Билеты к экзамену по «Аналитической Механике ФОПФ»

Авторы: Хоружий Кирилл
Примак Евгений

От: *18 января 2021 г.*

Содержание

1 Кинематика точки

Для точки P движущейся относительно некоторого неподвижного тела (свяжем с ним точку O), можно ввести следующие характеристики:

Def 1.1 (Радиус вектор, скорость и ускорение точки P)**.**

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP}, \qquad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\boldsymbol{t}}, \qquad \boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}.$$

Def 1.2. Для задания движения точки, зная её траекторию, можно сопоставить ей дуговую координату $\sigma(t)$ и получить выражения для скорости и ускорения, выраженные в осях *естественного трёхгранника* $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$. Таким образом для $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\sigma(t))$:

$$\boldsymbol{\tau}(\sigma) = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma}, \qquad \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{n}(\sigma),$$

где ρ – радиус кривизны. Для кривой в $\mathbb{R}^3$ добавим ещё вектор b для правой тройки. Таким образом получим формулы Френе:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{n}, \qquad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\tau} + \varkappa\boldsymbol{b}, \qquad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\varkappa\boldsymbol{n}.$$

Таким образом сможем в компонентах трёхгранника выписать скорость и ускорение точки:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} = v_\tau\boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d_\tau}{dt}\boldsymbol{\tau} + v_\tau\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d^2\sigma}{dt^2}\boldsymbol{\tau} + \frac{v_\tau^2}{\rho}\boldsymbol{n}.$$

Как видно, ускорение точки представилось в видео $w = w_n + w_\tau$ — *нормальной* и *тангенциальной* составляющей.

Lem 1.3 (Из матана)**.** *Для $f_i \in C^2 \colon U \mapsto V$, если X – касательный вектор в точке $p \in U$, то $X(f)$ можно определить как:*

$$X(f) = X(x^i)\frac{\partial f(p)}{\partial x^i}, \text{ а координаты этого вектора в криволинейных координатах: } X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Каждую материальную точку можем определить $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N$ – итого $\mathbb{R}^{3N}$. Но есть некоторые ограничения вида

$$f_i(\boldsymbol{r}, t) = 0.$$

Вложим в фазовое пространство многообразие M, в котором локально всё хорошо. Тогда $\dim M = n$ – число степеней свободы, а параметризация $q_1, \ldots, q_N$ – криволинейные координаты. В каждой $A \in M$ верно, что $\dot{\boldsymbol{q}} \in TM_A$, то есть

$$TM = \bigcup_q T_qM \ni (q, \dot{q}) \tag{0.1}$$

И такБ движение точки можно задать, если её криволинейные координаты — известне функции $q(t)$.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_3) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

Def 1.4. *Коэффициентами Ламе* такие H^i. С их помощью удобно выразить единичные базисные векторы криволинейных координат:

$$H_i = \left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q^i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q^i}\right)^2}. \qquad e^i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q^i}.$$

Далее будем координатными векторами называть $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q^i}$. Разложение произвольного вектора по локальному базису имеет вид:

$$\boldsymbol{a} = a^i\boldsymbol{g}_i = a_j\boldsymbol{g}^j.$$

Здесь $\boldsymbol{g}^j$ — векторы двойственного базиса к базису из $\boldsymbol{g}_i$. В двойственном же (взаимном) базисе из матана мы видели:

$$X(f) = df(X) = \partial_x f, \qquad dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j, \qquad a = a_i dx^i.$$

Таким образом получаем скорость точки и её ковариантную компоненту:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} = \boldsymbol{g}_i\dot{q}^i, \qquad v^i = \boldsymbol{q}^i.$$

И для ускорения:

$$w_k = \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right)_k = \frac{(d\boldsymbol{v})_k}{dt} = g_{kj}\frac{dv^j}{dt} + \Gamma_{kij}v^j v^i.$$

2 Описание движения твёрдого тела

Def 2.1. *Твёрдое телое* — множество точек, расстояние между которыми не меняется: $\forall j, j, t\colon |\boldsymbol{r}_i(t) - \boldsymbol{r}_j| = \text{const}$.

Точка O это полюс. Во-первых перенесем начало координат в O. Введём систему координат $O_{\xi\nu\zeta}$ связанную с телом, – тело относительно неё не движется

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OA},\ \boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{OA} = \text{const в } O_{\xi\nu\zeta}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r}(t) = R(t)\boldsymbol{\rho}.$$

Ортогональность матрицы R даёт возможность описать её тремя независимыми параметрами. Один из вариантов сделать это – углы Эйлера.

