

Автор: Хоружий Кирилл

От: 14 декабря 2020 г.

Содержание

1	✗ Криволинейные координаты	3
2	Кинематика точки	3
2.1	Естественный трёхгранник	3
2.2	Компоненты скорости и ускорения	3
3	Кинематика твердого тела	3
3.1	Углы Эйлера	3
3.2	Основные теоремы о конечных перемещениях твёрдого тела	4
3.3	Скорости и ускорения точек твердого тела в общем случае движения	4
3.4	(-) Частные случаи.	5
3.5	Кинематические инварианты и кинематический винт	5
4	Сложное движение точки и твёрдого тела	5
4.1	Сложение скоростей и ускорений	5
4.2	Главный момент и главный вектор	6
4.3	Общие основания кинематики системы	6
5	Основные теоремы динамики	8
5.1	Аксиоматика	8
5.2	Основные теоремы динамики	8
5.3	Вычисление динамических величин	8
6	Основные теоремы динамики в неИСО	9
7	Движение точки в центральном поле	9
7.1	Уравнение Бине	9
7.2	Метрика Шварцшильда	10
8	Элементы механики сплошных сред (МСС)	11
8.1	Переменные Лагранжа и Эйлера	11
8.2	Деформации	11
8.3	Напряжение	12
8.4	Обобщенный закон Гука	12
9	Геометрия масс твёрдого тела	13
9.1	Тензор инерции	13
9.2	Кинетический момент	13
9.3	Компоненты тензора инерции в других СО	14
9.3.1	Поворот	14
9.3.2	Параллельный перенос (Т. Гюйгенса-Штейнера)	14
9.4	Цилиндр	14
9.5	Диск	15
10	✗ Интегрируемые случаи движения твёрдого тела с неподвижной точкой.	15
11	Уравнения Лагранжа	15
11.1	Конфигурационное многообразие	15
11.2	О связях	15
11.3	Обобщенная сила	16
11.4	Алгоритм на примере типичной задачи (12.37)	17
11.5	✗ Законы сохранения	17

12 Вариационный принцип Гамильтона	18
12.1 Оять маятник	18
12.2 Бусинка на прямой	18
12.3 Стационарная система	18
12.4 Геодезические на сфере	19
12.5 Равновесие. Принцип виртуальных перемещений.	19
12.6 Статика твёрдого тела	20
13 Устойчивость равновесия консервативных систем	20

1 ✂ Криволинейные координаты

2 Кинематика точки

Пусть $\mathbf{r}(t), t \in \mathbb{R}$ – движение точки и траектория движения.

Def 2.1.

$$\text{Скорость: } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}; \quad \text{ускорение: } \mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (2.1)$$

2.1 Естественный трёхгранник

Из геометрии $\lvert s(t) \rvert$ – длина кривой. Тогда

$$\mathbf{v} = \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{ds}}_{\boldsymbol{\tau}} \frac{ds}{dt} = v\boldsymbol{\tau}. \quad (2.2)$$

Дифференцируя (2.2)

$$\mathbf{w} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v \underbrace{\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}}_{\mathbf{n}/\rho} \frac{ds}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{w}_\tau} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}}_{\mathbf{w}_n}. \quad (2.3)$$

где $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ – базис, преследующий точку.

2.2 Компоненты скорости и ускорения

Есть локальный базис. Тогда компоненты скорости

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i \mathbf{g}_i = v^i \mathbf{g}_i \quad \Rightarrow \quad v^i = \dot{q}^i. \quad (2.4)$$

Для компоненты ускорения:

$$w_i = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{g}_i) = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_i) - (\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{g}_i}{dt}).$$

Но, во-первых:

$$\frac{d\mathbf{g}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^i}.$$

Во-вторых:

$$\mathbf{v} = \dot{q}^i \mathbf{g}_i \quad \left| \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \right| \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} (\underbrace{\dot{q}^1 \mathbf{g}_1}_0 + \underbrace{\dot{q}^2 \mathbf{g}_2}_{\mathbf{g}_2} + \underbrace{\dot{q}^3 \mathbf{g}_3}_0) = \mathbf{g}_k \quad (2.5)$$

Тогда

$$w_i = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}^i}) - (\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}^i}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{\partial \dot{q}^i} \frac{1}{2} - \frac{\partial(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{\partial \dot{q}^i} \frac{1}{2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{q}^i} \Rightarrow \boxed{mw_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i}} \quad (2.6)$$

3 Кинематика твердого тела

Def 3.1. Абсолютно твёрдым телом¹ назовём множество такое, что

$$\forall i, j, t: \quad |\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)| = \text{const.}$$

Точка O это полюс. Во-первых перенесем начало координат в O . Введём систему координат $O_{\xi\nu\zeta}$ связанную с телом, – тело относительно неё не движется.

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}, \quad \boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{OA} = \text{const в } O_{\xi\nu\zeta}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}(t) = R(t)\boldsymbol{\rho}.$$

3.1 Углы Эйлера

¹Для краткости просто *твёрдое тело*.

Ортогональность матрицы R даёт возможность описать её тремя независимыми параметрами. Один из вариантов сделать это – углы Эйлера.

Пусть начальная ПДСК (x, y, z) , а конечная – (X, Y, Z) , при чём $xy \cap XY = ON$ – линия узлов.

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------|
| 1) $\alpha: Ox \rightarrow ON$, | угол прецессии; |
| 2) $\beta: Oz \rightarrow OZ$, | угол нутации; |
| 3) $\gamma: OX \rightarrow ON$, | угол собственного вращения. |

Повороты системы на эти углы называются прецессия, нутация и поворот на собственный угол (вращение).

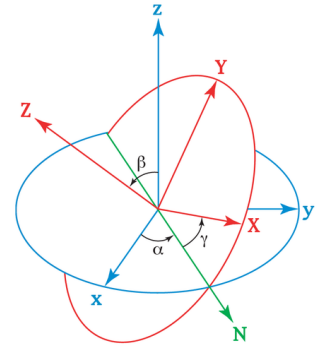


Рис. 1: Углы Эйлера

Матричная запись углов Эйлера:

$$R_Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и,

$$R_X(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta \cos \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad R_Z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin \psi & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

3.2 Основные теоремы о конечных перемещениях твёрдого тела

Далее бездоказательно приведём некоторые основные теоремы о конечных перемещениях твёрдого тела.

Thr 3.2 (Теорема Эйлера). *Произвольное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку, можно осуществить посредством вращения вокруг некоторой оси, проходящей через эту точку.*

Thr 3.3 (Теорема Шаля). *Самое общее перемещение твердого тела разлагается на поступательное перемещение, при котором произвольно выбранный полюс переходит из своего первоначального положения в конечное, и на вращение вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс. Это разложение можно совершить не единственным способом, выбирая за полюс различные точки тела; при этом направление и длина поступательного перемещения будут изменяться при выборе различных полюсов, а направление оси вращения и угол поворота вокруг нее не зависят от выбора полюса.*

Thr 3.4 (Теорема Моцци). *Самое общее перемещение твердого тела является винтовым перемещением.*

Con 3.5 (Теорема Бернулли-Шаля). *Самое общее перемещение плоской фигуры в своей плоскости есть либо поступательное перемещение, либо вращение вокруг точки. Эта точка называется центром конечного вращения.*

3.3 Скорости и ускорения точек твердого тела в общем случае движения

Проведём два вектора $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_O$:

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_O + \mathbf{r} = \mathbf{r}_O + R(t)\boldsymbol{\rho} \quad \xRightarrow{d/dt} \quad \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \dot{R}\boldsymbol{\rho} = \mathbf{v}_O + \dot{R}R^{-1}\mathbf{r}$$

но,

$$RR^T = E, \dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0, \dot{R}R^T = -R\dot{R}^T, (\dot{R}R^{-1})^T = -\dot{R}R^{-1}.$$

То есть $\dot{R}R^{-1}$ кососимметрична. Тогда пусть

$$\dot{R}R^{-1} = \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

Thr 3.6 (формула Эйлера). *Существует единственный вектор² $\boldsymbol{\omega}$, называемый угловой скоростью тела, с помощью которого скорость \mathbf{v} точки тела может быть представлена в виде*

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad - \quad \text{формула Эйлера.} \quad (3.2)$$

Тогда, например, при постоянном радиус векторе верно, что

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}, \quad \text{при условии } \mathbf{a} = \text{const.}$$

²Псевдовектор же, нет?

