Конспект лекций курса «Анализ на многообразиях» А.В. Пенского

Авторы: Хоружий Кирилл

От: *17 ноября 2020 г.*

Содержание

1 Лекция № 1

1.1 Векторы как дифференцирование функций

Что такое вектор? С одной стороны можем посмотреть на производную функции по направлению

$$\partial_X f(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(f(A + \varepsilon X) - F(A) \right). \tag{1.1}$$

Что очень просто выглядит в декартовых координатах

$$\partial_X f(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \ldots = \frac{d}{d\varepsilon} f\left(A^1 + \varepsilon X^1, \ldots, A^n + \varepsilon X N\right)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial f}{\partial x^1}\left(A^1, \ldots, A^n\right) X^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\left(A^1, \ldots, A^n\right).$$

Таким образом

$$\partial_X f(A) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(A). \tag{1.2}$$

Таким образом построили отображение

$$X \mapsto \partial_X\big|_A.$$

Выпишем несколько свойств такого оператора

$$\partial_X(f+g)(A) = \partial_X f(A) + \partial_X g(A)$$
$$\partial_X(fg)(A) = (\partial_X f(A))g(A) + f(A)(\partial_X g(A)).$$

Что соответсвует правилу Лейбница.

1.2 Дифференцирование как вектор

Теперь зайдём с другой стороны. Рассмотрим $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим отображение D

$$D \colon C^\infty(U) \to \mathbb{R},$$

удоволетворяющее свойствам

$$D(f+g) = Df + Dg$$
$$D(fg) = (Df) \cdot g(A) + f(A) \cdot (Dg).$$

Что и назовём дифференцированием в точке A.

Легко показать, что $D(\text{const}) = 0$, $D\lambda f = \lambda Df$ и $f(A) = g(A) = 0 \Rightarrow D(fg) = 0$. Вспомним теперь формулу Тейлора в координатах $u^1, \ldots, u^n$.

$$f(u^1, \ldots, u^n) = f(A^1, \ldots, A^n) + \frac{\partial f}{\partial u^i}(A^1, \ldots, A^n) \cdot (u^i - A^i) + h_{ij}(u^1, \ldots, u^n)(u^i - A^i) \cdot (u^j - A^j).$$

Тогда

$$D(f) = 0 + \underbrace{D(u^i - A^i)}_{X^i} \frac{\partial f}{\partial u^i}(A^1, \ldots, A^n).$$

Таким образом

$$Df = X^i \frac{\partial f}{\partial u^i}\left(A^1, \ldots, A^n\right). \tag{1.3}$$

Итого

1. В ДСК $X \mapsto \partial_X\big|_A$.

2. В ДСК D имеет вид $\partial_X\big|_A$ для некоторого X.

3. Получили взаимно-однозначное соответствие векторы – дифференцирование.

4. Определим векторы, как дифференцирование. Это определение `инвариантно`.

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \tag{1.4}$$

где $(X^1, \ldots, X^n)$ – координаты вектора в координатах $(u^1, \ldots, u^n)$.

1.3 Замена координат

Допустим выбрали некоторые $(u^1, \ldots, u^n)$ и $(v^1, \ldots, v^n)$. Тогда
$$D = X^i \frac{\partial}{\partial u^i} = Y^j \frac{\partial}{\partial v^j}.$$
По правилу дифференцирования сложной функции
$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = \frac{\partial v^j}{\partial u^i}\frac{\partial f}{\partial v^j}, \quad \Rightarrow \quad X^i \frac{\partial}{\partial u^i} = \underbrace{X^i \frac{\partial v^j}{\partial u^i}}_{Y^j} \frac{\partial}{\partial v^j}.$$
Получили формулу изменения координат вектора при смене системы[1] координат
$$Y^j = \frac{\partial v^j}{\partial u^i} X^i \quad \Leftrightarrow \quad Y = JX. \tag{1.5}$$

1.4 Коммутатор

Для матриц известен коммутатор вида
$$[A, B] = AB - BA.$$
Аналогично для дифференцирования
$$[\partial_X, \partial_Y]\, f = \partial_X \partial_Y f - \partial_Y \partial_X f = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}\left(Y^j \frac{\partial f}{\partial u^j}\right) - Y^j \frac{\partial}{\partial u^j}\left(X^i \frac{\partial f}{\partial u^i}\right) = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i}\frac{\partial f}{\partial u^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial u^j}\frac{\partial f}{\partial u^j}$$
Таким образом
$$[\partial_X, \partial_Y]\, f = \left[X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial x^j}{\partial u^i}\right] \frac{\partial f}{\partial u^i}. \tag{1.6}$$
Это, как ни странно, дифференциальный оператор первого порядка. Это значит что есть такое векторное поле $[X, Y]$, что
$$\partial_{[X,Y]} = [\partial_X, \partial_Y]\, f.$$
Таким образом $[X, Y]$ существует и равен
$$[X, Y] = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial x^j}{\partial u^i}. \tag{1.7}$$

2 Лекция № 2

2.1 Обратный образ

Пусть
$$X^n \xrightarrow{F} X^k \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}.$$
Или можем рассмотреть отображение
$$X^n \xrightarrow{F^*\varphi} \mathbb{R}, \quad \text{где} \quad F^*\varphi \overset{\text{def}}{=} \varphi \circ F,$$
что и является обратным образом.

Пусть теперь $P \in X^n$ отображается в $F(P) \in X^k$. Пусть $W(P) \in X^n$, постороим $d_p F(W)$ – вектор $F(P) \in X^k$. Пусть $\varphi \in C^\infty(X^k)$, тогда
$$\underbrace{d_P F(W)}_{\text{вектор}}\ \varphi \overset{\text{def}}{=} W(F^*\varphi). \tag{2.1}$$

Def 2.1. $d_P F$ – *дифференциал* F в точке P.

Пусть $\varphi \circ \Psi = \varphi(v^1, \ldots, v^k)$ в координатах $v^1, \ldots, v^k$. Тогда
$$F^*\varphi = \varphi(F) \quad \Rightarrow \quad F^*\varphi(u^1, \ldots, u^k) = \underbrace{\varphi(v^1(u^1, \ldots, u^n), \ldots, v^k(u^1, \ldots, u^n))}_{F^*\varphi \text{ в координатах } u^1, \ldots, u^n} = \varphi \circ F \circ \Phi,$$

[1] «В Царство небесное войдут только те кто думают про вектор, как про дифференцирование, потому что там нет координат.»

