

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

Автор: Хоружий Кирилл

От: 25 октября 2020 г.

Содержание

1	Динамика	1
1.5	Движение точки в центральном поле сил	1
1.6	Элементы механики сплошных сред (МСС)	2

1 Динамика

1.5 Движение точки в центральном поле сил

8.36

T10*.

В ОТО движение в центральном поле тяжести описывается как движение в метрике Шварцшильда:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) d\tau^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 - (r \sin \theta)^2 d\varphi^2 - r^2 d\theta^2.$$

Здесь 4 независимых переменных $(\tau, r, \varphi, \theta)$, где три из сферических координат, а τ – физическое время, также введен радиус Шварцшильда $a = 2GM$.

Движение точек рассматриваем, как движение по геодезическим, то есть $\mathbf{w}_i = 0$, где $i \in \{\tau, r, \varphi, \theta\}$. Движение будет в некотором смысле происходить в одной плоскости, так что пусть $\theta(t) = \pi/2$. Так мы получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{\tau}^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 \\ \mathbf{w}_\tau = \frac{d}{dt} \frac{\partial(v^2/2)}{\partial \dot{\tau}} - \underbrace{\frac{\partial(v^2/2)}{\partial \tau}}_0 = \frac{d}{dt} \left[\left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{\tau} \right] = 0 \\ \mathbf{w}_\varphi = -\frac{d}{dt} [r^2 \dot{\varphi}] = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Таким образом получим пару первых интегралов системы, в частности

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{\tau} &= \mathcal{D}, \\ r^2 \dot{\varphi} &= \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Подставляя их в выражение для скорости, получим, что

$$\left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \mathcal{D}^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{\mathcal{C}^2}{r^2} = v^2.$$

По замене Бине

$$r = \frac{1}{u}, \quad \dot{r} = r' \dot{\varphi} = \left(\frac{1}{u}\right)' cu^2 = -u'c,$$

перейдём к функции $u(\varphi)$:

$$2c^2 u'' + c^2(2u - 3au^2) = v^2. \quad (1.2)$$

Преобразуя, получим

$$\boxed{u'' + u = \frac{a}{2c^2} v^2 + \frac{3}{2} au^2}. \quad (1.3)$$

Найдём теперь видимый радиус черной дыры – минимальное значение прицельного параметра, при котором луч, проходящий через окрестность черной дыры не падает на центр. Для светового луча верно, что

$\dot{s}^2 = v^2 = 0$, тогда

$$u'' + u = \frac{3}{2}au^2.$$

Интегрируя, получим

$$\frac{u'^2}{2} + \frac{u^2}{2} = \frac{au^3}{2} + c'.$$

Посмотрим теперь на поведение света при $u \rightarrow 0$ верно, что $r\varphi \rightarrow b$, тогда

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{r}{\varphi} \Rightarrow \frac{du}{d\varphi} = -\frac{dr}{d\varphi} \frac{1}{r^2} = \frac{r}{\varphi} \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r\varphi} \Rightarrow u'|_{t=0} = \frac{1}{b} \Rightarrow c' = \frac{1}{2b^2}$$

Переписав, получим

$$u'^2 = au^3 - u^2 + \frac{1}{b^2}.$$

Вблизи точки с критическим u верно, что $\dot{r} \sim 0$, тогда нас интересует экстремум функции $au^3 - u^2 + b^{-2}$, тогда

$$3au^2 - 2u = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_{\min}} = \left(\frac{3}{2}a\right)^{-1}.$$

Условие падения – уменьшение радиуса (увеличение u) при $r = r_{\min}$:

$$u'^2_{\min} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{8}{27} - \frac{4}{9} \right) + \frac{1}{b^2} = -\frac{4}{27a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 0 \Rightarrow b^2 \leq \frac{27}{4}a^2$$

Тогда минимальное значение прицельного параметра, при котором луч, проходящий через окрестность черной дыры не падает на центр

$$\boxed{b_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a}, \quad (1.4)$$

что и является видимым радиусом черной дыры.

1.6 Элементы механики сплошных сред (МСС)

T11.

