Заметки курса «Гармонический анализ»

Источник: an_explanations.pdf
Лектор: Карасёв Р.Н.

Восторженные читатели: Хоружий Кирилл
Примак Евгений

От: *18 марта 2021 г.*

Содержание

1 Приближение функций

1.3 Пространство интегрируемых функций

Неравенства Гёльдера и Минковского

Def 1.1. *Абсолютно интегрирумыми функциями* на измеримом $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называют $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ с конечным интегралом $\int_X |f(x)|\,dx$. *Расстоянием*[1] между функциями f и g будем считать $\int_X |f(x) - g(x)|\,dx$.

Def 1.2. Обозначим через $L_1(X)$ факторпространство линейного пространства абсолютно интегрируемых функций по его линейному подпространству почти всюду равных нулю функций. То есть функции на 0 расстоянии считаем равными. *Нормой* будем считать

$$\|f\|_1 = \int_X |f(x)|\,dx.$$

Def 1.3. Для измеримого по Лебегу $X \subset \mathbb{R}^n$ и числа $p \geqslant 1$ *факторпространство* измеримых по Лебегу функций на X с конечной (полу)нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p\,dx\right)^{1/p},$$

по модулю функций равных нулю почти всюду, назовём $L_p(X)$.

`Очень хорошим, симметричным, актуальным для описания квантовой механики оказывается` L_2 `пространство, на котором естественно вводить скалярное произведение, его порождающее.`

Def 1.4. В комплексном случае норма L_2 порождена *скалярным произведением*

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx \qquad \longrightarrow \qquad \|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}.$$

Thr 1.5 (Неравенство Гёльдера)**.** *Возьмём $p,\, q > 1$ такие, что $1/p + 1/q = 1$. Пусть $f \in L_p(X)$ и $g \in L_q(X)$. Тогда*

$$\int_X |fg|\,dx \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

$\triangle$. Для доказательства достаточно проинтегрировать неравенство вида

$$|fg| \leqslant \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}.$$

Осталось получить само неравенство. $\square$

Con 1.6. *Для измеримых функций и чисел $p,\, q > 0$, таких что $1/p + 1/q = 1$, имеет место формула*

$$\|f\|_p = \sup\left\{\int_X fg\,dx \;\middle|\; \|g\|_q \leqslant 1\right\}. \tag{1.1}$$

$\triangle$. По неравенству Гёльдера норма f не менее супремума правой части (?), более того равенство достигается при выборе

$$g(x) = \frac{\operatorname{sign} f(x)|f(x)|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}}.$$

$\square$

Def 1.7. Функция $f\colon V \mapsto \mathbb{R}$ на векторном пространство называется выпуклой, если для любых $x,\, y \in V$ и любого $t \in (0, 1)$ имеет место неравенство

$$f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y).$$

Функция называется *строго выпуклой*, если неравенство строгое $\forall x \neq y$ и $t \in (0, 1)$.

Lem 1.8. *Если в семействе функций $f_\alpha\colon V \mapsto \mathbb{R}$, $\alpha \in A$, все функции выпуклые, то*

$$f(x) = \sup\{f_\alpha(x) \mid \alpha \in A\}$$

тоже выпуклая[2].

Thr 1.9 (Неравенство Минковского)**.** *Для функций $f,\, g \in L_p$ при $p \geqslant 1$*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

[1] В силу неравенства $|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|$ расстояние конечно.
[2] Если разрешить в определении выпуклости значение $+\infty$.

Полнота пространства интегрируемых функций

Далее в разделе всегда предполагается суммирование по k от 1 до ∞. Глобально можно сказать, что `в нормированном пространстве вопрос полноты сводится в вопросу сходимости рядов`, у которых сходятся суммы норм.

