Билеты курса «Гармонический анализ»

Источник: an_explanations.pdf
Лектор: Карасёв Р.Н.

Восторженные читатели: Хоружий Кирилл
Примак Евгений

От: *10 июня 2021 г.*

Содержание

1 Приближение функций равномерно, в среднем и среднеквадратичном

1.1 Приближение функций кусочно-линейными и кусочно-линейных многочленами

Lem 1.1. *Для непрерывной с компактным носителем* $f(x)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *и* $t_n \to 0$ *при* $n\to\infty$*, последовательность* $f_n(x) = f(x+t_n) \underset{X}{\rightrightarrows} f$.

Lem 1.2. $f(x)=\sqrt{x}$ *можно равномерно приблизить многочленами на любом отрезке* $[0,a]$.

Lem 1.3. $f(x)=|x|$ *можно равномерно приблизить многочленами на любом отрезке* $[-a,a]$.

Thr 1.4. *Всякую непрерывную кусочно-линейную на отрезке* $[a,b]$ *функцию можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленом.*

Lem 1.5. *Для непрерывной* $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$*:* $\sum\limits_{k=0}^{m} f(k/m)\varphi_{1/m}(x-k/m) \underset{X}{\rightrightarrows} f$.

Thr 1.6. *Всякую* $f\colon [a_1,b_1]\times[a_n,b_n]\to\mathbb{R}$ *можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленом.*

1.2 Приближение 2π-периодических функций тригонометрическими многочленами

Thr 1.7 (теорема Вейерштрасса)**.** *Всякую непрерывную* 2π*-периодичную* $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *можно сколько угодно точно равномерно приблизить* $T(x) = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))$.

1.3 * Алгебры непрерывных на компактах функций. Теорема Стоуна-Вейерштрасса

Def 1.8. $\mathcal{A}\subseteq C(x)$(– непрерывные на компакте функции) называется *алгеброй*, если она содержит константы ($\mathbb{R}\subseteq\mathcal{A}$) и топологически "замкнута"относительно операций $+$ и $\bullet$.

Def 1.9. *Алгебра разделяющая точки* — $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $x=y\in X$, $\exists f\in A$ такая что $f(x)=a$, а $f(y)=b$.

Thr 1.10 (теорема Стоуна-Вейерштрасса)**.** *Если* X*-метрический компакт, а алгебра* $\mathcal{A}\in C(x)$ *разделяет точки,* ***то*** $\forall f\in C(x)$ *можно сколь угодно точно равномерно приблизить функциями из* $\mathcal{A}$.

1.4 Пространства L_p. Неравенства Гёльдера и Минковского.

Неравенства Гёльдера и Минковского

Def 1.11. *Абсолютно интегрирумыми функциями* на измеримом $X\subseteq\mathbb{R}^n$ называют $f\colon X\mapsto\mathbb{R}$ с конечным интегралом $\int_X |f(x)|\,dx$. *Расстоянием*[1] между функциями f и g будем считать $\int_X |f(x)-g(x)|\,dx$.

Def 1.12. Обозначим через $L_1(X)$ факторпространство линейного пространства абсолютно интегрируемых функций по его линейному подпространству почти всюду равных нулю функций. То есть функции на 0 расстоянии считаем равными. *Нормой* будем считать

$$\|f\|_1 = \int_X |f(x)|\,dx.$$

Def 1.13. Для измеримого по Лебегу $X\subset\mathbb{R}^n$ и числа $p\geqslant 1$ *факторпространство* измеримых по Лебегу функций на X с конечной (полу)нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p\,dx\right)^{1/p},$$

по модулю функций равных нулю почти всюду, назовём $L_p(X)$.

Очень хорошим, симметричным, актуальным для описания квантовой механики оказывается L_2 пространство, на котором естественно вводить скалярное произведение, его порождающее.

[1] В силу неравенства $|f(x)-g(x)|\leqslant|f(x)|+|g(x)|$ расстояние конечно.

