Конспект первого тома курса теоретической физики «Механика»

Авторы: Хоружий Кирилл
Примак Евгений

От: *5 сентября 2020 г.*

Содержание

1 Уравнения движения

1.2 Принцип наименьшего действия

Thr 1.1 (Принцип Гамильтона / принцип наименьшего действия)**.** *Каждая механическая система характеризуется*[1] *определенной функцией*

$$L(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, t) \equiv L(q, \dot{q}, t),$$

удовлетворяющая следующему условию.

Пусть t_1 и t_2 – два момента времени. Тогда между этими положениями система движется таким образом, что

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) \tag{1.1}$$

имеет наименьшее возможное значение на малых участках и экстремальное для всей траектории. Функция L называется функцией Лагранжа данной системы, а интеграл (1.1) *— действием.*

Рассмотрим сначала одномерный случай. Пусть $q = q(t)$ есть как раз та функция, для которой S имеет минимум. Тогда S возрастает при $q \rightsquigarrow q + \delta q$, где $\delta q(t)$ – функция, малая во всем интервале от t_1 до t_2, – *вариация* функции $q(t)$. Также учтём, что[2]

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \tag{1.2}$$

Изменение S при замене q на $q + \delta q$ дается разностью

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q}, t)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt.$$

Во-первых, при разложение по степеням δq и $\delta \dot{q}$, получим обращение в нуль совокупности членов первого порядка — *первая вариация / вариация* интеграла. Тогда принцип наименьшего действия запишется в виде

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt = 0 \tag{1.3}$$

или, произведя варьирование[3]:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \partial q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) = 0 \qquad \Big/ \overset{\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q}{\Longrightarrow} \Big/ \qquad \delta S = \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2}} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q\, dt = 0.$$

Оставшийся интеграл равен нулю при произвольных δq. Это возможно, только если подынтегральное выражение $\equiv 0$. Таким образом, получаем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{1.4}$$

При наличии нескольких степеней свободы в принципе наименьшего действия должны независимо варьироваться s различных функций $q_i(t)$. Тогда мы получаем s уравнений:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,} \quad (i = 1, 2, \ldots, s) \text{ — \textit{уравнения Лагранжа}} \tag{1.5}$$

Но только в механике[4]. Если функция Лагранжа данной механической системы известна, то уравнения устанавливают связь между ускорениями[5], скоростями и координатами – соответствуют уравнениям движения системы.

Стоит заметить, что функция Лагранжа определена лишь с точностью до прибавления к ней полной производной от любой функции координат и времени.

1.3 Принцип относительности Галилея

Def 1.2. По первому закону Ньютона (да?) всегда можно найти такую систему отсчёта, по отношению к которой пространство однородно и изотропно, а время – однородно. Такая система называется *инерциальной*.

[1] Почему нет более высоких производных и зачем нужны скорости?
[2] Почему?
[3] Проделать аккуратно ручками!
[4] В вариационном исчислении – *уравнения Эйлера*.
[5] Почему?

Что ж, тогда $L \neq f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)$, т.е. $L = L(v)$. Тогда для L верно, что $\partial L/\partial \boldsymbol{r} = 0$, и потому из уравнений Лагранжа можно получить

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = 0, \quad \Rightarrow \Big/ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \text{const}, \quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} \equiv \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}) \Big/ \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} = \text{const}$$

Получается в ИСО всякое свободное движение происходит с $\boldsymbol{v} = \text{const}$, — *закон инерции.*

Тот замечательный факт, что таких ИСО много, и что законы там одинаковые формирует *принцип относительности Галилея.*

1.4 Функция Лагранжа свободной материальной точки

Посмотрим на вид L для свободного движения материальной точке в ИСО. Пусть Kдвижется относительно K' с малой скоростью $\boldsymbol{\varepsilon}$. Так как уравнения движения во всех системах отсчета должны иметь один и тот же вид[6], то $L(\boldsymbol{v}^2)$ перейдёт в $L' = L(\boldsymbol{v}^2) + \frac{d}{dt}f(\boldsymbol{q}, t)$. Тогда

$$L' = L(\boldsymbol{v}^2 + 2\boldsymbol{v}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^2), \quad \Rightarrow \Big/ \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 \Big/ \Rightarrow \quad L(\boldsymbol{v}'^2) = L(\boldsymbol{v}^2) + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}^2} 2\boldsymbol{v}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \Rightarrow \Big/ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}^2} \neq f(\boldsymbol{v}) \Big/ \Rightarrow \quad L = \frac{m}{2}\boldsymbol{v}^2,$$

где m – постоянная.