Можно вывести ускорение точки твёрдого тела

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_A &= \mathbf{w}_O + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \\ \mathbf{w}_A &= \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad - \quad \text{формула Ривальса},\end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ – угловое ускорение.

3.4 (-) Частные случаи.

Оставим частные случаи в покое.

3.5 Кинематические инварианты и кинематический винт

Вернемся к общему случаю движения твёрдого тела. В (3.6) угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ точки P инвариантна к выбору точки, соответственно ω^2 – первый кинематический инвариант. Домножив (3.6) скалярно на $\boldsymbol{\omega}$, получим, что $I_2 = (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega})$, – второй кинематический инвариант.

Сейчас легко доказать thr. (3.4), точнее надо показать существование такой прямой MN , все точки которой имеют скорости, $\parallel \boldsymbol{\omega}$.

Выберем некоторый полюс, O , со скоростью \mathbf{v}_O и угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Тогда верно, что

$$\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OS} = p\boldsymbol{\omega}, \quad (p \neq 0).$$

4 Сложное движение точки и твёрдого тела

4.1 Сложение скоростей и ускорений

Def 4.1.

Абсолютной скоростью (ускорением) называют скорость (ускорение) относительно неподвижной системы координат.

Относительной скоростью (ускорением) называют скорость (ускорение) относительно подвижной системы координат.

Переносной скоростью (ускорением) такой точки A' , которая в рассматриваемый момент времени совпадает с точкой A , но которая не движется относительно подвижной системы координат. называют абсолютную скорость (ускорение).

Thr 4.2 (сложение скоростей). Пусть \mathbf{a} – абсолютная скорость, \mathbf{e} – переносная, \mathbf{r} – относительная.

$$\mathbf{v}^a = \mathbf{v}^e + \mathbf{v}^r \quad (4.1)$$

Thr 4.3 (сложение ускорений). Пусть \mathbf{a} – абсолютное, \mathbf{e} – переносное, \mathbf{r} – относительное, \mathbf{c} – кориолисово.

$$\mathbf{w}^a = \mathbf{w}^e + \mathbf{w}^r + \mathbf{w}^c. \quad (4.2)$$

Δ . Запишем скорость \mathbf{v}_A^a относительно двух систем координат:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \mathbf{r} \text{ в } xyz, \quad \overrightarrow{OA} = \boldsymbol{\rho} \text{ в } \xi\eta\zeta, \quad \xRightarrow{d/dt} \quad \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \dot{R}\boldsymbol{\rho} + R\dot{\boldsymbol{\rho}}. \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_A^a = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_A^r \\ \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (R\boldsymbol{\rho}) + R\dot{\boldsymbol{\rho}} \quad \xRightarrow{d/dt} \quad \mathbf{w}_A^a = \mathbf{w}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\underbrace{\dot{R}\boldsymbol{\rho} + R\dot{\boldsymbol{\rho}}}_{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}) + \dot{R}\dot{\boldsymbol{\rho}} + R\ddot{\boldsymbol{\rho}} = \\ &= \mathbf{w}_A^e + \boldsymbol{\omega} \times R\dot{\boldsymbol{\rho}} + \underbrace{\dot{R}R^{-1}}_{\boldsymbol{\omega} \times} \underbrace{R\dot{\boldsymbol{\rho}}}_{\mathbf{v}_A^r} + \underbrace{R\ddot{\boldsymbol{\rho}}}_{\mathbf{w}_A^r} = \mathbf{w}_A^e + \mathbf{w}_A^r + \boxed{2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A^r}\end{aligned}$$

□

Теперь немного про твёрдое тело, зная, что $\boldsymbol{\omega}^r = \omega_\xi \mathbf{e}_\xi + \omega_\eta \mathbf{e}_\eta + \omega_\zeta \mathbf{e}_\zeta$, найдём³ угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}^a$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^a = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{d\boldsymbol{\omega}^r}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{d}{dt} (\omega^i \mathbf{e}_i) = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \underbrace{\dot{\omega}^i \mathbf{e}_i}_{\boldsymbol{\varepsilon}^r} + \underbrace{\omega^i \dot{\mathbf{e}}_i}_{\boldsymbol{\omega}^e \times \boldsymbol{\omega}^r} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^r + \boldsymbol{\omega}^e \times \boldsymbol{\omega}^r.$$

³Получить!

4.2 Главный момент и главный вектор

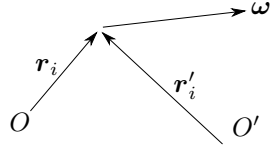
Имеется m мгновенно поступательных движений $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ и n мгновенно вращательных движений⁴ $\boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_n$. Уже знаем, что $\forall j$ мы можем представить \mathbf{v}_j как пару $\boldsymbol{\omega}'_j, \boldsymbol{\omega}''_j$. Получается, что $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_n$ представим в виду $2m + n$ мгновенных вращений.

Введём два важных вектора

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_i \quad - \text{ суммарный вектор мгновенных угловых скоростей, } \textit{главный вектор};$$

$$\mathbf{V} = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\omega}_i \quad - \text{ суммарный вектор мгновенных поступательных движений, } \textit{главный момент}.$$

Таким образом свели $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_n$ к паре $\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V}$, соответствующей выбранному центру приведения.



Найдём $\mathbf{V}_{O'}$:

$$\mathbf{V}_{O'} = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \boldsymbol{\omega}_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j + \sum_{i=1}^n (\overrightarrow{O'O} + \mathbf{r}_i) \times \boldsymbol{\omega}_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j + \underbrace{\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\omega}_i}_{\mathbf{V}_0} + \overrightarrow{O'O} \times \underbrace{\sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_i}_{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{V}_0 + \overrightarrow{O'O} \times \boldsymbol{\Omega}.$$

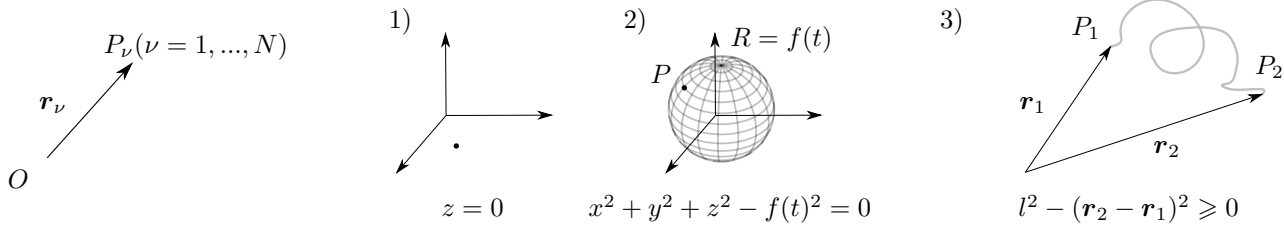
Таблица 1: Простейшие типы движений.

