

# БИЛЕТЫ К ЭКЗАМЕНУ «КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ»

---

Авторы:   Примаков Евгений  
              Хоружий Кирилл

От:   10 января 2021 г.

## Содержание

<b>Свёртка и приближение функций бесконечно гладкими</b>	<b>3</b>
1   Свёртка функций и её свойства . . . . .	3
2   Бесконечно гладкие функции с компактным носителем . . . . .	3
3   Приближение функций бесконечно гладкими . . . . .	3
<b>Дифференцируемые отображения и криволинейные замены координат</b>	<b>4</b>
4   Дифференцируемые отображения и дифференцирование композиции . . . . .	4
5   Системы криволинейных координат и теорема об обратном отображении . . . . .	4
6   Теоремы о системе неявных функций . . . . .	4
7   Теорема о расщеплении гладкого отображения . . . . .	5
<b>Дифференциал, гессиан, и исследование функции на экстремум</b>	<b>6</b>
9   Локальные экстремумы функции и необходимое условие экстремума . . . . .	6
10  Необходимые и достаточные условия экстремума $C^2$ функций . . . . .	6
11  Условные экстремумы и необходимое условие в терминах первых производных . . . . .	6
12  Необходимые и достаточные условия в терминах вторых производных . . . . .	6
<b>Векторы и дифференциальные формы первой степени</b>	<b>7</b>
13  Вектор, как дифференцирование . . . . .	7
14  Касательное пространство и дифференциал отображения . . . . .	7
15  Диф-формы I степени . . . . .	7
<b>Диф-формы высших степеней</b>	<b>8</b>
16  Определение и свойства диф-форм высших степеней . . . . .	8
17  Внешнее умножение диф-форм . . . . .	8
18  Внешнее дифференцирование . . . . .	8
19  Обратный образ диф-форм . . . . .	8
<b>Интегрирование дифференциальных форм</b>	<b>9</b>
20  Интегрирование диф-формы объёма . . . . .	9
21  Представление диф-формы в каноническом виде . . . . .	9
22  Поведение интеграла от формы при линейной замене координат . . . . .	9
23  Гладкое разбиение единицы . . . . .	9
24  Поведение интеграла от формы при гладкой замене координат . . . . .	9
25  Формулы гладкой замены переменных в интеграле Лебега от функции . . . . .	9
<b>Многообразия (с краем) и формула Стокса</b>	<b>10</b>
26  Вложенные многообразия . . . . .	10
27  Абстрактное определение гладкого многообразия . . . . .	10
28  Диф-формы, векторные поля и $d$ на многообразии . . . . .	10
29  Гладкие отображения многообразий . . . . .	11
30  Ориентируемость многообразия . . . . .	11
31  Определение интеграла диф-формы по ориентированному многообразию . . . . .	12
32  Общая формула Стокса . . . . .	12
33  Частные случаи формулы Стокса . . . . .	12
34  Потенциал диф-форм . . . . .	12

<b>Элементы дифференциальной топологии</b>	<b>14</b>
35 Замкнутые и точные формы. Цепные гомотопии . . . . .	14
36 Когомологии де Рама . . . . .	14
37 Потенциал дифференциальных форм . . . . .	14
38 Критические и регулярные значения, теорема Сарда . . . . .	15
39 Степень гладкого отображения . . . . .	15
40 Степень гладкого отображения с помощью интегрирования . . . . .	16
41 Теорема Брауэра о неподвижной точке . . . . .	16
42 Существование нигде не нулевых векторных полей на сфере . . . . .	16
<b>Дифференцирование и интегрирование векторных полей</b>	<b>17</b>
43 Внутреннее дифференцирование . . . . .	17
44 Производная Ли и скобка Ли . . . . .	17
47 Дивергенция векторного поля на многообразии с формой объема . . . . .	17
<b>Решения</b>	<b>19</b>
1 Свёртка функций и её свойства . . . . .	19
2 Бесконечно гладкие функции с компактным носителем . . . . .	19
3 Приближение функций бесконечно гладкими . . . . .	19
6 Теоремы о системе неявных функций . . . . .	19
<b>Призраки прошлого и настоящего</b>	<b>20</b>
239 Прошлого . . . . .	20
556 Настоящего . . . . .	20

# Свёртка и приближение функций бесконечно гладкими

## 1 Свёртка функций и её свойства

**Def 1.1** (Свертка функции). Свёртку ещё пишут как  $h = f * g$ .

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t) dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t) dt,$$

Свёртка также ассоциативна:  $f * (g * h) = (f * g) * h$ , для функций с конечным интегралом. Чтобы интеграл существовал, можно заметить, что если одна из функций ограничена, а другая имеет конечный интеграл, тогда и свёртка будет ограничена, кроме того:

**Thr 1.2.** Если  $f$  и  $g$  имеют конечный интегралы, то  $h = f * g$  определена почти всюду и верно неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g| dx < \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g| dx,$$

и равенство:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f * g dx = \int_{\mathbb{R}^n} f dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} g dx.$$

**Lem 1.3.** Если свёртка  $g * f$  — **ограничена**, где  $g$  — имеет конечный интеграл, а  $f$  и  $\partial_x f$  — ограничены, то возможно дифференцирование под знаком интеграла (239.1), и мы получаем:

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(x-t)}{\partial x_i} g(t) dt = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g.$$

## 2 Бесконечно гладкие функции с компактным носителем

Возьмём  $f \in C^\infty$  такую, что  $\forall k f^{(k)}(0) = 0$ . Из неё составим  $\varphi \in C^\infty$  большую нуля на  $(-1, 1)$ :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ e^{-1/x}, & x > 0. \end{cases} \quad \varphi(x) = f(x+1)f(1-x).$$

**Lem 2.1.**  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  бесконечно гладкая  $\varphi_\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\varphi_\varepsilon(x) \neq 0 \forall x \in U_\varepsilon(0)$ , **такая что**  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1$ .

**Lem 2.2.**  $\forall \varepsilon > \delta > 0 \exists$  бесконечно гладкая  $\psi_{\varepsilon, \delta}: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ ,  $\psi_{\varepsilon, \delta}(x) \neq 0 \forall x \in U_\varepsilon(0)$  и  $\psi_{\varepsilon, \delta}(x) \neq 0 \forall x \in U_\delta(0)$ .

## 3 Приближение функций бесконечно гладкими

Пусть  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , неотрицательная  $\varphi \in C^\infty$ ,  $\varphi \neq 0$  при  $|x| \leq 1$  и пусть  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$ . Положим  $\varphi_k(x) = k^n \varphi(kx)$ , у которых так же будут  $\int = 1$  и которые  $\varphi_k \neq 0$  при  $|x| \leq 1/k$ .

**Thr 3.1.** Для непрерывной  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  определим свёртки:

$$f_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)\varphi_k dt = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\varphi_k(x-t) dt \quad \rightsquigarrow \quad f_k \in C^\infty, f_k \rightarrow f \text{ равномерно на компактах в } \mathbb{R}^n.$$

**Thr 3.2.** Если  $f$  имеет непр. производные до  $m$ -го порядка, то производные  $f_k$  до  $m$ -го порядка равномерно сходятся на компактах к соответствующим  $f'$ .

**Thr 3.3.** Пусть  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f \in \mathcal{L}_c$ . Тогда свёртки  $f * \varphi_k$  с функциями из теоремы 3.1 сколь угодно близко приближают  $f$  в среднем.

# Дифференцируемые отображения и криволинейные замены координат

## 4 Дифференцируемые отображения и дифференцирование композиции

**Def 4.1.** Пусть  $U \subset \mathbb{R}^n$  – открытое множество. Отображение  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется *дифференцируемым* в точке  $x_0 \in U$ , если

$$f(x) = f(x_0) + Df_{x_0}(x - x_0) + o(|x - x_0|), \quad x \rightarrow x_0,$$

где  $Df_{x_0}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$  – линейное отображение, называемое *производной*  $f$  в точке  $x_0$ .

**Def 4.2.** Функция  $f$  называется *непрерывно дифференцируемой* на  $U$ , если оно дифференцируемо в каждой точке и  $Df_x$  непрерывно зависит от  $x$ .

**Thr 4.3** (Дифференцирование композиции). Если  $f$  дифференцируемо в точке  $x_0$ ,  $g$  дифференцируемо в точке  $y_0 = f(x_0)$ , то композиция  $g \circ f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , и  $D(g \circ f)_{x_0} = Dg_{y_0} \circ Df_{x_0}$ .

**Def 4.4.** Производная функции  $f$  по направлению  $v \in \mathbb{R}^n$  в точке  $x$  называется

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \right)$$

**Lem 4.5.** Если функция дифференцируема в точке  $x$ , то в этой точке

$$\frac{\partial f}{\partial v} = Df_x(v).$$

В частности для функционалов, верно что  $\partial f / \partial v = df_x(v)$ . Более того, выбрав в качестве  $v$  базисные векторы  $e_i$ , поймём что

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} x^i,$$

где  $dx^i$  – дифференциалы координатных функций, образующие двойственный базис.

