boldsymbol{\varepsilon}$ точки C относительно точки A, другими словами

$$\mathbf{w}_C^r = \boldsymbol{\varepsilon}\times\overrightarrow{AC}. \tag{3.9}$$

По теореме об изменение кинетического момента

$$J_C\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M}_C^e + 0 = \overrightarrow{CA}\times\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}\times\overrightarrow{AC}. \tag{3.10}$$

По теореме об изменение количества движения

$$m\mathbf{w}_C = \boldsymbol{R}^e = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g}. \tag{3.11}$$

Осталось выбрать хорошие оси и покоординатно это записать.

Так как не очень хочется задумываться об ускорении точки A, выберем ось $OX\perp\mathbf{w}_A$, получается повернутую на α от $\overrightarrow{AB}$ в начальный момент времени, OY выберем так, чтобы $\omega_z > 0$, тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix}0\\0\\\varepsilon\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}L\cos\alpha\\ L\sin\alpha\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_A = \begin{pmatrix}0\\ \mathrm{w}_a\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}_C^r = \boldsymbol{\varepsilon}\times\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-\varepsilon L\sin\alpha\\ \varepsilon L\cos\alpha\\ 0\end{pmatrix},$$

Момент инерции для однородного стержня $J_c = mL^2/3$, в таком случае из проекции (3.10) на ось OZ найдём

$$J_C\varepsilon = TL\sin\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon = \frac{3T\sin\alpha}{mL}. \tag{3.12}$$

Перепишем (3.11) в проекции на ось OX и подставим ε:

$$-\varepsilon L\sin\alpha = \frac{T}{m} - g\cos\alpha, \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{T = mg\frac{\sin\alpha}{1+3\sin^2\alpha}}.$$

4 Динамика II

4.8 Геометрия масс

11.8(7)

Запишем тензор квадрата расстояния

$$\widetilde{r_i}^{\mathrm{T}}\widetilde{r_i} = \begin{pmatrix}y_i^2+z_i^2 & -x_iy_i & -x_iz_i\\ -x_iy_i & x_i^2+y_i^2 & -y_iz_i\\ -x_iz_i & -y_iz_i & x_i^2+y_i^2\end{pmatrix} = \hat{j}_i, \tag{4.1}$$

суммируя, получим

$$\hat{J}_0 = \begin{pmatrix}J_x & -J_{xy} & -J_{xz}\\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz}\\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z\end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

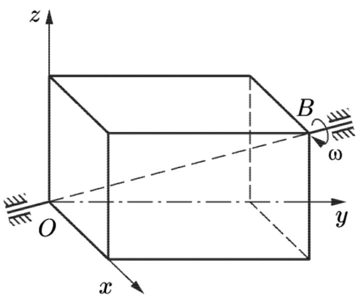


Рис. 5: К задаче 11.18

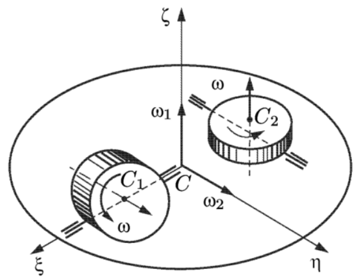


Рис. 6: К задаче 11.27

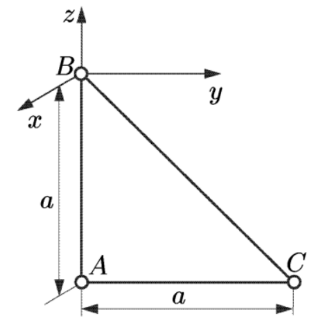


Рис. 7: К задаче 11.27

В силу симметрии системы $J_x = J_y = J_z$, выбрав сферические координаты найдём J_z:

$$J_z = \int_M (y^2 + x^2)\, dm = \rho \int_V (y^2 + x^2)\, dV = \rho \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi/2} r^4 \sin^3\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta = \frac{2}{5} R^5 \frac{1}{R^2} \left(\frac{4}{3} R^3 \rho \pi\right) = \frac{2}{5} M R^2. \qquad (4.3)$$

11.12

Тензор инерции твердого тела в базисе $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ имеет такой вид

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}, \qquad D \neq 0.$$

Хотелось бы его к диагональному виду привести. Повернем оси вокруг оси Ox на некоторый угол α и приведём к диагональному виду

$$S^{\mathrm{T}} \hat{J} S = \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

После нескольких монотонных операций (ограничив все на плоскость Oxy) получаем

$$S^{\mathrm{T}} J S\Big|_{Oyz} = \begin{pmatrix} B\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + D\sin 2\alpha & B\sin 2\alpha/2 - C\sin 2\alpha/2 - D\cos 2\alpha \\ B\sin 2\alpha/2 - C\sin 2\alpha/2 - D\cos 2\alpha & B\cos^2\alpha + C\cos^2\alpha - D\sin 2\alpha \end{pmatrix},$$

откуда находим α

$$\cos 2\alpha = \frac{B - C}{\sqrt{4D^2 + (B - C)^2}}$$

и, соответсвенно,

$$A' = A, \qquad B' = \frac{1}{2}\left(B + C + \sqrt{(B - C)^2 + 4D^2}\right), \qquad C' = \frac{1}{2}\left(B + C - \sqrt{(B - C)^2 + 4D^2}\right). \qquad (4.4)$$

Направляющие же векторы найдём, повернув базисные векторы,

$$S \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_2' \\ \boldsymbol{e}_3' \end{pmatrix}, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \boldsymbol{e}_2' = (\boldsymbol{e}_2 + \operatorname{tg}\alpha\, \boldsymbol{e}_3)/n_2, \\ \boldsymbol{e}_3' = (-\operatorname{tg}\alpha\, \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)/n_3 \end{cases}$$

Возвращаясь в трёхмерие наш новый базис (который остается отнормировать)

$$\boldsymbol{e}_1' = (1,\ 0,\ 0), \qquad \boldsymbol{e}_2' = (0,\ D,\ (B' - B)), \qquad \boldsymbol{e}_3' = (0,\ C' - C,\ D). \qquad (4.5)$$

11.18

Поместим начало координат в центр масс (потому что так привычнее считать) и найдём тензор инерции по (4.1) и (4.2), аналогично (4.3), несколько раз проинтегрировав по параллелепипеду

$$J_z = \rho \int_V (x^2 + y^2)\, dV = \rho \int\limits_{-a/2}^{a/2} dx \int\limits_{-b/2}^{b/2} dy \int\limits_{-c/2}^{c/2} dz\ (x^2 + y^2) = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2),$$

аналогичные результаты получим для J_y, J_x

$$J_y = \ \ldots \ = \frac{1}{12}m(a^2+c^2), \qquad J_x = \ \ldots \ = \frac{1}{12}m(b^2+c^2).$$

Остается найти осевые моменты инерции

$$J_{xy} = \rho \int_V xy\, dV = \rho\frac{1}{16}a^2b^2c^2 = \frac{1}{16}mab, \quad J_yz = \ \ldots \ = \frac{1}{16}mbc, \quad J_xz = \ \ldots \ = \frac{1}{16}mac.$$

Таким образом

$$\hat{J}_O = \frac{1}{48}m\begin{pmatrix} 4(b^2+c^2) & -3ab & -3ac \\ -3ab & 4(a^2+c^2) & -3bc \\ -3ac & -3bc & 4(a^2+b^2) \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Кинетический момент найдём по определению, как

$$\mathbf{K}_O = \hat{J}_O\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{K}_A = \hat{J}_A\boldsymbol{\omega},$$

где ω и $\hat{J}_A$

$$\hat{J}_A = \hat{J} + m\hat{j}_{OA}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,(a,\ b,\ c)^{\mathrm{T}}$$

Заметим что $\hat{j}_{OA}$ будет аналогичен (4.1), тогда осталось найти $\mathbf{K}_O$:

$$\mathbf{K}_O = \hat{J}_O\boldsymbol{\omega} = \frac{\omega m}{48\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix} a(b^2+c^2) \\ b(a^2+c^2) \\ c(a^2+b^2) \end{pmatrix}.$$

11.27

Проинтегрировав как в задачах 11.18 и 11.8(7) найдём, что относительно центра масс тензор инерции $\hat{J}_O$ диска в главных осях имеет вид

$$\hat{J}_C = \frac{1}{4}mR^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Кинетическая энергия тела может быть найдена, как

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\hat{J}_O\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}mv_O^2.$$

Запишем T для случая $\boldsymbol{\omega}_1 \parallel Oz$, как сумму вращательной и поступательной энергии для двух дисков.