Движение среды происходит по закону ($\tau = \text{const} > 0$),

$$\mathbf{r} = (x \ y \ z)^T, \quad x = \xi_1 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right), \quad y = \xi_2 \left(1 + 2\frac{t}{\tau}\right), \quad z = \xi_3 \left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right).$$

Тогда поля скорости и ускорения в лагранжевом описании

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\tau} \left(\xi_1 \quad 2\xi_2 \quad 2\frac{t}{\tau}\xi_3 \right)^T, \quad \mathbf{w} = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\tau^2} \left(0 \quad 0 \quad 2\xi_3 \right)^T.$$

Пусть деформация произойдет через малый промежуток времени dt , тогда $\mathbf{u} = \mathbf{v} dt$. Представим $\partial\mathbf{u}/\partial\mathbf{r}$, как сумму симметричного и косо-симметричного

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{r}} = u_{ij} + \varphi_{ij},$$

где

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right), \quad \varphi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right).$$

Подставим \mathbf{v} в эйлеровом описании

$$\mathbf{v} = \left(\frac{x}{\tau+t} \quad \frac{2y}{\tau+t} \quad \frac{2tz}{\tau^2+t^2} \right)^T, \quad \Rightarrow \quad u_{ij} = \text{diag} \left(\frac{1}{t+\tau}, \frac{2}{\tau+t}, \frac{2t}{\tau^2+t^2} \right)_{ij} dt, \quad \varphi_{ij} = 0.$$

Вращательное движение отсутствует.

Как можно заметить из выражения для \mathbf{v} неподвижными будут частицы с $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$, в начальный момент времени неподвижными будут все частицы с $\xi_3 = 0$.

Т12 и Т13. (Теория)

В равновесии силы внутренних напряжений должны взаимно компенсироваться, т.е.

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = -F_i = 0. \quad (1.5)$$

Также мы знаем обобщенный закон Гука:

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma} \left[u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ll} \delta_{ik} \right], \quad (1.6)$$

где $\sigma \in [0, 1/2]$ – коэффициент Пуассона, а E – модуль Юнга. Зная, что u_{ik} – симметричный тензор

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right),$$

получим

$$\frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} = 0,$$

что перепишем в векторных обозначениях, в силу $\Delta \mathbf{u} = \partial^2 u_i / \partial x_k^2$, а $\partial u_l / \partial x_l = \text{div } \mathbf{u}$, тогда

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \text{grad div } \mathbf{u} = 0.$$

Вспомнив, что $\text{grad div } \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} + \text{rot rot } \mathbf{u}$,

$$\text{grad div } \mathbf{u} - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \text{rot rot } \mathbf{u} = 0. \quad (1.7)$$

Т12 и Т13. (общий случай)

Внешние и внутренние радиусы толстостенной сферы равны R_1 и R_2 , внутри сферы действует давление p_1 , снаружи действует p_2 . Найдём деформацию и тензор напряжений для этой сферы.

Введём сферические координаты с началом в центре шара. В силу радиальности $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{r})$, следует, что $\text{rot } \mathbf{u} = 0$, тогда уравнение (1.7) примет вид

$$\text{grad div } \mathbf{u} = 0, \quad (1.8)$$

с учётом (1.18),

$$\text{div } \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 u)}{dr} = \text{const} \equiv 3a,$$

тогда

$$d(r^2 u) = 3ar^2 dr \quad \Rightarrow \quad u = ar + \frac{b}{r^2}.$$

Выпишем компоненты тензора деформации в сферических координатах:

$$u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{u_{\theta\theta}}{r} \text{ctg } \theta + \frac{u_r}{r}.$$

В остальные не входит u_r , соответственно они равны 0. В частности, для нашего случая

$$u_{rr} = a - \frac{2b}{r^3}, \quad u_{\theta\theta} = u_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = a + \frac{b}{r^3}. \quad (1.9)$$

Также можем найти (диагональный) тензор напряжений :

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left[(1-\sigma)u_{rr} + 2\sigma u_{\theta\theta} \right] = \frac{E}{1-2\sigma} a - \frac{2E}{1+\sigma} \frac{b}{r^3}, \quad (1.10)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \left[(1+\sigma)u_{\theta\theta} + \sigma u_{rr} \right] = \sigma_{\varphi\varphi}. \quad (1.11)$$