Из того что L такого вида работает для бесконечно малых $\boldsymbol{\varepsilon}$ следует, что всё хорошо и для конечной скорости V. Действительно[7],

$$L' = \frac{m}{2}\boldsymbol{v}'^2 = \frac{m}{2}\left(\boldsymbol{v}^2 + 2\boldsymbol{v}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}^2\right), \quad \text{или} \quad L' = L + \frac{d}{dt}\left(2\frac{m}{2}\boldsymbol{r}\boldsymbol{V} + \frac{m}{2}\boldsymbol{V}^2 t\right).$$

Второй член является полной производной и может быть опущен (?). Величина m — *масса* материальной точки. В силлу аддитивности L, для системы невзаимодействующих точек

$$L = \sum_a \frac{m_a}{2}\boldsymbol{v}_a^2.$$

Собственно какой-то смысл несет только отношение масс. К слову, масса не бывает отрицательной.

$$\text{Полезно заметить, что} \qquad \boldsymbol{v}^2 = \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{dl^2}{dt^2}.$$

Поэтому для составления L достаточно найти квадрат dl в соответствующей системе координат. Например в:

координатах:	dl	L
декартовых	$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dx^2$	$\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$;
цилиндрических	$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$	$\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right)$;
сферических	$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$	$\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)$.

1.5 Функция Лагранжа системы материальных точек

Def 1.3. Система материальных точек, взаимодействующих только друг с другом, — *замкнутая.*

Считая, что мы не выходим за пределы классической механики, введём функцию координат U — *потенциальная энергия.*

$$L = \sum_a \frac{m_a}{2} v_a^2 - U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots) \tag{1.6}$$

Тот факт, что U – функция только координат, означает, что взаимодействие «распространяются» мгновенно – проделки абсолютности времени и принципа относительности Галилея. Также стоит заметить, что $L(\ldots, t) = L(\ldots, -t)$. То есть если в система возможно движение, то всегда возможно и обратное движение.

Зная функцию Лагранжа, мы можем составить уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} \quad \overset{(1.6)}{\Longrightarrow} \quad \boxed{m_a \frac{d\boldsymbol{v}_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}.} \text{ — \textit{уравнения Ньютона}} \tag{1.7}$$

Def 1.4. Вектор $\boldsymbol{F}_a = -\dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}$ – *сила*, действующая на a-ю точку.

[6] Ещё раз, почему?

[7] Вторую часть проделать ручками!

Если для описания движения используются не декартовы координаты точек, а произвольные обобщенные координаты q_i, то для получения L надо произвести соответствующее преобразование

$$x_a = f_a(q_1, \ldots, q_s),\ \dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k}\dot{q}_k,\ \ldots \quad \Rightarrow \Big/ L = \frac{1}{2}\sum_a m_a\left(\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2\right) \Big/ \Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\cdot\dot{q}_i\dot{q}_k - U(q)},$$

где a_{ik} – функции только координат. Кинетическа энергия $= f(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q})$.

рассмотрим теперь незамкнутую систему A, взаимодействующую с другой системой B, совершающей заданное движение. В таком случае A движется в заданном внешнем поле (системы B). Для нахождения L_A системы A воспользуемся L_{A+B}, заменив q_B функциями времени. Предполагая систему $A+B$ замкнутой,

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_b, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B).$$

Т.к. $T_B(q_b, \dot{q}_B)$ зависит только от времени (и потому[8]– полная производная функции времени), то

$$L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t)).$$

Получается единственно отличие – явная зависимость от времени для U.