$(\mathbf{V}_0, \boldsymbol{\Omega})$	$\boldsymbol{\Omega}$	\mathbf{V}_0	простейшее мгновенное движение
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	мгновенно винтовое движение
0	$\neq 0$	0	мгновенное вращение, ось $\ni O$
0	$\neq 0$	$\neq 0$	мгновенное вращение, ось $\not\ni O$
0	0	$\neq 0$	мгновенно поступательное движение
0	0	0	мгновенный покой

4.3 Общие основания кинематики системы

Свободные и несвободные системы. Связи.

Рассмотрим некоторые частные случаи кинематических связей в системе.



В общем случае связь запишем, как

$$f(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) \geq 0.$$

В частности, при $f(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) = 0$, связь называется *двухсторонней*, или *удерживающей*. При неравенстве, соответственно, связь *односторонняя*, *освобождающая*. Связь вида $f(\mathbf{r}_\nu, t) = 0$ называется *геометрической*, *конечная*, *голономная*. Связь вида $f(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) = 0$ называется *дифференциальной*, или *кинематической*. Иногда кинематическая связь может быть представлена как геометрическая, такая связь называется *интегрируемой*.

Def 4.4. Если на систему материальных точек не наложены дифференциальные неинтегрируемые связи, то она называется *голономной*. Если же среди связей, наложенных на систему есть дифференциальные неинтегрируемые связи, то система называется *неголономной*.

⁴Скользкий вектор – это ?

Хотелось бы построить некоторую общую теория для случая, когда этих связей несколько. В частности пусть есть r геометрических связей.

$$f_\alpha(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r), \quad (4.3)$$

И несколько дифференциальных линейных связей

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{a}_{\beta\nu}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \cdot \mathbf{v}_\nu + a_\beta(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad (\beta = 1, \dots, s) \quad (4.4)$$

Стоит сказать, что

$$3N - r - s \geq 1.$$

Def 4.5. Геометрические связи называются стационарными или склерономными, если t не входит в их уравнения (4.3). Дифференциальные связи (4.4) называются *стационарными* или *склерономными* если функции $\mathbf{a}_{\beta\nu}$ не зависят явно от t , а функции $a_\beta \equiv 0$. Система называется *склерономной*, если она либо свободная, либо на нее наложены только стационарные связи. Система называется *реономной*, если среди наложенных на нее связей есть хотя бы одна нестационарная.

Ограничения, налагаемые связями на положения, скорости, ускорения и перемещения точек системы.

Пусть задан некоторый момент $t = t^*$. Тогда *возможными положениями* назовём \mathbf{r}_ν такие, что для них верно (4.3), (4.4).

Какие возможны скорости?

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \mathbf{v}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r). \quad (4.5)$$

Совокупность векторов $\mathbf{v}_\nu = \mathbf{v}_\nu^*$, удовлетворяющая линейным уравнениям (4.4) и (4.5) в возможном для данного момента времени положении системы, назовем возможными скоростями.

Какие возможны ускорения?

$$(4.5), (4.4) \xrightarrow{d/dt} \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \mathbf{w}_\nu + \sum_{\nu,\mu=1}^N \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu \partial \mathbf{r}_\mu} \mathbf{v}_\mu \cdot \mathbf{v}_\nu + 2 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t \partial \mathbf{r}_\nu} \mathbf{v}_\nu + \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t^2} = 0 \quad \alpha \in [1, r] \quad (4.6)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot \mathbf{w}_\nu + \sum_{\nu,\mu=1}^N \frac{\partial \mathbf{a}_{\beta\nu}}{\partial \mathbf{r}_\mu} \mathbf{v}_\mu \cdot \mathbf{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial \mathbf{a}_{\beta\nu}}{\partial t} \cdot \mathbf{v}_\nu + \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial a_\beta}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \mathbf{v}_\nu + \frac{\partial a_\beta}{\partial t} = 0 \quad \beta \in [1, s] \quad (4.7)$$

Совокупность векторов $\mathbf{w}_\nu = \mathbf{w}_\nu^*$, удовлетворяющая линейным уравнениям (4.6) и (4.7) в возможном для данного момента времени положении системы (+скорости), назовем возможными ускорениями.

Рассмотрим возможные перемещения $\Delta \mathbf{r}_\nu$ системы за Δt из её возможного положения \mathbf{r}_ν^* в момент $t = t^*$. Тогда

$$\Delta \mathbf{r}_\nu = \mathbf{v}^* \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{w}_\nu^* (\Delta t)^2 + \dots \quad (\nu = 1, \dots, N). \quad (4.8)$$

Пренебрегая нелинейными членами, получим, что $\Delta \mathbf{r}_\nu = \mathbf{v}_\nu^* \Delta t$. Тогда, домножив (4.4), (4.5) на Δt , получим систему уравнений, которой удовлетворяют линейные по Δt возможные перемещения:

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \Delta \mathbf{r}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \Delta t = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r), \quad (4.9)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot \Delta \mathbf{r}_\nu + a_\beta \Delta t = 0, \quad (\beta = 1, \dots, s), \quad (4.10)$$

где функции $\mathbf{a}_{\beta\nu}, a_\beta$ и частные производные вычисляются при $t = t^*$, $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu^*$.

Действительные и виртуальные перемещения

Пусть задано положение системы для $t, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$. Тогда для $t = t^* + dt$ запишем, что

$$\mathbf{r}_\nu(t^* + dt) - \mathbf{r}_\nu(t^*) = \mathbf{v}_{\nu_0}^* dt + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{\nu_0}^* (dt)^2 + \dots, \quad (4.11)$$

где $\mathbf{w}_{\nu_0}^*$ – ускорения точек системы при $t = t^*$. Величины (4.11) – действительные (истинные) перемещения точек системы за время dt . Тогда получим систему уравнений, аналогичную (4.9), (4.10):

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_{\nu}} \cdot d\mathbf{r}_{\nu} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} dt = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r), \quad (4.12)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot d\mathbf{r}_{\nu} + a_{\beta} dt = 0, \quad (\beta = 1, \dots, s). \quad (4.13)$$

Помимо действительных перемещений есть *виртуальные*. Ими называется совокупность величин $\delta\mathbf{r}_{\nu}$, удовлетворяющая линейным однородным уравнениям

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_{\nu}} \cdot \delta\mathbf{r}_{\nu} = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r), \quad (4.14)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot \delta\mathbf{r}_{\nu} = 0, \quad (\beta = 1, \dots, s), \quad (4.15)$$

Если система склерономна, то действительное перемещение будет одним из виртуальных.

Def 4.6. *Синхронное варьирование* – переход из одного положения в другое, при фиксированном времени

$$\mathbf{r}_{\nu}^* \rightarrow \mathbf{r}_{\nu}^* + \delta\mathbf{r}_{\nu}.$$

При синхронном варьировании мы не рассматриваем процесс движения и сравниваем допускаемые связями бесконечно близкие положения (конфигурации) системы для данного фиксированного момента времени.

Рассмотрим две совокупности возможных перемещений с одним и тем же значением величины Δt . Согласно разложению по Тейлору,

$$\Delta_1 \mathbf{r}_{\nu} = \mathbf{v}_{\nu_1}^* \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{\nu_1}^* (\Delta t)^2 + \dots,$$

$$\Delta_2 \mathbf{r}_{\nu} = \mathbf{v}_{\nu_2}^* \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{\nu_2}^* (\Delta t)^2 + \dots,$$

и рассмотрим их разность

$$\Delta_1 \mathbf{r}_{\nu} - \Delta_2 \mathbf{r}_{\nu} = (\mathbf{v}_{\nu_1}^* \Delta t - \mathbf{v}_{\nu_2}^* \Delta t) + \left(\frac{1}{2} \mathbf{w}_{\nu_1}^* (\Delta t)^2 - \frac{1}{2} \mathbf{w}_{\nu_2}^* (\Delta t)^2 \right) + \dots$$

5 Основные теоремы динамики

5.1 Аксиоматика

...