Поступательные, в силу геометрии системы, у дисков равны, первый диск вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{D1}} = (0,\ 0,\ \omega+\omega_1)$, а второй с $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{D2}} = (0,\ \omega,\ \omega_1)$. Тензор инерции для второго диска аналогичен (4.7), только с 2 по оси Oy. Собирая всё вместе

$$T = 2\times\frac{1}{2}m\omega_1^2a^2 + \underbrace{\frac{1}{4}mR^2(\omega+\omega_1)^2}_{\vec{\omega}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{D1}}\hat{J}_{0,\mathrm{D1}}\vec{\omega}_{\mathrm{D1}}} + \underbrace{\frac{1}{8}mR^2\omega_1^2 + \frac{1}{4}mR^2\omega^2}_{\vec{\omega}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{D2}}\hat{J}_{0,\mathrm{D2}}\vec{\omega}_{\mathrm{D2}}} = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \left(a^2+\frac{3}{8}R^2\right)\omega_1^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega\omega_1.$$

Также заметим, что вопросы задачи симметричны с точностью до замены дисков, что упрощает нам дело в плане поиска и записи ответа:

$$T_i = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \left(a^2+\frac{3}{8}R^2\right)\omega_i^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega\omega_i, \qquad i=1,2. \tag{4.8}$$

11.92

Найдём тензор инерции для точки B по (4.2):

$$\hat{J}_B = ma^2\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вспоминая результаты задачи №11.12, где подобное приведение к главным осям решено в общем виде, находим

$$B' = \frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right), \qquad C' = \frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right).$$

Главные оси же параллельны векторам

$$\boldsymbol{e}_1' = (1,\ 0,\ 0)\,, \quad \boldsymbol{e}_2' = \left(0,\ -2,\ \sqrt{5}-1\right), \quad \boldsymbol{e}_3' = \left(0,\ 1-\sqrt{5},\ -2\right).$$

Отнормировав которые найдём новый базис.

Тензор инерции точки A и эллипсоид инерции, соответственно, равны

$$\hat{J}_A = ma^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M = \{2x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

где M, как можно заметить, является эллипсоидом инерции ($J_y = J_z$).

4.9 Динамика твёрдого тела

11.45

Твердое тело с неподвижной точкой движется под действием момента

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\omega},$$

где вектор $\boldsymbol{a}$ вращается вместе с твёрдым телом. Хотим перейти к динамическим уравнениям Эйлера, так что

$$\hat{J}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_\xi \\ a_\eta \\ a_\zeta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_O = \begin{pmatrix} a_\eta r - a_\zeta q \\ a_\zeta p - a_\xi r \\ a_\xi r - a_\eta p \end{pmatrix}.$$

Для начала попробуем в лоб, домножив динамические уравнения эйлера на p, q, r соответсвенно

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = -M_\xi \\ B\dot{q} + (A-C)pr = -M_\eta \\ C\dot{r} + (B-A)pq = -M_\zeta \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad A\dot{p}p + B\dot{q}q + C\dot{r}r = 0.$$

Не густо.

Пойдём в чуть более низкоуровневую запись

$$\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt} = \dot{K}_{Oi}\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Т.к. $\dot{a}_i \boldsymbol{e}_i = 0$, то

$$(\dot{K}_{Oi} + \dot{a}_i)\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{K}_O + \boldsymbol{a}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{K}_O + \boldsymbol{a}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{K}_0 + \boldsymbol{a} = \text{const}} \text{ — первый I интеграл.}$$

Теперь, т.к. $\boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{M}_O$ предположим, что $T = \text{const}$. Действительно

$$dT = \partial A = \cancel{(\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{v}_O)}\, dt + \cancel{(\boldsymbol{M})_O \cdot \boldsymbol{\omega})}\, dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \text{const}} \text{ – второй I интеграл.}$$

11.59

Есть твёрдое тело в отсутсвие внешних сил с $\boldsymbol{K}_O = \text{const}$ и $A = B \neq C$. Выберем в качестве оси динамической симметрии ось $O\zeta$. Запишем динамические уравнения Эйлера

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-A)qr = 0 \\ A\dot{q} - (C-A)pr = 0 \\ C\dot{r} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C\dot{r} = 0, \quad Cr_0 = K_O \cos\theta = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r(t) = r_0 & = \text{const} \\ \theta(t) = \theta & = \text{const} \end{cases}$$

Посмотрим теперь на $\|\boldsymbol{K}_O\|$

$$K_O^2 = A^2(p^2 + q^2) + (K_O \cos\theta)^2 \quad \Rightarrow \quad p^2 + q^2 = \left(\frac{K_0 \sin\theta}{A}\right)^2.$$

Теперь посмотрим на $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\varphi}} + \dot{\boldsymbol{\psi}} + \cancel{\dot{\boldsymbol{\theta}}},$$

проецируя всё на базис $O\xi\eta\zeta$ нахожим, что

$$\begin{cases} r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \\ \sqrt{p^2 + q^2} = \dot{\psi}\sin\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\psi} = K_O/A & = \text{const} \\ \dot{\varphi} = r_0\,(1 - C/A) & = \text{const} \end{cases}$$

Теперь мы готов записать *параметры регулярной прецессии в случае Эйлера*:

$$\cos\theta = \frac{Cr_0}{K_0}, \quad \dot{\psi} = \frac{K_O}{A}, \quad \dot{\varphi} = r_0\left(1 - \frac{C}{A}\right), \qquad K_O = \sqrt{C^2 r_0^2 + A^2(\omega_0^2 - r_0^2)}. \tag{4.9}$$

11.63

Для начала поймём куда диск движется, точнее найдем (или хотя бы сделаем шаги в эту сторону) мгновенную ось вращения проходящую через точку A и некоторую точку C.

Для начала посмотрим на геометрию системы (введя неизвестные a, b, c):

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -r \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} r \\ -r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CA} = 0 \\ \boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CB} \\ \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CD} \end{cases}, \quad \begin{cases} \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \\ \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \end{cases},$$

Для удобства далее будем считать $\boldsymbol{\omega} = k\overrightarrow{CA}$. Посчитаем векторы скоростей в нашеих обозначениях

$$\boldsymbol{v}_D = kr \begin{pmatrix} c \\ c \\ -b-a \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_B = k\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{AB} = kr \begin{pmatrix} c \\ -c \\ b-a \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad a = b$$

Так как мы знаем абсолютные значения скоростей точек, то запишем

$$v_D^2 - v_B^2 = v_0^2 = 4a^2k^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v_0}{2rk}.$$

Подставив теперь значения a в v_B^2 получим

$$v_B^2 = 2k^2c^2r^2 = v_0^2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{v_0\sqrt{2}}{2kr}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = k \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{v_0}{2r} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Теперь найдём скорость центра масс

$$\boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{CO} = \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{r}_{CA} + \overrightarrow{AO}\right) = \boldsymbol{\omega} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{v_0}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r}_O(t) = \begin{pmatrix} v_0 t/\sqrt{2} \\ 0 \\ -gt^2/2 + v_0 t/2 \end{pmatrix}.$$

Теперь мы знаем как будет двигаться в условиях гравитации наш диск (его центр масс)!

Теперь посмотрим на вращение диска относительно центра масс. Для этого пересядем в СО падающую с $\boldsymbol{g}$, теперь $\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{0}$ и мы пришли к случаю Эйлера (который подробно был рассмотрен в задаче №11.59).

Для начала вспомним, что для диска кинетический момент

$$\boldsymbol{K}_O = \hat{J}_O \boldsymbol{\omega} = \frac{mr^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{v_0}{2r} = \frac{mrv_0}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \text{const}, \quad \Rightarrow \quad K_O = \frac{\sqrt{10}}{8} mrv_0.$$

Зная $\boldsymbol{K}_O$ можем найти ось прецессии $\boldsymbol{e} \parallel \boldsymbol{K}_O$

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{\sqrt{10}} \left(1,\ 1,\ 2\sqrt{2}\right).$$

Подставляя параметры системы в уравнения (4.9), найдём

$$\dot{\psi} = \frac{K_O}{A} = \frac{\sqrt{10}}{2}\frac{v_0}{r}, \qquad \dot{\varphi} = r_0 \left(1 - \frac{C}{A}\right) = -\frac{v_0\sqrt{2}}{2r}, \qquad \cos\theta = \frac{Cr_0}{K_O} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

11.72

Решим чуть более общую задачу о движении тяжелого симметричного волчка с неподвижней нижней точкой. Начало координат O совпадает с неподвижной точкой волчка, расстояние до центра масс равно l.

