

# БИЛЕТЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО «АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ», ФАКУЛЬТЕТА ФОПФ им. Л. Д. ЛАНДАУ

---

**Авторы:** Хоружий Кирилл  
Примаков Евгений

**От:** 20 января 2021 г.

## Содержание

<b>Криволинейные координаты и кинематика</b>	<b>2</b>
1 Кинематика точки . . . . .	2
2 Описание движения твёрдого тела . . . . .	3
3 Приложения к твёрдому телу . . . . .	3
4 Сложное движение точки . . . . .	5
5 Вращение твёрдого тела . . . . .	5
6 Общий случай движения твёрдого тела . . . . .	6
7 (и №26) Связи и всё, что с ними связано . . . . .	7
8 Работа и энергия . . . . .	9
9 Центр масс . . . . .	10
<b>Движение точки в центральном поле сил</b>	<b>11</b>
19 Формулы Бине . . . . .	11
<b>Элементы механики сплошных сред</b>	<b>12</b>
22 Сплошная среда и её напряжение . . . . .	12
23 Перемещение сплошной среды . . . . .	12
24 Тензоры деформаций и перемещений . . . . .	13
25 Элементы гидродинамики . . . . .	14
<b>Принципиальность виртуальных перемещений</b>	<b>15</b>
27 Общее уравнение динамики (принцип Даламбера-Лагранжа) . . . . .	15
28 (вплоть до №30) Общее уравнение динамики, статики и т.д. . . . .	16
<b>Уравнения Лагранжа</b>	<b>17</b>
31 Уравнение Лагранжа второго рода . . . . .	17
32 Разрешимость уравнений Лагранжа . . . . .	17
37 Ковариантность уравнений Лагранжа . . . . .	18
33 Изменение полной механической энергии голономной системы . . . . .	18
34 Обобщенный потенциал и первые интегралы лагранжевых систем . . . . .	19
<b>Канонические уравнения</b>	<b>19</b>
35 Гамильтонов формализм, уравнения и интеграл Якоби . . . . .	19
36 Принцип наименьшего действия . . . . .	22
40 Принцип Мюпертью-Лагранжа . . . . .	24
41 Принцип Якоби и геодезические . . . . .	25
<b>Устойчивость движения</b>	<b>25</b>
38 Теорема Лагранжа об устойчивости положения консервативной системы . . . . .	25
39 Теорема Ляпунова об обращении теоремы Лагранжа . . . . .	25

# Криволинейные координаты и кинематика

## 1 Кинематика точки

Для точки  $P$  движущейся относительно некоторого неподвижного тела (связем с ним точку  $O$ ), можно ввести следующие характеристики:

**Def 1.1** (Радиус вектор, скорость и ускорение точки  $P$ ).

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

**Def 1.2.** Для задания движения точки, зная её траекторию, можно сопоставить ей дуговую координату  $\sigma(t)$  и получить выражения для скорости и ускорения, выраженные в осях *естественного трёхгранника*  $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ . Таким образом для  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\sigma(t))$ :

$$\boldsymbol{\tau}(\sigma) = \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma}, \quad \frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}(\sigma),$$

где  $\rho$  – радиус кривизны. Для кривой в  $\mathbb{R}^3$  добавим ещё вектор  $\mathbf{b}$  для правой тройки. Таким образом получим формулы Френе:

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\tau} + \kappa\mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\kappa\mathbf{n}.$$

Таким образом сможем в компонентах трёхгранника выписать скорость и ускорение точки:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = v_{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{w} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}v_{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{\tau} + v_{\boldsymbol{\tau}}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dv_{\boldsymbol{\tau}}}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v_{\boldsymbol{\tau}}^2}{\rho}\mathbf{n}. \end{aligned}$$

Как видно, ускорение точки представилось в видео  $\mathbf{w} = w_n + w_{\boldsymbol{\tau}}$  – *нормальной* и *тангенциальной* составляющей.

**Lem 1.3** (Из матана). Для  $f_i \in C^2: U \mapsto V$ , если  $X$  – касательный вектор в точке  $p \in U$ , то  $X(f)$  можно определить как:

$$X(f) = X(x^i) \frac{\partial f(p)}{\partial x^i}, \text{ а координаты этого вектора в криволинейных координатах: } X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Каждую материальную точку можем определить  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$  – итого  $\mathbb{R}^{3N}$ . Но есть некоторые ограничения вида

$$f_i(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Вложим в фазовое пространство многообразие  $M$ , в котором локально всё хорошо. Тогда  $\dim M = n$  – число степеней свободы, а параметризация  $q_1, \dots, q_N$  – криволинейные координаты. В каждой  $A \in M$  верно, что  $\dot{\mathbf{q}} \in TM_A$ , то есть

$$TM = \bigcup_q T_q M \ni (q, \dot{q})$$

И так, движение точки можно задать, если её криволинейные координаты – известные функции  $q(t)$ .

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

**Def 1.4.** Коэффициентами Ламе такие  $H^i$ . С их помощью удобно выразить единичные базисные векторы криволинейных координат:

$$H_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \right| = \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial q^i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q^i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q^i} \right)^2}. \quad \mathbf{e}^i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}.$$

Далее будем координатными векторами называть  $\mathbf{g}_i(\mathbf{r}) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}$ . Разложение произвольного вектора по локальному базису имеет вид:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i = a_j \mathbf{g}^j.$$

Здесь  $\mathbf{g}^j$  – векторы двойственного базиса к базису из  $\mathbf{g}_i$ . В двойственном же (взаимном) базисе из матана мы видели:

$$X(f) = df(X) = \partial_x f, \quad dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i, \quad a = a_i dx^i.$$

Таким образом получаем скорость точки и её ковариантную компоненту:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} = \mathbf{g}_i \dot{q}^i, \quad v^i = \dot{q}^i.$$

И для ускорения:

$$w_k = \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_k = \frac{(d\mathbf{v})_k}{dt} = g_{kj} \frac{dv^j}{dt} + \Gamma_{kij} v^j v^i.$$

## 2 Описание движения твёрдого тела

**Def 2.1.** *Твёрдое тело* — множество точек, расстояние между которыми не меняется:  $\forall j, j, t: |\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j| = \text{const}$ .

Точка  $O$  это полюс. Во-первых перенесем начало координат в  $O$ . Введём систему координат  $O_{\xi\nu\zeta}$  связанную с телом, — тело относительно неё не движется

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}, \quad \boldsymbol{\rho} = \overrightarrow{OA} = \text{const в } O_{\xi\nu\zeta}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}(t) = R(t)\boldsymbol{\rho}.$$

Ортогональность матрицы  $R$  даёт возможность описать её тремя независимыми параметрами. Один из вариантов сделать это — углы Эйлера.

Пусть начальная ПДСК  $(x, y, z)$ , а конечная —  $(X, Y, Z)$ , при чём  $xy \cap XY = ON$  — линия узлов.

- |                                  |                             |
|----------------------------------|-----------------------------|
| 1) $\alpha: Ox \rightarrow ON$ , | угол прецессии;             |
| 2) $\beta: Oz \rightarrow OZ$ ,  | угол нутации;               |
| 3) $\gamma: OX \rightarrow ON$ , | угол собственного вращения. |

Повороты системы на эти углы называются прецессия, нутация и поворот на собственный угол (вращение).

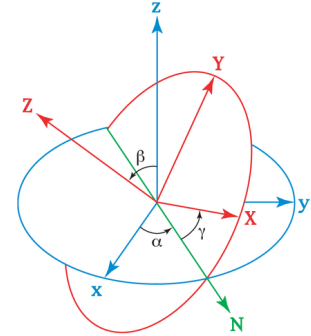


Рис. 1: Углы Эйлера

Матричная запись углов Эйлера:

$$R_Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_X(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad R_Z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin \psi & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Thr 2.2** (Теорема Эйлера). *Произвольное перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку, можно осуществить посредством вращения вокруг некоторой оси, проходящей через эту точку.*

**Thr 2.3** (Теорема Шаля). *Самое общее перемещение твердого тела разлагается на поступательное перемещение, при котором произвольно выбранный полюс переходит из своего первоначального положения в конечное, и на вращение вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс. Это разложение можно совершить не единственным способом, выбирая за полюс различные точки тела; при этом направление и длина поступательного перемещения будут изменяться при выборе различных полюсов, а направление оси вращения и угол поворота вокруг нее не зависят от выбора полюса.*

**Thr 2.4** (Теорема Моцци). *Самое общее перемещение твердого тела является винтовым перемещением.*

**Con 2.5** (Теорема Бернулли-Шаля). *Самое общее перемещение плоской фигуры в своей плоскости есть либо поступательное перемещение, либо вращение вокруг точки. Эта точка называется центром конечного вращения.*

## 3 Приложения к твердому телу

Проведём два вектора  $\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_O$ :

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_O + \mathbf{r} = \mathbf{r}_O + R(t)\boldsymbol{\rho} \xrightarrow{d/dt} \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \dot{R}\boldsymbol{\rho} = \mathbf{v}_O + \dot{R}R^{-1}\mathbf{r}$$

но,

$$RR^T = E, \quad \dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0, \quad \dot{R}R^T = -R\dot{R}^T, \quad (\dot{R}R^{-1})^T = -\dot{R}R^{-1}.$$

То есть  $\dot{R}R^{-1}$  кососимметрична. Тогда пусть

$$\dot{R}R^{-1} = \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

**Thr 3.1** (формула Эйлера). Существует единственный вектор<sup>1</sup>  $\omega$ , называемый *угловой скоростью тела*, с помощью которого скорость  $v$  точки тела может быть представлена в виде

$$v_A = v_O + \omega \times r \quad - \quad \text{формула Эйлера.}$$

Тогда, например, при постоянном радиус векторе верно, что

$$v_A = \frac{da}{dt} = \omega \times a, \quad \text{при условии } a = \text{const.}$$

Можно вывести ускорение точки твёрдого тела

$$\begin{aligned} w_A &= w_O + \frac{d\omega}{dt} \times r + \omega \times \frac{dr}{dt}, \\ w_A &= w_O + \varepsilon \times r + \omega \times (\omega \times r) \quad - \quad \text{формула Ривальса,} \end{aligned}$$

где  $\varepsilon = d\omega/dt$  – угловое ускорение.

### Вращение вокруг неподвижной оси

Пусть точка  $P$  задана в связанной системе координат радиус-вектором  $\rho$ :

$$r = A\rho, \quad A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После прямых вычислений получаем, что

$$\dot{A}A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\varphi} & 0 \\ \dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix}.$$

Таким образом получили, что угловая скорость  $\omega$  направлена по оси вращения по правилу буравчика. Угловое ускорение  $\varepsilon$  коллинеарно  $\omega$ .

Для вычисления  $w_P$  примем  $O$  за полюс. Тогда  $v_O = 0$ , что значит  $v = \omega \times r$  – вектор скорости перпендикулярен оси вращения. И из формулы Ривальса:

$$w = \underbrace{\varepsilon \times r}_{w_{\text{вр}}} + \underbrace{\omega \times v}_{w_{\text{ос}}},$$

где *вращательное* ускорение  $w_{\text{вр}} = |\ddot{\varphi}|d$ , а *осеостремительное*  $w_{\text{ос}} = \omega^2 d$ , а  $d$  – радиус окружности, по которой движется  $P$ .

### Движение вокруг неподвижной точки

Точка  $O$  – неподвижна, тогда  $v_O = 0$ ,  $w_O = 0$  и формулы, полученные в разделе выше одни и те же. Однако стоит ввести пару определений:

**Def 3.2.** *Мгновенная ось вращения* – ось на которой в данный момент времени лежит  $\omega$ , которая в свою очередь – *мгновенная угловая скорость*.