5.2 Основные теоремы динамики

Пусть \mathbf{Q} – количество движения, \mathbf{K}_A – кинематический момент относительно полюса A . Далее, T – механическая энергия, $\delta A^{\text{всех}} = \sum (\mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i)$ и $-d\Pi = \delta A$, где Π – потенциальная энергия.

Величина	Thr об изменение	Первые интегралы системы
$\mathbf{Q} = \sum m_i \mathbf{v}_i$	$d\mathbf{Q}/dt = \mathbf{R}^{\text{внеш}}$	$\mathbf{Q} = \text{const}$
$\mathbf{K}_A = \sum \mathbf{r}_{A_i} \times (m_i \mathbf{v}_i)$	$d\mathbf{K}_A/dt = \mathbf{M}_A^{\text{внеш}} + \mathbf{Q} \times \mathbf{v}_A$	$\mathbf{K}_A = \text{const}$
$T = \sum m_i v_i^2 / 2$	$dT = \delta A^{\text{всех}}$	$T + \Pi = \text{const}$

5.3 Вычисление динамических величин

Формула переноса полюса

$$\mathbf{R}_A = \sum (\overrightarrow{AB} + \mathbf{r}_{Bi}) \times m_i \mathbf{v}_i = \overrightarrow{AB} \times \sum m_i \mathbf{v}_i + \sum \mathbf{r}_{Bi} \times m_i \mathbf{v}_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{K}_A = \mathbf{K}_B + \mathbf{Q} \times \overrightarrow{BA}}$$

Теорема Кёнига

Выберем некоторую СК (книгову СК), движущуюся поступательно.

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + T_{c\xi\eta\zeta}^r.$$

В частности, для твёрдого тела

$$T_{c\xi\eta\zeta}^r = \sum \frac{1}{2}m_i(v_i^r)^2 = \sum \frac{1}{2}m_i\omega^2\rho_{Ci}^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i\rho_{Ci}^2 = \frac{1}{2}J_\omega\omega^2.$$

Тогда, для твёрдого тела,

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_\omega\omega^2$$

6 Основные теоремы динамики в неИСО

Знаем, что

$$\mathbf{w}_i^a = \mathbf{w}_i^e + \mathbf{w}_i^c + \mathbf{w}_i^r.$$

Подставляя это во II закон Ньютона получим, что

$$m_i\mathbf{w}_i^r = \mathbf{F}_i - m_i\mathbf{w}_i^e - m_i\mathbf{w}_i^c. \quad (6.1)$$

Ниже введём некоторые определения, а именно \mathbf{J}_i^e – *переносная сила инерции*, \mathbf{J}_i^c – *кориолисова сила инерции*. Далее \mathbf{w}_0 – ускорение центра масс.

Величина	Thr об изменение	Определения
\mathbf{Q}	$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{\text{внеш}} + \mathbf{J}^e + \mathbf{J}^c$	$\mathbf{J}^e = -\sum m_i\mathbf{w}_i^e = -m_0\mathbf{w}_0^e$ $\mathbf{J}^c = -\sum m_i\mathbf{w}_i^c = -m_0\mathbf{w}_0^c$
\mathbf{K}_A	$\dot{\mathbf{K}}_A = \mathbf{M}_A^{\text{внеш}} + \mathbf{M}_A^e + \mathbf{M}_A^c + \mathbf{Q}^r \times \mathbf{v}_A^r$	$\mathbf{M}_A^c = -\sum \mathbf{r}_{Ai} \times m_i\mathbf{w}_i^c$ $\mathbf{M}_A^e = -\sum \mathbf{r}_{Ai} \times m_i\mathbf{w}_i^e$
T	$dT = \delta A^{\text{вс},r} + \delta A^{e,r}$	$\delta A^{\text{вс},r} = \sum F_i d\mathbf{r}_i^r$ $\delta A^{e,r} = \sum -m_i\mathbf{w}_i^e \cdot d\mathbf{r}_i^r$

Для кинетической энергии в изменение нет слагаемого от кориолисовых сил, в силу

$$\delta A_i^{c,r} = -m_i(2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_0^r) \cdot (\mathbf{v}_0^r dt) \equiv 0.$$

7 Движение точки в центральном поле

7.1 Уравнение Бине

Def 7.1. Полем центральных сил называется поле, в котором сила действующая на точку такая, что

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Логично перейти к (r, φ, θ) . Тогда

$$m\mathbf{w} = F(r)\frac{\mathbf{r}}{r} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\mathbf{w}_r = F(r) \\ m\mathbf{w}_\varphi = 0 \\ m\mathbf{w}_\theta = 0 \end{cases}$$

Теперь, получится, знаем, что

$$\mathbf{w}_\theta = -\ddot{r}\theta + 2\dot{r}\dot{\theta} + r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 = 0,$$

и, учитывая, что $\theta(0) = \pi/2$, $\dot{\theta}(0) = 0$, тогда $\theta(t) = \pi/2$, это с точки зрения диффузов. А с точки зрения физики кинетический момент сохраняется, то есть

$$\mathbf{K}_0 = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}, \mathbf{v} \in \text{постоянной плоскости.}$$

Тогда θ мы можем просто выбросить.

Приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F(r) \\ m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F(r) \\ r^2\dot{\varphi} = \frac{K_0}{m} = \text{const.} \end{cases} \quad (7.1)$$

Это, собственно, соответствует закону Кеплера о сохранение секториальной скорости.

Первое уравнение как-то не очень, перейдём от d/dt к $d/d\varphi$. Тогда $r(t) \rightarrow u(\varphi) = \frac{1}{r}$ – переменная Бине.

$$\dot{r} = \frac{d(1/u)}{dt} = -cu',$$

а для второй производной

$$\ddot{r} = -c^2u^2u''.$$

Тогда уравнение перепишем, как

$$-c^2u^2u'' - c^2u^3 = \frac{F(u)}{m},$$

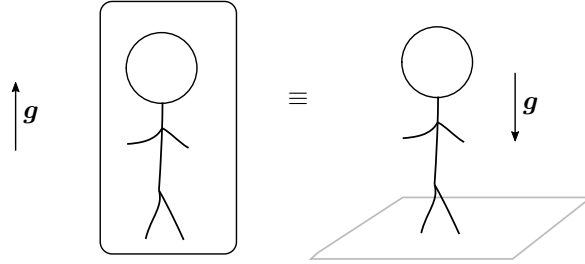
получая диффур вида

$$\boxed{u'' + u = \frac{-F(u)}{mc^2u^2}} \quad \text{– уравнение Бине.} \quad (7.2)$$

Так мы свели всё к гармоническому осцилятору.

7.2 Метрика Шварцшильда

Заметим (Эйнштейн заметил), что



тогда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) d\tau^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 - (r \sin \theta)^2 d\varphi^2 - r^2 d\theta^2.$$

Здесь 4 независимых переменных $(\tau, r, \varphi, \theta)$, где три из сферических координат, а τ – физическое время.

Также введен радиус Шварцшильда $a = 2GM$.

Движение точек рассматриваем, как движение по геодезическим, то есть $\mathbf{w}_i = 0$, где $i \in \{\tau, r, \varphi, \theta\}$, и положим $v^2 = 1$. Из раннее полученного, $\theta(t) = \pi/2$, то есть в некотором смысле движение плоское.