Запишем кинематические и динамические уравнения Эйлера

$$\begin{cases} p = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \\ q = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi, , \\ r = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}. \end{cases} \quad \begin{cases} I_1\dot{p} + (I_3 - I_2)qr = -M_\xi \\ I_2\dot{q} + (I_1 - I_3)pr = -M_\eta \\ I_3\dot{r} + (I_2 - I_1)pq = -M_\zeta \end{cases}, \quad \hat{J}_O = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}.$$

Кинетическая энергия волчка (с учетом параллельного переноса тензора инерции с центра масс к точке O)

$$T = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \hat{J}_O \boldsymbol{\omega} = \frac{I_1 + ml^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2.$$

Потенциальная энергия, соответсвенно, равна

$$\Pi = mgl\cos\theta.$$

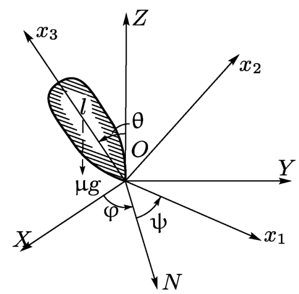


Рис. 8: К задаче 11.72

Собирая вместе, находим

$$L = T - \Pi.$$

Понятно, что $K_3 = \text{const}$, докажем также что $K_z = \text{const}$. Действительно,

$$\frac{dK_z}{dt} = \boldsymbol{M}_A\Big|_Z + \cancel{\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{v}_O} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad K_z = \text{const}.$$

Явно выпишем их

$$\begin{cases} K_3 = \partial L/\partial\dot\psi = I_3\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right) \\ K_z = \partial L/\partial\dot\varphi = \left((I_1 + ml^2)\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta\right)\dot\varphi + I_3\dot\psi\cos\theta. \end{cases} \tag{4.10}$$

Кроме того, в системе сохраняется энергия

$$E = T + \Pi = \frac{1}{2}(I_1 + ml^2)\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right)^2 + mgl\cos\theta.$$

Из (4.10) находим явные выражения для $\dot\varphi$ и $\dot\theta$

$$\dot\varphi = \frac{K_z - K_3\cos\theta}{(I_1 + ml^2)\sin^2\theta},$$

$$\dot\psi = \frac{K_3}{I_3} - \cos\theta\frac{K_z - K_3\cos\theta}{(I + ml^2)\sin^2\theta}.$$

Подставляя это в выражения для энергии E получим

$$E = \frac{1}{2}(I_1 + ml^2)\dot\theta^2 + \frac{(K_z - K_3\cos\theta)^2}{2(I_1 + ml^2)\sin^2\theta} + \frac{K_3^2}{2I_3} + mgl\cos\theta. \tag{4.11}$$

Таким образом мы находим

$$\dot\theta = \frac{d\theta}{dt} = f_{\dot\theta}(E, K_z, K_3) \qquad \Rightarrow \qquad t = \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{f_{\dot\theta}(E, K_z, K_3)}, \tag{4.12}$$

что и является нашим искомым решением в квадратурах. Конкретно для №11.72 следует положить $I_3 = 0$ и, в силу доступного для стержня произволя, $\dot\psi = 0$. Слагаемые вида K_3/I_3 в таком случае просто не возникнут, решение сохранится.

11.118

Как и в решение к №11.72 у нас симметричный волчок. Требуется определить начальную угловую скорость прецессии $\dot\varphi_0$, чтобы $\dot\theta = 0$. Формально можем поставить задачу несколько иначе, какой должен быть момент внешних сил $\boldsymbol{M}_O$ чтобы происходила регулярная прецессия $\dot\theta = 0$?

Для начала введём отдельно $\boldsymbol{\omega}_1 \parallel O\xi$ и $\boldsymbol{\omega}_2 \parallel OZ$. По раннее проделанной работе с регулярной прецессией, мы знаем, что K_z и K_3 постоянны, соответсвенно $\omega_1, \omega_2, \omega = \text{const}$. Аналогично случаю Эйлера (см. №???)

$$(K_O)_\xi = Cr, \qquad (K_O)_Z = A\sqrt{q^2 + q^2}.$$

То есть $\boldsymbol{K}_O \in O\xi Z$ и $K_O = \text{const}$. Но, т.к. плоскость $O\xi Z$ вращаеся с угловой скорсотью $\boldsymbol{\omega}_2$ то и вектор $\boldsymbol{K}_O$ аналогично. Тогда для $\boldsymbol{M}_O$ верно, что

$$\frac{d\boldsymbol{K}_O}{dt} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{K}_O = \boldsymbol{M}_O. \tag{4.13}$$

Нетрудно показать, что

$$\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{K}_O = \frac{\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1}{\|\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1\|}\omega_2 \sin\theta \left(C(\omega_1 + \omega_2\cos\theta) - A\omega_2\cos\theta\right)$$

Т.к. $\|\omega_2 \times \omega_1\| = \omega_1\omega_2\sin\theta$, то

$$\boldsymbol{M}_O = (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1)\left[C + (C-A)\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta\right]. \tag{4.14}$$

Это *основная формула гироскопии*, так что, наверное, можно было принять её на веру. В частном случае, когда $\omega_1 \gg \omega_2$ можно приближенно записать эту формулу, как

$$\boldsymbol{M}_O = C\left(\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1\right). \tag{4.15}$$

Конкретно для нашей задачи (4.14) перепишется как

$$\dot{\varphi}\omega\sin\theta\left(C + (C-A)\frac{\dot{\varphi}}{\omega}\cos\theta\right) = mgl\sin\theta,$$

т.к. мы действительно требуем регулярной прецессии. Так получаем квадратное уравнение вида

$$(C-A)\dot{\varphi}^2\cos\theta + C\omega\varphi - mgl = 0 \quad\Rightarrow\quad \dot{\varphi} = \frac{-C\omega \pm \sqrt{C^2\omega^2 + (C-A)mgl\cos\theta}}{2(C-A)\cos\theta}. \tag{4.16}$$

Стоит заметить, что при $C^2\omega^2 + (C-A)mgl\cos\theta < 0$ регулярная прецессия, по всей видимости, невозможна. При $\omega >> \dot{\varphi}$ угловая прецессия будет равна

$$\dot{\varphi} = \frac{mgl}{C\omega}, \tag{4.17}$$

и, как видно, не зависит от угла нутации.

Теперь про силы. Запишем II закон Ньтона в проекции на вертикаль и нормаль к вертикали, повернутую на $+\varphi$ от X, получим

$$\begin{cases} N_x = m\dot{\varphi}^2 l\sin\theta \\ N_y - mg = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad N = m\sqrt{g^2 + \dot{\varphi}^2 l^2\sin^2\theta}. \tag{4.18}$$

T.16*

Запишем динамические уравнения Эйлера

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = -M_\xi \\ B\dot{q} + (A-C)pr = -M_\eta \\ C\dot{r} + (B-A)pq = -M_\zeta \end{cases}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \qquad \hat{J}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

Тело вращается относительно закрепленного центра масс O. По условию

$$\boldsymbol{M}_O = -\gamma\boldsymbol{\omega}, \qquad A = B > C.$$

Хочется доказать, что мгновенная ось вращения тела асимптотически стремится стать ортогональной оси динамической симметрии тела $(O\zeta)$. Если чуть формализовать, то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\|\boldsymbol{\omega}^\zeta\|}{\|\boldsymbol{\omega}^{\xi\eta}\|} = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2}} = 0, \tag{4.20}$$

равносильно поставленному условию.

