Домашнее задание I курса «Теория поля»

Авторы: Ж$_{\text{И}}$К

От: *24 марта 2021 г.*

Содержание

1 Общие сведения

Для кинематики полезно было бы ввести следующие величины

$$\gamma(v) = \gamma_v = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \qquad \beta(v) = \beta_v = \frac{v}{c}, \qquad \Lambda(v, OX) = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\beta_v\gamma_v & 0 & 0 \\ -\beta_v\gamma_v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где Λ – преобразование Лоренца, для которого, кстати, верно, что $\Lambda^{-1}(v) = \Lambda(-v)$.

Также преобразование Лоренца можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \boldsymbol{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\boldsymbol{\beta}_v\gamma \\ -\boldsymbol{\beta}_v\gamma & \mathbb{E} + \frac{\gamma_v - 1}{\beta_v^2}\boldsymbol{\beta}\otimes\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

что очень удобно и полезно.

Говоря о движение заряда в ЭМ-поле, хотелось бы получить уравнения движения. По принципу наименьшего действия

$$\delta S = \delta \int_a^b \left(-mc\, ds - \frac{e}{c} A_i\, dx^i\right) = 0, \qquad \overset{ds=\sqrt{dx_i\, dx^i}}{\Rightarrow} \qquad \delta S = -\int_a^b \left(mc \frac{dx_i\, d\delta x^i}{ds} + \frac{e}{c} A_i\, d\delta x^i + \frac{e}{c}\delta A_i\, dx^i\right) = 0,$$

где проинтегрировав по частям первые два слагаемые получаем

$$\int_a^b \left(mc\, du_i \delta x^i + \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\delta x^i\, dx^k - \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\, dx^i \delta x^k\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \int_a^b \left(mc\frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right) u^k\right) \delta x^i\, ds = 0$$

где $(\delta \ldots)|_a^b = 0$ в силу варьирования при заданных пределах. Также сделаны замены $du_i \to (u_i)'_s\, ds,\ dx^i \to u^i\, ds$. А это уже победа, ведь в силу произвольности δx^i получаем

$$\frac{mc^2}{e}\frac{du^i}{ds} = F^{ik} u_k = F^{ik} g_{kj} u^j, \qquad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

что позволяет всегда смотреть на движение заряда в постоянном ЭМ-поле, как на систему линейных дифференциальных уравнений, решать которую, по крайней мере относительно $s = c\tau$ решать мы умеем.

2 Упражнения

У1

Строчка с символами Кронекера:

$$\delta_\alpha^\alpha = 3, \qquad \delta_\alpha^\beta \delta_\beta^\gamma = \delta_\alpha^\gamma, \qquad \delta_\alpha^\beta \delta_\beta^\gamma \delta_\gamma^\alpha = \delta_\alpha^\alpha = 3.$$

По определению символа Леви-Чивиты, раскроем определитель:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma} = \begin{vmatrix} \delta_\alpha^{\alpha'} & \delta_\alpha^{\beta'} & \delta_\alpha^{\gamma} \\ \delta_\beta^{\alpha'} & \delta_\beta^{\beta'} & \delta_\beta^{\gamma} \\ \delta_\gamma^{\alpha'} & \delta_\gamma^{\beta'} & \delta_\gamma^{\gamma'} \end{vmatrix} = \delta_\alpha^{\alpha'}\left(\delta_\beta^{\beta'}\delta_\gamma^\gamma - \delta_\beta^\gamma \delta_\gamma^{\beta'}\right) - \delta_\alpha^{\beta'}\left(\delta_\beta^{\alpha'}\delta_\gamma^\gamma - \delta_\beta^\gamma\delta_\gamma^{\alpha'}\right) + \delta_\alpha^\gamma\left(\delta_\beta^{\alpha'}\delta_\gamma^{\beta'} - \delta_\beta^{\beta'}\delta_\gamma^{\alpha'}\right) =$$

$$= \delta_\alpha^{\alpha'}\left(3\delta_\beta^{\beta'} - \delta_\beta^{\beta'}\right) - \delta_\alpha^{\beta'}\left(2\delta_\beta^{\alpha'}\right) + \delta_\alpha^{\beta'}\delta_\beta^{\alpha'} - \delta_\alpha^\gamma\delta_\beta^{\beta'}\delta_\gamma^{\alpha'} = \boxed{\delta_\alpha^{\alpha'}\delta_\beta^{\beta'} - \delta_\alpha^{\beta'}\delta_\beta^{\alpha'}.}$$

