

Автор: Хоружий Кирилл

От: 28 ноября 2020 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>✗ Криволинейные координаты</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Кинематика точки</b>	<b>3</b>
2.1	Естественный трёхгранник	3
2.2	Компоненты скорости и ускорения	3
<b>3</b>	<b>Кинематика твердого тела</b>	<b>3</b>
3.1	Углы Эйлера	3
3.2	Основные теоремы о конечных перемещениях твёрдого тела	4
3.3	Скорости и ускорения точек твердого тела в общем случае движения	4
3.4	(-) Частные случаи.	5
3.5	Кинематические инварианты и кинематический винт	5
<b>4</b>	<b>Сложное движение точки и твёрдого тела</b>	<b>5</b>
4.1	Сложение скоростей и ускорений	5
4.2	Главный момент и главный вектор	6
4.3	Общие основания кинематики системы	6
<b>5</b>	<b>Основные теоремы динамики</b>	<b>8</b>
5.1	Аксиоматика	8
5.2	Основные теоремы динамики	8
5.3	Вычисление динамических величин	8
<b>6</b>	<b>Основные теоремы динамики в неИСО</b>	<b>9</b>
<b>7</b>	<b>Движение точки в центральном поле</b>	<b>9</b>
7.1	Уравнение Бине	9
7.2	Метрика Шварцшильда	10
<b>8</b>	<b>Элементы механики сплошных сред (МСС)</b>	<b>11</b>
8.1	Переменные Лагранжа и Эйлера	11
8.2	Деформации	11
8.3	Напряжение	12
8.4	Обобщенный закон Гука	12
<b>9</b>	<b>Геометрия масс твёрдого тела</b>	<b>13</b>
9.1	Тензор инерции	13
9.2	Кинетический момент	13
9.3	Компоненты тензора инерции в других СО	14
9.3.1	Поворот	14
9.3.2	Параллельный перенос (Т. Гюйгенса-Штейнера)	14
9.4	Цилиндр	14
9.5	Диск	15
<b>10</b>	<b>✗ Интегрируемые случаи движения твёрдого тела с неподвижной точкой.</b>	<b>15</b>
<b>11</b>	<b>Уравнения Лагранжа</b>	<b>15</b>
11.1	Конфигурационное многообразие	15
11.2	О связях	15
11.3	Обобщенная сила	16
11.4	Алгоритм на примере типичной задачи (12.37)	17
11.5	✗ Законы сохранения	17

<b>12 Вариационный принцип Гамильтона</b>	<b>18</b>
12.1 Оять маятник . . . . .	18
12.2 Бусинка на прямой . . . . .	18
12.3 Стационарная система . . . . .	18
12.4 Геодезические на сфере . . . . .	19
12.5 Равновесие. Принцип виртуальных перемещений. . . . .	19
12.6 Статика твёрдого тела . . . . .	20
<b>13 Устойчивость равновесия консервативных систем</b>	<b>20</b>

# 1 ✕ Криволинейные координаты

## 2 Кинематика точки

Пусть  $\mathbf{r}(t), t \in \mathbb{R}$  – движение точки и траектория движения.

**Def 2.1.**

$$\text{Скорость: } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}; \quad \text{ускорение: } \mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (2.1)$$

### 2.1 Естественный трёхгранник

Из геометрии  $\lvert s(t) \rvert$  – длина кривой. Тогда

$$\mathbf{v} = \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{ds}}_{\boldsymbol{\tau}} \frac{ds}{dt} = v\boldsymbol{\tau}. \quad (2.2)$$

Дифференцируя (2.2)

$$\mathbf{w} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v \underbrace{\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}}_{\mathbf{n}/\rho} \frac{ds}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{w}_{\boldsymbol{\tau}}} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}}_{\mathbf{w}_{\mathbf{n}}}. \quad (2.3)$$

где  $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  – базис, преследующий точку.

### 2.2 Компоненты скорости и ускорения

Есть локальный базис. Тогда компоненты скорости

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i \mathbf{g}_i = v^i \mathbf{g}_i \quad \Rightarrow \quad v^i = \dot{q}^i. \quad (2.4)$$

Для компоненты ускорения:

$$w_i = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{g}_i) = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_i) - (\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{g}_i}{dt}).$$

Но, во-первых:

$$\frac{d\mathbf{g}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^i}.$$

Во-вторых:

$$\mathbf{v} = \dot{q}^i \mathbf{g}_i \quad \left| \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \right| \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} (\underbrace{\dot{q}^1 \mathbf{g}_1}_0 + \underbrace{\dot{q}^2 \mathbf{g}_2}_{\mathbf{g}_2} + \underbrace{\dot{q}^3 \mathbf{g}_3}_0) = \mathbf{g}_k \quad (2.5)$$

Тогда

$$w_i = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}^i}) - (\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}^i}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{\partial \dot{q}^i} \frac{1}{2} - \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{\partial \dot{q}^i} \frac{1}{2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{q}^i} \Rightarrow \boxed{mw_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i}} \quad (2.6)$$

## 3 Кинематика твердого тела

**Def 3.1.** Абсолютно твёрдым телом<sup>1</sup> назовём множество такое, что

$$\forall i, j, t: \quad |\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)| = \text{const.}$$

Точка  $O$  это полюс. Во-первых перенесем начало координат в  $O$ . Введём систему координат  $O_{\xi\nu\zeta}$  связанную с телом, – тело относительно неё не движется.

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}, \quad \boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{OA} = \text{const в } O_{\xi\nu\zeta}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}(t) = R(t)\boldsymbol{\rho}.$$

### 3.1 Углы Эйлера

<sup>1</sup>Для краткости просто *твёрдое тело*.

Ортогональность матрицы  $R$  даёт возможность описать её тремя независимыми параметрами. Один из вариантов сделать это – углы Эйлера.

Пусть начальная ПДСК  $(x, y, z)$ , а конечная –  $(X, Y, Z)$ , при чём  $xy \cap XY = ON$  – линия узлов.

- |                                  |                             |
|----------------------------------|-----------------------------|
| 1) $\alpha: Ox \rightarrow ON$ , | угол прецессии;             |
| 2) $\beta: Oz \rightarrow OZ$ ,  | угол нутации;               |
| 3) $\gamma: OX \rightarrow ON$ , | угол собственного вращения. |

Повороты системы на эти углы называются прецессия, нутация и поворот на собственный угол (вращение).

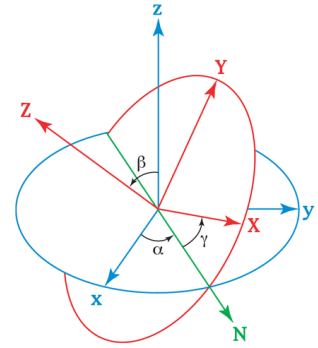


Рис. 1: Углы Эйлера

Матричная запись углов Эйлера:

$$R_Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и,

$$R_X(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta \cos \beta & \end{pmatrix}, \quad R_Z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin \psi & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

### 3.2 Основные теоремы о конечных перемещениях твёрдого тела

Далее бездоказательно приведём некоторые основные теоремы о конечных перемещениях твёрдого тела.

