# Задание по курсу «Аналитическая механика II»

**Авторы**: Хоружий Кирилл

**От**: *26 февраля 2021 г.*

## Содержание

# 1 Первое задание по аналитической механике.

## 1.1 Малые колебания консервативных систем (✓)

### 16.11

Введём ось $OX$ координат вдоль туннеля, выбрав в качестве $x = 0$ положение равновесия. Тогда кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

Интегрируя силу, действующую на тело, находим потенциальную энергию

$$F_x = -\frac{GM(x)m}{r^2(x)} \cdot \frac{x}{r} = -G\varkappa x, \qquad \frac{G\varkappa R^3}{R^2} = g, \quad \Rightarrow \quad \Pi = \int F\,dx = \frac{1}{2}\frac{g}{R}x.$$

Так удачно вышло, что $T$ и $\Pi$ – квадратичные формы. Запишем вековое уравнение:

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2} - \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{g}{R}, \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

### 16.33

Выбрав оси, как показано на рисунке, получим систему с 2 степенями свободы. Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right).$$

Потенциальная энергия для трёх пружинок (сдвинутая так, чтобы положение равновесия был 0)

$$\Pi = \frac{c}{2}(x_2)^2 + \frac{c}{2}(x_1)^2 + \frac{2c}{2}\left(x_2 - x_1\right)^2.$$

И снова так вышло, что $T$ и $\Pi$ – квадратичные формы, так что

$$\det\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^i \partial q^j} - \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \det\left[c\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3\end{pmatrix} - \lambda m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right] = 0, \quad \Rightarrow \quad (\lambda m)^2 + 9c^2 - 6\lambda mc - 4c^2 = 0.$$

Соответственно находим квадраты частот

$$\lambda^2 - 6\lambda\frac{c}{m} + 5\frac{c^2}{m^2} = \left(\lambda_1 - \frac{c}{m}\right)\left(\lambda_2 - 5\frac{c}{m}\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 : \begin{pmatrix} -2c & 2c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}; \\ \lambda_1 : \begin{pmatrix} 2c & 2c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1\end{pmatrix}.\end{cases}$$

Соответственно, уравнение движения будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t + \alpha_1\right) + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{5c}{m}}\,t + \alpha_2\right).$$

### 16.47

Запишем с учётом малости колебаний кинетическую энергию системы

$$T = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}\left(l\dot{\varphi}_2 + l\dot{\varphi}_1\right)^2.$$

И, опять же, с учетом малости, потенциальную

$$\Pi = \frac{c}{2}\left((l\varphi_1)^2 + (l\varphi_1 + l\varphi_2)^2\right) + mgl\cos\varphi_1 + mgl(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) =$$
$$= \frac{c}{2}\left((l\varphi_1)^2 + (l\varphi_1 + l\varphi_2)^2\right) + 2mgl\left(1 - \frac{\varphi_1^2}{2}\right) + mgl\left(1 - \frac{\varphi_2^2}{2}\right).$$

Как обычно, получив квадратичные формы (хотя бы в малом приближение) радуемся и переходим к поиску частот собственных колебаний

$$\det\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^i \partial q^j} - \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \det\left[\begin{pmatrix} 2cl^2 - 2mgl & cl^2 \\ cl^2 & cl^2 - mgl\end{pmatrix} - \lambda ml^2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\right] = 0.$$

Раскрыв, получаем уравнение вида

$$2([cl^2 - ml^2\lambda] - mgl)^2 - [cl^2 - ml^2\lambda]^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{2}mgl}{\sqrt{2} \pm 1} = [cl^2 - ml^2\lambda], \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{c}{m} - 2\frac{g}{l} \mp \sqrt{2}\frac{g}{l}.$$

Теперь подставляем известные $\lambda$, и находим амплитудные векторы

$$\lambda_1 : \quad \begin{pmatrix} 2+2\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 : \quad \begin{pmatrix} 2-2\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Это позволяет нам записать уравнение движения малых колебаний (при $c/m > (2+\sqrt{2})g/l$)

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m} - \left(2+\sqrt{2}\right)\frac{g}{l}}\, t + \alpha_1\right) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m} - \left(2-\sqrt{2}\right)\frac{g}{l}}\, t + \alpha_2\right).$$

**16.64**

Запишем кинетическую энергию системы

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2\right) + \frac{nm}{2}\dot{x}_2^2.$$