**Def 3.3.** При своём движении мгновенная ось вращения описывает в теле коническую поверхность – *подвижный аксоид*, а в абсолютном пространстве – *неподвижный аксоид*. При движении тела подвижный аксоид катится по неподвижному без скольжения.

Годограф  $\omega$  лежит на неподвижном аксоиде. Так как  $\varepsilon = \dot{\omega}$ , то  $\varepsilon$  направлено по касательной к годографу и вовсе не обязательно по мгновенной оси вращения. Если  $\omega = \omega e$ , для единичного  $e$ , то  $\varepsilon = \dot{\omega}e + \omega \dot{e}$ . Если мгновенная ось вращается вокруг  $O$  с  $\Omega$ , то  $\omega \dot{e} = \Omega \times \omega$ .

Вновь воспользовавшись формулой Ривальса вычислим осеостремительное ускорение, для  $Q$  – точке на мгновенной оси вращения:

$$w_{\text{ос}} = \omega \times (\omega \times r) = \omega^2 e \times (e \times r) = \omega^2 [e(e \cdot r) - r] = \omega^2 (\overrightarrow{OQ} - r) = \omega^2 l.$$

Таким образом получили, что  $w_{\text{ос}}$  совпадает при вращении, как если бы ось было неподвижной.

### Плоское движение

**Def 3.4.** *Плоское движение* – движение тела, при котором все его точки перемещаются в плоскостях параллельных некоторой неподвижной плоскости.

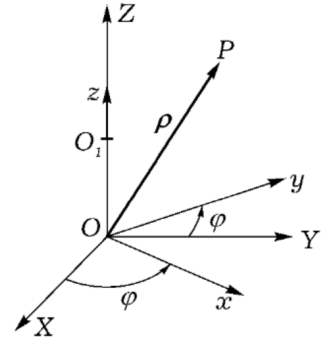


Рис. 2: Ориентация тела относительно неподвижной системы координат

<sup>1</sup>Псевдовектор же, нет?

Плоская фигура вынужденно двигаясь в своей плоскости имеет три степени свободы:  $(x, y, \varphi)$ . Скорости и ускорения всё так же ищутся по общим формулам, но в данном случае полезно рассмотреть несколько теорем:

**Thr 3.5.** При плоском движении фигуры во мгновение  $t$ , если движение не поступательно, то  $\exists! C$ -точка, такая что  $v_C = 0$ , а остальные точки тела движутся как при вращении вокруг  $C$ .

**Def 3.6.** Такая точка  $C$  — называется мгновенным центром скоростей.

**Thr 3.7.** Для движения плоской фигуры в своей плоскости. Если в момент  $t$   $\dot{\varphi} \neq 0$  ||  $\ddot{\varphi} \neq 0$ , то в  $t$   $\exists! Q$ -точка фигуры, такая что  $w_Q = 0$ .

## 4 Сложное движение точки

### Теорема о сложении скоростей

**Thr 4.1.** Абсолютная скорость точки равна сумме переносной и относительной скорости:  $v^a = v^e + v^r$ .

△. Для точки  $P$  в абсолютной системе координат:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_a = \dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_0 + \dot{\mathbf{r}} = \underbrace{\mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}_{v^e} + \underbrace{\dot{\mathbf{r}}}_{v^r}.$$

Переносная скорость  $v^e$  — есть скорость той точки подвижной системы координат, в которой находится  $P$ . Таким образом показали напрямую разложение.  $\square$

### Теорема Кориолиса

**Thr 4.2.** Абсолютное ускорение точки равно сумме переносного, относительного и карелыского ускорения:  $w^a = w^e + w^r + w^c$ .

△. Для абсолютного ускорения точки, продифференцируем ещё раз:

$$\mathbf{w}^a = \dot{\mathbf{v}}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{A}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{r}}) + \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{A}\ddot{\mathbf{r}}.$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$  — угловое ускорение подвижной системы координат, а  $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{r}} = w^r$ :

$$\mathbf{w}^a = \underbrace{\mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}_{w^e} + w^r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}\dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{r}}.$$

И последние два слагаемых дадут кареолисового ускорение:  $\dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}\dot{\mathbf{r}}$ , тогда получаем  $w^c = 2\boldsymbol{\omega} \times v^r$ . Итого получаем искомую формулу.  $\square$

## 5 Вращение твёрдого тела

### Сложение мгновенных вращений вокруг пересекающихся осей

Пусть тело мгновенно вращается с  $\boldsymbol{\omega}_1$  относительно  $O_1x_1y_1z_1$ , которая сама вращается с  $\boldsymbol{\omega}_2$  относительно  $O_aXYZ$ . Предположим, что оси вращений пересекаются в точке  $A$ , которая тогда обладает нулевой скоростью. Тогда наше сложное движение представляется как вращения с каким-то  $\boldsymbol{\Omega}$  по оси через  $A$ .

Для произвольной точки  $P$  тела:

$$\mathbf{v}^a = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overrightarrow{AP} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \overrightarrow{AP} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \overrightarrow{AP}.$$

С другой стороны:

$$\mathbf{v}^a = \boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{AP} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2.$$

Результат выкладок выше можно обобщить и на  $n$  таких вращений.

### Параллельные оси и пара вращений

Если же  $\boldsymbol{\omega}_1$  и  $\boldsymbol{\omega}_2$  не пересекаются — параллельны, то рассмотрим точки лежащие в перпендикулярной к этим скоростям плоскости. Тогда пусть прямая, по которой пересекается эта плоскость с плоскостью, в которой лежат скорости —  $AB$ . На  $AB$  есть точка  $C$ , которая остаётся неподвижной:

$$\mathbf{v}_C = 0 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \overrightarrow{AC} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \overrightarrow{BC} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 AC = \omega_2 BC, \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2.$$

**Def 5.1.** Пара вращений — совокупность двух мгновенных вращений вокруг параллельных осей с равными по модулю, но противоположными по направлению угловыми скоростями.

**Def 5.2.** Плоскость в которой лежат  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (пара) называют *плоскостью пары*.

**Def 5.3.** Расстояние между векторами пары  $d$  называют *плечо пары*. А  $d \times \omega_2$  — *момент пары*.

Тело участвующее в паре вращений движется в итоге поступательно:

$$\mathbf{v} = \omega_1 \times \overrightarrow{AP} + \omega_2 \times \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} \times \omega_2 - \overrightarrow{BP} \times \omega_2 = d \times \omega.$$

### Кинематические уравнения Эйлера

**Def 5.4.** Кинематическими уравнениями Эйлера называют следующую систему:

$$\omega = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}_{Oxyz} \rightsquigarrow \begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{cases}$$

## 6 Общий случай движения твёрдого тела

### Кинематические инварианты

**Def 6.1.** Первый кинематический инвариант —  $\omega$ , которая, как мы видели не зависит от выбора точки по формуле Эйлера (3.1). В более узком смысле первым инвариантом можно называть  $I_1 = \omega^2$ .

**Def 6.2.** Из той же формуле Эйлера следует, что  $I_2 = \mathbf{v} \cdot \omega$  также инвариант для всех точек тела.

### Кинематический винт

**Def 6.3.** Если в данный момент тело участвует в совокупности мгновенно поступательно вдоль оси и вращательного вокруг этой же, то такое движение называют *мгновенно винтовое движение*.

Выберем полюс  $O$  и пусть в данный момент известны его  $v_O$  и  $\omega$ . Пусть они заданы своими компонентами в система координат  $OXYZ$ , получающейся из абсолютной системы координат  $O_aXYZ$  при помощи поступательного перемещения:

$$\mathbf{v}_O = \begin{pmatrix} v_{OX} \\ v_{OY} \\ v_{OZ} \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{pmatrix}.$$

Если скорость точки параллельна вектору  $\omega$ , то:  $\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_O + \omega \times \overrightarrow{OS} = p\omega$ .

Полученное равенство является векторным уравнением для прямой, все точки которой имеют сонаправленные  $\omega$  скорости. В координатах оно запишется как:

$$\frac{v_{OX} + (\omega_Y Z - \omega_Z Y)}{\omega_X} = \frac{v_{OY} + (\omega_Z X - \omega_X Z)}{\omega_Y} = \frac{v_{OZ} + (\omega_X Y - \omega_Y X)}{\omega_Z} = p.$$

**Def 6.4.** Эта прямая называется *мгновенной винтовой осью* тела. Совокупность  $\omega$  и  $\mathbf{v}$  любой точки называют *кинематическим винтом*, а число  $p = I_2/I_1$  — *параметром винта*.

### Главный момент и главный вектор

Имеется  $m$  мгновенно поступательных движений  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  и  $n$  мгновенно вращательных движений<sup>2</sup>  $\omega_1, \dots, \omega_n$ . Уже знаем, что  $\forall j$  мы можем представить  $\mathbf{v}_j$  как пару  $\omega'_j, \omega''_j$ . Получается, что  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \omega_1, \dots, \omega_n$  представим в виду  $2m + n$  мгновенных вращений.

Введём два важных вектора

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \quad \text{— суммарный вектор мгновенных угловых скоростей, главный вектор;}$$

$$\mathbf{V} = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \omega_i \quad \text{— суммарный вектор мгновенных поступательных движений, главный момент.}$$

Таким образом свели  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \omega_1, \dots, \omega_n$  к паре  $\Omega, \mathbf{V}$ , соответствующей выбранному центру приведения.

<sup>2</sup>Скользящий вектор — это ?

Найдём  $V_{O'}$ :

$$V_{O'} = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \boldsymbol{\omega}_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j + \sum_{i=1}^n (\overrightarrow{O'O} + \mathbf{r}_i) \times \boldsymbol{\omega}_i = \underbrace{\sum_{j=1}^m \mathbf{v}_j + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\omega}_i}_{V_0} + \overrightarrow{O'O} \times \underbrace{\sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_i}_{\boldsymbol{\Omega}} = V_0 + \overrightarrow{O'O} \times \boldsymbol{\Omega}.$$

Таблица 1: Простейшие типы движений.

$(V_0, \boldsymbol{\Omega})$	$\boldsymbol{\Omega}$	$V_0$	простейшее мгновенное движение
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	мгновенно винтовое движение
$0$	$\neq 0$	$0$	мгновенное вращение, ось $\ni O$
$0$	$\neq 0$	$\neq 0$	мгновенное вращение, ось $\not\ni O$
$0$	$0$	$\neq 0$	мгновенно поступательное движение
$0$	$0$	$0$	мгновенный покой

## 7 (и №26) Связи и всё, что с ними связано

### Свободные и несвободные системы. Связи.

В общем случае связь запишем, как

$$f(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) \geq 0.$$

В частности, при  $f(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) = 0$ , связь называется *двухсторонней*, или *удерживающей*. При неравенстве, соответственно, связь *односторонняя*, *освобождающая*. Связь вида  $f(\mathbf{r}_\nu, t) = 0$  называется *геометрической*, *конечная*, *голономная*. Связь вида  $f(\mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu, t) = 0$  называется *дифференциальной*, или *кинематической*. Иногда кинематическая связь может быть представлена как геометрическая, такая связь называется *интегрируемой*.

**Def 7.1.** Если на систему материальных точек не наложены дифференциальные неинтегрируемые связи, то она называется голономной. Если же среди связей, наложенных на систему есть дифференциальные неинтегрируемые связи, то система называется неголономной.