**Thr 4.6.** Если отображение  $f: U \mapsto \mathbb{R}^m$  из открытого  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  задано в координатах, как  $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ , для  $i = 1, \dots, m$  и функции  $f_i$  имеют непрерывные частные производные на  $U$ , то  $f$  непрерывно дифференцируемо на  $U$ .

## 5 Системы криволинейных координат и теорема об обратном отображении

**Def 5.1.** Криволинейная замена координат — бесконечно гладкое отображение  $\varphi: U \mapsto V$  такое, что  $\varphi^{-1}$  определено и тоже бесконечно гладко.

**Lem 5.2.** Пусть открытое множество  $U \subset \mathbb{R}^n$  выпукло. Для непрерывно дифференцируемого отображения  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  найдётся непрерывное отображение  $A: U \times U \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , такое что  $\forall x', x'' \in U$

$$\varphi(x'') - \varphi(x') = A(x', x'')(x'' - x')$$

и  $A(x, x) = D\varphi_x$ .

**Thr 5.3** (Теорема об обратном отображении). Если отображение  $\varphi: U \mapsto \mathbb{R}^n$  непрерывно дифференцируемо в окрестности точки  $x$  и его дифференциал  $D\varphi_x$  является невырожденным линейным преобразованием, то это отображение взаимно однозначно отображает некоторую окрестность  $V \ni x$  на окрестность  $W \ni y$ , где  $y = \varphi(x)$ . Обратное отображение  $\varphi^{-1}: W \rightarrow V$  тоже непрерывно дифференцируемо.

**Def 5.4.** Криволинейной системой координат в окрестности точки  $p \in \mathbb{R}^n$  называется набор таких функций, которые являются координатами гладкого отображения окрестности  $p$  на некоторое открытое множество в  $\mathbb{R}^n$  с гладким обратным<sup>1</sup> отображением.

## 6 Теоремы о системе неявных функций

**Thr 6.1** (Теорема о неявной функции). Пусть функции  $f_1, \dots, f_k$  непрерывно дифференцируемы в окрестности  $p \in \mathbb{R}^n$  и

$$\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \neq 0$$

<sup>1</sup>По теореме об обратном отображении для проверки системы преобразования достаточно проверить невырожденность  $(\partial y_i / \partial x_j)$  в точке  $p$ , или линейную независимость  $dy^i$  в точке  $p$ .

в этой окрестности. Пусть  $f_i(p) = y_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Тогда найдётся окрестность точки  $p$  вида  $U \times V$ ,  $U \subset \mathbb{R}^k$ ,  $V \subset \mathbb{R}^{n-k}$ , такая что в этой окрестности множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x) = y_1, \\ \dots \\ f_k(x) = y_k, \end{cases}$$

совпадает с графиком непрерывно дифференцируемого отображения  $\varphi: V \rightarrow U$ , заданного в координатах как

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n), \\ \dots \\ x_k = \varphi_k(y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n), \end{cases}$$

то есть отображения  $\mathbb{R}^{n-k} \mapsto \mathbb{R}^k$ .

## 7 Теорема о расщеплении гладкого отображения

**Thr 7.1** (Теорема о расщеплении отображения на элементарные). Если отображение  $\varphi$  непрерывно дифференцируемо в окрестности точки  $p \in \mathbb{R}^n$  и имеет обратимый  $D\varphi_x$ , то его можно представить в виде композиции перестановки координат, отображений координат и элементарных отображений, непрерывно дифференцируемо и возрастающим образом меняющих только одну координату  $y_i = \psi_i(x_1, \dots, x_n)$ .

**Thr 7.2.** Теоремы об обратном отображении, о неявной функции и о расщеплении отображения дают отображения класса  $C^k$  при  $k \geq 1$ , если исходные отображения были класса  $C^k$ .

# Дифференциал, гессиан, и исследование функции на экстремум

## 9 Локальные экстремумы функции и необходимое условие экстремума

**Def 9.1.** Точка  $p$  называется локальным экстремумом функции  $f$ , если она является точкой экстремума (максимума или минимума) ограничения  $f$  на некоторую окрестность  $p$ .

**Thr 9.2** (Необходимое условие экстремума).

$$\begin{cases} f \in C^1(U(p)) \\ p - \text{def(9.1)} \end{cases} \Rightarrow df_p = 0.$$

**Lem 9.3.** Если квадратичная форма  $Q > 0$ , то  $\exists \varepsilon > 0: Q(v) \geq \varepsilon|v|^2 (\forall v)$ .

## 10 Необходимые и достаточные условия экстремума $C^2$ функций

**Thr 10.1** (Необходимые условия экстремума).

$$\begin{cases} f \in C^2(U(p)) \\ p - \text{def(9.1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_2 f_p \geq 0 - \min \\ d_2 f_p \leq 0 - \max \end{cases}$$

**Thr 10.2** (Достаточные условия экстремума).

$$\begin{cases} f \in C^2(U(p)) \\ p - \text{def(9.1)} \\ df_p = 0 \text{ и } d_2 f_p > 0 \end{cases} \Rightarrow p - \text{точка строгого локального максимума}$$

## 11 Условные экстремумы и необходимое условие в терминах первых производных

**Def 11.1.** Условный экстремум  $f$  — экстремум ограничения  $f$  на множество  $S$ , задаваемое системой  $C^1$  уравнений  $\varphi_1(x) = \dots = \varphi_m(x) = 0$ .

Забегая вперёд, нам самом деле нам нужно:  $\dim \langle d\varphi_1, \dots, d\varphi_m \rangle = m$ .

**Thr 11.2** (Необходимые условия условного экстремума в терминах первых производных).

$$\begin{cases} f, \varphi_1, \dots, \varphi_m \in C^1(U(p)) \\ \dim \langle d\varphi_1, \dots, d\varphi_m \rangle = m \\ p - \text{def(11.1)} \end{cases} \Rightarrow df_p = \lambda_1 d\varphi_{1,p} + \dots + \lambda_m d\varphi_{m,p}.$$

## 12 Необходимые и достаточные условия в терминах вторых производных

Удобно положить:  $L(x) = f(x) - \lambda_1 \varphi_1(x) - \dots - \lambda_m \varphi_m(x)$ . Это называется *функцией Лагранжа*, а  $\lambda_i$  — *множители Лагранжа*.

**Thr 12.1** (Необходимые условия условного экстремума).

$$\begin{cases} f, \varphi_1, \dots, \varphi_m \in C^2(U(p)) \\ \dim \langle d\varphi_1, \dots, d\varphi_m \rangle = m \\ p - \text{def(11.1)} \\ v: d\varphi_{1,p}(v) = \dots = d\varphi_{m,p}(v) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dL_p = 0 \\ \begin{cases} d_2 L_p \geq 0 (\text{для минимума}) \\ d_2 L_p \leq 0 (\text{для максимума}) \end{cases} \end{cases}$$

**Thr 12.2** (Достаточные условия условного экстремума).

$$\begin{cases} f, \varphi_1, \dots, \varphi_m \in C^2(U(p)) \\ \dim \langle d\varphi_1, \dots, d\varphi_m \rangle = m \\ dL_p = 0 \\ \varphi_1(p) = \dots = \varphi_m(p) = 0 \\ v(\neq 0): d\varphi_{1,p}(v) = \dots = d\varphi_{m,p}(v) = 0 \\ d_2 L(v) > 0 \text{ или } d_2 L(v) < 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ имеет строгий условный экстремум в } p.$$

## Векторы и дифференциальные формы первой степени

### 13 Вектор, как дифференцирование

**Lem 13.1.** Всякую гладкую функцию, определенную в некоторой окрестности  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , в возможно меньшей окрестности  $x_0$ , можно представить в виде

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \partial_k f|_{x_0} (x^k - x_0^k),$$

с гладкими  $\partial_k f$ .

**Def 13.2.** Определим касательный вектор в точке  $p \in U$  открытого множества  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  как  $\mathbb{R}$ -линейное отображение  $X: C^\infty(U) \mapsto \mathbb{R}$ , удовлетворяющее

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g).$$

Касательное пространство  $T_p U$  к  $U$  в точке  $p$  состоит из всех касательных векторов в точке  $p$ .

**Lem 13.3.** Если  $X$  – касательный вектор в точке  $p \in U$ , то для любой окрестности  $V \ni p$ ,  $V \subseteq U$ , выражение  $X(f)$  может зависеть только от значений  $f$  в  $V$ , а не на всём  $U$ .

В силу предыдущих лем мы можем перейти в окрестность, где  $f$  представима в виде (13.1), тогда

$$X(f) = X(f(p)) + \sum_{i=1}^n X(x_i) \partial_i f|_p + \sum_{i=1}^n x_i(p) X(\partial_i f|_p) = \sum_{i=1}^n X(x_i) \partial_i f|_p.$$

Числа  $X_i = X(x_i)$  называются координатами касательного вектора в данной криволинейной системе координат, тогда весь вектор в точке  $p$  записывается, как  $X = X^i \partial_i$ .