Пусть начальная ПДСК (x, y, z), а конечная – (X, Y, Z), при чём $xy \cap XY = ON$ – линия узлов.

1) $\alpha\colon Ox \to ON$, угол *прецессии*;
2) $\beta\colon Oz \to OZ$, угол *нутации*;
3) $\gamma\colon OX \to ON$, угол *собственного вращения*.

Повороты системы на эти углы называются прецессия, нутация и поворот на собственный угол (вращение).

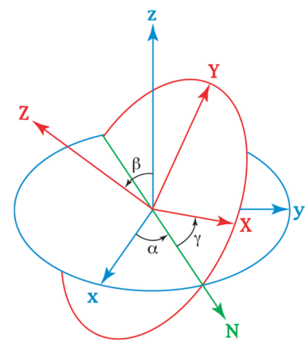

Рис. 1: Углы Эйлера

Матричная запись углов Эйлера:

$$R_Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin a & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_X(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \qquad R_Z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin\psi & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Thr 2.2 (Теорема Эйлера)**.** *Произвольное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку, можно осуществить посредством вращения вокруг некоторой оси, проходящей через эту точку.*

Thr 2.3 (Теорема Шаля)**.** *Самое общее перемещение твердого тела разлагается на поступательное перемещение, при котором произвольно выбранный полюс переходит из своего первоначального положения в конечное, и на вращение вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс. Это разложение можно совершить не единственным способом, выбирая за полюс различные точки тела; при этом направление и длина поступательного перемещения будут изменяться при выборе различных полюсов, а направление оси вращения и угол поворота вокруг нее не зависят от выбора полюса.*

Thr 2.4 (Теорема Моцци)**.** *Самое общее перемещение твердого тела является винтовым перемещением.*

Con 2.5 (Теорема Бернулли-Шаля)**.** *Самое общее перемещение плоской фигуры в своей плоскости есть либо поступательное перемещение, либо вращение вокруг точки. Эта точка называется центром конечного вращения.*

3 Приложения к твердому телу

Проведём два вектора $\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{r}_O$:

$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + R(t)\boldsymbol{\rho} \quad \overset{d/dt}{\Rightarrow} \quad \boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \dot{R}\rho = \boldsymbol{v}_O + \dot{R}R^{-1}\boldsymbol{r}$$

но,

$$RR^{\mathrm{T}} = E, \dot{R}R^{\mathrm{T}} + R\dot{R}^{\mathrm{T}} = 0, \dot{R}R^{\mathrm{T}} = -R\dot{R}^{\mathrm{T}}, (\dot{R}R^{-1})^{\mathrm{T}} = -\dot{R}R^{-1}.$$

То есть $\dot{R}R^{-1}$ кососимметрична. Тогда пусть

$$\dot{R}R^{-1} = \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & w_y \\ w_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

Thr 3.1 (формула Эйлера). *Существует единственный вектор*[1] $\boldsymbol{\omega}$*, называемый* ***угловой скоростью тела****, с помощью которого скорость* $\boldsymbol{v}$ *точки тела может быть представлена в виде*

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \quad - \quad \textit{\textbf{формула Эйлера}}.$$

Тогда, например, при постоянном радиус векторе верно, что

$$\boldsymbol{v}_A = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}, \qquad \text{при условии } a = \text{const}.$$

Можно вывести ускорение точки твёрдого тела

$$\mathbf{w}_A = \mathbf{w}_O + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$

$$\mathbf{w}_A = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \quad - \quad \textbf{формула Ривальса},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ – *угловое ускорение.*

22 Сплошная среда и её напряжение

Тензор напряжений

В недеформированном теле молекулы находятся друг с другом в механическом и тепловом равновесии. При деформировании же взаимное расположение меняется и равновесие нарушается.

Def 22.1. В результате возникают *внутренние напряжения* — силы, стремящиеся вернуть тело в равновесие, которые обуславливаются молекулярными силами, обладающими незначительным радиусом действия.

Выделим в теле объём и рассмотрим суммарную действующую на него силу. *С одной стороны*, эта сила может быть представлена: $\int \boldsymbol{F} dV$, для $\boldsymbol{F}$ — силы на единицу объема. *С другой стороны*, силы, с которыми действуют различные части объёма друг на друга не приведут к появлению никакой внешней силы. Поэтому искомая полная сила будет состоят из сил действующих на объём со стороны окружающих его частей тела. В силу пренебрежимой малости радиуса молекулярных сил, внешние силы будут представленны как суммы сил на каждый элемент поверхности объёма.