Хотелось бы построить некоторую общую теорию для случая, когда этих связей несколько. В частности пусть есть  $r$  геометрических связей.

$$f_\alpha(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r), \quad (1)$$

И несколько дифференциальных линейных связей

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{a}_{\beta\nu}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) \cdot \mathbf{v}_\nu + a_\beta(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad (\beta = 1, \dots, s) \quad (2)$$

Стоит сказать, что число *степеней свободы* данной системы:

$$3N - r - s \geq 1.$$

**Def 7.2.** Геометрические связи называются стационарными или склерономными, если  $t$  не входит в их уравнения (1). Дифференциальные связи (2) называются *стационарными* или *склерономными* если функции  $\mathbf{a}_{\beta\nu}$  не зависят явно от  $t$ , а функции  $a_\beta \equiv 0$ . Система называется *склерономной*, если она либо свободная, либо на нее наложены только стационарные связи. Система называется *реономной*, если среди наложенных на нее связей есть хотя бы одна нестационарная.

### Ограничения, налагаемые связями на положения, скорости, ускорения и перемещения точек системы.

Пусть задан некоторый момент  $t = t^*$ . Тогда *возможными положениями* назовём  $\mathbf{r}_\nu$  такие, что для них верно (1), (2).

Какие возможны скорости?

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \cdot \mathbf{v}_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r). \quad (3)$$

Совокупность векторов  $\mathbf{v}_\nu = \mathbf{v}_\nu^*$ , удовлетворяющая линейным уравнениям (2) и (3) в возможном для данного момента времени положении системы, назовем возможными скоростями.

Какие возможны ускорения?

$$(3), (2) \Rightarrow \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_{\nu}} \cdot \mathbf{w}_{\nu} + \sum_{\nu, \mu=1}^N \frac{\partial^2 f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_{\nu} \partial \mathbf{r}_{\mu}} \mathbf{v}_{\mu} \cdot \mathbf{v}_{\nu} + 2 \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 f_{\alpha}}{\partial t \partial \mathbf{r}_{\nu}} \mathbf{v}_{\nu} + \frac{\partial^2 f_{\alpha}}{\partial t^2} = 0 \quad \alpha \in [1, r] \quad (4)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot \mathbf{w}_{\nu} + \sum_{\nu, \mu=1}^N \frac{\partial \mathbf{a}_{\beta\nu}}{\partial \mathbf{r}_{\mu}} \mathbf{v}_{\mu} \cdot \mathbf{v}_{\nu} + \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial \mathbf{a}_{\beta\nu}}{\partial t} \cdot \mathbf{v}_{\nu} + \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial a_{\beta}}{\partial \mathbf{r}_{\nu}} \cdot \mathbf{v}_{\nu} + \frac{\partial a_{\beta}}{\partial t} = 0 \quad \beta \in [1, s] \quad (5)$$

Совокупность векторов  $\mathbf{w}_{\nu} = \mathbf{w}_{\nu}^*$ , удовлетворяющая линейным уравнениям (4) и (5) в возможном для данного момента времени положении системы (+скорости), назовем возможными ускорениями.

Рассмотрим возможные перемещения  $\Delta \mathbf{r}_{\nu}$  системы за  $\Delta t$  из её возможного положения  $\mathbf{r}_{\nu}^*$  в момент  $t = t^*$ . Тогда

$$\Delta \mathbf{r}_{\nu} = \mathbf{v}^* \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{\nu}^* (\Delta t)^2 + \dots \quad (\nu = 1, \dots, N). \quad (6)$$

Пренебрегая нелинейными членами, получим, что  $\Delta \mathbf{r}_{\nu} = \mathbf{v}_{\nu}^* \Delta t$ . Тогда, домножив (2), (3) на  $\Delta t$ , получим систему уравнений, которой удовлетворяют линейные по  $\Delta t$  возможные перемещения:

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_{\nu}} \cdot \Delta \mathbf{r}_{\nu} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \Delta t = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r), \quad (7)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot \Delta \mathbf{r}_{\nu} + a_{\beta} \Delta t = 0, \quad (\beta = 1, \dots, s), \quad (8)$$

где функции  $\mathbf{a}_{\beta\nu}, a_{\beta}$  и частные производные вычисляются при  $t = t^*$ ,  $\mathbf{r}_{\nu} = \mathbf{r}_{\nu}^*$ .

### Действительные и виртуальные перемещения

Пусть задано положение системы для  $t, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ . Тогда для  $t = t^* + dt$  запишем, что

$$\mathbf{r}_{\nu}(t^* + dt) - \mathbf{r}_{\nu}(t^*) = \mathbf{v}_{\nu}^* dt + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{\nu}^* (dt)^2 + \dots, \quad (9)$$

где  $\mathbf{w}_{\nu}^*$  – ускорения точек системы при  $t = t^*$ . Величины (9) – *действительные (истинные) перемещения* точек системы за время  $dt$ . Тогда получим систему уравнений, аналогичную (7), (8):

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_{\nu}} \cdot d\mathbf{r}_{\nu} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} dt = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r), \quad (10)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot d\mathbf{r}_{\nu} + a_{\beta} dt = 0, \quad (\beta = 1, \dots, s). \quad (11)$$

Помимо действительных перемещений есть *виртуальные*. Ими называется совокупность величин  $\delta \mathbf{r}_{\nu}$ , удовлетворяющая линейным однородным уравнениям

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_{\nu}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\nu} = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, r), \quad (12)$$

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{a}_{\beta\nu} \cdot \delta \mathbf{r}_{\nu} = 0, \quad (\beta = 1, \dots, s), \quad (13)$$

Если система склерономна, то действительное перемещение будет одним из виртуальных.

**Def 7.3.** *Синхронное варьирование* – переход из одного положения в другое, при фиксированном времени

$$\mathbf{r}_{\nu}^* \rightarrow \mathbf{r}_{\nu}^* + \delta \mathbf{r}_{\nu}.$$

При синхронном варьировании мы не рассматриваем процесс движения и сравниваем допускаемые связями бесконечно близкие положения (конфигурации) системы для данного фиксированного момента времени.

Рассмотрим две совокупности возможных перемещений с одним и тем же значением величины  $\Delta t$ . Согласно разложению по Тейлору,

$$\begin{aligned} \Delta_1 \mathbf{r}_{\nu} &= \mathbf{v}_{\nu_1}^* \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{\nu_1}^* (\Delta t)^2 + \dots, \\ \Delta_2 \mathbf{r}_{\nu} &= \mathbf{v}_{\nu_2}^* \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{w}_{\nu_2}^* (\Delta t)^2 + \dots, \end{aligned}$$



и рассмотрим их разность

$$\Delta_1 \mathbf{r}_\nu - \Delta_2 \mathbf{r}_\nu = (\mathbf{v}_{\nu_1}^* \Delta t - \mathbf{v}_{\nu_2}^* \Delta t) + \left( \frac{1}{2} \mathbf{w}_{\nu_1}^* (\Delta t)^2 - \frac{1}{2} \mathbf{w}_{\nu_2}^* (\Delta t)^2 \right) + \dots$$

### Идеальные связи

**Def 7.4.** Связи называют *идеальными*, если сумма работ этих связей на любых виртуальных перемещениях всегда равна нулю:  $\sum \mathbf{R}_\nu \delta \mathbf{r}_\nu = 0$ .

Абсолютно твердое тело является системой материальных точек, в которой на любые две точки наложена идеальная связь. При отсутствии других связей, кроме между точками тела, твердое тело называют *свободным*.

Считая связи идеальными запишем уравнения для материальных точек системы:

$$m_\nu \mathbf{w}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu \Rightarrow \left( \sum_{\nu=1}^N \mathbf{R}_\nu \delta \mathbf{r}_\nu = 0 \right) \Rightarrow \sum_{\nu=1}^N (\mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{w}_\nu) \delta \mathbf{r}_\nu = 0.$$

Последнее равенство называется общим уравнением динамики (или уравнением Лагранжа I рода). Оно выполняется всегда для любого совместимого со связям движения, соответствующего заданным активным силам  $\mathbf{F}_\nu$ .

Если же наоборот, дано какое-то совместимое со связями движение системы, для которого выполняется общее уравнение динамики, тогда с  $\mathbf{R}_\nu = m_\nu \mathbf{w}_\nu - \mathbf{F}_\nu$  будем иметь равенства для задания уравнений несвободной системы. Мы считаем, что эти силы реакции реализуются в действительности и что рассматриваемое движение соответствует активным силам  $\mathbf{F}_\nu(t, \mathbf{r}_\nu, \mathbf{v}_\nu)$ .

Таким образом *общее уравнение динамики выражает необходимое и достаточное условие того, чтобы движение, совместимое со связями, соответствовало заданной системе активных сил.*

Взяв выражения для виртуальных перемещений всегда можно получить силы реакции так называемым методом *множителей Лагранжа*:

$$\sum_{\nu=1}^N \left( \mathbf{R}_\nu - \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}_\nu} - \sum_{j=1}^s \mu_j \boldsymbol{\alpha}_{j\nu} \right) \delta \mathbf{r}_\nu = 0 \Rightarrow \mathbf{R}_\nu = \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}_\nu} + \sum_{j=1}^s \mu_j \boldsymbol{\alpha}_{j\nu}.$$

Полученные выражения для реакций идеальных сил через неопределенные множители Лагранжа  $\lambda_i$  и  $\mu_j$  можно подставить в исходное уравнение связей, получим *уравнения Лагранжа первого рода*:

$$m_\nu \mathbf{w}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}_\nu} + \sum_{j=1}^s \mu_j \boldsymbol{\alpha}_{j\nu}.$$

## 8 Работа и энергия

### Работы сил системы

**Def 8.1.** Пусть  $\mathbf{F}_\nu$  — равнодействующая всех сил системы приложенных к точке  $P_\nu$ . *Элементарной работой*<sup>3</sup>  $d'A_\nu$  сила  $\mathbf{F}_\nu$  на перемещении  $d\mathbf{r}_\nu$  называется:

$$d'A_\nu = \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu \Rightarrow d'A = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \cdot \mathbf{r}_\nu = d'A^{\text{ext}} + d'A^{\text{inn}}.$$

Пусть точка  $P_\nu$  совершает конечное перемещение, и пусть  $\mathbf{F}_\nu$  и  $d\mathbf{r}_\nu$  могут быть выражены через один и тот же скалярный параметр  $t$  (не обязательно время). Тогда изначальное выражение для работы будет представлено в виде функции параметра  $t$ , умноженной на его дифференциал, и может быть проинтегрировано по дуге движения точки. Результатом интегрирования будет *полная работа*  $A_\nu$  силы  $\mathbf{F}_\nu$  на рассматриваемом конечном перемещении.

### Элементарная работа сил к твердому телу

Пусть  $O$  — произвольный полюс в твёрдом теле, скорость точки  $P_\nu$  относительно неподвижной системы координат:  $\mathbf{v}_\nu = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\nu$ . Для элементарной работы получим:

$$d'A = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \cdot (\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\nu) dt = \left( \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \right) \cdot \mathbf{v}_O dt + \sum_{\nu=1}^N (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\nu) \cdot \mathbf{F}_\nu dt.$$

<sup>3</sup>Кто-то обозначает как  $\delta A_\nu$ , означает, что выражение не обязательно является дифференциалом.

Перепишав смешанное произведение, переставив  $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, \mathbf{F}) \rightarrow (\mathbf{r}, \mathbf{F}, \boldsymbol{\omega})$ , заменяя  $F_\nu$  на сумму внешних и внутренних получим:

$$d'A = \mathbf{R}^{ext} \cdot \mathbf{v}_O dt + M_O^{ext} \cdot \boldsymbol{\omega} dt,$$

где  $\mathbf{R}^{ext}$  и  $M_O^{ext}$  — главный вектор и главный момент внешних сил относительно точки  $O$ .

### Силовое полюшко

**Def 8.2.** Говорят, что в пространстве задано *силовое поле*, когда на материальную точку в пространстве действует сила, зависящая от положения точки.