Конкретизируем динамические уравнения Эйлера под наш случай:

$$A\dot{p} + (C-A)qr = -\gamma p \tag{4.21}$$

$$A\dot{q} - (C-A)pr = -\gamma q \tag{4.22}$$

$$C\dot{r} = -\gamma r \tag{4.23}$$

Из (4.23) найдём

$$r = \omega^\zeta = r_0\exp\left(-\frac{\gamma}{C}t\right).$$

Теперь посмотрим на $p\cdot(4.21) + q\cdot(4.22)$ равное полному дифференциалу по времени

$$p\dot{p} + q\dot{q} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(p^2+q^2\right) = -\frac{\gamma}{A}\left(p^2+q^2\right).$$

Естественно решить это уравнение относительно $\omega^{\xi\eta}$

$$\omega^{\xi\eta} = -\frac{\gamma}{A}\omega^{\xi\eta} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{p^2+q^2} = \omega^{\xi\eta} = \omega_0^{\xi\eta}\exp\left(-\frac{\gamma}{A}t\right).$$

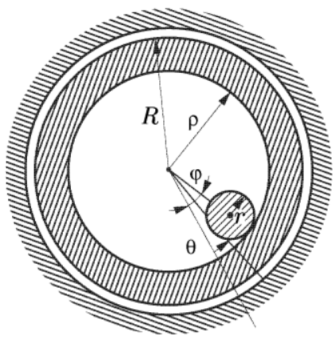


Рис. 9: К задаче 12.46

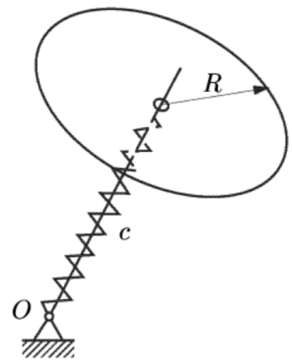


Рис. 10: К задаче 12.59

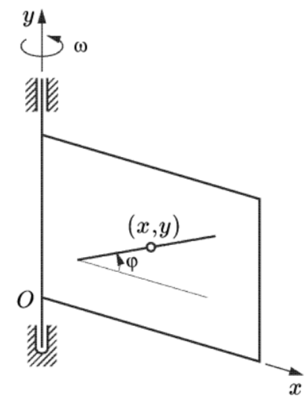


Рис. 11: К задаче 12.61

Подставляя всё в (4.20) находим

$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{\omega^{\zeta}}{\omega^{\xi\eta}}\right] = \frac{r_0}{\omega_0^{\xi\eta}}\cdot\lim_{t\to\infty}\left[\exp\left(\frac{\gamma}{AC}\underbrace{(C-A)}_{<0}t\right)\right] = 0, \qquad \text{Q. E. D.}$$

5 Аналитическая механика

5.10 Уравнения Лагранжа

12.6 (в)

Проверим, является ли интегрируемой связь

$$\dot y - z\dot x = 0.$$

В случае интегрируемости связи существовали бы запрещенные положения системы. Покажем же что в действительности мы можем попасть из любой точки в любую. В силу отсутсвия ограничений на $\dot z$, мы свободно можем перемещаться вдоль оси z при $\dot x, \dot y = 0$. Пусть мы оказались в $z = 2$, тогда при движении

$$\urcorner\ \dot x\,dt = \xi,\quad \dot y\,dt = 2\xi,\qquad \Rightarrow\qquad (0,0,2)\longrightarrow(\xi,2\xi,2).$$

Теперь по $\dot x, \dot y = 0$ перейдём в $z = 1$, тогда

$$\urcorner\ \dot x\,dt = -\xi,\quad \dot y\,dt = -\xi,\qquad \Rightarrow\qquad (\xi,2\xi,1)\longrightarrow(0,\xi,1).$$

Собирая всё вместе,

$$(0,0,0)\overset{\vec r=(0,0,\neq 0)}{\longrightarrow}(0,0,2)\overset{\vec r\,dt=(\xi,2\xi,2)}{\longrightarrow}(\xi,2\xi,2)\overset{\vec r=(0,0,\neq 0)}{\longrightarrow}(0,0,1)\overset{\vec r\,dt=(-\xi,-\xi,1)}{\longrightarrow}(0,\xi,1)\overset{\vec r=(0,0,\neq 0)}{\longrightarrow}(0,\xi,0).$$

Получается допустимы перемещения из $\boldsymbol r_1$ в $\boldsymbol r_2$ $\forall \boldsymbol r_1, \boldsymbol r_2$, следовательно **связь не является интегрируемой**.

12.12

Найдём уравнения движения для двух материальных точек, массами m_1 и m_2, притягивающихся по закону Ньютона. В качестве обобщенных координат выберем x, y, z центра масс системы, расстояние между точками r и углы φ, θ, определяющие направление прямой.

Потенциальная энергия системы Π

$$\Pi = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r}.$$

Для каждого из тел можем записать расстояние до центра масс и абсолютное положение:

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}r,\qquad r_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}r,\qquad \begin{cases} x_1 = x + r_1\sin\theta\cos\varphi,\\ y_1 = y + r_1\sin\theta\cos\varphi,\\ z_1 = z + r_1\cos\theta.\end{cases}\qquad \begin{cases} x_2 = x + r_2\sin\theta\cos\varphi,\\ y_2 = y + r_2\sin\theta\cos\varphi,\\ z_2 = z + r_2\cos\theta.\end{cases}$$

Вспомнив, что для сферических координат(r,θ,φ) метрический тензор $g_{ij} = \operatorname{diag}\left(1,\ r^2,\ r^2\sin^2\theta\right)$, найдём квадрат относительной скорости

$$v_1^2(r_1) = g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j = r_1^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + r_1^2\dot{\theta}^2 + \dot{r_1}^2 \quad \Rightarrow \quad v_1^2(r_1) = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 \cdot v_1^2(r).$$

Теперь можем записать кинетическую энергию движения (T_1, T_2 – кинетические энергии движения тел относительно центра масс) :

$$T_1 + T_2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{d}{dt}(x,\ y,\ z)\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\right) + \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right).$$

И, наконец, лагранжиан системы

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\right) + \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) + \gamma\frac{m_1m_2}{r}. \tag{5.1}$$

Найдём уравнения движения системы относительно центра масс:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \dfrac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{r}} - \dfrac{\partial L}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\varphi}\left(r\dot{\theta}\sin(2\theta) + \dot{r}\dot{\varphi}(1-\cos 2\theta)\right) + \dfrac{1}{2}r\ddot{\varphi}\,(1-\cos 2\theta) = 0, \\ \gamma(m_1+m_2) - r^3\left(\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\right) + r^2\ddot{r} = 0, \\ 2\dot{\theta}\dot{r} + r\ddot{\theta} - \dfrac{1}{2}r\sin(2\theta)\dot{\varphi}^2 = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

И для центра масс:

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = 0, \qquad \ddot{z} = 0. \tag{5.3}$$

Что логично, на центр масс не действует никаких сил.

Теперь к интегралам системы. Пусть $\frac{d}{dt}(x_1, y_1, z_1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{v}_1$, аналогично для второго тела. Во-первых сохраняется количество движения системы ($x,\ y,\ z$ не входят явно в L), также не входят $t,\ \varphi$, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \\ L \neq L(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = \text{const}, \\ r^2\dot{\varphi}\sin^2\theta = \text{const}, \\ E = \Pi + T = \text{const}. \end{cases} \tag{5.4}$$

Вообще, в силу отсутсвия внешних сил на систему, сохраняется кинетический момент,

$$\boldsymbol{K} = m_1\boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{v}_2 = \text{const}. \tag{5.5}$$

12.29

Два однородных стержня длины l каждый образую плоский двойной маятник. Составим уравнения движения в форме Лагранжа.

Выберем начала координат в точке подвеса. Тогда координаты центра масс второго стержня

$$\begin{cases} x_2 = l\sin\varphi_1 + (l/2)\sin\varphi_2, \\ y_2 = l\cos\varphi_1 + (l/2)\cos\varphi_2. \end{cases}$$

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = -mg\left(\frac{l}{2}\cos\varphi_1\right) - mg\left(l\cos\varphi_1 + \frac{l}{2}\cos\varphi_2\right).$$

Кинетическая энергия первого стержня

$$T_1 = \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}_1^2 = \frac{l^2m}{6}\dot{\varphi}^2.$$

Для второго стержня найдём кинетическую энергию, рассмотрев его вращение относительно центра масс:

$$T_2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\varphi}_2^2.$$

Лагранжиан системы:

$$L = T - \Pi = ml^2\left[\frac{g}{2l}\left(3\sin\varphi_1 + \cos\varphi_2\right) + \frac{1}{2}\cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \frac{2}{3}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{6}\dot{\varphi}_2^2\right]. \tag{5.6}$$

Тогда уравнения движения системы

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1} - \dfrac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2} - \dfrac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 9(g/l)\sin\varphi_1 + 3\sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot\varphi_2^2 + 3\cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot\varphi_2 + 8\ddot\varphi_1 = 0, \\ 3(g/l)\sin\varphi_2 - 3\sin(\varphi_1-\varphi_2)\dot\varphi_1^2 + 3\cos(\varphi_1-\varphi_2)\ddot\varphi_1 + 2\ddot\varphi_2 = 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

12.46

Составим уравнения движения в форме Лагранжа для системы, представленнйо на рис. 9 Для начала запишем потенциальную энергию системы, как

$$\Pi = -(\rho - r)\cos(\varphi+\theta).$$

Момент инерции полого цилиндра:

$$I_1 = \int_\rho^R \sigma r^2\, dV \quad \overset{dV=h2\pi r\, dr}{\longrightarrow} \quad I_1 = 2\pi\sigma h \int_\rho^R r^3\, dr = \frac{1}{2}\left(R^2-\rho^2\right)(R^2+\rho^2)\pi h\sigma = \frac{1}{2}M\left(R^2+\rho^2\right).$$