И, считая 0 в положении равновесия, потенциальную энергию системы, запасенную в сжатых пружинах

$$\Pi = \frac{c}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{c}{2}(x_3 - x_2)^2.$$

В таком случае

$$\det\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^j} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \det\left[c\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0.$$

Раскрывая, приходим у уравнению на $\lambda$ вида

$$\lambda_1 \left(\lambda_2 - \frac{c}{m}\right)\left(\lambda_3 - \frac{(2+n)c}{nm}\right) = 0.$$

Соответственно, амплитудные векторы находим, как

$$\lambda_1 : \quad \begin{pmatrix} -c & 2c & -c \\ c & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 : \quad \begin{pmatrix} c & 2c-nc & c \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_3 : \quad \begin{pmatrix} c & nc & c \\ 0 & c & 2c/n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} n \\ -2 \\ n \end{pmatrix}.$$

Что ж, уравнение движения малых колебаний запишется в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (C_1 t + \alpha_1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\, t + \alpha_2\right) + C_3 \begin{pmatrix} n \\ -2 \\ n \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{(n+2)c}{nm}}\, t + \alpha_3\right).$$

**16.107**

Знаем, что кинетическая энергия и обобщенные силы для системы могут быть записаны в виде[1]

$$T = \frac{1}{2} a_{ik}\dot{q}_i \dot{q}_k, \qquad Q_i = b_{ik}\dot{q}_k,$$

где $a_{ik}$ – положительно определенная квадратичная форма, а $b_{ik} = -b_{ki}$ – кососимметричная квадратичная форма.

Запишем уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad \Rightarrow \qquad a_{ik}\ddot{q}_k = b_{i\alpha}\dot{q}_\alpha.$$

Осталось этот набор уравнений решить.

Воспользуемся алгоритмом приведения двух квадратичных форм к каноническому виду. Выберем в качестве скалярного произведения $a_{ik}$, в терминах $a_{ik}$ выберем ортогональный базис так, чтобы $a_{ik}$ было равно $\delta_{ik}$.

[1] С глубоким сожалением вынуждены оставить баланс индексов в рамках этой задачи. Немое суммирование подразумевается, при повторение индексов.

Повернём через $u_{ik}$ базис, приведя $b_{ik}$ к каноническому виду $b^*_{jl}$, указанному в условии с $m$ блоков $2\times 2$.

$$\begin{cases} \delta_{ik}\ddot{q}_k = b_{i\alpha}\dot{q}_\alpha, \\ u_{kj}q^*_j = q_k \end{cases} \Rightarrow \quad u^{-1}_{li}\cdot\left(\delta_{ik}u_{kj}\ddot{q}^*_j = b_{i\alpha}u_{\alpha\beta}\dot{q}^*_\beta\right) \quad \overset{\sqsupset i=1}{\Rightarrow} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{q}^*_1 \\ \ddot{q}^*_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{q}^*_1 \\ \dot{q}^*_2 \end{pmatrix}.$$

И таких систем с колебаниями у нас будет $m$ штук

$$\begin{cases} \ddot{q}^*_1 = -\nu\dot{q}^*_2 \\ \ddot{q}^*_2 = -\nu\dot{q}^*_1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \dddot{q}^*_1 = -\nu\ddot{q}^*_2 \\ \dddot{q}^*_2 = -\nu\ddot{q}^*_1 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} q^*_1 = \dfrac{A}{\nu}\cos(\nu t+\alpha) + C_1 \\ q^*_2 = \dfrac{A}{\nu}\sin(\nu t+\alpha) + C_2. \end{cases}$$

Нули же в каноническом виде $b_{ij}$ будут соответствовать трансляциям

$$q^* = At + B.$$

Собирая всё вместе, находим, что

$$q_\alpha = u_{\alpha i}q^*_i, \qquad q^*_i = \begin{cases} (A_j/\nu_j)\cdot\cos(\nu_j t+\alpha_j) + B_{2j-1} & \text{при } i = 2j-1 \leqslant 2m; \\ (A_j/\nu_j)\cdot\sin(\nu_j t+\alpha_j) + B_{2j} & \text{при } i = 2j \leqslant 2m; \\ (A_j)\cdot t + B_j & \text{при } i = j > 2m. \end{cases}$$