**Def 8.3.** Силовое поле называется *потенциальным*, если  $\exists U(x, y, z): \mathbf{F}_\nu^i = \frac{\partial}{\partial x_\nu^i} U$ , где  $\mathbf{F}_\nu$  — сила действующая на частицу.

**Def 8.4.** Функция  $U$  называется *силовой функцией*. Функция  $\Pi = -U$  называется *потенциалом*, или *потенциальной энергией*, она определена до добавления аддитивной постоянной.

**Def 8.5.** Потенциальное поле называется *(не)стационарным* в зависимости от того, зависит ли  $\Pi$  явно от времени.

Элементарная работа потенциальных сил есть полный дифференциал:

$$d'A = \sum_{\nu=1}^N \left( \frac{\partial U}{\partial x_\nu} dx_\nu + \frac{\partial U}{\partial y_\nu} dy_\nu + \frac{\partial U}{\partial z_\nu} dz_\nu \right) = dU = -d\Pi.$$

### Обобщённое обобщение

Обозначая на виртуальных перемещениях  $\delta \mathbf{r}$  элементарную работу как  $d'A = \delta A$  найдём:

$$\delta A = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \cdot \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^j} \delta q^j = \sum_{j=1}^m \left( \underbrace{\sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q^j}}_{Q_j} \right) \delta q^j.$$

**Def 8.6.** Введено обозначение  $Q_j$  — *обобщённая сила*. Для потенциального поля:  $Q_j = -\partial_j \Pi$ .

## 9 Центр масс

### Вводим понятия

**Def 9.1.** *Центром масс* системы материальных точек  $(P_\nu, \mathbf{r}_\nu, m_\nu)$  называется геометрическая точка  $C$  пространства:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_{\nu=1}^N m_\nu \mathbf{r}_\nu}{M}, \text{ где масса системы: } M = \sum_{\nu=1}^N m_\nu.$$

**Def 9.2.** *Количеством движения* механической системы называется вектор:

$$\mathbf{Q} = \sum m_\nu \mathbf{v}_\nu \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{Q} = M \mathbf{v}_C.$$

**Def 9.3.** *Кинетическим моментом* точки  $P_\nu$  относительно центра  $A$  называется:  $K_{\nu A} = \boldsymbol{\rho}_\nu \times m_\nu \mathbf{v}_\nu$ .

При изменении центра кинетический момент может измениться:

$$\mathbf{K}_B = \sum_{\nu=1}^N \boldsymbol{\rho}_{\nu B} \times m_\nu \mathbf{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^N \left( \boldsymbol{\rho}_{\nu A + \overrightarrow{BA}} \right) \times m_\nu \mathbf{v}_\nu = \mathbf{K}_A + \overrightarrow{BA} \times \mathbf{Q}.$$

### Движение относительно центра масс

Хотим установить связь между  $K_A$  относительно какого-либо центра с  $K_C$  относительно центра масс.

**Def 9.4** (Кенигова система координат). *Движение относительно центра масс* — движение точек системы относительно поступательно движущейся системы координат с началом в центре масс системы.

Для кинетического момента относительно центра масс:

$$\mathbf{K}_{C_r} = \sum_{\nu=1}^N \rho_{\nu r} \times m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu r} = \sum_{\nu=1}^N \rho_{\nu r} \times m_{\nu} (\mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{\nu r}) = \left( \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \rho_{\nu r} \right) \times \mathbf{v}_C + \sum_{\nu=1}^N \rho_{\nu r} \times m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu r}.$$

Так как центр масс находится в начале кениговой системы координат, то первое слагаемое зануляется, тогда абсолютный кинетический момент  $K_C$  равен относительному центра масс  $K_{C_r}$ .

Замечая, что  $\sum m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu r} = M \mathbf{v}_{C_r} = 0$ , получаем, что кинетический момент системы в её движении относительно центра масс одинаков для всех точек пространства.

### Теорема об изменении количества движения

**Thr 9.5.** Производная по времени от количества движения системы равна главному вектору всех внешних сил.

△. Принимая, во внимание постоянство массы каждой из точек системы, можно получить следствие из:

$$\sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \mathbf{w}_{\nu} = \sum_{\nu=1}^N \rho_{\nu r} \mathbf{F}_{\nu}^{\text{ext}} + \sum_{\nu=1}^N \rho_{\nu r} \mathbf{F}_{\nu}^{\text{inn}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}^{\text{ext}}.$$

□

## Движение точки в центральном поле сил

### 19 Формулы Бине

#### Уравнение Бине

**Def 19.1.** *Поле центральных сил* называется поле, в котором сила действующая на точку :  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\mathbf{r}/r$ .

Логично перейти к  $(r, \varphi, \theta)$ . Тогда

$$m\mathbf{w} = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m\mathbf{w}_r = F(r) \\ m\mathbf{w}_{\varphi} = 0 \\ m\mathbf{w}_{\theta} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w}_{\theta} = -r^2 \ddot{\theta} - 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta = 0,$$

и, учитывая, что  $\theta(0) = \pi/2$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0$ , тогда  $\theta(t) = \pi/2$ , это с точки зрения диффузов. А с точки зрения физики кинетический момент сохраняется, то есть

$$\mathbf{K}_0 = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}, \mathbf{v} \in \text{постоянной плоскости.}$$

Тогда  $\theta$  мы можем просто выбросить. Приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F(r) \\ m \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F(r) \\ r^2 \dot{\varphi} = \frac{K_0}{m} = \text{const.} \end{cases} \quad (14)$$

Это, собственно, соответствует закону Кеплера о *сохранение секториальной скорости*.

Первое уравнение как-то не очень, перейдём от  $d/dt$  к  $d/d\varphi$ . Тогда  $r(t) \rightarrow u(\varphi) = \frac{1}{r}$  – *переменная Бине*.

$$\dot{r} = \frac{d(1/u)}{dt} = -cu', \quad \ddot{r} = -c^2 u^2 u'', \quad \Rightarrow \quad -c^2 u^2 u'' - c^2 u^3 = \frac{F(u)}{m}.$$

Таким образом пришли к следующей теореме:

**Thr 19.2** (уравнение Бине). *Уравнение движения материальной точки в поле центральных сил может быть записано как*

$$u'' + u = \frac{-F(u)}{mc^2 u^2}, \quad (15)$$

где  $u(\varphi) = 1/r$ .

## Элементы механики сплошных сред

### 22 Сплошная среда и её напряжение

#### Тензор напряжений

В недеформированном теле молекулы находятся друг с другом в механическом и тепловом равновесии. При деформировании же взаимное расположение меняется и равновесие нарушается.

**Def 22.1.** В результате возникают *внутренние напряжения* — силы, стремящиеся вернуть тело в равновесие, которые обуславливаются молекулярными силами, обладающими незначительным радиусом действия.

Выделим в теле объём и рассмотрим суммарную действующую на него силу. *С одной стороны*, эта сила может быть представлена:  $\int \mathbf{F} dV$ , для  $\mathbf{F}$  — силы на единицу объема. *С другой стороны*, силы, с которыми действуют различные части объёма друг на друга не приведут к появлению никакой внешней силы. Поэтому искомая полная сила будет состоят из сил действующих на объём со стороны окружающих его частей тела. В силу пренебрежимой малости радиуса молекулярных сил, внешние силы будут представлены как суммы сил на каждый элемент поверхности объёма.

**Def 22.2.**  $\int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x^k} = \oint \sigma^{ik} df_k$ . В последнем равенстве  $\sigma^{ik}$  — *тензор напряжений* (симметричный). То есть  $\sigma^{ik} df_k$  есть  $i$ -ая компонента силы, действующей на элемент поверхности  $df$ .

Так, на единичную площадку, перпендикулярную оси  $x$ , действуют нормальная к ней сила  $\sigma_{xx}$  и тангенциальные  $\sigma_{yx}$  и  $\sigma_{zx}$ . Знак силы  $\sigma^{ik} df_k$ , которая является действующей на ограниченный поверхностью объём со стороны окружающих тел — положительный. Для напряжений же извне, перед интегралом нужно поставить знак минус.

#### Всестороннее и не только сжатие

При таком сжатии на каждую единицу поверхности тела действует одинаковое по величине давление  $p$ , направленное везде по нормали к поверхности внутрь объёма тела. А на элемент  $df_i$  действует сила  $-p df_i = \sigma^{ik} df_k$ . Таким образом при всестороннем сжатии тензор напряжений:  $\sigma^{ik} = -p \delta^{ik}$ .

В общем случае ещё и диагональные элементы тензора напряжений не нуль. То есть, помимо нормальной силы, действуют ещё и тангенциальные «скалывающие» напряжения, стремящиеся сдвинуть параллельные элементы поверхности друг относительно друга.

В равновесии силы внутренних напряжений должны уравновешивать друг друга, то есть:

$$F_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x^k} = 0.$$

И если тело находится в поле тяжести, то в равновесии:

$$\mathbf{F} + \rho \mathbf{g} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma^{ik}}{\partial x^k} + \rho g^i = 0.$$

#### Внешние силы

Обычно именно внешние силы вызывают деформацию, однако они будут просто входить в граничные условия к уравнениям равновесия. Внешняя сила  $\mathbf{P}$  должна компенсироваться силой  $\sigma^{ik} df_k$ :

$$P^i df = -\sigma^{ik} df_k = 0 \quad \Rightarrow \quad df_k = n_k df \quad \Rightarrow \quad \sigma^{ik} n_k = P^i,$$

где  $n$  — единичный вектор нормали к площадке. Таким образом получили условие, которое должно выполняться на всей поверхности находящегося в равновесии тела.

### 23 Перемещение сплошной среды

Пусть каждой точке среды соответствует  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ , собственно  $(\xi, t)$  — *лагранжевы переменные*. Закон движения среды в таком случае это

$$\mathbf{r}(\xi, t), \tag{16}$$

скорость же

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}(\xi, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{v}(\xi, t)}{\partial t},$$

и так далее.

Альтернативно можем задать  $(x, t)$  – эйлерово описание. Тогда

$$\mathbf{v}(x, t), \mathbf{w}(x, t) \quad \text{– поля скоростей и ускорений.}$$

В частности, представляя движение по шоссе, полоса 1,2,3 и участок трассы – эйлерово описание среды. Если же мы будем следить за каждой машиной, то это будет лагранжево описание.

## 24 Тензоры деформаций и перемещений

### Подход к деформации

Под влиянием приложенных внешних сил твердые тела в той или иной степени *деформируются*, то есть меняют свою форму и объём. Рассмотрим точку деформируемого тела  $\mathbf{r}(x^1, x^2, x^3)$ , которая после деформации станет  $\mathbf{r}'$ .

**Def 24.1.**  $\mathbf{u} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$  – *вектор деформации*. Координаты  $y^i$  смещенной точки могут быть выражены через  $x^i$ , таким образом  $\mathbf{u}(x^i)$  полностью определяет деформацию тела.

Рассмотрим две близкие точки, расстояние между ними до деформации  $d(l')^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ , а после  $d(l)^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2$ . Записав через деформацию (здесь  $u_i = g_{ik}u^k$ ):

$$d(l')^2 = (dx^i + du_i)^2 \Rightarrow \left( du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x^k} dx^k \right) \Rightarrow d(l')^2 = dl^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x^k} dx^i dx^k + \frac{\partial u_i}{\partial x^k} \frac{\partial u_i}{\partial x^l} dx^k dx^l.$$

Поменяем во втором члене индексы  $i$  и  $k$ , а в третьем  $i$  и  $l$ :

$$d(l')^2 = dl^2 + 2u_{ik}dx^i dx^k, \quad \text{где } u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{u_i}{\partial x^k} + \frac{u_k}{\partial x^i} + \frac{u_i}{\partial x^l} \frac{u_l}{\partial x^k} \right).$$

Как и всякий симметричный тензор, можно привести тензор  $u_{ik}$  в каждой данной точке к главным осям. Это значит, что в каждой данной точке можно выбрать такую систему координат – главные оси тензора, – в которой из всех компонент  $u_{ik}$  отличны от нуля только диагональные компоненты  $u_{11}, u_{22}, u_{33}$ .