Далее просто в последнем равенстве приравниваем в первом случае $\beta' = \beta$, а во втором ещё и $\alpha = \alpha'$, получая:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\alpha'\beta\gamma} = 3\delta_\alpha^{\alpha'} - \delta_\alpha^{\alpha'} = 2\delta_\alpha^{\alpha'}, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = 2\delta_\alpha^\alpha = 6.$$

У2

- $[\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]]^i = \varepsilon^i{}_{jk} a^j [\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]^k = \varepsilon^i{}_{jk} a^j \varepsilon^k{}_{mn} b^m c^n = \left(\delta_m^i \delta_{jn} - \delta_n^i \delta_{jm}\right) a^j b^m c^n = a^j b^i c_j - c^i a^j b_j = b^i(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - c^i(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.
- $([\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\cdot[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}]) = \varepsilon_{ijk} a^j b^k \varepsilon^i{}_{mn} c^m d^n = (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})\, a^j b^k c^m d^n = a^j b^k c_j d_k - a^j b^k c_k d_j =$
$= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.

- Тут придется применить результаты первого примера этого урпажения:
$$([\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\cdot[[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]\times[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}]]) = (\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}])\,(\boldsymbol{b}\cdot[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}]) - (\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}])\,(\boldsymbol{b}\cdot[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]) =$$
$$= a^i\varepsilon_{ijk}b^jc^k\cdot b^\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}c^\beta a^\gamma - a^i\varepsilon_{ijk}c^ja^k\cdot b^\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}b^\beta c^\gamma = (a^i\varepsilon_{ijk}b^jc^k)^2 = (\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}])^2$$

У3

Сразу оговорим, что все нечетные степени, ввиду инвариантности по перестановкам при усреднении дадут нуль.

Для четных же будем получать какие-то симметричные тензоры, которые могут быть выражены через всевозможные комбинации символов Кронекера. Так для два-тензора:
$$\langle n_\alpha n_\beta\rangle = z_{ab} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}.$$
В силу единичности n при свертке два-тензора из них должна получиться единица. Симметричный единичный два-тензор, инвариантный к поворотам это и есть Кроннекер на троих.

Для четырех же возьмём все возможные комбинации символов Кроннекера:
$$\langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu\rangle = \frac{1}{c}\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\mu} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\gamma}\right).$$
Опять же нужно найти константу c, чтобы свертка четыре-тензора была единичной:
$$\delta^{\alpha\beta}\delta^{\gamma\mu}\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\mu} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\gamma}\right) = 9 + \delta^\beta_\gamma\delta^\gamma_\beta + \delta^\beta_\mu\delta^\mu_\beta = 15. \quad\Rightarrow\quad \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu\rangle = \frac{1}{15}\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\mu} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\gamma}\right).$$

У4

а)

- $(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A})^i = \varepsilon^i{}_{jk}\nabla^j(\varepsilon^k{}_{\alpha\beta}\nabla^\alpha A^\beta) = (\delta^i_\alpha\delta_{j\beta} - \delta^i_\beta\delta_{j\alpha})\nabla^j\nabla^\alpha A^\beta = \nabla^i(\nabla_j A^j) - \nabla_j\nabla^j A^i = \left(\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \nabla^2\boldsymbol{A}\right)^i.$
- $(\operatorname{rot}[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}])^i = \varepsilon^i{}_{jk}\nabla^j\varepsilon^k{}_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta = (\delta^i_\alpha\delta_{j\beta} - \delta^i_\beta\delta_{j\alpha})(a^\alpha\nabla^j b^\beta + b^\beta\nabla^j a^\alpha) = a^i\nabla^j b_j - b^i\nabla^j a_j + b_j\nabla^j a^i - a^j\nabla^j b^i =$
$= (\boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a})^i + ((\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b})^i..$
- $(\operatorname{rot} f\boldsymbol{A})^i = \varepsilon^i{}_{jk}\nabla^j fA^k = \varepsilon^i{}_{jk}(f\nabla^j A^k + A^k\nabla^j f) = f\varepsilon^i{}_{jk}\nabla^j A^k + \varepsilon^i{}_{jk}\nabla^j f = (f\operatorname{rot}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times\operatorname{grad} f)^i.$
- $\operatorname{div} f\boldsymbol{A} = \nabla_i fA^i = A^i\nabla_i f + f\nabla_i A^i = (\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{grad} f) + f\operatorname{div}\boldsymbol{A}.$
- $\operatorname{div}[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}] = \nabla_i\varepsilon^i{}_{jk}a^jb^k = \varepsilon^i{}_{jk}(b^k\nabla_i a^j + a^j\nabla_i b^k) = \varepsilon^i{}_{jk}b^k\nabla_i a^j + \varepsilon^i{}_{jk}a^j\nabla_i b^k = b^k\varepsilon_k{}^i{}_j\nabla_i a^j - a^j\varepsilon_j{}^i{}_k\nabla_i b^k =$
$= (\boldsymbol{b}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{b}).$
- $[\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})]^i = \nabla^i a^j b_j = a^j\nabla^i b_j + b_j\nabla^i a^j$

