

ЗАМЕТКИ КУРСА «СОВРЕМЕННАЯ ОПТИКА»

Лектор: Колдунов Л. М.

Восторженные слушатели: Хоружий К.
Примак Е.

От: 15 февраля 2021 г.

Содержание

1	Геометрическая оптика	2
1.1	Волновое уравнение	2
1.2	Уравнения эйконала	2
1.3	Принцип Ферма	3
1.4	Траектория луча (?)	3
1.5	Уравнение луча в параксиальном приближение	3
1.6	Пример слоистой среды	4
2	Матричная оптика	5
2.1	Матрица перемещения	5
2.2	Матрица преломления на сферической поверхности	5
2.3	Общий подход	5
2.4	Задачи	5

1 Геометрическая оптика

1.1 Волновое уравнение

В общем оптика устроена как-то так: ГО \subset ВО \subset ЭО \subset КО. Вспомним уравнения Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Будем считать, что нет свободных токов и зарядов. Как вариант, можно найти решение в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}).$$

Важно, что верны формально замены

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega, \quad \begin{cases} \partial_x \rightarrow -ik_x, \\ \partial_y \rightarrow -ik_y, \\ \partial_z \rightarrow -ik_z, \end{cases} \Rightarrow \nabla \rightarrow -i\mathbf{k}, \quad \nabla^2 \rightarrow -k^2.$$

Приходим к уравнению вида

$$-k^2 \mathbf{E} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \omega^2 \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}, \quad \rightarrow \quad \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{n}.$$

Можем посмотреть на $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const.}$ Тогда

$$\omega dt - k dz = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

1.2 Уравнения эйконала

1. Свет распространяется в виде лучей.
2. Среда характеризуется показателем преломления n , более того¹ $c_{\text{ср}} = c/n$.
3. $\int n dl \rightarrow \min$ (принцип Ферма).

Def 1.1. *Оптический путь* можем определить, как

$$S = \int_A^B n(\mathbf{r}) dl.$$

Посмотрим на уравнение

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad E(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \exp(ik_0 \Phi(\mathbf{r}) - i\omega t),$$

где $\Phi(\mathbf{r})$ называем *эйконалом*, а a - амплитуда.

Тогда формально получаем следующее:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2, \quad \frac{\partial}{\partial x} E = a'_x \exp(\dots) + a(\mathbf{r}) ik_0 \Phi'_x \exp(\dots),$$

И для второй производной

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = a''_{xx} \exp(\dots) + 2ik_0 a'_x \Phi'_x \exp(\dots) + ik_0 a \Phi''_{xx} \exp(\dots) - a(\mathbf{r}) k_0^2 |\Phi'_x|^2 \exp(\dots).$$

Таким образом нашли ΔE

$$\nabla^2 E = \nabla^2 a \exp(\dots) - a(\mathbf{r}) k_0^2 |\operatorname{grad} \Phi|^2 \exp(\dots) + i(2k_0(\operatorname{grad} a, \operatorname{grad} \Phi) + k_0 a \nabla^2 \Phi) \exp(\dots).$$

Внимательно посмотрели на волновое уравнение, решили сгруппировать вещественную часть и мнимую

$$\nabla^2 a \exp(\dots) - a(\mathbf{r}) k_0^2 |\operatorname{grad} \Phi|^2 \exp(\dots) + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 a \exp(\dots) = 0, \quad \Rightarrow \quad |\operatorname{grad} \Phi|^2 = \underbrace{\frac{1}{a l_0^2} \nabla^2 a}_{\text{изм. ампл.}} + n^2.$$

¹Будем считать, что лучу нужно проходить больший оптический путь.

Ну, будем считать, что (настоящая область применимости волновой оптики)

$$\left| \lambda \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \right| \ll \left| \frac{\partial a}{\partial x} \right|, \quad \Leftrightarrow \quad \left| \lambda \frac{\partial a}{\partial x} \right| \ll a, \quad \lambda \rightarrow 0.$$

И приходим к уравнению Эйконала

$$\boxed{|\text{grad } \Phi| = n.} \quad (1.1)$$

Ещё раз вспомним, что волновой фронт имеет вид

$$\omega t - k_0 \Phi = \text{const.}$$

Запишем, что (живём вдоль \mathbf{S})

$$\text{grad } \Phi = n \mathbf{S}, \quad \|\mathbf{S}\| = 1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial S} = n.$$

Тогда

$$\omega dt - k_0 d\Phi = 0, \quad \Rightarrow \quad \omega dt = k_0 d\Phi = k_0 \frac{\partial \Phi}{\partial S} dS = k_0 n dS.$$

