1 Общие сведения II

Электростатика. Запишем действие взаимодействия S_{int}

$$S_{\text{int}} = -\frac{e}{c}\int d\tau\, u^\mu A_\mu,$$

учитывая $u^\mu = fx^\mu/d\tau$:

$$S_{\text{int}} = -\frac{1}{c}\int d^3V\,\rho\int d\tau\,\frac{dx^\mu}{d\tau}A_\mu = -\frac{1}{c}\int dt\,d^3V\,\rho\frac{dx^\mu}{dt}A_\mu,$$

что можем переписать в случае неподвижных зарядов ($\frac{dx^\mu}{dt} = (c,\ \vec{0})^{\text{T}}$), как

$$S_{\text{int}} = -\int dt\int d^3V\cdot\rho\varphi(\boldsymbol{r}), \quad\Rightarrow\quad L_{\text{int}} = -\int d^3V\,\rho A_0(\boldsymbol{r}), \quad\Rightarrow\quad U = \int d^3r\,\rho(\boldsymbol{r})A_0(\boldsymbol{r}).$$

2 Второе задание

T8

Заряд электрона распределен с плотностью

$$\rho(r) = \frac{e}{\pi a^3}\exp\left(-\frac{2r}{a}\right).$$

Найдём энергию взаимодействия электронного облака с ядром в случае ядра, как точечного заряда, и в случае ядра, как равномерно заряженного шара радиуса r_0. Точнее найдём значение следующего выражения:

$$S_{\text{int}} = -\frac{e}{c}\int d\tau\,u^\mu A_\mu, \quad\Rightarrow\quad U = \int d^3r\,\rho(\boldsymbol{r})A_0(\boldsymbol{r}).$$

Ядро, как точечный заряд. Вспоминая, что $\boldsymbol{E} = -\nabla A_0$ и $\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho_N$, тогда $\nabla(-\nabla A_0) = -\Delta A_0 = 4\pi\rho_N$, тогда плотность заряда ядра

$$\rho_N = -e\cdot\delta(\boldsymbol{r}).$$

Для электронного облака известно $\rho(\boldsymbol{r})$, тогда

$$-\Delta A_0 = -4\pi e\,\delta(\boldsymbol{r}), \quad\Rightarrow\quad A_0 = -\frac{e}{r},$$

и, соответсвенно,

$$U = \int d^3r\,\frac{e}{\pi a^3}e^{-2r/a}\cdot\left(-\frac{e}{r}\right) \overset{\text{sp. c.s.}}{=} -\frac{e^2}{\pi a^3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-1}^{+1}d\cos\theta\int_0^\infty r^2\,dr\frac{1}{r}e^{-2r/a},$$

упрощая выражение, переходим к интегралу вида

$$U = -\frac{e^2}{\pi a^3}\cdot 2\Pi\cdot 2\cdot\int_0^\infty dr\,re^{-2r/a} = -\frac{e^2}{a},$$

где интеграл мы взяли по частям:

$$\int_0^\infty dt\,t^n e^{-t} = e^{-t}t^n\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}n\,dt = \ldots = n!\ .$$

Ядро, как шар. Здесь стоит разделить пространство на две области:

$$A_0 = \begin{cases} -e/r, & r\geqslant r_0,\\ \dfrac{e}{2r_0^3}r^2 - \dfrac{3}{2}\dfrac{e}{r_0}, & r\leqslant r_0,\end{cases}$$

где A_0 для $r\leqslant r_0$ находится, как решение уравнения Пуассона ($\rho_N = \text{const}$):

$$\int_0^{r_0}d^3r\ \rho_N = -e, \qquad \rho_N = -\frac{3}{4\pi}\frac{e}{r_0^3}, \qquad \Delta A_0 = -3\frac{e}{r_0^3}. \quad A_0(r_0) = -\frac{e}{r_0}.$$

Так как садача симметрична относительно любых поворотов, то $A_0\equiv A_0(r)$, тогда

$$\Delta A_0 = \frac{d^2A_0}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dA_0}{dr}, \quad\Rightarrow\quad A_0'' + \frac{2A_0'}{r} = \frac{(rA_0)''}{r} = -3\frac{e}{r_0^3}.$$