Def 22.2. $\int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x^k} = \oint \sigma^{ik} df_k$. В последнем равенстве σ^{ik} — *тензор напряжений*(симметричный). То есть $\sigma^{ik} df_k$ есть i-ая компонента силы, действующей на элемент поверхности $d\boldsymbol{f}$.

Так, на единичную площадку, перпендикулярную оси x, действуют нормальная к ней сила σ_{xx} и тангенциальные σ_{yx} и σ_{zx}. Знак силы $\sigma^{ik} df_k$, которая является действующей на ограниченный поверхностью объём со стороны окружающих тел — положительный. Для напряжений же извне, перед интегралом нужно поставить знак минус.

Всесторонее и не только сжатие

При таком сжатии на каждую единицу поверхности тела действует одинаковое по величине давление p, направленное везде по нормали к поверхности внутрь объёма тела. А на элемент df_i действует сила $-p df_i = \sigma^{ik} df_k$. Таким образом при всестороннем сжатии тензор напряжений: $\sigma^{ik} = -p\delta^{ik}$.

В общем случае ещё и диагональные элементы тензора напряжений не нуль. То есть, помимо нормальной силы, действуют ещё и тангенциальные «скалывающие» напряжения, стремящиеся сдвинуть параллельные элементы поверхности друг относительно друга.

В равновесии силы внутренних напряжений должны уравновешивать друг друга, то есть:

$$F_i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x^k} = 0.$$

И если тело находится в поле тяжести, то в равновесии:

$$\boldsymbol{F} + \rho g = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x^k} + \rho g^i - 0.$$

Внешние силы

Обычно именно внешние силы вызывают деформацию, однако они будут просто входить в граничные условия к уравнениям равновесия. Внешняя сила $\boldsymbol{P}$ должна компенсироваться силой $\sigma^{ik} df_k$:

$$P^i df = -\sigma^{ik} df_k = 0 \quad \Rightarrow \quad df_k = n_k df \quad \Rightarrow \quad \sigma^{ik} n_k = P^i,$$

[1] Псевдоветор же, нет?

где n — единичный вектор нормали к площадке. Таким образом получили условие, которое должно выполняться на всей поверхности находящегося в равновесии тела.

23 Перемещение сплошной среды

Пусть каждой точке среды соответсвует ξ^1, ξ^2, ξ^3, собственно (ξ, t) – *лгранжевы переменные. Закон движения среды* в таком случае это

$$\boldsymbol{r}(\xi, t), \tag{0.2}$$

скорость же

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{r}(\xi, t)}{\partial t}, \qquad \mathbf{w} = \frac{\partial \boldsymbol{v}(\xi, t)}{\partial t},$$

и так далее.

Альтернативно можеем задать (x, t) – эйлерово описание. Тогда

$$\boldsymbol{v}(x, t), \mathbf{w}(x, t) \qquad \text{– поля скоростей и ускорений.}$$

В частности, представляя движение по шоссе, полоса 1,2,3 и участок трассы – эйлерово описание среды. Если же мы будем следить за каждой машиной, то это будет лагранжево описание.

24 Тензоры деформаций и перемещений

Подход к деформации

Под влиянием приложенных внешних сил твердые тела в той или иной степени *деформируются*, то есть меняют свою форму и объём. Рассмотрим точку деформируемого тела $\boldsymbol{r}(x^1, x^2, x^3)$, которая после деформации станет $\boldsymbol{r}'$.

Def 24.1. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$ — *вектор деформации.* Координаты y^i смещенной точки могут быть выражены через x^i, таким образом $\boldsymbol{u}(x^i)$ полностью определяет деформацию тела.

Рассмотрим две близкие точки, расстояние между ними до деформации $d(l')^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$, а после $d`l^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2$. Записав через деформацию (здесь $u_i = g_{ik}u^k$):

$$d(l')^2 = (dx^i + du_i)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x^k} dx^k\right) \quad \Rightarrow \quad d(l')^2 = dl^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x^k} dx^i dx^k + \frac{\partial u_i}{\partial x^k}\frac{\partial u_i}{\partial x^l} dx^k dx^l.$$

Поменяем во втором члене индексы i и k, а в третьем i и l:

$$d(l')^2 = dl^2 + 2u_{ik}dx^i dx^k, \qquad \text{где } u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_i}{\partial x^k} + \frac{u_k}{\partial x^i} + \frac{u_i}{\partial x^l}\frac{u_l}{\partial x^k}\right).$$

Как и всякий симметричный тензор, можно привести тензор u_{ik} в каждой данной точке к главным осям. Это значит, что в каждой данной точке можно выбрать такую систему координат — главные оси тензора, — в которой из всех компонент u_{ik} отличны от нуля только диагональные компоненты u_{11}, u_{22}, u_{33}.