Def 1.10. Назовём последовательность (f_n) *фундаментальной*, если
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \colon \forall n, m \geqslant N_\varepsilon\ \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

Lem 1.11. *Пусть у последовательности функций (u_k) из $L_p(X)$ сумма $\sum \|u_k\|_p$ оказалась конечной. Тогда $S(x) = \sum u_k(x)$ определена для почти всех x и $\|S\|_p \leqslant \sum \|u_k\|_p$.*

Lem 1.12. *Пусть у последовательности функций (u_k) из $L_p(x)$ сумма $\sum \|u_k\|_p$ оказалась конечной. Тогда $S(x) = \sum u_k(x)$ определена для почти всех x и $S = \sum u_k$ в смысле сходимости в пространстве $L_p(X)$.*

Thr 1.13. *Пространство $L_p(X)$ полно.*

Вообще сходимость в $L_p(X)$ может не означать поточечной сходимости ни в одной точке.

1.4 Приближение функций ступенчатыми и бесконечно гладкими

Def 1.14. Назовём *элементарно ступенчатыми* функции с конечным числом ступенек, в основании которых лежат элементарные множества.

Thr 1.15. *Можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить элементарно ступенчатой $\forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)$.*

Thr 1.16. *Всякую $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить бесконечно дифференцируемой функцией с компактным носителем.*

Мне кажется, было бы полезно вернуться к разделу с приближением функций, и дописать в начало.

2 Ограниченная вариация, абсолютная непрерывность и осцилляция

2.5 Функции ограниченной вариации

Def 2.1. Функция f на промежутке I имеет *ограниченную вариацию*, если для любых $x_0 < x_1 < \ldots M x_N \in I$ (в любом количестве)
$$|f(x_0) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \ldots + |f(x_{N-1}) - f(x_N)| \leqslant M,$$
для некоторой константы M. Наименьшую константу M в этом неравенстве назовём *вариацией* функции f равную $\|f\|_B$, что задаёт *полунорму*, вида
$$\|f\|_B = \sup\left\{ |f(x_0) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \ldots + |f(x_{N-1}) - f(x_N)| \;\middle|\; N \in \mathbb{N}, a \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant b \right\}$$

Важно что вариация функции аддитивна и выпукла, в смысле $\|f+g\|_B \leqslant \|f\|_B + \|g\|_B$.

Lem 2.2. *Функцию ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$ можно представить в виде суммы двух функций $f = u + d$, одна из которых возрастает, а другая убывает. При этом $\|f\|_B = \|u\|_B + \|d\|_B$ и если f была непрерывной, то u, d тоже будут непрерывны.*

Thr 2.3 (Вторая теорема о среднем). *Если f интегрируема по Лебегу с конечным интегралом, а g монотонна и ограниченна на $[a, b]$, то при некотором $\nu \in [a, b]$*
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a+0)\int_a^\nu f(x)\,dx + g(b-0)\int_\nu^b f(x)\,dx.$$

Таким образом приходим к утверждению о том, что `функции ограниченной вариации допускают оценку интеграла своего произведения с другой функцией`
$$|\int_a^b f(x)g(x)\,dx| \leqslant (|g(a+0)| + \|g\|_B)\cdot \sup\left\{ \left|\int_\nu^b f(x)\,dx\right| \text{ при } \nu \in [a, b] \right\}.$$

2.6 Абсолютно непрерывные функции и обобщенная формула Ньютона-Лейбница

Для формулы Ньютона-Лейбница условие липшицевости можно ослабить до следующего:

Def 2.4. Функция F на промежутке I *абсолютно непрерывна* , если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$, такое что $\forall\, x_1 \leqslant y_1 \leqslant x_2 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant x_N \leqslant y_N \in I$ из неравенства

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \ldots + |x_N - y_N| \leqslant \delta$$

следует, что

$$|F(x_1) - F(y_1)| + |F(x_2) - F(y_2)| + \ldots + |F(x_N) - F(y_N)| \leqslant \varepsilon.$$

Говоря неформально, сумма модулей приращений функции на системе непересекающихся отрезков должна стремиться к нулю при суммарной длине системы, стремящейся к нулю.