Def 1.14. В комплексном случае норма L_2 порождена *скалярным произведением*

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx \qquad \longrightarrow \qquad \|f\|_2 = \sqrt{(f,f)}.$$

Thr 1.15 (Неравенство Гёльдера)**.** *Возьмём* p, $q > 1$ *такие, что* $1/p + 1/q = 1$. *Пусть* $f \in L_p(X)$ *и* $g \in L_q(X)$. *Тогда*

$$\int_X |fg|\,dx \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

$\triangle$. Для доказательства достаточно проинтегрировать неравенство вида

$$|fg| \leqslant \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}.$$

Осталось получить само неравенство. $\square$

Con 1.16. *Для измеримых функций и чисел* p, $q > 0$, *таких что* $1/p + 1/q = 1$, *имеет место формула*

$$\|f\|_p = \sup\left\{ \int_X fg\,dx \;\middle|\; \|g\|_q \leqslant 1 \right\}. \tag{1.1}$$

$\triangle$. По неравенству Гёльдера норма f не менее супремума правой части (?), более того равенство достигается при выборе

$$g(x) = \frac{\operatorname{sign} f(x)|f(x)|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}}.$$

$\square$

Def 1.17. Функция $f\colon V \mapsto \mathbb{R}$ на векторном пространство называется выпуклой, если для любых x, $y \in V$ и любого $t \in (0,1)$ имеет место неравенство

$$f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y).$$

Функция называется *строго выпуклой*, если неравенство строгое $\forall x \neq y$ и $t \in (0,1)$.

Lem 1.18. *Если в семействе функций* $f_\alpha\colon V \mapsto \mathbb{R}$, $\alpha \in A$, *все функции выпуклые, то*

$$f(x) = \sup\{f_\alpha(x) \mid \alpha \in A\}$$

тоже выпуклая[2].

Thr 1.19 (Неравенство Минковского)**.** *Для функций* f, $g \in L_p$ *при* $p \geqslant 1$

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

1.5 Полнота пространства L_p

Полнота пространства интегрируемых функций

Далее в разделе всегда предполагается суммирование по k от 1 до ∞. Глобально можно сказать, что `в нормированном пространстве вопрос полноты сводится в вопросу сходимости рядов`, у которых сходятся суммы норм.

Def 1.20. Назовём последовательность (f_n) *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \colon \forall n, m \geqslant N_\varepsilon\ \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

Lem 1.21. *Пусть у последовательности функций* (u_k) *из* $L_p(X)$ *сумма* $\sum \|u_k\|_p$ *оказалась конечной. Тогда* $S(x) = \sum u_k(x)$ *определена для почти всех* x *и* $\|S\|_p \leqslant \sum \|u_k\|_p$.

Lem 1.22. *Пусть у последовательности функций* (u_k) *из* $L_p(x)$ *сумма* $\sum \|u_k\|_p$ *оказалась конечной. Тогда* $S(x) = \sum u_k(x)$ *определена для почти всех* x *и* $S = \sum u_k$ *в смысле сходимости в пространстве* $L_p(X)$.

Thr 1.23. *Пространство* $L_p(X)$ *полно.*

Вообще сходимость в $L_p(X)$ может не означать поточечной сходимости ни в одной точке.

[2] Если разрешить в определении выпуклости значение $+\infty$.

1.6 Приближение функций в L_p ступенчатыми и бесконечно гладкими

Def 1.24. Назовём *элементарно ступенчатыми* функции с конечным числом ступенек, в основании которых лежат элементарные множества.

Thr 1.25. *Можно сколь угодно близко по норме* $\|\cdot\|_p$ *приблизить элементарно ступенчатой* $\forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)$.

Thr 1.26. *Всякую* $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ *можно сколь угодно близко по норме* $\|\cdot\|_p$ *приблизить бесконечно дифференцируемой функцией с компактным носителем.*