**Thr 3.2** (Теорема Эйлера). *Произвольное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку, можно осуществить посредством вращения вокруг некоторой оси, проходящей через эту точку.*

**Thr 3.3** (Теорема Шаля). *Самое общее перемещение твердого тела разлагается на поступательное перемещение, при котором произвольно выбранный полюс переходит из своего первоначального положения в конечное, и на вращение вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс. Это разложение можно совершить не единственным способом, выбирая за полюс различные точки тела; при этом направление и длина поступательного перемещения будут изменяться при выборе различных полюсов, а направление оси вращения и угол поворота вокруг нее не зависят от выбора полюса.*

**Thr 3.4** (Теорема Моцци). *Самое общее перемещение твердого тела является винтовым перемещением.*

**Con 3.5** (Теорема Бернулли-Шаля). *Самое общее перемещение плоской фигуры в своей плоскости есть либо поступательное перемещение, либо вращение вокруг точки. Эта точка называется центром конечного вращения.*

### 3.3 Скорости и ускорения точек твердого тела в общем случае движения

Проведём два вектора  $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_O$ :

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_O + \mathbf{r} = \mathbf{r}_O + R(t)\boldsymbol{\rho} \quad \xRightarrow{d/dt} \quad \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \dot{R}\boldsymbol{\rho} = \mathbf{v}_O + \dot{R}R^{-1}\mathbf{r}$$

но,

$$RR^T = E, \dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0, \dot{R}R^T = -R\dot{R}^T, (\dot{R}R^{-1})^T = -\dot{R}R^{-1}.$$

То есть  $\dot{R}R^{-1}$  кососимметрична. Тогда пусть

$$\dot{R}R^{-1} = \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

**Thr 3.6** (формула Эйлера). *Существует единственный вектор<sup>2</sup>  $\boldsymbol{\omega}$ , называемый угловой скоростью тела, с помощью которого скорость  $\mathbf{v}$  точки тела может быть представлена в виде*

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad - \quad \text{формула Эйлера.} \quad (3.2)$$

Тогда, например, при постоянном радиус векторе верно, что

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}, \quad \text{при условии } \mathbf{a} = \text{const.}$$

<sup>2</sup>Псевдовектор же, нет?

Можно вывести ускорение точки твёрдого тела

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_A &= \mathbf{w}_O + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \\ \mathbf{w}_A &= \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad - \quad \text{формула Ривальса},\end{aligned}$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt$  – угловое ускорение.

### 3.4 (-) Частные случаи.

Оставим частные случаи в покое.

### 3.5 Кинематические инварианты и кинематический винт

Вернемся к общему случаю движения твёрдого тела. В (3.6) угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  точки  $P$  инвариантна к выбору точки, соответственно  $\omega^2$  – *первый кинематический инвариант*. Домножив (3.6) скалярно на  $\boldsymbol{\omega}$ , получим, что  $I_2 = (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega})$ , – *второй кинематический инвариант*.

Сейчас легко доказать thr. (3.4), точнее надо показать существование такой прямой  $MN$ , все точки которой имеют скорости,  $\parallel \boldsymbol{\omega}$ .

Выберем некоторый полюс,  $O$ , со скоростью  $\mathbf{v}_O$  и угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ . Тогда верно, что

$$\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OS} = p\boldsymbol{\omega}, \quad (p \neq 0).$$

## 4 Сложное движение точки и твёрдого тела

### 4.1 Сложение скоростей и ускорений

**Def 4.1.**

*Абсолютной скоростью (ускорением)* называют скорость (ускорение) относительно неподвижной системы координат.

*Относительной скоростью (ускорением)* называют скорость (ускорение) относительно подвижной системы координат.

*Переносной скоростью (ускорением)* такой точки  $A'$ , которая в рассматриваемый момент времени совпадает с точкой  $A$ , но которая не движется относительно подвижной системы координат. называют абсолютную скорость (ускорение).

**Thr 4.2** (сложение скоростей). Пусть  $\mathbf{a}$  – абсолютная скорость,  $\mathbf{e}$  – переносная,  $\mathbf{r}$  – относительная.

$$\mathbf{v}^a = \mathbf{v}^e + \mathbf{v}^r \quad (4.1)$$

**Thr 4.3** (сложение ускорений). Пусть  $\mathbf{a}$  – абсолютное,  $\mathbf{e}$  – переносное,  $\mathbf{r}$  – относительное,  $\mathbf{c}$  – кориолисово.

$$\mathbf{w}^a = \mathbf{w}^e + \mathbf{w}^r + \mathbf{w}^c. \quad (4.2)$$

$\triangle$ . Запишем скорость  $\mathbf{v}_A^a$  относительно двух систем координат:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \mathbf{r} \text{ в } xyz, \quad \overrightarrow{OA} = \boldsymbol{\rho} \text{ в } \xi\eta\zeta, \quad \xRightarrow{d/dt} \quad \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \dot{R}\boldsymbol{\rho} + R\dot{\boldsymbol{\rho}}. \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_A^a = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_A^r \\ \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (R\boldsymbol{\rho}) + R\dot{\boldsymbol{\rho}} \quad \xRightarrow{d/dt} \quad \mathbf{w}_A^a = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\underbrace{\dot{R}\boldsymbol{\rho} + R\dot{\boldsymbol{\rho}}}_{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}) + \dot{R}\dot{\boldsymbol{\rho}} + R\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \\ &= \mathbf{w}_A^e + \boldsymbol{\omega} \times R\dot{\boldsymbol{\rho}} + \underbrace{\dot{R}R^{-1}}_{\boldsymbol{\omega} \times} \underbrace{R\dot{\boldsymbol{\rho}}}_{\mathbf{v}_A^r} + \underbrace{R\ddot{\boldsymbol{\rho}}}_{\mathbf{w}_A^r} = \mathbf{w}_A^e + \mathbf{w}_A^r + \boxed{2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A^r}\end{aligned}$$

□

Теперь немного про твёрдое тело, зная, что  $\boldsymbol{\omega}^r = \omega_\xi \mathbf{e}_\xi + \omega_\eta \mathbf{e}_\eta + \omega_\zeta \mathbf{e}_\zeta$ , найдём<sup>3</sup> угловое ускорение  $\boldsymbol{\varepsilon}^a$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^a = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{d\boldsymbol{\omega}^r}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{d}{dt} (\omega^i \mathbf{e}_i) = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \underbrace{\dot{\omega}^i \mathbf{e}_i}_{\boldsymbol{\varepsilon}^r} + \underbrace{\omega^i \dot{\mathbf{e}}_i}_{\boldsymbol{\omega}^e \times \boldsymbol{\omega}^r} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^r + \boldsymbol{\omega}^e \times \boldsymbol{\omega}^r.$$

<sup>3</sup>Получить!

## 4.2 Главный момент и главный вектор

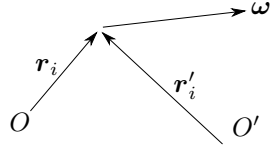
Имеется  $m$  мгновенно поступательных движений  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  и  $n$  мгновенно вращательных движений<sup>4</sup>  $\boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_n$ . Уже знаем, что  $\forall j$  мы можем представить  $\mathbf{v}_j$  как пару  $\boldsymbol{\omega}'_j, \boldsymbol{\omega}''_j$ . Получается, что  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_n$  представим в виду  $2m + n$  мгновенных вращений.

Введём два важных вектора

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_i \quad - \text{ суммарный вектор мгновенных угловых скоростей, } \textit{главный вектор};$$

$$\mathbf{V} = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\omega}_i \quad - \text{ суммарный вектор мгновенных поступательных движений, } \textit{главный момент}.$$

Таким образом свели  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_n$  к паре  $\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V}$ , соответствующей выбранному центру приведения.



Найдём  $\mathbf{V}_{O'}$ :

$$\mathbf{V}_{O'} = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \boldsymbol{\omega}_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j + \sum_{i=1}^n (\overrightarrow{O'O} + \mathbf{r}_i) \times \boldsymbol{\omega}_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j + \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\omega}_i}_{\mathbf{V}_0} + \overrightarrow{O'O} \times \underbrace{\sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_i}_{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{V}_0 + \overrightarrow{O'O} \times \boldsymbol{\Omega}.$$

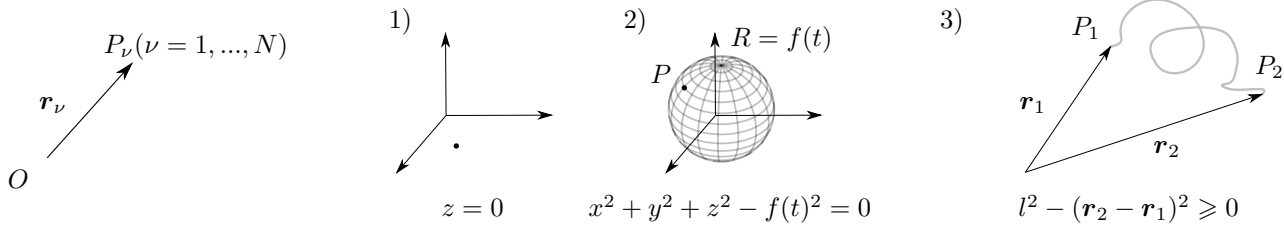
Таблица 1: Простейшие типы движений.