Так, для одной частицы во внешнем поле общий вид функции Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}v^2 - U(\boldsymbol{r}, t), \quad \text{и уравнения движения} \quad m\dot{\boldsymbol{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}. \tag{1.8}$$

Def 1.5. *Однородным* называют поле, во всех точках которого действует $\boldsymbol{F} \equiv \text{const}$, соотвественно $U = -\boldsymbol{F}\boldsymbol{r}$.

2 Законы сохранения

2.6 Энергия

Def 2.1. Существуют такие функции f, такие что $f(q_i, \dot{q}_i) \equiv \text{const}$, зависящие только от начальных условий. Эти функции называют *интегралами движения.*

Thr 2.2. *Число независимых интегралов движения для замкнутой механической системы с s степенями свободы равно $2s-1$.*

$\triangle^{\text{✗}}$. Общее решение уравнений движения содержит $2s$ произвольных переменных[9]. Поскольку уравнения движения замкнутой системы не содержат времени явно[10], то выбор начала отсчёта времени произволен, и одна из произвольных постоянных в решении уравнений всегда может быть выбрана в виде аддитивной постоянной t_0 во времени. Исключив из $2s$ функций $t + t_0$

$$q_i = q_i\left(t + t_0, C_1, \ldots, C_{2s-1}\right),$$
$$\dot{q}_i = \dot{q}_i\left(t + t_0, C_1, \ldots, C_{2s-1}\right),$$

выразим $2s-1$ произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_{2s-1}$ в виде функций от q и $\dot{q}$, которые и будут интегралами движения. $\square$

Из них только несколько содержательных, постоянство которых связано с однородностью и изотропией пространства времени (наверное). Однако все интегралы движения аддитивны (при пренебрежимо малом взаимодействии).

Начнем с закона сохранения, возникающего в связи с *однородностью времени.* В следствии этой однородности L замкнутой системы не зависит от времени. Поэтому[11]

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \overset{(1.5)}{\Longrightarrow} \frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) \iff \frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0.$$

Def 2.3. Величина

$$\boxed{E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L} \text{ — \textit{энергия}} \tag{2.1}$$

остаётся неизменной при движении замкнутой системы, т.е. является одним из интегралов движения. Аддитивность энергии непосредственно следует из аддитивности L.

[8] Почему?

[9] Речь про $\boldsymbol{q}$ и $\dot{\boldsymbol{q}}$, да?

[10] ?

[11] Если бы L зависела **явно** от времени, к правой части равенства добавился бы член $\partial L/\partial t$. Не зависит **явно** – частная производная 0, да?

Механические системы, энергия которых сохраняются, иногда называют *консервативными*. Аналогичное утверждение ($E = \text{const}$) верно для систем в постоянном поле, L также явно не зависит от времени.

В постоянном поле $L = T(q, \dot{q}) - U(q)$, где T – квадратичная функция $\dot{q}$. Применив теорему Эйлера об однородных функциях (см. *thr* 8.1), получим

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T \overset{(2.1)}{\Longrightarrow} \boxed{E = T(q, \dot{q}) + U(q)} \overset{\text{в ДСК}}{\Longleftrightarrow} E = \sum_a \frac{m_a}{2} v_a^2 + U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots).$$

Таким образом энергия системы разделяется на кинетическую $\equiv f(\dot{q})$ и потенциальную $\equiv f(q)$.

2.7 Импульс

Теперь о сохранении, связанном с однородностью пространства (наверное).

В силу этого свойства замкнутой системы не меняются при любом параллельном переносе системы. В таком случае рассмотрим сдвиг на бесконечно малые $\boldsymbol{\varepsilon}$ каждой точки системы, т.е. $\boldsymbol{r}_a \rightsquigarrow \boldsymbol{r}_a + \boldsymbol{\varepsilon}$. Изменение функции L в результате бесконечно малого изменения координат при неизменных скоростях есть

$$\delta L = \sum_A \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} \delta \boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{\varepsilon} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}.$$

Т.к. это верно $\forall \boldsymbol{\varepsilon}$, то

$$\delta L = 0 \iff \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} = 0, \overset{(1.7)}{\Longrightarrow} \sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = 0. \tag{2.2}$$

Def 2.4. В замкнутой системе векторная величина

$$\boldsymbol{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} \overset{(1.6)}{=} \sum_a m_a \boldsymbol{v}_a \tag{2.3}$$

остается неизменной при движении. Вектор $\boldsymbol{P}$ называется *импульсом* системы.