При малых же деформациях, за исключением редких случаем, и вектор деформации оказывается малым, тогда можем пренебречь последним членом в полученном нами значении для тензора деформации:

Def 24.2 (Тензор деформации в малом приближении)**.**

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i}\right).$$

Изменение объёма при деформации

Относительные удлинения элементов длины вдоль направлений главных осей тензора деформации с нашей точностью: $\sqrt{1 + 2u_{ii}} - 1 \approx u_{ii}$.

Малый элемент объёма тогда претерпит следующее изменение:

$$dV' = dV(1 + u_{11})(1 + u_{22})(1 + u_{33})dV(1 + u_{11} + u_{22} + u_{33}) \quad \Rightarrow \quad u_{ii} = \frac{dV' - dV}{dV}.$$

Для несжимаемого тела, тогда u_{ii} — сумма диагональных компонент тензора в главных осях — нулевая. Такая деформация называется *сдвигом.*

Тензор скорости деформации

Def 24.3. *Тензором скорости деформации* назовём просто $\dot{u}_{ij} = \frac{du_{ij}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right)$.

Тогда рассмотрим движение элемента объёма тела во времени: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r} + \delta\boldsymbol{r})$, до первого члена малости:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^j}\delta x^j \quad \Rightarrow \quad (\boldsymbol{v}_0 = 0) \quad \Rightarrow \quad v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x^j}\delta x^j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right)\delta x^j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right)\delta x^j.$$

Получаем уравнение, где с помощью замены, и вернув начальную скорость, явно можем показать, что

Thr 24.4 (Теорема Гельмгольца)**.** *Тензор скоростей деформации можно разложить на сумму симметричного и кососимметричного:*

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + u_{ij}\delta x^j e^i + \boldsymbol{\omega} \times \delta\boldsymbol{r}.$$

Обобщенный закон Гука

Пусть E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона. Тогда

$$u_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}, \qquad u_{22} = u_{33} = -\frac{\mu}{E}\sigma_{11}.$$

Перепишем это в виду

$$u_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\mu}{E}\sigma_{22} - \frac{\mu}{E}\sigma_{33} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{11} - \frac{\mu}{E}\operatorname{tr}\sigma.$$

Или, в матричном виде

$$\begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \frac{1+\mu}{E}\begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} - \frac{\mu}{E}\operatorname{tr}\sigma\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В тензорном виде

$$u_{ik} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{ik} - \frac{\mu}{E}\delta_{ik}\operatorname{tr}\sigma.$$

Выразим u:

$$\operatorname{tr} u = \frac{1+\mu}{E}\operatorname{tr}\sigma - \frac{3\mu}{E}\operatorname{tr}\sigma \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{tr}\sigma = \frac{E}{1-2\mu}\operatorname{tr} u.$$

Так и получаем *обобщенный закон гука*:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\mu}\left[u_{ik} + \frac{\mu}{1-2\mu}\delta_{ik}\operatorname{tr} u\right]$$

25 Элементы гидродинамики

Уравнение непрерывности

Def 25.1 (Предмет рассмотрения)**.** Ввиду макроскопического рассмотрения *жидкости*(газы) в гидродинамике представлется как сплошная среда, то есть малый элемент объёма жидкости содержит ещё достаточно больше количество молекул, относительно межмолекулярного расстояния.

Для описания движения жидкости требуется задать распределение скорости жидкости $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ и какие-либо её две термодинамические величины, как, например, плотность и давление. Важно отметить, что все эти величины относятся не к отдельной частице, а к точке в пространстве в определенное время.

Thr 25.2 (Уравнение непрерывности)**.**

$\triangle$. В маленьком объёме V_0 количество жидкости есть $\int_{V_0} \rho dV$. Через элемент поверхности, ограничивающей V_0, в единицу времени протекает $\rho\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{f}$ жидкости — положительно или отрицательное число, в зависимости от того, вытекает или втекает жидкость соответственно. Тогда приравниваем для вытекания жидкости два наших рассуждения:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV = \oint \rho\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{f} \qquad \Rightarrow \qquad \int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\boldsymbol{v}\right) dV = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\boldsymbol{v} = 0.$$

Последнее следует из того, что равенство должно иметь для любого объёма, таким образом получили искомое *уравнение непрерывности.* $\square$

