Заметки курса «Электричество и магнетизм»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *23 декабря 2020 г.*

Содержание

1 Закон Кулона и теорема Гаусса

Здесь попробуем индуктивно построить содержательную теорию, **начнём с двух эксперементальных фактов**, положенных в основу теории. Закона Кулона (сгсэ)

$$\boldsymbol{F} = \frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{1.1}$$

и, введя вектор напряженности электростатического поля $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/q$, принцип суперпозиции:

$$\boldsymbol{E} = \sum \boldsymbol{E}_i. \tag{1.2}$$

Дипольный момент

Простейшим примером системы зарядов является диполь $q_1 + q_2 = 0$, для которого введём $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$:

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{r_1^2}\frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1} - \frac{q}{r_1^2}\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2} \quad \overset{l \ll r_2, r_1}{\Longrightarrow} \quad \boldsymbol{E} = \frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}}{r^3} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}$$

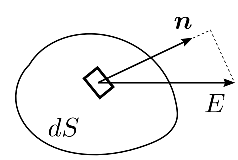
Для заряженной нити верно, что

$$E = 2\frac{\varkappa}{r}.$$

Теперь дойдём до двух теорем (кусочки уравнений Максвелла), описывающих электростатическое поле.

Thr 1.1 (теорема Гаусса)**.** *Для потока $\boldsymbol{E}$ через замкнутую поверхность S верно, что*

$$\oint_S E_n\, dS = \boxed{\oint_S (\boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S}) = 4\pi q_{\text{вн}}.} \tag{1.3}$$



$\triangle$.

I. Доказательство (из закона Кулона) для сферы вокруг точечного заряда очевидно.

II. Рассмотрим произвольную поверхность Ω, содержащую заряд, и телесный угол в онной:

$$E_n\, dS = E\cos\alpha\, dS = E\, dS'$$

То есть поток через наклонную площадку равен потоку через тот же телесный угол через некоторую вспомогательную сферу. Так как $s_1/s_2 = r_1^2/r_2^2$ и $E_1/E_2 = r_2^2/r_1^2$, получается интегрировать по Ω то же самое, что и интегрировать по выбранной хорошей сфере.

III. Рассмотрим теперь некоторую Ω, не содержащую заряд. Посмотрим на телесный угол от q. По модулю потоки через них одинаковые, а знаки противоположны, следовательно вклада в поток через Ω нет.

IV. Для сложного распределения зарядов, по принципу суперпозиции верно, что

$$\boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i \quad \Rightarrow \quad \oint_S E_n\, dS = \sum_i \oint_S \boldsymbol{E}_i\, dS.$$

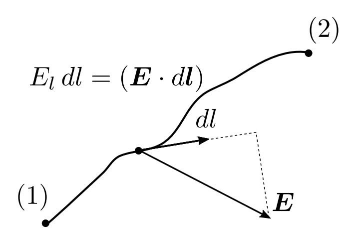
$\square$

2 Потенциал электрического поля.

Thr 2.1 (Теорема о циркуляции)**.** *Для заряда, при квазистатическом перемещении, верно, что*

$$A_{замкн} = \boxed{\oint_{(L)} (\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}) = 0} \tag{2.1}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0 \tag{2.2}$$



$\triangle$.

I. Рассмотрим поле точечного заряда Q и перемещение с $\boldsymbol{r}$ до $\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{l}_r + (d\boldsymbol{l} - d\boldsymbol{l}_r)$. Тогда $dA = (\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}) = \frac{Q}{r^2}dl_r$, то есть $A \equiv A(r_1, r_2)$.

II. Для поля в принципе вышесказанное верно по принципу суперпозиции.

$\square$

Def 2.2. *Разностью потенциалов* $\varphi_1 - \varphi_2$ между точками $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ называется $A = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{E} d\boldsymbol{l}$, при перемещении единичного положительного заряда. Потенциал определен с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

В частности, для точечного заряда, при $\varphi_\infty = 0$, верно

$$\varphi(r) = \int_r^\infty \frac{Q(r)}{r^2}\, dr = \frac{Q}{r}.$$

А для двух зарядов, $+q, -q$

$$\varphi = -\frac{q}{r_1} + \frac{q}{r_2} = q\frac{(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} \quad \overset{r \gg l}{\Rightarrow} \quad \varphi = \frac{1}{r^2}\frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{r}$$

2.1 Дифференциальная форма записи

Вектор напряженности электростатического поля

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi.} \tag{2.3}$$

Действительно,

$$d\varphi = -(\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}) = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}dx_i = d\boldsymbol{l}\cdot\nabla\varphi, \text{ где } \nabla\varphi \equiv \operatorname{grad}\varphi.$$

А теперь рассмотрим некоторый элементарный параллелепипед. Тогда поток через левую грань это $-E_x\, dy\, dz$, а через правую это $\left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x}dx\right) dy\, dz$. Тогда суммарный поток через мааленький параллелепипед равен $dV\, \partial E/\partial x$, а теорема Гаусса примет вид

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z}\right) dV = 4\pi\rho\, dV \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho}. \tag{2.4}$$