  Рассмотрим такую штуку: $((\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b})^j = a_i\nabla^i b^j$

  И такую: $(\boldsymbol{a}\times[\nabla\times\boldsymbol{b}])^i = \varepsilon^i{}_{jk}a^j\varepsilon^k{}_{\alpha\beta}\nabla^\alpha b^\beta = (\delta^i_a\delta_{j\beta} - \delta^i_\beta\delta_{j\alpha})a^j\nabla^\alpha b^\beta = a^j\nabla^i b_j - a_j\nabla^j b^i$

  Из этих штук и можем составить начальную:
$$[\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})]^i = \nabla^i a^j b_j = a^j\nabla^i b_j + b_j\nabla^i a^j = [\boldsymbol{a}\times[\nabla\times\boldsymbol{b}]]^i + [\boldsymbol{b}\times[\nabla\times\boldsymbol{a}]] + (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}.$$

б)

- $\operatorname{rot}[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}] = 2\boldsymbol{\omega}.$
- $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r} = /a^i\nabla_i r^j = \quad a^i\delta^j_i/ = \boldsymbol{a}$

в)

- $\operatorname{grad} r = /\nabla^i\sqrt{r^jr_j} = \frac{1}{2}\frac{\nabla^i r^j r_j}{\sqrt{r^\gamma r_\gamma}} = \frac{r^j\delta^i_j}{r}/ = \frac{\boldsymbol{r}}{r}.$
- $\operatorname{div}\boldsymbol{r} = \nabla_\alpha r^\alpha = \delta^\alpha_\alpha = 3.$
- $(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r} = /a^i\nabla_i r^j/ = \boldsymbol{a}.$
- $\operatorname{grad} f(r) = /\nabla^i f(r) = f'_r\nabla^i\sqrt{r^jr_j}/ = f'_r\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$

- $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}(r) = /\varepsilon^i{}_{jk}\nu^j a^k(r) = \varepsilon^i{}_{jk}(a^k)'_r \frac{\nabla^j r}{r^j/r}/ = \frac{1}{r}[\boldsymbol{a}'_r \times \boldsymbol{r}]$.
- $\operatorname{div} \boldsymbol{a}(r) = /\nabla^i a_i(r) = (a_i)'_r \nabla^i r/ = \frac{1}{r}(\boldsymbol{a}'_r \cdot \boldsymbol{r})$.

У5

Суть в том, чтобы скалярно домножая на константу, получать интегралы от форм, которые можно позже преобразовать по формуле Стокса.

- $\boldsymbol{c} \cdot \int_V \nabla f d^3 r = \int_V \operatorname{div}(\boldsymbol{c} f) = \oint_{\partial V} \omega^2_{\boldsymbol{c}f} = \oint_{\partial V} \boldsymbol{c} f \cdot d\boldsymbol{S}$.
- $\boldsymbol{c} \cdot \int_V \operatorname{rot} \boldsymbol{A} d^3 r = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot [\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{c}] d^3 r = \int_V \operatorname{div}[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{c}] d^3 r = \oint_S [\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{c}] \cdot \boldsymbol{S} = \oint_S \boldsymbol{c} \cdot [d\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A}] = -\oint_S \boldsymbol{c}[A \times d\boldsymbol{S}]$.
- $\boldsymbol{c} \cdot \int_S [\nabla f \times d\boldsymbol{S}] = \int_S d\boldsymbol{S} \cdot [\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{\nabla} f] = -\int_S d\boldsymbol{S} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{c} f = -\oint \boldsymbol{c} f \cdot d\boldsymbol{l}$.
- $\oint_S [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}] d\boldsymbol{S} = \int_\Gamma \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$, т.к. $\Gamma = \varnothing$.

3 Первое задание

Т1

Для начала запишем преобразование Лоренца для системы K':

$$t' = \gamma_{v_x}\left(t - \beta_x \frac{x}{c}\right), \qquad x' = \gamma_{v_x}(x - v_x t), \qquad y' = y, \qquad z' = z.$$

Аналогично перейдём к системе K'', выразив компоненты через их представление в системе K'

$$t'' = \gamma_{v'_y}\left(t' - \beta_{v'_y} \frac{y'}{c}\right), \qquad x'' = x', \qquad y'' = \gamma_{v'_y}(y' - v'_y t), \qquad z'' = z'.$$

Центр системы K'' неподвижен в координатах системы K'', соответственно

$$x'' = y'' = z'' = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{K''} = v_x t \\ y_{K''} = \gamma^{-1}_{v_x} v'_y t \end{cases},$$

что соответствет $(x, y)[t]$ для координат центра системы K'' в системе K.