### 14 Касательное пространство и дифференциал отображения

**Def 14.1.** Векторным полем на открытом множестве  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  называется выбор касательного вектора  $X(p) \in T_p U$  для каждой точки  $p \in U$ , гладко<sup>2</sup> зависящий от  $p$ .

**Lem 14.2.** Для открытого  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  всякое  $\mathbb{R}$ -линейное отображение  $X: C^\infty \mapsto C^\infty(U)$ , удовлетворяющее правилу Лейбница  $X(fg) = X(f)g + fX(g)$  задаётся векторным полем на  $U$ .

**Def 14.3.** Пусть есть вектор  $X \in T_p U$ ,  $q = \varphi(p)$ , тогда прямой<sup>3</sup> образ вектора  $\varphi_*(X)$  определяется по формуле

$$\varphi_*(X)f = X(f \circ \varphi), \quad \Rightarrow (\varphi_* X)^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} X^j \Leftrightarrow \text{переписать в матричном виде.}$$

**Def 14.4.** Отображение  $\varphi: U \mapsto V$  задаёт гомоморфизм алгебр (операция, сохраняющая умножение, сложение, и переводящая const в const):  $\varphi^*: C^\infty(V) \mapsto C^\infty(U)$  по формуле

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi.$$

вектор даёт дифференцирование алгебры  $X: C^\infty(U) \mapsto \mathbb{R}$ , и тогда  $\varphi_* X = X \circ \varphi^*$  тоже дифференцирование алгебры.

### 15 Диф-формы I степени

**Def 15.1.** Дифференциальная 1-форма – это ковекторное поле. Иначе, элемент двойственного пространства  $(T_p U)^* \equiv T_p^* U$ , линейная форма на касательном пространстве, гладко зависящая от  $p$ . Дифференциал функции  $f$  от векторного поля  $X$  это  $df(X) \stackrel{\text{def}}{=} Xf$ .

Дифференциалы  $dx_1, \dots, dx_n$  дают базис  $T_p^* U$ , двойственный к  $\partial_1, \dots, \partial_n$ , в смысле  $dx^i \partial_j = \delta_j^i$ . По этому базису можно разложить любую форму в точке, а применяя это  $\forall p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  видим, что  $\omega^1 = \alpha_i dx^i$ .

При замене координат компоненты  $\omega^1$  преобразуются как дифференциалы функции, то есть

$$\alpha = \alpha_j dx^j = \tilde{\alpha}_i dy^i = \underbrace{\tilde{\alpha}_i \partial_j y^i}_{\alpha_j} dx^j, \quad \Rightarrow \quad \alpha_j = \tilde{\alpha}_i \partial_j y^i \Leftrightarrow \text{переписать в матричном виде.}$$

<sup>2</sup>Гладкая зависимость понимается в смысле гладкой зависимости координат векторного поля  $X_i(p)$  в точке  $p$ .

<sup>3</sup>Производную отображения  $\varphi$  в точке  $p$  можно определить как  $\varphi_*: T_p U \mapsto T_q V$  при  $q = \varphi(p)$ . Иначе можем обозначать, как  $F\varphi_p$ .

## Диф-формы высших степеней

### 16 Определение и свойства диф-форм высших степеней

**Def 16.1.** Определим дифференциальную форму степени  $k$  на открытом  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  как кососимметричное отображение наборов из  $k$  гладких векторных полей  $X_1, \dots, X_k$  на  $U$  в  $C^\infty(U)$ , линейное по каждому аргументу и относительно умножения на бесконечно гладкие функции.

**Lem 16.2.** Значение выражения  $\alpha(X_1, \dots, X_k)$  в точке  $p$  зависит только от значений векторных полей  $X_i$  в точке  $p$ .

Пространство диф-форм степени  $k$  на  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  обозначим  $\Omega^k(U)$ . Интересно, что  $\Omega^n(U)$  в фиксированной системе координат выглядит как  $C^\infty(U)$ , но при замене координат ведёт себя иначе.

Свойства диф-форм?

### 17 Внешнее умножение диф-форм

**Def 17.1.** Внешнее умножение  $\Omega^k(U) \times \Omega^l(U) \mapsto \Omega^{k+l}(U)$ , можно определить как  $\alpha \wedge \beta = \text{Alt}(\alpha \otimes \beta)$ , при чём  $(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k)(\partial_1, \dots, \partial_k) = 1$ .

Здесь можно написать про операцию альтернирования.

### 18 Внешнее дифференцирование

**Lem 18.1.** На гладких диф-формах на  $U$  существует единственный  $\mathbb{R}$ -линейный оператор  $\delta: \Omega^k(U) \mapsto \Omega^{k+1}(U)$ , удовлетворяющий условиям: 1)  $d(f) = df$ ; 2)  $d^2 = 0$ ; 3)  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta$  (а-ля правило Лейбница). Более того, операция  $d$  определена инвариантно.

**Def 18.2.** Внешнему дифференцированию 0,1,2-форм в ориентированном  $\mathbb{R}^3$  отвечают соответственно операции градиента скалярного поля, ротора и дивергенции векторного поля, определённые соотношениями

$$d\omega_f^0 \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{\text{grad } f}^1, \quad d\omega_A^1 \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{\text{rot } A}^2, \quad d\omega_B^2 \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{\text{div } B}^3.$$

Также можно определить  $\Delta A$ , как

$$\Delta A = \text{grad div } A - \text{rot rot } A.$$

### 19 Обратный образ диф-форм

**Def 19.1** (Обратный образ). Для всякого гладкого отображения  $\varphi: U \mapsto V$  между открытыми подмножествами евклидовых пространств определено отображение пространств дифференциальных форм  $\varphi^*: \Omega^k(V) \mapsto \Omega^k(U)$ , действующее по формуле<sup>4</sup>

$$\varphi^* \alpha(X_1, \dots, X_k) = \alpha(\varphi_* X_1, \dots, \varphi_* X_k).$$

Для функции  $f \in C^\infty(V) = \Omega^0(V)$  оказывается  $\varphi^* f = f \circ \varphi$ , что совпадает с замены переменных в функции. Для форм первой степени  $\alpha \circ \varphi_*$ , где  $\alpha|_{f(p)}$ , а  $\varphi_*|_p$ .

**Lem 19.2.** Взятие обратного образа диф-форм коммутирует с внешним умножением и внешним дифференцированием.

Таким образом взятие обратного образа происходит формально подстановкой<sup>5</sup> выражений новых переменных через старые в коэффициенты формы и в дифференциалы новых переменных.

**Task 19.3.** Для двух гладких отображений открытых подмножеств евклидова пространства,  $\varphi: U \mapsto V$  и  $\psi: V \mapsto W$ , имеет место соотношение

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*, \quad (\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*.$$

<sup>4</sup>Важно заметить, что если левая часть вычисляется в точке  $p \in U$ , то правая в  $\varphi(p)$ .

<sup>5</sup>Было бы здорово посмотреть на задачи 6.96 и 6.97.



# Интегрирование дифференциальных форм

## 20 Интегрирование диф-формы объёма

**Def 20.1.** Диф-форма с *компактным носителем* на  $\mathbb{R}^n$  – форма определенная<sup>6</sup> на всём  $\mathbb{R}^n$  и равная 0 за пределами некоторого компакта.

**Def 20.2.** Для гладкой<sup>7</sup> формы с компактным носителем  $\nu = a(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \in \Omega_c^n(U)$  определим в какой-то фиксированной системе координат

$$\int_U \nu \stackrel{\text{def}}{=} \int_U a(x) dx_1 \dots dx_n.$$

**Lem 20.3.** Если  $\lambda \in \Omega_c^{n-1}(U)$ , то<sup>8</sup>  $\int_U d\lambda = 0$ .

## 21 Представление диф-формы в каноническом виде

**Lem 21.1.** Пусть  $U = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ , где  $(a_i, b_i) \ni 0$ . Пусть  $\varphi: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$  – гладкая функция с компактным носителем, содержащимся в каждом  $(a_i, b_i)$ , и с единичным интегралом. Для всякой  $\nu \in \Omega_c^n(U)$  найдётся число  $I$  и форма  $\lambda \in \Omega_c^{n-1}(U)$ , такие что  $\nu = I\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n + d\lambda$ .

