Заметки курса «Аналитическая Механика»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *21 сентября 2020 г.*

Содержание

1 Кинематика точки

Пусть $\boldsymbol{r}(t), t \in \mathbb{R}$ – движение точки и траектория движения.

Def 1.1.

$$\textit{Скорость}: \quad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}; \qquad \textit{ускорение}: \quad \boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}. \tag{1.1}$$

1.1 Естественный трёхгранник

Из геометрии $\exists s(t)$ – длина кривой. Тогда

$$\boldsymbol{v} = \underbrace{\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}}_{\boldsymbol{\tau}} \frac{ds}{dt} = v\boldsymbol{\tau}. \tag{1.2}$$

Дифференцируя (1.2)

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\boldsymbol{\tau} + v\underbrace{\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}}_{\boldsymbol{n}/\rho}\frac{ds}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}}_{\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{\tau}}} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{n}}}. \tag{1.3}$$

где $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b})$ – базис, преследующий точку.

1.2 Компоненты скорости и ускорения

Есть локальный базис. Тогда компоненты скорости

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i \boldsymbol{g}_i = v^i \boldsymbol{g}_i \quad \Rightarrow \quad v^i = \dot{q}^i. \tag{1.4}$$

Для компоненты ускорения:

$$w_i = (\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{g}_i) = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}_i) - (\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{g}_i}{dt}).$$

Но, во-первых:

$$\frac{d\boldsymbol{g}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q^i}.$$

Во-вторых:

$$\boldsymbol{v} = \dot{g}^i \boldsymbol{g}_i \ \Big|\frac{\partial}{\partial \dot q^k} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial \boldsymbol v}{\partial \dot q^k} = \frac{\partial}{\partial \dot q^k}(\underbrace{\dot g^1 \boldsymbol g_1}_{0} + \underbrace{\dot g^2\boldsymbol g_2}_{\boldsymbol g_2} + \underbrace{\dot g^3 \boldsymbol g_3}_{0}) = \boldsymbol g_k \tag{1.5}$$

Тогда

$$w_i = \frac{d}{dt}(\boldsymbol v \cdot \frac{\partial \boldsymbol v}{\partial \dot q^i}) - (\boldsymbol v \cdot \frac{\partial \boldsymbol v}{\partial \dot q^i}) = \frac{d}{dt}\frac{\partial(\boldsymbol v\cdot\boldsymbol v)}{\partial \dot q^i}\frac{1}{2} - \frac{\partial(\boldsymbol v\cdot\boldsymbol v)}{\partial \dot q^i}\frac{1}{2} = \frac{d}{dt}\frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot q^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i} \quad\Rightarrow\quad \boxed{mw_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i}} \tag{1.6}$$

2 Кинематика твердого тела

Def 2.1. *Абсолютно твёрдым телом*[1] назовём множество такое, что

$$\forall i, j, t: \qquad |\boldsymbol r_i(t) - \boldsymbol r_j(t)| = \text{const}.$$

Точка O это полюс. Во-первых перенесем начало координат в O. Введём систему координат $O_{\xi\nu\zeta}$ связанную с телом, – тело относительно неё не движется.

$$\boldsymbol r = \overrightarrow{OA},\ \boldsymbol\rho = \overrightarrow{OA} = \text{const в } O_{\xi\nu\zeta}, \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol r(t) = R(t)\boldsymbol\rho.$$

2.1 Углы Эйлера

Ортогональность матрицы R даёт возможность описать её тремя независимыми параметрами. Один из вариантов сделать это – углы Эйлера.

Пусть начальная ПДСК (x, y, z), а конечная – (X, Y, Z), при чём $xy \cap XY = ON$ – линия узлов.

1) $\alpha\colon Ox \to ON$, угол *прецессии*;
2) $\beta\colon Oz \to OZ$, угол *нутации*;
3) $\gamma\colon OX \to ON$, угол *собственного вращения*.

Повороты системы на эти углы называются прецессия, нутация и поворот на собственный угол (вращение).