Lem 2.5.

Thr 2.6. *Для некоторой $f \in L_1[a, b]$, всякая обобщенная первообразная F*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

является абсолютно непрерывной и её производная почти всюду существует и совпадает с f.

Lem 2.7. *Абсолютно непрерывная на отрезке функция f имеет на нём ограниченную вариацию. Также на отрезке существует разложение f в сумму двух монотонных абсолютно непрерывных функций.*

Thr 2.8. *Абсолютно непрерывная функция $F\colon [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ почти всюду имеет производную и является обобщенной первообразной своей производной с выполнением формулы Ньютона-Лейбница*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\, dt.$$

Легко показать через… ух, ну по **лемме Безиковича**, посмотреть можно здесь.

Con 2.9 (Обобщенное интегрирование по частям)**.** *Если $f \in L_1[a, b]$, а g абсолютно непрерывна, то верна формула интегрирования по частям*

$$\int_a^b fg\, dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\, dx,$$

где $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.

Lem 2.10. *Функция $f\colon [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда она может быть сколь угодно близко в B-норме приближена кусочно-линейными функциями.*

А дальше про борелевские меры на отрезках и интеграл Лебега–Стилтьеса.

2.7 (до 2.9) Осцилляции и равномерные осцилляции

Def 2.11. Определим *коэффициент Фурье* (с точностью до умножения на константу)

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\, dx.$$

Thr 2.12. *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то $|c_f(y)| \leqslant \|f\|_1$ и $c_f(y)$ непрерывно зависит от y.*

Thr 2.13 (Лемма об осцилляции)**.** *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то выражение*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\, dx$$

стремится к нулю при $y \to \infty$.

Lem 2.14. *Еси производная $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и производные до k-й включительно*[3] *находятся в $L_1(\mathbb{R})$, то*

$$c_f(y) = o\left(\frac{1}{y^k}\right), \qquad t \to \infty.$$

[3] Для k-й достаточно существования почти всюду.

Thr 2.15. *Если $f \in L-1(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, то выражение*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx$$

оказывается $O(1/y)$ при $y \to \infty$.

Con 2.16. *Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ имеет абсолютно непрерывную $(k-1)$-ую производную, производные до k-й включительно находятся в $L_1(\mathbb{R})$, а $f^{(k)}$ (возможно, после изменения на множестве меры нуль) имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, тогда*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx = O\left(\frac{1}{y^{k+1}}\right), \qquad y \to \infty.$$

Thr 2.17 (Лемма о равномерной осцилляции)**.** *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то выражение*

$$c(y,\xi,\eta) = \int_{\xi}^{\eta} f(x)e^{-ixy}\,dx$$

стремится к нулю при $y \to \infty$ равномерно по ξ, η.

Периодические функции

Def 2.18. Для 2π-*периодической функции* $f(x+2\pi) \equiv f(x)$ *коэффициенты Фурье* запишутся, как

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{(f, e^{inx})}{\|e^{inx}\|_2^2},$$

где последнее выражение понимается в смысле скалярного произведения и нормы в $L_2[-\pi,\pi]$.

Thr 2.19. *Пусть функция f имеет период 2π и абсолютно непрерывную $(k-1)$-ую производную, причём $f^(k)$ (возможно, после изменения на множестве меры нуль) имеет ограниченную вариацию на $[-\pi,\pi]$, тогда*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \qquad n \to \infty.$$

Lem 2.20. *Усли у 2π-периодической функции ограниченной вариации есть ненулевое конечное число разрывов, и она кусочно абсолютно непрерывна, то оценка $O(1/n)$ для коэффициентов Фурье неулучшаема.*

Thr 2.21. *Пусть функция f непрерывна и 2π-периодическая, тогда для коэффициента Фурье имеется оценка*

$$c_n = O(\omega_f(\pi/n)),$$

где ω_f – модуль непрерывности f.