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{\tau}^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 = 1 \quad (7.3)$$

$$\mathbf{w}_\tau = \frac{d}{dt} \frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{\tau}} - \underbrace{\frac{\partial(v^2/2)}{\partial \tau}}_0 = \frac{d}{dt} \left[\left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{\tau} \right] = 0 \quad (7.4)$$

$$\mathbf{w}_\varphi = -\frac{d}{dt} [r^2 \dot{\varphi}] = 0 \quad (7.5)$$

Тогда у нас есть первый интеграл

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{\tau} = \mathcal{D}. \quad (7.6)$$

И другой первый интеграл

$$r^2 \dot{\varphi} = \mathcal{C}. \quad (7.7)$$

Подставляя, получим, что

$$\mathcal{D}^2 - \mathcal{C}^2 u'^2 = 1 - au + \mathcal{C}^2 u^3 (1 - au). \quad (7.8)$$

Применяя $d/d\varphi$ и полагая $C = c$, получим

$$u'' + u = \frac{3}{2}au^2 + \frac{a}{2c^2} = -\frac{F}{mc^2u^2}. \quad (7.9)$$

Получается, что мы можем или говорить про движение по геодезическим в метрике Шварцшильда, или движение в центральном поле с силой

$$F = -m \left(\frac{3}{2}ac^2u^4 + \frac{a}{2}u^2 \right). \quad (7.10)$$

8 Элементы механики сплошных сред (МСС)

8.1 Переменные Лагранжа и Эйлера

Пусть каждой точке среды соответствует ξ^1, ξ^2, ξ^3 , собственно (ξ, t) – лагранжевы переменные. Закон движения среды в таком случае это

$$\mathbf{r}(\xi, t), \quad (8.1)$$

скорость же

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}(\xi, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{v}(\xi, t)}{\partial t},$$

и так далее.

Альтернативно можем задать (x, t) – эйлерово описание. Тогда

$$\mathbf{v}(x, t), \mathbf{w}(x, t) \quad \text{– поля скоростей и ускорений.}$$

В частности, представляя движение по шоссе, полоса 1,2,3 и участок трассы – эйлерово описание среды. Если же мы будем следить за каждой машиной, то это будет лагранжево описание.

Задача 1

Пусть

$$v_1 = \frac{-x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad v_2 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Найти $\mathbf{r}(\xi, t)$. Легко получить, что

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = 1.$$

Тогда

$$x_1 = \frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \alpha), \quad x_2 = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \alpha).$$

Переменные запишутся как

$$\xi_1 = \frac{\cos \alpha}{\omega}, \quad \xi_2 = \frac{\sin \alpha}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{-1/2}, \alpha = \arcsin(\omega \xi_2).$$

Получается, что

$$\mathbf{r}(\xi, t) = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \alpha) \\ \sin(\omega t + \alpha) \end{pmatrix}.$$

8.2 Деформации

Пусть

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r},$$

где \mathbf{u} – вектор деформации. Тогда

$$dx'_i = dx_i + du_i = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k.$$

Введём некоторый ds'

$$(ds')^2 = dx'_i dx'_i; \quad ds^2 = dx_i dx_i.$$

Подставляя, получим, что

$$(ds')^2 = ds^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \right) \approx ds^2 + 2\varepsilon_{ik} dx_i dx_k,$$

где ε_{ik} – тензор малых деформаций:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right),$$

который в главных осях диагонален.

Тогда

$$ds' = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{ii}} dx_i.$$

В общем смысл в том, что

$$\frac{dx'_i - dx_i}{dx_i} \approx 1 + \frac{1}{2}(2\varepsilon_{ii}) - 1 = \varepsilon_{ii}.$$

Или

$$\frac{dV' - dV}{dV} = \text{tr } \varepsilon = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div } \mathbf{u}.$$

Тогда, в частности,

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad - \quad \text{несжимаемая среда.}$$

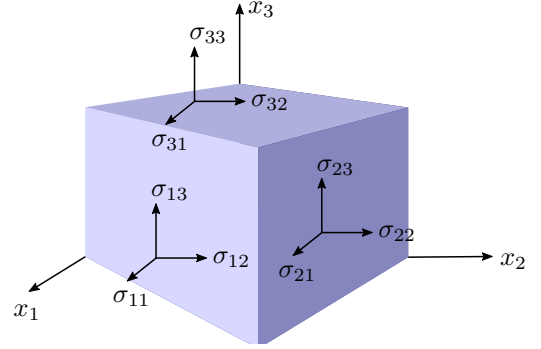
8.3 Напряжение

Ну, собственно,

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}, \quad \int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \oint \sigma_{ik} dA_k.$$

Кстати,

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}. \quad (8.2)$$



8.4 Обобщенный закон Гука

Пусть E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона. Тогда

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{\mu}{E} \sigma_{11}.$$

Перепишем это в виду

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\mu}{E} \sigma_{22} - \frac{\mu}{E} \sigma_{33} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_{11} - \frac{\mu}{E} \text{tr } \sigma.$$

Или, в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \frac{1+\mu}{E} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} - \frac{\mu}{E} \text{tr } \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В тензорном виде

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_{ik} - \frac{\mu}{E} \delta_{ik} \text{tr } \sigma.$$

Выразим ε :

$$\text{tr } \varepsilon = \frac{1+\mu}{E} \text{tr } \sigma - \frac{3\mu}{E} \text{tr } \sigma \quad \Rightarrow \quad \text{tr } \sigma = \frac{E}{1-2\mu} \text{tr } \varepsilon.$$

Так и получаем обобщенный закон Гука:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\mu} \left[\varepsilon_{ik} + \frac{\mu}{1-2\mu} \delta_{ik} \text{tr } \varepsilon \right] \quad (8.3)$$

Задача: самосжимающийся шар

Запишем

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = -f_i.$$

Тогда, после некоторых преобразований, получим, что

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{E}{1+\mu} \left[\frac{1}{2} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{2(1-2\mu)} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} \right].$$

Вспомним, что

$$\Delta \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}.$$

Перейдём к уравнению

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} \right) = kr. \quad (8.4)$$

Верно, что

$$\frac{d(r^2 u)}{dr} = \frac{kr^4}{2} + c_1 r^2.$$

Логично, что на границе $\sigma_{11} = 0$. То есть

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\mu} \left[\varepsilon_{11} + \frac{\mu}{1-2\mu} \operatorname{tr} \varepsilon \right] = 0.$$

Но $\varepsilon_{rr} = du/dr = \varepsilon_{11}$, $\operatorname{tr} \varepsilon = \operatorname{div} \mathbf{u}$, из этого можем найти c_1 .

9 Геометрия масс твёрдого тела

9.1 Тензор инерции

Движение тела может быть разбито на поступательное плюс вращательное. Есть три классические величины: $\mathbf{Q} = m\mathbf{v}_C$, $T = \frac{mv^2}{2} + T_{\text{вращ}}$, \mathbf{K} . Мгновенная ось вращения проходит через точку O .

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \equiv \tilde{\mathbf{r}}_i \boldsymbol{\omega}, \quad \tilde{\mathbf{r}}_i = \begin{pmatrix} 0 & z_i & -y_i \\ -z_i & 0 & x_i \\ y_i & -x_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Известно, что

$$v_i^2 = (\tilde{\mathbf{r}}_i \boldsymbol{\omega})^T (\tilde{\mathbf{r}}_i \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}^T \tilde{\mathbf{r}}_i^T \tilde{\mathbf{r}}_i \boldsymbol{\omega}.$$

Так приходим к

Def 9.1. Тензором величину назовём величину

$$\hat{J}_0 = \sum m_i \tilde{\mathbf{r}}_i^T \tilde{\mathbf{r}}_i. \quad (9.1)$$

Тогда кинетическую энергию запишем, как

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \hat{J}_0 \boldsymbol{\omega}. \quad (9.2)$$

Но опыт кричит о том, что там момент инерции, действительно

$$J_e = \mathbf{e}^T \hat{J}_0 \mathbf{e}. \quad (9.3)$$

Найдём его элементы:

$$\tilde{\mathbf{r}}_i^T \tilde{\mathbf{r}}_i = \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + y_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} = \hat{j}_i, \quad (9.4)$$

суммируя, получим

$$\hat{J}_0 = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix}, \quad (9.5)$$

где J_x – осевые моменты инерции, а J_{xy} – центробежные момент инерции.

