1 (-) Криволинейные координаты

2 Кинематика точки

Пусть $\boldsymbol{r}(t), t \in \mathbb{R}$ – движение точки и траектория движения.

Def 2.1.

$$\textit{Скорость}: \quad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}; \qquad \textit{ускорение}: \quad \boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}. \tag{2.1}$$

2.1 Естественный трёхгранник

Из геометрии $\exists s(t)$ – длина кривой. Тогда

$$\boldsymbol{v} = \underbrace{\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}}_{\boldsymbol{\tau}}\frac{ds}{dt} = v\boldsymbol{\tau}. \tag{2.2}$$

Дифференцируя (??)

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\boldsymbol{\tau} + v\underbrace{\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}}_{\boldsymbol{n}/\rho}\frac{ds}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\tau}}} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{n}}}. \tag{2.3}$$

где $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ – базис, преследующий точку.

2.2 Компоненты скорости и ускорения

Есть локальный базис. Тогда компоненты скорости

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i\boldsymbol{g}_i = v^i\boldsymbol{g}_i \quad \Rightarrow \quad v^i = \dot{q}^i. \tag{2.4}$$

Для компоненты ускорения:

$$w_i = (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{g}_i) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}_i) - (\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{g}_i}{dt}).$$

Но, во-первых:

$$\frac{d\boldsymbol{g}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q^i}.$$

Во-вторых:

$$\boldsymbol{v} = \dot{g}^i\boldsymbol{g}_i \ \Big|\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}(\underbrace{\dot{g}^1\boldsymbol{g}_1}_{0} + \underbrace{\dot{g}^2\boldsymbol{g}_2}_{\boldsymbol{g}_2} + \underbrace{\dot{g}^3\boldsymbol{g}_3}_{0}) = \boldsymbol{g}_k \tag{2.5}$$

Тогда

$$w_i = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}^i}) - (\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}^i}) = \frac{d}{dt}\frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial \dot{q}^i}\frac{1}{2} - \frac{\partial(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\partial \dot{q}^i}\frac{1}{2} = \frac{d}{dt}\frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i} \ \Rightarrow \ \boxed{mw_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i}} \tag{2.6}$$

3 Кинематика твердого тела

Def 3.1. *Абсолютно твёрдым телом*[1] назовём множество такое, что

$$\forall i, j, t: \quad |\boldsymbol{r}_i(t) - \boldsymbol{r}_j(t)| = \text{const}.$$

Точка O это полюс. Во-первых перенесем начало координат в O. Введём систему координат $O_{\xi\nu\zeta}$ связанную с телом, – тело относительно неё не движется.

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OA},\ \boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{OA} = \text{const в } O_{\xi\nu\zeta}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r}(t) = R(t)\boldsymbol{\rho}.$$

3.1 Углы Эйлера

[1] Для краткости просто *твёрдое тело*.

Ортогональность матрицы R даёт возможность описать её тремя независимыми параметрами. Один из вариантов сделать это – углы Эйлера.

Пусть начальная ПДСК (x, y, z), а конечная – (X, Y, Z), при чём $xy \cap XY = ON$ – линия узлов.

1) $\alpha\colon Ox \to ON$, угол *прецессии*;
2) $\beta\colon Oz \to OZ$, угол *нутации*;
3) $\gamma\colon OX \to ON$, угол *собственного вращения*.

Повороты системы на эти углы называются прецессия, нутация и поворот на собственный угол (вращение).

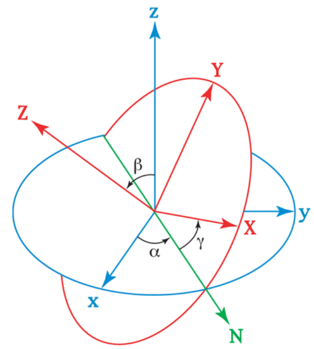


Рис. 1: Углы Эйлера

Матричная запись углов Эйлера:

$$R_Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin a & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и,

$$R_X(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta\cos\beta & \end{pmatrix}, \qquad R_Z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin\psi & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

3.2 Основные теоремы о конечных перемещениях твёрдого тела

Далее бездоказательно приведём некоторые основные теоремы о конечных перемещениях твёрдого тела.

Thr 3.2 (Теорема Эйлера)**.** *Произвольное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку, можно осуществить посредством вращения вокруг некоторой оси, проходящей через эту точку.*

Thr 3.3 (Теорема Шаля)**.** *Самое общее перемещение твердого тела разлагается на поступательное перемещение, при котором произвольно выбранный полюс переходит из своего первоначального положения в конечное, и на вращение вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс. Это разложение можно совершить не единственным способом, выбирая за полюс различные точки тела; при этом направление и длина поступательного перемещения будут изменяться при выборе различных полюсов, а направление оси вращения и угол поворота вокруг нее не зависят от выбора полюса.*

Thr 3.4 (Теорема Моцци)**.** *Самое общее перемещение твердого тела является винтовым перемещением.*

Con 3.5 (Теорема Бернулли-Шаля)**.** *Самое общее перемещение плоской фигуры в своей плоскости есть либо поступательное перемещение, либо вращение вокруг точки. Эта точка называется центром конечного вращения.*

3.3 Скорости и ускорения точек твердого тела в общем случае движения

Проведём два вектора $\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{r}_O$:

$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + R(t)\boldsymbol{\rho} \quad \overset{d/dt}{\Rightarrow} \quad \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \dot{R}\rho = \boldsymbol{v}_O + \dot{R}R^{-1}\boldsymbol{r}$$