При малых же деформациях, за исключением редких случаев, и вектор деформации оказывается малым, тогда можем пренебречь последним членом в полученном нами значении для тензора деформации:

**Def 24.2** (Тензор деформации в малом приближении).

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x^k} + \frac{\partial u_k}{\partial x^i} \right).$$

### Изменение объёма при деформации

Относительные удлинения элементов длины вдоль направлений главных осей тензора деформации с нашей точностью:  $\sqrt{1 + 2u_{ii}} - 1 \approx u_{ii}$ .

Малый элемент объёма тогда претерпит следующее изменение:

$$dV' = dV(1 + u_{11})(1 + u_{22})(1 + u_{33})dV(1 + u_{11} + u_{22} + u_{33}) \Rightarrow u_{ii} = \frac{dV' - dV}{dV}.$$

Для несжимаемого тела, тогда  $u_{ii}$  – сумма диагональных компонент тензора в главных осях – нулевая. Такая деформация называется *сдвигом*.

### Тензор скорости деформации

**Def 24.3.** Тензором скорости деформации назовём просто  $\dot{u}_{ij} = \frac{du_{ij}}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right)$ .

Тогда рассмотрим движение элемента объёма тела во времени:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r})$ , до первого члена малости:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^j} \delta x^j \Rightarrow (\mathbf{v}_0 = 0) \Rightarrow v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} \delta x^j = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right) \delta x^j + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right) \delta x^j.$$

Получаем уравнение, где с помощью замены, и вернув начальную скорость, явно можем показать, что

**Thr 24.4** (Теорема Гельмгольца). Тензор скоростей деформации можно разложить на сумму симметричного и кососимметричного:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + u_{ij} \delta x^j \mathbf{e}^i + \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r}.$$

## Обобщенный закон Гука

Пусть  $E$  – модуль Юнга,  $\mu$  – коэффициент Пуассона. Тогда

$$u_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}, \quad u_{22} = u_{33} = -\frac{\mu}{E}\sigma_{11}.$$

Перепишем это в виду

$$u_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\mu}{E}\sigma_{22} - \frac{\mu}{E}\sigma_{33} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{11} - \frac{\mu}{E}\text{tr } \sigma.$$

Или, в матричном виде

$$\begin{pmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \frac{1+\mu}{E} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} - \frac{\mu}{E} \text{tr } \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В тензорном виде

$$u_{ik} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{ik} - \frac{\mu}{E}\delta_{ik} \text{tr } \sigma.$$

Выразим  $u$ :

$$\text{tr } u = \frac{1+\mu}{E} \text{tr } \sigma - \frac{3\mu}{E} \text{tr } \sigma \quad \Rightarrow \quad \text{tr } \sigma = \frac{E}{1-2\mu} \text{tr } u.$$

Так и получаем *обобщенный закон Гука*:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\mu} \left[ u_{ik} + \frac{\mu}{1-2\mu} \delta_{ik} \text{tr } u \right]$$

## 25 Элементы гидродинамики

### Уравнение непрерывности

**Def 25.1** (Предмет рассмотрения). Ввиду макроскопического рассмотрения *жидкости* (газы) в гидродинамике представляется как сплошная среда, то есть малый элемент объёма жидкости содержит ещё достаточно большое количество молекул, относительно межмолекулярного расстояния.

Для описания движения жидкости требуется задать распределение скорости жидкости  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$  и какие-либо её две термодинамические величины, как, например, плотность и давление. Важно отметить, что все эти величины относятся не к отдельной частице, а к точке в пространстве в определенное время.

**Thr 25.2** (Уравнение непрерывности).

$\Delta$ . В маленьком объёме  $V_0$  количество жидкости есть  $\int_{V_0} \rho dV$ . Через элемент поверхности, ограничивающей  $V_0$ , в единицу времени протекает  $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}$  жидкости — положительно или отрицательное число, в зависимости от того, вытекает или втекает жидкость соответственно. Тогда приравниваем для вытекания жидкости два наших рассуждения:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \oint \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad \int \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} \right) dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0.$$

Последнее следует из того, что равенство должно иметь для любого объёма, таким образом получили искомое *уравнение непрерывности*.  $\square$

### Уравнение Эйлера

**Thr 25.3** (Уравнение Эйлера).

$\Delta$ . Выделим в жидкости некоторый объём, полная сила, действующая на этот объём:  $-\oint p d\mathbf{f} = -\int \text{grad } p dV$ , где интеграл из взятого по поверхности объёма преобразуется в сам рассматриваемый объём. Таким образом получили, что на единицу объёма жидкости будет действовать сила:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p.$$

Однако стоящая здесь скорость определяет изменение скорости именно элемента объёма, а не точки в пространстве. Запишем это изменение скорости:

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i} dx^i = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

Последнее и есть искомое уравнение Эйлера.  $\square$

Если же жидкость движется во внешнем поле тяжести, то, на каждый элемент объёма будет действовать сила, которая просто добавится к изначальному уравнению:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}.$$

### Уравнение Навье-Стокса

Чтобы нормально учесть вязкость, нужно поговорить про *поток импульса*. Импульс единицы объёма жидкости есть  $\rho \mathbf{v}$ , скорость изменения его компоненты:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v^i = \rho \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v^i.$$

Уравнения непрерывности и Эйлера запишутся в тензорном виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v^k)}{\partial x^k}, \quad \frac{\partial v^i}{\partial t} = -v^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} - \frac{1}{\rho} \delta^{ik} \frac{\partial p}{\partial x^k}.$$

Тогда получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v^i = -\rho v^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} - \delta^{ik} \frac{\partial p}{\partial x^k} - v^i \frac{\partial \rho v^k}{\partial x^k} = -\delta^{ik} \frac{\partial p}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial x^k} \rho v^i v^k = -\frac{\partial \Pi^{ik}}{\partial x^k}.$$

**Def 25.4.**  $\Pi^{ik}$  — тензор плотности потока импульса:  $\Pi^{ik} = p \delta^{ik} + \rho v^i v^k$ .

Таким образом уравнение Эйлера у нас записалось в виде:  $\frac{\partial}{\partial t} \rho v^i = -\frac{\partial \Pi^{ik}}{\partial x^k}$ . Поток импульса представляет собой чисто обратимый перенос импульса, связанный с просто механическим передвижением различных участков жидкости и с действующими в жидкости силами давления. *Вязкость* (внутреннее трение) жидкости проявляется в наличии ещё дополнительного, необратимого переноса импульса из мест с большой скоростью в места с меньшей.

Поэтому уравнение движения вязкой жидкости можно получить, прибавив к идеальному потоку импульса дополнительный член  $\sigma_{\text{visc}}^{ik}$ , определяющий такой вязкий перенос:  $\Pi^{ik} = p \delta^{ik} + \rho v^i v^k - \sigma_{\text{visc}}^{ik} = -\sigma^{ik} + \rho v^i v^k$ .

**Def 25.5.** Таким образом:  $\sigma^{ik} = -p \delta^{ik} + \sigma_{\text{visc}}^{ik}$  называют *тензором напряжений*, а  $\sigma_{\text{visc}}^{ik}$  — вязким тензором напряжений.

Чтобы написать выражение для вязкого напряжения сделаем пару оговорок. *Во первых*, градиенты скорости движения участков жидкости относительно друг друга не велики, тогда  $\sigma_{\text{visc}}^{ik}$  зависит лишь от первых производных скорости по координатам, линейно. *Во вторых*, не зависящие от первых производных величины должны обращаться в нуль как для скорости потока  $\mathbf{v} = \text{const}$  и тензор должен быть нулевым. *В третьих*,  $\sigma_{\text{visc}}^{ik} = 0$  когда жидкость совершает целое равномерное вращение, поскольку никакого внутреннего трения тогда не будет. Для такого равномерного вращения с  $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]$  линейными комбинациями производных обращающимися в нуль будут:  $\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i}$ .

Это всё даёт нам мотивацию для не шибко сильных потоков несжимаемой жидкости согласится с Сэром Исааком Ньютоном, и написать тензор вязкого напряжения, как *тензор скорости деформации*:

$$\sigma_{\text{visc}}^{ik} = \eta \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \right), \quad \Rightarrow \quad \sigma^{ik} = -p \delta^{ik} + \eta \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \right).$$

А уравнение Эйлера тогда для несжимаемой жидкости запишется:

$$\rho \left( \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \right) = -\delta^{ik} \frac{\partial p}{\partial x^k} + \frac{\partial}{\partial x^k} \left[ \eta \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \right) \right].$$

а в более человеческом, привычном глазу, виде *уравнение Навье-Стокса для несжимаемой жидкости*:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}.$$

**Def 25.6.** Коэффициент  $\eta$  называется — *динамическим коэффициентом вязкости*, а отношение  $\eta/\rho = \nu$  — *кинематической вязкостью*.

## Принципиальность виртуальных перемещений

### 27 Общее уравнение динамики (принцип Даламбера-Лагранжа)

Пусть  $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(t)$ ,  $\mathbf{v}_\nu = \dot{\mathbf{r}}_\nu(t)$ , тогда для их истинности необходимо и достаточно

$$\sum_{\nu=1}^N (\mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{w}_\nu) \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0.$$

$\triangle$ . Пусть  $\mathbf{r}_\nu$  отвечает истинным движениям, тогда  $\mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{w}_\nu = -\mathbf{R}_\nu$ , тогда умножив на  $\mathbf{r}_\nu$  – получили доказательство достаточности. Докажем необходимость. Пусть  $m_\nu \mathbf{w}_\nu - \mathbf{F}_\nu = \Phi_\nu$ , тогда  $\sum \Phi_\nu \cdot \delta \mathbf{r}_\nu = 0$ . Тогда

$$\Phi_\nu = \sum_{\alpha=1}^r \gamma_\alpha \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_\nu} + \sum_{\beta=1}^s \lambda_\beta \mathbf{a}_{\beta\nu}.$$

Подставив, получим уравнения Лагранжа, так что всё хорошо.  $\square$

## 28 (вплоть до №30) Общее уравнение динамики, статики и т.д.

Легко получить соотношение вида

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (17)$$

Данное соотношение является необходимым и достаточным условием для того, чтобы движение, совместимое с идеальными связями, отвечало данной системе активных сил  $\mathbf{F}_i$ . Оно получило название **общего уравнения динамики** или *дифференциальным вариационным принципом Даламбера-Лагранжа*.

**Thr 28.1** (принцип Даламбера-Лагранжа). *Верно, что*

$$m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \quad \Rightarrow \quad \sum_i (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{w}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Аналогично можно сформулировать *принцип Журдена*

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_q \mathbf{w}_i) \cdot \delta \mathbf{v}_i = 0, \quad (18)$$

и *принцип Гаусса*:

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i - m_q \mathbf{w}_i) \cdot \delta \mathbf{w}_i = 0, \quad (19)$$

где  $\delta \mathbf{w}_i = \mathbf{w}_{i_1}^* - \mathbf{w}_{i_2}^*$  не обязательно малая величина.

Замечая, что  $m_i = \text{const}$ , а  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(p, q)$ , то последнее уравнение переписывается в виде

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \mathbf{w}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i} \right)^2, \quad \delta Z = 0,$$

где величина  $Z$  называется принуждением или мерой принуждения. К слову она не просто стационарна для истинных движений.

Истинным является движение с минимальной мерой принуждения. Другими словами *несвободная система совершает движение, наиболее близкое к свободному*.