Теперь найдём движение центра системы K в системе K'', подставив значения $x = y = 0$,

$$x''_K = -\gamma_{v_x} v_x t, \qquad y''_K = -\gamma_{v'_y}\gamma_{v_x} v'_y t, \qquad t''_K = -\gamma_{v'_y}\gamma_{v_x} t.$$

Можно заметить, что

$$\gamma_{v'_y}\gamma_{v_x} \approx \gamma\left(\sqrt{v_x^2 + v'^2_y}\right) = \gamma_v, \qquad \beta_{v_x}, \beta_{v'_y} \ll 1.$$

Теперь нас интересует направление прямой $\parallel \boldsymbol{v}$ – движения K'' в системе K:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\dot{y}_{K''}}{\dot{x}_{K''}} = \gamma^{-1}_{v_x} \frac{v'_y}{v_x}.$$

Угол же между осью x'' и движением центра системы K может быть найден, как

$$\operatorname{tg}(\theta + \varphi) = \frac{dy''_K}{dt''} \bigg/ \frac{dx''_K}{dt''} = \gamma_{v'_y} \frac{v'_y}{v_x} = \gamma_{v_x}\gamma_{v'_y} \operatorname{tg}\varphi \approx \gamma_v \operatorname{tg}\varphi.$$

С другой стороны, раскрывая тангенс суммы, находим

$$\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\varphi = \gamma_v \operatorname{tg}\varphi(1 - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\theta), \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{(\gamma_v - 1)\operatorname{tg}\varphi}{1 + \gamma_v \operatorname{tg}^2\varphi}.$$

Т2

Аппроксимируем движение нИСО в моменты времени t и $t + dt$ сопутствующими ИСО K' и K''. Пусть K – лабороторная система отсчета, K' – сопутствующая ИСО $\boldsymbol{v} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{v}(t)$, а K'' – сопутствующая ИСО движущаяся относительно K со скоростью $\boldsymbol{v}(t + dt) = \boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$. Далее для удобства будем считать, что K'' движется относительно K' со скоростью $d\boldsymbol{v}'$.

Проверим, что последовательное применеие $\Lambda(d\boldsymbol{v}') \cdot \Lambda(\boldsymbol{v})$ эквивалентно $R(\varphi) \cdot \Lambda(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v})$, где $R(\varphi)$ – вращение в $\{xyz\}$. Для этого просто найдём

$$R(\varphi) = \Lambda(d\boldsymbol{v}') \cdot \Lambda(\boldsymbol{v}) \cdot \Lambda(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v})^{-1}.$$

Пусть ось $x \parallel \boldsymbol{v}$, ось y выберем так, чтобы $d\boldsymbol{v} \in \{Oxy\}$. Теперь, согласно (1.2), считая $|\boldsymbol{v}| = \beta_1$, $d\boldsymbol{v}' = (\beta'_x,\ \beta'_y)^{\mathrm{T}}$ можем записать (пренебрегая слагаемыми β'_x, β'_y второй и выше степени):

$$\Lambda(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 & 0 & 0 \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda(d\boldsymbol{v}') = \begin{bmatrix} 1 & -\beta'_x & -\beta'_y & 0 \\ -\beta'_x & 1 & 0 & 0 \\ -\beta'_y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь можем выразить $d\boldsymbol{v}'$ через $d\boldsymbol{v}$, считая $\boldsymbol{r}_{\mathrm{f}}$ центром системы K''

$$\boldsymbol{r}'_f = \Lambda(d\boldsymbol{v}') \cdot \Lambda(\boldsymbol{v})\boldsymbol{r}_f = (ct',\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad \beta(\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v})_x = \frac{\beta_1 + \beta'_x}{1+\beta_1\beta'_x}, \quad \beta(\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v})_y = \frac{\gamma_{\beta_1}\beta_y}{1+\beta_1\beta_x}.$$

где скорость находим аналогично первому номеру. Тут стоит заметить, что скоростью β_x можно было бы пренебречь в сравнении с β_1, так как скорее всего первый порядок малось β_x не войдёт в ответ, однако хотелось бы в этом убедиться.

Зная $d\boldsymbol{v}$ можем найти $d\boldsymbol{v}'$:

$$\beta'_x = \gamma^2_{\beta_1}\beta_x, \qquad \beta'_y = \gamma\beta_y.$$

Но это на потом.