Но, в силу симметричности тензора, существуют такие оси, что

$$\hat{J}_0 = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}. \quad (9.6)$$

9.2 Кинетический момент

Кинетический момент найдём из

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \mathbf{v}_i [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i] = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2} \sum m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{K}_O, \quad (9.7)$$

тогда

$$\boxed{\mathbf{K}_O = \hat{J}_O \boldsymbol{\omega}}. \quad (9.8)$$

На самом деле

$$\begin{aligned} \hat{J}_0: \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbf{K}_O \in \mathbb{R}^{\neq}, \\ \boldsymbol{\omega}, \Omega: \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Вообще, получается $\mathbf{K}_O \nparallel \boldsymbol{\omega}$.

Введём оси $\xi\eta\zeta$, тогда в них

$$\hat{J}_0 = \text{diag}(A, B, C), \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \quad \mathbf{K}_O = \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix}. \quad (9.9)$$

9.3 Компоненты тензора инерции в других СО

9.3.1 Поворот

Во-первых, посмотрим на поворот

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_1^T \hat{J}_{O1} \boldsymbol{\omega}_1 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \hat{J}_{O2} \boldsymbol{\omega}_2, \quad \boldsymbol{\omega}_1 = R \boldsymbol{\omega}_2,$$

Тогда

$$\boxed{\hat{J}_{O1} = R^{-1} \hat{J}_{O2} R}. \quad (9.10)$$

9.3.2 Параллельный перенос (Т. Гюйгенса-Штейнера)

Запишем

$$\hat{J}_O = \hat{J}_C + m \hat{j}_{CO}, \quad (9.11)$$

если $\vec{CO} = (\xi\eta\zeta)$, то

$$\hat{j}_{CO} = \begin{pmatrix} \eta^2 + \zeta^2 & -\xi\eta & -\xi\zeta \\ -\xi\eta & \xi^2 + \zeta^2 & -\eta\zeta \\ -\xi\zeta & -\eta\zeta & \xi^2 + \eta^2 \end{pmatrix} \quad (9.12)$$

9.4 Цилиндр

Перейдём к переменным r, φ, z , тогда, например

$$J_z = \int (x^2 + y^2) \rho dV = \frac{M}{\pi R^2 H} \iiint r^2 r dr d\varphi dz. \quad (9.13)$$

Считая, получим

$$\hat{J}_C = \text{diag} \left(\frac{MR^2}{4} + \frac{MH^2}{12}, \frac{MR^2}{4} + \frac{MH^2}{12}, \frac{MR^2}{2} \right). \quad (9.14)$$

В частности, при $\vec{CA} = (R \ 0 \ -H/2)^T$, получим

$$\hat{J}_A = \hat{J}_C + m \hat{j}_{CA} = \begin{pmatrix} A & 0 & \frac{1}{2}MRH \\ 0 & B & 0 \\ \frac{1}{2}MRH & 0 & C \end{pmatrix}.$$

Теперь приведём к главным осям, поворотом относительно оси z :

$$\hat{J}'_A = \text{diag}(A', B', C') = R^T \hat{J}_A R, \quad R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Решая, получим

$$\text{tg } 2\alpha = 4\sqrt{3}.$$

Подставляя, найдём

$$\hat{J}'_A = \frac{mR^2}{4} \text{diag}(2, 9, 9).$$

Ну или просто к главным осям привести можно, через собственные числа.

9.5 Диск

Есть некоторая квадратная рама (полное условие см. дополнение). Для простоты положим $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Найдём $T, \mathbf{N}_A, \mathbf{N}_B$.

Во-первых,

$$T = \frac{1}{2}mV_O^2 + \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}^T \hat{J}_O \mathbf{\Omega},$$

где $v_O = \omega a/2$. Выберем такие оси, что

$$\hat{J}_O = \frac{1}{4}mR^2 \text{diag}(1, 1, 2).$$

Посчитаем теперь $\mathbf{\Omega}$:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega\sqrt{2}/2 & \omega\sqrt{2}/2 + \omega \end{pmatrix}^T.$$

Из теоремы об изменении импульса

$$m\mathbf{w}_O = \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B, \quad m \frac{\omega^2 a^2/4}{a/2} = N_A + N_B.$$

А ещё знаем, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{K}_A &= \boldsymbol{\omega}_1 \times \left[\left(\hat{J}_O + m\hat{J}_{OA} \right) \mathbf{\Omega} \right] = \overrightarrow{AB} \times \mathbf{N}_B. \\ \frac{d}{dt}\mathbf{K}_A &= \boldsymbol{\omega}_1 \times \left[\left(\hat{J}_O + m\hat{J}_{OA} \right) \mathbf{\Omega} \right] = \overrightarrow{AB} \times \mathbf{N}_B. \end{aligned}$$

10 ✗ Интегрируемые случаи движения твёрдого тела с неподвижной точкой.

11 Уравнения Лагранжа

11.1 Конфигурационное многообразие

Каждую материальную точку можем определить $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ – итого \mathbb{R}^{3N} . Но есть некоторые ограничения вида

$$f_i(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Вложим в фазовое пространство многообразие M , в котором локально всё хорошо. Тогда $\dim M = n$ – число степеней свободы, а параметризация q_1, \dots, q_N – криволинейные координаты. В каждой $A \in M$ верно, что $\dot{\mathbf{q}} \in TM_A$, то есть

$$TM = \bigcup_q T_q M \ni (q, \dot{q}) \quad (11.1)$$

Примеры:

Для маятника, например, его множеством положений будет окружность. Для маятника в пространстве это будет сфера. И для маятника с $l(t) = \sin \omega t + 2$ это тоже будет окружность! То есть многообразие может быть не стационарно.

А вот для стержня в пространстве $M = \mathbb{R}^2 \times S^1$. Твёрдое тело с неподвижной точкой? По теореме Эйлера о конечном повороте, достаточно задать орт и угол. Для орта это будет S^2 , а для угла отрезок $[-\pi, \pi]$. Берем шар и заклеиваем все диаметрально-противоположные точки – конфигурационное многообразие $SO(3) \sim RP^3$.

11.2 О связях

Например для окружности $\dot{x} = \dot{\varphi}r \Rightarrow x = \varphi r + \text{const}$. А вот для сферы все не так радужно. Получается системы бывают *голономные* ($f_i(q, \dot{q}, t) = 0$ интегрируемые) и *неголономные* ($f_i(q, \dot{q}, t) = 0$ неинтегрируемые).