**Def 28.2.** Будем считать, что  $q^0 \in M$  – *точка равновесия*, если при  $\dot{q}^0 \equiv \dot{q}(0) \equiv 0$  приводит к  $q(t) = q^0$ .

### Принцип наименьшего пути Герца

Пусть есть некоторая траектория, с радиус вектором  $\mathbf{r}$ , касательной  $\mathbf{n}$  и нормалью  $\boldsymbol{\tau}$ . Ускорение точки

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_\tau + \mathbf{w}_\nu = \mathbf{w}_n = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2, \quad \Rightarrow \quad Z = \frac{1}{2} m w^2 = \frac{1}{2} m v^4 \kappa^2,$$

получается, что движение происходит по наиболее прямому пути с наименьшей скоростью.

### Общее уравнение статики

В таком случае верен следующий принцип:

**Thr 28.3** (принцип Лагранжа). *Для того, чтобы точка была положением равновесия на  $t \in [t_1, t_2]$  необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ на  $\forall$  виртуальных перемещениях всех активных сил была равна нулю.*

$$\delta A|_0 = 0 \quad \delta A = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i, \quad (t \in [t_1, t_2]) \quad (20)$$

что является **общим уравнением статики**.



Этот принцип можно рассматривать, как дракона с тремя головами. Вот если система **голономная**, то

$$\delta A = Q_i \delta q_i \quad \Rightarrow \quad Q_i = 0 \quad \forall i.$$

Если система **консервативная**, то

$$Q_1 = -\frac{\partial P}{\partial q^i} \quad \Rightarrow \quad \text{положение равновесия} - \text{стационарная точка потенциала.}$$

Если же у нас **твёрдое тело**, тогда

$$\delta A = (\mathbf{R}^{\text{внеш}} \cdot \mathbf{v}_O) dt + (\mathbf{M}_O^{\text{внеш}} \cdot \boldsymbol{\omega}) dt \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{R}^{\text{внеш}} = 0 \\ \mathbf{M}^{\text{внеш}} = 0 \end{cases}$$

## Уравнения Лагранжа

### 31 Уравнение Лагранжа второго рода

**Def 31.1.** *Обобщенная сила  $Q_k$  – величина коэффициента  $\partial q^k$  при вариации  $\delta A$ , то есть  $\delta A = Q_k \delta q^k$ .*

**Thr 31.2** (Уравнения Лагранжа второго рода). *Каждая механическая система характеризуется определенной функцией  $L(q, \dot{q}, t)$ . Для голономных системы с конфигурационным многообразием степени  $n$ , верно что*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Где для потенциальных систем  $L = T - \Pi$ . В более общем случае можно записать, что

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} - Q^k \right) \delta q^k = 0, \quad Q^k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^k}.$$

$\triangle$ . Запишем второй закон Ньютона:  $(m_i \mathbf{w}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i) \big|_{\cdot d\mathbf{r}_i}$ , где  $\mathbf{R}_i$  – реакции связи. Хотим записать уравнение в общековариантном виде. То есть мы «замораживаем» время, так чтобы  $\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$ . На таких перемещениях работа реакция связи равна 0.

$$\left[ \sum m_i \left( \mathbf{w}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^k} \right) - \left( \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^k} \right) - \underbrace{\left( \mathbf{R}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^k} \right)}_{\cdot \delta q^k \rightarrow 0} \right] \cdot \delta q^k = 0;$$

$$\left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \sum \frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{\partial}{\partial q^k} \sum \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^k} \right] \delta q^k = 0, \quad \Rightarrow \quad \sum_k \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} - Q_k \right] \delta q^k = 0.$$

Проблема остается в неголономных системах, где  $\delta q^k$  не являются независимыми, получается, что уравнения Лагранжа справедливы для голономных систем.

Вспоминая, что

$$\delta A = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \left( \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^k} \right) \delta q^k \stackrel{?}{=} \sum_k \frac{\delta A_k}{\delta q^k} \delta q^k = Q_k \delta q^k.$$

Тогда пусть  $\Pi(q, t): Q_k = -\partial \Pi / \partial q^k$ . Тогда

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q^k} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

То есть получили систему уравнений на  $2n$  переменных. □

### 32 Разрешимость уравнений Лагранжа

Подставим разложение кинетической энергии в уравнения Лагранжа, оставив только слагаемые с обобщёнными ускорениями  $f_j(q, \dot{q}, t) = a_{jk} \ddot{q}^j$ .

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \dot{\mathbf{r}}_{\nu}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j + \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[ \underbrace{a_{jk} \dot{q}^j \dot{q}^k}_{2T_2} + \underbrace{a_j \dot{q}^j}_{2T_1} + \underbrace{a_0}_{2T_0} \right],$$

где коэффициенты, соответственно, равны

$$a_{jk}(q, t) = \sum_{\nu} m_{\nu} \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial \dot{q}^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial \dot{q}^k}, \quad a_j(q, t) = \sum_{\nu} m_{\nu} \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial \dot{q}^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial t}, \quad a_0 = \sum_{\nu} m_{\nu} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial t} \right)^2.$$

Для склерономных систем  $\partial \mathbf{r}_{\nu} / \partial t = 0$ , соответственно  $T = a_{jk} \dot{q}^j \dot{q}^k$ , при чём  $a_{jk} \equiv a_{jk}(q)$ .

Теперь подставим значение  $T$  в уравнения Лагранжа, и получим, что  $a_{ik}\ddot{q}^k = f_i$ , где  $f_1 = f_1(q, \dot{q}, t)$ . Уравнений в системе  $n$ , причём  $a_{jk}$  является положительно определенной формой<sup>4</sup>, соответственно невырожденной.

**Thr 32.1.** Уравнения Лагранжа второго рода разрешимы относительно обобщенных ускорений

### 37 Ковариантность уравнений Лагранжа

Пусть есть выражение новых координат  $\tilde{q}^1, \dots, \tilde{q}^n$  через старые:

$$q^i = q^i(\tilde{q}^1, \dots, \tilde{q}^n, \tilde{t}), \quad t = t(\tilde{q}^1, \dots, \tilde{q}^n, \tilde{t}).$$

В таком случае преобразованные уравнения движения будут иметь такую же форму:

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial (\frac{d\tilde{q}^i}{d\tilde{t}})} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}^i} = 0, \quad \tilde{L} = L(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, t) \frac{dt}{d\tilde{t}}.$$

Сама ковариантность следует из вывода уравнений Лагранжа: в качестве обобщенных координат могут быть выбраны любые  $n$  независимых параметров системы.

### 33 Изменение полной механической энергии голономной системы

Пусть есть также непотенциальные силы, часть обобщенных сил, соответствующих непотенциальным силам, обозначим  $Q_i^*$ , тогда

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}^i} + Q_i^*, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i^*.$$

Найдём производную по времени от кинетической энергии

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right) - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} \right) \dot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial t}.$$

По теореме Эйлера об однородных функциях для  $f(x_1, \dots, x_n)$   $k$ -й степени верно что

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} x^i = k f, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i = 2T_2 + T_1.$$

В таком случае последнее равенство перепишется, как

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{d}{dt} (2T_2 + T_1) + \frac{\partial \Pi}{\partial q^i} \dot{q}^i - Q_i^* \dot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial t} = \\ &= \frac{d}{dt} (2T_2 + 2T_1 + 2T_0) - \frac{d}{dt} (T_1 + 2T_0) + \frac{d\Pi}{dt} - \frac{\partial \Pi}{\partial t} - Q_i^* \dot{q}^i + \frac{\partial T}{\partial t}. \end{aligned}$$

Таким образом мы доказали следующую теорему.

**Thr 33.1.** Полная механическая энергия голономной системы  $E = T + \Pi$  изменяется следующим образом:

$$\frac{dE}{dt} = N^* + \frac{d}{dt} (T_1 + 2T_0) + \frac{\partial \Pi}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Где  $N^* = Q_i^* \dot{q}^i$  – мощность непотенциальных сил.

**Def 33.2.** Голономная склерономная система с  $\Pi \equiv \Pi(q)$  называется консервативной, при чём  $dE/dt = 0$ .

### Гироскопические силы

**Def 33.3.** Непотенциальные силы называют гироскопическими, если их мощность равна 0.

Пусть  $Q_i^* = \gamma_{ik} \dot{q}^k$ . Если  $\gamma_{ik} = -\gamma_{ki}$ , то силы  $Q_i^*$  гироскопические, соответственно кососимметричность  $\gamma_{ik}$  необходима и достаточна.

Более того, имеет место равенство

$$\sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu} \cdot \mathbf{v}_{\nu} = \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i + \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial t} \right) = \left( \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial \dot{q}^i} \right) \dot{q}^i + \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial t}, \quad \stackrel{\partial \vec{r}_{\nu} / \partial t = 0}{=} \sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu} \cdot \mathbf{v}_{\nu} = Q_i \dot{q}^i.$$

Поэтому для склерономных систем  $N^* = 0$  выражается в  $\sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu}^* \cdot \mathbf{v}_{\nu} = 0$ .

<sup>4</sup>Требуется отдельного доказательства.

## Диссипативные силы

**Def 33.4.** Непотенциальные силы называются диссипативными, если их  $N^* \leq 0$ , но  $N^* \neq 0$ . При  $\Pi = \Pi(q)$  и диссипативности сил  $dE/dt \leq 0$ , тогда система называется диссипативной. В случае определено-отрицательной  $N^*(\dot{q})$  диссипация называется *полной*, а в случае знакопостоянной отрицательной  $N^*$  *частичной*.

**Def 33.5.** *Диссипативной функцией Рэлея* называется положительная квадратичная форма  $R$  такая, что

$$R = \frac{1}{2} b_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k, \quad Q_i^* = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}^i} = -b_{ik} \dot{q}^k.$$

Тогда для склерономной системы мощность  $N^*$  непотенциальных сил равна

$$\sum_{\nu} \mathbf{F}_{\nu}^* \cdot \mathbf{v}_{\nu} = Q_i^* \dot{q}^i = -2R \leq 0.$$

## 34 Обобщенный потенциал и первые интегралы лагранжевых систем

Пусть существует функция  $V(q, \dot{q}, t)$  такая, что обобщенные силы  $Q_i$  определяются по формулам

$$Q_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial V}{\partial q^i}.$$

Тогда функция  $V$  называется обобщенным потенциалом. Действительно, при  $L = T - V$  уравнения движения запишутся в той же форме. Дифференцируя по времени выясним, что

$$Q_i = \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k} \ddot{q}^k + f_i,$$

где  $f_i \equiv f_i(q, \dot{q}, t)$ . Но так как зависимость  $Q_i(\ddot{q})$  это странно, то

$$V = A_i(q, t) \dot{q}^i + V_0(q, t).$$

Тогда обобщенные силы

$$Q_i = \frac{dA_i}{dt} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} (A_k \dot{q}^k + V_0) = -\frac{\partial V_0}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial A_i}{\partial t} + \left( \frac{\partial A_i}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial A_k}{\partial \dot{q}^i} \right) \dot{q}^k.$$

Если  $\partial A_i / \partial t = 0$ , то  $Q_i$  складываются из потенциальных  $\partial V_0 / \partial q_i$  и гироскопических  $Q_i^* = \gamma_{ik} \dot{q}^k$ , где  $\gamma_{ik} = \partial_k A_i - \partial_i A_k$ . Если система склерономна и  $V_0 \neq V_0(t)$ , то  $T + V_0$  остается постоянной.

В случае существования обобщенного потенциала  $L$  всё так же многочлен второй степени относительно  $q, \dot{q}$ , при чём  $L_2 = T_2$ , так что уравнения остаются разрешимы относительно обобщенных ускорений.