Через $\boldsymbol{v},\ d\boldsymbol{v}'$ теперь можем найти $\Lambda(\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v})$, и посчитать обратную матрицу:

$$\Lambda^{-1}(\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} \gamma_{\beta_1}(\beta_1\beta_x+1) & \gamma_{\beta_1}(\beta_1+\beta_x) & \beta_y & 0 \\ \gamma_{\beta_1}(\beta_1+\beta_x) & \gamma_{\beta_1}(\beta_1\beta_x+1) & \frac{\beta_1\beta_y}{\gamma^{-1}_{\beta_1}+1} & 0 \\ \beta_y & \frac{\beta_1\beta_y}{\gamma^{-1}_{\beta_1}+1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Наконец можем посчитать матрицу поворота, которая в первом приближении действительно не содержит β_x:

$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\beta_1\beta'_y}{\sqrt{1-\beta_1^2}+1} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1\beta'_y}{\sqrt{1-\beta_1^2}+1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

что дейстительно соответствует повороту в плоскости $\{xy\}$ вокруг оси z с углом φ равным

$$\varphi = -\frac{\beta_y\beta_1}{\gamma^{-2}_{\beta_1}+\gamma^{-1}_{\beta_1}} = -\frac{\gamma^2_{\beta_1}}{\gamma_{\beta_1}+1}\beta_1\beta_y,$$

где φ малый, в силу малости β_y. Так вот, в результате поворота координатных осей меняются и любые векторы, неподвижные в неИСО, то есть искомая угловая скорость

$$\omega_z = -\frac{\gamma^2_{\beta_1}}{\gamma_{\beta_1}+1}\beta_1(\beta_y/\Delta t), \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = -\frac{\gamma^2_{\beta_1}}{\gamma_{\beta_1}+1}\left[\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right] = \frac{\gamma^2_{\beta_1}}{\gamma_{\beta_1}+1}\left[\dot{\boldsymbol{\beta}}\times\boldsymbol{\beta}\right],$$

что и требовалось доказать.

Т3

Посмотрим на сопутствующую вращающемуся интерферометру в точке рассматриваемого луча. Для луча можем записать волновой вектор, как

$$\bar{k}'_\pm = \left(\frac{\omega}{c},\ \pm n\frac{\omega}{c},\ 0,\ 0\right),$$

где знак выбирается в соответсвии с направлением обхода. Считая, что ось Ox направлена вдоль вращения интерферометра в рассматриваемой точке

$$ck_\pm = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \pm n\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega\gamma(1+\pm n\beta) \\ \omega\gamma(n\pm\beta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$ck_{x,\pm} = \omega\gamma(n\pm\beta).$$

Можно заметить, что у света также зависит частота от направления двиения, судя по формуле выше, но в силу малости скорости вращения, это приведет только к оооочень медленной осцилляции в интерференции

$$I_{\text{инт}} = I_1 + I_2 + \langle (\boldsymbol{E}_{10} \cdot \boldsymbol{E}_{20}) \cos\left((\omega_2 - \omega_1)t + \ldots\right) \rangle,$$

так что по идее этим эффектом можно принебречь.

В силу различности k_+ и k_- можем найти разность хода

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = 2\pi R \frac{\gamma\omega\beta}{c},$$

считая данной угловую скорость вращения интерферометра Ω приходим к выражению вида

$$\Delta\varphi = \frac{2\gamma}{c^2}\omega\Omega\pi R^2 \overset{\gamma\simeq 1}{\approx} \frac{2\pi}{c^2}\omega\Omega R^2,$$

где $\gamma \approx 1$ для корректности результата, так как при расчете не учитывалось изменение метрики для неИСО.

T4

Теперь рассмотрим реакцию превращения электрона и позитрона в мюон и антимюон:

$$e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-.$$

Хотелось бы зная энергию стакивающихся частиц найти эффективную массу системы $((\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)^2)$ и энергии $\mu^\pm$.