3 Ряд Фурье в пространстве L_2

Thr 3.1 (Теорема Вейерштрасса для тригонометрических многочленов)**.** *Всякую непрерывную на $[-\pi,\pi]$ функцию f, для которой $f(-\pi) = f(\pi)$, можно сколь угодно близко равномерно приблизить тригонометрическими многочленами вида*

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Thr 3.2 (Теорема Стоуна-Вейерштрасса)**.** *Пусть у нас зафиксирован компакт K и дана алгебра непрерывных функций $\mathcal{A}$ на этом компакте, которая разделяет точки, то есть для любых $x \neq y \in K$ найдётся $f \in \mathcal{A}$, такая что $f(x) \neq f(y)$. Тогда Всякую непрерывную на K функцию можно сколь угодно близко равномерно приблизить функциями из $\mathcal{A}$.*

Вспомнить про $\|f\|_C$. Равномерное приближение является приближением по норме L_2, так как на отрезке $[-\pi,\pi]$ имеется неравенство $\|f\|_2 \leqslant \sqrt{2\pi}\|f\|_C$. В случае L_2 нормы определим коэффициенты, которыми собираемся приближать.

Thr 3.3 (Оптимальность коэффициентов Фурье)**.** *Для всякой $f \in L_2[-\pi,\pi]$ и данного числа n лучшее по норме L_2 приближение f тригонометрическим многочленом $\sum_{-n}^{+n} c_k e^{ikx}$ дают коэффициенты Фурье*

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,dx.$$

Lem 3.4 (неравенство Бесселя). *Из доказательства предыдущей теоремы, можем получить, что*

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2, \qquad \Rightarrow \qquad \|f\|_2^2 \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2, \qquad \overset{\text{trig}}{\Rightarrow} \qquad \|f\|_2^2 \geqslant 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.$$

Точно ли до n?

Lem 3.5 (Представление действительнозначной функции). *Для действительнозначной функции представление в виде ряда Фурье перепишется в виде*

$$f = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx,$$

для $k \geqslant 1$. Неравенство Бесселя тогда запишется так:

$$\|f\|_2^2 \geqslant \frac{\pi}{2} |a_0|^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

Thr 3.6 (Сходимость ряда Фурье в среднеквадратичном). *Для вской комплекснозначной $f \in L_2[-\pi, \pi]$*

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

в смысле сходимости суммы в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$, а также выполняется равенство Парсеваля

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Пока мы не доказали, что в полученную формулу можно подставить хоть одно конкретное значение x. Тот факт, что ряд Фурье функции из $L_2[-\pi, \pi]$ на самом деле сходится к этой функции почти всюду, был доказан Л. Карлесоном (1966), а до этого был известен как гипотеза Лузина.

4 Ряд Фурье и его сходимость

Def 4.1. Обозначим *частичную сумму* тригонометрического ряда Фурье для 2π-периодической функции f как

$$T_n(f, x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}.$$

Lem 4.2. *Для n-й частичной суммы ряда Фурье 2π-периодической функции имеет место формула в виде свёртки*

$$T_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) \, dT,$$

с ядром Дирихле

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} t\right)}.$$

Lem 4.3 (Равномерная ограниченность интегралов от ядра Дирихле). *Существует такая константа C, что*

$$\left| \int_a^b D_n(t) \, dt \right| \leqslant C$$

для любых $a, b \in [-\pi, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$.

Thr 4.4 (Равномерный принцип локализации). *Запищем для $\delta \in (0, \pi)$*

$$T_n(f, x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) \, D_n(t) \, dt = \int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t) - f(x)) \, D_n(t) \, dt + \int_M (f(x+t) - f(x)) D_n(t) \, dt,$$

где $M = \{t \mid \delta \leqslant |t| \leqslant \pi\}$. Если $f \in L_1[-\pi, \pi]$, то

$$\int_M (f(x+t) - f(x)) \, D_n(t) \, dt \;\to\; 0, \qquad n \to \infty.$$

Если f ограничена на отрезке $[a, b]$, то это выражение стремится к нулю равномерно по $x \in [a, b]$.

