

# ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

---

**Автор:** Хоружий Кирилл

**От:** 27 октября 2020 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Кинематика</b>	<b>2</b>
1.1	Криволинейные координаты . . . . .	2
1.2	Кинематика точки . . . . .	4
1.3	Кинематика твёрдого тела . . . . .	6
1.4	Сложное движение точки и твёрдого тела . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Динамика</b>	<b>12</b>
2.5	Основные теоремы динамики . . . . .	12
2.6	Движение точки в центральном поле сил . . . . .	13
2.7	Элементы механики сплошных сред (МСС) . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Контрольная работа</b>	<b>18</b>

# 1 Кинематика

## 1.1 Криволинейные координаты

**Т1.**

Найдём ковариантные и контрвариантные компоненты  $\mathbf{a}$ . Учитывая, что тензор однозначно задаётся координатами в некотором базисе:

$$\lceil \mathbf{b} = a^i \mathbf{g}_i \mid \mathbf{g}_j \Rightarrow (\mathbf{b} \cdot \mathbf{g}^j) = a^i (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j) = a^i \delta_i^j = a^j \Rightarrow a^i \mathbf{g}_i = \mathbf{a}.$$

Аналогично

$$\lceil \mathbf{b} = a_i \mathbf{g}^i \mid \mathbf{g}_j \Rightarrow (\mathbf{b} \cdot \mathbf{g}_j) = a_i (\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j) = a_i \delta_j^i = a_j \Rightarrow a_i \mathbf{g}^i = \mathbf{a}.$$

Теперь научимся жонглировать индексами.

$$\lceil \mathbf{b}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j \mid \mathbf{g}^n \Rightarrow g^{ij} \mathbf{g}_j \mathbf{g}^n = g^{ij} \delta_j^n = g^{in} = (\mathbf{k}^i \cdot \mathbf{g}^n) \Rightarrow \mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j.$$

Для  $g_{ij} \mathbf{g}^j = \mathbf{g}_i$  доказательство аналогично. Наконец,

$$\delta_i^j = (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j) = (g_{ik} \mathbf{g}^k \cdot g^{jn} \mathbf{g}_n) = g_{ik} g^{jn} \delta_n^k = g_{ik} g^{kj}.$$

Теперь, для жонглирования над координатой:

$$\lceil \mathbf{a} = a_i \mathbf{g}^i \mid \mathbf{g}_j \Rightarrow a^j = g^{ij} a_i.$$

**Т2.**

Найдём локальный базис/матрицу перехода из ПДСК для  $\mathbf{r}(\sigma, \tau, z)$ :

$$\mathbf{r}(\sigma, \tau, z) = \begin{pmatrix} \sigma\tau \\ (\tau^2 - \sigma^2)/2 \\ z \end{pmatrix}; \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \tau & \sigma & 0 \\ -\sigma & \tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad g_{ij} = \mathbf{J}^T \mathbf{J} = \text{diag}(\tau^2 + \sigma^2, \tau^2 + \sigma^2, 1).$$

Зафиксировав значения всех кроме одной переменных найдём координатные линии, затем построим координатные поверхности (см. рис. 1).



Рис. 1: Координатные линии и координатные поверхности.

**Т3.**

Найдём метрический тензор  $g_{ij}$  для криволинейных координат  $(r, \varphi)$ , задающих положение точки на параболоиде  $z = a(x^2 - y^2)$ , при  $a = \text{const}$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ .

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ ar^2 \cos(2\varphi) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \Rightarrow g_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 2ar \cos(2\varphi) \end{pmatrix}; \quad g_\varphi = \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ -2ar^2 \sin(2\varphi) \end{pmatrix}$$

Тогда метрический тензор:

$$\begin{aligned} g_{ij} &= (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j); \\ g_{11} &= 4a^2 r^2 \cos^2(2\varphi) + \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi); \\ g_{12} &= g_{21} = -2a^2 r^3 \sin(4\varphi); \\ g_{22} &= 4a^2 r^4 \sin^2(2\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi) + r^2 \cos^2(\varphi). \end{aligned}$$

Объединяя,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 16a^2 r^2 \sin^4(\varphi) - 16a^2 r^2 \sin^2(\varphi) + 4a^2 r^2 + 1 & -2a^2 r^3 \sin(4\varphi) \\ -2a^2 r^3 \sin(4\varphi) & -16a^2 r^4 \sin^4(\varphi) + 16a^2 r^4 \sin^2(\varphi) + r^2 \end{pmatrix}.$$

Или,

$$g^{ij} = (g_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-16a^2 r^2 \sin^4(\varphi) + 16a^2 r^2 \sin^2(\varphi) + 1}{4a^2 r^2 + 1} & \frac{2a^2 r \sin(4\varphi)}{4a^2 r^2 + 1} \\ \frac{2a^2 r \sin(4\varphi)}{4a^2 r^2 + 1} & \frac{16a^2 r^2 \sin^4(\varphi) - 16a^2 r^2 \sin^2(\varphi) + 4a^2 r^2 + 1}{4a^2 r^4 + r^2} \end{pmatrix}.$$

Соответственно,

$$\mathbf{g}^r = g^{rr} \mathbf{g}_r + g^{r\varphi} \mathbf{g}_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{(8a^2 r^2 \sin^2(\varphi) + 1) \cos(\varphi)}{4a^2 r^2 + 1} \\ \frac{(8a^2 r^2 \cos^2(\varphi) + 1) \sin(\varphi)}{4a^2 r^2 + 1} \\ \frac{2ar \cos(2\varphi)}{4a^2 r^2 + 1} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{g}^\varphi = g^{\varphi r} \mathbf{g}_r + g^{\varphi\varphi} \mathbf{g}_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{(-8a^2 r^2 \sin^2(\varphi) + 4a^2 r^2 - 1) \sin(\varphi)}{r(4a^2 r^2 + 1)} \\ \frac{(8a^2 r^2 \cos^2(\varphi) - 4a^2 r^2 + 1) \cos(\varphi)}{r(4a^2 r^2 + 1)} \\ -\frac{2a \sin(2\varphi)}{4a^2 r^2 + 1} \end{pmatrix}.$$

На всякий случай проверим в *SymPy*, что

$$\mathbf{g}_r \mathbf{g}^r = 1; \quad \mathbf{g}_\varphi \mathbf{g}^\varphi = 1; \quad \mathbf{g}_r \mathbf{g}^\varphi = 0; \quad g^{ij} g_{ji} = \delta_i^j.$$

Вот.

#### Т4.

Пусть  $R = x^2 + y^2 + z^2$ , найдём частную производную  $\partial R / \partial x$  тогда

1.  $R(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2. \quad \partial R / \partial x = 2x.$
2.  $R(x, r, z) = r^2 + z^2. \quad \partial R / \partial x = 0.$
3.  $R(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 - y^2)^2. \quad \partial R / \partial x = 2x + 4x(x^2 - y^2).$
4.  $R(x, r) = r^2 + (x^2 - y^2)^2 = r^2 + (2x^2 - r^2)^2. \quad \partial R / \partial x = 16x^3 - 8xr^2.$
5.  $R(x, z) = x^2 + (x^2 - z) + z^2 = 2x^2 - z + z^2. \quad \partial R / \partial x = 4x.$

#### Т5.

Для первого выражения, обозначим  $(\mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{g}^j}{\partial q^k}) \stackrel{\text{def}}{=} \Xi_{ik}^j$ .

$$\Gamma_{ijk} = \left( \mathbf{g}_i, \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial q^k} \right) = \left( \mathbf{g}_i, \frac{\partial (g_{jn} \mathbf{g}^n)}{\partial q^k} \right) = g_{jn} \underbrace{\left( \mathbf{g}_i, \frac{\partial \mathbf{g}^n}{\partial q^k} \right)}_{\Xi_{ik}^n} + \frac{\partial g_{jn}}{\partial q^k} \underbrace{(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^n)}_{\delta_i^n} = g_{jn} \Xi_{ik}^n + \underbrace{\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}}_{\partial g_{jn} / \partial q^k}.$$

Домножив обе части на  $g^{jm}$ , получим

$$\Xi_{ik}^n g_{nj} g^{jm} = \Xi_{ik}^n \delta_n^m = \Xi_{ik}^m = \boxed{\left( \mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{g}^m}{\partial q^k} \right) = -\Gamma_{jik} g^{jm}}$$

Для второго выражения рассмотрим значение квадрата произведения при фиксированных  $i \neq j \neq k$ :

$$\underbrace{(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k)^2}_{\det g_{mn}} \cdot \underbrace{(\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}^k)^2}_{\det g^{nk}} = \det g_{mn} g^{np} = \det \delta_m^p = 1. \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k) \cdot (\mathbf{g}^i, \mathbf{g}^j, \mathbf{g}^k) = 3! = 6.$$

Важно заметить, что  $-1$  не является возможным значением произведения таких смешанных произведений, т.к. левой тройке в первом сомножителе будет соответствовать тройка во втором сомножителе.