но,

$$RR^{\mathrm{T}} = E, \dot{R}R^{\mathrm{T}} + R\dot{R}^{\mathrm{T}} = 0, \dot{R}R^{\mathrm{T}} = -R\dot{R}^{\mathrm{T}}, (\dot{R}R^{-1})^{\mathrm{T}} = -\dot{R}R^{-1}.$$

То есть $\dot{R}R^{-1}$ кососимметрична. Тогда пусть

$$\dot{R}R^{-1} = \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & w_y \\ w_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

Thr 3.6 (формула Эйлера)**.** *Существует единственный вектор*[2] $\boldsymbol{\omega}$, *называемый* ***угловой скоростью тела****, с помощью которого скорость* $\boldsymbol{v}$ *точки тела может быть представлена в виде*

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \quad - \quad \textit{\textbf{формула Эйлера}}. \tag{3.2}$$

Тогда, например, при постоянном радиус векторе верно, что

$$\boldsymbol{v}_A = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}, \qquad \text{при условии } a = \text{const}.$$

[2]Псевдоветор же, нет?

Можно вывести ускорение точки твёрдого тела

$$\mathbf{w}_A = \mathbf{w}_O + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$
$$\mathbf{w}_A = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \quad - \quad \textbf{формула Ривальса},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ – *угловое ускорение.*

3.4 (-) Частные случаи.

Оставим частные случаи в покое.

3.5 Кинематические инварианты и кинематический винт

Вернемся к общему случаю движения твёрдого тела. В (**??**) угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ точки P инвариантна к выбору точки, соответственно ω^2 – *первый кинематический инвариант.* Домножив (**??**) скалярно на $\boldsymbol{\omega}$, получим, что $I_2 = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\omega})$, – *второй кинематический инвариант.*

Сейчас легко доказать thr. (**??**), точнее надо показать существование такой прямой MN, все точки которой имеют скорости, $\parallel \boldsymbol{\omega}$.

Выберем некоторый полюс, O, со скоростью $\boldsymbol{v}_O$ и угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Тогда верно, что

$$\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OS} = p\boldsymbol{\omega}, \qquad (p \neq 0).$$

4 Сложное движение точки и твёрдого тела

4.1 Сложение скоростей и ускорений

Def 4.1.

Абсолютной скоростью (ускорением) называют скорость (ускорение) относительно неподвижной системы координат.

Относительной скоростью (ускорением) называют скорость (ускорение) относительно подвижной системы координат.

Переносной скоростью (ускорением) такой точки A', которая в рассматриваемый момент времени совпадает с точкой A, но которая не движется относительно подвижной системы координат. называют абсолютную скорость (ускорение).

Thr 4.2 (сложение скоростей)**.** *Пусть a – абсолютная скорость, e – переносная, r – относительная.*

$$\boldsymbol{v}^a = \boldsymbol{v}^e + \boldsymbol{v}^r \tag{4.1}$$

Thr 4.3 (сложение ускорений)**.** *Пусть a – абсолютное, e – переносное, r – относительное, c – кориолисово.*

$$\mathbf{w}^a = \mathbf{w}^e + \mathbf{w}^r + \mathbf{w}^c. \tag{4.2}$$

$\triangle$. Запишем скорость $\boldsymbol{v}_A^a$ относительно двух систем координат:

$$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{r} \text{ в } xyz, \quad \overrightarrow{OA} = \boldsymbol{\rho} \text{ в } \xi\eta\zeta, \quad \overset{d/dt}{\Rightarrow} \quad \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \dot{R}\boldsymbol{\rho} + R\dot{\boldsymbol{\rho}}. \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{v}_A^a = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_A^r$$

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (R\boldsymbol{\rho}) + R\dot{\boldsymbol{\rho}} \quad \overset{d/dt}{\Rightarrow} \quad \mathbf{w}_A^a = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\underbrace{\dot{R}\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}} + R\dot{\boldsymbol{\rho}}) + \dot{R}\dot{\boldsymbol{r}} + R\dot{\boldsymbol{\rho}} =$$

$$= \mathbf{w}_A^e + \boldsymbol{\omega} \times R\dot{\boldsymbol{r}} + \underbrace{\dot{R}R^{-1}}_{\boldsymbol{\omega}\times} \underbrace{R\dot{\boldsymbol{\rho}}}_{\boldsymbol{v}_a^r} + \underbrace{R\ddot{\boldsymbol{\rho}}}_{\mathbf{w}_A^r} = \mathbf{w}_A^e + \mathbf{w}_A^r + \boxed{2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_A^r}$$

$\square$

Теперь немного про твёрдое тело, зная, что $\boldsymbol{\omega}^r = \omega_\xi \boldsymbol{e}_\xi + \omega_\eta \boldsymbol{e}_\eta + \omega_\zeta \boldsymbol{e}_\zeta$, найдём[3] угловое ускорение ε^a

$$\boldsymbol{\varepsilon}^a = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{d\boldsymbol{\omega}^r}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{d}{dt}\left(\omega^i \boldsymbol{e}_i\right) = \boldsymbol{\varepsilon} + \underbrace{\dot{\omega}^i \boldsymbol{e}_i}_{\boldsymbol{\varepsilon}^r} + \underbrace{\omega^i \dot{\boldsymbol{e}}_i}_{\boldsymbol{\omega}^e \times \boldsymbol{\omega}^r} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^r + \boldsymbol{\omega}^e \times \boldsymbol{\omega}^r.$$

[3]Получить!