**Con 21.2.** Пусть  $U = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$  – произведение интервалов. Факторпространство  $\Omega_c^n(U)/d\Omega_c^{n-1}(U)$  одномерно. Получается, что всевозможные способы определить интеграл формы  $\nu \in \Omega_c^n(U)$  так, чтобы интеграл от  $d\lambda$  равнялся нулю, могут отличаться только умножением на константу. *Ещё раз.*

## 22 Поведение интеграла от формы при линейной замене координат

**Lem 22.1** (Поведение интеграла формы при линейной замене координат). Интеграл дифференциальной формы  $\nu \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$  при отображении  $A^*$ , соответствующем линейному преобразованию  $A: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  меняет или не меняет знак в зависимости от знака определителя  $\det A$ , то есть

$$\int_{\mathbb{R}^n} A^* \nu = (\text{sign } \det A) \int_{\mathbb{R}^n} \nu.$$

## 23 Гладкое разбиение единицы

**Lem 23.1** (Разбиение единицы в окрестности компакта в  $\mathbb{R}^n$ ). Для любого открытого покрытия  $\{U_\alpha\}_\alpha$  компакта  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  найдётся набор неотрицательных гладких функций  $\{\rho_\alpha\}_\alpha: \mathbb{R}^n \mapsto [0, 1]$  с компактными носителями  $\text{supp } \rho_\alpha$  таких, что  $\forall \alpha \text{ } \text{supp } \rho_\alpha \subset U_\alpha$ , и только конечное число из них не равно нулю и  $\sum_\alpha \rho_\alpha(x) \equiv 1$  в некоторой окрестности  $K$ . Это называется *разбиение единицы, подчиненное покрытию*.

**Task 23.2.** Для связной области  $U \subset \mathbb{R}^n$  пространство  $\Omega_c^n(U)/d\Omega_c^{n-1}(U)$  одномерно.

## 24 Поведение интеграла от формы при гладкой замене координат

**Thr 24.1** (Поведение интеграла формы относительно гладкой замены координат). Интеграл дифференциальной формы  $\nu \in \Omega_c^n(V)$  при отображении  $\varphi^*$ , соответствующем диффеоморфизму  $\varphi: U \mapsto V$  между областями в  $\mathbb{R}^n$  меняет или не меняет знак в зависимости от знака<sup>9</sup> якобиана  $J_\varphi$ , то есть

$$\int_U \varphi^* \nu = (\text{sign } J_\varphi) \int_V \nu.$$

## 25 Формулы гладкой замены переменных в интеграле Лебега от функции

**Con 25.1** (Криволинейная замена переменных в кратном интеграле). При диффеоморфизме<sup>10</sup>  $\varphi: U \mapsto V$  для интегрируемой по Лебегу на  $V$  функции  $f$  имеет место формула

$$\int_V f(y) dy = \int_U f(\varphi(x)) |J_\varphi| dx.$$

<sup>6</sup>Вообще можно рассматривать  $\Omega_c^k(U) \subseteq \Omega_c^k(\mathbb{R}^n)$ .

<sup>7</sup>Т.к  $a(x)$  – гладкая с компактным носителем, этот интеграл  $\exists$ , как повторный интеграл Римана, или как интеграл Лебега.

<sup>8</sup>Таким образом интеграл оказывается определен как линейный функционал на факторпространстве  $\Omega_c^n(U)/d\Omega_c^{n-1}(U)$ .

<sup>9</sup>Так как  $U$  и  $V$  связны, то знак якобиана один и тот же во всех точках области.

<sup>10</sup>Вообще достаточно непрерывной дифференцируемости.

## Многообразия (с краем) и формула Стокса

### 26 Вложенные многообразия

**Def 26.1.** Замкнутое подмножество  $M \subseteq \mathbb{R}^N$  называется *вложенным многообразием размерности  $n$* , если  $\forall p \in M \exists U_\varepsilon(p)$  и криволинейная система координат в ней, в которой включение  $M \subset \mathbb{R}^N$  в пересечении с некоторой окрестностью нуля.

Яркий пример<sup>11</sup> – работа с условными экстремумами. Если  $M$  задаётся гладкими уравнениями  $f_1 = \dots = f_{N-n} = 0$  и дифференциалы этих уравнений линейно независимы в каждой точке  $M$ , то  $M$  будет вложенным многообразием размерности  $n$ , так как определяющие его функции можно считать частью системы координат  $y_{n+1} = f_1, \dots, y_N = f_{N-n}$  в окрестности каждой точки  $p \in M$ , и  $M$  в такой окрестности выглядит в точности как  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^N$  около нуля, а функции  $y_1, \dots, y_n$  задают систему координат в  $M$ , пересеченном с окрестностью  $p$ .

**Def 26.2.** Замкнутое подмножество  $M \subseteq \mathbb{R}^N$  называется *вложенным многообразием с краем*<sup>12</sup> *размерности  $n$* , если для  $\forall p \in M \exists U_\varepsilon(p)$  и криволинейная система координат в ней, в которой включение  $M \subseteq \mathbb{R}^N$  **либо** превращается в стандартное вложение  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^N$ , **либо** превращается в стандартное вложение  $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ , пересеченное с окрестностью 0.

**Def 26.3.** Из определения  $M$  понятно, что  $\forall p \in M$  есть окрестность<sup>13</sup> в многообразии  $M \cap U$  и отображение  $\varphi: M \cap U \mapsto \mathbb{R}^n$ , являющееся диффеоморфизмом между  $M \cap U$  и  $\varphi(M \cap U)$ , которое называется *координатной картой* многообразия  $M$ .

**Def 26.4.** Набор карт, районы действия которых в совокупности покрывают всё многообразие, называется *атласом* многообразия.

### 27 Абстрактное определение гладкого многообразия

**Def 27.1** (Абстрактное определение многообразия). *Гладкое  $n$ -мерное многообразие  $M$*  – хаусдорфово топологическое пространство со счётной базой, покрытое открытыми картами  $U_i$  так, что для каждой карты задано отображение  $\varphi_i: U_i \mapsto \mathbb{R}^n$  являющееся гомеоморфизмом на открытое подмножество  $\mathbb{R}^n$ , и для пары таких отображений (карт)  $\varphi_i$  и  $\varphi_j$  композиция  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  является диффеоморфизмом на своей естественной области определения.

**Def 27.2.** *Гладкое  $n$ -мерное многообразие с краем  $M$*  отличается тем, что некоторые из карт являются не такими, как описано выше, а являются гомеоморфизмами на относительно открытое подмножество полупространства  $(-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$ , в котором точки из  $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$  образуют *край* в этой карте, а замены координат  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  переводят край в одной карте в край в другой карте.

### 28 Диф-формы, векторные поля и $d$ на многообразии

**Def 28.1.** *Дифференциальной формой  $\alpha \in \Omega^k(M)$  на многообразии* мы будем называть набор диф-форм  $\alpha_i$  на образах карт  $\varphi_i: U_i \mapsto \mathbb{R}^n$ , которые обладают свойством

$$(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})^* \alpha_i = \alpha_j$$

на естественной области определения  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  в  $\mathbb{R}^n$ , для всяких двух карт  $\varphi_i, \varphi_j$ .

Можно неформально сказать, что глобальная форма собирается из локальных форм, если одна локальная форма переходит в другую при замене одной карты на другую, причём делает это именно так, как это происходит в раннее изученном случае, когда многообразие является областью в  $\mathbb{R}^n$ .

Достаточно рассматривать набор карт, покрывающих многообразие  $M$ . Для в любой другой координатной карте  $\varphi$  соответствующее представление  $\alpha \in \Omega^k(\varphi(U))$  будет выглядеть как  $\alpha = (\varphi_i \circ \varphi^{-1})^* \alpha_i$  на множестве  $\varphi(U \cap U_i)$ . По определению диф-формы и (19.3) оказывается

$$(\varphi_j \circ \varphi^{-1})^* \alpha_j = (\varphi_j \circ \varphi^{-1})^* (\varphi_i \circ \varphi_j)^* \alpha_i = (\varphi_i \circ \varphi^{-1})^* \alpha_i.$$

на  $\varphi(U \cap U_i \cap U_j)$ .

В силу установленной ранее независимости от выбора системы криволинейных координат операции  $\wedge$  и  $d$  верно определены для форм на многообразиях.

Простой и естественный способ получить диф-форму на  $M \subset \mathbb{R}^N$  – ограничить какую-то диф-форму из евклидова пространства, или из окрестности  $M$ , или положить  $\alpha_i = (\varphi_i^{-1})^* \alpha$  для  $\alpha \in \Omega^k(\mathbb{R}^N)$ .

<sup>11</sup>Так, например, любая сфера в  $\mathbb{R}^n$  является вложенным многообразием размерности  $n - 1$ .

<sup>12</sup>Край  $\partial M$  многообразия с краем  $M$  сам по себе является  $(n - 1)$ -мерным многообразием без края.

<sup>13</sup>Относительно открытое подмножество многообразия.

Касательный вектор к вложенному многообразию  $M \subset \mathbb{R}^N$  также можно рассматривать как касательный вектор к  $\mathbb{R}^N$ , так как любой вектор  $X$  в некоторой точке образа карты  $\varphi_i$  можно перенести в  $\mathbb{R}^n$  отображением  $(\varphi_i^{-1})_*$ .