## 1.2 Кинематика точки

### 1.12\*

Параметризуем движение точки некоторым  $\varphi(t)$ :

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -a\dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} = b\dot{\varphi} \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -a\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - a\ddot{\varphi} \sin \varphi = 0 \\ \ddot{y} = -b\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + b\ddot{\varphi} \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi = 0. \quad (1.1)$$

Решением этого уравнения является

$$\varphi(t) = \arccos(c_1 + c_2 t).$$

С учётом начальных условий получим  $(x(0) = 0, \dot{x} = 0)$ , что

$$\dot{\varphi} c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{v_0}{a}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \arccos(v_0 t / a).$$

Немного упростим выражения для  $\dot{\varphi}$  и  $\ddot{\varphi}$ :

$$\dot{\varphi} = -\frac{v_0}{a \sin \varphi}, \quad \ddot{\varphi} = -\frac{\dot{\varphi}^2}{\operatorname{tg} \varphi},$$

теперь найдём  $\ddot{y}(\sin \varphi)$ :

$$\ddot{y} = -b\dot{\varphi} \sin \varphi + v\ddot{\varphi} \cos \varphi = -b\frac{v_0^2}{a^2 \sin^2 \varphi} \sin \varphi - b\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi \operatorname{tg} \varphi} = -\frac{b}{a^2} v_0^2 \left( \frac{1}{\sin \varphi} + \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^3 \varphi} \right) = -\frac{b}{a^2} v_0^2 \frac{1}{\sin^3 \varphi}.$$

Подставив  $y = b \sin \varphi$ , найдём

$$\ddot{y} \left( y = \frac{b}{2} \right) = -\frac{8b}{a^2} v_0^2.$$

### 1.19

Знаем, что в полярных координатах

$$\begin{cases} r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \\ r^2 \dot{\varphi} = c = \text{const} \end{cases} \quad \text{в полярных координатах} \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}. \quad (1.2)$$

Вспомним, что

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}).$$

Найдём  $\ddot{r}$ :

$$r + er \cos \varphi = p \xrightarrow{d/dt} \dot{r} + e\dot{r} \cos \varphi - er\dot{\varphi} \sin \varphi = 0 \xrightarrow{d/dt} \ddot{r}(1 + e \cos \varphi) - e\dot{r} \sin \varphi \left( \dot{\varphi} - \frac{c}{r^2} \right) - \frac{ec}{r} \frac{c}{r^2} \cos \varphi = 0$$

Выразим и подставим  $\dot{\varphi}$  и получим

$$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}, \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = \frac{c^2}{r^2 p} \left( \frac{p}{r} - 1 \right), \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_r = -\frac{c^2}{pr^2}, \quad w_\varphi = 0.}$$

### 1.37(в)

Найдём скорость точки и проекции её ускорения на касательные к координатным линиям для координат параболического цилиндра  $\sigma, \tau, z$ . Для начала найдём координатные векторы и метрический тензор:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma\tau \\ \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2) \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{g}_\sigma = \begin{pmatrix} \tau \\ -\sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{g}_\tau = \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{g}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \begin{pmatrix} \tau^2 + \sigma^2 & 0 \\ 0 & \tau^2 + \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$v^2 = \dot{\sigma}^2(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{\tau}^2(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{z}^2, \quad v = \sqrt{(\dot{\tau}^2 + \dot{\sigma}^2)(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{z}^2}$$

Для  $i$ -ой ковариантной координаты ускорения верно, что

$$w_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i}. \quad (1.3)$$

С учётом коэффициенты Ламе ( $H_\tau = H_\sigma = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ ,  $H_z = 1$ ), найдём проекции

$$\begin{aligned} w_\tau &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} (\ddot{\tau}(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{\tau}^2 \tau + 2\dot{\sigma}\dot{\tau}\sigma - \tau\dot{\sigma}^2); \\ w_\sigma &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} (\ddot{\sigma}(\tau^2 + \sigma^2) + \dot{\sigma}^2 \sigma + 2\dot{\tau}\dot{\sigma}\tau - \sigma\dot{\tau}^2); \\ w_z &= \ddot{z}. \end{aligned}$$

#### 1.45

Выразим орты сопровождающий трехгранника  $(\tau, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  через  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{w}$ , с учётом  $\mathbf{w} \times \mathbf{v} \neq 0$ ,  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} > 0$ . Так как  $\mathbf{v} \nparallel \mathbf{w}$ , то

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|}.$$

Выразим  $\tau$ .

$$\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = v\tau, \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\mathbf{v}}{v}.$$

И найдём  $\mathbf{n} = [\mathbf{b} \times \tau]$ , раскрывая двойное векторное произведение (формула Лагранжа), получим

$$\mathbf{n} = \left[ \frac{\mathbf{v}}{v} \times \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|} \right] = \frac{(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} - v^2 \mathbf{w}}{v|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|}.$$

#### Т6.

Рассмотрим движение точки в цилиндрических координатах:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_{ij} = \text{diag}(1, r^2, 1)$$

Для начала выразим ковариантные координаты ускорений:

$$w_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial q^i} \Rightarrow \begin{cases} w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ w_\varphi = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) \\ w_z = \ddot{z}. \end{cases}$$

По условию хотим, чтобы  $w_\varphi = w_z = 0$ ,  $r = \text{const}$ . Проинтегрировав дважды по времени получим систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi = c_1 t + c_2; \\ z = c_3 t + c_4, \end{cases}$$

Где  $c_1, c_2, c_3, c_4$  — некоторые константы. Построим полученные траектории положив  $c_2 = c_4 = 0$  и отмасштабировав к  $c_1 = 1$  (см. рис. (2)).



Рис. 2: Возможные геодезические цилиндра.

#### Т7.

Найдём  $\partial v_k / \partial v_j$ , при  $v_k = v_k(q^i, v^i)$ . Далее будем пользоваться тем, что  $g_{ig} = g_{ig}(q^i)$ .

$$v_k(q^i, v^i) = g_{ki} v^i \Rightarrow \frac{\partial v_k}{\partial v^j} = g_{ki} \frac{\partial v^i}{\partial v^j} = g_{ki} \delta_j^i = g_{kj}.$$

Теперь найдём  $\partial v_k / \partial q^j$ , при  $v_k = v_k(q^i, v^i)$ .

$$\frac{\partial v_k(q^i, v^i)}{\partial q^j} = v^i \left( \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} \right) = v^i \left( \left( \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial q^j}, \mathbf{g}_i \right) + \left( \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial q^j}, \mathbf{g}_k \right) \right) = v^i (\Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji}).$$

Теперь найдём  $\partial v_k / \partial q^j$ , при  $v_k = v_k(q^i, v_i)$ . Но тут так как функция выражается через саму себя, то при частном дифференцировании,  $v_k = \text{const}$ , тогда  $\partial v_k(q^i, v_i) / \partial q^j = 0$ .

Т8.\*

Найдём  $v_i \dot{v}^i - v^i \dot{v}_i$ . Перейдём к контравариантным координатам:

$$v_i \dot{v}^i - v^i \dot{v}_i = g_{ij} v^i v^j - v^i \frac{d}{dt} (g_{ij} v^j) = g_{ij} v^j \dot{v}^i - v^i v^j \dot{g}_{ij} - g_{ij} v^i \dot{v}^j$$

В силу симметричности метрического тензора  $g_{ij} = g_{ji}$ , получим, что

$$v_i \dot{v}^i - v^i \dot{v}_i = -v^i v^j \dot{g}_{ij}.$$

Подставил для параболических и полярных координат, сходится.

### 1.3 Кинематика твёрдого тела

3.24

Запишем  $\mathbf{v}_B$ , выбрав в качестве полюса точку  $A$  и точку  $C$ .

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB} + \mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \overrightarrow{CB}, \quad (1.4)$$

или, расписав по координатам,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}} + \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{BC} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3r \cos \alpha \\ -3r \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix},$$

получим два содержательных уравнения

$$\left. \begin{aligned} -r\omega \sin \alpha + v &= v_C + 3r\omega_{BC} \sin \alpha \\ -r\omega \cos \alpha + 0 &= 0 + 3r\omega_{BC} \cos \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\omega_{BC} = -\frac{\omega}{3}, \quad v_C = v.}$$



Рис. 3: К задаче 3.24.