4.2 Главный момент и главный вектор

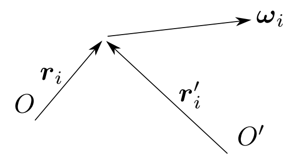
Имеется m мгновенно поступательных движений $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ и n мгновенно вращательных движений[4] $\boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$. Уже знаем, что $\forall j$ мы можем представить $\boldsymbol{v}_j$ как пару $\boldsymbol{\omega}'_j, \boldsymbol{\omega}''_j$. Получается, что $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ представим в виду $2m+n$ мгновенных вращений.

Введём два важных вектора

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i \qquad \text{– суммарный вектор мгновенных угловых скоростей, \textit{главный вектор};}$$

$$\boldsymbol{V} = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{v}_j + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{\omega}_i \qquad \text{– суммарный вектор мгновенных поступательных движений, \textit{главный момент}.}$$

Таким образом свели $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{\omega}_1, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ к паре $\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{V}$, соответствующей выбранному центру приведения.



Найдём $\boldsymbol{V}_{O'}$:

$$\boldsymbol{V}_{O'} = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{v}_j + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{\omega}_i = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{v}_j + \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{O'O} + \boldsymbol{r}_i\right) \times \boldsymbol{\omega}_i = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{v}_j + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{\omega}_i}_{\boldsymbol{V}_0} + \overrightarrow{O'O} \times \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i}_{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{V}_0 + \overrightarrow{O'O} \times \boldsymbol{\Omega}.$$

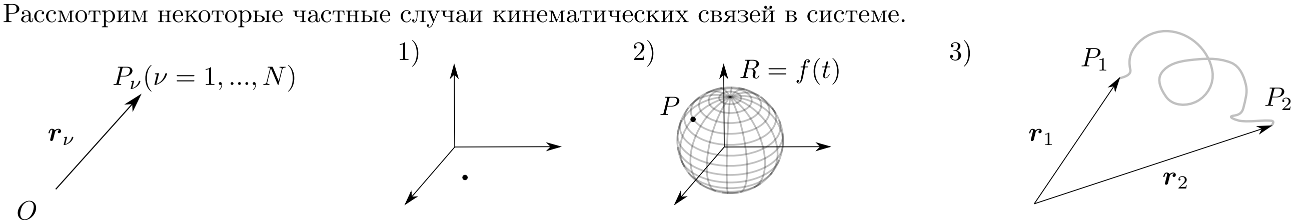
Таблица 1: Простейшие типы движений.

$(\boldsymbol{V}_0, \boldsymbol{\Omega})$	$\boldsymbol{\Omega}$	$\boldsymbol{V}_0$	простейшее мгновенное движение
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	мгновенно винтовое движение
0	$\neq 0$	0	мгновенное вращение, ось $\ni O$
		$\neq 0$	мгновенное вращение, ось $\not\ni O$
0	0	$\neq 0$	мгновенно поступательное движение
0	0	0	мгновенный покой

4.3 Общие основания кинематики системы

Свободные и несвободные системы. Связи.

Рассмотрим некоторые частные случаи кинематических связей в системе.



$z = 0$ $\qquad x^2 + y^2 + z^2 - f(t)^2 = 0$ $\qquad l^2 - (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)^2 \geqslant 0$

В общем случае связь запишем, как

$$f(\boldsymbol{r}_\nu, \boldsymbol{v}_\nu, t) \geqslant 0.$$

В частности, при $f(\boldsymbol{r}_\nu, \boldsymbol{v}_\nu, t) = 0$, связь называет *двухсторонней*, или *удерживающей*. При неравенстве, соответственно, связь *односторонняя*, *освобождающая*. Связь вида $f(\boldsymbol{r}_\nu, t) = 0$ называется *геометрической*, *конечная*, *голономная*. Связь вида $f(\boldsymbol{r}_\nu, \boldsymbol{v}_\nu, t) = 0$ называется *дифференциальной*, или *кинематической*. Иногда кинематическая связь может быть представлена как геометрическая, такая связь называется *интегрируемой*.

Def 4.4. Если на систему материальных точек не наложены дифференциальные неинтегрируемые связи, то она называется голономной. Если же среди связей, наложенных на систему есть дифференциальные неинтегрируемые связи, то система называется неголономной.

[4] Скользящий вектор – это ?

Хотелось бы построить некоторую общую теория для случая, когда этих связей несколько. В частности пусть есть r геометрических связей.

$$f_\alpha(\boldsymbol{r}, t) = 0, \qquad (\alpha = 1, \ldots, r), \tag{4.3}$$

И несколько дифференциальных линейных связей

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\beta\nu}(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t) \cdot \boldsymbol{v}_\nu + a_\beta(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t) = 0, \qquad (\beta = 1, \ldots, s) \tag{4.4}$$

Стоит сказать, что

$$3N - r - s \geqslant 1.$$

Def 4.5. Геометрические связи называются стационарными или склерономными, если t не входит в их уравнения (**??**). Дифференциальные связи (**??**) называются *стационарными* или *склерономными* если функции $\boldsymbol{a}_{\beta\nu}$ не зависят явно от t, а функции $a_\beta \equiv 0$. Система называется *склерономной*, если она либо свободная, либо на нее наложены только стационарные связи. Система называется *реономной*, если среди наложенных на нее связей есть хотя бы одна нестационарная.