Для 4-импульса $p^i = (\mathscr{E}/c, \boldsymbol{p})$, для которого верно

$$c^2(2m_\mu)^2 \leqslant (p_1^i + p_2^i)^2 = \bar{p}_1^2 + \bar{p}_2^2 + 2\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2 = c^2 2m_e^2 + 2\left(\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2/c^2 - \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2\right).$$

что приводит нас к неравенству

$$c^2(2m_\mu^2 - m_e^2) \leqslant \frac{1}{c^2}\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 - \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2.$$

При равных энергия $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}$ и $\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2$ верно, что

$$\boldsymbol{p}_1^2 = \frac{\mathscr{E}^2}{c^2} - m^2c^2,$$

тогда

$$c^2(2m_\mu^2 - m_e^2) \leqslant \frac{1}{c^2}\mathscr{E}^2 + \boldsymbol{p}_1^2 = \frac{2}{c^2}\mathscr{E}^2 - m_e^2c^2,$$

таким образом

$$\mathscr{E} \geqslant m_\mu c^2, \qquad T_{\text{порог}} = (m_\mu - m_e)c^2.$$

При налете на неподвижную частицу $\mathscr{E}_2 = m_e c$ и $\boldsymbol{p}_2 = 0$, тогда

$$(2m_\mu^2 - m_e^2)c^2 \leqslant \mathscr{E}_1 m_e, \quad \Rightarrow \quad \mathscr{E}_1 \geqslant \left(2\frac{m_\mu^2}{m_e} - m_e\right)c^2.$$

Соответсвенно для пороговой энергии верно

$$T_{\text{порог}} = \frac{2c^2}{m_e}\left(m_\mu^2 - m_e^2\right).$$

T5

Имеем две частицы, 4-импульсы которых в начальный момент:

$$p_\gamma^i = \begin{pmatrix} \varepsilon_\gamma \\ \boldsymbol{p}_\gamma \end{pmatrix}, \quad |p_\gamma^i| \approx \varepsilon_\gamma. \qquad\qquad p_e^i = \begin{pmatrix} \varepsilon_e \\ \boldsymbol{p}_e \end{pmatrix}, \quad |p_e^i| = \beta_e\varepsilon_e.$$

Перейдём в систему центра инерции двух частиц. Пусть пусть движется со скоростью β, тогда матрица преобразования для такой пересадки и аберация угла будут

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \cos\theta\beta}.$$

Запишем закон сохранения импульса до и после столкновения, штрихами пометим величины после столкновения.

$$p_\gamma^i + p_e^i = p_\gamma'^i + p_e'^i \quad \Rightarrow \quad (p_e'^i)^2 = (p_\gamma^i + p_e^i - p_\gamma'^i)^2 = p_\gamma^2 + p_e^2 + p_\gamma'^2 + 2p_e p_\gamma - 2p_e p_\gamma' - 2p_\gamma p_\gamma',$$

пренебрегая квадратом импульса фотонов получаем

$$m_e^2 = m_e^2 + 2p_e p_\gamma - 2p_e p'_\gamma - 2p_\gamma p'_\gamma \qquad \Rightarrow \qquad p_e p_\gamma - p_e p'_\gamma - p_\gamma p'_\gamma = 0.$$

Перемножим компоненты 4-импульсов:

$$\varepsilon_e \varepsilon_\gamma - \boldsymbol{p}_e \cdot \boldsymbol{p}_\gamma - \varepsilon_e \varepsilon'_\gamma + \boldsymbol{p}_e \cdot \boldsymbol{p}'_\gamma - \varepsilon_\gamma \varepsilon'_\gamma + \boldsymbol{p}_\gamma \cdot \boldsymbol{p}'_\gamma = 0.$$

Пусть частицы разлетелись под углом θ:

$$\varepsilon_e \varepsilon_\gamma + \varepsilon_e \varepsilon_\gamma \beta_e - \varepsilon_e \varepsilon'_\gamma + \beta_e \varepsilon_e \varepsilon'_\gamma \cos\theta - \varepsilon_\gamma \varepsilon'_\gamma + \varepsilon_\gamma \varepsilon'_\gamma \cos(\pi - \theta) = 0.$$

Откуда не сложно выразить энергию фотона после столкновения, заметим, что по условию задачи: $\varepsilon_\gamma/\varepsilon_e = 10^{-11}$, такими членами будем пренебрегать:

$$\varepsilon'_\gamma = \frac{\varepsilon_e \varepsilon_\gamma (1+\beta_e)}{\varepsilon_e (1 - \beta_e \cos\theta) + \varepsilon_\gamma (1 + \cos\theta)} = \frac{\varepsilon_\gamma (1+\beta_e)}{1 - \beta\cos\theta + \frac{\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_e}(1+\cos\theta)} \approx \frac{\varepsilon_\gamma(1+\beta_e)}{1-\beta_e\cos\theta}.$$

Имея формулу плюс-минус общую не сложно ответить на вопрос про рассеяние назад:

$$\varepsilon'_\gamma(\cos\theta = -1) \approx \varepsilon_\gamma = 2 \text{ эВ}.$$

