Задание по практике от 14 июля

Автор: Хоружий Кирилл
Соавтор: Примак Евгений

От: *14 июля 2021 г.*

1 Задание от 14 июля

Первая задача

Для начала выпишем явный вид $\hat{S}_i$ в базисе S_z и найдём $\boldsymbol{S}^2$:

$$\begin{aligned} \hat{S}_z &= \tfrac{\hbar}{2}|+\rangle\langle+| - \tfrac{\hbar}{2}|-\rangle\langle-|; \\ \hat{S}_x &= \tfrac{\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \tfrac{\hbar}{2}|-\rangle\langle+|; \\ \hat{S}_y &= -\tfrac{i\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \tfrac{i\hbar}{2}|-\rangle\langle+|. \end{aligned} \qquad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S}^2 = S_i S_i = \frac{3\hbar^2}{4}\Big(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|\Big) = \frac{3\hbar^2}{4}.$$

Заметим, что для S_i верно коммутационные соотношения, аналогичные J:

$$[S_i,\, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k, \qquad [J_i,\, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_k.$$

Так как рассуждение по собственным векторам J^2 и J_z (Сакурай, 3.5) опирается только на коммутационные соотношения для J_i, то аналогичным образом мы могли бы получить, что

$$\boldsymbol{S}^2|j,\, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,\, m\rangle,$$

где j, m – максимальный набор наблюдаемых и

$$a = \hbar^2 j(j+1), \qquad b = m\hbar,$$

с a, b собственными числамми операторов $\boldsymbol{S}^2$, S_z соответственно.

Частный случай. Посмотрим на явный величин и операторов, используемых в доказательстве 3.5 для S. Введём повышающий и понижающий операторы

$$S_\pm = S_x \pm iS_y = \hbar|\pm\rangle\langle\mp|,$$

заметим, что всё так же

$$S_\pm|+\rangle = \begin{bmatrix} 0, & \text{if } S_+ \\ \hbar|-\rangle, & \text{if } S_- \end{bmatrix} \qquad S_\pm|-\rangle = \begin{bmatrix} \hbar|+\rangle, & \text{if } S_+ \\ 0, & \text{if } S_- \end{bmatrix}$$

то есть $S_\pm$ переводит собственные состояния $|S_z,\, \pm\rangle$ в $|S_z,\, \pm\rangle$. Более того,

$$S_z S_\pm|\tfrac{3}{4}\hbar^2,\, \pm\tfrac{\hbar}{2}\rangle = \Big([S_z,\, S_\pm] + S_\pm S_z\Big)|a,\, b\rangle = (\pm\hbar + b)\, S_\pm|a,\, b\rangle,$$

где $b \in \left\{+\frac{\hbar}{2},\, -\frac{\hbar}{2}\right\}$, то есть $b_{\max} = +\frac{1}{2}\hbar$ и $b_{\min} = -\frac{1}{2}\hbar$.

Дейтсвительно, должно выполняться $\boldsymbol{S}^2 - S_z^2 = \frac{\hbar^2}{2} > 0$, точнее

$$\langle a,\, b|(\boldsymbol{S}^2 - S_z^2)|a,\, b\rangle \geqslant 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S_+|a,\, b_{\max}\rangle = 0 \\ S_-|a,\, b_{\min}\rangle = 0 \end{cases}$$

что мы уже и проверили. Также может быть интересно взглянуть на $S_\pm S_\mp$:

$$\begin{aligned} S_-S_+ &= S^2 - S_z^2 - \hbar S_z = \hbar^2|-\rangle\langle-| \\ S_+S_- &= S^2 - S_z^2 + \hbar S_z = \hbar^2|+\rangle\langle+| \end{aligned} \quad \xRightarrow{S_\pm S_\mp|a, b_{\max/\min}\rangle = 0} \quad \begin{aligned} &\tfrac{3}{4}\hbar^2 - b_{\max}^2 - b_{\max}\hbar = 0 \\ &\ldots \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} b_{\max} &= \tfrac{\hbar}{2}, \\ b_{\min} &= -\tfrac{\hbar}{2} = -b_{\max}, \end{aligned}$$

откуда можем указать, что $j = \frac{b_{\max}}{\hbar} = \frac{1}{2}$, и получить соотношение

$$\boldsymbol{S}^2|a, b\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|a, b\rangle, \qquad \frac{3}{4}\hbar^2 = a = \hbar^2 j(j+1), \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{S}^2|a, b\rangle = \hbar^2 j(j+1)|a, b\rangle, \qquad \text{Q. E. D.}$$

для b – собственного S_z состояния.