Ограничения, налагаемые связями на положения, скорости, ускорения и перемещения точек системы.

Пусть задан некоторый момент $t = t*$. Тогда *возможными положениями* назовём $\boldsymbol{r}_\nu$ такие, что для них верно (**??**), (**??**).

Какие возможны скорости?

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \boldsymbol{v}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0, \qquad (\alpha = 1, \ldots, r). \tag{4.5}$$

Совокупность векторов $\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^*$, удовлетворяющая линейным уравнениям (**??**) и (**??**) в возможном для данного момента времени положении системы, назовем возможными скоростями.

Какие возможны ускорения?

$$(\textbf{??}), (\textbf{??}) \quad \overset{d/dt}{\Rightarrow} \quad \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \mathbf{w}_\nu + \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu \partial \boldsymbol{r}_\mu} \boldsymbol{v}_\mu \cdot \boldsymbol{v}_\nu + 2\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t \partial \boldsymbol{r}_\nu} \boldsymbol{v}_\nu + \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t^2} = 0 \qquad \alpha \in [1, r] \tag{4.6}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\beta\nu} \cdot \mathbf{w}_\nu + \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{a}_{\beta\nu}}{\partial \boldsymbol{r}_\mu} \boldsymbol{v}_\mu \cdot \boldsymbol{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial \boldsymbol{a}_{\beta\nu}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial a_\beta}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \boldsymbol{v}_\nu + \frac{\partial a_\beta}{\partial t} = 0 \qquad \beta \in [1, s] \tag{4.7}$$

Совокупность векторов $\mathbf{w}_\nu = \mathbf{w}_\nu^*$, удовлетворяющая линейным уравнениям (**??**) и (**??**) в возможном для данного момента времени положении системы (+скорости), назовем возможными скоростями.

Рассмотрим возможные перемещения $\Delta \boldsymbol{r}_\nu$ системы за Δt из её возможного положения $\boldsymbol{r}_\nu^*$ в момент $t = t^*$. Тогда

$$\Delta \boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}^* \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{w}_\nu^* (\Delta t)^2 + \ldots \qquad (\nu = 1, \ldots, N). \tag{4.8}$$

Пренебрегая нелинейными членами, получим, что $\Delta \boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}_\nu^* \Delta t$. Тогда, домножив (**??**), (**??**) на Δt, получим систему уравнений, которой удовлетворяют линейные по Δt возможные перемещения:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \Delta \boldsymbol{r}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Delta t = 0, \qquad (\alpha = 1, \ldots, r), \tag{4.9}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\beta\nu} \cdot \Delta \boldsymbol{r}_\nu + a_\beta \Delta t = 0, \qquad (\beta = 1, \ldots, s), \tag{4.10}$$

где функции $\boldsymbol{a}_{\beta\nu}, a_\beta$ и частные производные вычисляются при $t = t^*,\ \boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu^*$.

Действительные и виртуальные перемещения

Пусть задано положение системы для $t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, \mathbf{w}$. Тогда для $t = t^* + dt$ запишем, что

$$\boldsymbol{r}_\nu(t^* + dt) - \boldsymbol{r}_\nu(t^*) = \boldsymbol{v}_{\nu_0}^* \, dt + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{\nu_0}^* (dt)^2 + \ldots, \tag{4.11}$$

где $\mathbf{w}^*_{\nu_0}$ – ускорения точек системы при $t = t^*$. Величины (??) – *действительные (истинные) перемещения* точек системы за время dt. Тогда получим систему уравнений, аналогичную (??), (??):

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot d\boldsymbol{r}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0, \qquad (\alpha = 1, \ldots, r), \tag{4.12}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\beta\nu} \cdot d\boldsymbol{r}_\nu + a_\beta dt = 0, \qquad (\beta = 1, \ldots, s). \tag{4.13}$$

Помимо действительных перемещений есть *виртуальные*. Ими называется совокупность величин $\delta \boldsymbol{r}_\nu$, удовлетворяющая линейным однородным уравнениям

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \cdot \delta\boldsymbol{r}_\nu = 0, \qquad (\alpha = 1, \ldots, r), \tag{4.14}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{a}_{\beta\nu} \cdot \delta\boldsymbol{r}_\nu = 0, \qquad (\beta = 1, \ldots, s), \tag{4.15}$$

Если система склерономна, то действительное перемещение будет одним из виртуальных.

Def 4.6. *Синхронное варьирование* – переход из одного положения в другое, при фиксированном времени

$$\boldsymbol{r}^*_\nu \to \boldsymbol{r}^*_\nu + \delta \boldsymbol{r}_\nu.$$

При синхронном варьировании мы не рассматриваем процесс движения и сравниваем допускаемые связями бесконечно близкие положения (конфигурации) системы для данного фиксированного момента времени.

Рассмотрим две совокупности возможных перемещений с одним и тем же значением величины Δt. Согласно разложению по Тейлору,

$$\Delta_1 \boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}^*_{\nu_1} \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{w}^*_{\nu_1} (\Delta t)^2 + \ldots,$$
$$\Delta_2 \boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{v}^*_{\nu_2} \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{w}^*_{\nu_2} (\Delta t)^2 + \ldots,$$

и рассмотрим их разность

$$\Delta_1 \boldsymbol{r}_\nu - \Delta_2 \boldsymbol{r}_\nu = (\boldsymbol{v}^*_{\nu_1} \Delta t - \boldsymbol{v}^*_{\nu_2} \Delta t) + \left(\frac{1}{2} \mathbf{w}^*_{\nu_1} (\Delta t)^2 - \frac{1}{2} \mathbf{w}^*_{\nu_2} (\Delta t)^2 \right) + \ldots.$$

5 Основные теоремы динамики

5.1 Аксиоматика

...