Для поиска  $\mathbf{w}_C$ , запишем условия жёсткости стержней  $BC$  и  $CD$ . Дифференцируя по времени, получим

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_B \cdot \overrightarrow{BC} &= \mathbf{v}_C \cdot \overrightarrow{BC}; \\ \mathbf{v}_C \cdot \overrightarrow{DC} &= 0. \end{aligned} \right\} \xrightarrow{d/dt} \left\{ \begin{aligned} \mathbf{w}_B \cdot \overrightarrow{BC} + \mathbf{v}_B \cdot \dot{\overrightarrow{BC}} &= \mathbf{w}_C \cdot \overrightarrow{BC} + \mathbf{v}_C \cdot \dot{\overrightarrow{BC}}; \\ \mathbf{w}_C \cdot \overrightarrow{DC} + \mathbf{v}_C \cdot \dot{\overrightarrow{DC}} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (1.5)$$

Выразим  $\mathbf{w}_B$  из уравнения Ривальса:

$$\mathbf{w}_B = \underbrace{\mathbf{w}_A}_0 + \underbrace{\dot{\omega}_{AB} \times \overrightarrow{AB}}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin \alpha \\ -r \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\omega^2 \cos \alpha \\ -r\omega^2 \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В первом уравнении (1.5), зная  $\dot{\overrightarrow{BC}} = \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \overrightarrow{BC} = (\omega r \sin \alpha, \omega r \cos \alpha, 0)^T$  и  $\mathbf{v}_B$  из (1.4), получим

$$\mathbf{w}_C \cdot \overrightarrow{BC} = -4\omega^2 r^2. \quad (1.6)$$

Во втором уравнении (1.5), зная  $\dot{\overrightarrow{DC}} = \boldsymbol{\omega}_{DC} \times \overrightarrow{DC} = \mathbf{v}_C$ , получим

$$\mathbf{w}_C \cdot \overrightarrow{DC} = -v^2. \quad (1.7)$$

Из (1.7), мы знаем  $(\mathbf{w}_C)_y$ , расписав в (1.6) проекцию на  $BC$  по координатам, получим

$$\left. \begin{aligned} -4\omega^2 r^2 &= 3r(-w_{Cx} \cos \alpha + w_{Cy} \sin \alpha); \\ w_{Cy} &= -v^2/2r. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{w}_C = \begin{pmatrix} w_{Cx} \\ w_{Cy} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где } w_{Cx} = \frac{8\sqrt{3}}{9}\omega^2 r - \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{v^2}{r}, \quad w_{Cy} = -\frac{v^2}{2r}.$$

Собственно<sup>1</sup>,  $\|\mathbf{w}_C\|^2 = \frac{64}{27}\omega^4 r^2 - \frac{8}{9}\omega^2 v^2 + \frac{1}{3}v^4/r^2$ .

4.4

Запишем в координатах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \sin \theta \\ \omega_1 \cos \theta \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_2 \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup>Вычисления доступны здесь.

Так как оси  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются, угловая скорость и угловое ускорение можно найти, как

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \sin \theta \\ \omega_2 + \omega_1 \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{pmatrix} \omega_1 \omega_2 \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что очень похоже на правду.



Рисунки к задачам 4.4 и 4.10.

#### 4.10

Запишем  $\mathbf{v}_c$ , как результат движения стержня и диска. Пусть  $\Omega$  – угловая скорость вращения диска,  $\parallel OB$ .

$$\mathbf{v}_c = \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{OC} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OC}.$$

Другими словами, в координатной записи,

$$\begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{r}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \frac{r}{2} \Rightarrow \boxed{\Omega = -\sqrt{3}\omega}.$$

Угловое ускорение стержня найдём, как движение в СО стержня,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^a = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\varepsilon \\ -\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3}\omega^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\varepsilon \\ 0 \\ \sqrt{3}\omega^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\varepsilon}^a = \sqrt{3}(\boldsymbol{\varepsilon}^2 + \omega^4)},$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon}^r = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\omega \\ -\omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\varepsilon \\ -\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь, из сложения ускорений,

$$\mathbf{w}^a = \underbrace{\mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}_{\mathbf{w}^e} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}^r}_{\mathbf{w}^c} + \mathbf{w}^r,$$

найдем  $\mathbf{w}_B^a$ :

$$\mathbf{w}_B^a = \mathbf{0} + \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{OB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OB}) + 2\boldsymbol{\omega} \times (-\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OB}) + \mathbf{w}_B^r.$$

Теперь найдём  $\mathbf{w}_B^r$ , как

$$\mathbf{w}_B^r = \mathbf{w}_\tau^r + \mathbf{w}_n^r = -\varepsilon r \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \omega^2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -r \\ r\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя, дойдём до

$$\boxed{\mathbf{w}_B^a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3}\omega^2 r \\ 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow \|\mathbf{w}_B^r\| = 2\sqrt{3}\omega^2 r,$$

что, достаточно, логично.

Аналогично найдём  $\mathbf{w}_A^r$ :

$$\mathbf{w}_B^r = \mathbf{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} r - \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} r + 2\omega^2 r \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} - \varepsilon r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \Rightarrow \boxed{\mathbf{w}_B^r = r \begin{pmatrix} 3\omega^2 \\ 2\sqrt{3}\omega^2 \\ -3\varepsilon \end{pmatrix}}.$$

И найдём норму ускорения точки  $A$

$$\|\mathbf{w}_A^a\| = \sqrt{21\omega^4 r^2 + 9\varepsilon^2 r^2}.$$

#### 4.12

Рассмотрим движение интересных нам точек, как движение в СО обруча, с

$$\mathbf{v}^e = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{\omega}^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -v/R \end{pmatrix}; \quad \mathbf{w}^e = \mathbf{0}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{0}.$$

Найдём радиус векторы до интересных нам точек:

$$\vec{O1} = \begin{pmatrix} -r \sin \alpha \\ r \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{O2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}; \quad \vec{O3} = \begin{pmatrix} r \sin \alpha \\ -r \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{O4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}.$$

Тогда, из теоремы о сложении скоростей, получим значения для  $\mathbf{v}_i^a$ :

$$\mathbf{v}_i^a = \underbrace{\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}^e \times \vec{O}_i}_{\mathbf{v}_i^e} + \underbrace{\boldsymbol{\omega}^r \times \vec{O}_i}_{\mathbf{v}_i^r}.$$

Подставляя значения, получим, что

$$\mathbf{v}_1^a = \begin{pmatrix} v(R + r \cos \alpha)/R \\ rv \sin \alpha / R \\ \omega r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2^a = \begin{pmatrix} \omega r \sin \alpha + v \\ -\omega r \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3^a = \begin{pmatrix} v(R - r \cos \alpha)/R \\ -rv \sin \alpha / R \\ -\omega r \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4^a = \begin{pmatrix} -\omega r \sin \alpha + v \\ \omega r \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Или, переходя к значениями  $\|\mathbf{v}_i^a\|$ :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_1^a\| &= (R^2 \omega^2 r^2 + R^2 v^2 + 2Rrv^2 \cos(\alpha) + r^2 v^2) / R^2, & \|\mathbf{v}_2^a\| &= \omega^2 r^2 + 2\omega r v \sin(\alpha) + v^2, \\ \|\mathbf{v}_3^a\| &= (R^2 \omega^2 r^2 + R^2 v^2 - 2Rrv^2 \cos(\alpha) + r^2 v^2) / R^2, & \|\mathbf{v}_4^a\| &= \omega^2 r^2 - 2\omega r v \sin(\alpha) + v^2. \end{aligned}$$

Что соответствует ответам учебника.