## 1.2 Диссипативные системы и вынужденные колебания

### 17.11 (а)

Известно, что система описывается, как

$$\begin{cases} \ddot{x}+\ddot{x}+x-\alpha y = 0 \\ \ddot{y}+\dot{y}-\beta x+y = 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad A = B = E, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда запишем уравнение на собственные числа

$$\det\left(A\lambda^2 + B\lambda + C\right) = \det\begin{vmatrix} \lambda^2+\lambda+1 & -\alpha \\ -\beta & \lambda^2+\lambda+1 \end{vmatrix} = 0,$$

Раскрывая,

$$(\lambda^2+\lambda+1)^2 + \beta\alpha = \left(\lambda^2+\lambda+1-i\gamma\right)\left(\lambda^2+\lambda+1+i\gamma\right) = 0.$$

Получается, что

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{\pm 4i\gamma - 3}\right),$$

где введено обозначение $\gamma = \sqrt{\beta\alpha}$. По теореме об асимптотической устойчивости достаточно, чтобы $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, соответственно найдём все $\gamma$ удовлетворяющие этому условию.

Пусть $\alpha\cdot\beta < 0$, тогда $\gamma = i\sqrt{|\alpha\beta|}$, или

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{\mp 4\varkappa - 3}\right), \quad \Rightarrow \quad |4\varkappa - 3| < 1, \quad \Rightarrow \quad |\varkappa| = |\alpha\beta| < 1,$$

где было введено обозначение $\varkappa = |\alpha\beta|$.

При $\alpha\cdot\beta > 0$ верно, что $\gamma = \varkappa^2$, тогда

$$\operatorname{Re}\sqrt{z} = \operatorname{Re}\left(\sqrt{|z|}\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi k\right)\right) < 0, \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a^2+b^2}\,\frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) < 1,$$

где комплексное число под корнем было представлено как $a+ib$. Тогда

$$\sqrt{9+\partial\varkappa^2} - 3 < 2, \quad \Rightarrow \quad 9 + 16\varkappa^2 < 5, \quad \Rightarrow \quad |\alpha\beta| < 1.$$

Получается достаточным условием асимптотической устойчивости является условие $|\alpha\beta| < 1$.

### 17.8

Ниже представлено решение прикольной задачи по линейной алгебре, и отсутствует доказательное решение. По-хорошему можно просто записать функцию Ляпунова, как в ответах, и всё. Диссипация не является полной в этой системе.

Для начала рассмотрим систему, в которой нижний грузик привязан к полу пружинкой жесткости $c_{n+1} = 0$, так матрица для потенциальной энергии станет немного симметричнее.

Выберем в качестве координат положения грузиков, где $q^i = 0$ соответствует положению равновесия $i$-го груза. Запишем потенциальную энергию системы
$$2\Pi = c_1 q_1^2 + c_2(q_1 - q_2)^2 + \ldots + c_n(q_n - q_{n-1})^2 + c_{n+1} q_{n+1}^2.$$
Тогда матрица потенциальной энергии $C$ примет вид
$$C_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^j}, \quad \Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & & \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 & \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & & \\ & 0 & & \ddots & -c_n \\ & & & -c_n & c_n + c_{n+1} \end{pmatrix}$$
Запишем уравнение Лагранжа второго рода, и рассмотрим систему в линейном приближении
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q_i, \quad \Rightarrow \quad A\ddot{\boldsymbol{q}} + B\dot{\boldsymbol{q}} + C\boldsymbol{q} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = A\ddot{\boldsymbol{q}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + C\dot{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{q} = -B\dot{\boldsymbol{q}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} = -\beta \dot{q}_n^2.$$
Получается, что диссипация является полной, а значит имеет смысл вспомнить теорему о добавлении в систему диссипативных сил с полной диссипацией.

**Thr 1.1** (Теорема Томсона-Тэта-Четаева)**.** *Если в некотором изолированном положении равновесия потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией (и/или гироскопических) это положение равновесия становится асимптотически устойчивым.*

По теореме Лагранжа-Дирихле положение равновесия $\boldsymbol{q} = 0$ устойчиво, если в положение равновесия достигается локальный минимум потенциала $\Pi$. Получается остается показать, что матрица $C$ положительно определена, или, по критерию Сильвестра, что все угловые миноры $\Delta_i$ матрицы $C$ положительны.

Посчитав несколько миноров ручками, приходим к виду $\Delta_i$, которое докажем по индукции.