5.2 Основные теоремы динамики

Пусть $\boldsymbol{Q}$ – количество движения, $\mathbf{K}_A$ – кинематический момент относительно полюса A. Далее, T – механическая энергия, $\delta A^{\text{всех}} = \sum (\boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i)$ и $-d\Pi = \delta A$, где Π – потенциальная энергия.

Величина	Thr об изменение	Первые интегралы системы
$\boldsymbol{Q} = \sum m_i \boldsymbol{v}_i$	$d\boldsymbol{Q}/dt = \boldsymbol{R}^{\text{внеш}}$	$\boldsymbol{Q} = \text{const}$
$\mathbf{K}_A = \sum \boldsymbol{r}_{A_i} \times (m_i \boldsymbol{v}_i)$	$d\mathbf{K}_A/dt = \boldsymbol{M}^{\text{внеш}}_A + \boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{v}_A$	$\mathbf{K}_A = \text{const}$
$T = \sum m_i v_i^2/2$	$dT = \delta A^{\text{всех}}$	$T + \Pi = \text{const}$

5.3 Вычисление динамических величин

Формула переноса полюса

$$\boldsymbol{R}_A = \sum \left(\overrightarrow{AB} + \boldsymbol{r}_{Bi}\right) \times m_i \boldsymbol{v}_i = \overrightarrow{AB} \times \sum m_i \boldsymbol{v}_i + \sum \boldsymbol{r}_{Bi} \times m_i \boldsymbol{v}_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{K}_A = \boldsymbol{K}_B + \boldsymbol{Q} \times \overrightarrow{BA}}$$

Теорема Кёнига

Выберем некотору СК (книгову СК), движущуюся поступательно.

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + T^r_{c\xi\eta\zeta}.$$

В частности, для твёрдого тела

$$T^r_{c\xi\eta\zeta} = \sum \frac{1}{2}m_i(v_i^r)^2 = \sum \frac{1}{2}m_i\omega^2\rho_{Ci}^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum m_i\rho_{Ci}^2 = \frac{1}{2}J_\omega\omega^2.$$

Тогда, для твёрдого тела,

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_\omega\omega^2$$

6 Основные теоремы динамики в неИСО

Знаем, что

$$\mathbf{w}_i^a = \mathbf{w}_i^e + \mathbf{w}_i^c + \mathbf{w}_i^r.$$

Подставляя это во II закон Ньютона получим, что

$$m_i\mathbf{w}_i^r = \boldsymbol{F}_i - m_i\mathbf{w}_i^e - m_i\mathbf{w}_i^c. \tag{6.1}$$

Ниже введём некоторые определения, а именно $\boldsymbol{J}_i^e$ – *переносная сила инерции*, $\boldsymbol{J}_i^c$ – *кориолисова сила инерции*. Далее $\mathbf{w}_0$ – ускорение центра масс.

Величина	Thr об изменение	Определения
$\boldsymbol{Q}$	$\dot{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{R}^{\text{внеш}} + \boldsymbol{J}^e + \boldsymbol{J}^c$	$\boldsymbol{J}^e = -\sum m_i\mathbf{w}_i^e = -m_0\mathbf{w}_0^e$ $\boldsymbol{J}^c = -\sum m_i\mathbf{w}_i^c = -m_0\mathbf{w}_0^c$
$\mathbf{K}_A$	$\dot{\mathbf{K}}_A = \boldsymbol{M}_A^{\text{внеш}} + \boldsymbol{M}_A^e + \boldsymbol{M}_A^c +$ $+ \boldsymbol{Q}^r \times \boldsymbol{v}_A^r$	$\boldsymbol{M}_A^c = -\sum \boldsymbol{r}_{Ai} \times m_i\mathbf{w}_i^c$ $\boldsymbol{M}_A^e = -\sum \boldsymbol{r}_{Ai} \times m_i\mathbf{w}_i^e$
T	$dT = \delta A^{\text{вс},r} + \delta A^{e,r}$	$\delta A^{\text{вс},r} = \sum F_i\, d\boldsymbol{r}_i^r$ $\delta A^{e,r} = \sum -m_i\mathbf{w}_i^e \cdot d\boldsymbol{r}_i^r$

Для кинетической энергии в изменение нет слагаемого от кориолисовых сил, в силу

$$\delta A_i^{c,r} = -m_i(2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_0^r) \cdot (\boldsymbol{v}_0^r\, dt) \equiv 0.$$

7 Движение точки в ценральном поле

7.1 Уравнение Бине

Def 7.1. Полем центральных сил называется поле, в котором сила действующая на точку такая, что

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

Логично перейти к (r, φ, θ). Тогда

$$m\mathbf{w} = F(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\mathbf{w}_r = F(r) \\ m\mathbf{w}_\varphi = 0 \\ m\mathbf{w}_\theta = 0 \end{cases}$$

Тперье, получсется, знаем, что

$$\mathbf{w}_\theta = -r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\theta + r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = 0,$$

и, учитывая, что $\theta(0) = \pi/2$, $\dot{\theta}(0) = 0$, тогда $\theta(t) = \pi/2$, это с точки зрения диффуров. А с точки зрения физики кинетический момент сохраняется, то есть

$$\mathbf{K}_0 = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \text{const}. \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v} \in \text{постоянной плоскости}.$$

Тогда θ мы можем просто выбросить.

Приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} m\left(\ddot r - r\dot\varphi^2\right) = F(r) \\ m\dfrac{d}{dt}(r^2\dot\varphi) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m\left(\ddot r - r\dot\varphi^2\right) = F(r) \\ r^2\dot\varphi = \dfrac{\mathrm{K}_0}{m} = \text{const.} \end{cases} \tag{7.1}$$

Это, собственно, соответсвует закону Кеплера о сохранение секториальной скорости.

Первое уравнение как-то не очень, перейдём от d/dt к $d/d\varphi$. Тогда $r(t) \to u(\varphi) = \frac{1}{r}$ – переменная Бине.

$$\dot r = \frac{d(1/u)}{dt} = -cu',$$

а для второй производной

$$\ddot r = -c^2u^2u''.$$

Тогда уравнение перепишем, как

$$-c^2u^2u'' - c^2u^3 = \frac{F(u)}{m},$$

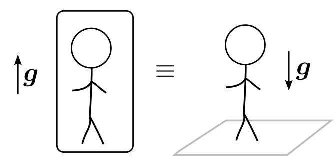
получая диффур вида

$$\boxed{u'' + u = \frac{-F(u)}{mc^2u^2}} \quad \text{– уравнение Бине.} \tag{7.2}$$

Так мы свели всё к гармоническому осцилятору.

7.2 Метрика Шварцшильда

Заметим (Эйнштейн заметил), что



тогда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right)d\tau^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}dr^2 - (r\sin\theta)^2\,d\varphi^2 - r^2\,d\theta^2.$$

Здесь 4 независимых переменных $(\tau, r, \varphi, \theta)$, где три из сферических координат, а τ – физическое время.

Также введен радиус Шварцшильда $a = 2GM$.

Движение точек рассматриваем, как движение по геодезическим, то есть $\mathbf{w}_i = 0$, где $i \in \{\tau, r, \varphi, \theta\}$, и положим $v^2 = 1$. Из раннее полученного, $\theta(t) = \pi/2$, то есть в некотором смысле движение плоское.

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right)\dot\tau^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}\dot r^2 - r^2\dot\varphi^2 = 1 \tag{7.3}$$

$$\mathbf{w}_\tau = \frac{d}{dt}\frac{\partial(v^2/2)}{\partial\dot\tau} - \underbrace{\frac{\partial(v^2/2)}{\partial\tau}}_{0} = \frac{d}{dt}\left[\left(1 - \frac{a}{r}\right)\dot\tau\right] = 0 \tag{7.4}$$

$$\mathbf{w}_\varphi = -\frac{d}{dt}\left[r^2\dot\varphi\right] = 0 \tag{7.5}$$

Тогда у нас есть первый интеграл

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right)\dot\tau = \mathcal{D}. \tag{7.6}$$

И другой первый интеграл

$$r^2\dot\varphi = \mathcal{C}. \tag{7.7}$$

Подставляя, получим, что

$$\mathcal{D}^2 - \mathcal{C}^2u'^2 = 1 - au + \mathcal{C}^2u^3(1 - au). \tag{7.8}$$

Применяя $d/d\varphi$ и полагая $\mathcal{C} = c$, получим

$$u'' + u = \frac{3}{2}au^2 + \frac{a}{2c^2} = -\frac{F}{mc^2u^2}. \tag{7.9}$$

Получается, что мы можем или говорить про движение по геодезическим в метрике Шварцшильда, или движение в центральном поле с силой

$$F = -m\left(\frac{3}{2}ac^2u^4 + \frac{a}{2}u^2\right). \tag{7.10}$$

8 Элементы механики сплошных сред (МСС)

8.1 Переменные Лагранжа и Эйлера

Пусть каждой точке среды соответсвует ξ^1, ξ^2, ξ^3, собственно (ξ, t) – *лгранжевы переменные. Закон движения среды* в таком случае это

$$\boldsymbol{r}(\xi, t), \tag{8.1}$$

скорость же

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{r}(\xi, t)}{\partial t}, \qquad \mathbf{w} = \frac{\partial \boldsymbol{v}(\xi, t)}{\partial t},$$

и так далее.

Альтернативно можеем задать (x, t) – эйлерово описание. Тогда

$$\boldsymbol{v}(x, t), \mathbf{w}(x, t) \quad \text{– поля скоростей и ускорений.}$$

В частности, представляя движение по шоссе, полоса 1,2,3 и участок трассы – эйлерово описание среды. Если же мы будем следить за каждой машиной, то это будет лагранжево описание.

Задача 1

Пусть

$$v_1 = \frac{-x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \qquad v_2 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Найти $\boldsymbol{r}(\xi, t)$. Легко получить, что

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = 1.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{1}{\omega}\cos\left(\omega t + \alpha\right), \qquad x_2 = \frac{1}{\omega}\sin\left(\omega t + \alpha\right).$$

Переменные запишутся как

$$\xi_1 = \frac{\cos\alpha}{\omega}, \qquad \xi_2 = \frac{\sin\alpha}{\omega} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1/2}, \alpha = \arcsin(\omega\xi_2).$$

Получается, что

$$\boldsymbol{r}(\xi, t) = \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix}\cos(\omega t + \alpha)\\ \sin(\omega t + \alpha)\end{pmatrix}.$$

8.2 Деформации

Пусть

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r},$$

где $\boldsymbol{u}$ – вектор дифформации. Тогда

$$dx_i' = dx_i + du_i = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\, dx_k.$$

Введём некоторый ds'

$$(ds')^2 = dx_i'\, dx_i'; \qquad ds^2 = dx_i\, dx_i.$$

Подставляя, получим, что

$$(ds')^2 = ds^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\, dx_i\, dx_k + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\, dx_k\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\, dx_k\right) \approx ds^2 + 2\varepsilon_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

где ε_{ik} – *тензор малых дефформаций*:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right),$$

который в главных осях диагонален.