Также мы знаем следующие граничные условия:

$$\sigma_{rr}|_{r=R_1} = -p_1, \quad \sigma_{rr}|_{r=R_2} = -p_2,$$

получаем

$$\boxed{a = \frac{p_1 R_1^3 - p_2 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \frac{1-2\sigma}{E}, \quad b = \frac{R_1^3 R_2^3 (p_1 - p_2)}{R_2^3 - R_1^3} \frac{1+\sigma}{2E}.} \quad (1.12)$$

Т12 и Т13. (тонкая сферическая оболочка)

Рассмотрим теперь случай, когда $h = R_2 - R_1 \ll R$.

$$a \approx \frac{R}{3h} \frac{1-2\sigma}{E} (p_1 - p_2), \quad b \approx \frac{R^4}{3h} (p_1 - p_2) \frac{1+\sigma}{2E}.$$

Тогда деформация

$$\left(\text{пусть } \varkappa = \frac{R^2}{3h} (p_1 - p_2), \text{ тогда} \right) \quad u = \varkappa \frac{1-2\sigma}{E} + \varkappa \frac{1+\sigma}{2E} = \frac{r^2(1-\sigma)}{2Eh} (p_1 - p_2).$$

Чуть интереснее выражение для σ_{rr} (введено обозначение $p = p_1 - p_2$):

$$\sigma_{rr} = \frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(\underbrace{p_1 - p_2 - p_2 \frac{3h}{R} - \frac{R_2^2}{r^3} (p_1 - p_2)}_{p(1-R_2^2/r^3)} \right),$$

посмотрим, однако, на среднее по r значение.

$$\frac{1}{h} (R_1 + h)^3 \int_{R_1}^{R_1+h} \frac{1}{r^3} dr = \frac{R_1 + h}{2} \left(\frac{2}{R_1} + \frac{h}{R_1^2} \right),$$

тогда

$$\frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \left\langle p \left(1 - \frac{R_2^2}{r^3} \right) \right\rangle = \boxed{\langle \sigma_{rr} \rangle = \frac{1}{2} (p_1 + p_2)}.$$

Найдём остальные компоненты

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{3}{2} \left(\frac{R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \right) (p_1 - p_2) = \frac{1}{2} \frac{R}{h} (p_1 - p_2).$$

Т14*. (решение для криволинейных координат, образующих ортогональный базис)

Хотелось бы выразить лапласиан Δp через частные производные в произвольной криволинейной системе координат. Легко показать, что

$$\Delta p = \operatorname{div} \operatorname{grad} p. \quad (1.13)$$

Так что начнём с вида $\operatorname{div} \mathbf{v}$ и $\operatorname{grad} f$ в криволинейной системе координат. Понадеемся, что достаточно рассмотреть случай криволинейных координат, образующих ортогональный базис в каждой точке пространства.

В криволинейных координатах базисные направления сформированы векторами $\mathbf{g}_i(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \partial \mathbf{r} / \partial q^i$. Для удобства введём единичные орты координатных направлений для ортогональной системы

$$\mathbf{e}_1(q) = \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}, 0, 0 \right), \quad \mathbf{e}_2(q) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}, 0 \right), \quad \mathbf{e}_3(q) = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \right). \quad (1.14)$$

Тогда

$$dq^j(\mathbf{e}_i) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \delta_j^i, \quad dq^i \wedge dq^j(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}g_{jj}}} \delta_k^i \delta_l^j. \quad (1.15)$$

Известно, что градиент функции соответствует дифференциальной 1-форме. Её (по вектору \mathbf{A}) можно записать как $\omega_A^1 = a_i dq^i$. С учётом введенного базиса можно записать, что $\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i$, $\forall \mathbf{A} \in T\mathbb{R}_q^3$. Из (1.15) получим, что

$$\omega_A^1(\mathbf{e}_i) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i) = A^i = \frac{a_i}{\sqrt{g_{ii}}},$$

следовательно $a_i = A^i \sqrt{g_{ii}}$, и, соответственно

$$\omega_A^1 = A^i \sqrt{g_{ii}} dq^i. \quad (1.16)$$

Аналогично, пусть теперь $\operatorname{grad} f = A^i \mathbf{e}_i$. По определению

$$\omega_{\operatorname{grad} f}^1 = d\omega_f^0 = df = \frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{grad} f = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial f}{\partial q^i} \mathbf{e}_i}.$$