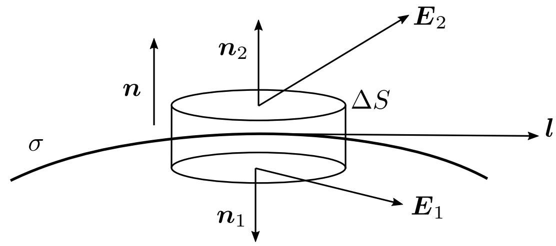
2.2 Граничные условия на заряженной поверхности

По теореме Гаусса верно, что

$$E_{2n_2}\cancel{\Delta S} + E_{1n_1}\cancel{\Delta S} = 4\pi\sigma\cancel{\Delta S},$$
$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$$

По теореме циркуляции верно, что

$$E_{2l}\cancel{\Delta l} - E_{1l}\cancel{\Delta l} = 0$$
$$E_{2l} - E_{1l} = 0.$$

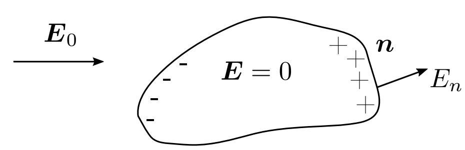


3 Проводники

Def 3.1 (пусть так)**.** *Проводник* – костяк частиц, окруженных *свободными* электронами, которые в пределах тела могут перемещаться на какие угодно расстояния.

В частности, для проводников, верно, что

$$E_n = 4\pi\sigma \tag{3.1}$$
$$E_\tau = 0 \tag{3.2}$$



Собственно, объёмных зарядов в проводнике нет, поверхностные есть и компенсируют внешнее поле. Аналогично работает решетка Фарадея, электростатическое поле не проникает в проводники.

3.1 Основная задача электростатики

Вместо поиска $\boldsymbol{E}$ достаточно найти φ, воспользовавшись (2.3) и (2.4), получим

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi \equiv \delta\varphi = \begin{cases} -4\pi\rho & \text{ур. Пуассона} \\ 0 & \text{ур. Лапласа} \end{cases}$$

Как может быть поставлена задача? Заданы граничные значение, найти распределения зарядов. Заданы заряды, найти распределения. Что-то задано, что-то не задано. Во всех трёх случаях **решение уравнения Лапласа единственно**.

Метод изображений

Если существует некоторая эквипотенциальная поверхность разделяющая пространство на два полупространства, то можем считать что эта поверхность является проводящей.

4 Диэлектрики

Def 4.1. *Диэлектрики* – непроводники электричества. В них возбуждаются индукционные заряды, привязанные к кастету частиц, – *поляризационные*, или *связанные заряды*.

Альтернативный вариант, – наличие дипольного момента у молекул. При наличии электрического поля дипольные моменты ориентируются, диэлектрик попользуется.

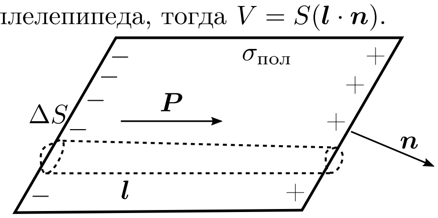
Def 4.2. *Вектор поляризации* – дипольный момент единицы объема диэлектрика, возникающий при его поляризации.

Рассмотрим скошенный параллелепипед. На основаниях параллелепипеда возникнут поляризационные заряды с поверхностной плотностью $\sigma_{\text{пол}}$. Взяв его площадь за S, найдём дипольный момент равный $\sigma_{\text{пол}} S\boldsymbol{l}$. Тогда вектор поляризации будет

$$\boldsymbol{P} = \frac{\sigma_{\text{пол}} S}{V}\boldsymbol{l}, \tag{4.1}$$

что верно и для анизотропных кристаллов где $\boldsymbol{E} \nparallel \boldsymbol{P}$.

Пусть $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор внешней нормали к основанию параллелепипеда, тогда $V = S(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n})$.



Подставив V в предыдущую формулу, получим, что

$$\sigma_{\text{пол}} = (\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}) = P_n \tag{4.2}$$

Или, более общо,

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{\Delta V}\boldsymbol{p}_i$$

В случае неоднородной поляризации верно, что поляризационные заряды могут появиться и на поверхности. Выделим V, ограниченный S, смещённый заряд равен $-P_n\,dS$, тогда через S поступает

$$q_{\text{пол}} = -\oint P_n\,dS = -\oint(\boldsymbol{P}\times\,d\boldsymbol{S})\,. \tag{4.3}$$

Стоит заметить, что в теорему о циркуляции не входят заряды, соотвественно для диэлектриков верно, что

$$\oint_{(L)} E_l\,dl = 0.$$

Далее чаще всего мы будем сталкиваться с линейной поляризацией, когда

$$\boldsymbol{P} = \alpha\boldsymbol{E}, \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}\underbrace{(1+4\pi\alpha)}_{\varepsilon} = \varepsilon\boldsymbol{E},$$

где α – *поляризуемость диэлектрика*, а ε – *диэлектрическая проницаемость*.

4.1 Теорема Гаусса

Запишем теорему Гаусса для электрического поля в диэлектрике. Знаем, что $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\text{пол}} + \boldsymbol{E}_{\text{св}}$.

$$\oint E_n\,dS = 4\pi(q+q_{\text{пол}}) \quad\Rightarrow\quad \oint\underbrace{(E_n+4\pi P_n)}_{D_n}\,dS = 4\pi q. \quad\Rightarrow\quad \boxed{\oint D_n\,dS = 4\pi q_{\text{св}}} \tag{4.4}$$

где $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}$. – вектор *электрической индукции*, или *электрического смещения*. Поток вектора $\boldsymbol{D}$ определяется только свободными зарядами.