## Натуральные системы

**Def 34.1.** Системы, в которых силы имеют обычный  $\Pi(q_i, t)$  или обобщенный  $V(q^i, \dot{q}^i, t)$  потенциал, называются *натуральными*. В таких системах  $L = T - \Pi$ . Более общие системы  $L(q^i, \dot{q}^i, t)$  не представимы в виде однако при выполнении условия,

$$\det \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k} \right] \neq 0,$$

то есть ненулевого гессiana лагранжиана, уравнения Лагранжа остаются разрешимы относительно обобщенных ускорений.

## Первые интегралы (вообще про первые интегралы читайте билет №35)

**Def 34.2.** *Первым интегралом* системы дифференциальных уравнений называется функция  $f(q, \dot{q}, t)$  (фазовых переменных), сохраняющая свои значения на любом решении этой системы.

**Def 34.3.** Распространенным первым интегралом являются *циклические* интегралы  $= \partial L / \partial \dot{q}^k$ . Переменная  $q^k$  называется *циклической*, если она не входит в выражение для  $L$ .

## Канонические уравнения

### 35 Гамильтонов формализм, уравнения и интеграл Якоби

#### Преобразование Лежандра

**Def 35.1.** В уравнениях Лагранжа второго рода движения голономной системы в потенциальном поле сил, функция Лагранжа зависит от  $q, \dot{q}, t$  – *переменные Лагранжа*. Если в качестве параметров взять  $q, p, t$ , где  $p_i$

– обобщенные импульсы<sup>5</sup>, определяемые как  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}^i$ . То получим набор  $q, p, t$  – переменные Гамильтона.

В силу невырожденности  $\partial L / (\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j) = J_p$ , то есть по теореме о неявной функции эти равенства разрешимы относительно переменных  $\dot{q}^i$ . Через преобразование Лежандра естественно ввести функцию

$$H(q, p, t) = p_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}, t), \quad \dot{q} \equiv \dot{q}(q, p, t).$$

### Уравнения Гамильтона

Полный дифференциал функции Гамильтона можем выразить двумя способами:

$$\left. \begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \\ dH &= \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t} \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}^i, \quad \frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{\partial L}{\partial q^i} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \end{cases}$$

Эти уравнения называются *уравнениями Гамильтона*, или *каноническими уравнениями*.

### Физический смысл функции Гамильтона

Пусть система натуральна, тогда  $L = L_2 + L_1 + L_0$ , и, соответственно,

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L.$$

По теореме Эйлера об однородных функциях

$$\frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i = 2L_2, \quad \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i = L_1, \quad \Rightarrow \quad H = L_2 - L_0.$$

пусть  $T = T_2 + T_1 + T_0$ , если силы имеют обычный потенциал  $\Pi$ , то  $L_0 = T_0 - \Pi$ ,

$$H = T_2 - T_0 + \Pi.$$

Если же силы имеют обобщенный потенциал  $V = V_1 + V_0$ , то  $L_0 = T_0 - V_0$ , и

$$H = T_2 - T_0 + V_0.$$

В случае натуральных и склерономных систем  $T_1 = T_0 = 0$  и  $T = T_2$ , тогда  $H = T + \Pi$ . Т.е. для натуральных склерономных систем с обычным потенциалом сил функция Гамильтона  $H$  представляет собой полную механическую энергию.

### Интеграл Якоби

Найдём полную производную  $H$  по времени,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Система называется *обобщенно консервативной*, если  $\partial H / \partial t = 0$ , т.е.  $H(q^i, p_i) = h$ , собственно,  $H$  называют *обобщенной полной энергией*, а последнее равенство – *обобщенным интегралом энергии*.

**Def 35.2.** Для натуральной системы с обычным потенциалом сил, если  $\partial H / \partial t = 0$ , то

$$H = T_2 - T_0 + \Pi = h = \text{const.}$$

Соотношение, где  $h$  – произвольная постоянная, называют *интегралом Якоби*.

Есть и другая формулировка для интеграла Якоби голономной склерономной системы. Действительно, при  $\partial L / \partial t = 0$ , интеграл Якоби перейдёт в

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i = \text{const.}$$

### Уравнения Уиттекера

Если  $\partial H / \partial t = 0$ , то  $H(q, p) = h$ , где  $h = \text{const}$  определяемая из н.у. В  $2n$ -мерном пространстве  $q, p$  интеграл Якоби задаёт гиперповерхность, рассмотрим движение с  $H = h$ .

<sup>5</sup>Обобщенный импульс  $p_i$  – ковектор, а не вектор!

Такое движение описывается системой с  $2n - 2$  уравнений, причём она может быть записана в виде канонических уравнений. Пусть  $\partial H / \partial p_1 \neq 0$ , тогда

$$p_1 = -K(q^1, \dots, q^n, p_2, \dots, p_n, h), \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q^j} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{dq^j}{dq^1} = \frac{\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)}{\left(\frac{\partial H}{\partial p_1}\right)}, \quad \frac{dp_j}{dq^1} = -\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial q^j}\right)}{\left(\frac{\partial H}{\partial p_1}\right)},$$

для  $j = 2, 3, \dots, n$ . Подставляя  $p_1$  получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q^j} - \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial K}{\partial q^j} &= 0, & (j = 2, 3, \dots, n); \\ \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial K}{\partial p_j} &= 0, & (j = 2, 3, \dots, n). \end{aligned}$$

Допиливая до надлежащего вида, окончательно находим

$$\frac{dq^j}{dq^1} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dq^1} = -\frac{\partial K}{\partial q^j}, \quad (j = 2, 3, \dots, n).$$

Эти уравнения описывают движения системы при  $H = h = \text{const}$ , и называются *уравнениями Уиттекера*.

### Уравнения Якоби

Уравнения Уиттекера имеют структуру уравнений Гамильтона, соответственно их можно записать в виде уравнений типа Лагранжа, при гессiane  $K$  по  $p$  неравным 0. Пусть  $P$  – преобразование Лежандра функции  $K$  по  $p_j$  ( $j = 2, 3, \dots, n$ ). Тогда

$$P = P(q^2, \dots, q^n, \tilde{q}^2, \dots, \tilde{q}^n, q^1, h) = \sum_{j=2}^n \tilde{q}^j p_j - K,$$

где  $\tilde{q}^j = dq^j / dq^1$ . Величины  $p_j$  выражаются через  $\tilde{q}^2, \dots, \tilde{q}^n$  из уравнений

$$\tilde{q}^j = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad (j = 2, 3, \dots, n),$$

т.е. из первых  $n - 1$  уравнений Уиттекера. При помощи функции  $P$  эти уравнения могут быть записаны в эквивалентной форме:

$$\frac{d}{dq^1} \frac{\partial P}{\partial \tilde{q}^j} - \frac{\partial P}{\partial q^j} = 0 \quad (j = 2, 3, \dots, n).$$

Это уравнения типа Лагранжа, называются *уравнениями Якоби*.

Преобразовывая выражение для  $P$  найдём, что

$$P = \sum_{j=2}^n q_j \tilde{q}^j + p_1 = \sum_{i=1}^n p_i \tilde{q}_i = \frac{1}{\dot{q}^1} \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i = \frac{1}{\dot{q}^1} (L + H).$$

Тогда в случае консервативной системы  $L = T - \Pi$ ,  $H = T + \Pi$ , и

$$P = \frac{2T}{\dot{q}^1}, \quad T = \frac{1}{2} a_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k = (\dot{q}^1)^2 G(q^1, \dots, q^n, \tilde{q}^2, \dots, \tilde{q}^n), \quad G = \frac{1}{2} a_{ik} \tilde{q}^i \tilde{q}^k. \quad \Rightarrow \quad \tilde{q}^1 = \sqrt{\frac{h - \Pi}{G}}$$

Таким образом выражение для

$$P = 2\sqrt{(h - \Pi)G}.$$

### Скобки Пуассона

**Def 35.3.** Пусть  $u, v \in C^2(q, p, t)$ , тогда выражение

$$\{u, v\} = \frac{\partial u}{\partial q^i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q^i}$$

называют *скобкой Пуассона* функций  $u$  и  $v$ .

Вообще, можно было бы ввести алгебры Ли и показать, что пространство гладких функций  $f(t, x, p)$  является алгеброй Ли относительно скобки Пуассона. Выражается это в выполнении следующих свойств:

1.  $\{y, x\} = -\{x, y\}$ ,  $\forall x, y \in C^2$  (кососимметричность);
2.  $\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y\} = \lambda_1 \{x_1, y\} + \lambda_2 \{x_2, y\}$ ,  $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  (линейность по первому аргументу);
3.  $\{x, \{y, z\} + \{y, \{z, x\}\} + \{z, \{x, y\}\} = 0$  (тождество Якоби).

**Def 35.4.** Производной функции  $f(t, q, p)$  в силу гамильтоновой системы в точке  $(t_0, x_0, p^0)$  называется

$$\frac{df(t_0, x_0, p^0)}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{d} \left( f(t, q(t), p(t)) \Big|_{t=t_0} \right),$$

где  $q(t)$  и  $p(t)$  – решения гамильтоновой системы с н.у.  $q(t_0) = q_0$  и  $p(t_0) = p^0$ .

Выразим производную в силу системы через скобку Пуассона:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}, \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}.$$

**Lem 35.5.** Уравнение вида

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0$$

является необходимым и достаточным условием того, что  $f(t, q, p)$  являлась бы первым интегралом гамильтоновой системы.

**Thr 35.6** (теорема Пуассона). Если  $f$  и  $g$  – два интеграла движения, то  $\{f, g\} = \text{const}$  также является интегралом движения<sup>6</sup>.

**Def 35.7.** Гамильтоновым полем для функции  $f \in C^1$  называется векторное поле  $\mathbf{f}$ , определяемое формулой

$$\omega[\mathbf{f}(q, p), \mathbf{v}] = df(q, p)[\mathbf{v}], \quad \forall \mathbf{v} \in T_{q,p}, \quad \omega = dq^i \wedge dp_i.$$

В координатах это выразится в

$$\mathbf{f} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Более того  $\mathbf{f}(\varphi) = \{f, \varphi\}$ , где  $\varphi$  – некоторая гладкая функция.

**Thr 35.8** (о связи скобки Пуассона и скобки Ли). Пусть  $f, g \in C^2$ . Тогда гамильтоново поле скобки пуассона  $\{f, g\}$  совпадает со скобкой Ли гамильтоновых полей  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{f}$ :

$$\overrightarrow{\{f, g\}} = [\mathbf{f}, \mathbf{g}].$$

## 36 Принцип наименьшего действия

Пара слов от Александра Вадимовича

**Def 36.1.** Действием по Гамильтону называют функционал вида

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t), t) dt.$$

Переходя к однопараметрическому семейству кривых  $\gamma(\alpha, t)$  получим вариацию действия

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(\alpha, t), \dot{\gamma}(\alpha, t), t) dt, \quad \delta S = \frac{dS}{d\alpha} \delta \alpha.$$

**Thr 36.2** (принцип Гамильтона). Кривая  $\gamma(\alpha, t)$  является экстремалью действия тогда и только тогда, когда является решением уравнений Лагранжа

$$\delta S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma(\alpha, t) \in \text{Sol} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0 \right).$$

△. Давайте просто проварьируем Лагранжиан, тогда

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \alpha} \right) \delta \alpha dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt = 0.$$

таким образом уравнения Лагранжа выполнены. □

### Истинные и окольные пути

**Def 36.3.** Совокупность траекторий, которые описаны перемещениями из начальных положений  $a_\nu$  в конечные  $b_\nu$ , образуют истинный (действительный, прямой) путь системы  $\gamma_\nu$ .

