Общие сведения

Для кинематики полезно было бы ввести следующие величины

$$\gamma(v) = \gamma_v = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \qquad \beta(v) = \beta_v = \frac{v}{c}, \qquad \Lambda(v, OX) = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\beta_v\gamma_v & 0 & 0 \\ -\beta_v\gamma_v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где Λ – преобразование Лоренца, для которого, кстати, верно, что $\Lambda^{-1}(v) = \Lambda(-v)$.

Также преобразование Лоренца можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \boldsymbol{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\boldsymbol{\beta}_v\gamma \\ -\boldsymbol{\beta}_v\gamma & \mathbb{E} + \frac{\gamma_v - 1}{\beta_v^2}\boldsymbol{\beta}\otimes\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

T1

Для начала запишем преобразование Лоренца для системы K':

$$t' = \gamma_{v_x}\left(t - \beta_x \frac{x}{c}\right), \qquad x' = \gamma_{v_x}(x - v_x t), \qquad y' = y, \qquad z' = z.$$

Аналогично перейдём к системе K'', выразив компоненты через их представление в системе K'

$$t'' = \gamma_{v'_y}\left(t' - \beta_{v'_y}\frac{y'}{c}\right), \qquad x'' = x', \qquad y'' = \gamma_{v'_y}(y' - v'_y t), \qquad z'' = z'.$$

Центр системы K'' неподвижен в координатах системы K'', соответственно

$$x'' = y'' = z'' = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x_{K''} = v_x t \\ y_{K''} = \gamma_{v_x}^{-1} v'_y t \end{cases},$$

что соответствет $(x, y)[t]$ для координат центра системы K'' в системе K.

Теперь найдём движение центра системы K в системе K'', подставив значения $x = y = 0$,

$$x''_K = -\gamma_{v_x} v_x t, \qquad y''_K = -\gamma_{v'_y}\gamma_{v_x} v'_y t, \qquad t''_K = -\gamma_{v'_y}\gamma_{v_x} t.$$

Можно заметить, что

$$\gamma_{v'_y}\gamma_{v_x} \approx \gamma\left(\sqrt{v_x^2 + v_y'^2}\right) = \gamma_v, \qquad \beta_{v_x}, \beta_{v'_y} \ll 1.$$

Теперь нас интересует направление прямой $\parallel \boldsymbol{v}$ – движения K'' в системе K:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\dot{y}_{K''}}{\dot{x}_{K''}} = \gamma_{v_x}^{-1}\frac{v'_y}{v_x}.$$

Угол же между осью x'' и движением центра системы K может быть найден, как

$$\operatorname{tg}(\theta + \varphi) = \frac{dy''_K}{dt''}\bigg/\frac{dx''_K}{dt''} = \gamma_{v'_y}\frac{v'_y}{v_x} = \gamma_{v_x}\gamma_{v'_y}\operatorname{tg}\varphi \approx \gamma_v \operatorname{tg}\varphi.$$

С другой стороны, раскрывая тангенс суммы, находим

$$\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\varphi = \gamma_v \operatorname{tg}\varphi(1 - \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\theta), \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{(\gamma_v - 1)\operatorname{tg}\varphi}{1 + \gamma_v\operatorname{tg}^2\varphi}.$$

T2

Аппроксимируем движение нИСО в моменты времени t и $t + dt$ сопутствующими ИСО K' и K''. Пусть K – лабороторная система отсчета, K' – сопутствующая ИСО $\boldsymbol{v} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{v}(t)$, а K'' – сопутствующая ИСО движущаяся относительно K со скоростью $\boldsymbol{v}(t + dt) = \boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$. Далее для удобства будем считать, что K'' движется относительно K' со скоростью $d\boldsymbol{v}'$.

Проверим, что последовательное применеие $\Lambda(d\boldsymbol{v}') \cdot \Lambda(\boldsymbol{v})$ эквивалентно $R \cdot \Lambda(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v})$, где R – вращение в $\{xyz\}$.

Пусть ось $x \parallel \boldsymbol{v}$, ось y выберем так, чтобы $d\boldsymbol{v} \in \{Oxy\}$. Теперь, согласно (0.1), считая $|\boldsymbol{v}| = \beta_1$ можем записать

$$\Lambda(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 & 0 & 0 \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Lambda(d\boldsymbol{v}) =$$

$$x(t) = x(\tau, T), \qquad \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}x(\tau, T) = \frac{dT}{dt}\frac{dx}{dT} + \frac{d\tau}{dt}\frac{dx}{d\tau} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt} = \frac{dT}{dt}\frac{d}{dT} + \frac{d\tau}{dt}\frac{d}{d\tau}$$