где Φ – координатное отображение. Теперь вектор W

$$W = W^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \ldots + W^n \frac{\partial}{\partial u^n} = W^i \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

Соответсвенно, по определению

$$d_P F(W)\ \varphi \overset{\text{def}}{=} W F^* \varphi, \tag{2.2}$$

расписывая, получим

$$W F^* \varphi = W^i \frac{\partial}{\partial u^i} \varphi(v^1(u^1, \ldots, u^n), \ldots) = W^i \frac{\partial \varphi}{\partial v^j} \frac{\partial v^j}{\partial u^i} = \underbrace{\frac{\partial v^j}{\partial u^i} W^i \frac{\partial}{\partial v^j}}_{d_p F(W)}\ \varphi.$$

А это кто? А вот матрица Якоби F, записанного в координатах $v^1, \ldots, v^k$

$$\begin{bmatrix} d_P F(W)^1 \\ \vdots \\ d_P F(W)^k \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & \dfrac{\partial v^j}{\partial u^i} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^1 \\ \vdots \\ W^n \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Тогда выясняется, что $d_P F$ – линейное отображение. Действительно,

$$d_P F(W_1 + W_2)\varphi = (W_1 + W_2) F^* \varphi = W_1 D^* \varphi + W_2 F^* \varphi = (d_P F(W_1) + d_P F(W_2))\, \varphi.$$

2.2 Тензор

Есть пространство V с векторами и двойственное V^* с ковекторами, пространство линейных функций. Тогда $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ – базис в V, $\boldsymbol{e}^1, \ldots, \boldsymbol{e}^n$ – двойственный базис в V^*, т.е. $\boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}_j = \delta^i_j$.

Для начала скажем, что W – вектор и он же линейная функция на ковекторах.

$$W(\xi) = \xi(W) = \langle W, \xi \rangle,$$

что называется спариванием вектора и ковектора.

Пусть есть некоторая $B(W, Y)$ – билинейная функция от двух векторов. А теперь посмотрим на линейный оператор $A \colon V \to V$, билинейную функцию от вектора и ковектора.

$$A(W, \xi) = \langle A(W), \xi \rangle$$

Обобщим до понятия тензора:

$$T \colon \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{p} \otimes \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{q} \to \mathbb{R},$$

где T полилинейная функция от p ковекторов и q векторов, тензор типа p, q. Они образуют линейное пространство

$$T \in \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{q} = \mathbb{T}^p_q(V).$$

3 Лекция № 3

3.1 Дифференциальная форма

В линейной алгебре есть ковекторы, а вот в дифференциальной геометрии ковекторные поля суть дифференциальные 1-формы.

Def 3.1. *Дифференциальная 1-форма* – это ковекторное поле.

Def 3.2. *Дифференциал* функции f от векторного поля X это $df(X) \overset{\text{def}}{=} Xf$.

Что это нам даёт? Ну, во-первых, пусть $x^1, \ldots, x^n$ – некоторые координаты.

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Тогда

$$df(X) = Xf = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Но, заметим, что $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ – базис в каждой точке. Рассмотрим теперь $f = x^i$ и $X = \frac{\partial}{\partial x^j}$, тогда

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j. \tag{3.1}$$

Из этого следует, что $dx^1, \ldots, dx^n$ – двойственный к $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ базис в V^*. Тогда в этом базисе

$$df = \omega_i\, dx^i.$$

Заметим, что

$$\underbrace{\omega_i\, dx^i}_{df} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \omega_i \delta^i_j = \omega_j, \qquad \Rightarrow \qquad \omega_j = df \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Тогда

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i. \tag{3.2}$$

Получается ковектор df расписывается по базису dx^i двойственного пространства с координатами $\partial f / \partial x^i$.

А для общей 1-формы

$$\omega = \omega_i\, dx^i,$$

где $\omega^1, \ldots, \omega^n$ – координаты ω в локальной системе координат.

Def 3.3. ω гладкая, если $\forall X$, где X – гладкое поле, верно, что $\omega(X)$ – гладкая функция.

Lem 3.4. *$\omega = \omega_i\, dx^i$ – гладкая $\Leftrightarrow$ ω_i – гладкая форма $\forall i$.*

3.2 Билинейные формы

Пространство билинейных форм на V – $V^* \otimes V^* = S^2 V^* \oplus \Lambda^2 V^*$. Что ж, в $V*$ базис $\boldsymbol{e}^1, \ldots, \boldsymbol{e}^n$, в $S^2 V^*$ базис

$$e^i \cdot e^j (X, Y) = \frac{1}{2} \left(X^i Y^j + X^j Y^i \right),$$

а скалярное произведение

$$g = g_{ij} dx^i \cdot dx^j.$$

В кососимметрических же $\Lambda^2 V^*$ базис

$$e^i \wedge e^j (X, Y) = X^i Y^j - X^j Y^i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n. \tag{3.3}$$

В таком случае, если есть некоторая кососимметрическая ω, то

$$\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij}\, dx^i \wedge dx^j.$$

Def 3.5. Поле кососимметрических билинейных форм – дифференциальные 2-формы.

Возьмём два поля и засунем в 2-форму, получим функцию.

3.3 Полилинейные формы

Пусть V – векторное пространство, $\Lambda^k V^k$ – векторное пространство кососимметрических полилинейных функций от k векторов.

$$\omega\left(X_1, \ldots, X_k \right) \in \mathbb{R}.$$

Введём некоторое внешнее умножение

$$\wedge \colon \Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \to \Lambda^{k+l} V^*.$$

Пусть $\sigma \in \Lambda^k V^*$, $\tau \in \Lambda^l V^*$, тогда

$$\sigma \wedge \tau \left(X_1, \ldots, X_{k+l} \right) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_{k+l}} \operatorname{sign}(\pi)\ \sigma \left(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(k)} \right)\ \tau \left(X_{\pi(k+1)}, \ldots, X_{\pi(k+l)} \right).$$

Если в V базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, то в $\Lambda^k V$ в качестве базиса можно взять

$$e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}, \qquad i_1 < \ldots < i_k.$$

Def 3.6. Дифференциальная k-форма – поле полилинейных кососимметрических форм от k векторов, причем

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1, \ldots, i_k} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}, \tag{3.4}$$

где $\omega_{i_1, \ldots, i_k} = \omega\left(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_k}\right)$ – гладкие функции..

3.4 Внешний дифференциал

Обозначим $\Omega^k(U)$ – пространство дифференциальных k-форм на некоторой $U \in \mathbb{A}^n$. Также будем говорить, что $X^\infty(U) = \Omega^0(u)$ – 0-формы. У нас уже есть такое отображение

$$\Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{?} \ldots$$

Ну и введём тогда операцию внешнего дифференцирования

$$d \colon \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U). \tag{3.5}$$

Введём её аксиоматически[2]

$$\begin{aligned}
&1) \quad d\left(\omega_1 + \omega_2\right) = d\omega_1 + d\omega_2; \\
&2) \quad d(\sigma \wedge \tau) = (d\sigma) \wedge \tau + (-1)^{|\sigma|} \sigma \wedge (d\tau); \\
&3) \quad d^2 = 0, \ \text{т.е. } d(d\omega) = 0; \\
&4) \quad f \in \Omega^0(U) = C^\infty(U) \ \Rightarrow \ df(X) = Xf.
\end{aligned}$$

Thr 3.7. *Внешний дифференциал d существует и единственнен.*

$\triangle$.

