Первое задание по курсу «Аналитическая Механика»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *25 октября 2020 г.*

Содержание

1 Динамика

1.5 Движение точки в центральном поле сил

8.36

1.6 Элементы механики сплошых сред (МСС)

T11.

Движение среды происходит по закону ($\tau = \text{const} > 0$),

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad x = \xi_1 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right), \quad y = \xi_2 \left(1 + 2\frac{t}{\tau}\right), \quad z = \xi_3 \left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right).$$

Тогда поля скорости и ускорения в лагранжевом описании

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} \xi_1 & 2\xi_2 & 2\frac{t}{\tau}\xi_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{w} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\tau^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\xi_3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Пусть деформация произвола через малый промежуток времени dt, тогда $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}\, dt$. Представим $\partial \boldsymbol{u}/\partial \boldsymbol{r}$, как сумму симметричного и косо-симметричного

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{r}} = u_{ij} + \varphi_{ij},$$

где

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right), \quad \varphi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right).$$

Подставим $\boldsymbol{v}$ в эйлеровом описании

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\tau + t} & \dfrac{2y}{\tau + t} & \dfrac{2tz}{\tau^2 + t^2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \Rightarrow \quad u_{ij} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{t+\tau}, \frac{2}{\tau + t}, \frac{2t}{\tau^2 + t^2}\right)_{ij} dt, \quad \varphi_{ij} = 0.$$

Вращательное движение отсутствует.

Как можно заметить из выражения для $\boldsymbol{v}$ неподвижными будут частицы с $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0, \xi_3 = 0$, в начальный момент времени неподвижными будут все частицы с $\xi_3 = 0$.

T12 и T13. (Теория)

В равновесии силы внутренних напряжений должны взаимно компенсироваться, т.е.

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = -F_i = 0. \tag{1.1}$$

Также мы знаем обобщенный закон Гука:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma}\left[u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll}\ \delta_{ik}\right], \tag{1.2}$$

где $\sigma \in [0, 1/2]$ – коэффициент Пуассона, а E – модуль Юнга. Зная, что u_{ik} – симметричный тензор

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right),$$

получим

$$\frac{E}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}+\frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l}=0,$$

что перепишем в векторных обозначениях, в силу $\Delta \boldsymbol{u}=\partial^2 u_i/\partial x_k^2$, а $\partial u_l/\partial x_l=\operatorname{div}\boldsymbol{u}$, тогда

$$\Delta \boldsymbol{u}+\frac{1}{1-2\sigma}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0.$$

Вспомнив, что $\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\Delta\boldsymbol{u}+\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$,

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}-\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}=0. \tag{1.3}$$

T12 и T13. (общий случай)

Внешние и внутренние радиусы толстостенной сферы равны R_1 и R_2, внутри сферы действует давление p_1, снаружи действует p_2. Найдём деформацию и тензор напряжений для этой сферы.

Введём сферические координаты с началом в центре шара. В силу радиальности $\boldsymbol{u}\equiv\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$, следует, что $\operatorname{rot} u=0$, тогда уравнение (1.3) примет вид

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0, \tag{1.4}$$

с учётом (1.14),

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2u)}{r}=\text{const}\equiv 3a,$$

тогда

$$d(r^2u)=3ar^2\,dr \qquad\Rightarrow\qquad u=ar+\frac{b}{r^2}.$$

Выпишем компоненты тензора деформации в сферических координатах:

$$u_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\qquad u_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r},\qquad u_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta+\frac{u_r}{r}.$$

В остальные не входит u_r, соответственно они равны 0. В частности, для нашего случая

$$u_{rr}=a-\frac{2b}{r^3},\qquad u_{\theta\theta}=u_{\varphi\varphi}=\frac{u_r}{r}=a+\frac{b}{r^3}. \tag{1.5}$$

Также можем найти (диагональный) тензор напряжений :

$$\sigma_{rr}=\frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\Big[(1-\sigma)u_{rr}+2\sigma u_{\theta\theta}\Big]=\frac{E}{1-2\sigma}a-\frac{2E}{1+\sigma}\frac{b}{r^3}, \tag{1.6}$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\Big[(1+\sigma)u_{\theta\theta}+\sigma u_{rr}\Big]=\sigma_{\varphi\varphi}. \tag{1.7}$$