Тогда

$$ds' = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{ii}} dx_i.$$

В общем смысл в том, что

$$\frac{dx'_i - dx_i}{dx_i} \approx 1 + \frac{1}{2}(2\varepsilon_{ii}) - 1 = \varepsilon_{ii}.$$

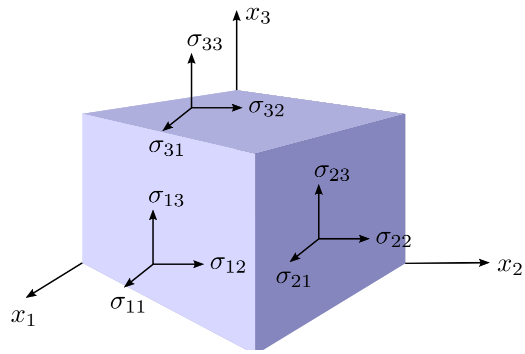
Или

$$\frac{dV' - dV}{dV} = \operatorname{tr}\varepsilon = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \operatorname{div}\boldsymbol{u}.$$

Тогда, в частности,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \quad - \quad \text{несжимаемая среда.}$$

8.3 Напряжение



Ну, собственно,

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}, \qquad \int F_i\, dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x}\, dV = \oint \sigma_{ik}\, dA_k.$$

Кстати,

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}. \tag{8.2}$$

8.4 Обобщенный закон Гука

Пусть E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона. Тогда

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}, \qquad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\mu}{E}\sigma_{11}.$$

Перепишем это в виду

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\mu}{E}\sigma_{22} - \frac{\mu}{E}\sigma_{33} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{11} - \frac{\mu}{E}\operatorname{tr}\sigma.$$

Или, в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \frac{1+\mu}{E} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} - \frac{\mu}{E}\operatorname{tr}\sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В тензорном виде

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{ik} - \frac{\mu}{E}\delta_{ik}\operatorname{tr}\sigma.$$

Выразим ε:

$$\operatorname{tr}\varepsilon = \frac{1+\mu}{E}\operatorname{tr}\sigma - \frac{3\mu}{E}\operatorname{tr}\sigma \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{tr}\sigma = \frac{E}{1-2\mu}\operatorname{tr}\varepsilon.$$

Так и получаем *обобщенный закон гука*:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\mu}\left[\varepsilon_{ik} + \frac{\mu}{1-2\mu}\delta_{ik}\operatorname{tr}\varepsilon\right] \tag{8.3}$$

Задача: самосжимающийся шар

Запишем

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = -f_i.$$

Тогда, после некоторых преобразований, получим, что

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{E}{1+\mu}\left[\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{u} + \frac{1}{2(1-2\mu)}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}\right].$$

Вспомним, что

$$\Delta\boldsymbol{u} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} - \cancel{\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}.$$

Перейдём к уравнению

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2u)}{r} = kr.\right) \tag{8.4}$$

Верно, что

$$\frac{d(r^2u)}{dr} = \frac{kr^4}{2} + c_1 r^2.$$

Логично, что на границе $\sigma_{11} = 0$. То есть

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\mu}\left[\varepsilon_{11} + \frac{\mu}{1-2\mu}\operatorname{tr}\varepsilon\right] = 0.$$

Но $\varepsilon_{rr} = du/dr = \varepsilon_{11}$, $\operatorname{tr}\varepsilon = \operatorname{div}\boldsymbol{u}$, из этого можем найти c_1.

9 Геометрия масс твёрдого тела

9.1 Тензор инерции

Движение тела может быть разбито на поступательное плюс вращательное. Есть три классические величины: $\boldsymbol{Q} = m\boldsymbol{v}_C$, $T = \frac{mv^2}{2} + T_{\dots}^{\dots}$, $\boldsymbol{K}$. Мгновенная ось вращения проходит через точку O.

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i \equiv \widetilde{r}_i\boldsymbol{\omega}, \qquad \widetilde{r}_i = \begin{pmatrix} 0 & z_i & -y_i \\ -z_i & 0 & x_i \\ y_i & -x_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Известно, что

$$v_i^2 = (\widetilde{r}_i\boldsymbol{\omega})^{\mathrm{T}}(\widetilde{r}_i\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\widetilde{r}_i^{\,\mathrm{T}}\widetilde{r}_i\boldsymbol{\omega}.$$

Так приходим к

Def 9.1. Тензором величину назовём величину

$$\hat{J}_0 = \sum m_i \widetilde{r}_i^{\,\mathrm{T}}\widetilde{r}_i. \tag{9.1}$$

Тогда кинетическую энергию запишем, как

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\hat{J}_0\boldsymbol{\omega}. \tag{9.2}$$

Но опыт кричит о том, что там момент инерции, действительно

$$J_e = \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\hat{J}_0\boldsymbol{e}. \tag{9.3}$$

Найдём его элементы:

$$\widetilde{r}_i^{\,\mathrm{T}}\widetilde{r}_i = \begin{pmatrix} y_1^2 + z_i^2 & -x_iy_i & -x_iz_i \\ -x_iy_i & x_i^2 + y_i^2 & -y_iz_i \\ -x_iz_i & -y_iz_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} = \hat{j}_i, \tag{9.4}$$

суммируя, получим

$$\hat{J}_0 = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix}, \tag{9.5}$$

где J_x – *осевые моменты инерции*, а J_{xy} – центробежные момент инерции.