Тогда его кинетическая энергия

$$T_1 = \frac{1}{4}M\left(R^2+\rho^2\right)\dot\theta^2.$$

Скорость центра масс сплошного цилиндра:

$$v_2 = \dot\varphi(\rho - r).$$

Пусть цилиндр катится с угловой скоростью ω, тогда запишем условие того, что он не проскальзывает

$$(\rho-r)\dot\varphi = \rho\dot\theta + \omega r, \quad \Rightarrow \quad \omega = (\rho-r)\dot\varphi - \rho\dot\theta.$$

Тогда кинетическая энергия сплошного цилиндра

$$T_2 = \frac{1}{2}m\Big(\dot\varphi(\rho-r)\Big)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\omega^2.$$

Лагранжиан системы:

$$L = mg(\rho-r)\cos\varphi + m\left(\frac{1}{2}\dot\varphi^2(\rho-r)^2 + \frac{1}{4}\Big(\dot\theta\rho - \dot\varphi(\rho-r)\Big)^2\right) + \frac{1}{4}M\left(R^2+\rho^2\right)\dot\theta^2. \tag{5.8}$$

Соответсвенно, уравнения движения системы

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta} - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -\ddot\theta\rho + 3\ddot\varphi\,(\rho-r) + 2g\sin(\varphi) = 0, \\ M\ddot\theta\left(R^2+\rho^2\right) + \rho m\Big(\ddot\theta\rho - \ddot\varphi\,(\rho-r)\Big) = 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

12.59

Составим уравнения движения в форме Лагранжа для системы, представленнйо на рис. 10. Для начала перейдём в сферические координаты:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\cos\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Для начала запишем потенциальную энергию системы, как

$$\Pi = mgz + \frac{1}{2}k(r_0 - r)^2.$$

Как уже было показано в №12.12 скорость центра масс диска

$$v^2 = g_{ij}\dot q^i \dot q^j = r^2\sin^2\theta\dot\varphi^2 + r^2\dot\theta^2 + \dot r^2.$$

Также запишем кинематические уравнения Эйлера и момент инерции диска:

$$\boldsymbol{\omega} \overset{\text{в СО диска}}{=} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} \omega_1 = \dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi, \\ \omega_2 = \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi,\,, \\ \omega_3 = \dot\psi\cos\theta + \dot\varphi, \end{cases} \qquad \hat J = \frac{mR^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Кинетическую энергию диска тогда найдём, как
$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\hat{J}\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}m\left(r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\right).$$
Соответственно, лагранжиан системы:
$$\begin{aligned} L/m = &+\frac{1}{8}R^2\left(\dot{\psi}^2\cos^2\theta + \dot{\psi}^2 + 4\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\varphi}^2\right) + \\ &+\frac{1}{2}r^2\left(\dot{\theta}^2 r^2 + \dot{\varphi}^2 r^2\sin^2\theta + \dot{r}^2\right) - \\ &- gr\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{k}{m}\left(r_0 - r\right)^2. \end{aligned} \tag{5.10}$$
Уравнения движения системы:
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial\psi} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0. \tag{5.11}$$
Подставляя L, получим уравнения движения в чуть менее элегантной форме:
$$\begin{aligned} R^2\left(\ddot{\psi}\cos(\theta) + \ddot{\varphi} - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin(\theta)\right) + 2\ddot{\varphi}r^2\sin^2(\theta) + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}r^2\sin(2\theta) + 4\dot{\varphi}\dot{r}r\sin^2(\theta) = 0, \\ R^2\ddot{\theta} + R^2\dot{\psi}\left(\dot{\psi}\cos(\theta) + 2\dot{\varphi}\right)\sin(\theta) + 4\ddot{\theta}r^2 + 8\dot{\theta}\dot{r}r - 2\dot{\varphi}^2 r^2\sin(2\theta) - 4gr\sin(\theta) = 0, \\ \ddot{\psi}\cos^2(\theta) + \ddot{\psi} + 2\ddot{\varphi}\cos(\theta) - \dot{\psi}\dot{\theta}\sin(2\theta) - 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin(\theta) = 0, \\ 2\ddot{r}m + 2gm\cos(\theta) - 2k\left(-r + r_0\right) - 2mr\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2(\theta)\right) = 0. \end{aligned} \tag{5.12}$$

12.61

Составим уравнения движения в форме Лагранжа для системы, представленнйо на рис. 11. Хотелось бы найти уравнения относительного движения стержня в форме Лагранжа.

Потенциальная энергия стержня
$$\Pi = mgy.$$
Записав кинетическую энергию,, рассматривая движение центра масс и вращение относительно него, найдём
$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}m\left(\dot{y}^2 + \omega^2x^2 + \dot{x}^2\right) + \frac{1}{12}ml^2\left(\dot{\varphi}^2 + \omega^2\cos^2\varphi\right) - mgy. \tag{5.13}$$
В угловой скорости появляется добавка $\omega\cos\varphi$ как проекции $\boldsymbol{\omega}$ на нормаль к стержню.

Уравнения движения системы найдём, как
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{y}} - \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \dfrac{\partial L}{\partial\varphi} = 0. \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \ddot{x} = \omega^2 x, \\ \ddot{y} = g, \\ \ddot{\varphi} = -\omega^2\sin(2\varphi)/2. \end{cases} \tag{5.14}$$

12.88

Пусть на диск действует сила реакции опоры $\boldsymbol{N}_1$, на опору со стороны диска действует $\boldsymbol{N}_2 = -\boldsymbol{N}_1$. Связь по опрделению является идеальной, если
$$\delta A = \sum_i\left(\boldsymbol{N}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i\right) = 0.$$
В рассматриваемой системе в проекцию на ось Oy $\delta r_1 = \delta r_2$. Тогда
$$OY: \qquad \delta A = N_1\delta r_1 + N_2\delta r_2 = (N_1 - N_1)\delta r_1 = 0,$$
следовательно **связь является идеальной**.

12.73

Выберем начало координат в положение равновесия. Запишем второй закон Ньютона для системы:
$$m\ddot{x} = -cx - \beta v.$$

Формально, мы хотим найти такой $L(x, \dot{x}, t)$, что
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0.$$
При отсутствии вязкого трения L имел бы вид
$$L^* = T - \Pi = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}cx^2.$$
Как мы видим $L^* \neq L(t)$, соответсвенно энергия такой системы сохраняется. Мы же рассматриваем систему с вязким трением, которая в пределе с $\beta \to 0$ приходила бы к $L = L^*$ так что будем искать L вида
$$L = f(t) \cdot L^*.$$
В таком случае
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = f(t)m\ddot{x} + \underbrace{\dot{f}(t)m}_{=f(t)\beta}\dot{x} + f(t)cx = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0.$$
Воплощая в жизнь стремление сократить уравнение на $f(t)$ находим, что
$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{\beta}{m}f(t), \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = \exp\left(\frac{\beta}{m}t\right).$$
Тогда уравнене движения осциллятора с вязким трением можно записать, как уравнение лагранжа второго рода, для лагранжаиана
$$L(x,t) = \exp\left(\frac{\beta}{m}t\right) \cdot \frac{1}{2}\left(m\dot{x}^2 + cx^2\right). \tag{5.15}$$

12.82

Знаем, что символ Кристофеля
$$\Gamma_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial q^i}\right).$$
Кинетическая энергия склерономной системы в обобщенных координатах запишется как
$$T = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j.$$
Хотелось бы в терминах сивола Кристофеля записать уравнения Лагранжа
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i.$$

Для начала найдём
$$\frac{\partial T}{\partial q^k} = \frac{1}{2}\dot{q}^i\dot{q}^j\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}.$$
Теперь
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} = \frac{1}{2}g_{ij}\left(\dot{q}^j\delta^i_k + q\delta^i\delta^j_k\right) = g_{kj}\dot{q}^j.$$
Дифференцируя по времени, получим
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} = g_{kj}\ddot{q}^j + \dot{q}^j\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt}\right) = g_{kj}\ddot{q}^j + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}\dot{q}^j\dot{q}^i.$$
Теперь заметим, что
$$\dot{q}^i\dot{q}^j\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} = \dot{q}^j\dot{q}^i\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j}.$$
Тогда
$$Q_k = g_{kj}\ddot{q}^j + \frac{1}{2}\dot{q}^j\dot{q}^i\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right), \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{g_{kj}\ddot{q}^j + \Gamma_{k,ij}\dot{q}^j\dot{q}^i = Q_k}. \tag{5.16}$$

5.11 Принцип Гамильтона-Остроградского

21.7

Запишем лагранжиан системы

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mx^2\omega^2.$$

В условиях сказано, что $\omega = \omega(t)$ – для простоты уравнений будем считать $\omega = \mathrm{const}$.