I. Пусть существует внешний дифференциал. Тогда получим, что

$$d\omega = d\left(\sum_{i_1 < \ldots < i_k} \omega_{i_1, \ldots, i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \frac{\partial \omega_{i_1, \ldots, i_k}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}. \tag{3.6}$$

Собственно, подобный ответ является единственным.

II. Докажем теперь существование. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ – координаты, тогда определим d, как (3.6). Легко показать, что такое определение удоволетворяет всем свойствам.

$\square$

4 Лекция № 4

4.1 Обращение с обратным образом (?)

На данный момент у нас есть отображения для $U \in \mathbb{R}^n$ и $V \in \mathbb{R}^k$, считая $U \xrightarrow{F} V$

$$C^\infty(U) \xleftarrow{F^*} C^\infty(V) \qquad\qquad U \xrightarrow{F} V \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

$$T_P U \xrightarrow{d_P F} T_{F(P)} V \qquad\qquad U \xrightarrow{F^*\varphi} \mathbb{R}, \quad \text{где} \quad F^*\varphi \overset{\text{def}}{=} \varphi \circ F,$$

$$\overbrace{d_P F \underbrace{X}_{\in T_P U}}^{\in T_{F(P)} V} \underbrace{\varphi}_{\in C^\infty(V)} = X \underbrace{F^*\varphi}_{\in C^\infty(U)}. \tag{4.1}$$

С формами ситуация схожая с функциями, то есть

$$C^\infty(V) = \Gamma^0(V),$$

получается

$$\Omega^k(U) \xleftarrow{F^*} \Omega^k(V),$$

$$T_U U \xrightarrow{d_P F} T_{F(P)}(V).$$

Теперь пусть $X_1, \ldots, X_k$ – векторное поле на U, тогда

$$(F^*\omega)(X_1, \ldots, X_k) = \omega\left(dF(X_1), \ldots, dF(X_k)\right).$$

[2] Формы образуют градуированную алгебру. Это такой эмпирический факт: в градуированной алгебре дифференциал должен быть с таким знаком и счастье будет.

Собственно, факт:

$$dF^*\omega = F^*\,d\omega. \tag{4.2}$$

И ещё факт

$$F^*(\sigma\wedge\tau) = F^*\sigma\wedge F^*\tau. \tag{4.3}$$

4.2 Кривые

Кривые должны быть гладкими, но этого недостаточно. Поэтому требуем и *регулярность*:

$$\forall x, y\colon F(x,y)=0 \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) \neq (0,0), \tag{4.4}$$

а в параметрическом задание

$$\forall t\in(a,b) \qquad \dot{\boldsymbol{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \neq (0,0). \tag{4.5}$$

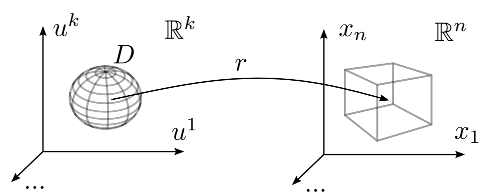
Пусть $F(x,y)=0$ – регулярная гладкая неявно заданная кривая. Тогда в окрестности любой своей точки её можно задать как регулярную гладкую параметрическую кривую. В самом деле,

$$F(x_0,y_0)=0, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)} \neq 0\right), \qquad \Rightarrow \qquad \exists \varphi\in U(x_0,y_0)\colon F(x,y)\Leftrightarrow x=\varphi(y).$$

А вот пусть теперь есть гладкая регулярная параметризованная регулярная кривая $(x,y)(t)\colon (\dot{x},\dot{y})\neq 0$. Пусть $\dot{x}\neq 0$, тогда по тереме об обратной функции $t=t(x)$.

4.3 Явно заданные поверхности

Регулярная (не особая) гладкая k-мерна поверхность в n-мерном афинном пространстве, заданная параметрически.



Формально,

$$r\colon D\in\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n, \qquad \text{при чем} \qquad \begin{cases} 1)\ \text{гладкость:} & \boldsymbol{r}\equiv[x^1(u^1,\ldots,u^k),\ldots,x^n(u^1,\ldots,u^k)] \\ 2)\ \text{регуярность:} & \operatorname{rg}(\partial x^i/\partial u^j)=k. \end{cases}$$

где подразумевается $r\in C^\infty(D,\mathbb{R}^n)$. Регулярность же, по сути, это утверждение о том что в J существует невырожденный минор $k\times k$.

Пусть это $(\partial x^i/\partial u^j)$, где $i,j=1,\ldots,k$. Тогда, по теореме об обратной функции, в окрестности этой точки

$$\begin{aligned} u^1 &= u^1(x^1,\ldots,x^k) \\ &\ldots \\ u^k &= u^k(x^1,\ldots,x^k). \end{aligned}$$

Тогда, это просто график отображения

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^{k+1}(u^1(x^1,\ldots,x^k),\ldots,u^k\left(x_1,\ldots,x^k\right)) \\ &\ldots \\ x^n &= x^n(u^1(x^1,\ldots,x^k),\ldots,u^k\left(x_1,\ldots,x^k\right)) \end{aligned}$$

такого, что

$$\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^{n-k}$$

Так, например, для сферы, можно выразить $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

4.4 Неявно заданные поверхности

Гладкая регулярная k-мерная поверхность в n-мерном афинном пространстве, заданная неявно. Тогда есть $n-k$ уравнений

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \ldots \\ F^{n-k}(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{F} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}, \quad \boldsymbol{F} = 0.$$

Аналогично мы требуем гладкость: $F^i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, и регулярность в тех точках, где $\boldsymbol{F} = 0$. Условие регулярности в таком случае

$$\operatorname{rg}\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right) = n - k. \tag{4.6}$$

Lem 4.1. *Гладкая регулярная неявно заданная поверхность, может рассматриваться, как параметрическая.*

$\triangle$.

I. Пусть в точке P
$$\operatorname{rg}\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right) = n - k.$$

II. Тогда можем считать, что есть невырожденный минор $\operatorname{rg}\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right)(P)$, где $i = 1, \ldots, n-k$ и $j = k+1, \ldots, n$.

III. По теореме о неявной функции
$$\begin{cases} x^{k+1} = x^{k+1}(x^1, \ldots, x^k) \\ \ldots \\ x^n = x^n(x^1, \ldots, x^k) \end{cases} \quad \text{— гладкие.}$$

IV. Тогда понятно, как утроен параметрический вид:
$$\left.\begin{aligned} x^1 &= u^1 \\ &\ldots \\ x^k &= u^k \\ x^{k+1} &= x^{k+1}(u^1, \ldots, u^k) \\ &\ldots \\ x^n &= x^n(u^1, \ldots, u^k) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad J = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 \\ & * & \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{rg} J = k.$$

$\square$

Def 4.2. Назовем $x^1, \ldots, x^n$ *координатами объемлющего пространства*, а $u^1, \ldots, u^k$ *локальными координатами.*

4.5 Гладкие функции и пути на поверхности

Функции

Def 4.3. Пусть есть гладкая функция $F(x^1, \ldots, x^n)$ – гладкая в окрестности Σ, тогда $F\big|_\Sigma$ – *гладкая* на поверхности Σ.