Давайте запишем второй закон Ньютона:

$$m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \quad \left| \cdot \right|_{d\mathbf{r}_i}$$

где \mathbf{R}_i – реакции связи. Хотим записать уравнение в общеквариантном виде. Но

$$d\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^k} \overset{\delta}{\cancel{dq^k}} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \cancel{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^k} \delta q^k, \quad \text{— виртуальные перемещения.}$$

То есть мы «замораживаем» время, так чтобы $\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$. На таких перемещениях работа реакции связи равна 0.

$$\left[\sum m_i \left(\omega_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) - \left(\mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) - \underbrace{\left(\mathbf{R}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right)}_{\cdot \delta q_k \rightarrow 0} \right] \cdot \delta q_k = 0 \quad (11.2)$$

Другими словами

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \sum m_i \frac{v_i^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q_k} \sum m_i \frac{v_i^2}{2} - \sum \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right] \delta q_k = 0.$$

Тогда

$$\sum_k \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right] \delta q_k = 0. \quad (11.3)$$

Проблема остается в неголономных системах, где δq_k не являются независимыми, получается, что **уравнения Лагранжа справедливы для голономных систем.**

11.3 Обобщенная сила

Во-первых

$$\delta A = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_k \sum_i \left(\mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_k \underbrace{\frac{\delta A_k}{\delta q_k}}_{Q_k} \delta q_k.$$

Тогда пусть $\Pi(q, t): Q_k = -\partial \Pi / \partial q_k$. Тогда

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_k} = 0, \quad (11.4)$$

где вводим

$$L = T - \Pi, \quad \text{— лагранжиан.}$$

Приходим к

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n} \quad (11.5)$$

системе уравнений на $2n$ переменных.

11.4 Алгоритм на примере типичной задачи (12.37)

△.

I. Определить количество степеней свободы.

В частности цилиндр без проскальзывания и свободный цилиндр – 2 степени свободы, а в качестве координат $q = (x, \varphi)$.

II. Посчитать кинетическую энергию.

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mV_c^2 + \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Но, по замечательной формуле,

$$V_c^2 = (\mathbf{v}_c^e)^2 + (\mathbf{v}_c^r)^2 + 2(\mathbf{v}_c^e \cdot \mathbf{v}_c^r) = \dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2(R-r)^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi}(R-r)\cos\varphi.$$

Собираем всё вместе

$$\begin{aligned} T &= \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}(\dot{\varphi}^2(R-r)^2 + 2\dot{\varphi}(R-r)\dot{x}\cos\varphi) + \frac{mr^2}{4}\frac{\dot{\varphi}^2(R-r)^2}{r^2} = \\ &= \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + \frac{3}{4}m\dot{\varphi}^2(R-r)^2 + m\dot{x}\dot{\varphi}(R-r)\cos\varphi. \end{aligned}$$

III. Найти потенциальную энергию или обобщенные силы.

$$\Pi = \frac{1}{2}cx^2 + mg(R-r)(1 - \cos\varphi).$$

IV. Найти лагранжиан $L = T - \Pi$.

V. Дифференцировать.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (m+M)\dot{x} + m\dot{\varphi}(R-r)\cos\varphi, \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= cx. \end{aligned} \right\} \Rightarrow (m+M)\ddot{x} + m\ddot{\varphi}(R-r)\cos\varphi - m\dot{\varphi}^2(R-r)\sin\varphi - cx = 0.$$

□

11.5 ✗Законы сохранения

Во-первых теперь ЗСЭ выглядит так:

$$\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = \text{const.} \quad (11.6)$$

Что работает, когда время не входит в L . Аналогично для импульса, когда x не входит в L .

Задача 12.64

Кольцо вращается с постоянной угловой скоростью⁵

△.

I. Степени свободы:

$$n = 1, \quad q = \varphi.$$

II. Кинетическая энергия

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\varphi}^2 R^2 + \omega R \sin\varphi)^2.$$

III. Потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{1}{2}cR^2(\varphi - \varphi_0)^2 + mgR\cos\varphi.$$

IV. Дифференцируем

□

⁵Это не свобода, а склерономная связь.

12 Вариационный принцип Гамильтона

Можно сказать, что есть пространство, проводить кривые, а потом их друг с другом сравнивать. Пусть есть некоторое конфигурационное многообразие M с $\dim M = n$ и частицами q_1, \dots, q_n .

Пусть $\gamma(t)$ соединяет q_0 и q_1 . Что мы точно знаем? Знаем, что $\gamma(t_0) = q^0$ и что $\gamma(t_1) = q^1$. Введем некоторый функционал

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt \quad \text{— действие по Гамильтону.} \quad (12.1)$$

Переходя к однопараметрическому семейству кривых $\gamma(\alpha, t)$, где α — скалярный параметр. Тогда

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(\alpha, t), \dot{\gamma}(\alpha, t), t) dt \quad \delta S = \frac{dS}{d\alpha} d\alpha \quad \text{— вариация действия.} \quad (12.2)$$

Thr 12.1 (принцип Гамильтона). *Кривая $\gamma(\alpha, t)$ является экстремалью функционала тогда и только тогда, когда является решением уравнений Лагранжа.*

$$\delta S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma(\alpha, t) \in \text{Sol(ур-ний Лагранжа)} \quad (12.3)$$

\triangle . Давайте просто проварьируем Лагранжиан, тогда

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} \right) \delta \alpha dt = \dots = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \delta q_k dt = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

таким образом уравнения Лагранжа выполнены. \square

12.1 Опять маятник

Посмотрим на маятник

$$L = \frac{1}{2} (\dot{q}^2 - q^2),$$

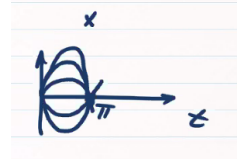
где $q(0) = 0$, $q(t_1) = q_1$. Получим различные ситуации.

Подставив в уравнение Лагранжа лагранжиан системы получим

$$\ddot{q} + q = 0 \quad \Rightarrow \quad q = A \cos t + B \sin t, \quad A = 0, \quad q_1 = B \sin t_1.$$

Пусть $t_1 \neq \pi k$ тогда $\exists! B = q_1 / \sin t_1$. Но, если $t_1 = \pi k$ то при $q_1 \equiv 0 \forall B$ у нас решение (их ∞). Если же $q_1 \neq 0$ то не решение \nexists .

Def 12.2. Есть на конфигурационном многообразии *кинетические фокусы*. Если мы ставим краевую задачу до фокуса Якоби, то $\delta S = 0$ — минимум, а иначе говорить не о чем, только экстремальность.



12.2 Бусинка на прямой

Пусть $q(t)$ — прямой путь, $q + \delta q$ — околный путь, вариация прямого пути. Рассмотрим такой интеграл

$$\begin{aligned} S_{\text{ок}} - S_{\text{пр}} &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \left((q + \delta q)^2 + (q + \delta q)^2 - \dot{q}^2 - \dot{q}^2 \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\dot{q} \delta \dot{q} + q \delta q + \frac{1}{2} \delta q^2 + \frac{1}{2} \delta \dot{q}^2 \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} (\delta q^2 + \delta \dot{q}^2) + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \delta (\dot{q}^2 + q^2) dt}_0 > 0 \end{aligned}$$

ожидаю всюду увидеть его положительным и, действительно, видя.

12.3 Стационарная система

Пусть есть некоторая система такая, что

$$v_i = \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k, \quad \Pi \equiv 0.$$

Тогда Лагранжиан

$$L = T_2 + \cancel{\mathcal{V}_1} + \cancel{\mathcal{V}_0} = \frac{1}{2} a_{ik}(q) \dot{q}^i \dot{q}^k. \quad (12.4)$$

По принципу Гамильтона

$$\delta S = \delta \int \frac{1}{2} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = 0,$$

хотим заменить $L \rightarrow \sqrt{2L}$, утверждается, что все стационарные точки сохраняются. Тогда

$$\delta S' = \delta \int \sqrt{2L} dt = \delta \int \sqrt{a_{ik}(q) dq_i dq_k} = \delta \int dS.$$

то есть метрика образована кинетической энергией, получается решение уравнений Лагранжа это просто уравнение геодезической. Вот и кратчайший путь на многообразии.

12.4 Геодезические на сфере

Начальные условия

$$\theta(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$$

На сфере, в сферических координатах

$$L = \frac{1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \quad \Rightarrow \quad S' = \int \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2}.$$

Также знаем, что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const} = \dot{\varphi} \sin^2 \theta, \quad \ddot{\theta} + \dot{\varphi}^2 \sin 2\theta = 0.$$

Так получим

$$S' = \dot{\varphi}_0 (t_1 - t_0),$$

12.5 Равновесие. Принцип виртуальных перемещений.