Def 4.5. Функция f называется гёльдеровой степени $\alpha > 0$, если для любых x, y из области определения
$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha$$
с некоторой константой C.

Thr 4.6 (Признак Липшица сходимости ряда Фурье)**.** *Для абсолютно интегрируемой 2π-периодической функции, которая является гёльдеровой с некоторыми C, $\alpha > 0$ на интервале $(A, B) \supset [a, b]$*
$$T_n(f, x) \to f(x)$$
равномерно $x \in [a, b]$ при $n \to \infty$.

Thr 4.7 (Признак Дирихле сходимости ряда Фурье)**.** *Для абсолютно интегрируемой 2π-периодической функции, которая является непрерывной с ограниченной вариацией на интервале $(A, B) \supset [a, b]$*
$$T_n(f, x) \to f(x)$$
равномерно по $x \in [a, b]$ при $n \to \infty$.

Далее несколько лемм, сформулированных в виде задач, а именно признак Дирихле сходимости ряда Фурье в точке, признак Липшица сходимости ряда Фурье в точке, признак Дини сходимости ряда Фурье в точке. Ага, это 13 тема. А потом будут темы 14 - 17.

Интегрирование ряда Фурье

Thr 4.8 (Почленное интегрирование ряда Фурье)**.** *Пусть $f \in L_1[-\pi, \pi]$ соответствует не обязательно сходящийся ряд Фурье, записанный в действительном виде как*
$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + B_n \sin nx).$$
Тогда ряд Фурье можно почленно интегрировать, то есть выполняется формула
$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{2} a_0 (b-a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n \sin nx}{n} - \frac{b_n \cos nx}{n} \right) \Big|_a^b.$$

Lem 4.9. *Разложим $\cos ax$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ при $a \notin \mathbb{Z}$ в ряд Фурье. Легко получить, что*
$$\operatorname{ctg} x = v.p. \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - \pi k}$$
$$\frac{1}{\sin x} = v.p. \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x - \pi k}$$
$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2} \right).$$

Lem 4.10. *Формула дополнения для бета-функции про $p \in (0, 1)$*
$$B(p, 1-p) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{-p}\, dt = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

Lem 4.11. *Для $0 < |x| < \pi$ верно, что*
$$\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x = \sum_{n,k \geqslant 1} \frac{2x^{2k-1}}{\pi^{2k} n^{2k}},$$
откуда можно получить значения сумм $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Суммирование тригонометрических рядов по Фейеру

Def 4.12. Определим *ядро Фейера*
$$\Phi_n(t) = \frac{D_0(t) + D_1(t) + \ldots + D_n(t)}{n+1} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \frac{n+1-|k|}{n+1} e^{ikx},$$
как усреднение ядер Дирихле. Соответствующая *сумма Фейера* будет соответствовать усреднением первых $n+1$ частичных сумм ряда Фурье,
$$S_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\xi) \Phi_n(\xi)\, d\xi = \frac{T_0(f, x) + \ldots + T_n(f, x)}{n+1}.$$

Записав

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} = \frac{1}{4\pi}\frac{\cos nt - \cos\left((n+1)t\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)},$$

и суммируя, получаем

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{4\pi}\frac{1-\cos\left((n+1)t\right)}{(n+1)\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{(n+1)\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

Thr 4.13. *Для непрерывной 2π-периодической f*

$$S_n(f,x) \rightrightarrows f(x),$$

то есть сходится равномерно.