Для гладкого отображения многообразий корректно определена производная  $Df_p: T_p M \mapsto T_{f(p)} N$  в каждой точке  $p \in M$ , которую мы также называли прямым образом вектора  $\varphi_*$ , что и является линейным отображением касательных пространств в точке.

Отображение обратного образа диф-форм  $f^*: \Omega^k(N) \mapsto \Omega^k(M)$  как

$$f^* \alpha|_p(X_1, \dots, X_k) = \alpha|_{f(p)}(f_* X_1, \dots, f_* X_k)$$

Для векторных полей  $f_* = (f^{-1})^*$ .

## 29 Гладкие отображения многообразий

**Def 29.1.** Функция  $f: M \mapsto \mathbb{R}$  называется *гладкой функцией на многообразии*,  $f \in C^\infty(M)$ , если в каждой координатной карте  $\varphi: U \mapsto \mathbb{R}^n$  эта функция  $(f \circ \varphi^{-1})$  является гладкой функцией на образе  $\varphi(U)$ .

**Def 29.2.** *Гладкой структурой* на топологическом пространстве называется максимальный по включению атлас, с которым пространство становится многообразием.

**Def 29.3.** *Гладким отображением* между многообразиями  $f: M \mapsto N$  размерностей  $m$  и  $n$  называется непрерывное отображение, которое в окрестности каждой точки, в достаточно малых координатных картах, выглядит как гладкое отображение из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$ .

**Def 29.4.** Гладкое обратимое отображение  $f: M \mapsto N$  с обратным гладким назовётся *диффеоморфизмом многообразий*.

**Task 29.5.** Если взять некоторое *компактное* гладкое многообразие  $M$  (область параметров) и гладкое отображение  $f: M \mapsto \mathbb{R}^n$ , такое, что  $\text{rg } Df_p = \dim M \ \forall p$ , то  $f(M)$  будет вложенным многообразием.

**Lem 29.6.** Для гладкого отображения  $f: M \mapsto \mathbb{R}^n$  с  $\text{rg } Df \equiv m = \dim M$ , для всякой  $p \in M$  найдётся окрестность  $U \ni p$  такая, что  $f(U)$  в некоторой криволинейной системе координат в окрестности  $f(p)$  является открытым подмножеством стандартно вложенного  $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ .

## 30 Ориентируемость многообразия

**Def 30.1.** Гладкое многообразие  $M$  называется *ориентируемым*, если можно выбрать покрывающий атлас так, что якобианы замен координат между любыми двумя картами атласа будут положительными.

Если в исходном атласе был задан некоторый объект, например векторное поле  $X$ , то во всякой новой карте  $\psi$  мы тоже будем иметь векторное поле, собранное из прямых образов  $(\psi \circ \varphi^{-1})_* X_\varphi$  полученных с имеющихся карт  $\varphi$  и образов  $X_\varphi$  в них.

**Def 30.2.** *Ориентацией* гладкого многообразия  $M$  называется атлас с положительными якобианами перехода между картами, максимальный по включению среди всех таких атласов.

**Lem 30.3.** Связное многообразие либо неориентируемо, либо допускает два класса ориентации.

**Lem 30.4.** Многообразие  $M$  размерности  $n$  ориентируемо тогда и только тогда, когда существует дифференциальная форма  $\nu \in \Omega^n(M)$ , которая ни в одной точке не равна нулю.

**Lem 30.5.** Многообразие ориентируемо тогда и только тогда, когда на нём не существует противоречивой (дезориентирующей) цепочки карт.

**Def 30.6.** Для  $n$ -мерного ориентированного многообразия с краем  $M$  введём ориентацию на его крае  $\partial M$  следующим образом. Пусть карта  $M$  с координатами  $x_1, \dots, x_n$  соответствует ориентации  $M$ , причём образ отображения карты удовлетворяет неравенству  $x_1 \leq 0$ , а образ края соответствует равенству  $x_1 = 0$ . Тогда карта на соответствующей части  $\partial M$  из координат  $x_2, \dots, x_n$  по определению объявляется положительной. Если же многообразие в этой карте задано неравенством в другую сторону,  $x_1 \geq 0$ , то карта  $x_2, \dots, x_n$  на его краю по определению объявляется отрицательной.

**Lem 30.7.** Предыдущее определение корректно задаёт ориентацию на  $\partial M$ .

### 31 Определение интеграла диф-формы по ориентированному многообразию

**Lem 31.1** (Разбиение единицы в окрестности компакта на многообразии). Пусть  $M$  – гладкое многообразие, а  $K \subseteq M$  – его компактное подмножество. Для любого покрытия  $\{U_\alpha\}_\alpha$  компакта  $K$  открытыми множествами найдётся набор неотрицательных гладких функций  $\{\rho_\alpha\}_\alpha$  с компактными носителями  $\text{supp } \rho_\alpha$  таких, что

$$\forall \alpha \text{ supp } \rho_\alpha \subset U_\alpha,$$

только конечное число из них отлично от нуля и  $\sum_\alpha \rho_\alpha(x) \equiv 1$  в некоторой окрестности  $K$ .

**Def 31.2.** Интеграл дифференциальной формы  $\nu \in \Omega_c^n(M)$  с компактным носителем по ориентированному  $n$ -мерному многообразию  $M$  определяется с помощью разбиения единицы в окрестности носителя  $\nu$

$$\rho_1 + \dots + \rho_m = 1,$$

подчиненного некоторому набору положительно ориентированных карт как

$$\int_M \nu = \sum_i \int_M \rho_i \nu_i,$$

где интегралы справа рассматриваются в координатных картах, содержащих носители соответствующих  $\rho_i$ .

**Lem 31.3.** Определение интеграла не зависит от выбора системы положительных карт в данной ориентации и подчиненного им разбиения единицы.

### 32 Общая формула Стокса

**Thr 32.1** (Формула Стокса). Для ориентированного многообразия с краем<sup>14</sup>  $(M, \partial M)$  размерности  $n$  и формы  $\alpha \in \Omega_c^{n-1}(M)$  выполняется

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha.$$

### 33 Частные случаи формулы Стокса

$\mathbb{R}^1$ . Формула Стокса для ориентированной кривой с началом в точке  $p$  и концом в точке  $q$  сводится к

$$\int_\gamma df = f(q) - f(p).$$

$\mathbb{R}^2$ . Для компактного множества  $G \subset \mathbb{R}^2$  с гладкой границей, ориентированного так, что при движении по  $\partial G$  множество  $G$  оказывается слева, верна формула Грина

$$\int_{\partial G} P dx + Q dy = \int_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

$\mathbb{R}^3$ . Для компактного множества  $G \subset \mathbb{R}^3$  с гладкой границей (край в  $\mathbb{R}^3$ ) верна формула Гаусса-Остроградского

$$\int_{\partial G} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \int_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Кривую можно считать не бесконечно гладкой, а всего лишь кусочно непрерывно дифференцируемой, формула всё равно остаётся верной. С помощью предельного перехода также обобщается случай с  $\simeq \mathbb{R}^2$  до множества с кусочно  $C^2$  границей.

Вообще формула Стокса верна не только для вложенных двумерных многообразий, но и для всякого образа гладкого отображения  $f: D \mapsto \mathbb{R}^3$  области  $D \subset \mathbb{R}^2$  с кусочно гладкой границей, если интегралы мы понимаем как интегралы обратных образов  $f^*(\alpha)$  и  $f^*(d\alpha)$  по  $\partial D$  и  $D$  соответственно. Для практических применений полезно ослабить условие гладкости  $f$  до  $C^2$  (в интеграле, в координатном представлении, используются производные  $f$  не более чем первого порядка).

### 34 Потенциал диф-форм

Физический потенциал силового поля в математический терминах означает поиск  $f \in C^\infty(M)$ :  $df = \alpha$  для заданной силы  $\alpha \in \Omega^1(M)$

**Def 34.1.** Пусть  $\mathbf{A}$  – векторное поле в области  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Функция  $U: D \mapsto \mathbb{R}$  называется *потенциалом поля  $\mathbf{A}$*  в области  $D$ , если в этой области  $\mathbf{A} = \text{grad } U$ . Поле, обладающее потенциалом, называется *потенциальным полем*.

<sup>14</sup>край рассматривается с согласованной ориентацией.

**Thr 34.2.** *Необходимым и достаточным условием наличия потенциала у непрерывной  $\alpha \in \Omega^1(M)$ , для гладкого  $M$ , является независимость  $\int_\gamma \alpha$  от выбора кусочно-гладкой кривой  $\gamma$  между двумя точками.*

*Эквивалентно можно потребовать равенства нулю интегралов по всем замкнутым кусочно-гладким кривым.*

**Lem 34.3** (Необходимое условие потенциальности). *Необходимым условием существования потенциала у  $\alpha \in \Omega^1(M)$  является  $d\alpha = 0$  (т.к.  $d(du) = 0$ ).*

**Lem 34.4.** *В случае  $\mathbb{R}^3$  по определению  $d\omega_{\vec{A}}^1 = \omega_{\text{rot } \vec{A}}^2$ , поэтому необходимое условие потенциальности поля  $\mathbf{A}$  переписывается в виде  $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ .*

Однако этого не достаточно, так например в открытой  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ :

$$\alpha = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \quad \rightsquigarrow \quad d\alpha = 0, \quad \text{но} \quad \oint_{S^1} \alpha = 2\pi.$$

**Def 34.5.** Поле  $\mathbf{A}$  называется *векторным потенциалом* поля  $\mathbf{B}$  в области  $D \subset \mathbb{R}^3$ , если в этой области выполняется соотношение  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ .

Это можно переписать в виде  $\omega_{\vec{B}}^2 = d\omega_{\vec{A}}^1$ , тогда  $\omega_{\text{div } \vec{B}}^3 = d\omega_{\vec{B}}^2 = d^2\omega_{\vec{A}}^1 = 0$ , то есть необходимое условие  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , принято такое поле называть *соленоидальным*.

## Элементы дифференциальной топологии

### 35 Замкнутые и точные формы. Цепные гомотопии

**Def 35.1.** Диф-форма  $\alpha \in \Omega^k(M)$  — замкнутая, если  $d\alpha = 0$ ;  $\alpha$  — точная, если  $\exists \beta \in \Omega^{k-1}(M): d\beta = \alpha$ .

**Task 35.2.** Если  $\alpha$  — точная, а  $\beta$  — замкнутая, то  $\alpha \wedge \beta$  — точная.

**Def 35.3.** Отображения  $h_0, h_1: M \rightarrow N$  гладко гомотопны, если  $\exists h: M \times [0, 1] \rightarrow N$ , такое что  $h_0(x) = h(x, 0)$  и  $h_1(x) = h(x, 1)$ .

Многообразие  $M \times [0, 1]$  (цилиндр) является топологическим пространством, которое локально устроено как произведение открытого  $U \subset \mathbb{R}^n$  на отрезок. Интересно заметить, что если  $\partial M = \emptyset$ , то  $\partial(M \times [0, 1]) = M \times \{0, 1\}$ .

**Def 35.4.**  $M$  называется стягиваемым в точку  $x_0 \in M$  или гомотопным точке, если  $\exists h: M \times [0, 1] \rightarrow M$  такое, что  $h(x, 1) = x$  и  $h(x, 0) = x_0$ . ( $\mathbb{R}^n$  —  $h(x, t) = tx$ )

**Thr 35.5** (Теорема Пуанкаре).  $\forall \omega \in \Omega^{k+1}(M)$ , замкнутая на стягиваемом в точку  $M$ , является точной.

В умных книжках говорят чаще про непрерывные гомотопии, но так как мы работаем с гладкими  $M$ , мы будем использовать гладкие гомотопии. Обладая определенной сноровкой можно показать, что если два отображения между многообразиями непрерывно гомотопны, то они и гладко гомотопны.

Станет легче, если свести вопрос к случаю, когда для  $\varepsilon > 0$ :  $h(x, t) = h(x, 0)$  при  $t < \varepsilon$  и  $h(x, t) = h(x, 1)$  при  $t > 1 - \varepsilon$ . Определим новую гомотопию:

$$\varphi \in C^\infty: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]: \begin{cases} \varphi = 0, & t \leq \varepsilon \\ \varphi = 1, & t \geq 1 - \varepsilon \end{cases} \rightsquigarrow h'(x, t) = h(x, \varphi(t)).$$

**Thr 35.6** (Цепная гомотопия). Если отображения  $f_0, f_1: M \rightarrow N$  гладко гомотопны, то  $\forall \alpha \in \Omega^k(N)$  выполняется для некоторой  $H: \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ :

$$f_1^* \alpha - f_0^* \alpha = H(d\alpha) + \delta(H(\alpha)).$$

### 36 Когомологии де Рама

В силу теоремы Пуанкаре (35.5) любая замкнутая форма на многообразии локально точна, однако склеивать их в точную на всём пространстве нам будут мешать дырки, как это случалось в задаче из нашего задания. Связь между устройством многообразия и взаимоотношением замкнутых и точных форм на нём описывается группами (ко)гомологий де Рама.

Замкнутые и точные формы на  $M$  образуют линейные пространства  $Z^k(M)$  и  $B^k(M)$  соответственно.

**Def 36.1** (Когомологии де Рама). или группа  $k$ -мерных когомологий многообразия  $M$ :

$$H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M).$$

**Def 36.2.** Если формы  $\alpha_1, \alpha_2$  отличаются на точную форму, то говорят, что они гомологичны.

Таким образом если замкнутые  $\alpha_1, \alpha_2$  гомологичны, то они лежат в одном классе когомологии.

По скольку  $Z^k(M)$  есть  $\text{Ker } d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ , а  $B^k(M)$  есть  $\text{Im } d: \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ , то часто перепи-сывают:

**Def 36.3.** Когомологии де Рама гладкого  $M$  — это факторпространства

$$H_{DR}^k(M) = \frac{\text{Ker } d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)}{\text{Im } d: \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)}.$$

**Lem 36.4** (Лемма Пуанкаре).

$$H^p(\mathbb{R}^k) = 0 \text{ при } k > 0, \quad H^k(\mathbb{R}^k) \sim \mathbb{R} \text{ при } k = 0.$$

### 37 Потенциал дифференциальных форм

**Task 37.1.** Для не обязательно компактного многообразия без края  $M$  рассмотрим дифференциальные формы с компактным носителем  $\Omega_c^*(M)$  и определим когомологии де Рама с компактным носителем:

$$H_c^k(M) = \text{Ker } d: \Omega_c^k(M) \rightarrow \Omega_c^{k+1}(M) / \text{Im } d: \Omega_c^{k-1}(M) \rightarrow \Omega_c^k(M).$$

Если  $\dim M = n$ ,  $M$  ориентируемо и связно, то  $H_c^n(M)$  одномерно.

**Task 37.2.**  $H_c^k(\mathbb{R}^n) = 0$  при  $k \neq n$ , и  $H_c^n(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ .

### 38 Критические и регулярные значения, теорема Сарда

**Def 38.1.** Точка  $p \in M$  называется регулярной точкой гладкого отображения  $f: M \rightarrow N$ , если  $Df_p$  сюръективно. Иначе называется критической точкой.

Если для точки  $q \in N$  найдётся критическая  $p \in M$ , такая что  $q = f(p)$ , то  $q$  называется критическим значением отображения. Некритическое значение  $q \in N$  называется регулярным значением.

**Def 38.2.** Множество лебеговой меры нуль в многообразии  $M$  — это множество, пересечение которого с областью определения любой координатной карты  $M$  в образе карты имеет меру нуль.

Формула меры образа (25.1) при гладкой замене координат тогда показывает, что множество меры нуль в евкл. пр-ве переходит в множество меры нуль. Значит свойство подмножества  $X$  многообразия  $M$  иметь лебегову меру нуль достаточно проверить не во всех возможных картах, а лишь в любом атласе, который покрывает  $M$ .

**Thr 38.3** (Теорема Сарда). Для бесконечно гладкого отображения  $f: M \rightarrow N$  множество критических значений  $f$  имеет меру нуль в  $N$ , то есть почти все точки  $N$  являются регулярными значениями  $f$ .

### 39 Степень гладкого отображения

**Def 39.1.** Если  $f: M \rightarrow N$  — гладкое отображение ориентированных многообразий одной и той же размерности,  $M$  — компактно, и  $y$  — регулярное значение  $f$ , степенью отображения в точке  $y$  называется: **A?**

$$\sum_{f(x_i)=y} \text{sign } Jf_{x_i}.$$

(число точек в прообразе  $f^{-1}(y)$ , для которых якобиан  $Jf_x > 0$  за вычетом числа точек в прообразе  $f^{-1}(y)$ , у которых  $Jf_x < 0$ )

В случае отсутствия ориентации хотя бы одного многообразия степень определена по модулю 2 как чётность количества точек в прообразе  $f^{-1}(y)$ .

Из условия того, что  $y$  — регулярное значение, следует, что множество  $f^{-1}(y)$  состоит из изолированных точек, то есть это дискретное множество. В случае компактного  $M$  число точек  $f^{-1}(y)$  должно оказаться конечным, так как дискретное компактное множество конечно. То же будет верно для отображения, для которого прообраз любого компакта компактен, но использовать мы этого уже не будем.

**Lem 39.2.** Если  $f: M \rightarrow N$  — гладкое отображение ориентированных многообразий без края одной и той же размерности, многообразие  $M$  компактно, и  $y$  — регулярное значение  $f$ , то  $\exists U \ni y$  (окр-ть), такая что  $\forall y' \in U$  регулярны и  $\deg_y f = \deg_{y'} f$ .

В случае отсутствия ориентации в  $M$  мы просто утверждаем независимость количества точек в  $f^{-1}(y')$  от  $y' \in U$ .