Теперь, из теоремы о сложении скоростей, найдём  $\mathbf{w}_i^a$

$$\mathbf{w}_i^a = \underbrace{0 + 0 + \boldsymbol{\omega}^e \times \boldsymbol{\omega}^e \times \vec{O}_i}_{\mathbf{w}^e} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega}^e \times (\boldsymbol{\omega}^r \times \vec{O}_i)}_{\mathbf{w}^e} + \underbrace{-\omega^2 \cdot \vec{O}_i}_{\mathbf{w}_i^r}.$$

Подставляя значения, получим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1^a &= \frac{r(R^2 \omega^2 + v^2)}{R^2} \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{w}_2^a &= -\omega r \begin{pmatrix} 2v \cos \alpha / R \\ 2v \sin \alpha / R \\ \omega \end{pmatrix}, \\ \mathbf{w}_3^a &= \frac{r(R^2 \omega^2 + v^2)}{R^2} \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{w}_4^a &= \omega r \begin{pmatrix} 2v \cos \alpha / R \\ 2v \sin \alpha / R \\ \omega \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Или, переходя к нормам, получим, что

$$\|\mathbf{w}_1^a\| = \frac{r^2 (R^2 \omega^2 + v^2)^2}{R^4}, \quad \|\mathbf{w}_2^a\| = \frac{\omega^2 r^2 (R^2 \omega^2 + 4v^2)}{R^2}, \quad \|\mathbf{w}_3^a\| = \frac{r^2 (R^2 \omega^2 + v^2)^2}{R^4}, \quad \|\mathbf{w}_4^a\| = \frac{\omega^2 r^2 (R^2 \omega^2 + 4v^2)}{R^2}.$$

#### 4.32

Нам известно  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ , из задачи 1.45 знаем, как выразить направляющие трёхгранника Френе  $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}$ , через  $\dot{\mathbf{r}}$  и  $\ddot{\mathbf{r}}$ , соответственно считаем известными  $\rho, \kappa$ . В выводе теоремы сложения ускорений использовалось, что

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega}^e \times \mathbf{e}_i. \quad (1.8)$$

Также мы знаем, что

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nu}, \quad \frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\tau} + \kappa \boldsymbol{\beta}, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\kappa \boldsymbol{\nu}. \quad (1.9)$$





Тогда, из покоординатной записи, в  $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta})$ , получим систему уравнений, решая которую получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} v \\ \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} v \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nu} v &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\tau} \\ -v \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\nu} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \omega_{\tau} &= v \boldsymbol{\kappa} \\ \omega_{\nu} &= 0 \\ \omega_{\beta} &= v/\rho \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\omega} = (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau})(\boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\beta}/\rho)}.$$

#### 4.37

Пусть  $\boldsymbol{\omega}^r$  – угловая скорость тела в СО Земли, посмотрим на угловое ускорение твёрдого тела относительно СО, в данный момент времени совпадающей с направлениями:  $\mathbf{e}_i \parallel \boldsymbol{\omega}_i$ , с полюсом в неподвижной точке тела.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^a = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \dot{\omega}_1 \frac{\boldsymbol{\omega}_1}{\omega_1} + \dot{\omega}_2 \frac{\boldsymbol{\omega}_2}{\omega_2} + \dot{\omega}_3 \frac{\boldsymbol{\omega}_3}{\omega_3} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \dot{\omega}_1 \frac{\boldsymbol{\omega}_1}{\omega_1} + \dot{\omega}_2 \frac{\boldsymbol{\omega}_2}{\omega_2} + \dot{\omega}_3 \frac{\boldsymbol{\omega}_3}{\omega_3},$$

так как оси жёстко связаны с самим телом.

#### 4.50

Знаем, что скорость некоторой точки твёрдого тела можем записать, как

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}_0 + \begin{pmatrix} \omega_y r_z - \omega_z r_y \\ \omega_z r_x - \omega_x r_z \\ \omega_x r_y - \omega_y r_x \end{pmatrix}.$$

Тогда, прямой подстановкой, получим, что

$$\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{v}_0 + \text{rot} \begin{pmatrix} \omega_y r_z - \omega_z r_y \\ \omega_z r_x - \omega_x r_z \\ \omega_x r_y - \omega_y r_x \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}.$$

### 1.4 Сложное движение точки и твёрдого тела

#### 2.15

Для началача найдём, что

$$\left. \begin{aligned} \overline{OP} &= \mathbf{r}_p^r = \mathbf{a} \cdot (1 + \sin \omega_0 t) \\ \mathbf{v}_p^r &= \mathbf{a} \cdot \omega_0 \cos \omega_0 t \\ \mathbf{w}_p^r &= -\mathbf{a} \cdot \omega_0^2 \sin \omega_0 t \end{aligned} \right\} \text{ в СО стержня, где } \mathbf{a} = a \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем абсолютную скорость  $\mathbf{v}_p^a$  точки  $P$ ,

$$\mathbf{v}_p^a = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p^r + \mathbf{v}_p^r = a\omega(1 + \sin \omega_0 t) \begin{pmatrix} -\cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} + a\omega_0 \cos \omega_0 t \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда норма  $\|\mathbf{v}_p^a\|$  такая, что

$$\|\mathbf{v}_p^a\|^2 = a^2 (\omega^2(1 + \sin \omega_0 t) + \omega_0^2 \cos \omega_0 t).$$

Запишем абсолютное ускорение  $\mathbf{w}_p^a$  точки  $P$ ,

$$\mathbf{w}_p^a = -\omega^2 \mathbf{r}_p^r + 0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p^r + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_p^r + \mathbf{w}_p^r = (a(\omega^2 + \omega_0^2) \sin \omega_0 t + \omega^2) \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ -\cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} + 2a\omega\omega_0 \cos \omega_0 t \begin{pmatrix} -\cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда норма  $\|\mathbf{w}_p^a\|^2$  такая, что

$$\|\mathbf{w}_p^a\|^2 = (a(\omega^2 + \omega_0^2) \sin \omega_0 t + \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2\omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t.$$



Рис. 4: Рисунки к задачам 2.15, 2.19 и 2.35.

## 2.19

Для начала найдём и выразим все интересные нам векторы:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 \sin \omega_0 t \\ \dot{\varphi} &= \varphi_0 \omega_0 \cos \omega_0 t \\ \ddot{\varphi} &= -\varphi_0 \omega_0^2 \sin \omega_0 t \end{aligned} \right\}, \mathbf{w}_0 = - \begin{pmatrix} \omega^2 r \sin \varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\omega}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BA} = r \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 0 \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}, \boldsymbol{\epsilon}^r = \begin{pmatrix} 0 \\ -\ddot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix},$$

где  $\boldsymbol{\omega}_m$  – угловая скорость  $\overrightarrow{AB}$  относительно конструкции.

Во-первых, скорость  $\mathbf{v}_A^a$  такая, что

$$\mathbf{v}_A^a = \mathbf{v}^e + \mathbf{v}^r = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OA} + \boldsymbol{\omega}_m \times \overrightarrow{BA} = r \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \omega \sin \varphi \\ \dot{\varphi} \sin \varphi \end{pmatrix}$$

а норма  $\|\mathbf{v}_A^a\|$  в точке  $t = t_0 = \pi/2\omega_0$  такая, что

$$\|\mathbf{v}_A^a\|^2 = r^2 (\dot{\varphi} + \omega^2 \sin^2 \varphi) \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{v}_A^a\|^2 \Big|_{t=t_0} = r^2 \omega^2 \sin^2 \varphi_0.$$

Во-вторых, ускорение  $\mathbf{w}_A^a$  такое, что

$$\mathbf{w}_A^a = \mathbf{w}_0 + 0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{BA} + 2\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega}_m \times \overrightarrow{BA}) + \mathbf{w}^r.$$

Подставляя значения для  $t = t_0$ , получим, что

$$\mathbf{w}_A^a = -r \begin{pmatrix} \omega^2 \sin \varphi_0 + \varphi_0 \omega_0^2 \cos \varphi_0 \\ 0 \\ \varphi_0 \omega_0^2 \sin \varphi_0 \end{pmatrix}.$$

Соответственно, норма ускорения точки A

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_A^a\|^2 &= r^2 (\omega^4 \sin^2 \varphi_0 + \omega^2 \omega_0^2 \varphi_0 \sin^2 \varphi_0 + \varphi_0^2 \omega_0^4 \cos^2 \varphi_0 + \varphi_0^2 \omega_0^4 \sin^2 \varphi_0) = \\ &= r^2 (\omega^4 \sin^2 \varphi_0 + \omega^2 \omega_0^2 \varphi_0 \sin^2 \varphi_0 + \varphi_0^2 \omega_0^4). \end{aligned}$$

## 2.35

Снова предварительно запишем необходимые нам величины,

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{O_1 A} &= \mathbf{r}_A^r = a \sin \omega t, \\ \mathbf{v}_A^r &= a \omega \cos \omega t, \\ \mathbf{w}_A^r &= -a \omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \right\}, \quad \mathbf{a} = a \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi = -\frac{\mathbf{w}_0 t^2}{2R}, \quad \mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\Omega} R = \mathbf{w}_0 t, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{w}_0/R \end{pmatrix}.$$

где  $\varphi(t)$  и  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  мы знаем из условия  $\mathbf{w}_0 = \text{const}$ .