Def 4.4. Пусть $f(u^1, \ldots, u^k)$ – гладкая, тогда f – гладкая функция на Σ.

Докажем равносильность двух следующих определений.

$\triangle$. $\Rightarrow$ Пусть $F(x^1, \ldots, x^n)$ – гладкая, тогда и $F(x^1(u^1, \ldots, u^k), \ldots, x^n(u^1, \ldots, u^k))$ – гладкая.

$\Leftarrow$ Пусть есть $f(u^1, \ldots, u^k)$ – гладкая, тогда и $f(u^1(x^1, \ldots, x^k), \ldots, u^k(x^1, \ldots, x^k))$ – тоже гладкая.

$\square$

Пути

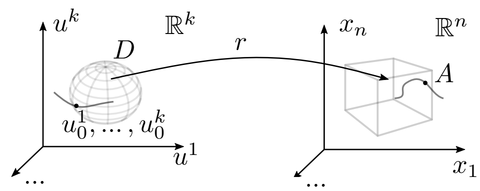
Def 4.5. Путь $\boldsymbol{r}(u^1(t), \ldots, u^k(t))$ гладкий, если u^i – гладкие.

Def 4.6. Если $x^1(t), \ldots, x^n(t)$ – гладкие, такие что $[x^1(t), \ldots, x^n(t)] \in \Sigma$, то и путь $\boldsymbol{r}$ гладкий.

Эти определения равносильны. Получается, что пути можно описывать как в глобальных, так и в локальных координатах. Далее ограничимся рассмотрением путей в локальных координатах, `ничего при этом не потеряв`.

4.6 Векторы на поверхности

Точка A имеет локальные координаты ${u_0}^1, \ldots, {u_0}^k$, то есть $A = \boldsymbol{r}({u_0}^1, \ldots, {u_0}^k)$.



Если мы посмотрим на путь точки A, то увидим (считая, что в $t = 0$ $\boldsymbol{r} = A$).

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(u^1, \ldots, u^k)(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = r_{u^i}(u^1(t), \ldots, u^k(t)) \cdot \dot{u}^i(t).$$

где подразумевается, что

$$r_{u^i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u^i} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^i}, \ldots, \frac{\partial x^n}{\partial u^i} \right).$$

При $t = 0$, увидим

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=0} = \underbrace{r_{u^i}({u_0}^1, \ldots, {u_0}^k)}_{\text{векторы}} \underbrace{\dot{u}^i(0)}_{\text{числа}},$$

где векторы зависят только от точки A, а числа зависят от конкретной кривой. Получается, что есть некоторые пространство, порожденное этими векторами.

Def 4.7. Назовём *касательным пространством* к Σ в точке A

$$T_A\Sigma = \operatorname{span}\left(r_{u^1}(A), \ldots, r_{u^k}(A) \right).$$

Пусть есть некоторый вектор $\boldsymbol{V}$

$$\boldsymbol{V} = \alpha^i r_{u^i}(A).$$

Он может быть получен кривой $u^i = u_0^1 + \alpha^1 t$. Получается, что $T_A\Sigma$ состоит в точности из векторов скорости кривых в точке A.

Lem 4.8. *Размерность* $\dim T_A\Sigma = k$.

$\triangle$. Действительно, по условию регулярности

$$\operatorname{rg}(r_{u^i}) = \operatorname{rg}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j} \right) \overset{\text{reg}}{=} k.$$

`В этом и состоит геометрический смысл условия регулярности.` $\square$

4.7 Замена локальных координат

С одной стороны понятно, что множество всех кривых на поверхности D инвариантно. С другой стороны интересно посмотреть, что же происходит с векторами.

$$\begin{cases} v^1 = v^1(x^1(u^1, \ldots, u^k), \ldots, x^k(u^1, \ldots, u^k)) \\ \ldots \\ v^k = v^k(x^1(u^1, \ldots, u^k), \ldots, x^k(u^1, \ldots, u^k)) \end{cases} \quad — \quad \text{диффеоморфизм.}$$

Действительно, Якобиан композиции равен произведению Якобианов, получается композия двух невырожденных преобразований будет невырождена.

$$r_{u^i} = \frac{\partial r}{\partial v^j}\frac{\partial v^j}{\partial u^i} = \underbrace{\frac{\partial v^j}{\partial u^i}}_{J} r_{v^i},$$

получается, что матрица перехода от базиса r_{v^j} к r_{u^i} – матрица Якоби J замены координат.

$$\forall V \in T_A\Sigma \qquad V = V^i r_{v^i} = \underbrace{V^i \frac{\partial r^j}{\partial u^i}}_{\widetilde{V}^j} r_{v^j}.$$

Тогда

$$V = \widetilde{V}^j r_{v^j} \qquad \Rightarrow \qquad \widetilde{V}^j = \frac{\partial v^j}{\partial u^i} V^i. \tag{4.7}$$

Оказывается, что если

$$\begin{pmatrix} \widetilde{V}^1 \\ \dots \\ \widetilde{V}^k \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial v^j}{\partial u^i}\right)_{(A)} \begin{pmatrix} V^1 \\ \dots \\ V^k \end{pmatrix}.$$

5 Лекция № 5

5.1 Производная по направлению

Раньше определили

$$\partial_V f(A) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(A+\varepsilon V) - f(A)}{\varepsilon},$$

но сложность в том, что $A+\varepsilon V \notin \Sigma$. Но гладкую функцию с поверхности может всегда продлить в некоторую окрестность поверхности. Это продолжение F не единственно.

Def 5.1. Определим

$$\partial_V f(A) \overset{\text{def}}{=} \partial_V F(A),$$

при чём def инвариантно к выбору F.

$\triangle$.

I. Мы дифференцируем только вдоль касательных векторов к Σ, следовательно существует кривая γ на Σ такая, что

$$1)\ \forall t\ \gamma(t) \in \Sigma$$
$$2)\ \gamma(0) = A$$
$$3)\ \ddot{\gamma}(0) = V.$$

II. Тогда

$$\underbrace{\frac{d}{dt}f(\gamma(t))\Big|_{t=0}}_{*} = \frac{d}{dt}F(\gamma(t))\Big|_{t=0} = \frac{\partial F}{\partial x^i}(x^1,\dots,x^n)\dot{x}^i(t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial F}{\partial x^i}(A)V^i = \underbrace{\partial_V F(A)}_{**},$$

считая $\gamma(t) = [x^1(t),\dots,x^n(t)]$.

III. Но, т.к. $*$ не зависит от выбора F, то и $**$ не зависит от выбора F. Тогда $\partial_V f(A)$ определена корректно.