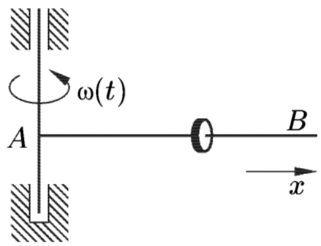


Рис. 12: К задаче 21.7

Действие тогда

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt, \quad \Rightarrow \quad \delta S = m\dot{x}\delta x\Big|_{t_1}^{t_2} + m\int_0^t \left(-\ddot{x} + x\omega^2\right)\delta x\,dt = 0.$$

Так приходим к

$$\ddot{x} = \omega^2(t)x, \quad \Rightarrow \quad x = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}.$$

Рассмотрим движение от (x_1, t_1) до (x_2, t_2), получим СЛУ:

$$\begin{cases} x_1 = Ae^{\omega t_1} + Be^{-\omega t_1} \\ x_2 = Ae^{\omega t_2} + Be^{-\omega t_2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \det = e^{\omega(t_1 - t_2)} - e^{-\omega(t_1 - t_2)} \neq 0, \quad \text{при } t \neq \mathrm{const},$$

что соответствует существованию единственного решения у уравнения.

21.14 и 20.15

Точка массы m може двигаться по гладкой вертикальной плоскости xz, вращающейчя вокруг векртикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω.

Лагранжиан системы

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{1}{2}mx^2\omega^2. \tag{5.17}$$

Вариация действия

$$\delta S = m\int_A^B \left(\dot{x}\delta x + \dot{z}\delta z + \omega^2 x\delta x - g\delta z\right)\,dt.$$

Посмотрим на действие

$$\begin{aligned} S &= \int_A^B L(x + \delta x, z + \delta z, t)\,dt = \\ &= \int_A^B L(x, z, t)\,dt + \underbrace{m\int_A^B \dot{x}\delta\dot{x} + \dot{z}\delta\dot{z} + \omega^2 x\delta x - g\delta z\,dt}_{\delta S(L(x,z,t))=0} + \frac{1}{2}m\int_A^B (\delta\dot{x})^2 + (\delta\dot{z})^2 + \omega^2(\delta x)^2\,dt, \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

21.35

Хотелось бы от действия S вида

$$S = \int_A^B L\,dt, \quad L = T - \Pi = \frac{1}{2}p_i\dot{q}^i - \Pi$$

к действию (или *укороченному действию*) $\delta S^* = 0$, где S^* вида

$$S^* = \int_A^B n\, ds, \tag{5.18}$$

где под интегрирование от A до B подразумевается интегрирование интегрирование уравнение от состояния в точке A до состояния в точке B. Можно было бы сразу получить ответ из принципа Мопертюи, так что давайте его выведем.

Перейдём к энергии системы, как функции p и q, где $p_i = \partial L/\partial \dot{q}^i$ – обобщенный импульс. Тогда

$$dS = L\, dt = \left(p_i \dot{q}^i - H\right)\, dt \quad \Rightarrow \quad S = S_0 - H\cdot(t_B - t_A), \tag{5.19}$$

так как мы рассматриваем аналогию с консервативной системой, то есть $\dot{H} = 0$. Величина S_0 – *укороченное действие*,

$$S_0 = \int_A^B p_i \dot{q}^i\, dt = 2\int_A^B (H - \Pi)\, dt.$$

Найдём dt, как

$$dt = \frac{ds}{v}, \quad v^2 = 2(H-\Pi)/m \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{ds}{\sqrt{2(H-\Pi)/m}}.$$

Собирая всё вместе, получаем

$$S_0 = \int_A^B \sqrt{2m(H-\Pi)}\, ds.$$

Вернёмся к варьированию. Если допускать варьирование конечного момента времени, то

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial t}\delta t = -H\delta t, \quad \Rightarrow \quad \delta S + H\delta t = 0. \tag{5.20}$$

Подставляя (5.19) в (5.20), получим, что

$$\delta S_0 = 0, \quad \Rightarrow \quad \delta\left(\int_A^B \sqrt{2m(H-\Pi)}\, ds\right) = 0. \tag{5.21}$$

Сравнивая полученное выражение с (5.18), полагая $m = 1$, находим

$$\Pi = -\frac{n^2}{2} + H. \tag{5.22}$$

T17.

Рассмотрим движение точки по цилиндру радиуса r_0. Тогда L

$$L = T - \Pi = T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{q}_i\dot{q}^i = \frac{1}{2}mg_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j = \frac{1}{2}\left(r_0^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right).$$

Тогда вариация действия для системы (свободной материальной точки)

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}\delta x) = \ddot{x}\delta x + \dot{x}\delta\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \delta S = m\int_A^B \left(r_0^2\dot{\varphi}\delta\dot{\varphi} + \dot{z}\delta\dot{z}\right)\, dt = m(r_0^2\dot{\varphi}\delta\varphi + \dot{z}\delta z)\Big|_A^B + \int_A^B \left(-r_0^2\ddot{\varphi}\delta\varphi - \ddot{z}\delta z\right)\, dt = 0.$$

Вариация на A и B тождественно равна 0, в силу прозвольности δz и $\delta\varphi$ получаем, что

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = 0, \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varphi = C_1 t + C_2 \mod 2\pi, \\ z = C_3 t + C_4. \end{cases}$$

так как в силу выбора φ верно, что $\varphi + 2\pi k = \varphi \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$. В таком случае

$$C_1 = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{t_B - t_A} + \frac{2\pi}{t_B - t_A}k, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

таким образом для свободной материальной точки существует счётное количество истинных путей для перемещения из A в B за фиксированное время $t_B - t_A$.

T18. (I)

Пусть в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2) закреплена цепь с линейной плотностью ρ и массой M. Для цепной линии сначала найдём центр масс y_0:

$$y_0 = \frac{1}{M}\int_{x_1}^{x_2} y\cdot \underbrace{\rho\sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx}_{dm}.$$

Лагранжиан системы

$$L = T - \Pi = Mg \cdot y_0.$$

В силу независимости L от t верно, что

$$\delta S = \delta\left(\int_{t_1}^{t_2} L\,dt\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \delta L = 0, \quad \Rightarrow \quad \delta\left(\int_{x_1}^{x_2} \underbrace{y\sqrt{1+(y'_x)^2}}_{F(x)}\,dx\right) = 0, \tag{5.23}$$

что позволяет нам решать немного другую задачу.

Мы знаем, что на $\dot{q}, q$ равносильны следующие условия

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(\dot{q},q,t)}{\partial q^i} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \delta\left(\int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q},q,t)\,dt\right) = 0,$$

при фиксированной длине нити l равной

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{1+\dot{y}^2}}_{\varphi(x)}\,dx, \tag{5.24}$$

где $y'_x = \dot{y}$ (здесь и далее). Тогда введём[2] L^*

$$L^*(y,x) = F(x) - \lambda\varphi(x), \tag{5.25}$$

для которого верно, что

$$\delta\left(\int_{x_1}^{x_2} L^*(y,\dot{y},x)\,dx\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L^*}{\partial x} = 0. \tag{5.26}$$

Формально мы перещли к решению изопериметрической задачи. Для удобство переобозначим $L^* = L$. Посмотрим на $\partial L/\partial \dot{y} = L_{\dot{y}}$:

$$dL_{\dot{y}}(y,\dot{y}) = \frac{\partial L_{\dot{y}}}{\partial y}\,dy + \frac{\partial L_{\dot{y}}}{\partial \dot{y}}\,d\dot{y}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = L_{\dot{y},y}\dot{y} + L_{\dot{y},\dot{y}}\ddot{y} - L_y = 0.$$

Домножив на $(-\dot{y})$ получим, как видно, полный дифференциал ⌣

$$\frac{\partial L}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\frac{d\dot{y}}{dx} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\ddot{y}\right.}_{\text{прибавил/вычел}} \left. + \dot{y}\left[\frac{\partial L_{\dot{y}}}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial L_{\dot{y}}}{\partial \dot{y}}\ddot{y}\right]\right) = \frac{d}{dx}\left(L - \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right),$$

откуда (5.26) может быть переписано, как

$$L - \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = C_1,$$

то есть да, «энергия» сохраняется, x же явно не входит в L^*.