Скорость  $\mathbf{v}_A^a$  такая, что

$$\mathbf{v}_A^a = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_A^r + \mathbf{v}_A^r \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_x = \mathbf{w}_0 t (R + a \sin \varphi \sin \omega t) / R + a \omega \cos \varphi \cos \omega t \\ v_y = a \omega \sin \varphi \cos \omega t - \mathbf{w}_0 t a \cos \varphi \sin \omega t / R \\ v_z = 0 \end{cases}$$

а норма

$$\|\mathbf{v}_A^a\|^2 = \frac{\mathbf{w}_0^2 t^2}{R^2} a^2 \sin^2 \omega t + a^2 \omega^2 \cos^2 \omega t + \mathbf{w}_0^2 t^2 + 2 \frac{\mathbf{w}_0 t}{R} a (\mathbf{w}_0 t \sin \varphi \sin \omega t + R \omega \cos \varphi \cos \omega t).$$

или, преобразуя, получим, что

$$\|\mathbf{v}_A^a\|^2 = \left( \frac{w_0 t}{R} a \sin \omega t w_0 t \sin \varphi \right)^2 + \left( a \omega \cos \omega t + w_0 t \cos \varphi \right)^2.$$

Ускорение  $\mathbf{w}_A^a$  такое, что

$$\mathbf{w}_A^a = \mathbf{w}_0 + \varepsilon \times \mathbf{r}_A^r + \Omega \times \Omega \times \mathbf{r}_A^r + 2\Omega \times \mathbf{v}_A^r + \mathbf{w}_A^r.$$

Подставляя значения, получим

$$\mathbf{w}^c = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 2\omega a t w_0 \sin(\varphi) \cos(\omega t) \\ -2\omega a t w_0 \cos(\varphi) \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^e = \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} w_0 (R^2 + R a \sin(\varphi) \sin(\omega t) - a t^2 w_0 \sin(\omega t) \cos(\varphi)) \\ -a w_0 (R \cos(\varphi) + t^2 w_0 \sin(\varphi)) \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Суммируя, получим, что

$$\begin{cases} (\mathbf{w}_A^a)_x = \frac{1}{R^2} (R^2 (-\omega^2 a \sin(\omega t) \cos(\varphi) + w_0) + R a w_0 (2\omega t \cos(\omega t) + \sin(\omega t)) \sin(\varphi) - a t^2 w_0^2 \sin(\omega t) \cos(\varphi)) \\ (\mathbf{w}_A^a)_y = \frac{1}{R^2} (-a (R^2 \omega^2 \sin(\varphi) \sin(\omega t) + R w_0 (2\omega t \cos(\omega t) + \sin(\omega t)) \cos(\varphi) + t^2 w_0^2 \sin(\varphi) \sin(\omega t))) \\ (\mathbf{w}_A^a)_z = 0. \end{cases}$$

#### 4.14 и 4.15\*

Сделаем задачу чуть менее абстрактной. Представим кольцевую железную дорогу, плоскость которой нормальна к  $\omega_1$ . Наш агент №1 сидит в вагоне поезда и на столе, поверхность которого нормальна к  $\omega_2$ , запускает игрушечную кольцевую железную дорогу с игрушечным агентом №2 в вагоне поезда. Агент №2 запускает поезд на столе, поверхность которого нормальна к  $\omega_3$  ...

Найдём  $\varepsilon_{N^2}$  – угловое ускорение агента №2. По словам №1, угловое ускорение равно  $\omega_{N^2} = \omega_2$ , тогда

$$\varepsilon_{N^2} = \underbrace{\varepsilon_1}_{\varepsilon^e} + \frac{d}{dt} \omega_2 = 0 + \frac{\omega_2}{\omega_2} \dot{\omega}_2 + \omega_1 \times \omega_2.$$

А теперь найдём  $\varepsilon_3$ . С точки зрения №2  $\omega_{N^3} = \omega_3$ . Мы знаем, что  $\omega_{N^2} = \omega_1 + \omega_2$ , и знаем  $\varepsilon_{N^2}$ , тогда

$$\varepsilon_{N^3} = \varepsilon_2 + \frac{d}{dt} \omega_3 = \left( \frac{\omega_2}{\omega_2} \dot{\omega}_2 + \omega_1 \times \omega_2 \right) + \frac{\omega_3}{\omega_3} \dot{\omega}_3 + (\omega_1 + \omega_2) \times \omega_3.$$

И так далее мы можем продолжать добавлять вектора  $\omega_i$  к движению тела, в силу  $\omega^a = \omega^e + \omega^r$ , при чём мы получим слагаемые вида векторного произведения всех упорядоченных пар  $\omega_j$  и  $\omega_k$ , плюс сумма  $\varepsilon_i^r$ .

$$\varepsilon_{N^N} = \varepsilon_{N(N-1)} + \frac{\omega_N}{\omega_N} \dot{\omega}_N + \omega_{N(N-1)} \times \omega_N.$$

По индукции можем показать, что

$$\varepsilon = \varepsilon_{N^N} = \sum_{j=2}^n \frac{\omega_j}{\omega_j} \dot{\omega}_j + \sum_{k=2}^N \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \times \omega_k.$$

В частности, при  $\dot{\omega}_j = 0$ , получим выражение для задачи 4.14.



#### Т9.\*

Рассмотрим движение выпуклого твёрдого тела по выпуклой поверхности. Они соприкасаются в точках A и C соответственно. Пусть есть некоторая неподвижная СО, относительно начала которой будем записывать радиус векторы. Пусть точка O – мгновенный центр скоростей, тогда скорость некоторой точки тела может быть найдена, как

$$\mathbf{v} = \omega \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_O),$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус вектор этой точки.

Для точки A верно, что  $\mathbf{v}_A = \omega \times (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_O) = 0$ , дифференцируя равенство по времени, найдём, что

$$\mathbf{w}_A = \dot{\omega} \times \underbrace{(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_O)}_{=0} + \omega \times \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_O) = -\omega \times \dot{\mathbf{r}}_O,$$

где  $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_O = 0$ , т.к. тело движется без проскальзывания и в данный момент времени A соответствует мгновенному центру скоростей. Рассматривая движение относительно центра кривизны B, поймём, что  $\mathbf{v}_C = \mathbf{v} = \mathbf{v}_O = \dot{\mathbf{r}}_O$ , получается,  $\mathbf{w}_A = -\omega \times \mathbf{v}$ , Q.E.D.

## 2 Динамика

### 2.5 Основные теоремы динамики

#### 9.11

Точка  $A$  подвеса математического маятника длины  $l$  совершает вертикальные колебания по закону

$$\overrightarrow{OA} = a \sin(\omega t) = \mathbf{r}_A, \quad a\omega \cos(\omega t) = \mathbf{v}_A, \quad -a\omega^2 \sin(\omega t) = -\mathbf{w}^e.$$

Тогда по II закону Ньютона для неИСО

$$m\mathbf{w}^r = \mathbf{F} + m\mathbf{g} - m\mathbf{w}^e. \quad (2.1)$$

Пусть ось  $OX$  противонаправлена силе натяжения нити  $\mathbf{F}$ ,  $OY$  в плоскости движения, тогда, введём  $\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \mathbf{w}^e$  и получим

$$OX : m\mathbf{w}_x = -F + mg' \cos \varphi = 0,$$

$$OY : m\mathbf{w}_y = mg' \sin \varphi,$$

Так приходим к уравнению вида

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{L} \left( g - a\omega^2 \sin(\omega t) \right) \sin(\varphi) = 0. \quad (2.2)$$

В частности, заметим, что  $\varphi(t) \equiv 0$  и  $\varphi(t) \equiv \pi$  являются частными решениями этого уравнения.

#### 9.16

Невесомый стержень вращается с постоянной угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  вокруг оси  $Oz$ , перпендикулярной плоскости рисунка. По диску катится диск радиуса  $r$  и массы  $m$ , в начальный момент точки  $O$  и  $A$  совпадали, а диск покоился.

Перейдём в СО стержня, тогда

$$m\mathbf{w}_d^r = m\mathbf{w}_d^a - m\mathbf{w}_d^c - m\mathbf{w}_d^e. \quad (2.3)$$

Так как движение происходит без проскальзывания, сила трения не совершает работу. С учётом II закона Ньютона в неИСО, и тем что сила Кориолиса не изменяет кинетическую энергию системы, получим, что внешний момент

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{R}_i \times (m_i \mathbf{g} - m_i \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i), \quad \mathbf{r}_i = \overrightarrow{OA} + \mathbf{R}_i, \quad (2.4)$$

Тогда

$$\mathbf{M}_i = m_i \mathbf{R}_i \times \overrightarrow{OA} \omega^2 - m_i \mathbf{R}_i \times \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \overrightarrow{OA}) + m_i \mathbf{R}_i \times \mathbf{g},$$

Суммируя, по теореме об изменении кинетического момента, получим, что

$$I \varepsilon_d = \sum \mathbf{M}_i = m\omega^2 \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{OA} + m \overrightarrow{AB} \times \mathbf{g}.$$

Пусть  $L$  – пройденное расстояние, в проекции на ось, сонаправленную с  $\boldsymbol{\omega}_d^r$ ,

$$\frac{d\omega_d^r}{dt} = \frac{2}{3} \frac{L}{R} \omega^2 + \frac{2}{3} \frac{g}{R} \cos \varphi,$$