Можно посмотреть на это в дифференциальной форме:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho,\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\left(\rho - \operatorname{div}\boldsymbol{P}\right),\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi(\rho+\rho_{\text{пол}}) \qquad\Rightarrow\qquad \rho_{\text{пол}} = -\operatorname{div}\boldsymbol{P}.
\end{aligned}$$

4.2 Граничные условия на границе двух диэлектриков

Повторя рассуждения для проводников, найдём, что

$$D_{1n} = D_{2n},$$

а в случае линейных диэлектриков верно

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}.$$

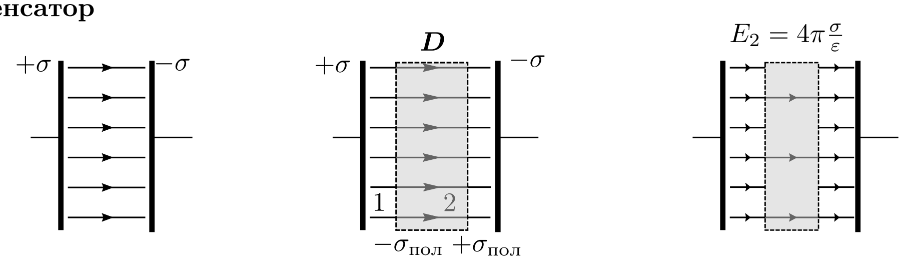
Или

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma_{\text{пол}}.$$

Аналогично, из теоремы о циркуляции получим, что

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0.$$

Плоский конденсатор



$E_0 = 4\pi\sigma$ $\quad D_2 = D_1 = E_0 = 4\pi\sigma$ $\quad E_1 - E_2 = 4\pi\sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\big) = 4\pi\sigma_{\text{пол}}$

То есть на грани пластинки $\sigma_{\text{пол}} = \sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

4.3 Поле системы зарядов в однородном диэлектрике

Для точечного заряда в однородном диэлектрике, по теореме Гаусса

$$\left.\begin{aligned} D \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \\ D = \varepsilon E \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{q}{\varepsilon r^2}.}$$

То ест в общем случае, по принципу суперпозиции, в диэлектрике

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0.$$

5 Энергия электрического поля

Рассмотрим систему из двух зарядов q_1 и q_2. Тогда энергия взаимодействия

$$W = q_1\varphi_{21} = q_2\varphi_{12} = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_{21} + q_2\varphi_{12}\right).$$

Или, в общем случае

$$W = \frac{1}{2}\sum_{ij} W_{ij} = \frac{1}{2}\left(q_i\varphi_i^j\right) = \frac{1}{2}\sum q_i\varphi_i,$$

где под φ_i имеется ввиду потенциал q_i заряда. В случае непрерывно заряженного тела

$$W = \frac{1}{2}\int \varphi\rho\, dV.$$

Например, для конденсатора

$$W = \frac{1}{2}\varphi_1\int_{(1)} dq + \frac{1}{2}\varphi_2\int_{(2)} dq = \frac{1}{2}q(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{1}{2}qU = \frac{cU^2}{2} = \frac{q^2}{2c}.$$

Вопрос: где локализована энергия? Ответ: в зарядах или в поле. В частности, для конденсатора

$$W = \frac{1}{2}cU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S E^2 d^2}{4\pi d} = \underbrace{\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}}_{w_{\text{э}}} V,$$

где $\mathcal{W}_Э = \varepsilon E^2/8\pi$ – *объемная плотность* электрической энергии. В общем же случае

$$W_Э = \int \mathcal{W}_Э \, dV. \tag{5.1}$$

6 Виды диэлектриков

Посмотрим на энергию внутри вакуума и диэлектрика, $E^2/8\pi$ и $E^2/\varepsilon 8\pi$. Энергия электрического поля определяется через работу внешних сил, которую необходимо затратить, чтобы это поле создать. Собственно, во втором случае есть ещё добавки. рассмотрим диэлектрик с упругими диполями, то есть пусть

$$F = \varkappa l.$$

Пусть диполь попал во внешнее поле, тогда

$$Eq \cdot \frac{l}{2} = \varkappa l \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} Ep.$$

Тогда вся энергия, чтобы создать в этой среде поле

$$W = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{EP}{2} = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{1}{2}E^2\alpha = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{E^2}{8\pi}(\varepsilon - 1) = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}.$$

А если работать с диэлектриками с собственным дипольным моментом? Тогда ещё появиться некоторое тепло, которое необходимо отдать термостату, увеличивая упорядоченность системы. Постараемся обобщить, для этого вспомним, что

Def 6.1. *Свободная энергия* – функция состояния, приращение которой в обратимом изотермическом процессе равно совершаемой работе внешних сил.

Так вот, то что мы называем энергией электрического поля (в диэлектриках), на самом деле это объёмная плотность свободной энергии $\Psi = U - TS$.

