Теория к курсу «Аналитическая механика II» ФОПФ

За авторством: Хоружего К.
Примака Е.

От: *10 февраля 2021 г.*

Содержание

Малые колебания консервативной системы около положения равновесия **2**
14.1 Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия 2

Устойчивость движения **2**
15.2 Основные теоремы прямого метода Ляпунова 2
15.4 Влиянение диссипативных и гироскопических сил на устойчивость равновесия консервативной системы 3

Малые колебания консервативной системы около положения равновесия

14.1 Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия

Устойчивость равновесия

Thr 14.1 (Общее уравнение статики[1]). *Чтобы некоторое допускаемое идеальными удерживающими связями состояние равновесия системы было состоянием равновесия на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, необходимо и достаточно, чтобы для любого момента времени из этого интервала элементарная работа активных сил на любом виртуальном перемещении равнялась нулю, т.е. чтобы выполнялось*

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0 \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1).$$

Если система является потенциальной, то уравнения примут вид

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} = 0.$$

Def 14.2. Положение равновесия $q = 0$ – *устойчиво по Ляпунову*, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$, такая что

$$\forall \;\; |q(t_0)| < \delta, \; |\dot{q}(t_0)| < \delta: \qquad |q(t)| < \varepsilon, \; |\dot{q}(t)| < \varepsilon, \qquad \forall t \geqslant t_0. \tag{14.1}$$

Def 14.3. Положение равновесия $q = 0$ – *неустойчиво по Ляпунову*, если $\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0$, такая что

$$\forall \delta > 0 \;\; \exists |q(t_0)| < \delta, \; |\dot{q}(t_0)| < \delta, \;\; t^*: \qquad |q(t^*)| > \varepsilon \text{ или } |\dot{q}(t^*)| > \varepsilon. \tag{14.2}$$

Теорема Лагранжа

Thr 14.4 (Теорема Лагранжа-Дирихле). *Если в положении равновесия конесервативной системы* $\Pi(q)$ *имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.*

Lem 14.5. *При наличии гироскопических и диссипативных сил положение равновесия сохранится.*

Теоремы Ляпунова о неустойчивости положения равновесия консервативной системы

Thr 14.6 (Теорма Ляпунова о неустойчивости I). *Если в положении равновесия* $\Pi(q)$ *не имеет минимума и это определяется по квадратичной форме её разложения в ряд (в окрестности положения равновесия), то это положение равновесия неустойчиво.*

Thr 14.7 (Теорема Ляпунова о неустойчивости II). *Если в положении равновесия* $\Pi(q)$ *имеет строгий максимум и это определяется по наинизшей степени её разложения в ряд (в окрестности положения равновесия), то это положение равновесия неустойчиво.*

Устойчивость движения

15.2 Основные теоремы прямого метода Ляпунова

Здесь и далее для простоты рассматриваем установившееся движение.

Thr 15.8 (Теорема Ляпунова об устойчивости). *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует знакоопределенная функция V, производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений является знакопостоянной функцией противоположного знака с V, или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.*

Thr 15.9 (Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует знакоопределенная функция $V(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений есть знакоопределенная функция противоположного знака с V, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

[1] Если с необходимостью всё понятно, то достаточность может быть доказана через уравнения Аппеля (см. п. 158, Маркеев П. А.).

Теоремы о неустойчивости

Def 15.10. Окрестностью положения равновесия, считая, что положение равновесия находится в точке $q^1 = \ldots = q^n = 0$, назовём область такую, что
$$|q^i| < h, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Def 15.11. Областью $V > 0$ назовём какую-либо область окрестности положения равновесия, в которой $V(x_1, x_2, \ldots, x_m) > 0$. Поверхность $V = 0$ назовём границей области $V > 0$.

Thr 15.12 (Теорема Читаева о неустойчивости)**.** *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция $V(x_1, \ldots, x_m)$ такая, что в сколь угодно малой окрестности положения равновесия существует область $V > 0$ и во всех точках области $V > 0$ производная $\dot{V}$ в силу уравнений принимает положительные значения,* ***то*** *невозмущенное движение неустойчиво.*

Def 15.13. Функцию V, удовлетворяющую теореме Читаева о неустойчивости, называют *функцией Читаева.*

Thr 15.14 (I теорема Ляпунова о неустойчивости движения)**.** *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция $V(x_1, \ldots, x_m)$ такая, что ее производная $\dot{V}$ в силу этих уравнений есть функция знакоопределенная, сама функция V не является знакопостоянной, противоположного с $\dot{V}$ знака, то невозмущенное движенние неустойчиво.*

Thr 15.15 (II теорема Ляпунова о неустойчивости движения)**.** *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция V такая, что её производная, в силу этих уравнений, в области положения равновесия может быть представлена в виде*
$$\dot{V} = æV + W,$$
где æ – положтельная постоянная, а W ***или*** *тождественно обращается в нуль,* ***или*** *представляет собой знакопостоянную функцию. Если W – знакопостоянная функция, а V* ***не является*** *знакопостоянной функцией: $WV < 0$,* ***то*** *невозмущенное движение неустойчиво (ну и если $w \equiv 0$).*

15.4 Влиянение диссипативных и гироскопических сил на устойчивость равновесия консервативной системы

Влияние гироскопических сил и диссипативных сил с полной диссипацией на устойчивое положение равновесия голономнои системы

Thr 15.16 (Теорема Томсона-Тэта-Четаева)**.** *Если в некотором изолированном положении равновесия потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то при добавлении гироскопических и диссипативных сил с полной диссипацией это положение равновесия становится асимптотически устойчивым.*

Влияние гироскопических и диссипативных сил на неустойчивое равновесие

Разложим до квадратичных членов кинетическую и потенциальную энергию системы, и приведем к каноническому виду
$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{\theta}_i^2, \qquad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \theta_i^2.$$
Если Π положительно определена, то все величины λ_i положительны, и положение устойчиво. Если же присутствуют отрицательные λ_i, то положение равновесия неустойчиво (по теореме о неустойчивости по первому приближению).

Def 15.17. Величины λ_i Пуанкаре предложил называть *коэффициентами устойчивости.* Число отрицательных коэффициентов устойчивости называется *степенью неустойчивости.*

Thr 15.18. ***Если*** *среди коэффициентов устойчивости хотя бы один является отрицательным,* ***то*** *изолированное положение равновесия не может быть стабилизировано диссипативными силами с полной диссипацией.*

Thr 15.19. ***Если*** *степень неустойчивости изолированного положения равновесия консервативной системы нечетна,* ***то*** *стабилизация его добавлением гироскопических сил невозможна.* ***Если*** *степень неустойчивости четна,* ***то*** *гироскопическая стабилизация возможна.*

Thr 15.20. ***Если*** *изолированное положение равновесия консервативной системы имеет отличную от нуля степень неустойчивости,* ***то*** *оно остается неустойчивым при добавлении гироскопических сил и диссипативных сил с полной диссипацией.*

Def 15.21. Устойчивость, существующую при одних потенциальных силах, называют *вековой*, а устойчивость, полученную с помощью гироскопических сил, – временной.