$(\mathbf{V}_0, \boldsymbol{\Omega})$	$\boldsymbol{\Omega}$	$\mathbf{V}_0$	простейшее мгновенное движение
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	мгновенно винтовое движение
$0$	$\neq 0$	$0$	мгновенное вращение, ось $\ni O$
$0$	$\neq 0$	$\neq 0$	мгновенное вращение, ось $\not\ni O$
$0$	$0$	$\neq 0$	мгновенно поступательное движение
$0$	$0$	$0$	мгновенный покой

## 4.3 Общие основания кинематики системы

**Свободные и несвободные системы. Связи.**

Рассмотрим некоторые частные случаи кинематических связей в системе.



В общем случае связь запишем, как

$$f(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) \geq 0.$$

В частности, при  $f(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) = 0$ , связь называется *двухсторонней*, или *удерживающей*. При неравенстве, соответственно, связь *односторонняя*, *освобождающая*. Связь вида  $f(\mathbf{r}_\nu, t) = 0$  называется *геометрической*, *конечная*, *голономная*. Связь вида  $f(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) = 0$  называется *дифференциальной*, или *кинематической*. Иногда кинематическая связь может быть представлена как геометрическая, такая связь называется *интегрируемой*.

**Def 4.4.** Если на систему материальных точек не наложены дифференциальные неинтегрируемые связи, то она называется голономной. Если же среди связей, наложенных на систему есть дифференциальные неинтегрируемые связи, то система называется неголономной.

<sup>4</sup>Скользкий вектор – это ?

Хотелось бы построить некоторую общую теория для случая, когда этих связей несколько. В частности пусть есть  $r$  геометрических связей.

$$f_\alpha(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r), \quad (4.3)$$

И несколько дифференциальных линейных связей

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{a}_{\beta\nu}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \cdot \mathbf{v}_\nu + a_\beta(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad (\beta = 1, \dots, s) \quad (4.4)$$

Стоит сказать, что

$$3N - r - s \geq 1.$$

**Def 4.5.** Геометрические связи называются стационарными или склерономными, если  $t$  не входит в их уравнения (4.3). Дифференциальные связи (4.4) называются *стационарными* или *склерономными* если функции  $\mathbf{a}_{\beta\nu}$  не зависят явно от  $t$ , а функции  $a_\beta \equiv 0$ . Система называется *склерономной*, если она либо свободная, либо на нее наложены только стационарные связи. Система называется *реономной*, если среди наложенных на нее связей есть хотя бы одна нестационарная.

**Ограничения, налагаемые связями на положения, скорости, ускорения и перемещения точек системы.**

Пусть задан некоторый момент  $t = t^*$ . Тогда *возможными положениями* назовём  $\mathbf{r}_\nu$  такие, что для них верно (4.3), (4.4).

Какие возможны скорости?

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \mathbf{v}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r). \quad (4.5)$$

Совокупность векторов  $\mathbf{v}_\nu = \mathbf{v}_\nu^*$ , удовлетворяющая линейным уравнениям (4.4) и (4.5) в возможном для данного момента времени положении системы, назовем возможными скоростями.

Какие возможны ускорения?

$$(4.5), (4.4) \xrightarrow{d/dt} \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \mathbf{w}_\nu + \sum_{\nu,\mu=1}^N \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu \partial \mathbf{r}_\mu} \mathbf{v}_\mu \cdot \mathbf{v}_\nu + 2 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t \partial \mathbf{r}_\nu} \mathbf{v}_\nu + \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t^2} = 0 \quad \alpha \in [1, r] \quad (4.6)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot \mathbf{w}_\nu + \sum_{\nu,\mu=1}^N \frac{\partial \mathbf{a}_{\beta\nu}}{\partial \mathbf{r}_\mu} \mathbf{v}_\mu \cdot \mathbf{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial \mathbf{a}_{\beta\nu}}{\partial t} \cdot \mathbf{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial a_\beta}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \mathbf{v}_\nu + \frac{\partial a_\beta}{\partial t} = 0 \quad \beta \in [1, s] \quad (4.7)$$

Совокупность векторов  $\mathbf{w}_\nu = \mathbf{w}_\nu^*$ , удовлетворяющая линейным уравнениям (4.6) и (4.7) в возможном для данного момента времени положении системы (+скорости), назовем возможными ускорениями.

Рассмотрим возможные перемещения  $\Delta \mathbf{r}_\nu$  системы за  $\Delta t$  из её возможного положения  $\mathbf{r}_\nu^*$  в момент  $t = t^*$ . Тогда

$$\Delta \mathbf{r}_\nu = \mathbf{v}_\nu^* \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{w}_\nu^* (\Delta t)^2 + \dots \quad (\nu = 1, \dots, N). \quad (4.8)$$

Пренебрегая нелинейными членами, получим, что  $\Delta \mathbf{r}_\nu = \mathbf{v}_\nu^* \Delta t$ . Тогда, домножив (4.4), (4.5) на  $\Delta t$ , получим систему уравнений, которой удовлетворяют линейные по  $\Delta t$  возможные перемещения:

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \Delta \mathbf{r}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Delta t = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r), \quad (4.9)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot \Delta \mathbf{r}_\nu + a_\beta \Delta t = 0, \quad (\beta = 1, \dots, s), \quad (4.10)$$

где функции  $\mathbf{a}_{\beta\nu}, a_\beta$  и частные производные вычисляются при  $t = t^*$ ,  $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu^*$ .

**Действительные и виртуальные перемещения**

Пусть задано положение системы для  $t, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ . Тогда для  $t = t^* + dt$  запишем, что

$$\mathbf{r}_\nu(t^* + dt) - \mathbf{r}_\nu(t^*) = \mathbf{v}_\nu^* dt + \frac{1}{2} \mathbf{w}_\nu^* (dt)^2 + \dots, \quad (4.11)$$

где  $\mathbf{w}_{\nu_0}^*$  – ускорения точек системы при  $t = t^*$ . Величины (4.11) – действительные (истинные) перемещения точек системы за время  $dt$ . Тогда получим систему уравнений, аналогичную (4.9), (4.10):

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_{\nu}} \cdot d\mathbf{r}_{\nu} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} dt = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r), \quad (4.12)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot d\mathbf{r}_{\nu} + a_{\beta} dt = 0, \quad (\beta = 1, \dots, s). \quad (4.13)$$

Помимо действительных перемещений есть *виртуальные*. Ими называется совокупность величин  $\delta\mathbf{r}_{\nu}$ , удовлетворяющая линейным однородным уравнениям

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_{\nu}} \cdot \delta\mathbf{r}_{\nu} = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r), \quad (4.14)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot \delta\mathbf{r}_{\nu} = 0, \quad (\beta = 1, \dots, s), \quad (4.15)$$

Если система склерономна, то действительное перемещение будет одним из виртуальных.

**Def 4.6.** *Синхронное варьирование* – переход из одного положения в другое, при фиксированном времени

$$\mathbf{r}_{\nu}^* \rightarrow \mathbf{r}_{\nu}^* + \delta\mathbf{r}_{\nu}.$$

При синхронном варьировании мы не рассматриваем процесс движения и сравниваем допускаемые связями бесконечно близкие положения (конфигурации) системы для данного фиксированного момента времени.