Предположение: $\Delta_n = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod\limits_{j=1}^{n+1} c_j$

База: $\Delta_2 = \det \begin{Vmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{Vmatrix} = c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_1 c_3 = \sum\limits_{i=1}^{2+1} \frac{1}{c_i} \left( \prod\limits_{j=1}^{2+1} c_j \right)$

Переход:
$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &\overset{\text{(I)}}{=} (c_{n+1} + c_{n+1})\Delta_n - c_{n+1}^2 \Delta_{n-1} = \\ &= c_{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j + c_{n+2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j - c_{n+1}^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n} c_j = \\ &= c_{n+2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j + c_{n+1} \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j + \frac{1}{c_{n+1}} \prod_{j=1}^{n+1} c_j \right) - c_{n+1}^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n} c_j = \\ &\overset{\text{(II)}}{=} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+2} c_j + \frac{1}{c_{n+2}} \prod_{j=1}^{n+2} c_j = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+2} c_j, \qquad \text{Q. E. D.} \end{aligned}$$
Действительно, первый переход (I) получается, раскрытием определителя $\Delta_{n+1}$ по нижней строчке. В переходе (II) были сделаны замены, вида
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j = c_{n+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n} c_j; \quad \prod_{j=1}^{n+1} c_j = \frac{1}{c_{n+2}} \prod_{j=1}^{n+2} c_j; \quad c_{n+2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+2} c_j.$$
Полученная формула для $\Delta_n$ ясно даёт понять, что $\Delta_i > 0$ для $i = 1, \ldots, n$, что доказывает положительную определенность $C$, а значит и локальный минимум потенциала $\Pi$ достигается в положение равновесия $\boldsymbol{q} = 0$.

Таким образом выполняются условия теоремы Лагранжа-Дирихле, как и условия теоремы Томсона-Тэта-Четаева, а значит положение равновесия $\boldsymbol{q} = 0$ является асимптотически устойчивым.

**17.20**

Запишем систему в матричном виде
$$A\ddot{\boldsymbol{q}} + B\dot{\boldsymbol{q}} + C\boldsymbol{q} = 0,$$

и воспользуемся теоремой Ляпунова об асимптотической устойчивости. Действительно, существует функция, такая, что
$$V = E = T + \Pi = \frac{1}{2}a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + \frac{1}{2}c_{\alpha\beta}q^\alpha q^\beta > 0.$$
В силу уравнений движения
$$\frac{dE}{dt} = a_{ij}\ddot{q}^i\dot{q}^j + c_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha q^\beta = -b_\gamma(\dot{q}^\gamma) < 0,$$
из чего следует асимптотическая устойчивость системы.

**17.28**

Есть некоторая система такая, что
$$\begin{cases} \dot{x}^1 = \alpha_1(x^2 - x^1), \\ \dot{x}^2 = \alpha_2(x^3 - x^2), \\ \quad\ldots \\ \dot{x}^n = \alpha_n(x^1 - x^n) \end{cases}$$
и снова найдём функцию Ляпунова, например, $V$ вида
$$2V = \frac{1}{\alpha_1}(x_1 - a)^2 + \frac{1}{\alpha_2}(x_2 - a)^2 + \ldots + \frac{1}{\alpha_n}(x_n - a)^2,$$
тогда, в силу уравнений системы,
$$\dot{V} = \frac{\dot{x}_1}{\alpha_1}(x_1 - a) + \ldots + \frac{\dot{x}_n}{\alpha_n}(x_n - a) = (x_1 - a)(x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - a)(x_1 - x_n) =$$
$$= -\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} + x_n x_1 = -\frac{1}{2}(x_n^2 - 2x_n x_1 + x_1^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+1})^2 < 0,$$
аналогично №17.20, по теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости, положение равновесия системы асимптотически устойчиво.

**18.17**

Известно что на груз действуют две силы
$$F_1(t) = A_1 \sin\omega_1 t, \qquad F_2(t) = A_2\cos\omega_2 t,$$
и сопротивление среды $F = -\beta v$.