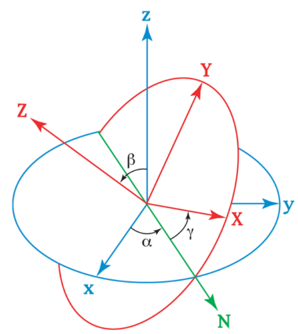

Рис. 1: Углы Эйлера

Матричная запись углов Эйлера:

$$R_Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin a & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_X(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta\cos\beta & \end{pmatrix}, \quad R_Z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin\psi & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

2.2 Основные теоремы о конечных перемещениях твёрдого тела

Далее бездоказательно приведём некоторые основные теоремы о конечных перемещениях твёрдого тела.

Thr 2.2 (Теорема Эйлера)**.** *Произвольное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку, можно осуществить посредством вращения вокруг некоторой оси, проходящей через эту точку.*

Thr 2.3 (Теорема Шаля)**.** *Самое общее перемещение твердого тела разлагается на поступательное перемещение, при котором произвольно выбранный полюс переходит из своего первоначального положения в конечное, и на вращение вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс. Это разложение можно совершить не единственным способом, выбирая за полюс различные точки тела; при этом направление и длина поступательного перемещения будут изменяться при выборе различных полюсов, а направление оси вращения и угол поворота вокруг нее не зависят от выбора полюса.*

Thr 2.4 (Теорема Моцци)**.** *Самое общее перемещение твердого тела является винтовым перемещением.*

Con 2.5 (Теорема Бернулли-Шаля)**.** *Самое общее перемещение плоской фигуры в своей плоскости есть либо поступательное перемещение, либо вращение вокруг точки. Эта точка называется центром конечного вращения.*

[1] Для краткости просто *твёрдое тело*.

2.3 Скорости и ускорения точек твердого тела в общем случае движения

Проведём два вектора $\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{r}_O$:

$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + R(t)\boldsymbol{\rho} \quad \overset{d/dt}{\Rightarrow} \quad \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \dot{R}\rho = \boldsymbol{v}_O + \dot{R}R^{-1}\boldsymbol{r}$$

но,

$$RR^{\mathrm{T}} = E, \dot{R}R^{\mathrm{T}} + R\dot{R}^{\mathrm{T}} = 0, \dot{R}R^{\mathrm{T}} = -R\dot{R}^{\mathrm{T}}, (\dot{R}R^{-1})^{\mathrm{T}} = -\dot{R}R^{-1}.$$

То есть $\dot{R}R^{-1}$ кососимметрична. Тогда пусть

$$\dot{R}R^{-1} = \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & w_y \\ w_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

Thr 2.6 (формула Эйлера)**.** *Существует единственный вектор*[2] $\boldsymbol{\omega}$*, называемый* ***угловой скоростью тела****, с помощью которого скорость* $\boldsymbol{v}$ *точки тела может быть представлена в виде*

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \quad - \quad \textbf{\textit{формула Эйлера}}. \tag{2.2}$$

Тогда, например, при постоянном радиус векторе верно, что

$$\boldsymbol{v}_A = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}, \qquad \text{при условии } a = \mathrm{const}.$$

Можно вывести ускорение точки твёрдого тела

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_A &= \mathbf{w}_O + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \\ \mathbf{w}_A &= \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \quad - \quad \textbf{формула Ривальса}, \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = d\mathbf{w}/dt$ – *угловое ускорение.*

2.4 (-) Частные случаи.

Оставим частные случаи в покое.

2.5 Кинематические инварианты и кинематический винт

Вернемся к общему случаю движения твёрдого тела. В (2.6) угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ точки P инвариантна к выбору точки, соответственно ω^2 – *первый кинематический инвариант.* Домножив (2.6) скалярно на $\boldsymbol{\omega}$, получим, что $I_2 = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\omega})$, – *второй кинематический инвариант.*

[2] Псевдоветор же, нет?

3 Задачи с семинара