интегрируя, с учётом начальных условий,

$$(\omega_d^r)^2(L) = \frac{2}{3} \frac{L^2}{R^2} \omega^2 + \frac{4}{3} \frac{L}{R^2} g \cos \varphi. \quad (2.5)$$

Запишем теперь Кориолисову силу, как

$$\mathbf{F}_i^c = -2\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) m_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}^c = -2\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega}_d^r \times \overrightarrow{AB}) m.$$

Догда записав II закон Ньютона на ось, сонаправленную с  $\mathbf{N}$ , получим

$$0 = N - mg \sin \varphi - Rm\omega^2 + 2m\omega\omega_d^r R \quad \Rightarrow \quad N = mg \sin \varphi + Rm\omega^2 - 2m\omega \sqrt{\frac{2}{3}\omega^2 L^2 + \frac{4}{3}gL \cos \varphi} \quad (2.6)$$

Аналогично записав уравнение в проекции на ось, сонаправленную с  $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ , найдём

$$m\mathbf{w} = m\varepsilon R = F_{\text{тр}} + Lm\omega^2 + mg \cos \varphi, \quad \Rightarrow \quad F_{\text{тр}} = \frac{m}{3} \left( L\omega^2 + g \cos \varphi \right). \quad (2.7)$$

## 9.27

Посмотрим на систему с точки зрения вращающейся с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}_0$  плоскости, тогда по теореме об изменении количества движения в неИСО

$$m\mathbf{w}^r = \mathbf{R} - m\mathbf{w}^e - m\mathbf{w}^c. \quad (2.8)$$

Выберем в качестве полюса тела центр масс  $A$ , тело вращается относительно него с  $\boldsymbol{\omega}$ , тогда

$$-\frac{1}{2}\mathbf{F}^C = \sum_i m_i \left( \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \vec{Ci}) \right) = m\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_0 \times \left( \boldsymbol{\omega} \times \left( \sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) \right) = m\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}_A.$$

Аналогично для переносной

$$-\mathbf{F}^e = \sum m_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_i^r = \sum_i m_i \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \left( \sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) = m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A).$$

Таким образом переносные и кориолисовы силы приводятся к равнодействующим, проходящим через центр масс фигуры.

## 2.6 Движение точки в центральном поле сил

## 8.21

В приближении  $m \ll M$ , запишем, что

$$\mathbf{F}(r) = \frac{kQq}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = \varepsilon u^2 \frac{\mathbf{r}}{r},$$

В силу того, что  $\dot{\varphi} = cu^2$ , то из момента, когда  $\dot{\varphi} = v_0/r$ , найдём  $c = v_0 d$ . Уравнение Бине примет вид

$$u'' + u = \frac{kQq}{mv_0^2 d^2} \stackrel{\text{def}}{=} \varkappa. \quad (2.9)$$

При  $\varphi \rightarrow 0$ , получим, что

$$u_0 \cos \varphi_0 = -\varkappa.$$

Дифференцируя же по времени, получим

$$\dot{u} = -u_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = u_0 v_0 d \sin(\varphi - \varphi_0),$$

Таким образом

$$\begin{cases} u_0 = 1/d \sin \varphi_0 \\ u_0 = -\varkappa \cos \varphi_0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{1}{\varkappa d}.$$

Теперь при  $u \rightarrow 0$ , получим

$$\theta' - \varphi_0 = \arccos \left( \frac{-\varkappa}{u_0} \right), \quad \Rightarrow \quad \theta = \pi - \theta = \pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\varkappa d} = 2 \operatorname{arctg}(\varkappa d),$$

Таким образом приходим к выражению

$$\theta = 2 \operatorname{arctg}(\varkappa d). \quad (2.10)$$

## Т10\*.

В ОТО движение в центральном поле тяжести описывается как движение в метрике Шварцшильда:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) d\tau^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 - (r \sin \theta)^2 d\varphi^2 - r^2 d\theta^2.$$

Здесь 4 независимых переменных  $(\tau, r, \varphi, \theta)$ , где три из сферических координат, а  $\tau$  – физическое время, также введен радиус Шварцшильда  $a = 2GM$ .

Движение точек рассматриваем, как движение по геодезическим, то есть  $\mathbf{w}_i = 0$ , где  $i \in \{\tau, r, \varphi, \theta\}$ . Движение будет в некотором смысле происходить в одной плоскости, так что пусть  $\theta(t) = \pi/2$ . Так мы

получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{r}^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 \\ \mathbf{w}_\tau = \frac{d}{dt} \frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{r}} - \underbrace{\frac{\partial(v^2/2)}{\partial \tau}}_0 = \frac{d}{dt} \left[ \left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{r} \right] = 0 \\ \mathbf{w}_\varphi = -\frac{d}{dt} [r^2 \dot{\varphi}] = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

Таким образом получим пару первых интегралов системы, в частности

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{r} &= \mathcal{D}, \\ r^2 \dot{\varphi} &= \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Подставляя их в выражение для скорости, получим, что

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \mathcal{D}^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{\mathcal{C}^2}{r^2} = v^2.$$

По замене Бине

$$r = \frac{1}{u}, \quad \dot{r} = r' \dot{\varphi} = \left(\frac{1}{u}\right)' cu^2 = -u'c,$$

перейдём к функции  $u(\varphi)$ :

$$2c^2 u'' + c^2(2u - 3au^2) = v^2. \quad (2.12)$$

Преобразуя, получим

$$\boxed{u'' + u = \frac{a}{2c^2} v^2 + \frac{3}{2} au^2}. \quad (2.13)$$

Найдём теперь видимый радиус черной дыры – минимальное значение прицельного параметра, при котором луч, проходящий через окрестность черной дыры не падает на центр. Для светового луча верно, что  $\dot{s}^2 = v^2 = 0$ , тогда

$$u'' + u = \frac{3}{2} au^2.$$

Интегрируя, получим

$$\frac{u'^2}{2} + \frac{u^2}{2} = \frac{au^3}{2} + c'.$$

Посмотрим теперь на поведение света при  $u \rightarrow 0$  верно, что  $r\varphi \rightarrow b$ , тогда

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{r}{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{dr}{d\varphi} \frac{1}{r^2} = \frac{r}{\varphi} \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r\varphi} \quad \Rightarrow \quad u'|_{t=0} = \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad c' = \frac{1}{2b^2}$$

Перепишав, получим

$$u'^2 = au^3 - u^2 + \frac{1}{b^2}.$$

Вблизи точки с критическим  $u$  верно, что  $\dot{r} \sim 0$ , тогда нас интересует экстремум функции  $au^3 - u^2 + b^{-2}$ , тогда

$$3au^2 - 2u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r_{\min}} = \left(\frac{3}{2}a\right)^{-1}.$$

Условие падения – уменьшение радиуса (увеличение  $u$ ) при  $r = r_{\min}$ :

$$u'^2_{\min} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{8}{27} - \frac{4}{9}\right) + \frac{1}{b^2} = -\frac{4}{27a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 \leq \frac{27}{4} a^2$$

Тогда минимальное значение прицельного параметра, при котором луч, проходящий через окрестность черной дыры не падает на центр

$$\boxed{b_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a}, \quad (2.14)$$

что и является видимым радиусом черной дыры.

## 2.7 Элементы механики сплошных сред (МСС)

### Т11.

Движение среды происходит по закону ( $\tau = \text{const} > 0$ ),

$$\mathbf{r} = (x \ y \ z)^T, \quad x = \xi_1 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right), \quad y = \xi_2 \left(1 + 2\frac{t}{\tau}\right), \quad z = \xi_3 \left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right).$$

Тогда поля скорости и ускорения в лагранжевом описании

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} \xi_1 & 2\xi_2 & 2\frac{t}{\tau}\xi_3 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{w} = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\tau^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\xi_3 \end{pmatrix}^T.$$

Пусть деформация произойдет через малый промежуток времени  $dt$ , тогда  $\mathbf{u} = \mathbf{v} dt$ . Представим  $\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{r}$ , как сумму симметричного и косо-симметричного

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} = u_{ij} + \varphi_{ij},$$

где

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right), \quad \varphi_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right).$$

Подставим  $\mathbf{v}$  в эйлеровом описании

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\tau+t} & \frac{2y}{\tau+t} & \frac{2tz}{\tau^2+t^2} \end{pmatrix}^T, \quad \Rightarrow \quad u_{ij} = \text{diag} \left( \frac{1}{t+\tau}, \frac{2}{\tau+t}, \frac{2t}{\tau^2+t^2} \right)_{ij} dt, \quad \varphi_{ij} = 0.$$

Вращательное движение отсутствует.