в то время, как вперед пролетает:

$$\varepsilon'_\gamma(\cos\theta = 1) \approx \frac{\varepsilon_\gamma \varepsilon_e^2}{m_e^2} \approx 320 \text{ ГэВ}.$$

T6

Пион распадается на нейтрино и мюон: $\pi \to \mu + \nu$. Будем работать в система центра инерции.

$$p^i_{0\mu} = p^i_{0\mu} + p^i_{0\nu} \qquad \Rightarrow \qquad (p^i_{0\mu})^2 = (p^i_{0\pi} - p^i_{0\nu})^2 \qquad \Rightarrow \qquad m_\mu^2 c^2 = c^2(m_\pi^2 + m_\nu^2) - 2p^i_{0\pi} p_{i0\nu} = c^2 m_\pi^2 - 2m_\pi \varepsilon_{0\nu}.$$

Откуда получаем

$$\varepsilon_{o\nu} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c^2 = \frac{140^2 - 105^2}{2 \cdot 140} \cdot 1^2 = 31 \text{ МэВ}.$$

Переходя в лабораторную систему отсчёта:

$$\varepsilon_\nu = \gamma(v)\varepsilon_{0\nu}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_0\right).$$

Подставляя углы θ_0 найдём минимальную и максимальную энергии:

$$\varepsilon^\nu_{\min} = \varepsilon_{0\nu}\gamma(v)\left(1 - \frac{v}{c}\right) \approx 0.4 \text{ МэВ}, \qquad \varepsilon^\nu_{\max} = \varepsilon_{0\nu}\gamma(v)\left(1 + \frac{v}{c}\right) \approx 2666 \text{ МэВ}.$$

Для определения среднего значения сначала нужно задаться вопросом распределения по углу отклонения, пока в системе покоя π:

$$\varepsilon_\nu = \gamma(v)\varepsilon_{0\nu}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_0\right) \qquad \overset{d}{\Rightarrow} \qquad d\varepsilon = \frac{v}{c}\gamma\varepsilon_0 \, d\cos\theta_0.$$

Из всех частиц N_0 в телесном угле $d\Omega_0$ заключено:

$$\frac{dN}{N_0} = \frac{d\Omega_0}{4\pi} = \frac{1}{2}(d\cos\theta)\frac{d\varphi}{2\pi} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dN}{N_0} = \frac{1}{4\pi}\frac{c\,d\varepsilon}{v\gamma\varepsilon_0}(2\pi) = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}.$$

Но это всё было в системе центра инерции, нужно перейти в лабораторную, а тогда произойдёт аберрация:

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}.$$

Таким образом

$$\frac{dN}{d\cos\theta} = \left(\frac{dN}{d\cos\theta'}\right)\frac{d\cos\theta'}{d\cos\theta} = \left(\frac{dN}{d\cos\theta'}\right)\frac{1-\beta^2}{(\beta\cos\theta - 1)^2},$$

где $dN/d\cos\theta'$ — распределение по углу в системе центра инерции, которое в силу изотропности пространства постоянно. Так как в правой части отсутствует энергия, то распределение энергии по углу – постоянно, тогда

$$\langle\varepsilon^\nu\rangle = 1333 \text{ МэВ}.$$

T7

Выберем оси z по $\boldsymbol{H}$, ось y так, чтобы в $\boldsymbol{E} \in$ Oyz. Тогда тензор электромагнитного поля запишется:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -E\sin\theta & -E\cos\theta \\ 0 & 0 & -H & 0 \\ E\sin\theta & H & 0 & 0 \\ E\cos\theta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

с учетом $\theta = \pi/2$, $E = \alpha H$, $mc^2/e = K$, вспомнив (1.3), запишем уравнение движения

$$\frac{mc^2}{e}\frac{du^i}{ds} = F^{ik}u_k = F^{ij}g_{jk}u^k, \qquad \Rightarrow \qquad K\frac{d\bar{u}}{ds} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha H & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 \\ \alpha H & -H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\bar{u},$$

где $\bar{u} = (u_0,\, u_x,\, u_y,\, u_z) = \bar{p}/mc$. Линейные дифференциальные уравнения мы решать вроде умеем, так что находм собственные числа, как

$$\det(F^{ik}g_{kj} - \lambda\mathbb{E}^i_j) = \lambda^2(\lambda^2 - H^2(\alpha^2-1)) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} &\lambda_{1,2} = 0, \\ &\lambda_{3,4} = \pm H\sqrt{\alpha^2-1}. \end{aligned}.$$