Рассмотрим две совокупности возможных перемещений с одним и тем же значением величины  $\Delta t$ . Согласно разложению по Тейлору,

$$\Delta_1 \mathbf{r}_{\nu} = \mathbf{v}_{\nu_1}^* \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{\nu_1}^* (\Delta t)^2 + \dots,$$

$$\Delta_2 \mathbf{r}_{\nu} = \mathbf{v}_{\nu_2}^* \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{\nu_2}^* (\Delta t)^2 + \dots,$$

и рассмотрим их разность

$$\Delta_1 \mathbf{r}_{\nu} - \Delta_2 \mathbf{r}_{\nu} = (\mathbf{v}_{\nu_1}^* \Delta t - \mathbf{v}_{\nu_2}^* \Delta t) + \left( \frac{1}{2} \mathbf{w}_{\nu_1}^* (\Delta t)^2 - \frac{1}{2} \mathbf{w}_{\nu_2}^* (\Delta t)^2 \right) + \dots$$

## 5 Основные теоремы динамики

### 5.1 Аксиоматика

...

### 5.2 Основные теоремы динамики

Пусть  $\mathbf{Q}$  – количество движения,  $\mathbf{K}_A$  – кинематический момент относительно полюса  $A$ . Далее,  $T$  – механическая энергия,  $\delta A^{\text{всех}} = \sum (\mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i)$  и  $-d\Pi = \delta A$ , где  $\Pi$  – потенциальная энергия.

Величина	Thr об изменение	Первые интегралы системы
$\mathbf{Q} = \sum m_i \mathbf{v}_i$	$d\mathbf{Q}/dt = \mathbf{R}^{\text{внеш}}$	$\mathbf{Q} = \text{const}$
$\mathbf{K}_A = \sum \mathbf{r}_{A_i} \times (m_i \mathbf{v}_i)$	$d\mathbf{K}_A/dt = \mathbf{M}_A^{\text{внеш}} + \mathbf{Q} \times \mathbf{v}_A$	$\mathbf{K}_A = \text{const}$
$T = \sum m_i v_i^2 / 2$	$dT = \delta A^{\text{всех}}$	$T + \Pi = \text{const}$

### 5.3 Вычисление динамических величин

Формула переноса полюса

$$\mathbf{R}_A = \sum (\overrightarrow{AB} + \mathbf{r}_{Bi}) \times m_i \mathbf{v}_i = \overrightarrow{AB} \times \sum m_i \mathbf{v}_i + \sum \mathbf{r}_{Bi} \times m_i \mathbf{v}_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{K}_A = \mathbf{K}_B + \mathbf{Q} \times \overrightarrow{BA}}$$



## Теорема Кёнига

Выберем некоторую СК (книгову СК), движущуюся поступательно.

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + T_{c\xi\eta\zeta}^r.$$

В частности, для твёрдого тела

$$T_{c\xi\eta\zeta}^r = \sum \frac{1}{2}m_i(v_i^r)^2 = \sum \frac{1}{2}m_i\omega^2\rho_{Ci}^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i\rho_{Ci}^2 = \frac{1}{2}J_\omega\omega^2.$$

Тогда, для твёрдого тела,

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_\omega\omega^2$$

## 6 Основные теоремы динамики в неИСО

Знаем, что

$$\mathbf{w}_i^a = \mathbf{w}_i^e + \mathbf{w}_i^c + \mathbf{w}_i^r.$$

Подставляя это во II закон Ньютона получим, что

$$m_i\mathbf{w}_i^r = \mathbf{F}_i - m_i\mathbf{w}_i^e - m_i\mathbf{w}_i^c. \quad (6.1)$$

Ниже введём некоторые определения, а именно  $\mathbf{J}_i^e$  – *переносная сила инерции*,  $\mathbf{J}_i^c$  – *кориолисова сила инерции*. Далее  $\mathbf{w}_0$  – ускорение центра масс.

Величина	Thr об изменение	Определения
$\mathbf{Q}$	$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{\text{внеш}} + \mathbf{J}^e + \mathbf{J}^c$	$\mathbf{J}^e = -\sum m_i\mathbf{w}_i^e = -m_0\mathbf{w}_0^e$ $\mathbf{J}^c = -\sum m_i\mathbf{w}_i^c = -m_0\mathbf{w}_0^c$
$\mathbf{K}_A$	$\dot{\mathbf{K}}_A = \mathbf{M}_A^{\text{внеш}} + \mathbf{M}_A^e + \mathbf{M}_A^c + \mathbf{Q}^r \times \mathbf{v}_A^r$	$\mathbf{M}_A^c = -\sum \mathbf{r}_{Ai} \times m_i\mathbf{w}_i^c$ $\mathbf{M}_A^e = -\sum \mathbf{r}_{Ai} \times m_i\mathbf{w}_i^e$
$T$	$dT = \delta A^{\text{вс},r} + \delta A^{e,r}$	$\delta A^{\text{вс},r} = \sum F_i d\mathbf{r}_i^r$ $\delta A^{e,r} = \sum -m_i\mathbf{w}_i^e \cdot d\mathbf{r}_i^r$

Для кинетической энергии в изменение нет слагаемого от кориолисовых сил, в силу

$$\delta A_i^{c,r} = -m_i(2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0^r) \cdot (\mathbf{v}_0^r dt) \equiv 0.$$

## 7 Движение точки в центральном поле

### 7.1 Уравнение Бине

**Def 7.1.** Полем центральных сил называется поле, в котором сила действующая на точку такая, что

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Логично перейти к  $(r, \varphi, \theta)$ . Тогда

$$m\mathbf{w} = F(r)\frac{\mathbf{r}}{r} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\mathbf{w}_r = F(r) \\ m\mathbf{w}_\varphi = 0 \\ m\mathbf{w}_\theta = 0 \end{cases}$$

Теперь, получится, знаем, что

$$\mathbf{w}_\theta = -\ddot{r}\theta + 2\dot{r}\dot{\theta} + r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = 0,$$

и, учитывая, что  $\theta(0) = \pi/2$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$ , тогда  $\theta(t) = \pi/2$ , это с точки зрения диффузов. А с точки зрения физики кинетический момент сохраняется, то есть

$$\mathbf{K}_0 = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}, \mathbf{v} \in \text{постоянной плоскости.}$$

Тогда  $\theta$  мы можем просто выбросить.

Приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F(r) \\ m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F(r) \\ r^2\dot{\varphi} = \frac{K_0}{m} = \text{const.} \end{cases} \quad (7.1)$$

Это, собственно, соответствует закону Кеплера о сохранение секториальной скорости.

Первое уравнение как-то не очень, перейдём от  $d/dt$  к  $d/d\varphi$ . Тогда  $r(t) \rightarrow u(\varphi) = \frac{1}{r}$  – переменная Бине.

$$\dot{r} = \frac{d(1/u)}{dt} = -cu',$$

а для второй производной

$$\ddot{r} = -c^2u^2u''.$$

Тогда уравнение перепишем, как

$$-c^2u^2u'' - c^2u^3 = \frac{F(u)}{m},$$

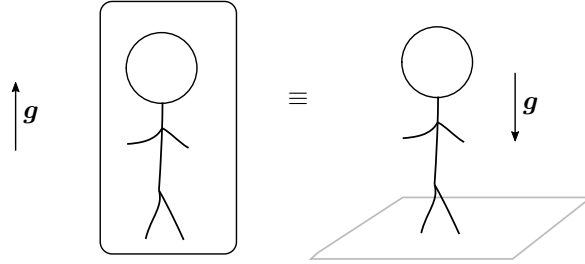
получая диффур вида

$$\boxed{u'' + u = \frac{-F(u)}{mc^2u^2}} \quad \text{– уравнение Бине.} \quad (7.2)$$

Так мы свели всё к гармоническому осцилятору.

## 7.2 Метрика Шварцшильда

Заметим (Эйнштейн заметил), что



тогда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) d\tau^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 - (r \sin \theta)^2 d\varphi^2 - r^2 d\theta^2.$$

Здесь 4 независимых переменных  $(\tau, r, \varphi, \theta)$ , где три из сферических координат, а  $\tau$  – физическое время.

Также введен радиус Шварцшильда  $a = 2GM$ .