Стоит обратить внимание, что (2.2) о том, что $\partial L / \partial \boldsymbol{r}_a = -\partial U / \partial \boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{F}_a$. То есть (2.2) $\Leftrightarrow \sum_a \boldsymbol{F}_a = 0$. Это, в принципе, и есть третий закон Ньютона.

Если движении описывается q_i, то

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{2.4}$$

называются *обобщенными импульсами*, а производные

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{2.5}$$

называются *обобщенными силами*. Так уравнения Лагранжа имеют вид

$$\dot{p}_i = F_i. \tag{2.6}$$

2.8 Центр инерции

Если система отсчёта K' движется относительно K со скоростью $\boldsymbol{V}$,то

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}' + \boldsymbol{V} \sum\nolimits_a m_a. \tag{2.7}$$

В частности всегда существует такая K', в которой $\boldsymbol{P}' = 0$. Скорость этой системы отсчёта равна

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{P}}{\sum m_a} = \frac{\sum m_a \boldsymbol{v}_a}{\sum m_a} = \frac{d}{dt} \boldsymbol{R} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum m_a \boldsymbol{r}_a}{\sum m_a} \right), \text{ где } \boldsymbol{R} \text{ — \textit{центр инерции} системы} \tag{2.8}$$

Закон сохранения импульса замкнутой системы можно сформулировать как утверждение о том, что ее центр инерции движется прямолинейно и равномерно. Энергию покоящейся механической системы обычно называют *внутренней энергией* $E_{\text{вн}}$. Полная же энергия системы может быть представлена в виде

$$E = \frac{\mu}{2} \boldsymbol{V}^2 + E_{\text{вн}} \quad \Leftarrow \quad E = E' + \boldsymbol{V} \boldsymbol{P}' + \frac{\mu}{2} \boldsymbol{V}^2. \tag{2.9}$$

Также можно посмотреть на действие в другой СО:

$$L = L' + \boldsymbol{V} \boldsymbol{P}' + \frac{\mu}{2} \boldsymbol{V}^2 \overset{\int dt}{\Longrightarrow} S = S' + \mu \boldsymbol{V} \boldsymbol{R}' + \frac{\mu}{2} \boldsymbol{V}^2 t, \quad \text{где } \boldsymbol{R}' \text{ — центр инерции в } K'. \tag{2.10}$$

2.9 Момент импульса

Поговорим про закон сохранения от *изотропии пространства*. Введём $\delta\boldsymbol{\varphi}$, такой, что $(\delta\boldsymbol{\varphi})^2 = (\delta\varphi)^2$ и направление совпадает с осью поворота. Тогда

$$\delta\boldsymbol{r} = [\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{r}], \qquad \delta\boldsymbol{v} = [\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{v}]. \tag{2.11}$$

При повороте $L \equiv \text{const}$, т.е.

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}\delta\boldsymbol{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a}\delta\boldsymbol{v}_a \right) = 0 \quad \overset{\partial L/\partial v_a = p_a}{\underset{\partial L/\partial r_a = \dot{p}_a}{\Longrightarrow}} \quad \sum_a \left(\dot{\boldsymbol{p}}_a[\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{r}_a] + \boldsymbol{p}_a[\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{v}_a] \right) = 0,$$