4.1 Собственные интегралы с параметром

4.1.1 13.8(3)

Стоит следующий вопрос

$$\int_0^1 dx \int_0^1 d\alpha f(x,\alpha) - \int_0^1 d\alpha \int_0^1 dx f(x,\alpha) \stackrel{?}{=} 0.$$

Выберем в качестве $f(x,\alpha)$

$$f(x,\alpha) = \left(\frac{x^5}{\alpha^4} - \frac{2x^3}{\alpha^3}\right) e^{-x^2/\alpha}.$$

Для этого вычислим интеграл

$$g(x) = \int_0^1 d\alpha f(x,\alpha) = \int_0^1 d\alpha \left(\frac{x^5}{\alpha^4} - \frac{2x^3}{\alpha^3}\right) e^{-x^2/\alpha}$$

Теперь вполне логично сделать замену переменных

$$dt = x^2 (\frac{-1}{\alpha^2})\, d\alpha$$

и получить

$$g(x) = \int_{x^2}^{\infty} dt \left(\frac{x^3}{\alpha^2} - \frac{2x}{\alpha}\right) e^{-t}$$

который взяв по частям и получаем

$$\frac{x^3}{\alpha^2} - \frac{2x}{\alpha} = \frac{1}{x}(t^2 - 2t) \qquad \Rightarrow \qquad g(x) = \frac{1}{x}\int_{x^2}^{\infty} (t^2-2t)e^{-t}\, dt = \frac{1}{x}\left\{-t^2 e^{-t}\right\}\Big|_{x^2}^{\infty} = x^3 e^{-x^2}.$$

Идём дальше, возвращаясь к первоначальному интегрированию,

$$\int_0^1 g(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 e^{-x^2}\, d(x^2) = \frac{1}{2}\int_0^1 te^{-t}\, dt = -\frac{1}{2}(t+1)e^{-t}\big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}.$$

Теперь пойдём в другую сторону

$$h(\alpha) = \int_0^1 dx f(x,\alpha) = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{1/\alpha} (t^2-2t)e^{-t}\, dt = \frac{1}{2\alpha}\left\{-t^2 e^{-t}\right\}\Big|_0^{1/\alpha} = -\frac{1}{2\alpha^3}e^{-1/\alpha}.$$

Остается посчитать интеграл α

$$\int_0^1 h(\alpha)\, d\alpha = -\frac{1}{2}\int_1^{\infty} te^{-t}\, dt = -\frac{1}{e}.$$

4.1.2 13.14(3)

Найти $\Phi'(\alpha)$, если

$$\Phi(\alpha) = \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Тут смотрим на К3, стр 325 (7), условия которой выполняются. Остается только посчитать

$$\Phi'(\alpha) = e^{\alpha|\sin\alpha|}(-\sin\alpha) - e^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha + \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\, dx.$$

4.1.3 13.17

Есть интеграл вида

$$I(\alpha) = \int_0^b \frac{]dx}{x^2+\alpha^2}.$$

Дифференцируя его по параметру $\alpha > 0$ вычислим интграл

$$J(\alpha) = \int_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}.$$

Нужно проверить, что условия теоремы выполняются, и вообще дифференцировать можем. Тут всё хорошо, так что

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial\alpha} = \int_0^{\Lambda} dx\, \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{x^2+\alpha^2} = -2\alpha\int_0^{\Lambda}\frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2} = -2\alpha J(\alpha).$$

Таким образом приходим к
$$J(\alpha) = \frac{1}{2\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{\Lambda}{\alpha}\right) = \frac{1}{2\alpha^3}\left\{\operatorname{arctg}\frac{\Lambda}{\alpha} + \frac{\Lambda\alpha}{\Lambda^2+\alpha^2}\right\}.$$

13.18 (1)