Теперь найдём $\operatorname{div} \mathbf{B}$, как дифференциальную 3-форму. Для начала поймём, что для вектора $\mathbf{B}(q) = (B^i \mathbf{e}_i)(q)$ форма

$$\omega_B^2 = b_1 dq^2 \wedge dt^3 + b_2 dq^3 \wedge dt^1 + b_3 dq^1 \wedge dt^2 \quad (1.17)$$

имеет следующий вид:

$$\omega_B^2(e_2, e_3) = (B, e_2, e_3) = B^1.$$

С другой стороны, из (1.15) и (1.17),

$$\omega_B^2(e_2, e_3) = b_1 dq^2 \wedge dq^3(e_2, e_3) = \frac{b_1}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}.$$

Получаем, что $b_1 = B^1 \sqrt{g_{22}g_{33}}$, аналогично можем получить, что $b_2 = B^2 \sqrt{g_{11}g_{33}}$, $b_3 = B^3 \sqrt{g_{11}g_{22}}$.

Теперь, из определения, получаем

$$\omega_{\text{div } B}^3 = d\omega_B^2 = \sum_{\substack{i \neq j \neq k \\ P(i,g,k)=1}}^3 \frac{\partial \sqrt{g_{jj}g_{kk}} B^i}{\partial q^i} dq^i \wedge dq^j \wedge dq^k.$$

Тогда

$$\text{div } B = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \left(\frac{\partial \sqrt{g_{22}g_{33}} B^1}{\partial q^1} + \frac{\partial \sqrt{g_{33}g_{11}} B^1}{\partial q^2} + \frac{\partial \sqrt{g_{11}g_{22}} B^1}{\partial q^3} \right) \quad (1.18)$$

Собирая всё вместе получаем, что

$$\Delta f = \text{div} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial f}{\partial q^i} e_i \right) = \frac{1}{\det g} \sum_{\substack{i \neq j \neq k \\ P(i,g,k)=1}}^3 \left(\frac{\partial}{\partial q^i} \left[\sqrt{\frac{g_{jj}g_{kk}}{g_{ii}}} \frac{\partial f}{\partial q^i} \right] \right). \quad (1.19)$$

В частности, для полярных

$$g_{ij} = \text{diag}(1, r^2, 1) \quad \Rightarrow \quad \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

T15*.

Запишем ковариантную производную вектора и ковектора:

$$\nabla_j v_m = \frac{\partial v_m}{\partial q^j} - \Gamma_{kj}^i v_i, \quad \nabla_k v^j = \frac{\partial v^j}{\partial q^k} + \Gamma_{kj}^i v^i. \quad (1.20)$$

В таком случае

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\nabla_i v_j - \nabla_j v_i \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial q^i} + \Gamma_{ji}^k v_k - \frac{\partial v_i}{\partial q^j} - \Gamma_{ij}^k v_k \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial q^i} - \frac{\partial v_i}{\partial q^j} \right),$$

что и требовалось доказать.

Перейдём к следующему заданию. Корректнее сказать, что **псевдовектор** вихря ω может быть представлен $\omega_{ij} e^i e^j$, т.к. при выводе критически важно, что

$$[e^1 \times e^2] = e^3, \quad (1.21)$$

соответственно ω не инвариантен к зеркальному отображению базиса.

Судя по символу Леви-Чевиты речь идёт о трёхмерной задаче, так что нам достаточно показать что

$$\omega = \omega_{ij} [e^i \times e^j], \quad \text{где} \quad \omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^3 & -\omega^2 \\ -\omega^3 & 0 & \omega^1 \\ \omega^2 & -\omega^1 & 0 \end{pmatrix}_{ij}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \omega^\gamma = \frac{1}{2} \varepsilon^{\gamma\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}, \quad (1.22)$$

что проверяется прямой подстановкой:

$$\omega = \omega^3 \underbrace{[e^1 \times e^2]}_{e^3} + (-\omega^3) \underbrace{[e^2 \times e^1]}_{-e^3} + \dots = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}.$$