или, производя циклическую перестановку множителей и вынося $\delta\boldsymbol{\varphi}$ за знак суммы, имеем

$$\delta\boldsymbol{\varphi} \sum\nolimits_a \left([\boldsymbol{r}_a \cdot \dot{\boldsymbol{p}}_a] + [\boldsymbol{v}_a \cdot \boldsymbol{p}_a] \right) = \delta\varphi \frac{d}{dt} \sum\nolimits_a [\boldsymbol{r}_a \cdot \boldsymbol{p}_a] = 0 \quad \overset{\text{т.к. } \forall \delta\boldsymbol{\varphi}}{\Longrightarrow} \quad \frac{d}{dt} \sum\nolimits_a [\boldsymbol{r}_a \cdot \boldsymbol{p}_a] = 0.$$

Def 2.5. При движении системы сохраняется векторная величина

$$\boldsymbol{M} = \sum\nolimits_a [\boldsymbol{r}_a \cdot \boldsymbol{p}_a], \tag{2.12}$$

называемая *моментом импульса* (или *моментом*, *вращательным моментом*, *угловым моментом*) системы.

Этим исчерпываются (почему?) **аддитивные** интегралы движения. Таким образом, всякая замкнутая система имеет всего **семь** таких интегралов: E и три компоненты векторов $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{M}$.

Стоит заметить, что в другой смещённой СО ($\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{r}'_a + \boldsymbol{a}$)

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' + [\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{P}]. \tag{2.13}$$

Из этой формулы видно, что в случае, когда $\boldsymbol{P} = 0$, момент системы не зависит от выбора начала координат.

В случае же, когда K' движется относительно K со скоростью V верно, что

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' + \mu[\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{V}]. \tag{2.14}$$

Если система K' есть та, в которой система покоится как целое, то $\boldsymbol{V}$ есть скорость центра инерции, а $\mu\boldsymbol{V}$ – её полный импульс $\boldsymbol{P}$ (относительно K). Тогда

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' + [\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{P}]. \tag{2.15}$$

Другими словами, $\boldsymbol{M}$ механической системы складывается из её «собственного момента» относительно СО: $V_{\text{ц.м.}} = 0$, и момента $[\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{P}]$, связанного с её движением как целого.

Во внешнем же поле $\boldsymbol{M}$ сохраняется в проекции на такую ось, относительно которой данное поле симметрично.

Проекция момента на какую-либо ось (z) может быть найдена по формуле

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a} = \sum_a m_a r_a^2 \dot{\varphi}_a, \tag{2.16}$$

где координата φ есть угол поворота вокруг оси z.

2.10 Механическое подобие

Thr 2.6. *Если потенциальная энергия системы является однородной функцией k-й степени от декартовых координат, то уравнения движения допускают геометрически подобные траектории.*

t'/t	k	ситуация
1	2	малые колебания
$(l'/l)^{1/2}$	1	однородное силовое поле
$(l'/l)^{3/2}$	-1	ньютоновское притяжение кулоновское взаимодействие

При чем все времена движения (между соответственными точками траекторий) относятся, как

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-k/2}, \tag{2.17}$$

где l'/l – отношение линейных размеров двух траекторий. Аналогичное можно утверждать и для

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k/2}, \quad \frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{k}, \quad \frac{M'}{M} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+k/2}. \tag{2.18}$$

$\triangle$. Пусть $U(\alpha\boldsymbol{r}_1,\ldots,\alpha\boldsymbol{r}_n) = \alpha^k U(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_n)$. Рассмотрим преобразование $\boldsymbol{r}_a \to \alpha\boldsymbol{r}_a$, $t \to \beta t$. Все скорости изменятся в α/β раз, а T – в α^2/β^2 раз. Тогда

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k, \quad \text{т.е.} \quad \beta = \alpha^{1-k/2}, \qquad \Longrightarrow \qquad L \to \alpha^k L$$

Что соответствует тому же лагранжиану системы. $\square$

Thr 2.7 (Вириальная теорема)**.** *Если движение системы, потенциальная энергия котороя является однородной функцией координат, происходит в ограниченной области пространства, то*

$$2\overline{T} = k\overline{U}, \qquad \overset{\overline{T}+\overline{U}=\overline{E}=\overline{E}}{\Longrightarrow} \qquad \overline{U} = \frac{2}{k+2}E, \quad \overline{T} = \frac{k}{k+2}E. \tag{2.19}$$

В частности, для малых колебаний ($k = 2$) имеем $\overline{T} = \overline{U}$, а для ньютоновского взаимодействия ($k = -1$) $2\overline{T} = -\overline{U}$, при этом $E = -\overline{T}$.