7 Теория постоянных токов

Def 7.1. *Сила тока* – заряд, протекший через сечений проводника в единицу времени,

$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{7.1}$$

Плотность тока – ток, протекающий через единичное сечение.

$$\boldsymbol{j} = ne\boldsymbol{u}. \tag{7.2}$$

Law 7.2 (закон Ома)**.** *Для класса линейных проводников верно, что при наличии разности потенциалов U*

$$I = \frac{U}{R} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{j} = \lambda \boldsymbol{E}, \tag{7.3}$$

где $\lambda = 1/\rho$, обратное удельное сопротивление.

В СГСЭ, кстати, $\dim \rho = $ с, а в СИ 1 ед. СГСЭ $\rho = 9 \cdot 10^9$ Ом.

Условие стационарности

Пусть в некоторый узел втекает $I_1, \ldots, I_n$, тогда

$$\oint_{(S)} j_n \, dS = -\dot{Q}.$$

Это «закон сохранения заряда», или уравнение непрерывности. В частности, в стационарном случае

$$\boxed{\oint j_n \, dS = 0}. \tag{7.4}$$

Получается (??), что поле зарядов, которые участвуют в протекании постоянных токов можно описывает с помощью электростатических формул, то есть применять теорему Гаусса и теорему о циркуляции.

По теореме Гаусса и условия стационарности,

$$0 = \oint j_n \, dS = \lambda \oint E_n \, dS = \lambda 4\pi q,$$

то есть для проводников с постоянным током всё ещё верно, что внутреннего заряда в проводниках нет, а есть только поверхностный.

Невозможна стационарная ситуация с постоянных током только на потенциальных силах. Для участка цепи, в котором действуют сторонние силы, можно записать

$$\boldsymbol{j} = \lambda\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\text{стор}}\right). \tag{7.5}$$

Def 7.3. *ЭДС* – электро-движущая сила, работа совершаемая сторонними силами при перемещении единичного заряда по рассматриваемому участку,

$$\mathcal{E} = \int_{(I)} E_l^{\text{стор}}\, dl. \tag{7.6}$$

Правила Кирхгофа

Рассмотрим узел, в который втекает $I_1, \ldots, I_n$. Из условия стационарности получим (I). Рассмотрев замкнутый участок цепи, получим (II) правило Кирхгофа. Действительно, $j_l = \lambda\left(E_l + E_l^{\text{стор}}\right)$, или

$$\oint \frac{I\, dl}{\lambda S} = \oint \left(E_l + E_l^{\text{стор}}\right) dl, \quad \text{где} \quad \oint \frac{I\, dl}{\lambda S} = IR.$$

Но для каждого участка $I_i R_i = \Delta\varphi_i + \mathcal{E}_i$. Это с учётом направления тока.

I. $\sum I_i = 0.$

II. $\sum I_i R_i = \sum \mathcal{E}_i$

Оказывается, для любой цепи, записав уравнения Кирхгофа для всех узлов и всех независимых контуров, получим разрешимую единственным образом систему уравнений (ну или хотя бы столько, сколько можно).

8 Магнитное поле в вакууме

8.1 Сила Ампера

Ампер ввел элементы тока, тогда

$$d\boldsymbol{F} = K_1 I\left[d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}\right], \tag{8.1}$$

где $\boldsymbol{B}$ – *индукция магнитного поля*, силовая характеристика магнитного поля.

8.2 Закон Био-Савара

Ещё один эксперементальный факт:

$$d\boldsymbol{B} = K_2 I \frac{\left[d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}\right]}{r^3}. \tag{8.2}$$

Осталось поговорить про коэффициенты[1] K_1 и K_2. Из $I^{(\text{М})} = \frac{1}{c} I^{(\text{Э})}$, получим

в СГСМ:

$$d\boldsymbol{F} = I\left[\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}\right]$$
$$d\boldsymbol{B} = I\, \frac{\left[d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}\right]}{r^3}.$$

в системе Гаусса:

$$d\boldsymbol{F} = \frac{I}{c}\left[d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}\right]$$
$$d\boldsymbol{B} = \frac{I}{c}\, \frac{\left[d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}\right]}{r^3}.$$

Подставляя $\boldsymbol{j} = nq\boldsymbol{v}$, получим формулу следующего раздела.

8.3 Сила Лоренца

Law 8.1. *Сила, действующая на движущийся точечный заряд q в магнитном поле, получен обобщением опытных фактов,*

$$\boldsymbol{F}_m = \frac{q}{c}\left[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right], \tag{8.3}$$

где вектор $\boldsymbol{B} \neq f(q, v)$ характеризует магнитное поле, напряженность магнитного поля.

Из этого можем найти, что

$$\boldsymbol{B} = \frac{c}{q\boldsymbol{v}_\perp^2}\left[\boldsymbol{F}_m \times \boldsymbol{v}_\perp\right],$$

[1] В системе Гаусса $I, q, \Delta\varphi$ измерется в СГСЭ, а B, H, L, M в СГСМ.

что однозначно определяет $\boldsymbol{B}$.

В предположение, что электрическое и магнитное поля действуют независимо, то $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_m$, т.е.

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\left[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right]\right),$$

где $\boldsymbol{F}$ – сила Лоренца.