Интегрируя, находим

$$rA_0 = -\frac{3e}{r_0^3}\left(\frac{1}{6}r^3 + c_1r + c_2\right), \quad\Rightarrow\quad A_0(r) = -\frac{e}{2r_0^3}r^2 + \tilde{c}_1 + \frac{\tilde{c}_2}{r}.$$

Подставляя граничное условие, находим

$$\tilde{c}_1 = -\frac{3}{2}\frac{e}{r_0}, \qquad \Rightarrow \qquad A_0 = \frac{e}{2r_0^3}r^2 - \frac{3}{2}\frac{e}{r_0}.$$

Осталось посчитать интеграл вида

$$U = \int d^3r\ \rho A_0 \overset{sp.c.s.}{=} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \int_0^{\infty} r^2\,dr \cdot \rho A_0 = 4\pi I,$$

где I, соответсвенно, равен

$$I = \int_0^{r_0} r^2\,dr \cdot (A_0 - A_0^{\text{точ}} + A_0^{\text{точ}}) + \int_0^{\infty} r^2\,dr\rho A_0^{\text{точ}} = \int_0^{\infty} r^2\,dr\rho A_0^{\text{точ}} + \int_0^{r_0} r^2\,dr\rho\,(A_0 - A_0^{\text{точ}})\,.$$

Таким образом искомая энергия представилась, как $U = U_{\text{точ}} + \Delta U$, где ΔU – некоторая поправка, связанная с ненулевым размером ядра. Она равна

$$\Delta U = 4\pi \int_0^{r_0} r^2\,dr\rho \cdot (A_0 - A_0^{\text{точ}}) = \frac{4e^2}{a^3}\int_0^{r_0} dre^{-2r/a}\left(\frac{e}{2r_0^3}r^4 - \frac{3}{2}\frac{e}{r_0}r^2 + er\right).$$

Если разложить экспоненту в ряд, то найдём, что $r_0/a \approx 10^{-5} \ll 1$, тогда получится интеграл вида

$$\Delta U = \frac{4e^2}{a^3}\left(\frac{e}{2r_0^3}\frac{1}{5}r_0^5 - \frac{3}{2}\frac{e}{r_0}\frac{1}{3}r_0^3 + e\frac{r_0^2}{2}\right) = \frac{4}{9}\left(\frac{e^2}{2a}\right)\left(\frac{r_0}{a}\right)^2 = \ldots$$

что соответствует поправке 10^{-10}. Досчитать и дописать.

T9

Потенциал диполя

$$\varphi = -\boldsymbol{d} \cdot \nabla\frac{1}{r} = \frac{\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Соответсвенно, поле диполя

$$E = -\operatorname{grad}\varphi = \frac{3(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{d}}{r^3},$$

в случае $r \neq 0$. Если же учесть такую возможность, то

$$\boldsymbol{E} = \frac{3(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{d}}{r^3} - \frac{4\pi}{3}\delta(\boldsymbol{r})\boldsymbol{d}.$$

Потенциальная энергия диполя:

$$U = \int d^3r\,\rho A_0 = -q\varphi(\boldsymbol{R}) + q\varphi(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{l}) = q(\boldsymbol{l}\cdot\nabla)\varphi = \boldsymbol{d}\cdot(\nabla\varphi) = -\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{E}_{\text{ext}}.$$

Подставляя $\boldsymbol{E}_{\text{ext}}$ находим

$$U = \frac{(\boldsymbol{d}_1\cdot\boldsymbol{d}_2) - 3(\boldsymbol{n}\cdot d_1)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{d}_2)}{r_{12}^3} + \frac{4\pi}{3}\delta(\boldsymbol{r}_{12})\,(\boldsymbol{d}_1\cdot\boldsymbol{d}_2),$$

где $\boldsymbol{r}_{12}$ – радиус вектор от первого диполя, ко второму.

T10