**Thr 39.3** (Гомотопическая инвариантность степени отображения). Пусть многообразие  $M$  компактно без края,  $N$  — не обязательно компактно без края,  $h: M \times [0, 1] \rightarrow N$  — гладкая гомотопия, а  $y \in N$  такова, что она является регулярным значением для  $h_0$  и  $h_1$ .

Тогда степени отображения  $h_0$  и  $h_1$  в точке  $y$  равны. Если оба многообразия ориентированы, то степень считается со знаком, иначе она считается как чётность.

**Def 39.4.** Семейство диффеоморфизмов  $h_t: M \rightarrow N$  назовём изотопией, если оно гладко зависит от параметра  $t$ , то есть даёт гладкое  $h: M \times [0, 1] \rightarrow N$ .

**Lem 39.5.** Если многообразие  $M$  связное, без края и  $x, y \in M$ , то существует изотопия  $h_t: M \rightarrow M$ , такая что  $h_0 = \text{id}$  и  $h_1(x) = y$ .

**Con 39.6.** При связном  $N$  степень  $f: M \rightarrow N$  не зависит от выбора  $y \in N$ .

**Thr 39.7** (Корректность определения степени отображения). Степень отображения  $f: M \rightarrow N$  для связного многообразия без края  $N$  и компактного многообразия без края  $M$  не зависит от выбора регулярного значения в  $M$ . Если оба многообразия ориентированы, то степень считается со знаком, иначе она считается как чётность.

**Con 39.8.** Пусть  $M$  — компактное многообразие без края положительной размерности. Тогда тождественное отображение  $\text{id}: M \rightarrow M$  не гомотопно постоянному отображению  $M \rightarrow M$  в одну точку.

## 40 Степень гладкого отображения с помощью интегрирования

Проверить, что всё работает, когда у нас  $N$  не компактно, и мы имеем дело с собственным отображением (прообраз компакта — компакт).

Определим степень для таких отображений:

**Def 40.1.**  $f: M \rightarrow N$  — собственное и гладкое,  $M, N$  — ориентированные и без края, и одной и той же размерности, причём  $N$  связно. Тогда для  $\omega \in \Omega_c^n(M)$  выполняется:

$$\int_M f^* \omega = \deg f \cdot \int_N \omega.$$

И вот оно эквивалентно, всё как всегда в качестве упражнения, мужайтесь.

**Lem 40.2.**  $f: M \rightarrow N$  гладкое отображение ориентированных многообразий с краем одной и той же размерности, причём  $f(\partial M) \subseteq \partial N$  и  $N$  связно. В этом случае степень  $f$  корректно определена:  $\deg f = \deg f|_{\partial N}$ .

## 41 Теорема Брауэра о неподвижной точке

**Thr 41.1** (Теорема Брауэра о неподвижной точке). Пусть  $B \subset \mathbb{R}^n$  — некоторый замкнутый шар. Всякое непрерывное отображение в себя  $f: B \rightarrow B$  имеет неподвижную точку, то есть точку, в которой  $f(x) = x$ .

**Thr 41.2** (Отсутствие ретракции шара на его границу). Пусть сфера  $S^{n-1}$  рассматривается как край шара  $B^n$ . Не существует непрерывного отображения  $f: B^n \rightarrow S^{n-1}$ , такого что  $f|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$ .

## 42 Существование нигде не нулевых векторных полей на сфере

Здесь про ёжика



## Дифференцирование и интегрирование векторных полей

### 43 Внутреннее дифференцирование

**Def 43.1.** Операция *внутреннего умножения* векторного поля на форму как  $i_X \alpha(X_2, \dots, X_k) = \alpha(X, X_2, \dots, X_k)$ .

1.  $i$  – локальная операция,
2.  $i_X \mapsto \Omega^k(M) \mapsto \Omega^{k-1}(M)$  – линейное отображение;
3. Если  $\omega_1 \in \Omega^{k_1}(M)$ ,  $\omega_2 \in \Omega^{k_2}(M)$ , то  $i_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = i_X \omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 \wedge i_X \omega_2$ ;
4. Если  $\omega \in \Omega^1(M)$ , то  $i_X \omega = \omega(X)$ , а если  $f \in \Omega^0(M)$ , то  $i_X f = 0$ .

**Lem 43.2.** Если в локальных координатах  $x_1, \dots, x^n$  карты  $\varphi: \mathbb{R}^n \mapsto U \subset M$  форма  $\omega$  (точнее  $\omega|_U$ ), то

$$\omega = \frac{1}{k!} a_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad X = X^i \partial_i \quad \Rightarrow \quad i_X \omega = \frac{1}{(k-1)!} X^i a_{i, i_2, \dots, i_k} dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

### 44 Производная Ли и скобка Ли

**Def 44.1** (Производная Ли диф-формы). Производная Ли вдоль векторного поля  $X$  на дифференциальных формах определяется, как  $L_X = i_X d + d i_X$ .

Из этого легко получить, что  $L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X \beta$ , и выражения для функций и линейных форм

$$L_X f = i_X df + d(i_X f) = i_X df = df(X) = X(f), \quad L_X df = i_X d(df) + d(i_X df) = d(X(f)).$$

1.  $L_X$  – локальная операция;
2.  $L_X: \Omega^k(M) \mapsto \Omega^k(M)$  – линейное отображение  $\forall k$ ;
3.  $L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X \beta$ ;
4. Если  $f \in \Omega^0(M)$ , то  $L_X f = df(X) \stackrel{\text{def}}{=} Xf$ , а  $L_X df = d(Xf)$ .

**Def 44.2** (Производная Ли векторного поля). Потребуем выполнение формулы Лейбница для производной Ли вдоль  $X$  значения  $\alpha(Y) = i_Y \alpha$ , то есть

$$X(\alpha(Y)) = L_X(\alpha)(Y) + \alpha(L_X Y), \quad \Rightarrow \quad \alpha(L_X Y) = i_X d(i_Y \alpha) - i_Y d(i_X \alpha) - i_Y i_X d\alpha.$$

Подставив  $\alpha = \alpha_i dx^i$ , и считая, что  $\alpha(L_X Y) = a_i dx^i(L_X Y)$ , находим что

$$(L_X Y)^i = dx^i(L_X Y) = i_X d(i_Y dx^i) - i_Y d(i_X dx^i).$$

Рассматривая это, как дифференцирование функции  $f$ , получаем

$$(L_X Y)f = df(L_X Y) = i_X d(i_Y df) - i_Y d(i_X df) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Поэтому производная Ли  $L_X Y$  – это коммутатор векторных полей  $[X, Y]$ , то есть

$$L_X Y = [X, Y] = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j) \partial_j.$$

**Lem 44.3** (Тождество Якоби). Для любых трёх гладких векторных полей  $X, Y, Z$  всегда верно, что

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

**Task 44.4.** Пусть  $X, Y$  – векторные поля,  $f, g$  – гладкие функции, тогда  $[fX, gY] = fg[X, Y] - gY(f)X + fX(g)Y$ .

### 47 Дивергенция векторного поля на многообразии с формой объема

**Физическая интерпретация векторных операторов**

**Task 47.1** (теорема и дивергенции). Пусть на многообразии  $M$  фиксирована нигде не нулевая форма  $\nu \in \Omega^n(M)$  при  $n = \dim M$ . Интегрирование этой формы задаёт некоторое понятие объема (меры) на многообразии. Тогда дивергенцию векторного поля  $X$  относительно этого объема можно определить как

$$L_X \nu = (\operatorname{div}_\nu X) \nu.$$

**div B.** Для некоторой точки  $x$  области  $V$  ( $V_x$  – также объём области,  $r$  – её диаметр) с заданным полем  $B$ , по формуле Стокса и теореме о среднем ( $\exists x' \in V(x)$  такая, что)

$$\int_{\partial V} B \cdot d\sigma = \int_V \operatorname{div} B \, dV = \operatorname{div} B(x') V_x, \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} B(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\iint_{\partial V(x)} B \cdot d\sigma}{V_x} \right).$$

rot  $\mathbf{A}$ . Возьмём круг  $S_i(x)$  с центром в точке  $x$ , лежащей в плоскости,  $\perp$  к  $\partial_i$ , для  $i = 1, 2, 3$ . Ориентируем  $S_i(x)$  с помощью нормали, в качестве которой возьмём орт  $\partial_i$ , пусть  $r$  – диаметр  $S_i(x)$ , тогда по формуле Стокса

$$\oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \quad \Rightarrow \quad (\text{rot } \mathbf{A})^i = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\oint_{\partial S_i(x)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{S_i(x)} \right)$$

grad  $f$ . Поскольку  $\omega_{\text{grad } f}^1(\boldsymbol{\xi}) = (\text{grad } f \cdot \boldsymbol{\xi}) = df(\boldsymbol{\xi}) = D_{\boldsymbol{\xi}}f$ , где  $D_{\boldsymbol{\xi}}f$  – производная функции  $f$  по вектору  $\boldsymbol{\xi}$ , то вектор grad  $f$  ортогонален поверхностям уровня функции  $f$ , указывает в каждой точке направление наиболее быстрого роста значений функции.