IV. К слову, $**$ не зависит от выбора пути, тогда и $*$ не зависит от выбора пути.

$\square$

Получается мы можем определить понятие дифференцирования гладкой функции на поверхности в точке.

Def 5.2. Для $f\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ достаточно быть определенной в некоторой окрестности точки A. Скажем, что D –

дифференцирование на Σ в точкеA, если

$$\begin{aligned}&1)\ Df \in \mathbb{R}\\&2)\ D(f+g) = Df + Dg\\&3)\ D(fg) = (Df)\cdot g(A) + f(A)\cdot(Dg).\end{aligned}$$

Пусть $u^1, \dots, u^k$ – локальные координаты в окрестности точки A.

Lem 5.3. *Для* $\forall D\ \exists V^1, \dots, V^K$ *такой, что*

$$Df = \frac{\partial f}{\partial u^i}(A)V^i.$$

Пусть есть некоторый касательный вектор $W \in T_A\Sigma$

$$W = W^i r_{u^i}(A).$$

Тогда можно рассматривать путь $\gamma(t)$ в локальных координатах такой, что $\gamma(0) = A,\ \dot\gamma(0) = W$, то есть для $A = ({u_0}^1, \dots, {u_0}^k)$ и $\gamma(t) = \big[u^1(t), \dots, u^k(t)\big]$ верно, что

$$u^i(0) = u_0^i, \qquad \dot u^i(0) = W^i.$$

Тогда

$$\partial_W f(A) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\bigg|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial u^i}(A)\ W^i.$$

Получается, что **каждый** касательный вектор W даёт дифференцирование $\partial_W\big|_A$, и **каждое** дифференцирование в A получается из касательного вектора. Поэтому будем писать просто

$$\boxed{W = \partial_W = W^i \frac{\partial}{\partial u^i}.} \tag{5.1}$$

5.2 Двойственность

Раз есть касательные векторы, то есть и кососимметрические полилинейные функии на них. Так приходим к следующей двойственной структуре:

· $T_P\Sigma$ – *касательное пространство* к Σ в P,

· $T_P^*\Sigma \overset{\text{def}}{=} (T_P\Sigma)^*$ – *кокасательное пространство* к Σ в P.

Получаются векторное поле X: $X(P) \in T_P\Sigma$, и ковекторное поле ξ: $\xi(P) \in T_P^*\Sigma$.

Если $u^1, \dots, u^k$ – локальные координаты на Σ, то

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = r_{u^i} \quad — \quad \text{базис в } T_P\Sigma.$$

Соответственно,

$$du^1, \dots, du^k \quad — \quad \text{базис в } T_P^*\Sigma.$$

А вот

$$\underset{i_1 < \dots < i_q}{du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_q}} \quad — \quad \text{базис в } \Lambda^q T_P^*\Sigma,$$

где $\Lambda^q T_P^*\Sigma$ – пространство q-форм.

8 Лекция № 8

Мы знаем, что такое $\partial_X f$ – определенная на аффинном протсранстве, поверхности и многообразии. Рассмотрим

$$\partial_X Y(A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{Y(A+\varepsilon X) - Y(A)}{\varepsilon},$$

что работает в аффинном пространстве или для касательных x на поверхностях в аффинном пространстве (для касательного X).

Например, когда

$$Y = (Y^1, \dots, Y^n)^{\mathrm{T}}, \qquad (\partial_X Y)^i = \partial_X Y^i = X^i \frac{\partial Y^i}{\partial x^i}.$$

Con 8.1. Если $X,\ Y$ – векторные поля в аффинном пространстве, то

$$[X, Y] = \partial_X Y - \partial_Y X.$$

$\triangle$. Т.к.

$$[X,Y]^i = X^i \frac{\partial Y^i}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^i}{\partial x^i}.$$

$\square$

Lem 8.2. *Если X, Y – касательные векторные поля на $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, то $[X,Y]$ – тоже касательное векторное поле.*

Размерность $\dim T_A\Sigma = \dim \Sigma = k$, нормальное пространство $N_A\Sigma = (T_A\Sigma)^\perp$, тогда $\dim N_A\Sigma = n-k$. Пусть есть вектор V, тогда $V = P(V) + (\mathrm{id} - P)(V)$, где P – ортогональный проектор на касательное пространство $T_A\Sigma$

$$P_A \colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \tag{8.1}$$

который гладко зависит от точки A, т.к. $r_{u^1}, \dots, r_{u^k}$ гладко зависят от A, но этот базис можем привести к ОНБ, гладкими преобразованиями.

Lem 8.3. *P – гладкое поле операторов.*

8.1 Деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена

Y – касательное векторное поле, ξ – нормальное векторное поле, X – касательный вектор (в точке A).

$$\partial_X Y = \underbrace{P(\partial_X Y)}_{\nabla_X Y} + \underbrace{(\mathrm{id} - P)(\partial_X Y)}_{B(X,Y)} \tag{8.2}$$

$$\partial_X \xi = \underbrace{P(\delta_X \xi)}_{-W_\xi(X)} + \underbrace{(\mathrm{id} - P)(\partial_X \xi)}_{\nabla_X^{N\Sigma}\xi} \tag{8.3}$$

Def 8.4. Далее $\Gamma(T\Sigma)$ – *множество касательных векторных полей* на Σ, а $\Gamma(N\Sigma)$ – *множество нормальных векторным полей* (на Σ).

8.2 Вторая квадратичная форма

Def 8.5. *Вторая квадратичная форма $B(X,Y) = (\mathrm{id} - P)(\partial_X Y)$.*

В частности, её свойства:

$$\begin{aligned}
\text{I)} &\quad B \colon T_A\Sigma \times \Gamma(T\Sigma) \mapsto N_A\Sigma;\\
\text{II)} &\quad \text{при } X \in \Gamma(T\Sigma) \quad B \colon \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(T\Sigma) \mapsto \Gamma(N\Sigma);\\
\text{III)} &\quad B \text{ линейна по } X;\\
\text{IV)} &\quad X, Y \in \Gamma(T\Sigma) \quad \Rightarrow \quad B(X,Y) = B(Y,X);\\
\text{V)} &\quad B(X,Y)(A) \text{ зависит только от } X(A) \text{ и } Y(A).;\\
\text{VI)} &\quad B \colon T_A\Sigma \times T_A\Sigma \mapsto N_A\Sigma.;\\
\text{VII)} &\quad B(X,Y) \text{ линейна по } Y.
\end{aligned}$$

$\triangle_{IV}$.

$$B(X,Y) - B(Y,X) = (\mathrm{id} - P)\left(\partial_X Y - \partial_Y\right) = (\mathrm{id} - P)\underbrace{\left([X,Y]\right)}_{\text{касат. поле}} = 0$$

$\square$

Lem 8.6. *B – симметрическая билинейная форма со значениями в нормальном векторном пространстве.*