9 Магнитное поле в намагничивающихся средах

9.1 Уравнения максвелла для магнитного поля в веществе

Посмотрим на рамку с током в магнитном поле. Для неё верно, что суммарная сила, действующая на рамку,

$$\boldsymbol{B}\oint d\boldsymbol{F} = \frac{I}{c}\oint[d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}] = \frac{I}{c}\left[\oint d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}\right] = 0.$$

Однако момент, действующий на рамку, не равен 0,

$$S = ab, \quad F = \frac{I}{c}bB \quad \Rightarrow \quad M = \frac{IS}{c}\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{p}_m = \frac{IS}{c}\boldsymbol{n} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{M} = \left[\boldsymbol{p}_m \times \boldsymbol{B}\right].$$

Посмотрим теперь на рамку в неоднородном магнитном поле. Рассмотрим рамку такую, что $\boldsymbol{p}_m \parallel \boldsymbol{B}$, тогда $\boldsymbol{I}\, d\boldsymbol{l}$ имеет проекцию на $\boldsymbol{n}$, получается, что

$$F_x = (p_m)_x \frac{\partial B_x}{\partial x}.$$

Возвращая к полю, предполагается, что внутри молекул формируются *молекулярные токи*, создающие дополнительный магнитный момент, а при наличие внешнего поля происходит ориентация этих моментов. Тогда теорема о циркуляции магнитного поля в веществе запишется, как

$$\oint_{(L)} (\boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l}) = \frac{4\pi}{c}\left(I_{\text{пров}} + I_{\text{мол}}\right). \tag{9.1}$$

Стоит заметить, что в теории Максвелла имеется ввиду, что

$$\boldsymbol{B} = < \boldsymbol{B}_\mu > .$$

Характеристика, описывающая состояние намагниченного вещества в точке – магнитный дипольный момент, единице объема:

$$\boldsymbol{\mathcal{I}} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{\Delta V}(\boldsymbol{p}_m)_i\,.$$

Можем записать, что

$$\oint \mathcal{I}_l\, dl = \frac{I_{\text{мол}}}{c}. \tag{9.2}$$

Тогда уравнение перепишется, как

$$\oint_{(L)} (\boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{l}) = \frac{4\pi}{c} I_{\text{пров}} + 4\pi\oint_{(L)} (\boldsymbol{\mathcal{I}}\, d\boldsymbol{l}). \tag{9.3}$$

$$\oint_{(L)} \underbrace{(\boldsymbol{B} - 4\pi\boldsymbol{\mathcal{I}})}_{\boldsymbol{H}}\, d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c} I_{\text{пров}}, \tag{9.4}$$

здесь принимается определение $\boxed{\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - 4\pi\boldsymbol{\mathcal{I}}}$ – *напряженность магнитного поля.*

Далее нас интересует линейная намагничиваемость:

$$\boldsymbol{\mathcal{I}} = \varkappa\boldsymbol{H},$$

где $\varkappa$ – магнитная восприимчивость. Тогда можем записать, что

$$\boldsymbol{H}\underbrace{(1 + 4\pi\varkappa)}_{\mu} = \boldsymbol{B}, \tag{9.5}$$

что записано в системе Гаусса. В СИ верно, что

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{\mathcal{I}}.$$

9.2 Различные вещества

I. Парамагнетики, $\varkappa \in [10^{-3}, 10^{-6}]$, пример: алюминий.

II. Диамагнетики, $\varkappa < 0$, пример: золото, серебро, см. модель Ланжевена.

III. Ферромагнетики, $\varkappa \in [10^3, 10^6]$, пример: железо, никель.

9.3 Граничные условия

Рассмотрим границу двух веществ с μ_1 и μ_2. Тогда

$$\boldsymbol{B}_{1n} = \boldsymbol{B}_{2n},$$

а для тангенциальной компоненты

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_N.$$

10 Электромагнитная индукция

10.1 Понимания

Def 10.1 (Понимание Фарадея)**.** Для движущейся перемычки в замкнутом контуре, помещенного в магнитное поле, можно записать силу лоренца, которая будет толкать каждый носитель заряда в ней как:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{e} = \frac{1}{c}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}].$$

Электродвижущая сила, создаваемая этим полем называется *электродвижущей силой.* И для магнитного потока пронизывающего площадь рамки:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} \tag{10.1}$$

Def 10.2 (Понимание Максвелла)**.** Всякое изменение магнитного поля во времени возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле. Циркуляция E по $\forall$ замкнутому контуру определяется:

$$\oint_s (E\,ds) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{10.2}$$

где $\Phi = \oint_s \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{S}$ — магнитный поток, пронизывающий неподвижный контур s.

Сущность в таком понимании прежде всего в возбуждении электрического поля, а не тока. Электромагнитная индукция может наблюдаться и тогда, когда в пространстве нет проводников вообще.

10.2 Сила Лоренца

Def 10.3. *Сила Лоренца* для проводника движущегося в переменном магнитном поле ток возбуждается как магнитной, так и электрической силами:

$$\boldsymbol{F} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}]\right) \tag{10.3}$$

От выбора системы отсчета зависит, какая часть индукционного тока вызывается электрической, а какая магнитной составляющей силы Лоренца. Деление электромагнитного поля на электрическое и магнитное определяется системой отсчета, в которой рассматриваются явления.

С помощью пересадок, в общем случае, нельзя добиться того, чтобы электромагнитное поле сделалось либо чисто электрическим, либо чисто магнитным.