Движение точек рассматриваем, как движение по геодезическим, то есть  $\mathbf{w}_i = 0$ , где  $i \in \{\tau, r, \varphi, \theta\}$ , и положим  $v^2 = 1$ . Из раннее полученного,  $\theta(t) = \pi/2$ , то есть в некотором смысле движение плоское.

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{\tau}^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 = 1 \quad (7.3)$$

$$\mathbf{w}_\tau = \frac{d}{dt} \frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{\tau}} - \underbrace{\frac{\partial(v^2/2)}{\partial \tau}}_0 = \frac{d}{dt} \left[ \left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{\tau} \right] = 0 \quad (7.4)$$

$$\mathbf{w}_\varphi = -\frac{d}{dt} [r^2 \dot{\varphi}] = 0 \quad (7.5)$$

Тогда у нас есть первый интеграл

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{\tau} = \mathcal{D}. \quad (7.6)$$

И другой первый интеграл

$$r^2 \dot{\varphi} = \mathcal{C}. \quad (7.7)$$

Подставляя, получим, что

$$\mathcal{D}^2 - \mathcal{C}^2 u'^2 = 1 - au + \mathcal{C}^2 u^3 (1 - au). \quad (7.8)$$

Применяя  $d/d\varphi$  и полагая  $C = c$ , получим

$$u'' + u = \frac{3}{2}au^2 + \frac{a}{2c^2} = -\frac{F}{mc^2u^2}. \quad (7.9)$$

Получается, что мы можем или говорить про движение по геодезическим в метрике Шварцшильда, или движение в центральном поле с силой

$$F = -m \left( \frac{3}{2}ac^2u^4 + \frac{a}{2}u^2 \right). \quad (7.10)$$

## 8 Элементы механики сплошных сред (МСС)

### 8.1 Переменные Лагранжа и Эйлера

Пусть каждой точке среды соответствует  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ , собственно  $(\xi, t)$  – лагранжевы переменные. Закон движения среды в таком случае это

$$\mathbf{r}(\xi, t), \quad (8.1)$$

скорость же

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}(\xi, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{v}(\xi, t)}{\partial t},$$

и так далее.

Альтернативно можем задать  $(x, t)$  – эйлерово описание. Тогда

$$\mathbf{v}(x, t), \mathbf{w}(x, t) \quad \text{– поля скоростей и ускорений.}$$

В частности, представляя движение по шоссе, полоса 1,2,3 и участок трассы – эйлерово описание среды. Если же мы будем следить за каждой машиной, то это будет лагранжево описание.

#### Задача 1

Пусть

$$v_1 = \frac{-x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad v_2 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Найти  $\mathbf{r}(\xi, t)$ . Легко получить, что

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = 1.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \alpha), \quad x_2 = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \alpha).$$

Переменные запишутся как

$$\xi_1 = \frac{\cos \alpha}{\omega}, \quad \xi_2 = \frac{\sin \alpha}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1/2}, \alpha = \arcsin(\omega \xi_2).$$

Получается, что

$$\mathbf{r}(\xi, t) = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \alpha) \\ \sin(\omega t + \alpha) \end{pmatrix}.$$

### 8.2 Деформации

Пусть

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r},$$

где  $\mathbf{u}$  – вектор деформации. Тогда

$$dx'_i = dx_i + du_i = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k.$$

Введём некоторый  $ds'$

$$(ds')^2 = dx'_i dx'_i; \quad ds^2 = dx_i dx_i.$$

Подставляя, получим, что

$$(ds')^2 = ds^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \right) \approx ds^2 + 2\varepsilon_{ik} dx_i dx_k,$$

где  $\varepsilon_{ik}$  – тензор малых деформаций:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right),$$

который в главных осях диагонален.

Тогда

$$ds' = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{ii}} dx_i.$$

В общем смысл в том, что

$$\frac{dx'_i - dx_i}{dx_i} \approx 1 + \frac{1}{2}(2\varepsilon_{ii}) - 1 = \varepsilon_{ii}.$$

Или

$$\frac{dV' - dV}{dV} = \text{tr } \varepsilon = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div } \mathbf{u}.$$

Тогда, в частности,

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad - \quad \text{несжимаемая среда.}$$

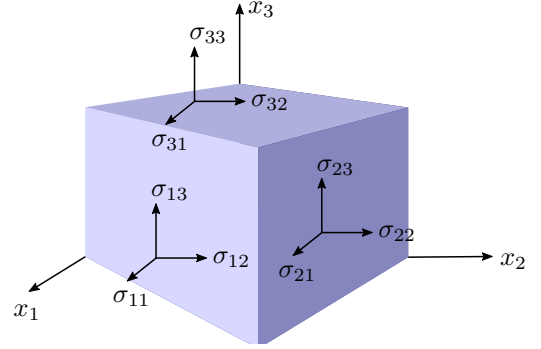
### 8.3 Напряжение

Ну, собственно,

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}, \quad \int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \oint \sigma_{ik} dA_k.$$

Кстати,

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}. \quad (8.2)$$



### 8.4 Обобщенный закон Гука

Пусть  $E$  – модуль Юнга,  $\mu$  – коэффициент Пуассона. Тогда

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\mu}{E} \sigma_{11}.$$

Перепишем это в виду

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\mu}{E} \sigma_{22} - \frac{\mu}{E} \sigma_{33} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_{11} - \frac{\mu}{E} \text{tr } \sigma.$$

Или, в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \frac{1+\mu}{E} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} - \frac{\mu}{E} \text{tr } \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В тензорном виде

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_{ik} - \frac{\mu}{E} \delta_{ik} \text{tr } \sigma.$$

Выразим  $\varepsilon$ :

$$\text{tr } \varepsilon = \frac{1+\mu}{E} \text{tr } \sigma - \frac{3\mu}{E} \text{tr } \sigma \quad \Rightarrow \quad \text{tr } \sigma = \frac{E}{1-2\mu} \text{tr } \varepsilon.$$

Так и получаем обобщенный закон Гука:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\mu} \left[ \varepsilon_{ik} + \frac{\mu}{1-2\mu} \delta_{ik} \text{tr } \varepsilon \right] \quad (8.3)$$

### Задача: самосжимающийся шар

Запишем

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = -f_i.$$

Тогда, после некоторых преобразований, получим, что

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{E}{1+\mu} \left[ \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{2(1-2\mu)} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} \right].$$

Вспомним, что

$$\Delta \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

Перейдём к уравнению

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} \right) = kr. \quad (8.4)$$

Верно, что

$$\frac{d(r^2 u)}{dr} = \frac{kr^4}{2} + c_1 r^2.$$

Логично, что на границе  $\sigma_{11} = 0$ . То есть

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\mu} \left[ \varepsilon_{11} + \frac{\mu}{1-2\mu} \operatorname{tr} \varepsilon \right] = 0.$$

Но  $\varepsilon_{rr} = du/dr = \varepsilon_{11}$ ,  $\operatorname{tr} \varepsilon = \operatorname{div} \mathbf{u}$ , из этого можем найти  $c_1$ .

## 9 Геометрия масс твёрдого тела

### 9.1 Тензор инерции

Движение тела может быть разбито на поступательное плюс вращательное. Есть три классические величины:  $\mathbf{Q} = m\mathbf{v}_C$ ,  $T = \frac{mv^2}{2} + T_{\text{вращ}}$ ,  $\mathbf{K}$ . Мгновенная ось вращения проходит через точку  $O$ .