Совокупность  $\gamma'_\nu$ , бесконечно близких к  $\gamma_\nu$  и таких, что движение точки по кривой  $\gamma'_\nu$  может происходить без нарушения связей, называют окольным путем системы.

<sup>6</sup> Докажи!

**Def 36.4.** *Расширенное координатным пространство* помимо криволинейных координат  $q^i$  также время  $t$ .

**Def 36.5.** При достаточном удалении точки  $A_1$  от точки  $A_0$  может оказаться, что краевая задача имеет решения, соответствующие бесконечно близким прямым путям в расширенном координатном пространстве. В этом случае точки  $A_0$  и  $A_1$  называют *сопряженными кинетическими фокусами*.

**Lem 36.6.** *Положение точки на околном пути задается, как  $\mathbf{r}_\nu(t) + \delta\mathbf{r}_\nu(t)$ , где  $\delta\mathbf{r}_\nu(t_0) = 0$  и  $\delta\mathbf{r}_\nu(t_1) = 0$ . Синхронное варьирование и взятие производной по времени перестановочны.*

### Принцип Гамильтона-Остроградского

Рассмотрим прямой путь и совокупность околных путей. Пусть  $m_\nu$  – масса точки  $P_\nu$ , а  $\mathbf{F}_\nu$  – равнодействующая *активных*<sup>7</sup> сил, приложенных к точке. Тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu dt - \sum_{\nu=1}^N m_\nu \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{w}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu dt = 0.$$

Рассмотрим разность между значениями  $T(t)$  на околном и прямом путях

$$\delta T = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu (\dot{\mathbf{r}}_\nu + \delta\dot{\mathbf{r}}_\nu)^2 - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \delta\dot{\mathbf{r}}_\nu,$$

таким образом

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot d\delta\mathbf{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu \Big|_{t_0}^{t_1} - \sum_{\nu=1}^N m_\nu \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{w}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu dt = - \sum_{\nu=1}^N m_\nu \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{w}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu dt.$$

Таким образом мы пришли к следующей теореме:

**Thr 36.7** (принцип Гамильтона-Остроградского). *Если величины  $\delta\mathbf{r}_\nu(t)$  соответствуют синхронному варьированию прямого пути и  $\delta\mathbf{r}_\nu(t_0) = \delta\mathbf{r}_\nu(t_1) = 0$  тогда и только тогда, когда*

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \delta T + \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu \right) dt = 0.$$

△. Хотелось бы также показать, что из принципа Гамильтона-Остроградского вытекает уравнения Лагранжа второго рода:

$$\begin{cases} \sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = Q_i \delta q^i \\ \delta T = \frac{\partial T}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \end{cases} \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^N \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i + \left( \frac{\partial T}{\partial q^i} + Q_i \right) \delta q^i \right] dt = 0.$$

Интегрируя по частям находим, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} d\delta q^i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i dt.$$

Таким образом приходим к равенству вида

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} - Q_i \right) \delta q^i dt = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i.$$

Следовательно принцип Гамильтона-Остроградского может быть положен в основу динамики голономных систем. □

### Принцип Гамильтона-Остроградского для систем в потенциальном поле сил

В потенциальном поле сил верно, что

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = -\delta\Pi, \quad \Rightarrow \quad \int_{t_0}^{t_1} (\delta T - \delta\Pi) dt = 0, \quad \stackrel{L=T-\Pi}{\Rightarrow} \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0.$$

**Def 36.8.** *Действием по Гамильтону* для голономных систем называется интеграл вида

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt.$$

<sup>7</sup>Определение бы написать.

**Thr 36.9** (Принцип Гамильтона-Остроградского v2). Для голономной системы в случае существования потенциала сил среди всех путей выделяется прямой путь тем, что для него  $\delta S = 0$ .

### Экстремальное свойство действия по Гамильтону

**Thr 36.10** (принцип наименьшего действия). В окрестности, достаточно малой, чтобы отсутствовали кинетические фокусы, действие по Гамильтону на прямом пути будет наименьшим, по сравнению с окольными, проходимыми за то же время.

$\Delta$ . Пусть  $[af]$  и  $[ac]$  действие на двух различных путях системы. Для их разности имеем

$$[ac] - [af] = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^N \left( m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu} \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}_{\nu} - \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}_{\nu}} \cdot \delta \mathbf{r}_{\nu} \right) dt = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \mathbf{v}_{\nu}(t) \cdot \delta \mathbf{r}_{\nu}(t) + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^N (\mathbf{F}_{\nu} - m_{\nu} \mathbf{w}_{\nu}) \cdot \delta \mathbf{r}_{\nu} dt.$$

где  $\mathbf{v}_{\nu}$  и  $\partial \Pi / \partial \mathbf{r}_{\nu}$  вычисляются по  $a_{\nu} f_{\nu}$ . Учитывая общее уравнение динамики, это соотношение можно переписать в виде

$$[ac] - [af] = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} v_{\nu}(f) \cos \alpha_{\nu} \delta s_{\nu},$$

где  $\alpha_{\nu}$  – угол между  $v_{\nu}$  и  $\delta \mathbf{r}_{\nu}$ , а  $\delta s_{\nu}$  – длина  $f_{\nu} c_{\nu}$ . **Опуская некоторые выкладки**, можем теперь получить, что  $S_{\text{ок}} > S_{\text{пр}}$ .  $\square$

## 40 Принцип Мюпертюи-Лагранжа

**Хорошо бы посмотреть на происходящее ещё с точки зрения Льва Давидовича, как в задаче о движении луча.**

**Def 40.1.** Рассмотрим голономную (обобщенно) консервативную систему. Рассмотрим движение в  $n$ -мерном координатном пространстве. Рассмотрим прямые и окольные пути такие, что  $H = h = \text{const}$ . При таком *изоэнергетическом варьировании*  $t_1 - t_0$  не обязательно одинаково для прямого и окольного пути.

### Принцип Мюпертюи-Лагранжа

**Def 40.2.** При заданной  $h$  уравнения движения могут быть записаны в форме Якоби, они также будут иметь форму уравнений Лагранжа, где  $L \rightarrow P$ ,  $t \rightarrow q^1$ . По аналогии с действием  $S$  по Гамильтону введём *действие по Лагранжу*:

$$W = \int_{q_0^1}^{q_1^1} P dq^1.$$

**Thr 40.3** (Принцип Мюпертюи-Лагранжа<sup>8</sup>). Среди всех кинематически возможных путей голономной консервативной системы, прямой путь выделяется тем, что для него действие по Лагранжу  $W$  имеет стационарное значение  $\delta W = 0$ .

Аналогично экстремальное значение будет принимать действие по Лагранжу при отсутствии кинематических фокусов в рассматриваемой области.

Как было показано ранее функция Якоби  $P$  может быть вычислена, как

$$W = \int_{q_0^1}^{q_1^1} P dq^1 = \int_{q_0^1}^{q_1^1} \frac{2T}{\dot{q}^1} dq^1 = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt.$$

Важно заметить, что  $T + \Pi = \text{const}$ , а вот  $t_1$  не зафиксировано. Иначе можно переписать

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} v_{\nu}^2 dt = \sum_{\nu=1}^N \int_{s_{\nu}^0}^{s_{\nu}^1} m_{\nu} v_{\nu} ds_{\nu},$$

т.е. для консервативной системы действие по Лагранжу равно сумме работ количеств движения точек системы на соответствующих их перемещениях.

<sup>8</sup>Или принцип наименьшего действия Якоби.



## 41 Принцип Якоби и геодезические

**Про геодезические можно написать больше и лучше.** Рассмотрим консервативную энергию с  $n$  степенями свободы. Кинетическая энергия  $T = \frac{1}{2} a_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k$ . Введём в координатном пространстве метрику

$$ds^2 = 2T dt^2 = a_{ik} dq^i dq^k, \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2,$$

т. е. в такой метрике  $T$  системы равная изображающей точки в координатном пространстве, если считать, что изображающая точка обладает массой, равной единице.

Если система движется по инерции, т.е.  $\Pi = 0$ , то из интеграла  $T + \Pi = h = \text{const}$  и тогда

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2h}, \quad \Rightarrow \quad W = 2 \int_{t_0}^{t_1} T dt = 2h(t_1 - t_0) = \sqrt{2h}l,$$

где  $l = \sqrt{2h}(t_1 - t_0)$  – длина кривой, пройденной за время  $t_1 - t_0$ . Из *принципа Якоби* следует, что  $\delta l = 0$ , т.е. задача свелась к задаче дифгема о поиска геодезической.

Пусть теперь движение в потенциальном поле ( $\Pi \neq 0$ ). Тогда функция Якоби  $P$ :

$$W = \int_{q_1^1}^{q_1^2} P dq^1 = 2 \int_{q_1^1}^{q_1^2} \sqrt{(h - \Pi)G} dq^1 = \sqrt{2} \int_{q_1^1}^{q_1^2} \sqrt{(h - \Pi)a_{ik} dq^i dq^k}.$$

Область движения ограничена  $\Pi \leq h$ , так что введём новую метрику  $d\sigma^2$ , по формуле

$$d\sigma^2 = (h - \Pi)a_{ik} dq^i dq^k, \quad \Rightarrow \quad W = \sqrt{2}\sigma,$$

где  $\sigma$  – длина дуги. Теперь нахождение траекторий снова свелось к нахождению геодезической!

Далее рассмотрим две задачи, раскрывающих эту тему.

## Устойчивость движения

### 38 Теорема Лагранжа об устойчивости положения консервативной системы

**Thr 38.1** (Общее уравнение статики<sup>9</sup>). *Чтобы некоторое допускаемое идеальными удерживающими связями состояние равновесия системы было состоянием равновесия на интервале  $t_0 \leq t \leq t_1$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого момента времени из этого интервала элементарная работа активных сил на любом виртуальном перемещении равнялась нулю, т.е. чтобы выполнялось*

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{\nu} \cdot \delta \mathbf{r}_{\nu} = 0 \quad (t_0 \leq t \leq t_1).$$

Если система является потенциальной, то уравнения примут вид

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} = 0.$$

**Def 38.2.** Положение равновесия  $q = 0$  – *устойчиво по Ляпунову*, если  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ , такая что

$$\forall |q(t_0)| < \delta, |\dot{q}(t_0)| < \delta: \quad |q(t)| < \varepsilon, |\dot{q}(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0. \quad (21)$$

**Def 38.3.** Положение равновесия  $q = 0$  – *неустойчиво по Ляпунову*, если  $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0$ , такая что

$$\forall \delta > 0 \quad \exists |q(t_0)| < \delta, |\dot{q}(t_0)| < \delta, \quad t^*: \quad |q(t^*)| > \varepsilon \text{ или } |\dot{q}(t^*)| > \varepsilon. \quad (22)$$

**Thr 38.4** (Теорема Лагранжа-Дирихле). *Если в положении равновесия конесервативной системы  $\Pi(q)$  имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.*

**Lem 38.5.** *При наличии гироскопических и диссипативных сил положение равновесия сохранится.*

### 39 Теорема Ляпунова об обращении теоремы Лагранжа

**Thr 39.1** (Теорема Ляпунова о неустойчивости I). *Если в положении равновесия  $\Pi(q)$  не имеет минимума и это определяется по квадратичной форме её разложения в ряд (в окрестности положения равновесия), то это положение равновесия неустойчиво.*

**Thr 39.2** (Теорема Ляпунова о неустойчивости II). *Если в положении равновесия  $\Pi(q)$  имеет строгий максимум и это определяется по наинизшей степени её разложения в ряд (в окрестности положения равновесия), то это положение равновесия неустойчиво.*

**Когда-нибудь здесь появится доказательство.**

<sup>9</sup>Если с необходимостью всё понятно, то достаточность может быть доказана через уравнения Аппеля (см. п. 158, Маркеев П. А.).