Уравнение Эйлера

Thr 25.3 (Уравнение Эйлера)**.**

$\triangle$. Выделим в жидкости некоторый объём, полная сила, действующая на этот объём: $-\oint p d\boldsymbol{f} = -\int \operatorname{grad} p dV$, где интеграл из взятого по поверхности объёма преобразуется в сам рассматриваемый объём. Таким образом получили, что на единицу объёма жидкости будет действовать сила:

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p.$$

Однако стоящая здесь скорость определяет изменение скорости именно элемента объёма, а не точки в пространстве. Запишем это изменение скорости:

$$d\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} dt + (d\boldsymbol{r} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p.$$

Последнее и есть искомое уравнение Эйлера. $\square$

Если же жидкость движется во внешнем поле тяжести, то, на каждый элемент объёма будет действовать сила, которая просто добавится к изначальному уравнению:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \boldsymbol{g}.$$

Уравнение Навье-Стокса

Чтобы нормально учесть вязкость, нужно поговорить про *поток импульса*. Импульс единицы объёма жидкости есть $\rho\boldsymbol{v}$, скорость изменения его компоненты:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v^i = \rho \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v^i.$$

Уравнения непрерывности и Эйлера запишутся в тензорном виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v^k)}{\partial x^k}, \qquad \frac{\partial v^i}{\partial t} = -v^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} - \frac{1}{\rho}\delta^{ik}\frac{\partial p}{\partial x^k}.$$

Тогда получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v^i = -\rho v^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} - \delta^{ik}\frac{\partial p}{\partial x^k} - v^i \frac{\partial \rho v^k}{\partial x^k} = -\delta^{ik}\frac{\partial p}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial x^k}\rho v^i v^k = -\frac{\partial \Pi^{ik}}{\partial x^k}.$$

Def 25.4. Π^{ik} — *тензор плотности потока импульса*: $\Pi^{ik} = p\delta^{ik} + \rho v^i v^k$.

Таким образом уравнение Эйлера у нас записалось в виде: $\frac{\partial}{\partial t}\rho v^i = -\frac{\partial \Pi^{ik}}{\partial x^k}$. Поток импульса представляет собой чисто обратимый перенос импульса, связанный с просто механическим передвижением различных участков жидкости и с действующими в жидкости силами давления. *Вязкость* (внутреннее трение) жидкости проявляется в наличии ещё дополнительного, необратимого переноса импульса из мест с большой скоростью в места с меньшей.

Поэтому уравнение движения вязкой жидкости можно получить, прибавив к идеальному потоку импульса дополнительный член σ^{ik}_{visc}, определяющий такой вязкий перенос: $\Pi^{ik} = p\delta^{ik} + \rho v^i v^k - \sigma^{ik}_{visc} = -\sigma^{ik} + \rho v^i v^k$.

Def 25.5. Таким образом: $\sigma^{ik} = -p\delta^{ik} + \sigma^{ik}_{visc}$ называют *тензором напряжений*, а σ^{ik}_{visc} — вязким тензором напряжений.

Чтобы написать выражение для вязкого напряжения сделаем пару оговорок. *Во первых*, градиенты скорости движения участков жидкости относительно друг друга не велики, тогда σ^{ik}_{visc} зависит лишь от первых производных скорости по координатам, линейно. *Во вторых*, не зависящие от первых производных величины должны обращаться в нуль как для скорости потока $\boldsymbol{v} = \text{const}$ и тензор должен быть нулевым. *В третьих*, $\sigma^{ik}_{visc} = 0$ когда жидкость совершает целое равномерное вращение, поскольку никакого внутреннего трения тогда не будет. Для такого равномерного вращения с $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]$ линейными комбинациями производных обращающимися в нуль будут: $\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i}$.

Это всё даёт нам мотивацию для не шибко сильных потоков несжимаемой жидкости согласится с Сэром Исааком Ньютоном, и написать тензор вязкого напряжения, как *тензор скорости деформации*:

$$\sigma^{ik}_{visc} = \eta\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i}\right), \qquad \Rightarrow \qquad \sigma^{ik} = -p\delta^{ik} + \eta\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i}\right).$$

А уравнение Эйлера тогда для несжимаемой жидкости запишется:

$$\rho\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k}\right) = -\delta^{ik}\frac{\partial p}{\partial x^k} + \frac{\partial}{\partial x^k}\left[\eta\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i}\right)\right].$$

а в более человеческом, привычном глазу, виде:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\triangle)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\boldsymbol{v}.$$

Def 25.6. Коэффициент η называется — *динамическим коэффициентом вязкости*, а отношение $\eta/\rho = \nu$ — *кинематической вязкостью.*