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \equiv \tilde{\mathbf{r}}_i \boldsymbol{\omega}, \quad \tilde{\mathbf{r}}_i = \begin{pmatrix} 0 & z_i & -y_i \\ -z_i & 0 & x_i \\ y_i & -x_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Известно, что

$$v_i^2 = (\tilde{\mathbf{r}}_i \boldsymbol{\omega})^T (\tilde{\mathbf{r}}_i \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}^T \tilde{\mathbf{r}}_i^T \tilde{\mathbf{r}}_i \boldsymbol{\omega}.$$

Так приходим к

**Def 9.1.** Тензором величину назовём величину

$$\hat{J}_0 = \sum m_i \tilde{\mathbf{r}}_i^T \tilde{\mathbf{r}}_i. \quad (9.1)$$

Тогда кинетическую энергию запишем, как

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \hat{J}_0 \boldsymbol{\omega}. \quad (9.2)$$

Но опыт кричит о том, что там момент инерции, действительно

$$J_e = \mathbf{e}^T \hat{J}_0 \mathbf{e}. \quad (9.3)$$

Найдём его элементы:

$$\tilde{\mathbf{r}}_i^T \tilde{\mathbf{r}}_i = \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + y_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} = \hat{j}_i, \quad (9.4)$$

суммируя, получим

$$\hat{J}_0 = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix}, \quad (9.5)$$

где  $J_x$  – осевые моменты инерции, а  $J_{xy}$  – центробежные момент инерции.

Но, в силу симметричности тензора, существуют такие оси, что

$$\hat{J}_0 = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}. \quad (9.6)$$

### 9.2 Кинетический момент

Кинетический момент найдём из

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \mathbf{v}_i [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i] = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2} \sum m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_O, \quad (9.7)$$

тогда

$$\boxed{\mathbf{K}_O = \hat{J}_O \boldsymbol{\omega}}. \quad (9.8)$$

На самом деле

$$\begin{aligned} \hat{J}_0: \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbf{K}_O \in \mathbb{R}^{\neq}, \\ \boldsymbol{\omega}, \Omega: \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Вообще, получается  $\mathbf{K}_O \nparallel \boldsymbol{\omega}$ .

Введём оси  $\xi\eta\zeta$ , тогда в них

$$\hat{J}_0 = \text{diag}(A, B, C), \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad \mathbf{K}_O = \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix}. \quad (9.9)$$

### 9.3 Компоненты тензора инерции в других СО

#### 9.3.1 Поворот

Во-первых, посмотрим на поворот

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_1^T \hat{J}_{O1} \boldsymbol{\omega}_1 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \hat{J}_{O2} \boldsymbol{\omega}_2, \quad \boldsymbol{\omega}_1 = R \boldsymbol{\omega}_2,$$

Тогда

$$\boxed{\hat{J}_{O1} = R^{-1} \hat{J}_{O2} R}. \quad (9.10)$$

#### 9.3.2 Параллельный перенос (Т. Гюйгенса-Штейнера)

Запишем

$$\hat{J}_O = \hat{J}_C + m \hat{j}_{CO}, \quad (9.11)$$

если  $\vec{CO} = (\xi\eta\zeta)$ , то

$$\hat{j}_{CO} = \begin{pmatrix} \eta^2 + \zeta^2 & -\xi\eta & -\xi\zeta \\ -\xi\eta & \xi^2 + \zeta^2 & -\eta\zeta \\ -\xi\zeta & -\eta\zeta & \xi^2 + \eta^2 \end{pmatrix} \quad (9.12)$$

### 9.4 Цилиндр

Перейдём к переменным  $r, \varphi, z$ , тогда, например

$$J_z = \int (x^2 + y^2) \rho dV = \frac{M}{\pi R^2 H} \iiint r^2 r dr d\varphi dz. \quad (9.13)$$

Считая, получим

$$\hat{J}_C = \text{diag} \left( \frac{MR^2}{4} + \frac{MH^2}{12}, \frac{MR^2}{4} + \frac{MH^2}{12}, \frac{MR^2}{2} \right). \quad (9.14)$$

В частности, при  $\vec{CA} = (R \ 0 \ -H/2)^T$ , получим

$$\hat{J}_A = \hat{J}_C + m \hat{j}_{CA} = \begin{pmatrix} A & 0 & \frac{1}{2}MRH \\ 0 & B & 0 \\ \frac{1}{2}MRH & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Теперь приведём к главным осям, поворотом относительно оси  $z$ :

$$\hat{J}'_A = \text{diag}(A', B', C') = R^T \hat{J}_A R, \quad R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Решая, получим

$$\text{tg } 2\alpha = 4\sqrt{3}.$$

Подставляя, найдём

$$\hat{J}'_A = \frac{mR^2}{4} \text{diag}(2, 9, 9).$$

Ну или просто к главным осям привести можно, через собственные числа.

## 9.5 Диск

Есть некоторая квадратная рама (полное условие см. дополнение). Для простоты положим  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Найдём  $T, \mathbf{N}_A, \mathbf{N}_B$ .

Во-первых,

$$T = \frac{1}{2}mV_O^2 + \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^T \hat{J}_O \mathbf{\Omega},$$

где  $v_O = \omega a/2$ . Выберем такие оси, что

$$\hat{J}_O = \frac{1}{4}mR^2 \text{diag}(1, 1, 2).$$

Посчитаем теперь  $\mathbf{\Omega}$ :

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega\sqrt{2}/2 & \omega\sqrt{2}/2 + \omega \end{pmatrix}^T.$$

Из теоремы об изменении импульса

$$m\mathbf{w}_O = \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B, \quad m \frac{\omega^2 a^2/4}{a/2} = N_A + N_B.$$

А ещё знаем, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{K}_A &= \boldsymbol{\omega}_1 \times \left[ \left( \hat{J}_O + m\hat{J}_{OA} \right) \mathbf{\Omega} \right] = \overrightarrow{AB} \times \mathbf{N}_B. \\ \frac{d}{dt}\mathbf{K}_A &= \boldsymbol{\omega}_1 \times \left[ \left( \hat{J}_O + m\hat{J}_{OA} \right) \mathbf{\Omega} \right] = \overrightarrow{AB} \times \mathbf{N}_B. \end{aligned}$$

## 10 ✗ Интегрируемые случаи движения твёрдого тела с неподвижной точкой.

## 11 Уравнения Лагранжа

### 11.1 Конфигурационное многообразие

Каждую материальную точку можем определить  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  – итого  $\mathbb{R}^{3N}$ . Но есть некоторые ограничения вида

$$f_i(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Вложим в фазовое пространство многообразие  $M$ , в котором локально всё хорошо. Тогда  $\dim M = n$  – число степеней свободы, а параметризация  $q_1, \dots, q_N$  – криволинейные координаты. В каждой  $A \in M$  верно, что  $\dot{\mathbf{q}} \in TM_A$ , то есть

$$TM = \bigcup_q T_q M \ni (q, \dot{q}) \quad (11.1)$$

**Примеры:**

Для маятника, например, его множеством положений будет окружность. Для маятника в пространстве это будет сфера. И для маятника с  $l(t) = \sin \omega t + 2$  это тоже будет окружность! То есть многообразие может быть не стационарно.

А вот для стержня в пространстве  $M = \mathbb{R}^2 \times S^1$ . Твёрдое тело с неподвижной точкой? По теореме Эйлера о конечном повороте, достаточно задать орт и угол. Для орта это будет  $S^2$ , а для угла отрезок  $[-\pi, \pi]$ . Берем шар и заклеиваем все диаметрально-противоположные точки – конфигурационное многообразие  $SO(3) \sim RP^3$ .

### 11.2 О связях

Например для окружности  $\dot{x} = \dot{\varphi}r \Rightarrow x = \varphi r + \text{const}$ . А вот для сферы все не так радужно. Получается системы бывают *голономные* ( $f_i(q, \dot{q}, t) = 0$  интегрируемые) и *неголономные* ( $f_i(q, \dot{q}, t) = 0$  неинтегрируемые).

Давайте запишем второй закон Ньютона:

$$m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \quad \left| \cdot \right|_{d\mathbf{r}_i}$$

где  $\mathbf{R}_i$  – реакции связи. Хотим записать уравнение в общеквариантном виде. Но

$$d\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^k} \overset{\delta}{\cancel{dq^k}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cancel{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^k} \delta q^k, \quad \text{— виртуальные перемещения.}$$

То есть мы «замораживаем» время, так чтобы  $\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$ . На таких перемещениях работа реакции связи равна 0.

$$\left[ \sum m_i \left( \omega_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) - \left( \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) - \underbrace{\left( \mathbf{R}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right)}_{\cdot \delta q_k \rightarrow 0} \right] \cdot \delta q_k = 0 \quad (11.2)$$

Другими словами

$$\left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \sum m_i \frac{v_i^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_k} \sum m_i \frac{v_i^2}{2} - \sum \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right] \delta q_k = 0.$$

Тогда

$$\sum_k \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right] \delta q_k = 0. \quad (11.3)$$

Проблема остается в неголономных системах, где  $\delta q_k$  не являются независимыми, получается, что **уравнения Лагранжа справедливы для голономных систем**.