Конкретно в нашем случае,

$$(y+\lambda)\sqrt{1+\dot{y}^2} - \dot{y}(y+\lambda)\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} = C_1, \quad \Rightarrow \quad y + \lambda = C_1\sqrt{1+\dot{y}^2}.$$

Как известно шинус замечателен: $1 + \operatorname{sh}^2\varkappa = \operatorname{ch}^2\varkappa$, так что пусть $\dot{y} = \operatorname{sh}\varkappa$. Тогда

$$y = C_1\operatorname{ch}\varkappa - \lambda.$$

Подставив друг в друга последних два выражения, найдём

$$\dot{y} = \frac{dy}{d\varkappa}\cdot\frac{d\varkappa}{dx} = C_1\frac{d\varkappa}{dx}\operatorname{sh}\varkappa, \quad \Rightarrow \quad x = C_1\varkappa + C_2.$$

Таким образом мы получаем *уравнение цепной линии*

$$\boxed{y = C_1\operatorname{ch}\frac{x - C_2}{C_1} - \lambda.} \tag{5.27}$$

Константы могут быть найдены из граничных условий $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ и интеграла (5.24):

$$\operatorname{sh}\frac{x_2 - C_2}{C_1} - \operatorname{sh}\frac{x_1 - C_2}{C_1} = \frac{l}{C_1}.$$

[2] О причинах такого решения см. метод решения изопериметрической задачи.

T18. (II)

Найдём траекторию светового луча в среде с показателем преломления

$$n(z) = n_0 + n_z z.$$

Согласно принципу Ферма, введя $(ds)^2 = (dr)^2 + (dz)^2$, считая $dz/dr = \dot{z}$

$$\delta\left(\int_A^B (n_0 + n_z z)\, ds\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \delta\left(\int_A^B z\sqrt{1+\dot{z}^2}\, dr + \frac{n_0}{n_z} l\right) = 0,$$

где

$$l = \int_A^B \sqrt{1+\dot{z}^2}\, dr.$$

Вспомнив (5.25) и (5.24), поймём, что решаем изопериметрическую задачу, которую уже решили в предыдущем пункте, решением является траектория по цепной линии, с $\lambda = -n_0/n_z$:

$$z(r) = \frac{n_0}{n_z} + C_1 \operatorname{ch} \frac{r - C_2}{C_1}, \tag{5.28}$$

где C_1 и C_2 определяются из начальных условий[3].

T19.

Пока не готово.

5.12 Равновесие. Принцип виртуальных перемещений.

14.37

Переёдём в СО, вращающуюся с $\boldsymbol{\omega}$, соотвественно хочется ввести потенциальное поле для сил инерции и гравитационных.

$$dF_{\text{ц. б.}} = \omega^2 x\, dm, \quad \Rightarrow \quad d\Pi_{\text{и}} = -\frac{1}{2}\omega^2 x^2\, dm.$$

Тогда потенциал

$$\Pi_{\text{g},1} = -\frac{m}{l}\int_0^{l\sin\varphi} \frac{1}{2}\omega^2 x^2\, dx = -\frac{m_1 l^2}{6}\omega^2 \sin^2\varphi.$$

$$\Pi_{\text{g},2} = -\frac{m_2 l^2}{6}\omega^2 \sin^2\varphi.$$

Полная энергия системы:

$$\Pi = -gl\cos\varphi\left(m_1 + \frac{3}{2}m_2\right) - \frac{1}{6}\omega^2 l^2 \sin^2\varphi (m_1 + m_2).$$

Найдём стационарные точки потенциала

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} gl\sin\varphi(m_1 + 3m_2) - \frac{1}{3}\omega^2 l^2 \sin\varphi\cos\varphi(m_1 + m_2) = 0.$$

Находим положения равновесия:

$$\sin\varphi^* = 0, \quad \Rightarrow \quad \varphi^* = 0,\ \pi.$$

При условии, что rhs следующего уравнения $\leqslant 1$, найдём также

$$\cos\varphi^* = \frac{2g(m_1 + 3m_2)}{2\omega^2(m_1 + m_2)}, \qquad \omega^2 \geqslant \frac{3g(m_1 + 3m_2)}{2l(m_1 + m_2)}.$$

14.20

Перейдём в СО точки подвеса. В таком случае можно ввести потенциальное поле, гравитационного поля

$$\boldsymbol{g}' = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{w}.$$

Положение равновесия соответсвует минимуму потенциала, соответственно наименьший $h_{\text{ц. м.}}$ относительно $\boldsymbol{g}'$. В таком случае при $\boldsymbol{w} \parallel \boldsymbol{g}$ ниточка останется висеть вертикально. При $\boldsymbol{g} \nparallel \boldsymbol{w}$, вводя начало координат в

[3] Предполагая, что мы хотим пустить луч от точки (z_1, r_1) к (z_2, r_2), мы сможем сделать это единственным образом, это и задаст C_1 и C_2.

точку подвеса

$$y = x\frac{g - w\sin\alpha}{w\cos\alpha}, \qquad a \neq \frac{\pi}{2} + \pi k. \tag{5.29}$$

14.34

Система движется в потениальном поле с удерживающией связью:

$$\Pi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k q_k, \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 > 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} q_k^2 - 1 \leqslant 0.$$

Можно было решить задачу на условный экстремум, введя функцию F:

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k q_k - \lambda\left(\sum_{k=1}^{n} q_k^2 - 1\right).$$

А моожно посмотреть на n-мерную сферу, которой ограничено положение системы на координатном пространстве. Действующая сила тогда

$$\frac{\partial\Pi}{\partial q^i} = F_i = \alpha_i, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F} = (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)^{\mathrm{T}}.$$

Уравнение для сферы

$$\sum q_i^2 = 1.$$

Нас интересует момент, когда радиус вектор сонаправлен с $\boldsymbol{F}$, пусть $\boldsymbol{r} = k\boldsymbol{F}$.

$$(k\alpha_1)^2 + \ldots + (k\alpha_n)^2 = 1, \quad \Rightarrow \quad k = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2\right)^{-1/2}.$$

Соответсвенно искомое положение равновесия

$$\boldsymbol{r} = \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2\right)^{-1/2} (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n)^{\mathrm{T}}. \tag{5.30}$$

14.41

Материальная точка может двигаться по линии пересечения двух плоскостей:

$$\begin{cases} \mathrm{I}: \quad -2x_1 + x_2 + x_3 = t \\ \mathrm{II}: \quad x1 - 2x_2 + x_3 = -t^2. \end{cases}$$

Найдём систему бесконечно малых возможных перемещений. Знаем, что направляющая прямой,

$$\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}} \times \boldsymbol{n}_{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Хотелось бы найти уравнения прямой, в виде

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{a}k.$$

Подставляя $\boldsymbol{a}$ в уравнения плоскости, найдём, что

$$x_0 = \frac{1}{3}t(t-2), \quad y_0 = \frac{1}{3}t(2t-1), \quad z_0 = 0.$$

Тогда

$$\boldsymbol{r} = \frac{t}{3}\begin{pmatrix} t-2 \\ 2t-1 \\ 0 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2t-2 \\ 4t-1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В таком случае возможные перемещения:

$$\delta\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\delta k, \qquad d\boldsymbol{r} = \delta\boldsymbol{r} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\,dt = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\delta k + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2t-2 \\ 4t-1 \\ 0 \end{pmatrix} dt.$$

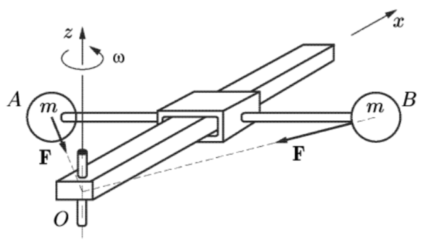


Рис. 13: К задаче 15.5

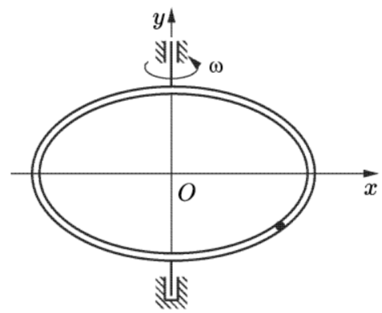


Рис. 14: К задаче 15.9

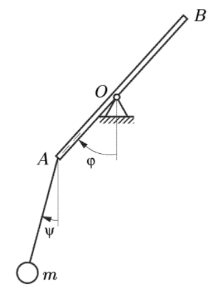


Рис. 15: К задаче 15.13

5.13 Устойчивость равновесия консервативных систем.