И, соответственно, собственные векторы ($\alpha \neq 1$):

$$(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} & -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} & 1 & 0 \\ \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} & \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Осталось подставить начальные условия

$$\bar{u}(s=0) = (\mathscr{E}_0/c, p_{0x}, p_{0y}, p_{0z})^{\mathrm{T}}/mc,$$

находим уравнения относительно $\bar{u}$ для трёх случаев. При $\alpha \in (0,1)$:

$$u_x(s) = -\frac{(\alpha p_0 - p_{0x})\cos\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}eHs}{c^2m}\right)}{(1-\alpha^2)\,cm} - \frac{(\alpha^2-1)\,p_{0y}\sin\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}eHs}{c^2m}\right)}{(1-\alpha^2)^{3/2}\,cm} - \frac{\alpha(\alpha p_{0x} - p_0)}{(1-\alpha^2)\,cm},$$

$$u_y(s) = \frac{(\alpha p_0 - p_{0x})\sin\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}eHs}{c^2m}\right)}{\sqrt{1-\alpha^2}cm} + \frac{p_{0y}\cos\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}eHs}{c^2m}\right)}{cm}.$$

При $\alpha > 1$:

$$u_x(s) = \frac{(\alpha p_0 - p_{0x})\cosh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1}eHs}{c^2m}\right)}{(\alpha^2-1)\,cm} + \frac{p_{0y}\sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1}eHs}{c^2m}\right)}{\sqrt{\alpha^2-1}cm} + \frac{\alpha(\alpha p_{0x} - p_0)}{(\alpha^2-1)\,cm},$$

$$u_y(s) = \frac{(\alpha p_0 - p_{0x})\sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1}eHs}{c^2m}\right)}{\sqrt{\alpha^2-1}cm} + \frac{p_{0y}\cosh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1}eHs}{c^2m}\right)}{cm}.$$

И при $\alpha = 1$:

$$u_0(s) = \frac{e^2H^2s^2(p_0 - p_{0x})}{2c^5m^3} + \frac{eHp_{0y}s}{c^3m^2} + \frac{p_0}{cm}$$

$$u_x(s) = \frac{e^2H^2s^2(p_0 - p_{0x})}{2c^5m^3} + \frac{eHp_{0y}s}{c^3m^2} + \frac{p_{0x}}{cm},$$

$$u_y(s) = \frac{eHs(p_0 - p_{0x})}{c^3m^2} + \frac{p_{0y}}{cm}.$$

и по оси z движение с $u_z = p_{0z}/mc = \mathrm{const}$, а $s = c\tau$.

При пристальном взгляде на u_0 и u_x

$$u_0 - u_x = \frac{p_0 - p_{0x}}{cm} = \frac{\mathscr{E}_0 - cp_{0x}}{mc^2} = \mathrm{const}.$$

Для скорости по оси x получили компоненту, независящую от времени ($E < H$) — это скорость дрейфа:

$$v_{\text{др}} = u_x^{\neq f(s)}c = c\frac{\alpha(\alpha p_{0x} - p_0)}{(\alpha^2-1)\,cm} = \Big/ \begin{matrix} p_0 \approx mc \\ \alpha \ll 1. \end{matrix} \Big/ = c\alpha = c\frac{E}{H},$$

что соответствует нерелятивистскому случаю.

Для случая $H < E$:

$$v_{\text{др}} = u_x^{\neq f(s)} c = c\frac{\alpha(\alpha p_{0x} - p_0)}{(\alpha^2-1)\, cm} = \Bigg/ \begin{matrix} p_0 \approx mc \\ \alpha \gg 1. \end{matrix} \Bigg/ = \frac{p_0}{cm}\frac{c}{\alpha} = -\frac{c}{\alpha} = -c\frac{H}{E},$$

что уже очень похоже на правду.

Тут стоит заметить, что решение получено в параметризации собственным временем системы, что, конечно, дает представление о геометрии происходящего, но, возможно, не всегда информативно. Решение в параметризации временем лабораторной системы отсчета можно посмотреть здесь.

Видеть три случая с движением по спирали и по.. чему-то вроде цепной линии тоже вполне логично: в зависимости от значения α можно пересесеть в систему ($\alpha > 1$), где $H' = 0$, и увидеть движение по $\sim$ цепной, а при $\alpha < 1$ перейти к системе с $E' = 0$ и движением по окружности, движущейся относительно лабораторной с дрейфовой скоростью.

Также замечу, что $\operatorname{sign}\alpha$ – инвариант, в силу существующих инвариантов поля (свертов тензора ЭМ-поля)

$$F_{ik}F^{ik} = H^2 - E^2 = H^2(1-\alpha^2) = \text{inv}, \qquad \varepsilon^{iklm}F_{ik}F_{lm} = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H} = \text{inv},$$

что и является основой для вышеприведенных рассуждений.