$\triangle$. По теореме Эйлера об однородных функциях:

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a}\boldsymbol{v}_a = 2T, \qquad \overset{\partial T/\partial \boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{p}_a}{\Longrightarrow} \qquad 2T = \sum_a \boldsymbol{p}_a\boldsymbol{v}_a = \frac{d}{dt}\left(\sum_a \boldsymbol{p}_a\boldsymbol{r}_a\right) - \sum_a \boldsymbol{r}_a\dot{p}_a.$$

Предположим, что система совершает движение в конечной области пространства с конечными скоростями. Тогда величина $\sum \boldsymbol{r}_a\boldsymbol{p}_a$ ограничена, и среднее значение обращается в нуль. Тогда, согласно уравнениям Ньютона,

$$2t = \sum_a \overline{\boldsymbol{r}_a \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}}, \qquad \overset{\text{по т. Эйлера}}{\Longrightarrow} \qquad 2\overline{T} = k\overline{U}, \tag{2.20}$$

в силу однородности $U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots)$ k-й степени. $\square$

7 Канонические уравнения

7.40 Уравнения Гамильтона

Лагранжиан удобен для выражений через обобщенные скорости и координаты. Можно ещё попробовать через импульсы. Переход от одного набора независимых переменных к другому можно совершить путём *преобразования Лежандра.*

Полный дифференциал функции Лагранжа как функции координат и скорости равен

$$dL = \sum\nolimits_i \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \sum\nolimits_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i \qquad \Leftrightarrow \qquad dL = \sum \dot{p}_i\, dq_i + \sum p_i\, d\dot{q}_i.$$

Переписав второй член в другом виде, получим

$$\sum\nolimits_i p_i d\dot{q}_i = d\left(\sum\nolimits_i p_i\dot{q}_i\right) - \sum\nolimits_i \dot{q}_i dp_i, \qquad d\Big(\sum\nolimits_i p_i\dot{q}_i - L\Big) = -\sum\nolimits_i \dot{p}_i\, dq_i + \sum\nolimits_i q\delta_i\, dp_i.$$

Def 7.1. Энергия системы, выраженная через координаты и импульсы

$$H(p,q,t) = \sum\nolimits_i p_i\dot{q}_i - L, \text{ — \textit{гамильтоновая функция} системы.} \tag{7.1}$$

В частности, из дифференциального равенства, можно получить

$$dH = -\sum\nolimits_i \dot{p}_i\, dq_i + \sum \dot{q}_i\, dp_i, \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}} \tag{7.2}$$

Это – искомые уравнения движения в переменных q и p — *уравнения Гамильтона.* Они составляют систему $2s$ дифференциальных уравнений первого порядка для $2s$ неизвестных функций $p(t)$ и $q(t)$, заменяющих собой s уравнений первого порядка лагранжевого метода. Ввиду их формальной простоты эти уравнения называют *каноническими.*

8 Дополнение

Thr 8.1 (теорема Эйлера об однородных функциях)**.** *Пусть дифференцируемая функция* $f\colon \mathbb{R}^n \ni X \to \mathbb{R}$ *такая, что* $\forall \boldsymbol{r} \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *выполняется:*

$$f(\lambda \boldsymbol{r}) = \lambda^k f(\boldsymbol{r}), \text{ — \textit{однородная функция, тогда}} \quad \boxed{\sum\nolimits_i r_i \frac{\partial f}{\partial r_i} = k f(\boldsymbol{r})}. \tag{8.1}$$

△. Дифференцируя условие (8.1), по λ, получим соотношение

$$\sum\nolimits_i \frac{\partial f}{\partial(\lambda r_i)} \frac{\partial(\lambda r_i)}{\partial \lambda} = k\lambda^{k-1} f(\boldsymbol{r}),$$

верное $\forall \lambda$. Достаточно принять $\lambda = 1$. □