Пусть $e_1, \dots, e_k$ – базис в касательных векторных полях. Т.е. это такие векторные поля, что в любой точке A векторы $e_1(A), \dots, e_k(A)$ – базис в $T_A\Sigma$. Аналогично пусть $\eta_1, \dots, \eta_{n-k}$ – базис в нормальных векторных полях.

$$\begin{aligned}
X &= X^i e_i, & i &= 1, \dots, k\\
Y &= Y^j e_j & j &= 1, \dots, k\\
B(X,Y) &= B(X^i e_i, Y^j e_j) = X^i Y^j \underbrace{B(e_i, e_j)}_{\text{н. в. поле}} = X^i Y^j b_{ij}^\nu \eta_\nu, & \nu &= 1, \dots, n-k
\end{aligned}$$

где b_{ij}^k – *локальные коэффициенты B.*

8.3 Ковариантная производная и связность

Def 8.7. *Связностью в касательном расслоении к поверхности* назовём ∇. *Ковариантной производной* Y вдоль X в касательном расслоении к поверхности назовём

$$\nabla_X Y = P(\partial_X Y). \tag{8.4}$$

Что оно деает? Во-первых

$$\nabla \colon T_A\Sigma \times \Gamma(T\Sigma) \mapsto T_A\Sigma,$$

или, если X – касательное поле, то

$$\nabla \colon \Gamma(T\Sigma) \times \Gamma(T\Sigma) \mapsto \Gamma(T\Sigma).$$

Во-вторых $\nabla_X Y$ линейна X, т.е.

$$\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y,$$
$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$$

А ещё линейная по Y

$$\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2.$$

Также верно тождество Лейбница.

$$\nabla_X (fY) = \partial_X f Y + f \partial_X Y. \tag{8.5}$$

Действительно,

$$\nabla_X (fY) = P(\partial_X (fY)) = P(\partial_X f Y + f \partial_X Y).$$

Также верна симметричность

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]\,. \tag{8.6}$$

В силу того, что

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = P([X,Y]) = [X,Y].$$

И последнее,

$$\partial_X \left(Y,\ Z\right) = \left(\partial_X Y,\ Z\right) + \left(Y,\ \partial_X Z\right).$$

Хорошо.

В координатах $X = X^i e_i,\ YY^j e_j$, где $i, j = 1, \ldots, k$.

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i e_i} (Y^j e_j) = X^i \nabla_{e_i} \left(Y^j e_j\right) = X^i \left(\left(\partial_{e_i} Y^j\right) e_j + Y^j \overbrace{\nabla_{e_i} e_j}^{\Gamma^l_{ij} e_l} \right) = X^i \left(\partial_{e_i} Y^l + Y^j \Gamma^l_{ij}\right) e_l$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\left(\nabla_X Y\right)^l = X^i \left(\partial_{e_i} Y^l + Y^j \Gamma^l_{ij}\right)}$$

Если мы выберем базис (голономный базис), который состоит из

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, \ldots, e_k = \frac{\partial}{\partial u^k},$$

то

$$\left(\nabla_X Y\right)^l = X^i \left(\frac{\partial Y^l}{\partial u^i} + Y^j \Gamma^l_{ij} \right).$$

Def 8.8. Γ^l_{ij} – символ Кристофеля, коэффициенты разложения ковариантной производной координатных векторов ∂_i по базису $\nabla_{\partial_j} \partial_i = \Gamma^k_{ij} \partial_k$.

Def 8.9. Назовем $\nabla^{N\Sigma}$ *связностью в нормальном расслоении к поверхности*, а

$$\nabla^{N\Sigma}_X \xi \equiv \nabla_X \xi = \left(\mathrm{id} - P\right) \left(\partial_X \xi\right), \tag{8.7}$$

ковариантной производной ξ вдоль X в нормальном расслоении.

Как это работает?

$$\nabla^{N\Sigma} \colon T_A\Sigma \times \Gamma(N\Sigma) \mapsto N_A\Sigma;$$
$$\nabla^{N\Sigma} \colon \Gamma(N\Sigma) \times \Gamma(N\Sigma) \mapsto \Gamma(N\Sigma).$$

Аналогично раннему, это производная линейная по первому и второму аргументу, работает тождество Лейбница, согласовано с метрикой – всё хорошо. Но оно не симметрично!

В координатах $X = X^i e_i$ с $i = 1, \dots, k$ и $\xi = \xi^\nu \eta_\nu$ с $\nu = 1, \dots, n-k$. Тогда

$$\nabla_X^{N\Sigma} = X^i \left((\partial_{e_i} \xi^\nu)\, \eta_\nu + \xi^\nu \overbrace{\nabla_{e_i}^{N\Sigma} \eta_\nu}^{K^\mu_{i\nu}\eta_\mu} \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla_X^{N\Sigma} = X^i \left(\partial_{e_i} \xi^\mu + \xi^\nu K^\mu_{i\nu}\right) \eta_\mu}.$$

Def 8.10. $K^\mu_{i\nu}$ – *локальные коэффициенты связности* в нормальном расслоении.

8.4 Оператор Вейнгартена (Shape operator)

Def 8.11. Оператор Вейнгартена – $W_\xi(X) = -P(\partial_X \xi)$.

Что он делает?

$$W \colon \Gamma(N\Sigma) \times T_A\Sigma \to T_A\Sigma.$$

В частности

$$(W_\xi(X),\ Y) = (B(X,Y),\ \xi)\,.$$

△. ... □

К слову, $W_X \xi(A)$ зависит только от $\xi(A)$ и $X(A)$, т.е.

$$W \colon N_A\Sigma \times T_A\Sigma \mapsto T_A\Sigma,$$

но если зафиксировать ξ, то

$$W_\xi \colon T_A\Sigma \mapsto T_A\Sigma.$$

Можно это всё расписать в координатах.

$$W_\xi(X) = X^i \xi^\nu \omega^j_{\nu i} e_j.$$

Подставив в $(W_\xi(X),\ Y) = (B(X,Y),\ \xi)$, считая $X = e_i,\ \xi = \eta_\nu,\ Y = e_j$.

$$\omega^l_{\nu i} \underbrace{(e_l,\ e_j)}_{g_{lj}} = b^\mu_{ij} \underbrace{(\eta_\mu, \eta_\nu)}_{g_{\mu\nu}}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega^l_{\nu i} g_{lj} = b^\mu_{ij} g_{\mu\nu} \ \Rightarrow\ \omega^m_{\nu i} = b^\mu_{ij} g_{\mu\nu} g^{jm}.}$$

где g_{lj} – матричный элемент матрицы $I_A = (,)\big|_{T_A\Sigma}$, то есть матрицы первой квадратичной формы, метрики касательного расслоения. А вот $g_{\mu\nu}$ – элемент матрицы $(,)\big|_{N_A\Sigma}$, метрики в нормальном расслоении.

