Заметки курса «Гармонический анализ»

Источник: an_explanations.pdf
Лектор: Карасёв Р.Н.

Восторженные читатели: Хоружий Кирилл
Примак Евгений

От: *10 июня 2021 г.*

Содержание

1 Банаховы пространства

1.1 Эпсилон-сети, предкомпактность и вполне ограниченность

Def 1.1. Для топологического пространства M, его $X \subseteq M$ — **предкомпактным**, если $\overline{X}$ – компактно.

Def 1.2. $X \subseteq M$ называется **вполне ограниченным**, если $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \subseteq X$ – конечная ε-сеть. (равносильно и утверждение с $N \subset X$) Или $\forall \varepsilon > 0$, X покрывается конченым набором шаров с центрами в X и радиусами ε.

Thr 1.3. *Для полного метрического пространства M, его $X \subseteq M$ – компактно $\Longleftrightarrow$ X – вполне ограничено.*

1.2 Теорема Арцела-Асколи

Def 1.4. Множество функций $X \subset C(K)$(над метрическим компактом) **равностепенно непрерывно** , если
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \colon \forall f \in X\, \forall x, y \in K,\ \rho(x, y) < \delta \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
Если все функции ещё и L-липшецивы, то $|f(x) - f(y)| = L\rho(x, y)$.

Def 1.5. **Модуль непрерывности** липшецивых функций:
$$\omega_X(\delta) = \sup \{|f(x) - f(y)| \mid f \in X,\ \rho(x, y) < \delta\}.$$
И тогда, X – равностепенно непрерывно $\Longleftrightarrow \omega_X(\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$.

Thr 1.6 (Арцела-Асколи)**.** *Множество $X \subset C(K)$ предкомпактно $\Longleftrightarrow$ X равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно.*

2 Гильбертовы пространства

Def 2.1. Если норма в банаховом E порождается +определённым $||x|| = \sqrt{(x, x)}$, то E — **гильбертово**.

Thr 2.2 (Неравнество Коши-Буняковского)**.** $|(x, y)| \leqslant ||x|| \cdot ||y||$

$$(ax+by, ax+by) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad |a|^2||x||^2 + a\bar{b}(x, y) + b\bar{a}\overline{(x, y)} + |b|^2||y||^2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad |a|^2||x||^2 + 2\operatorname{Re} a\bar{b}(x, y) + |b|^2||y||^2 \geqslant 0$$

Thr 2.3. *Вещественное банахаво E – гильбертово* ***тогда и только тогда****, когда $\forall x, y \in E$:*
$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$

2.1 Полнота и замкнутость ортонормированной системы в гильбертовом пр-ве

Def 2.4. Последовательность векторов (φ_k) — **полная система векторов** в банаховом E, если $\overline{\langle \varphi_k \rangle} = E$. Другими словами $\forall x \in E$ и $\forall > 0$ найдется конечная $a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n$ такая, что $||x - a_1\varphi_1 - \cdots - a_n\varphi_n|| < \varepsilon$.