1.3 Принцип Ферма

Пусть Φ – однозначно задан, тогда

$$\text{grad } \Phi = n \mathbf{S}, \quad \Rightarrow \quad \oint n \mathbf{S} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad \Rightarrow \quad \int_{ACB} n \mathbf{S} \cdot d\mathbf{l} = \int_{ADB} n \mathbf{S} \cdot d\mathbf{l}.$$

Но $\mathbf{S} \cdot d\mathbf{l} = S dl = dl$ на ACB . Тогда

$$\int_{ACB} n dl = \int_{ADB} n \mathbf{S} \cdot d\mathbf{l} \leq \int_{ADB} n dl.$$

Что доказывает принцип Ферма.

1.4 Траектория луча (?)

Для луча верно, что

$$n \mathbf{S} = \text{grad } \Phi, \quad |d\mathbf{r}| = dl, \quad \mathbf{S} = \frac{d\mathbf{r}}{dl}.$$

В таком случае верно, что

$$n \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \text{grad } \Phi, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dl} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right) = \frac{d}{dl} \text{grad } \Phi = \text{grad } \frac{d\Phi}{dl} = \text{grad } n.$$

Получили уравнение траектории луча

$$\boxed{\frac{d}{dl} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right) = \text{grad } n.} \quad (1.2)$$

Например, в однородной среде

$$n = \text{const}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dl^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} = \mathbf{a}l + \mathbf{b}.$$

Можно сделать ещё так (найти кривизну траектории?)

$$\mathbf{S} \frac{dn}{dl} + n \frac{d\mathbf{S}}{dl} = \nabla n, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{S}}{dl} = \frac{1}{n} \left(\nabla n - \mathbf{S} \frac{dn}{dl} \right).$$

Получаем (вспомнив трёхгранник Френе)

$$\frac{\mathbf{N}}{R} = \frac{1}{n} \left(\nabla n - \mathbf{S} \frac{dn}{dl} \right), \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{N^2}{R} = \frac{(\mathbf{N} \cdot \nabla n)}{n},$$

или

$$(\mathbf{N} \cdot \nabla n) > 0, \quad \Rightarrow \quad \text{луч поворачивает в } \uparrow n. \quad (1.3)$$

1.5 Уравнение луча в параксиальном приближение

Пусть есть некоторая $n(y)$. Пусть луч движется $\theta(y)$, рассмотрим ситуацию преломления, тогда

$$n(y) \cos \theta(y) = n(y + dy) \cos \theta(y + dy), \quad \Rightarrow \quad \left(n(y) + \frac{dn}{dy} \Delta y \right) (\cos \theta(y) - \sin \theta(y)).$$

Раскрыв скобки, получим

$$n(y) \cos \theta(y) = n(y) \cos \theta(y) + \frac{dn}{dy} \cos \theta(y) \Delta y - n(y) \sin \theta(y) \frac{d\theta}{dy} \Delta y.$$

Запишем чуть аккуратнее:

$$\frac{dn}{dy} \cos \theta(y) = n(y) \sin \theta(y) \frac{d\theta}{dy},$$

Считая, что $\sin \theta(y) \approx \theta(y) = dy/dx$, тогда

$$\frac{1}{n} \frac{dn}{dy} = \operatorname{tg} \theta \frac{d\theta}{dy} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \Rightarrow \quad y''_{xx} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy}. \quad (1.4)$$

1.6 Пример слоистой среды

Рассмотрим вещество с коммерческим названием SELFOC и переменным показателем преломления вида

$$n^2 = n_0^2(1 - \alpha^2 y^2)$$

Считая $\alpha y \ll 1$, подставляя в уравнение луча находим, что

$$y''_{xx} = \frac{1}{n_0(1 - \alpha^2 y^2)^{1/2}} \frac{dn}{dy} = \frac{-n_0 \alpha^2 y}{n_0} = -\alpha^2 y,$$

и мы снова всё свели к гармоническому осциллятору.

Нужно ещё разобрать мнимую часть, в которой сидит факт об отсутствии взаимодействия лучей.

2 Матричная оптика

Будем рассматривать оптически центрированные системы, введем нормально к OX ось OY . Всё у нас аксиально симметрично, тогда луч можно характеризовать

$$\{y_1, \theta_1\} \rightarrow \{y_1, n_1\theta_1\},$$

где принято обозначение $n\theta \stackrel{\text{def}}{=} V$.