10.3 Индуктивность проводов

Def 10.4. Предполагаем, что ферромагнетиков нет, тогда $\boldsymbol{B}$ и Φ пропорциональны току:

$$\Phi = LI^{(m)} = \frac{1}{c}LI, \tag{10.4}$$

где $I^{(m)}$ – сила тока в СГСМ, а I – сила того же тока в СИ, L же не зависит от силы тока и называется *индуктивностью провода.* Чем тоньше провод, тем болше его индуктивность.

10.4 Магнитная энергия

Для витка с током, в котором с помощью внешних сил потечёт ток, а значит будет нарастать и магнитный поток через него, возникнет ЭДС, тогда элементарная работа внешний сил:

$$\delta A^{\text{внеш}} = -\mathcal{E}^{\text{инд}} I\, dt = \frac{1}{c} I\, d\Phi.$$

Def 10.5. Из верхнего, достаточно общего утверждения, если работа внешняя работы пойдёт только на увеличение *магнитной энергии*, то есть диа- или парамагнетик, в частности.

$$dW_m = \frac{1}{c}\, d\Phi \quad \overset{\nexists\text{ферромагнетиков}}{\rightsquigarrow} \quad W_m = \frac{L}{2}\left(\frac{I}{c}\right)^2 = \frac{1}{2c} I\Phi = \frac{\Phi^2}{2L}, \tag{10.5}$$

где L – самоиндукция проводника с током и константа. Также, для справедливости последней формулы не обязательно виток должен оставаться неподвижным.

Важно, что μ остается постоянной, или же, если проницаемость зависит от температуры, то в процессе намагничивания, чтобы формула работала, надо поддерживать T постоянной.

Тогда W_m будет иметь смысл свободной магнитной энергии системы.

Можно перейти к другому виду записи энергии магнитного поля, энергия, которую запас соленоид, используя:

$$\begin{cases} H = 4\pi I/(cl) \\ \Phi = BS \end{cases} \rightsquigarrow dW_m = \frac{I}{c}\, d\Phi = \frac{V}{4\pi}(\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{B}) \tag{10.6}$$

Если w_m – плотность магнитной энергии в соленоиде, то в общем случае можно записать $W_m = \int w_m\, dV$, где плотность определяется: $w_m = (\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{B})/(4\pi)$.

В случае пара- и диамагнитный сред $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ получаем: $w_m = \mu H^2/(8\pi)$

Рассмотрим два витка с током по которым текут токи I_1 и I_2. В отсутствии ферромагнетиков запишется:

$$\Phi_1 = \frac{1}{c}L_{11}I_1 + \frac{1}{c}L_{12}I_2,$$
$$\Phi_2 = \frac{1}{c}L_{21}I_1 + \frac{1}{c}L_{22}I_2.$$

Можно сформулировать **теорему о взаимности** $L_{ik} = L_{ki}$

Thr 10.6 (О сохранении магнитного потока)**.** *Проводник с током в $\forall$ магнитном поле, движется и деформируется, тогда в нём возбуждается:*

$$I = \frac{\mathcal{E}^{\text{инд}}}{R} = -\frac{1}{cR}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Если $R = 0$, то $d\Phi/\,dt = 0$, то есть при движении идеально проводящего замкнутого провода в магнитном поле остается постоянным магнитный поток, пронизывающий контур провода.

11 Семинары

11.1 Диполь

Поле диполя:

$$\boldsymbol{E} = \frac{3\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}\right)}{r^5}\boldsymbol{r} - \frac{1}{r^3}\boldsymbol{p}.$$

Или, считая $\boldsymbol{n}$ – единичным вектором вдоль r:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{r^3}\left(3(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p}\right)$$

Момент сил, действующих на диполь в однородном магнитном поле

$$\boldsymbol{M} = \left[\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}\right].$$

Энрегия диполя:

$$W = \int \delta A = \int M\, d\alpha = pE\cos\alpha\Big|_{\alpha}^{\alpha_0=\pi/2} = -\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}\right).$$

Теперь для неупругого диполя:

$$kl = qE, \quad\Rightarrow\quad U = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}\right).$$

Для диполя в неоднородном поле:

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) \approx q\, d\boldsymbol{E}, \qquad d\boldsymbol{E} = l^i\partial_i\boldsymbol{E}, \qquad\Rightarrow\qquad \boldsymbol{F} = p^i\partial_i\boldsymbol{E} = \left(\boldsymbol{p}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{E}$$

Взаимодействие двух сонаправленных диполей:

$$E_1 = -6\frac{p_1}{d^4}, \qquad\Rightarrow\qquad F = p_2\frac{dE_1}{dx} = -\frac{6p_1p_2}{x^4}.$$

Для двух равномерно заряженных сфер, смещённых на $\boldsymbol{l}$, поле внутри области пересечения

$$\boldsymbol{E}(A) = -\frac{4}{3}\pi\rho\boldsymbol{l}.$$

Найдём теперь такое распредление заряда, чтобы поле внутри всей сферы было $\boldsymbol{E}_0$. Толщина заряженной части $l' = l\cos\theta$, тогда

$$\rho = \frac{3}{4}\frac{E_0}{l}, \qquad\Rightarrow\qquad \sigma(\theta) = \rho l' = \rho l\cos\theta = \frac{3}{4\pi}E_0\cos\theta,$$