### 11.3 Обобщенная сила

Во-первых

$$\delta A = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_k \sum_i \left( \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_k \underbrace{\frac{\delta A_k}{\delta q_k}}_{Q_k} \delta q_k.$$

Тогда пусть  $\Pi(q, t)$ :  $Q_k = -\partial \Pi / \partial q_k$ . Тогда

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_k} = 0, \quad (11.4)$$

где вводим

$$L = T - \Pi, \quad \text{— лагранжиан.}$$

Приходим к

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n} \quad (11.5)$$

системе уравнений на  $2n$  переменных.



## 11.4 Алгоритм на примере типичной задачи (12.37)

△.

I. Определить количество степеней свободы.

В частности цилиндр без проскальзывания и свободный цилиндр – 2 степени свободы, а в качестве координат  $q = (x, \varphi)$ .

II. Посчитать кинетическую энергию.

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mV_c^2 + \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Но, по замечательной формуле,

$$V_c^2 = (\mathbf{v}_c^e)^2 + (\mathbf{v}_c^r)^2 + 2(\mathbf{v}_c^e \cdot \mathbf{v}_c^r) = \dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2(R-r)^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi}(R-r)\cos\varphi.$$

Собираем всё вместе

$$\begin{aligned} T &= \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}(\dot{\varphi}^2(R-r)^2 + 2\dot{\varphi}(R-r)\dot{x}\cos\varphi) + \frac{mr^2}{4}\frac{\dot{\varphi}^2(R-r)^2}{r^2} = \\ &= \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + \frac{3}{4}m\dot{\varphi}^2(R-r)^2 + m\dot{x}\dot{\varphi}(R-r)\cos\varphi. \end{aligned}$$

III. Найти потенциальную энергию или обобщенные силы.

$$\Pi = \frac{1}{2}cx^2 + mg(R-r)(1 - \cos\varphi).$$

IV. Найти лагранжиан  $L = T - \Pi$ .

V. Дифференцировать.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (m+M)\dot{x} + m\dot{\varphi}(R-r)\cos\varphi, \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= cx. \end{aligned} \right\} \Rightarrow (m+M)\ddot{x} + m\ddot{\varphi}(R-r)\cos\varphi - m\dot{\varphi}^2(R-r)\sin\varphi - cx = 0.$$

□

## 11.5 ✗Законы сохранения

Во-первых теперь ЗСЭ выглядит так:

$$\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = \text{const.} \quad (11.6)$$

Что работает, когда время не входит в  $L$ . Аналогично для импульса, когда  $x$  не входит в  $L$ .

### Задача 12.64

Кольцо вращается с постоянной угловой скоростью<sup>5</sup>

△.

I. Степени свободы:

$$n = 1, \quad q = \varphi.$$

II. Кинетическая энергия

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\varphi}^2 R^2 + \omega R \sin\varphi)^2.$$

III. Потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{1}{2}cR^2(\varphi - \varphi_0)^2 + mgR\cos\varphi.$$

IV. Дифференцируем

□

<sup>5</sup>Это не свобода, а склерономная связь.

## 12 Вариационный принцип Гамильтона

Можно сказать, что есть пространство, проводить кривые, а потом их друг с другом сравнивать. Пусть есть некоторое конфигурационное многообразие  $M$  с  $\dim M = n$  и частицами  $q_1, \dots, q_n$ .

Пусть  $\gamma(t)$  соединяет  $q_0$  и  $q_1$ . Что мы точно знаем? Знаем, что  $\gamma(t_0) = q^0$  и что  $\gamma(t_1) = q^1$ . Введем некоторый функционал

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt \quad \text{— действие по Гамильтону.} \quad (12.1)$$

Переходя к однопараметрическому семейству кривых  $\gamma(\alpha, t)$ , где  $\alpha$  — скалярный параметр. Тогда

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(\alpha, t), \dot{\gamma}(\alpha, t), t) dt \quad \delta S = \frac{dS}{d\alpha} d\alpha \quad \text{— вариация действия.} \quad (12.2)$$

**Thr 12.1** (принцип Гамильтона). *Кривая  $\gamma(\alpha, t)$  является экстремалью функционала тогда и только тогда, когда является решением уравнений Лагранжа.*

$$\delta S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma(\alpha, t) \in \text{Sol(ур-ний Лагранжа)} \quad (12.3)$$

$\triangle$ . Давайте просто проварьируем Лагранжиан, тогда

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right) \delta \alpha dt = \dots = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \delta q_k dt = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

таким образом уравнения Лагранжа выполнены.  $\square$

### 12.1 Опять маятник

Посмотрим на маятник

$$L = \frac{1}{2} (\dot{q}^2 - q^2),$$

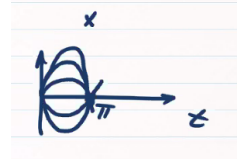
где  $q(0) = 0$ ,  $q(t_1) = q_1$ . Получим различные ситуации.

Подставив в уравнение Лагранжа лагранжиан системы получим

$$\ddot{q} + q = 0 \quad \Rightarrow \quad q = A \cos t + B \sin t, \quad A = 0, \quad q_1 = B \sin t_1.$$

Пусть  $t_1 \neq \pi k$  тогда  $\exists! B = q_1 / \sin t_1$ . Но, если  $t_1 = \pi k$  то при  $q_1 \equiv 0 \forall B$  у нас решение (их  $\infty$ ). Если же  $q_1 \neq 0$  то не решение  $\nexists$ .

**Def 12.2.** Есть на конфигурационном многообразии *кинетические фокусы*. Если мы ставим краевую задачу до фокуса Якоби, то  $\delta S = 0$  — минимум, а иначе говорить не о чем, только экстремальность.



### 12.2 Бусинка на прямой

Пусть  $q(t)$  — прямой путь,  $q + \delta q$  — околный путь, вариация прямого пути. Рассмотрим такой интеграл

$$\begin{aligned} S_{\text{ок}} - S_{\text{пр}} &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \left( (q + \delta q)^2 + (q + \delta q)^2 - \dot{q}^2 - \dot{q}^2 \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \dot{q} \delta \dot{q} + q \delta q + \frac{1}{2} \delta q^2 + \frac{1}{2} \delta \dot{q}^2 \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} (\delta q^2 + \delta \dot{q}^2) + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \delta (\dot{q}^2 + q^2) dt}_0 > 0 \end{aligned}$$

ожидаю всюду увидеть его положительным и, действительно, видя.

### 12.3 Стационарная система

Пусть есть некоторая система такая, что

$$v_i = \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k, \quad \Pi \equiv 0.$$

Тогда Лагранжиан

$$L = T_2 + \cancel{\mathcal{V}_1} + \cancel{\mathcal{V}_0} = \frac{1}{2} a_{ik}(q) \dot{q}^i \dot{q}^k. \quad (12.4)$$

По принципу Гамильтона

$$\delta S = \delta \int \frac{1}{2} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = 0,$$

хотим заменить  $L \rightarrow \sqrt{2L}$ , утверждается, что все стационарные точки сохраняются. Тогда

$$\delta S' = \delta \int \sqrt{2L} dt = \delta \int \sqrt{a_{ik}(q) dq_i dq_k} = \delta \int dS.$$

то есть метрика образована кинетической энергией, получается решение уравнений Лагранжа это просто уравнение геодезической. Вот и кратчайший путь на многообразии.