Легко получить соотношение вида

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (12.5)$$

Данное соотношение является необходимым и достаточным условием для того, чтобы движение, совместимое с идеальными связями, отвечало данной системе активных сил \mathbf{F}_i . Оно получило название **общего уравнения динамики** или *дифференциальным вариационным принципом Даламбера-Лагранжа*.

Thr 12.3 (принцип Даламбера-Лагранжа). *Верно, что*

$$m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \quad \Rightarrow \quad \sum_i (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Аналогично можно сформулировать *принцип Журдена*

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{v}_i = 0, \quad (12.6)$$

и *принцип Гаусса*:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i) \cdot \mathbf{v}_i = 0, \quad (12.7)$$

где $\delta \mathbf{w}_i = \mathbf{w}_{i1}^* - \mathbf{w}_{i2}^*$ не обязательно малая величина.

Замечая, что $m_i = \text{const}$, а $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(p, q)$, то последнее уравнение переписывается в виде

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\mathbf{w}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right)^2, \quad \delta Z = 0,$$

где величина Z называется принуждением или мерой принуждения. К слову она не просто стационарна для истинных движений.

Истинным является движение с минимальной мерой принуждения. Другими словами *несвободная система совершает движение, наиболее близкое к свободному*.

Def 12.4. Будем считать, что $q^0 \in M$ – *точка равновесия*, если при $\dot{q}^0 \equiv \dot{q}(0) \equiv 0$ приводит к $q(t) = q^0$.

В таком случае верен следующий принцип:

Thr 12.5 (принцип Лагранжа). Для того, чтобы точка была положением равновесия на $t \in [t_1, t_2]$ необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ на \forall виртуальных перемещениях всех активных сил была равна нулю.

$$\delta A|_0 = 0 \quad \delta A = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i, \quad (t \in [t_1, t_2]) \quad (12.8)$$

что является **общим уравнением статики**.

Этот принцип можно рассматривать, как дракона с тремя головами. Вот если система **голономная**, то

$$\delta A = Q_i \delta q_i \quad \Rightarrow \quad Q_i = 0 \quad \forall i.$$

Если система **консервативная**, то

$$Q_1 = -\frac{\partial P}{\partial q^i} \quad \Rightarrow \quad \text{положение равновесия — стационарная точка потенциала.}$$

Если же у нас **твёрдое тело**, тогда

$$\delta A = (\mathbf{R}^{\text{внеш}} \cdot \mathbf{v}_O) dt + (\mathbf{M}_O^{\text{внеш}} \cdot \boldsymbol{\omega}) dt \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{R}^{\text{внеш}} = 0 \\ \mathbf{M}^{\text{внеш}} = 0 \end{cases}$$

12.6 Статика твёрдого тела

Пусть к твёрдому телу приложена система с \mathbf{R}^e и \mathbf{M}_O^e .

Thr 12.6. Для равновесия твёрдого тела при $t \in [t_1, t_2]$ необходимо и достаточно, чтобы в момент времени t_1 тело покоилось, а \mathbf{R}^e и \mathbf{M}_O^e относительно произвольно выбранного полюса O равнялись 0 .

Δ . Свободное твёрдое тело является склерономной системой, его произвольное действительное перемещение является виртуальным. Тогда

$$\delta A = \mathbf{R}^e \cdot \mathbf{v}_O dt + \mathbf{M}_O \cdot \boldsymbol{\omega} dt.$$

Так как \mathbf{v}_O и $\boldsymbol{\omega}$ — произвольные величины, то из общего уравнения статики $\delta A = 0$ следуют необходимые равенства. \square

Thr 12.7. Для эквивалентности двух систем сил, приложенных к твёрдому телу необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковые главные векторы и главные моменты относительно некоторого полюса.

13 Устойчивость равновесия консервативных систем

Пусть $q = 0$ — положения равновесия. Динамика нашей системы описывается уравнениями Лагранжа, вида

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Также говорим про консервативную систему, то есть все связи склерономны,

$$\exists \Pi \equiv \Pi(q); \quad f(t, \mathbf{r}) = 0 \quad \Rightarrow \quad T + \Pi = \text{const.}$$

Def 13.1. Положение равновесия $q = 0$ — *устойчиво по Ляпунову*, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, такая что

$$\forall |q(0)| < \delta, |\dot{q}(0)| < \delta: \quad |q(t)| < \varepsilon, |\dot{q}(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0. \quad (13.1)$$

Def 13.2. Положение равновесия $q = 0$ — *неустойчиво по Ляпунову*, если $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0$, такая что

$$\forall \delta > 0 \exists |q(0)| < \delta, |\dot{q}(0)| < \delta, t^*: \quad |q(t^*)| > \varepsilon \text{ или } |\dot{q}(t^*)| > \varepsilon. \quad (13.2)$$

Thr 13.3 (Теорема Лагранжа-Дирихле). Если в положении равновесия $\Pi(q)$ имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.

Разложим в ряд $\Pi(q)$:

$$\Pi(q) = \Pi(0) + \frac{\partial \Pi}{\partial q^i} \Big|_0 q^i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^k} + \dots \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^k}.$$

Thr 13.4 (Теорема Ляпунова о неустойчивости I). Если в положении равновесия $\Pi(q)$ не имеет минимума и это определяется по квадратичной форме её разложения в ряд (в окрестности положения равновесия), то это положение равновесия неустойчиво.

Thr 13.5 (Теорема Ляпунова о неустойчивости II). Если в положении равновесия $\Pi(q)$ имеет строгий максимум и это определяется по наименьшей степени её разложения в ряд (в окрестности положения равновесия), то это положение равновесия неустойчиво.

Задача 1 (15.6)

$$\Pi = mgl(1 - \cos \varphi) - m\omega^2(l^2 \sin^2 \varphi)/2.$$

Найдём положения равновесия, как стационарные точки потенциала

$$\frac{d\Pi}{d\varphi} = mgl \sin \varphi - m\omega^2 l^2 \sin \varphi \cos \varphi = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sin \varphi = 0, & \varphi = 0 \pm \pi \\ \cos \varphi = g/\omega^2 l, & \varphi = \pm \arccos g/\omega^2 l, \end{cases} \quad \omega > \omega^* = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Посмотрим на

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = ml^2\omega^2 \left(\frac{g}{\omega^2 l} - 1 \right)$$

При $\varphi = 0$, при $\omega < \omega^*$ видим устойчивое положение равновесия. При $\omega > \omega^*$ неустойчиво. При $\omega = \omega^*$ видимо, что

$$\frac{d^4\Pi}{d\varphi^4} = ml^2\omega^2(-1 + 4) > 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0 - \text{устойчиво.}$$

Теперь посмотрим на $\varphi = \pm\pi$:

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} < 0.$$

При $\cos \varphi = g/\omega^2 l$ видим, что

$$\frac{d^2\Pi}{d\varphi^2} = ml^2\omega^2 \left(\frac{g^2}{\omega^4 l^2} + 1 - 2 \frac{g^2}{\omega^4 l^2} \right) = ml^2\omega^2 \left(1 - \frac{g^2}{\omega^4 l^2} \right),$$

видим, что $\omega > \omega^*$ положение равновесия устойчиво, при $\omega < \omega^*$ его попросту не существует.



Рис. 2: Бифуркационная диаграмма типа вилка

Задача 4 (Гандтмахер, устойчивость)

$$\Pi = q^4 \sin^2 \frac{1}{q}, \quad \Pi(0) = 0, \quad q = 0 - \text{п.р.}$$