Как можно заметить из выражения для  $\mathbf{v}$  неподвижными будут частицы с  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 0$ ,  $\xi_3 = 0$ , в начальный момент времени неподвижными будут все частицы с  $\xi_3 = 0$ .

### Т12 и Т13. (Теория)

В равновесии силы внутренних напряжений должны взаимно компенсироваться, т.е.

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = -F_i = 0. \quad (2.15)$$

Также мы знаем обобщенный закон Гука:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma} \left[ u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll} \delta_{ik} \right], \quad (2.16)$$

где  $\sigma \in [0, 1/2]$  – коэффициент Пуассона, а  $E$  – модуль Юнга. Зная, что  $u_{ik}$  – симметричный тензор

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right),$$

получим

$$\frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} = 0,$$

что перепишем в векторных обозначениях, в силу  $\Delta \mathbf{u} = \partial^2 u_i / \partial x_k^2$ , а  $\partial u_l / \partial x_l = \text{div } \mathbf{u}$ , тогда

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \text{grad div } \mathbf{u} = 0.$$

Вспомнив, что  $\text{grad div } \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} + \text{rot rot } \mathbf{u}$ ,

$$\text{grad div } \mathbf{u} - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \text{rot rot } \mathbf{u} = 0. \quad (2.17)$$

### Т12 и Т13. (общий случай)

Внешние и внутренние радиусы толстостенной сферы равны  $R_1$  и  $R_2$ , внутри сферы действует давление  $p_1$ , снаружи действует  $p_2$ . Найдём деформацию и тензор напряжений для этой сферы.

Введём сферические координаты с началом в центре шара. В силу радиальности  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{r})$ , следует, что  $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ , тогда уравнение (2.17) примет вид

$$\text{grad div } \mathbf{u} = 0, \quad (2.18)$$

с учётом (2.28),

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} = \operatorname{const} \equiv 3a,$$

тогда

$$d(r^2 u) = 3ar^2 dr \quad \Rightarrow \quad u = ar + \frac{b}{r^2}.$$

Выпишем компоненты тензора деформации в сферических координатах:

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{u_{\theta}}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{u_r}{r}.$$

В остальные не входит  $u_r$ , соответственно они равны 0. В частности, для нашего случая

$$u_{rr} = a - \frac{2b}{r^3}, \quad u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = a + \frac{b}{r^3}. \quad (2.19)$$

Также можем найти (диагональный) тензор напряжений :

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left[ (1-\sigma)u_{rr} + 2\sigma u_{\theta\theta} \right] = \frac{E}{1-2\sigma} a - \frac{2E}{1+\sigma} \frac{b}{r^3}, \quad (2.20)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left[ (1+\sigma)u_{\theta\theta} + \sigma u_{rr} \right] = \sigma_{\varphi\varphi}. \quad (2.21)$$

Также мы знаем следующие граничные условия:

$$\sigma_{rr}|_{r=R_1} = -p_1, \quad \sigma_{rr}|_{r=R_2} = -p_2,$$

получаем

$$\boxed{a = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \frac{1-2\sigma}{E}, \quad b = \frac{R_1^3 R_2^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \frac{1+\sigma}{2E}.} \quad (2.22)$$

### Т12 и Т13. (тонкая сферическая оболочка)

Рассмотрим теперь случай, когда  $h = R_2 - R_1 \ll R$ .

$$a \approx \frac{R}{3h} \frac{1-2\sigma}{E} (p_1 - p_2), \quad b \approx \frac{R^4}{3h} (p_1 - p_2) \frac{1+\sigma}{2E}.$$

Тогда деформация

$$\left( \text{пусть } \varkappa = \frac{R^2}{3h} (p_1 - p_2), \text{ тогда} \right) \quad u = \varkappa \frac{1-2\sigma}{E} + \varkappa \frac{1+\sigma}{2E} = \frac{r^2(1-\sigma)}{2Eh} (p_1 - p_2).$$

Чуть интереснее выражение для  $\sigma_{rr}$  (введено обозначение  $p = p_1 - p_2$ ):

$$\sigma_{rr} = \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \underbrace{\left( p_1 - p_2 - p_2 \frac{3h}{R} - \frac{R_2^2}{r^3} (p_1 - p_2) \right)}_{p(1-R_2^2/r^3)},$$

посмотрим, однако, на среднее по  $r$  значение.

$$\frac{1}{h} (R_1 + h)^3 \int_{R_1}^{R_1+h} \frac{1}{r^3} dr = \frac{R_1 + h}{2} \left( \frac{2}{R_1} + \frac{h}{R_1^2} \right),$$

тогда

$$\frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \left\langle p \left( 1 - \frac{R_2^2}{r^3} \right) \right\rangle = \boxed{\langle \sigma_{rr} \rangle = \frac{1}{2} (p_1 + p_2)}.$$

Найдём остальные компоненты

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{3}{2} \left( \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \right) (p_1 - p_2) = \frac{1}{2} \frac{R}{h} (p_1 - p_2).$$

### Т14\*. (решение для криволинейных координат, образующих ортогональный базис)

Хотелось бы выразить лапласиан  $\Delta p$  через частные производные в произвольной криволинейной системе координат. Легко показать, что

$$\Delta p = \operatorname{div} \operatorname{grad} p. \quad (2.23)$$



Так что начнём с вида  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  и  $\operatorname{grad} f$  в криволинейной системе координат. Понадеемся, что достаточно рассмотреть случай криволинейных координат, образующих ортогональный базис в каждой точке пространства.

В криволинейных координатах базисные направления сформированы векторами  $\mathbf{g}_i(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \partial \mathbf{r} / \partial q^i$ . Для удобства введём единичные орты координатных направлений для ортогональной системы

$$\mathbf{e}_1(q) = \left( \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}, 0, 0 \right), \quad \mathbf{e}_2(q) = \left( 0, \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}, 0 \right), \quad \mathbf{e}_3(q) = \left( 0, 0, \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \right). \quad (2.24)$$

Тогда

$$dq^j(\mathbf{e}_i) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \delta_j^i, \quad dq^i \wedge dq^j(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} \delta_k^i \delta_l^j. \quad (2.25)$$

Известно, что градиент функции соответствует дифференциальной 1-форме. Её (по вектору  $\mathbf{A}$ ) можно записать как  $\omega_A^1 = a_i dq^i$ . С учётом введенного базиса можно записать, что  $\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i$ ,  $\forall \mathbf{A} \in T\mathbb{R}_q^3$ . Из (2.25) получим, что

$$\omega_A^1(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i) = A^i = \frac{a_i}{\sqrt{g_{ii}}},$$

следовательно  $a_i = A^i \sqrt{g_{ii}}$ , и, соответственно

$$\omega_A^1 = A^i \sqrt{g_{ii}} dq^i. \quad (2.26)$$

Аналогично, пусть теперь  $\operatorname{grad} f = A^i \mathbf{e}_i$ . По определению

$$\omega_{\operatorname{grad} f}^1 = d\omega_f^0 = df = \frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{grad} f = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial f}{\partial q^i} \mathbf{e}_i.}$$

Теперь найдём  $\operatorname{div} \mathbf{B}$ , как дифференциальную 3-форму. Для начала поймём, что для вектора  $\mathbf{B}(q) = (B^i \mathbf{e}_i)(q)$  форма

$$\omega_B^2 = b_1 dq^2 \wedge dt^3 + b_2 dq^3 \wedge dt^1 + b_3 dq^1 \wedge dt^2 \quad (2.27)$$

имеет следующий вид:

$$\omega_B^2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{B}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = B^1.$$

С другой стороны, из (2.25) и (2.27),

$$\omega_B^2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = b_1 dq^2 \wedge dq^3(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \frac{b_1}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}.$$

Получаем, что  $b_1 = B^1 \sqrt{g_{22}g_{33}}$ , аналогично можем получить, что  $b_2 = B^2 \sqrt{g_{11}g_{33}}$ ,  $b_3 = B^3 \sqrt{g_{11}g_{22}}$ .