## 12.4 Геодезические на сфере

Начальные условия

$$\theta(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$$

На сфере, в сферических координатах

$$L = \frac{1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \quad \Rightarrow \quad S' = \int \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2}.$$

Также знаем, что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const} = \dot{\varphi} \sin^2 \theta, \quad \ddot{\theta} + \dot{\varphi}^2 \sin 2\theta = 0.$$

Так получим

$$S' = \dot{\varphi}_0 (t_1 - t_0),$$

## 12.5 Равновесие. Принцип виртуальных перемещений.

Легко получить соотношение вида

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (12.5)$$

Данное соотношение является необходимым и достаточным условием для того, чтобы движение, совместимое с идеальными связями, отвечало данной системе активных сил  $\mathbf{F}_i$ . Оно получило название **общего уравнения динамики** или *дифференциальным вариационным принципом Даламбера-Лагранжа*.

**Thr 12.3** (принцип Даламбера-Лагранжа). *Верно, что*

$$m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \quad \Rightarrow \quad \sum_i (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Аналогично можно сформулировать *принцип Журдена*

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{v}_i = 0, \quad (12.6)$$

и *принцип Гаусса*:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{v}_i = 0, \quad (12.7)$$

где  $\delta \mathbf{w}_i = \mathbf{w}_{i1}^* - \mathbf{w}_{i2}^*$  не обязательно малая величина.

Замечая, что  $m_i = \text{const}$ , а  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(p, q)$ , то последнее уравнение переписется в виде

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \mathbf{w}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right)^2, \quad \delta Z = 0,$$

где величина  $Z$  называется принуждением или мерой принуждения. К слову она не просто стационарна для истинных движений.

Истинным является движение с минимальной мерой принуждения. Другими словами *несвободная система совершает движение, наиболее близкое к свободному*.

**Def 12.4.** Будем считать, что  $q^0 \in M$  – *точка равновесия*, если при  $\dot{q}^0 \equiv \dot{q}(0) \equiv 0$  приводит к  $q(t) = q^0$ .

В таком случае верен следующий принцип:

**Thr 12.5** (принцип Лагранжа). Для того, чтобы точка была положением равновесия на  $t \in [t_1, t_2]$  необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ на  $\forall$  виртуальных перемещениях всех активных сил была равна нулю.

$$\delta A|_0 = 0 \quad \delta A = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i, \quad (t \in [t_1, t_2]) \quad (12.8)$$

что является **общим уравнением статики**.

Этот принцип можно рассматривать, как дракона с тремя головами. Вот если система **голономная**, то

$$\delta A = Q_i \delta q_i \quad \Rightarrow \quad Q_i = 0 \quad \forall i.$$

Если система **консервативная**, то

$$Q_1 = -\frac{\partial P}{\partial q^i} \quad \Rightarrow \quad \text{положение равновесия — стационарная точка потенциала.}$$

Если же у нас **твёрдое тело**, тогда

$$\delta A = (\mathbf{R}^{\text{внеш}} \cdot \mathbf{v}_O) dt + (\mathbf{M}_O^{\text{внеш}} \cdot \boldsymbol{\omega}) dt \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{R}^{\text{внеш}} = 0 \\ \mathbf{M}^{\text{внеш}} = 0 \end{cases}$$

## 12.6 Статика твёрдого тела

Пусть к твёрдому телу приложена система с  $\mathbf{R}^e$  и  $\mathbf{M}_O^e$ .

**Thr 12.6.** Для равновесия твёрдого тела при  $t \in [t_1, t_2]$  необходимо и достаточно, чтобы в момент времени  $t_1$  тело покоилось, а  $\mathbf{R}^e$  и  $\mathbf{M}_O^e$  относительно произвольно выбранного полюса  $O$  равнялись  $0$ .

$\Delta$ . Свободное твёрдое тело является склерономной системой, его произвольное действительное перемещение является виртуальным. Тогда

$$\delta A = \mathbf{R}^e \cdot \mathbf{v}_O dt + \mathbf{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega} dt.$$

Так как  $\mathbf{v}_O$  и  $\boldsymbol{\omega}$  — произвольные величины, то из общего уравнения статики  $\delta A = 0$  следуют необходимые равенства.  $\square$

**Thr 12.7.** Для эквивалентности двух систем сил, приложенных к твёрдому телу необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковые главные векторы и главные моменты относительно некоторого полюса.

## 13 Устойчивость равновесия консервативных систем

Пусть  $q = 0$  — положения равновесия. Динамика нашей системы описывается уравнениями Лагранжа, вида

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Также говорим про консервативную систему, то есть все связи склерономны,

$$\exists \Pi \equiv \Pi(q); \quad f(t, \mathbf{r}) = 0 \quad \Rightarrow \quad T + \Pi = \text{const.}$$

**Def 13.1.** Положение равновесия  $q = 0$  — *устойчиво по Ляпунову*, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , такая что

$$\forall |q(0)| < \delta, |\dot{q}(0)| < \delta: \quad |q(t)| < \varepsilon, |\dot{q}(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0. \quad (13.1)$$

**Def 13.2.** Положение равновесия  $q = 0$  — *неустойчиво по Ляпунову*, если  $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0$ , такая что

$$\forall \delta > 0 \exists |q(0)| < \delta, |\dot{q}(0)| < \delta, t^*: \quad |q(t^*)| > \varepsilon \text{ или } |\dot{q}(t^*)| > \varepsilon. \quad (13.2)$$

**Thr 13.3** (Теорема Лагранжа-Дирихле). Если в положении равновесия  $\Pi(q)$  имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.

Разложим в ряд  $\Pi(q)$ :

$$\Pi(q) = \Pi(0) + \frac{\partial \Pi}{\partial q^i} \bigg|_0 q^i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^k} + \dots \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^k}.$$

**Thr 13.4** (Теорема Ляпунова о неустойчивости I). Если в положении равновесия  $\Pi(q)$  не имеет минимума и это определяется по квадратичной форме её разложения в ряд (в окрестности положения равновесия), то это положение равновесия неустойчиво.

**Thr 13.5** (Теорема Ляпунова о неустойчивости II). Если в положении равновесия  $\Pi(q)$  имеет строгий максимум и это определяется по наименьшей степени её разложения в ряд (в окрестности положения равновесия), то это положение равновесия неустойчиво.

## Задача 1 (15.6)

$$\Pi = mgl(1 - \cos \varphi) - m\omega^2(l^2 \sin^2 \varphi)/2.$$

Найдём положения равновесия, как стационарные точки потенциала

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = mgl \sin \varphi - m\omega^2 l^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sin \varphi = 0, & \varphi = 0 \pm \pi \\ \cos \varphi = g/\omega^2 l, & \varphi = \pm \arccos g/\omega^2 l, \end{cases} \quad \omega > \omega^* = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Посмотрим на

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = ml^2\omega^2 \left( \frac{g}{\omega^2 l} - 1 \right)$$

При  $\varphi = 0$ , при  $\omega < \omega^*$  видим устойчивое положение равновесия. При  $\omega > \omega^*$  неустойчиво. При  $\omega = \omega^*$  видимо, что

$$\frac{d^4\Pi}{d\varphi^4} = ml^2\omega^2(-1 + 4) > 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0 - \text{устойчиво.}$$

Теперь посмотрим на  $\varphi = \pm\pi$ :

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} < 0.$$

При  $\cos \varphi = g/\omega^2 l$  видим, что

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = ml^2\omega^2 \left( \frac{g^2}{\omega^4 l^2} + 1 - 2 \frac{g^2}{\omega^4 l^2} \right) = ml^2\omega^2 \left( 1 - \frac{g^2}{\omega^4 l^2} \right),$$

видим, что  $\omega > \omega^*$  положение равновесия устойчиво, при  $\omega < \omega^*$  его попросту не существует.



Рис. 2: Бифуркационная диаграмма типа вилка

## Задача 4 (Гандтмахер, устойчивость)

$$\Pi = q^4 \sin^2 \frac{1}{q}, \quad \Pi(0) = 0, \quad q = 0 - \text{п.р.}$$