Вообще после прохождения оптической системы можем записать, что происходит некоторое линейное преобразование

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_1\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\theta_1 \end{pmatrix}.$$

2.1 Матрица перемещения

Пусть луч распространяется в однородной среде, под θ_1 распространяется, тогда $\theta_2 = \theta_1$. Что произошло с y ? Ну, $y_2 = y_1 + l\theta_1$, тогда

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_2\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\theta_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где соответствующую матрицу обозначим за T .

2.2 Матрица преломления на сферической поверхности

Есть некоторая ось OX , будем считать радиус кривизны положительным, если он идёт направо. Смотреть рис. 02.1. Верно, что

$$n_1\beta_1 = n_2\beta_2, \quad \beta_1 = \theta_1 + \alpha, \quad \beta_2 = \theta_2 + \alpha.$$

Тогда,

$$\alpha = \frac{y_1}{R}, \quad \Rightarrow \quad n_2\theta_2 = n_1\theta_1 + (n_1 - n_2)\frac{y_1}{R}, \quad \Leftrightarrow \quad V_2 = V_1 + \frac{n_1 - n_2}{R}y_1.$$

Теперь можем записать матрицу преломления P

$$P(y, V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix}, \quad P(y, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где $(n_2 - n_1)/R$ называют *оптической силой*.

2.3 Общий подход

Пусть есть схема рис. 02.2, тогда

$$\underbrace{M_3 M_2 M_1}_M \mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} \mathbf{b}.$$

Посмотрим на коэффициенты, приравнявая их к 0. Пусть

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix},$$

тогда $\theta_2 = cy_1$, тогда при $D = 0$, получается, что $ОП_1$ – фокальная плоскость (слева).

Пусть $B = 0$, тогда $y_2 = Ay_1$, тогда это изображение, и говорим, что эти *плоскости сопряженные*, а коэффициент A – *коэффициент поперечного увеличения*.

Пусть $C = 0$, тогда $\theta_2 = \theta_1 D$, что соответствует телескопической системой, а коэффициент D – *коэффициент углового увеличения*.

Теперь рассмотрим $A = 0$, получается, что это фокальная плоскость справа.

2.4 Задачи

Пример №0

Рассмотрим преломление на первой границе, где

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{nR_1} & 1/n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} + \frac{1-n}{R_1} & 1 \end{pmatrix},$$

получается оптическая сила системы получилась равной

$$(n-1) \left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right),$$

согласно определению.

Найдём теперь после линзы изображение объекта (рис. О2.4)

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{b}{F} & b \\ -\frac{1}{F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - b/F & a(1 - b/F) + b \\ -1/F & -a/F + 1 \end{pmatrix}.$$

Для сопряженности плоскостей необходимо и достаточно, чтобы $B = 0$, то есть

$$a + b - \frac{ab}{F} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}.$$

Тогда увеличение можно увидеть в $A = 1 - b/F$.

Пример №2

Показатель преломления $n = 1.56$, высота стрелки $h = 2$ мм, в переменных (y, V) запишем (см. рис. 02.5)

$$\begin{pmatrix} 1 & x/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.56/2.8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{7.8} & 15 - \frac{x}{0.78} \\ -0.2 & -2 \end{pmatrix},$$

требуя сопряженности плоскостей

$$15 - \frac{x}{0.78} = 0, \quad \Rightarrow \quad x = 11.7 \text{ см.}$$

Коэффициент увеличения а-ля $1/D$, то есть равен $-1/2$.

Пример №4

Параллельный пучок света проходит через шарик радиуса $R = 1$ см, с показателем преломления $n = 1.4$.

С шариком $n = 2$ луч собирается на полюсе шарика. В общем случае

$$\begin{pmatrix} 1 & F \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(1-n)}{-R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2R}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2F(n-1)+(n-2)R}{nR} & \frac{F(-n)+2F+2R}{n} \\ \frac{2-2n}{nR} & \frac{2}{n} - 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$-2F(n-1) = R(n-2).$$

Пример №11

См. рис. О2.5. Пусть оптические силы P_1 и P_2 , а расстояние l , тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l}{F_1} & l \\ -\frac{F_1+F_2-l}{F_1F_2} & 1 - \frac{l}{F_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - P_1 & l \\ P_1 + P_2 - P_1P_2l & 1 - P_2 \end{pmatrix}.$$

Давайте считать $1/F = (n-1)G$. Хочется избавиться от зависимости от n . Тогда

$$l = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(n-1)G_1} + \frac{1}{(n-1)G_2} \right) = \frac{F_1 + F_2}{2}.$$

Дальше хочется поговорить про отражения, про периодические системы, волноводы, резонаторы, лазеры.