8.5 Другой вариант тех же формул

Пусть $x = e_i,\ Y = e_j, \xi = \eta_\nu$. Тогда

$$\partial_{e_i} e_j = \Gamma^l_{ij} e_l + b^\nu_{ij} \eta_\nu$$
$$\partial_{e_i} \eta_\nu = -b^\mu_{ij} g_{\mu\nu} g^{jm} e_m + K^\mu_{i\nu} \eta_\mu.$$

Плоская кривая в нормальном параметре

10 Лекция № 10

Параллельный перенос на поверхностях – штука непростая. Хотелось бы двигаться в сторону внутренней геометрии и уходить от объемлющего пространства. Есть некоторая наивная идея. Давай возьмём вектор X в точках A и B. Спроецируем X на пространство с помощью $P_B(X)$. Тогда в $\Sigma^k \subset \mathbb{R}^n$ увидим, что длины не сохраняются.

Другой вариант, посмотрим на $\gamma(t) \in \Sigma$ и $Y(t) \in T_{\gamma(t)}\Sigma$. Рассмотрим $Y(t)$ в $\gamma(t)$ и $Y(t), Y(t+\varepsilon)$ в $\gamma(t=\varepsilon)$.

10.1 Определение параллельного поля

Def 10.1. *Поле $Y(t)$ параллельно* вдоль кривой $\gamma(t)$, если

$$\mathrm{P}_{\gamma(t+\varepsilon)}\, Y(t) = Y(t+\varepsilon) + \mathrm{o}(\varepsilon),$$

при $\varepsilon \to 0$.

Пусть $Y(t) \parallel \gamma(t)$.

$$\mathrm{P}_{\gamma(t+\varepsilon)}\, Y(t+\varepsilon) - \mathrm{P}_{\gamma(t+\varepsilon)}\, Y(t) = \mathrm{o}(\varepsilon), \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mathrm{P}_{\gamma(t+\varepsilon)}}_{\mathrm{P}_{\gamma(t)}+\varepsilon Q + o(\varepsilon)} \underbrace{(Y(t+\varepsilon)-Y(t))}_{\varepsilon \frac{dY}{dt}(t)+\mathrm{o}(\varepsilon)} = \mathrm{o}(\varepsilon),$$

раскрыв скобки, приходим к

$$\varepsilon P_{\gamma(t)}\left(\frac{dY}{dt}\right) = \mathrm{o}(\varepsilon), \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}_{\gamma(t)}\left(\frac{dY}{dt}\right) = \mathrm{o}(1), \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{P}_{\gamma(t)}\left(\frac{dY}{dt}\right) = 0.} \tag{10.1}$$

при $\varepsilon \to 0$. Вспомнив, что

$$\frac{df(\gamma(t))}{dt} = \partial_{\dot\gamma} f, \tag{10.2}$$

приходим к

$$\mathrm{P}_{\gamma(t)}\left(\partial_{\dot\gamma} Y\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla_{\dot\gamma} Y = 0}, \tag{10.3}$$

так мы пришли к *уравнению параллельного переноса.*

Пусть $u^1, \ldots, u^k$ – локальные координаты, $\gamma(t) = \left(u^1(t), \ldots, u^k(t)\right)$ – кривая, $\dot\gamma(t) = \left(\dot u^1(t), \ldots, \dot u^k(t)\right)$ – направляющий вектор кривой. Вспомним, что

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial Y^l}{\partial u^i} + Y^j \Gamma^l_{ij}\right) \frac{\partial}{\partial u^l},$$

и подставив $X = \dot\gamma,\ X^i = \dot u^i(t)$

$$\nabla_{\dot\gamma} Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot u^i(t) \frac{\partial Y^l}{\partial u^i} + \dot u^i(t) Y^j \Gamma^l_{ij} = 0, \quad l = 1, \ldots, k$$

Посмотрим чуть подробнее на

$$\frac{\partial Y^l}{\partial u^i} \dot u^i(t) = \frac{\partial Y^l}{\partial u^i}\frac{du^i}{dt} = \frac{dY^l}{dt},$$

таким образом

$$\dot Y^l + \Gamma^l_{ij}\left(u^1(t), \ldots, u^k(t)\right) \dot u^i(t) Y^j(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot Y^l + \Gamma^l_{ij} \dot u^i Y^j = 0. \tag{10.4}$$

Что у нас тут известно? Известны $u^1(t), \ldots, u^k(t)$ – наша кривая γ, известны $\Gamma^l_{ij}(u^1(t), \ldots, u^k(t))$. Неизвестными остаются $Y^1(t), \ldots, Y^k(t)$. Получается система **линейных** дифференциальных уравнений I-го порядка на $Y^1(t), \ldots, Y^k(t)$. Возникает задача Коши:

$$\begin{cases} \dot Y^l + \Gamma^l_{ij} \dot u^i Y^j = 0, & l = 1, \ldots, k \\ Y^l(t_0) = Y^l_0, & l = 1, \ldots, k \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \nabla_{\dot\gamma} Y = 0 \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases} \tag{10.5}$$

Thr 10.2. *Пусть Σ – поверхность, $\gamma(t)$ – кривая на Σ, $Y_0 \in T_{\gamma(t_0)}\Sigma$. Тогда на всей γ существует и единственно параллельное вдоль γ векторное поле $Y(t)$, такое что $Y(t_0) = Y_0$.*

10.2 Определение параллельного переноса

Def 10.3. Результат параллельного переноса касательного в точке A вектора Y_0 в точку B вдоль кривой $\gamma(t)$, такой что $\gamma(t_0) = A,\ \gamma(t_1) = B$, – это вектор $Y(t_1)$ единственного параллельного вдоль $\gamma(t)$ векторного поля $Y(t)$, такого что $Y(t_0) = Y_0$.

$$Y(t_1) = \Pi_{A \overset{\gamma}{\mapsto} B} Y_0$$

Lem 10.4. *При параллельном переносе сохраняются длины и углы.*

$\triangle$. Пусть Y, Z – параллельны вдоль γ. Посмотрим на $\langle Y, Z\rangle(t)$

$$\frac{d}{dt}\langle Y(t), Z(t)\rangle = \partial_{\dot\gamma}\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_{\dot\gamma} \cdot Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_{\dot\gamma} \cdot Z\rangle = 0,$$

в силу того, что Y, Z – параллельные поля. $\square$

В частности, (для петли) $A = \gamma(t_0) = \gamma(t_1)$ верно, что для $\Pi_{A \overset{\gamma}{\mapsto} A} : T_A\Sigma \mapsto T_A\Sigma$ параллельный перенос – ортогональный линейный оператор. В частности, если поверхность ориентируемая, то всё хорошо.