Вторая задача. Спин электрона в постоянном магнитном поле

Рассмотрим электрон в постоянном магнитном поле, то есть систему с гамильтонианом $\hat{H} = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \bar{B} = \omega \hat{S}_z$, где $\omega = \frac{|e|B}{m_e c}$.

Знаем, что $|\alpha, t = 0\rangle = |S_x +\rangle$. Хотелось бы найти $|\alpha, t\rangle$ и вероятность пребывания в состояниях $S_{x,y,z}$ в момент времени t с указанным начальным условием.

Так как гамильтониан от времени явно не зависит, то очень просто выглядит оператор эволюции:

$$i\hbar\partial_t \hat{U} = \hat{H}\hat{U}, \quad \Rightarrow \quad \hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right) = \exp\left(-\frac{i\omega S_z}{\hbar}t\right).$$

В начальный момент времени сисетма находится в состоянии $|S_x, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$, значит

$$|\alpha, t_0 = 0; t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{i\omega t}{2}\right)|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(+\frac{i\omega t}{2}\right)|-\rangle,$$

аналогично рассуждению в третьей задаче от 9 июля (см. страницу 3), где был получен явный вид для $\exp\left(-\frac{iS_z\varphi}{\hbar}\right)$.

Теперь найдём соответствующие значения:

$$\begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix}|\alpha, t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{i\omega t}{2}\right)\begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2}|-\rangle \\ \frac{i\hbar}{2}|-\rangle \\ \frac{\hbar}{2}|+\rangle \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(+\frac{i\omega t}{2}\right)\begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2}|+\rangle \\ -\frac{i\hbar}{2}|+\rangle \\ -\frac{\hbar}{2}|-\rangle \end{pmatrix},$$

откуда уже можем посчитать

$$\langle\alpha, t|\hat{\boldsymbol{S}}|\alpha, t\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(+\frac{i\omega t}{2}\right)\langle+| + \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{i\omega t}{2}\right)\langle-|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{i\omega t}{2}\right)\begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2}|-\rangle \\ \frac{i\hbar}{2}|-\rangle \\ \frac{\hbar}{2}|+\rangle \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(+\frac{i\omega t}{2}\right)\begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2}|+\rangle \\ -\frac{i\hbar}{2}|+\rangle \\ -\frac{\hbar}{2}|-\rangle \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix} e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \\ -i(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\langle\alpha, t|\hat{\boldsymbol{S}}|\alpha, t\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}},$$

что очень сильно похоже на правду.

Третья задача

Исследуемый оператор энергии сверхтонкого взаимодействия:

$$\hat{H} = \hbar\nu\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{I}},$$

введём оператор $\hat{\boldsymbol{F}} = \hat{\boldsymbol{S}} + \hat{\boldsymbol{I}}$, и воспользуемся соотношением и предыдущей задачи

$$\hat{\boldsymbol{J}}^2|j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j, m\rangle, \qquad \hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{I}} = \frac{1}{2}\left(\hat{\boldsymbol{F}}^2 - \hat{\boldsymbol{S}}^2 - \hat{\boldsymbol{I}}^2\right),$$

тогда, подставляя, находим

$$\hat{H} = \hbar\nu\left(\frac{f(f+1)}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - 1(1+1)\right) = \hbar\nu\left(\frac{f(f+1)}{2} - \frac{11}{4}\right).$$

Для него собственные числа (энергетические сдвиги) можем найти, подставив $f = l + \frac{1}{2}$ и $f = l - \frac{1}{2}$, тогда соответствующие сдвиги: $\frac{1}{2}\hbar\nu$ и $-\hbar\nu$.

Соответствующие собственные значения, в таком случае:

$$|F = \tfrac{3}{2}, F_z = +\tfrac{3}{2}\rangle, \quad |F = \tfrac{3}{2}, F_z = -\tfrac{3}{2}\rangle, \quad |F = \tfrac{1}{2}, F_z = +\tfrac{1}{2}\rangle, \quad |F = \tfrac{1}{2}, F_z = -\tfrac{1}{2}\rangle,$$

где последние два соответсвуют сдвигу на $-\hbar\nu$.