Но, в силу симметричности тензора, существуют такие оси, что

$$\hat{J}_0 = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}. \tag{9.6}$$

9.2 Кинетический момент

Кинетический момент найдём из

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i\boldsymbol{v}_i\left[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i\right] = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2}\sum m_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{v}_i = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{K}_O, \tag{9.7}$$

тогда

$$\boxed{\boldsymbol{K}_O = \hat{J}_O\boldsymbol{\omega}}. \tag{9.8}$$

На самом деле

$$\hat{J}_0 \colon \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3 \to \boldsymbol{K}_O \in \mathbb{R}^{\not\parallel},$$
$$\boldsymbol{\omega}, \Omega \colon \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3 \to \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Вообще, получается $\boldsymbol{K}_O \not\parallel \boldsymbol{\omega}$.

Введём оси $\xi\eta\zeta$, тогда в них

$$\hat{J}_0 = \operatorname{diag}(A, B, C), \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right), \qquad \boldsymbol{K}_O = \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix}. \tag{9.9}$$

9.3 Компоненты тензора инерции в других СО

9.3.1 Поворот

Во-первых, посмотрим на поворот

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_1^{\mathrm{T}} \hat{J}_{O1} \boldsymbol{\omega}_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \hat{J}_{O2} \boldsymbol{\omega}_2, \qquad \boldsymbol{\omega}_1 = R\boldsymbol{\omega}_2,$$

Тогда

$$\boxed{\hat{J}_{O1} = R^{-1}\hat{J}_{O2}R}. \tag{9.10}$$

9.3.2 Параллельный перенос (Т. Гюйгенса-Штейнера)

Запишем

$$\hat{J}_O = \hat{J}_C + m\,\hat{j}_{CO}, \tag{9.11}$$

если $\vec{CO} = (\xi\eta\zeta)$, то

$$\hat{j}_{CO} = \begin{pmatrix} \eta^2 + \zeta^2 & -\xi\eta & -\xi\zeta \\ -\xi\eta & \xi^2 + \zeta^2 & -\eta\zeta \\ -\xi\zeta & -\eta\zeta & \xi^2 + \eta^2 \end{pmatrix} \tag{9.12}$$

9.4 Цилиндр

Перейдём к переменным r, φ, z, тогда, например

$$J_z = \int \left(x^2 + y^2\right) \rho \, dV = \frac{M}{\pi R^2 H} \iiint r^2 r \, dr \, d\varphi \, dz. \tag{9.13}$$

Считая, получим

$$\hat{J}_C = \operatorname{diag}\left(\frac{MR^2}{4} + \frac{MH^2}{12}, \ \frac{MR^2}{4} + \frac{MH^2}{12}, \ \frac{MR^2}{2}\right). \tag{9.14}$$

В частности, при $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} R & 0 & -H/2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, получим

$$\hat{J}_A = \hat{J}_C + m\hat{j}_{CA} = \begin{pmatrix} A & 0 & \frac{1}{2}MRH \\ 0 & B & 0 \\ \frac{1}{2}MRH & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Теперь приведем к главным осям, поворотом относительно оси z:

$$\hat{J}_A' = \operatorname{diag}\left(A', B', C'\right) = R^{\mathrm{T}} \hat{J}_A R, \qquad R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Решая, получим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 4\sqrt{3}.$$

Подставляя, найдём

$$\hat{J}_A' = \frac{mR^2}{4} \operatorname{diag}\left(2, 9, 9\right).$$

Ну или просто к главным осям привести можно, через собственные числа.

9.5 Диск

Есть некоторая квадратная рама (полное условие см. дополнение). Для простоты положим $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Найдём $T, \boldsymbol{N}_A, \boldsymbol{N}_B$.

Во-первых,

$$T = \frac{1}{2}mV_O^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}\hat{J}_O\boldsymbol{\Omega},$$

где $v_O = \omega a/2$. Выберем такие оси, что

$$\hat{J}_O = \frac{1}{4}mR^2\,\mathrm{diag}\,(1,1,2)\,.$$

Посчитаем теперь $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} O & \omega\sqrt{2}/2 & \omega\sqrt{2}/2+\omega \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Из теоремы об изменение импульса

$$m\mathbf{w}_O = \boldsymbol{N}_A + \boldsymbol{N}_B, \qquad m\frac{\omega^2\ a^2/4}{a/2} = N_A + N_B.$$

А ещё знаем, что

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{K}_A = \boldsymbol{\omega}_1 \times \left[\left(\hat{J}_O + m\hat{j}_{OA}\right)\boldsymbol{\Omega}\right] = \overrightarrow{AB} \times \boldsymbol{N}_B.$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{K}_A = \boldsymbol{\omega}_1 \times \left[\left(\hat{J}_O + m\hat{j}_{OA}\right)\boldsymbol{\Omega}\right] = \overrightarrow{AB} \times \mathbf{N}_B.$$