при чём для этой сферы дипольный момент

$$\boldsymbol{P} = q\boldsymbol{l} = \frac{4}{3}\pi R^3\rho\boldsymbol{l} = -R^3\boldsymbol{E}_0.$$

11.2 Уравнения Максвелла

Ди-форма в СГС:	Ин-форма в СГС:	Ди-форма в СИ:	Ин-форма в СГС:
$\operatorname{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho$	$\oint \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s} = 4\pi Q$	$\operatorname{div}\boldsymbol{D} = \rho$	$\oint \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s} = Q$
$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$	$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = 0$	$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$	$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = 0$
$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}$	$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\int\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}$
$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$	$\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c}I + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s}.$	$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$	$\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = I + \frac{d}{dt}\int\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{s}.$

где $\mu\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$,

$\boldsymbol{E}$ — напряженность электрического поля;
$\boldsymbol{H}$ — напряженность магнитного поля;
$\boldsymbol{D}$ — электрическая индукция;
$\boldsymbol{B}$ — магнитная индукция.

Материальные уравнения

В среде сторонние электрические и магнитные поля вызывают поляризация $\boldsymbol{P}$ и намагничивание вещества $\boldsymbol{M}$. Тогда

$$\rho_{\mathrm{b}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{j}_{\mathrm{b}} = c\nabla \times \boldsymbol{M} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t},$$

где в СИ не будет множителя c. Далее, по определению

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi \boldsymbol{M} \qquad \text{(СГС)}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \qquad \text{(СИ)}$$

Наконец, в однородных средах верно, что

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi \dfrac{\rho}{\varepsilon}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \dfrac{4\pi}{c}\mu \boldsymbol{j} + \dfrac{\varepsilon\mu}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \end{cases}$$

где в оптическом диапазоне принято $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$.

Граничные условия

Опять же, в СГС,

$$\begin{cases} (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) \times \boldsymbol{n}_{1,2} = 0, \\ (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) \times \boldsymbol{n}_{1,2} = \dfrac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) \cdot \boldsymbol{n}_{1,2} = -4\pi\rho_{\mathrm{s}}, \\ (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) \cdot \boldsymbol{n}_{1,2} = 0, \end{cases}$$

где ρ_{s} – поверхностная плотность свободных зарядов, $\boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}$ – плотность поверхностных свободных токов вдоль границы.

Эти граничные условия показывают непрерывность нормальной компоненты вектора магнитной индукции, и непрерывность на границе областей тангенциальных компонент напряжённостей электрического поля.

Уравнение непрерывности

Источники полей $\rho, \boldsymbol{j}$ не могут быть заданы произвольным образом. Применяя операцию дивергенции к четвёртому уравнению (закон Ампера—Максвелла) и используя первое уравнение (закон Гаусса), получаем уравнение непрерывности

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \qquad \Leftrightarrow \qquad \oint_S \boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV.$$

11.3 Введение в электрические цепи

Колебательный контур описывается дифференциальным уравнением второго порядка:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \mathscr{E} \tag{11.1}$$

Если же «внешних сил» ε или F нет, то уравнения линейны и однородны по времени, описывая, так называемые, свободные колебания. Введём обозначения для таких линейных колебательных систем:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \qquad 2\gamma = \frac{R}{L}, \qquad X = \frac{\mathscr{E}}{L}. \tag{11.2}$$

Тогда уравнения преобразуются в более удобный вид, в котором ω_0 – собственная частота, а γ – коэффициент затухания.

Виды колебаний в электрических цепях

Свободные колебания гармонического осциллятора характеризуется отсутствием омического сопротивления:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} q &= q_0 \cos(\omega_0 t + \delta), \\ I &= \omega_0 q_0 \cos\left(\omega_0 t + \delta + \pi/2\right). \end{aligned} \tag{11.3}$$

Затухающие колебания характеризуются наличием тормозящей силы:
$$\ddot{q}+2\gamma\dot{q}+\omega_0^2 q=0 \qquad \Rightarrow \qquad q=ae^{-\gamma t}\cos(\omega t+\delta),\ \text{где } \omega^2=\omega_0^2-\gamma^2. \tag{11.4}$$
Выпишем несколько важных определений:

Период колебаний — величина $T=2\pi/\omega=2\pi/\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}=T_0/\sqrt{1-(\gamma/\omega_0)^2}$;

Амплитуда — величина $A=ae^{-\gamma t}$;

Время затухания — величина $\tau=1/\gamma$ за которое A убывает в e раз;

Логарифмический декремент затухания —величина $d=\gamma T$ (безбожно устарел);

Добротность — величина $Q=\pi/d=\omega/2\gamma=\pi N$, где $N=\tau/T=\frac{1}{\gamma T}(=1/d)$. Также $Q=\Delta W/W$.

Вынужденный колебания затухающего осциллятора под действием синусоидальной силы

Запишем уравнение колебаний в самом простом случае:
$$\ddot{q}+2\gamma\dot{q}+\omega_0^2 q=X(t)=X_0\cos(\omega t) \tag{11.5}$$
Частное решение ищем в виде $q=q_0e^{i\omega t}$, откуда $\dot{q}=i\omega q$, $\ddot{q}=\omega^2 q$, тогда:
$$q=\frac{X}{\omega_0^2-\omega^2+2i\omega\gamma}e^{i\omega t}+e^{-\gamma t}(C_1\cos\omega_0 t+C_2\sin\omega_0 t) \tag{11.6}$$
Если $t\gg\tau$, то свободные колебания практически затухнут и останутся только вынужденные (первый член выражения для q).