2 Задание от 9 июля

Первая задача

Вероятность измерения $|S_x,+\rangle$ в базисе $\hat{S}_z$ равна $1/2$, тогда

$$|\langle + \,|\, S_x,+\rangle|^2 = |\langle - \,|\, S_x,-\rangle|^2 = \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} |S_x,+\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \tfrac{e^{i\delta_1}}{\sqrt{2}}|-\rangle, \\ |S_x,-\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \tfrac{e^{i\delta_2}}{\sqrt{2}}|-\rangle, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} |S_x,+\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle, \\ \langle S_x \,|\, -\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \tfrac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle, \end{aligned}$$

где значение определены с точностью до глобальной фазы; можно показать, что $\delta_1 - \delta_2 = \pm\pi/2$. Теперь можем выразить $|\pm\rangle$ в базисе S_x и подставить в выражение для S_z:

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}|S_x,+\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}|S_x,-\rangle \\ |-\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}|S_x,+\rangle - \tfrac{1}{\sqrt{2}}|S_x,-\rangle \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\Big(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\Big) = \frac{\hbar}{2}\Big(|S_x,+\rangle\langle S_x,-| + |S_x,-\rangle\langle S_x,+|\Big).$$

Вторая задача

Известно, что

$$\langle p \,|\, \alpha\rangle = C \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{(\hbar k)^2}\right), \qquad \langle \alpha \,|\, \alpha\rangle = 1.$$

Для начала воспользуемся разложением по базису $|p\rangle$, тогда нормировка запишется в виде

$$\int dp \langle\alpha \underbrace{\,|\, p\rangle\langle p \,|\,}_{\equiv \mathbb{1}} \alpha\rangle = 1, \quad \Rightarrow \quad |C|^2 \int dp \exp\left(-\frac{2(p-p_0)^2}{(\hbar k)^2}\right) = |C|^2 \hbar k \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1, \quad \Rightarrow \quad |C| = \sqrt{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\hbar k}}.$$

Таким же разложением можем найти $\langle x \,|\, \alpha\rangle$:

$$\langle x \,|\, \alpha\rangle = \int dp, \langle x \,|\, p\rangle\langle p \,|\, \alpha\rangle = \kappa \int \exp\left(\frac{ipx}{\hbar} - \frac{(p-p_0)^2}{(\hbar k)^2}\right), \qquad \kappa = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/4} \frac{1}{\pi\hbar\sqrt{k}}.$$

где воспользовались равенством $\langle x \,|\, p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ipx}{\hbar}}$. Выделяя полный квадрат

$$p^2 - 2p(p_0 + ix\hbar k^2) + p_0^2 == (p - p_0 - ix\hbar k^2/2)^2 - ix\hbar k^2 + x^2\hbar^2 k^4/4$$

, сводим интеграл к гауссову, и находим

$$\langle x \,|\, \alpha\rangle = \left(\frac{k^2}{2\pi}\right)^{1/4} \exp\left(\frac{-ixp_0\hbar k^2 + x^2\hbar^2 k^4/4}{(\hbar k)^2}\right).$$

Третья задача

По Сакураю (3.1.15) поворот в пространстве можем быть найден, как

$$D_z(\varphi) = \exp\left(-\frac{iJ_z\varphi}{\hbar}\right), \qquad J_x \to S_z.$$

Считая $|+\rangle\langle+| = a$, $|-\rangle\langle-| = b$, $\alpha = \frac{i\varphi}{2}$, находим:

$$-\frac{iS_z\varphi}{\hbar} = -\frac{i\varphi}{2}\Big(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\Big), \quad \begin{aligned} (a-b)^2 &= a+b \\ (a-b)^3 &= a-b \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad D_z(\varphi) = 1 + \alpha(a-b) + \frac{\alpha^2}{2}(a+b) + \frac{\alpha^3}{3!}(a-b) + \ldots,$$

немного перегруппируя члены, и пользуясь представлением $\mathbb{1} = \sum |n\rangle\langle n|$, получаем

$$D_z(\varphi) = (1 - (a+b)) + a\left(1 + \alpha\tfrac{\alpha^2}{2} + \ldots\right) + b\left(1 - \alpha + \tfrac{\alpha^2}{2} - \ldots\right) = ae^{\alpha} + be^{-\alpha}.$$

Рассмотрим измерения в базисе S_φ – направления в плоскости Oxy повернутого на φ относительно Ox, тогда

$$\langle\alpha|S_\varphi|\alpha\rangle = {}_{R_{-\varphi}}\langle\alpha|S_x|\alpha\rangle_{R_{-\varphi}} = \langle\alpha \,|\, D_z^\dagger(-\varphi) S_x D_z(-\varphi) \,|\, \rangle, \qquad |\alpha\rangle_{R_\varphi} = D_z(\varphi)|\alpha\rangle.$$