Также мы знаем следующие граничные условия:

$$\sigma_{rr}\big|_{r=R_1}=-p_1,\qquad \sigma_{rr}\big|_{r=R_2}=-p_2,$$

получаем

$$\boxed{a=\frac{p_1R_1^3-p_2R_2^3}{R_2^3-R_1^3}\frac{1-2\sigma}{E},\qquad b=\frac{R_1^3R_2^3(p_1-p_2)}{R_2^3-R_1^3}\frac{1+\sigma}{2E}.} \tag{1.8}$$

T12 и T13. (тонкая сферическая оболочка)

Рассмотрим теперь случай, когда $h=R_2-R_1\ll R$.

$$a\approx\frac{R}{3h}\frac{1-2\sigma}{E}(p_1-p_2),\qquad b\approx\frac{R^4}{3h}(p_1-p_2)\frac{1+\sigma}{2E}.$$

Тогда деформация

$$\left(\text{пусть } \varkappa=\frac{R^2}{3h}(p_1-p_2),\ \text{тогда}\right)\qquad u=\varkappa\frac{1-2\sigma}{E}+\varkappa\frac{1+\sigma}{2E}=\frac{r^2(1-\sigma)}{2Eh}(p_1-p_2).$$

Чуть интереснее выражение для σ_{rr} (введено обозначение $p=p_1-p_2$):

$$\sigma_{rr}=\frac{R_1^3}{R_2^3-R_1^3}\Bigg(\underbrace{p_1-p_2-p_2\frac{3h}{R}-\frac{R_2^2}{r^3}(p_1-p_2)}_{p(1-R_2^2/r^3)}\Bigg),$$

посмотрим, однако, на среднее по r значение.

$$\frac{1}{h}(R_1+h)^3\int_{R_1}^{R_1+h}\frac{1}{r^3}\,dr=\frac{R_1+h}{2}\left(\frac{2}{R_1}+\frac{h}{R_1^2}\right),$$

тогда

$$\frac{R_1^3}{R_2^3-R_1^3}\left\langle p\left(1-\frac{R_2^2}{r^3}\right)\right\rangle=\boxed{\langle\sigma_{rr}\rangle=\frac{1}{2}\Big(p_1+p_2\Big).}$$

Найдём остальные компоненты

$$\sigma_{\theta\theta}=\sigma_{\varphi\varphi}=\frac{3}{2}\left(\frac{R_1^3}{R_2^3-R_1^3}\right)\Big(p_1-p_2\Big)=\frac{1}{2}\frac{R}{h}(p_1-p_2).$$

T14*. (решение для криволинейных координат, образующих ортогональный базис)

Хотелось бы выразить лапласиан Δp через частные производные в произвольной криволинейной системе координат. Легко показать, что

$$\Delta p=\operatorname{div}\operatorname{grad}p. \tag{1.9}$$

Так что начнём с вида $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ и $\operatorname{grad}f$ в криволинейной системе координат. Понадеемся, что достаточно рассмотреть случай криволинейных координат, образующих ортогональный базис в каждой точке пространства.

В криволинейных координатах базисные направления сформированы векторами $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{r})\overset{\text{def}}{=}\partial\boldsymbol{r}/\partial q^i$. Для удобства введём единичные орты координатных направлений для ортогональной системы

$$\boldsymbol{e}_1(q)=\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}},0,0\right),\qquad \boldsymbol{e}_2(q)=\left(0,\frac{1}{\sqrt{g_{22}}},0\right),\qquad \boldsymbol{e}_3(q)=\left(0,0,\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\right). \tag{1.10}$$

Тогда

$$dq^j(\boldsymbol{e}_i)=\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\delta^i_j,\qquad dq^i\wedge dq^j(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l)=\frac{1}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}}\delta^i_k\delta^j_l. \tag{1.11}$$

Известно, что градиент функции соответствует дифференциальной 1-форме. Её (по вектору $\boldsymbol{A}$) можно записать как $\omega^1_A=a_i\,dq^i$. С учётом введеного базиса можно записать, что $\boldsymbol{A}=A^i\boldsymbol{e}_i$, $\forall\boldsymbol{A}\in T\mathbb{R}^3_q$. Из (1.11) получим, что

$$\omega^1_A(\boldsymbol{e}_i)=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_i)=A^i=\frac{a_i}{\sqrt{g_{ii}}},$$

следовательно $a_i=A^i\sqrt{E_i}$, и, соответственно

$$\omega^1_A=A^i\sqrt{g_{ii}}dq^i. \tag{1.12}$$

Аналогично, пусть теперь $\operatorname{grad}f=A^i\boldsymbol{e}_i$. По определению

$$\omega^1_{\operatorname{grad}f}=d\omega^0_f=df=\frac{\partial f}{\partial q^i}dq^i.\qquad\Rightarrow\qquad\boxed{\operatorname{grad}f=\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\frac{\partial f}{\partial q^i}\boldsymbol{e}_i.}$$