Теперь применяя дифференцирование по параметру α, вычислить
$$I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\alpha^2 - \sin^2\varphi\right)\, d\varphi.$$
Утверждается, что **можно** дифференцировать по параметру. Ну и посчитаем тогда
$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\left(\alpha^2 - \sin^2\varphi\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{2\alpha\, d\varphi}{\alpha^2 - \sin^2\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}.$$
Таким образом находим, что
$$I(\alpha) = \pi\ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}) + C.$$
С другой стороны
$$I(\alpha) = \int_0^{\pi/2}\{2\ln\alpha + o(1)\}\, d\varphi = \pi\ln\alpha + o(1)I(\alpha) \qquad = \pi\ln\alpha + \pi\ln 2 + C + o(1).$$
при больших α. Получается, что
$$I(\alpha) = \pi\ln\left\{\frac{1}{2}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}\right)\right\}$$

4.2 Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра

Пусть $\alpha \in E$, подумаем о сходимости интгралов, зависящих от параметра
$$\int_a^\infty f(x\alpha)\, dx.$$
По определению сходится (поточечно)
$$\forall\alpha\in E \ \ \forall\varepsilon>0 \ \ \exists\delta[\varepsilon,\alpha]>a \ \ \forall\xi>\delta[\varepsilon,\alpha] \quad \left|\int_\xi^\infty f(x,\alpha)\, dx\right| < \varepsilon.$$
В случае же равномерной сходимости
$$\forall\varepsilon>0 \ \ \exists\delta(\varepsilon)>a \ \ \forall\xi>\delta(\varepsilon) \quad \left|\int_\xi^\infty f(x,\alpha)\, dx\right| < \varepsilon.$$

4.2.1 14.1(1)

По признаку Вейерштрассе $x^\alpha \geqslant x^{\alpha_0}$, если $x>1$, $\alpha>\alpha_0>1$
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \leqslant \int_1^\infty \frac{dx}{x^{\alpha_0}} \quad \Rightarrow \quad M(x) = \frac{1}{x^{\alpha_0}}.$$
что соответствует сходимости. Аналогично 14.1(2).

4.3 Дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов

T2

Вычислим интеграл Дирихле
$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\, dx$$
Пусть
$$\Phi(\alpha,\beta) = \int_0^\infty e^{-\beta x}\frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx,$$
что называют smooth cut of.
$$\Phi'_\alpha(\alpha,\beta) = \int_0^\infty e^{-\beta x}\cos(\alpha x)\, dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2},$$

по правилу Лейбница (см. теормин). Теперь, интегрируя α на отрезке $[0, \alpha]$ находим

$$\Phi(\alpha, \beta) - \Phi(0, \beta) = \beta \int_0^\alpha \frac{dt}{t^2 + \beta^2} = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} \xrightarrow{?} I(\alpha).$$

Понятно, что $I(\alpha) = -I(\alpha)$, так что далее считаем $\alpha > 0$. Имеем правно рассмотреть $\beta \in [0, 1]$.

Тогда рассмотрим предел

$$\lim_{\beta \to +0} \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx = I(\alpha) = \lim_{\beta \to +0} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом для произвольного α верно, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(\alpha). \tag{4.1}$$

15.1(1)

Теперь хочется посчитать

$$\int_0^{+\infty} \left(\cos^(ax) - \cos^2(bx)\right) \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (\cos(2ax) - \cos(2bx)) \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a}.$$

где уже можем выбрать $\cos(2ax) = f(ax)$.

15.1(2)

Теперь найдём

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{-ax^2} - e^{-bx^2}\right) \frac{dx}{x} = \ln \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a},$$

15.1(4)

На этот раз наш интеграл

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x}\, dx = \Big/ \ln \frac{1}{x} = t \Big/ = \int_\infty^0 \frac{dt}{t} e^{-t}(e^{-at} - e^{-bt}) = \int_0^\infty \left(e^{-(b+1)t} - e^{-(a+1)t}\right) \frac{dt}{t} = \ln \frac{a+1}{b+1}$$

15.3(2)

Интеграл

$$\int_0^\infty \sin x \cos^x \frac{dx}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} \sin(x) \frac{1}{2} (1 + \cos(2x)) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin x \cos 2x}{x}\, dx,$$

где уже хочется подставить раскрытый $\sin(3x)$:

$$\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin(3x)}{x}\, dx - \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

15.4(3)

Есть интграл вида

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(\alpha x)}{x^2}\, dx.$$

...