Подставляя явное выражение для поворота и для S_x, находим

$$D_z^\dagger(\varphi) S_x D_z(\varphi) = \frac{\hbar}{2} e^{i\varphi} = \frac{\hbar}{2}\Big(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\Big)\cos\varphi - \frac{i\hbar}{2}\Big(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\Big)\sin\varphi = \cos(\varphi)S_x - \sin(\varphi)S_y.$$

Наконец, подставляя $\varphi \to -\varphi$, из операторного равенства, находим значение для S_φ:

$$S_\varphi = \cos(\varphi)S_x + \sin(\varphi)S_y = \frac{\hbar}{2} e^{-i\varphi}|+\rangle\langle-| + \frac{\hbar}{2} e^{i\varphi}|-\rangle\langle+|.$$

Четвертая задача

Рассмотрим, в частности, поворот на малый угол $d\varphi$ относительно оси Oz

$$D_z(d\varphi) = 1 - \frac{i\,d\varphi}{\hbar} S_z, \qquad |\alpha\rangle_{d\varphi} = |\tilde{\alpha}\rangle = D_z(d\varphi)|\alpha\rangle.$$

Для начала найдём с точки зрения операторного равенства $\tilde{S}_{x,y,z}$:

$$\langle\tilde{\alpha}|S_z|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\alpha|\tilde{S}_z|\alpha\rangle, \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{S}_z = D\dagger_x(d\varphi) S_z D_z(d\varphi).$$

Подставляя выражения для S_z и для D_z, находим с точностью до членов порядка $d\varphi$

$$\tilde{S}_z = \left(1 + \frac{i\,d\varphi}{\hbar} S_z\right) S_z \left(1 - \frac{o\,d\varphi}{\hbar} S_z\right) = S_x - \frac{i\,d\varphi}{\hbar} S_z^2 + \frac{i\,d\varphi}{\hbar} S_z^2 + o(\,d\varphi), \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{S}_z = S_z,$$

таким образом поворот не затрагивает S_z, что действительно похоже на поворот. Аналогично находим

$$\tilde{S}_x = S_x + \frac{i\,d\varphi}{\hbar}\,[S_x,\, S_z] + o(d\varphi) = S_x + S_y\,d\varphi + o(d\varphi),$$

и аналогично $\tilde{S}_y = S_y - S_x\,d\varphi + o(d\varphi)$. Здесь мы воспользовались выражением для коммутатора $S_{x,y,z}$:

$$[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} S_k.$$

Итого, с точностью до $o(d\varphi)$, находим преобразование «проекций», очень сильно похожих на инфинитезимальный поворот

$$\begin{aligned}\tilde{S}_x &= S_x + S_y\,d\varphi,\\ \tilde{S}_y &= S_y - S_x\,d\varphi,\\ \tilde{S}_z &= S_z.\end{aligned}$$

Пятая задача

В шестой задаче покажем, что

$$R_z(d\varphi) = 1 - \frac{i\,d\varphi}{\hbar} L_z = 1 - \frac{i\,d\varphi}{\hbar}(xp_y - yp_x),$$

где $\hat{L}_{x,y,z}$ удовлетворяет коммутативным свойствам и $\hat{L} = \hat{x} \times \hat{p}$.

Рассмотрим действие этого оператора на состояние $|x, y, z\rangle$, вспоминая, что $\hat{p}$ строился из оператора трансляции:

$$R_z(\,d\varphi)|x, y, z\rangle = \left(1 - \frac{i\,d\varphi}{\hbar} p_y x + \frac{i\,d\varphi}{\hbar} p_x y\right)|x, y, z\rangle = |x - y\,d\varphi,\, y + x\,d\varphi,\, z\rangle,$$

с точностью до $o(d\varphi)$. Можно заметить, что это и есть инфинитезимальный поворот вокруг Oz.

Шестая задача

Оператор $L = \hat{x} \times \hat{p}$ удовлетворяет $[L_i,\, L_j] = i\varepsilon_{ijk}\hbar L_k$, по Сакураю (3.6.2). Тогда

$$\begin{aligned}[L_x,\, L_y] &= [yp_z - zp_y,\, zp_x - xp_z] = [yp_z,\, zp_x] + [zp_y,\, xp_z] =\\ &= yp_x\,[p_z, z] + p_y x[z,\, p_z] = i\hbar\,(xp_y - yp_x) = i\hbar L_z,\end{aligned}$$

что и показывает корректность введения $\hat{L}$ через $\hat{x}$ и $\hat{p}$.