15.5

Перейдём в СО, вращающуюся вместе с телом. В таком случае в уравнениях «возникнут» силы инерции. Ввиду того что $\boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{r}$ запишем

$$\boldsymbol{F}_{\text{и}} = m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{l}) + m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{l}) = 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = 2m\omega^2 r.$$

Тогда добавка к потенциалу системы будет

$$\Pi_{\text{и}} = -\omega^2 r^2 m.$$

Силы между гантелями и стержнем аналогичны потенциалу

$$\Pi_{\text{g}} = -\frac{\alpha m}{\rho} \times 2, \qquad \rho = \sqrt{r^2 + l^2},$$

где r – расстояние от центра до стержня.

Запишем теперь потенциал системы

$$\Pi = -\frac{2\alpha m}{\rho} - \omega^2 r^2 m.$$

Найдём стационарные точки потенциала

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r} = \frac{2\alpha m r}{(r^2 + l^2)^{3/2}} - 2\omega^2 r m = 2mr\left(\frac{\alpha}{(r^2 + l^2)^{3/2}} - \omega^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r_1^* = \sqrt{(\alpha/\omega^2)^{2/3} - l^2}, & \omega^2 l^3 < \alpha. \\ r_2^* = 0. \end{cases}$$

И определим локальные экстремумы потенциала

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}(r) = 2m\left(\frac{\alpha}{(r^2 + l^2)^{3/2}} - \frac{\alpha r^2}{(r^2 + l^2)^{5/2}} - \omega^2\right)..$$

При $r = r_2^*$ верно, что

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}(0) = \frac{2\alpha}{l^3} - 2\omega^2, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r^* = 0 \text{ – устойчиво при} & \omega^2 l^3 < \alpha, \\ r^* = 0 \text{ – неустойчиво при} & \omega^2 l^3 > \alpha. \end{cases}$$

Чуть сложнее для $r = r_1^*$, заметим, что случай реализуется только при $\omega^2 l^3 < \alpha$:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}(r_1^*) = \underbrace{(\ \ldots\ )}_{>0}\left(\alpha^{-2/3}\omega^{4/3} l^2 - 1\right), \qquad a^{-2/3} < \omega^{-4/3} l^{-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2}(r_1^*) < 0.$$

Таким образом $r = r_1^*$ – неустойчивое положение равновесия.

15.9

Параметризуем систему некоторым φ таким, что

$$\begin{cases} x = a \sin\varphi \\ y = b \cos\varphi \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

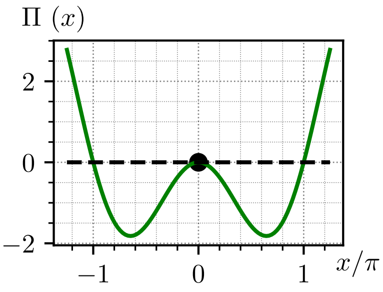


Рис. 16: График $\Pi(x) = -x\sin x$

Аналогично предыдущим задачам считаем, что движение происходит в поле потенциальных сил (инерции и гравитации):

$$\Pi_g = mgy = mgb\cos\varphi, \qquad \Pi_и = -\frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2 a^2 \sin^2\varphi.$$

Далее полагая $m=1$, найдём стационарные точки потенциала

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \sin\varphi \frac{1}{\omega^2 a^2}\left(\cos\varphi + \frac{bg}{\omega^2 a^2}\right) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \sin\varphi^* = 0 \\ \cos\varphi^* = -\dfrac{bg}{\omega^2 a^2}, \quad bg < \omega^2 a^2 \end{cases}$$

и определим локальные экстремумы потенциала

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \omega^2 a^2 \left(1 - 2\cos^2\varphi\right) - bg\cos\varphi.$$

Для $\sin\varphi^* = 0$ и, соответсвенно, $\cos\varphi = \pm 1$, найдём, что

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}(\varphi^*) = -\omega^2 a^2 \mp bg, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} (0, b) & \text{– неустойчиво при} \quad \omega^2 a^2 < bg, \\ (0, -b) & \text{– устойчиво при} \quad \omega^2 a^2 < bg, \\ (0, \pm b) & \text{– неустойчиво при} \quad \omega^2 a^2 > bg. \end{cases}$$

Для $\cos\varphi^* = -bg/\omega^2 a^2$, и соответсвующего $\sin\varphi^*$ найдём, что при $\omega^2 a^2 > gb$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2}(\varphi^*) = \left(1 + \frac{bg}{\omega^2 a^2}\right)\left(\omega^2 a^2 - bg\right), \qquad \Rightarrow \qquad \left(\pm a\sqrt{1 - \frac{g^2 b^2}{\omega^4 a^4}}, -b\frac{gb}{\omega^2 a^2}\right) \text{ – устойчивые.}$$

15.13

Запишем потенциал поля гравитационных сил:

$$\Pi = \frac{1}{2}\frac{l_2}{l_1 + l_2} M g l_2 - \frac{1}{2}\frac{l_1}{l_1 + l_2} M g l_1 - (l_1\cos\varphi + l\cos\psi)\, mg.$$

Заметим, что в Π независимо входит $\cos\psi$, в силу $\Pi \to \min$ имеет, что $\cos\psi = 1$, $\psi = 0$. Так как связь односторонняя, то невозможно значение $\psi = \pi$. Далее будем решать одномерую задачу.

Найдём стационарные точки потенциала

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{1}{2}\frac{Mg}{l_1 + l_2}(\sin\varphi)\left(-l_2^2 + l_1^2 + 2l_1(l_1 + l_2)\frac{m}{M}\right), \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \sin\varphi^* = 0 \\ 2ml_1 = M(l_2 - l_1) \quad \forall\varphi \ \text{ система равновесна.} \end{cases}$$

И опредлеим локальные экстремумы

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \underbrace{(\ \dots)}_{>0}(\cos\varphi)\left(M(l_1 - l_2) + 2l_1 m\right), \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \varphi = 0 \text{ – устойчиво при} \quad 2ml_1 > M(l_2 - l_1) \\ \varphi = \pi \text{ – устойчиво при} \quad 2ml_1 < M(l_2 - l_1) \end{cases}$$

и соотвествующие положения равновесия неустойчивы при обратных знаках в неравенствах.

15.23

Начнём с того, что условие не корректно. Действительно, давайте посмотрим на близкие к 0 положения равновесия системы с потенциалом $\Pi(x) = -x\sin x$. В точке $x = 0$ существует неустойчивое положение равновесия, однако посмотрим на развитие системы из точки $\{-\pi - \delta, 0\}$, увидим, что на фазовой плоскости существует замкнутая орбита (сплюснутая в середине), содержащая $x = 0$. Поэтому докажем, что при наличие устойчивого равновесия, существует замкнутая кривая на фазовой плоскости.

Также хотелось бы что-то сказать при наличие замкнутой траектории о положении равновесия. Можно показать, что при отсутствие других положений равновесия в этой области положение равновесия будет устойчивым. Аналогично можно считать, что положение равновесия устойчиво только если для любой U_ε окрестности существует замкнутая траектория вложенная в U_ε и содержащая точку.

Так как сила $F = F(x)$ и $F(x)$ гладкая, то всегда можно ввести потенциал такой, что

$$-\frac{\partial \Pi(x)}{\partial x} = F(x) = \ddot{x}.$$

Также можно считать, что энергия системы сохраняется, то есть

$$E = \Pi(x) + \frac{1}{2}\dot{x}^2 = \text{const}.$$

Пусть есть устойчивое положение равновесия x^*, тогда мы знаем, что

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial x}(x^*) = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}(x^*) > 0.$$

Тогда возьмём в в качетсве крайних точек нашей траектории $x_1 = x^* - \delta_1$ и в качетсве $x_2 = x^* + \delta_2$, где δ_i – достаточно малая величина, чтобы $x' \notin U_\delta(x^*)$, x' – другое положение равновесия/точка перегиба потенциала. Выберем δ_1, δ_2 так, чтобы

$$\Pi(x^* - \delta_1) = \Pi(x^* + \delta_2).$$

Тогда поместив с 0 скоростью точку x_1 получим замкнутую орбиту $[x_1,\ x_2]$.

В другую сторону, пусть есть некоторая замкнутая орбита на $[x_1,\ x_2]$. Тогда верно, что

$$T(x_1) = T(x_2) = 0, \qquad -\frac{\partial \Pi}{\partial x}(x_1) > 0, \qquad -\frac{\partial \Pi}{\partial x}(x_2) < 0.$$

Тогда по непрерывности $\Pi(x)$ существует x^* такой, что $\partial \Pi(x^*)/\partial x = 0$, при чём, так как это единственная точка экстремума потенциала в $[x_1,\ x_2]$, то это минимум, $\partial^2 \Pi / \partial x(x^*) > 0$, Q. E. D.