Теперь, из определения, получаем

$$\omega_{\operatorname{div} \mathbf{B}}^3 = d\omega_B^2 = \sum_{\substack{i \neq j \neq k \\ P(i,g,k)=1}}^3 \frac{\partial \sqrt{g_{jj}g_{kk}} B^i}{\partial q^i} dq^i \wedge dq^j \wedge dq^k.$$

Тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \left( \frac{\partial \sqrt{g_{22}g_{33}} B^1}{\partial q^1} + \frac{\partial \sqrt{g_{33}g_{11}} B^2}{\partial q^2} + \frac{\partial \sqrt{g_{11}g_{22}} B^3}{\partial q^3} \right) \quad (2.28)$$

Собирая всё вместе получаем, что

$$\Delta f = \operatorname{div} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial f}{\partial q^i} \mathbf{e}_i \right) = \frac{1}{\det g} \sum_{\substack{i \neq j \neq k \\ P(i,g,k)=1}}^3 \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \left[ \sqrt{\frac{g_{jj}g_{kk}}{g_{ii}}} \frac{\partial f}{\partial q^i} \right] \right). \quad (2.29)$$

В частности, для полярных

$$g_{ij} = \operatorname{diag}(1, r^2, 1) \quad \Rightarrow \quad \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

**T15\*.**

Запишем ковариантную производную вектора и ковектора:

$$\nabla_j v_m = \frac{\partial v_m}{\partial q^j} - \Gamma_{kj}^i v_i, \quad \nabla_k v^j = \frac{\partial v^j}{\partial q^k} + \Gamma_{kj}^i v^i. \quad (2.30)$$

В таком случае

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \nabla_i v_j - \nabla_j v_i \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial q^i} + \Gamma_{ji}^k v_k - \frac{\partial v_i}{\partial q^j} - \Gamma_{ij}^k v_k \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial q^i} - \frac{\partial v_i}{\partial q^j} \right),$$

что и требовалось доказать.

Перейдём к следующему заданию. Корректнее сказать, что **псевдовектор** вихря  $\omega$  может быть представлен  $\omega_{ij} e^i e^j$ , т.к. при выводе критически важно, что

$$[e^1 \times e^2] = e^3, \quad (2.31)$$

соответственно  $\omega$  не инвариантен к зеркальному отображению базиса.

Судя по символу Леви-Чевиты речь идёт о трёхмерной задаче, так что нам достаточно показать что

$$\omega = \omega_{ij} [e^i \times e^j], \quad \text{где} \quad \omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^3 & -\omega^2 \\ -\omega^3 & 0 & \omega^1 \\ \omega^2 & -\omega^1 & 0 \end{pmatrix}_{ij}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \omega^\gamma = \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}, \quad (2.32)$$

что проверяется прямой подстановкой:

$$\omega = \omega^3 \underbrace{[e^1 \times e^2]}_{e^3} + (-\omega^3) \underbrace{[e^2 \times e^1]}_{-e^3} + \dots = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}.$$

### 3 Контрольная работа

#### Задача №1

Введём координаты так, чтобы  $OX \parallel \omega$ , и  $OY \parallel \overrightarrow{OD_1} \equiv l$ . Запишем скорость точки  $O_1$  двумя способами

$$v_{O_1} = \omega \times l = \omega_0 \times r. \quad (3.1)$$

Скорость точки  $B$

$$v_B^r = 2\omega_0 \times r,$$

Ускорение точки  $B$

$$w_B^a = w_B^r + w_B^e + w_B^c. \quad (3.2)$$

Что ж, по порядку

$$\begin{aligned} w_B^r &= 2\omega_0 \times (\omega_0 \times r) = (-\omega_0^2 r \quad 0 \quad 0)^T, \\ w_B^e &= \omega \times (\omega \times l) = (0 \quad -\omega^2 l \quad 0)^T, \\ w_B^c &= 2\omega \times v_B^r = 4\omega \times (\omega_0 \times r) = (0 \quad -4\omega\omega_0 r \quad 0)^T, \end{aligned}$$

где подразумевается, что

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l = \begin{pmatrix} 0 \\ l \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Также имеет смысл найти из первого уравнения  $\omega_0$  и собрать всё вместе

$$\omega_0 = \frac{l}{r} \omega, \quad \Rightarrow \quad w_B^a = - \begin{pmatrix} \omega^2 l^2 / r \\ 5\omega l \\ 0 \end{pmatrix}.$$

#### Задача №2

Мы знаем как изменяется со временем угловая скорость:

$$\omega(t) = \omega_n + \int_0^t \varepsilon(t) dt. \quad (3.3)$$

Знаем, что

$$v_O = \omega \times r, \quad d\omega = \varepsilon dt = -k\omega \times r dt. \quad (3.4)$$

Введём систему координат,  $OX$  которой в начальный момент времени такое, что  $v_0 \parallel OX$ , а  $OY$  нормально

к поверхности. Тогда

$$\boldsymbol{\omega}_H = (\omega_H \sin \alpha \quad \omega_H \cos \alpha \quad 0)^T, \quad \mathbf{r} = (0 \quad r \quad 0)^T,$$

а из (3.4) получим дифференциальное уравнение

$$d \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = -k \begin{pmatrix} -\omega_z r \\ 0 \\ \omega_x r \end{pmatrix} dt \Rightarrow \begin{cases} d\omega_x = k\omega_z r dt \\ d\omega_y = 0 \\ d\omega_z = -k\omega_x r dt \end{cases} \Rightarrow \omega_z d\omega_z = -\omega_x d\omega_x.$$

Решая, находим

$$\omega_z^2 + \omega_x^2 = C^2 = \omega_H^2 \sin^2 \alpha, \quad (3.5)$$

где  $C$  мы находим из момента  $t = 0$ .

Подставляя значение для  $\omega_z$ , получим

$$d\omega_x = kr\sqrt{C^2 - \omega_x^2} dt, \quad \Rightarrow \quad \omega_x = C \sin(krt + C_t) = \left/ \begin{matrix} \omega_x(0) = \omega_H \sin \alpha \\ \Rightarrow C_t = \pi/2 \end{matrix} \right/ = \omega_H \sin(\alpha) \cos(krt).$$

Собирая всё вместе, получаем, что

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_H \sin(\alpha) \cos(krt) \\ \omega_H \cos(\alpha) \\ \omega_H \sin(\alpha) \sin(krt) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Найдём теперь  $\mathbf{r}_O(t)$ :

$$d\mathbf{r}_O = \mathbf{v}_O dt = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} dt \Rightarrow \mathbf{r}_O = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} \omega_H \sin(\alpha) \cos(krt) \\ 0 \\ \omega_H \sin(\alpha) \sin(krt) \end{pmatrix} + \mathbf{C}_r,$$

где  $\mathbf{C}_r$  находим из условия  $\mathbf{r}_O(t=0) = \mathbf{r}$ . Введём также некоторые обозначения для удобства записи,

$$\varkappa = \frac{1}{k} \omega_H \sin \alpha, \quad \varphi = krt, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_O(t) = \varkappa \begin{pmatrix} \cos \varphi - 1 \\ r/\varkappa \\ \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

В таком случае траектория будет окружностью, в плоскости  $zx$  с центром в  $(-\varkappa, 0)$  и радиусом  $\varkappa$ .

### Задача №3

Искать центр вращения – дело гиблое, лучше посмотрим с точки зрения  $A$  на точку  $C$  – центр масс, расположенный в  $A + \overrightarrow{AB}/2$ . С учётом того, что в начальный момент времени все скорости равны 0, получим

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}^e + \mathbf{w}_C^r, \quad (3.8)$$

где  $\mathbf{w}^e = \mathbf{w}_A$ , а  $\mathbf{w}_C^r$  – вращение с угловым ускорением  $\boldsymbol{\varepsilon}$  точки  $C$  относительно точки  $A$ , другими словами

$$\mathbf{w}_C^r = \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{AC}. \quad (3.9)$$

По теореме об изменении кинетического момента

$$J_C \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{M}_C^e + 0 = \overrightarrow{CA} \times \mathbf{T} = \mathbf{T} \times \overrightarrow{AC}. \quad (3.10)$$

По теореме об изменении количества движения

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{R}^e = \mathbf{T} + m\mathbf{g}. \quad (3.11)$$

Осталось выбрать хорошие оси и по координатно это записать.

Так как не очень хочется задумываться об ускорении точки  $A$ , выберем ось  $OX \perp \mathbf{w}_A$ , получается повернутую на  $\alpha$  от  $\overrightarrow{AB}$  в начальный момент времени,  $OY$  выберем так, чтобы  $\omega_z > 0$ , тогда

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} L \cos \alpha \\ L \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ w_a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_C^r = \boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -\varepsilon L \sin \alpha \\ \varepsilon L \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix},$$

Момент инерции для однородного стержня  $J_c = mL^2/3$ , в таком случае из проекции (3.10) на ось  $OZ$  найдём

$$J_C \varepsilon = TL \sin \alpha \Rightarrow \varepsilon = \frac{3T \sin \alpha}{mL}. \quad (3.12)$$

Перепишем (3.11) в проекции на ось  $OX$  и подставим  $\varepsilon$ :

$$-\varepsilon L \sin \alpha = \frac{T}{m} - g \cos \alpha, \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = mg \frac{\sin \alpha}{1 + 3 \sin^2 \alpha}}.$$