## Решения (БЕТА)

### 1 Свёртка функций и её свойства

- 1.2. 1)  $f(y)g(x) \in \mathcal{L}$  и по thr. Фубини:  $\int |f \cdot g| = \int |f| \cdot \int |g|$ ;  
 2) то же верно для  $f(x-t)g(t)$ , отличие в лин. замене коор-т с  $\det = 1$ ;  
 3) требуемое равенство напрямую из (1) и (2) замена:  $x-t=y$ ;  
 4) для неравенства интегрируем по  $x$ :  $|\int f(x-t)g(t) dt| \leq \int |f(x-t)g(t)| dt$ . □

### 2 Бесконечно гладкие функции с компактным носителем

- 2.1. 1) для введённой  $\varphi$  достаточно:  $\varphi_\varepsilon(x_1, \dots, x_n) = A\varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_1}{\varepsilon}\right) \dots \varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_n}{\varepsilon}\right)$ .  
 2)  $\psi(x) = B \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$ , выберем  $B$ :  $\psi(x) \equiv 0 \forall x \leq -1$  и  $\psi(x) \equiv 1 \forall x \geq 1$ ;  
 3) достаточно положить:  $\psi_{\varepsilon,\delta}(x) = \psi\left(\frac{\delta+\varepsilon-2|x|}{\varepsilon-\delta}\right)$ . □

### 3 Приближение функций бесконечно гладкими

- 3.1. 1)  $f_k(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-t) - f(x))\varphi_k(t) dt$ ;  
 2) Пусть  $f$   $p$ -но непр. в  $U_\delta(K \subset \mathbb{R}^n)$  и пусть  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  при  $|x - y| < \delta$  там же;  
 3) Выбирая  $k$ :  $1/k < \delta$ , тогда  $\varphi_k(t) \neq 0$  при  $|t| < \delta$  и тогда  $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$  при  $x \in K$ .  
 4) при  $x \in K$  верна  $p$ -ная сходимость:  $|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x) dx = \varepsilon$ .  
 5) продифференцируем по параметру  $\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\varphi_k(x-t) dt$ ;  
 6) производная (5) при  $x \in K$  будет зависеть только значений  $f$  в  $U_{1/k}(K)$ , то есть  $f$  можно считать интегрируемой при дифференцировании по параметру, что позволяет применять теорему. □

3.2. По различным  $\partial_{x_i} f * \varphi_k(x)$  получим по лемме 1.3, для производных свёрток схожее равенство, с самой  $f$ , а значит и  $p$ -ную сходимость.

$$\frac{\partial^m (f * \varphi_k)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} = \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} * \varphi_k.$$

□

- 3.3. 1) по thr(239.2)  $f = h + g$ , где  $g$  — эл. ступ.,  $\int_{\mathbb{R}^n} |h| dx < \varepsilon$ ;  
 2) по thr(1.2):  $\int_{\mathbb{R}^n} |h * \varphi_k| dx < \varepsilon$ . То есть, если окажется:  $\int_{\mathbb{R}^n} |g - g * \varphi_k| dx < \varepsilon$ , то  

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f - f * \varphi_k| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |g - g * \varphi_k| dx + \int_{\mathbb{R}^n} |h| dx + \int_{\mathbb{R}^n} |h * \varphi_k| dx < 3\varepsilon.$$
  
 3) Раскладывая  $g$  в сумму  $\chi$ -их  $\chi_P$ , останется доказать для одной  $\chi_P$ ;  
 4)  $\chi_P - \chi_P * \varphi_k \neq 0$  только в  $U_{1/k}(\partial P)$  и по модулю  $\leq 1$ ;  
 5) То есть после интегрирования получим не более  $\mu(U_{1/k}(\partial P))$ .  
 6) Напрямую можно убедиться, что эта  $\mu \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow 0$ . □

### 6 Теоремы о системе неявных функций

- 6.1. 1. По условию  $df_1, \dots, df_k, dx_{k+1}, \dots, dx_n$  — линейно независимы. Тогда  $f_1, \dots, f_k, x_{k+1}, \dots, x_n$  дают криволинейную систему координат.  
 2. Тогда старые координаты (НД) выражаются через новые:  $x_i = \varphi_i(f_1, \dots, f_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ , при чём выберем  $x$ :  $f_i = y_i \Rightarrow \text{Sol CУ}$  содержится в графике отображения  $\varphi: V \mapsto U$ , при достаточно малых  $V, U$ :  $\varphi(V) \subseteq U$ .  
 3. Но график отображения содержится в  $\text{Sol(CУ)}$ , т.к. в точке  $p = (y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$  значения  $f_i = y_i$ , т.к.  $\varphi_i(p)$  даст такие  $x_1, \dots, x_k$ , что  $f_i(x_i) = y_i$ . Q. E. D. □

## Призраки прошлого и настоящего

### 239 Прошлого

**Thr 239.1** (Дифференцирование под знаком интеграла).

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) \in \mathcal{L}_c^x \quad \forall y \in (a, b) \\ f \text{ дифференцируема по } y \\ \forall x \in X, \forall y \in (a, b) |f'_y(x, y)| \leq g(x) \\ g \geq 0: X \rightarrow \mathbb{R}^+ \in L_c \text{ на } X \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dy} \int_X f(x, y) dx = \int_X f'_y(x, y) dx.$$

**Thr 239.2.** Пусть функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  интегрируема по Лебегу с конечным интегралом. Тогда  $f$  можно сколь угодно близко приблизить в среднем элементарно ступенчатой функцией.

### 556 Настоящего

**Task 556.1** (Замена координат в интеграле для собственных отображений вообще). Пусть гладкое отображение  $\varphi: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  является собственным. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^* \nu = C_\varphi \int_{\mathbb{R}^n} \nu, \quad C_\varphi \in \mathbb{Z}.$$

#### Формула Стокса

**Lem 556.2** (формула Стокса в узком смысле). Для компактной двумерной поверхности с краем (то есть вложенного двумерного многообразия с краем)  $S \subset \mathbb{R}^3$  верна

$$\int_{\partial S} P dx + Q dy + R dz = \int_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

**Task 556.3.** Площадь области, ограниченной замкнутой гладкой кривой без самопересечений  $C \subset \mathbb{R}^2$ , можно посчитать по формуле:

$$A = \pm \int_C x dy,$$

где знак выбирается в зависимости от ориентации кривой.

**Task 556.4.** Объём области в  $\mathbb{R}^3$ , ограниченной связной вложенной компактной поверхностью без края  $S \subset \mathbb{R}^3$ , можно посчитать по формуле:

$$A = \pm \int_S x dy \wedge dz,$$

где знак выбирается в зависимости от ориентации поверхности.

**Task 556.5** (Порядок точки относительно кривой). Для замкнутой кусочно-гладкой  $\gamma \in \mathbb{R}^2$ , не проходящей через начало координат определим порядок начала координат относительно кривой:

$$w(\gamma, 0) - \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2},$$

и он не меняется при непрерывных деформациях кривой, при которых она не проходит через начало координат.

**Task 556.6.** Порядок начала координат относительно кривой является целым.

**Task 556.7.** Порядок начала координат относительно не проходящей через него нечётной кривой является нечётным числом. ( $\gamma: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(-u) = -\gamma(u)$ ).

**Task 556.8.** Для замкнутой кривой на плоскости с всюду не нулевой скоростью  $\int k(s) ds = 2\pi N$ ,  $N \in \mathbb{Z}$ .

**Task 556.9** (Лемма Жордана). Замкнутая кусочно-гладкая кривая  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  без самопересечений делит плоскость на две связные части внутреннюю и внешнюю (можно усложнить и сформулировать для непрерывных кривых).

#### Коммутатор

Для матриц известен коммутатор вида

$$[A, B] = AB - BA.$$

Аналогично для дифференцирования

$$[\partial_X, \partial_Y] f = \partial_X \partial_Y f - \partial_Y \partial_X f = X^i \frac{\partial}{\partial u^i} \left( Y^j \frac{\partial f}{\partial u^j} \right) - Y^j \frac{\partial}{\partial u^j} \left( X^i \frac{\partial f}{\partial u^i} \right) = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} \frac{\partial f}{\partial u^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial u^i}$$

Таким образом

$$[\partial_X, \partial_Y] f = (X^i \partial_i Y^j - Y^j \partial_j X^i) \partial_j f. \quad (36.1)$$

Это, как ни странно, дифференциальный оператор первого порядка. Это значит что есть такое векторное поле  $[X, Y]$ , что

$$\partial_{[X, Y]} = [\partial_X, \partial_Y] f.$$

Таким образом  $[X, Y]$  существует и равен

$$[X, Y] = X^i \partial_i Y^j - Y^j \partial_j X^i. \quad (36.2)$$