10.3 Другой сюжет

Из линейности

$$Y(t) = \Pi(t) Y_0(t) \quad \Rightarrow \quad Y^l(t) = \Pi^l_m(t) Y^m_0.$$

Подставляя в

$$\begin{cases} \dot{Y}^l + \Gamma^l_{ij}\dot{u}^i Y^j = 0, & l = 1,\dots,k \\ Y^l(t_0) = Y^l_0, & l = 1,\dots,k \end{cases}$$

приходим к

$$\begin{cases} \dot{\Pi}^l_m Y^m_0 + \Gamma^l_{ij}\dot{u}^i \Pi^j_m Y^m_o = 0 \\ \Pi^l_m(t_0) Y^m_o = Y^l_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\Pi}^l_m + \Gamma^l_{ij}\dot{u}^i \Pi^j_m = 0 \\ \Pi^l_m(t_0) = \delta^l_m \end{cases}$$

Так мы пришли к задаче Коши на матрицу оператора параллельного переноса.

Просто решая диффур такого вида придём к

$$\begin{cases} \dot{y}(t) + a(t)y(t) = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_0 \exp\left(-\int_{t_0}^t a(t)\,dt\right). \tag{10.6}$$

Одно трагическое `но` – матрицы не коммутируют. Вот если бы коммутировали, то

$$\Pi(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t \Gamma(\dot{\gamma})\,dt\right),$$

где

$$\Gamma^l_{ij}\dot{u}^i \overset{?}{=} \Gamma^l_j(\dot{\gamma}). \tag{10.7}$$

Вообще решение этой штуки пишется через *мультипликативный интеграл*. Но, в ОНБ, т.к. матрицы из $\mathrm{SO}(2)$ коммутируют, более того кососимметрические матрицы 2×2 тоже коммутируют. `Мораль`: в ОНБ касательных векторных полей на двумерной поверхности верно, что

$$\Pi(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t \Gamma(\dot{\gamma})\,dt\right). \tag{10.8}$$

В лекции №9 выяснили, что

$$d\Gamma^1_2 = \mathrm{K}\underbrace{e^1\wedge e^2}_{dS}.$$

Применим это к петле на двумерие, где Γ кососимметрична

$$\Pi(t_1) = \exp\left[-\int_{t_0}^{t_1}\begin{pmatrix} 0 & \Gamma^1_2(\dot{\gamma}) \\ -\Gamma^1_2(\dot{\gamma}) & 0\end{pmatrix}dt\right] = \exp\begin{pmatrix} 0 & -\int_{t_0}^{t_1}\Gamma^1_2(\dot{\gamma}) \\ +\int_{t_0}^{t_1}\Gamma^1_2(\dot{\gamma}) & 0\end{pmatrix}.$$

Посмотрим теперь на $\Gamma^1_2 = P\,du + Q\,dv$, с учётом формулы Грина

$$\oint_\gamma P\,du + Q\,dv = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right)du\wedge dv \quad \Rightarrow \quad d(P\,du + Q\,dv) = \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right)$$

получим, по (10.9)

$$\int_{t_0}^{t_1}\Gamma^1_2(\dot{\gamma})\,dt = \iint_\Omega d\Gamma^1_2 = \iint_\Omega \mathrm{K}\,dS \quad \Rightarrow \quad \Pi(t_1) = \exp\begin{pmatrix} 0 & \iint_\Omega \mathrm{K}\,dS \\ -\iint_\Omega \mathrm{K}\,dS & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},$$

где $\alpha = \iint_\Omega K\,dS$. Утверждение, которое легко проверить, но не будем

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}. \tag{10.9}$$

Thr 10.5. *При параллельном переносе вдоль границы области Ω на двумерной поверхности вектор поворачивается на угол $\alpha = \iint_\Omega K\,dS$.*

10.4 Геодезические

Нормальная кривизна $k_n = |(\mathrm{id} - \mathrm{P})(\ddot{\gamma})| = |B(\dot{\gamma},\dot{\gamma})|$, где $\dot{} = d/ds$, s – натуральный параметр. Геодезическая кривизна $k_g = |\,\mathrm{P}(\ddot{\gamma})| = |\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}|$. По теореме пифагора $k = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}$, принимая во внимание, что $k_n \equiv k_n(\dot{\gamma})$, то среди всех кривых[3] с заданной касательной прямой, наименьшую имеет такая, у которой геодезическая кривизна $k_g = 0$.

$$k_g = 0 \;\Leftrightarrow\; \|\nabla_{\dot{\gamma}}\| = 0 \;\Leftrightarrow\; \nabla_{\dot{\gamma}} = 0.$$

[3]Это одно из описаний таких кривых, как решения некоторой экстремальной задачи.

Def 10.6. *Уравнение геодезической*

$$\boxed{\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0}, \tag{10.10}$$

а кривая, которая удовлетворяет этому уравнению называется геодезической.

Lem 10.7. *Если $k_n = 0$, то кривая – решение уравнения геодезических при натуральной параметризации.*

Заметим, что $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$, это уравнение напоминает уравнение параллельного переноса, в частности

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot\gamma \text{ параллельно вдоль } \gamma \quad \Rightarrow \quad \|\dot\gamma\| = \mathrm{const}.$$

Def 10.8. Если s – натуральный параметр, то $t = as + b$, где a, b константы, называется *натуральный аффинный параметр.*

Lem 10.9. *Пусть $\gamma(t)$ – решение уравнения геодезических $\nabla_{\gamma'_t}\gamma'_t = 0$. Тогда t – натуральный аффинный параметр.*

△. Если $\nabla_{\gamma'_t}\gamma'_t = 0$, то $\|\gamma'_t\| = \|d\gamma/dt\| = c$, тогда пусть $t = s/c$

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{c}\frac{d\gamma}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \left\|\frac{d\gamma}{ds}\right\| = \left\|\frac{1}{c}\frac{d\gamma}{dt}\right\| = \frac{c}{c} = 1,$$

таким образом $t = s/c$ – аффинный натуральный параметр. □

Lem 10.10. *Пусть $\gamma(t)$ – решение уравнения геодезических $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$. Тогда геодезическая кривизна этой кривой $k_g = 0$.*

△. ... □

Таким образом геодезические – это в точности кривые с $k_g = 0$ в различных аффинных натуральных параметризациях.

Теперь вспомним, что $\nabla_{\dot\gamma}Y = 0 \Leftrightarrow \dot Y^l + \Gamma^l_{ij}\dot u^i Y^j = 0$. Посмотрим теперь на $\nabla_{\gamma'_t}\gamma'_t = 0$, то есть подставим вместо $Y = \dot\gamma \Rightarrow Y^l = \dot u^l \Rightarrow \dot Y^l = \ddot u^l$:

$$\ddot u^l + \Gamma^l_{ij}\dot u^i \dot u^j = 0, \qquad l = 1, \ldots, k \tag{10.11}$$

это *уравнения геодезических в координатах*, система **нелинейных** ОДУ II-го порядка на неизвестные (неизвестна кривая) $u^1(t), \ldots, u^k(t)$. Точнее

$$\ddot u^l(t) + \underbrace{\Gamma^l_{ij}(u^1(t), \ldots, u^k(t))}_{\text{нелинейная вещь}}\dot u^i(t)\dot u^j(t) = 0, \qquad l = 1, \ldots, k$$

11 Лекция № 11

11.1 Уравнение Гаусса-Бине