Оставим только вещественную часть решения:
$$q=\frac{X}{\omega_0^2-\omega^2+2i\omega\gamma}e^{i\omega t} \quad \rightsquigarrow \quad q=\frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}\cos\left(\omega t-\Delta\varphi\right), \quad \Delta\varphi=\arctan\left[\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right]. \tag{11.7}$$
В наиболее важном случае, когда затухание невелико, положения всех максимумов почти не отличаются друг от друга. Поэтому за максимум аплитуды смещения можно принять её значение при $\omega=\omega_0$:
$$a_{max}=\frac{X_0}{2\omega_0\gamma}=\frac{\omega_0}{2\gamma}a_0, \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{a_{max}}{a_0}=Q=\frac{\omega_0}{2\gamma}. \tag{11.8}$$

11.4 Волновое уравненние

Считая в среде $\boldsymbol{j}=0$, можно написать, что
$$\begin{cases}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ \operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\end{cases};\ \begin{cases}\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}\end{cases};\ \Rightarrow\ \begin{cases}\nabla\times[\nabla\times\boldsymbol{E}]=\cancel{\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})}-\Delta\boldsymbol{E}\\ \nabla\times[\nabla\times\boldsymbol{E}]=-\dfrac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\end{cases};\quad\Rightarrow\quad \boxed{\Delta\boldsymbol{E}=\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial^2 t}=0}. \tag{11.9}$$
Аналогично для $\boldsymbol{B}$ мы можем записать, что
$$\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial^2 t}=\frac{c^2}{\varepsilon\mu}\Delta\boldsymbol{B}.$$
Если мы хотим видеть в волноводе целое число волн, то
$$\omega^2=\frac{c^2\pi^2}{\varepsilon\mu}\left[\left(\frac{n_x}{a_x}\right)^2+\left(\frac{n_y}{a_y}\right)^2+\left(\frac{n_z}{a_z}\right)^2\right].$$

11.5 Магнитики

Есть такое определение магнитного поля $\boldsymbol{B}$:
$$\boldsymbol{B}=\frac{q}{cr^3}\left[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}\right]=\frac{1}{c}\left[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}\right],$$
в СГСЭ.

Можно из $I\,d\boldsymbol{l}=\boldsymbol{j}\,dV$, перейти к закону
$$d\boldsymbol{B}=\frac{I}{c}\left[d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}\right], \quad d\boldsymbol{B}=\frac{I}{c}\left[\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}\right].$$
Например, для прямого провода есть самозамкнутые кружочки вокруг онного с модулем
$$B=\frac{2I}{cr}.$$

Если взять маленький виток с проводом, то конфигурация полей аналогична полю диполю. В центре витка поле будет

$$B = \frac{2\pi I}{cr}.$$

Так вот для витка

$$\boldsymbol{\mathfrak{M}} = \frac{1}{c} I \boldsymbol{S}.$$

Поле вокруг магнитного диполя

$$\boldsymbol{B} = \frac{3}{5}\frac{(\boldsymbol{\mathfrak{M}}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5}\boldsymbol{r} - \frac{1}{r^3}\boldsymbol{\mathfrak{M}}.$$

Сила Лоренца:

$$\boldsymbol{F} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}]\right). \tag{11.10}$$

Введём линейную плотность тока и запишем, где Ω – телесный угол площадочки,

$$i = \frac{I}{l}, \qquad dB_\tau = \frac{i}{c}\,d\Omega.$$

Тогда поле внутри соленодиа

$$B = \frac{i}{c}4\pi, \qquad i = \frac{IN}{l}.$$

Для плоскости по которой течёт i,

$$B = \frac{2\pi}{c}i.$$

Для двух плоскостей аналогично, (а-ля магнитный конденсатор)

$$B = \frac{4\pi}{c}i.$$

Кстати, для телесного угла,

$$\Omega = 2\pi(1-\cos\alpha).$$

Для погнутого в окружность радиуса R соленоида, площади S, с i

$$B_O = \frac{2iS}{cR^2} = \frac{2\pi i}{c}\left(\frac{r}{R}\right)^2.$$

Магнетики – магнитное поле в веществе

Магнитный момент молекулярных токов:

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{\mathfrak{M}}}{V} = \frac{1}{c}i_{\text{мол}}\boldsymbol{l}, \qquad \Rightarrow \qquad i_{\text{мол}} = c\,(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{l}), \qquad i_{\text{мол}} = c\oint_L (\boldsymbol{I}\cdot d\boldsymbol{l}).$$

Кстати,

$$\boldsymbol{I} = \varkappa\boldsymbol{H},$$

где $\varkappa$ – магнитная восприимчивость. Также

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H},$$

где $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$ – магнитная проницаемость.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

$$\text{I.} \qquad a \lesssim b$$

$$\text{II.} \qquad a \lesssim b$$

$$\text{III.} \qquad a \lesssim b$$

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.