Теперь найдём $\operatorname{div}\boldsymbol{B}$, как дифференциальную 3-форму. Для начала поймём, что для вектора $\boldsymbol{B}(q)=(B^i\boldsymbol{e}_i)(q)$ форма

$$\omega^2_B=b_1dq^2\wedge dt^3+b_2dq^3\wedge dt^1+b_3dq^1\wedge dt^2 \tag{1.13}$$

имеет следующий вид:

$$\omega^2_B(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=B^1.$$

С другой стороны, из (1.11) и (1.13),

$$\omega^2_B(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=b_1dq^2\wedge dq^3(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\frac{b_1}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}.$$

Получаем, что $b_1=B^1\sqrt{g_{22}g_{33}}$, аналогично можем получить, что $b_2=B^2\sqrt{g_{11}g_{33}}$, $b_3=B^3\sqrt{g_{11}g_{22}}$.

Теперь, из определения, получаем

$$\omega^3_{\operatorname{div}B}=d\omega^2_B=\sum_{\substack{i\neq j\neq k\\ P(i,g,k)=1}}^{3}\frac{\partial\sqrt{g_{jj}g_{kk}}B^i}{\partial q^i}dq^i\wedge dq^j\wedge dq^k.$$

Тогда

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\left(\frac{\partial\sqrt{g_{22}g_{33}}B^1}{\partial q^1} + \frac{\partial\sqrt{g_{33}g_{11}}B^1}{\partial q^2} + \frac{\partial\sqrt{g_{11}g_{22}}B^1}{\partial q^3}\right) \tag{1.14}$$

Собирая всё вместе получаем, что

$$\Delta f = \operatorname{div}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\frac{\partial f}{\partial q^i}\boldsymbol{e}_i\right) = \frac{1}{\det g}\sum_{\substack{i\neq j\neq k\\ P(i,g,k)=1}}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\left[\sqrt{\frac{g_{jj}g_{kk}}{g_{ii}}}\frac{\partial f}{\partial q^i}\right]\right). \tag{1.15}$$

В частности, для полярных

$$g_{ij} = \operatorname{diag}\left(1, r^2, 1\right) \quad\Rightarrow\quad \Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

T15*.

Запишем ковариантную производную вектора и ковектора:

$$\nabla_j v_m = \frac{\partial v_m}{\partial q^i} - \Gamma^i_{kj}v_i, \qquad \nabla_k v^j = \frac{\partial v^i}{\partial q^k} + \Gamma^i_{kj}v^j. \tag{1.16}$$

В таком случае

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j - \nabla_j v_i\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial q^i} + \Gamma^k_{ji}v_k - \frac{\partial v_i}{\partial q^j} - \Gamma^k_{ij}v_k\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial q^i} - \frac{\partial v_i}{\partial q^j}\right),$$

что и требовалось доказать.

Перейдём к следующему заданию. Корректнее сказать, что **псевдо**вектор вихря ω может быть представлен $\omega_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j$, т.к. при выводе критически важно, что

$$\left[\boldsymbol{e}^1\times\boldsymbol{e}^2\right] = \boldsymbol{e}^3, \tag{1.17}$$

соотвественно $\boldsymbol{\omega}$ не инвариантен к зеркальному отображению базиса.

Судя по символу Леви-Чевиты речь идёт о трёхмерной задаче, так что нам достаточно показать что

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{ij}\left[\boldsymbol{e}^i\times\boldsymbol{e}^j\right], \qquad \text{где} \qquad \omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^3 & -\omega^2\\ -\omega^3 & 0 & \omega^1\\ \omega^2 & -\omega^1 & 0\end{pmatrix}_{ij}, \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\\ \omega^3\end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad \omega^\gamma = \frac{1}{2}\varepsilon^{\gamma\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}, \tag{1.18}$$

что проверяется прямой подстановкой:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega^3\underbrace{\left[\boldsymbol{e}^1\times\boldsymbol{e}^2\right]}_{\boldsymbol{e}^3} + \left(-\omega^3\right)\underbrace{\left[\boldsymbol{e}^2\times\boldsymbol{e}^1\right]}_{-\boldsymbol{e}^3} + \ldots = \begin{pmatrix}\omega^1\\ \omega^2\\ \omega^3\end{pmatrix}.$$