Теперь можем посчитать

$$I'_\alpha(\alpha) = \int_0^{+\infty} 4 \sin^2(\alpha x) \cos(\alpha x) \frac{dx}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} \left(\frac{1}{4} \sin(2x\alpha) - \frac{1}{8} \sin(4x\alpha)\right) = \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \alpha,$$

что верно $\forall \alpha$.

Возвращаясь к интегралу, находим, что

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{4} |\alpha| + 0,$$

так как $I(0) = 0$.

Интерирование по частям

Воообще
$$\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)g'_x(x,\alpha)\,dx = f(x,\alpha)g(x,\alpha)\Big|_a^{\infty} - \int_a^{+\infty} f'_x(x,\alpha)g(x,\alpha)\,dx,$$
работает, когда $f, g \in C^1$ по x и любые два из трёх написанных пределов существуют.

15.5(6)

Интеграл
$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sin^3(x)\cos(\alpha x)\frac{dx}{x^3}$$
хотелось бы вычислить.

Интегрируя по частям
$$\sin^3 x\cos(\alpha x) = \frac{3}{8}\left(\sin(\alpha+1)x - \sin(\alpha-1)x\right) - \frac{1}{8}\left(\sin(\alpha+3)x - \sin(\alpha_3)x\right),$$
для $\alpha > 3$. В общем приходим к выражению
$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sin^3(x)\cos(\alpha x)\frac{dx}{x^3} = \int_0^{\infty} \sin^3 x\cos(\alpha x)\,d\left(\frac{-1}{2x^2}\right) =$$
$$= \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\sin^3 x\cos\alpha x\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,d(\sin^3 x\cos\alpha x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\sin^3(x)\cos(\alpha x)\right)'_x f\left(-\frac{1}{x}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2x}\left(\sin^3 x\cos(\alpha x)\right)'_x\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\,d\left(\sin^3 x\cos\alpha x\right)'_x =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x}\left(\frac{3}{8}\left[(\alpha+1)^2\sin(\alpha+1)x - (\alpha-1)2\sin(\alpha-1)x\right] - \frac{1}{8}\left[(\alpha+3)^2\sin(\alpha+3)x - (\alpha-3)^2\sin(\alpha-3)x\right]\right) =$$
$$= -\frac{\pi}{4}\left\{\frac{3}{8}(\alpha+1)^2 - \frac{3}{8}(\alpha-1)^2 - \frac{1}{8}(\alpha+3)^2 + \frac{1}{8}(\alpha-3)^2\right\} = 0$$

15.6(5)

При выполнении всех условий о дифференцирование интеграла по параметру, для интеграла
$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$
может быть так посчитан.

Действительно,
$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{1+(\alpha x)^2} = \int_0^1 dx\left[\sqrt{1-x^2}(1+(\alpha x)^2)\right]^{-1} =$$
$$= \Big/ x = \cos t,\ dx = -\sin t\,dt \Big/ = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}.$$
Тогда $I(\alpha)$
$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\int\frac{d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} + C - \frac{\pi}{2}\ln\left|\alpha + \sqrt{\alpha^2+1}\right| + C,$$
где $I(0) = 0$ так что $C = 0$.

15.15(4)

Теперь хочется взять интеграл
$$I(\alpha) = \int_0^{\infty}\frac{\sin^2(\alpha x)}{x^2(1+x^2)}\,dx$$

И снова по частям (при выполнении условий теоремы о дифференцировании по параметру [!]) справедливо утверждать

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^\infty \frac{\sin(2\alpha x)}{x(1+x^2)}\,dx,$$

$$\frac{d^2I(\alpha)}{d\alpha^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\alpha x)}{1+x^2}\,dx = 2\frac{\pi}{2}e^{-2|\alpha|}.$$