Запишем кинетическую и потенциальную энергию системы
$$T = \frac{m}{2}\dot{q}^2, \qquad \Pi = \frac{c}{2}q^2.$$
Из уравнений Лагранжа второго рода находим
$$m\ddot{q} + \beta\dot{q} + cq = F_1 + F_2 = A\sin(\omega_1 t) + B\cos(\omega_2 t).$$
Для начала найдём собственные колебания системы
$$m\lambda^2 + \beta\lambda + c = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4mc}}{2m}.$$
Найдём теперь частные решения для вынужденных колебаний, в виде
$$q = \alpha_1\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \alpha_2\sin(\omega_2 t + \varphi_2),$$
подставляя в уравнения движения получам, что (рассмотрим $\omega_1$, для $\omega_2$ рассуждения аналогичны)
$$\sin(\omega_1 t + \varphi_1)(x - m\omega_1^2) + \cos(\omega_1 t + \varphi_1)\omega_1\beta = \frac{A}{\alpha_1}\sin\omega_1 t, \quad \Rightarrow \quad \sin(\omega_1 t + \varphi_1 + \varkappa) = \frac{A}{\alpha_1}\frac{\sin\omega_1 t}{\sqrt{(c - m\omega_1)^2 + \beta^2\omega_1^2}},$$
где $\varkappa$ такая, что
$$\cos\varkappa = \frac{c - m\omega_1^2}{\sqrt{(\omega_1\beta)^2 + (c - m\omega_1)^2}}.$$
Сравнивая выражения, находим константы
$$\begin{cases} \varphi_1 = -\varkappa_1 \\ \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2} - \varkappa_2 \end{cases} \qquad \alpha_i(\omega_i) = \frac{A_i}{\sqrt{(m\omega_i - c)^2 + \omega_i^2\beta^2}},$$

и подставляем в ответ

$$q = \alpha_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \alpha_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

**18.31**

И снова запишем кинетическую и потенциальную энергию системы, как

$$T = \frac{1}{2} J \left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right), \qquad \Pi = \frac{c}{2}\varphi_1^2 + \frac{c}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)^2.$$

Из уравнений Лагранжа второго рода перейдём к систем[2]

$$\begin{gathered} J\ddot{\varphi}_1 + c(2\varphi_1 - \varphi_2) = M_0 \sin\omega t \\ J\ddot{\varphi}_2 + \beta\dot{\varphi}_2 + c(\varphi_2 - \varphi_1) = 0. \end{gathered}$$

Искать собственные числа здесь оказалось плохой идеей, так что просто будем искать решение в виде

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}.$$

Для первого слагаемого

$$\begin{cases} -J\omega^2 a_1 + ca_1 - ca_2 = \mathcal{M} \\ -J\omega^2 a_2 + \beta i\omega a_2 + ca_2 - ca_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1(c - J\omega^2) - ca_2 = \mathcal{M} \\ a_2(c - J\omega^2 + i\beta\omega) = ca_1 \end{cases}$$

Для второго слагаемого

$$\begin{cases} -J\omega^2 b_1 + cb_1 - cb_2 = -\mathcal{M} \\ -J\omega^2 b_2 - \beta i\omega b_2 + cb_2 - cb_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{b_2}{c}(c - J\omega^2 - i\beta\omega) \\ b_2 \left(\dfrac{c - J\omega^2}{c}(c - J\omega^2 + i\beta\omega - c)\right) = -\mathcal{M} \end{cases},$$

где $\mathcal{M} = M_0/(2i)$. Также хочется ввести некоторые постоянные

$$\varkappa = \frac{c - J\omega^2}{c}(c - J\omega^2 + i\beta\omega) - c, \qquad \xi = \frac{c - J\omega^2}{c}(c - J\omega^2 + i\beta\omega - c), \qquad \eta =$$

тогда получим хорошие выражения для искомых переменных

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{\mathcal{M}}{\varkappa}\dfrac{c - J\omega^2 + i\beta\omega}{c} \\ a_2 = \dfrac{\mathcal{M}}{\varkappa} \end{cases}, \qquad \begin{cases} b_1 = -\dfrac{\mu}{\xi}\dfrac{c - J\omega^2 - i\beta\omega}{c} \\ b_2 = -\dfrac{\mu}{\xi} \end{cases}.$$

Теперь их можно поставить в решение уравнения и получить ответ:

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}.$$

**18.37**

Момент инерции стержня $J = \frac{1}{3}ml^2$, тогда, считая отклонения малыми, кинетическую и потенциальную энергию системы можем записать, как

$$T = \frac{1}{2} J \left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2\right), \qquad \Pi = \frac{1}{2}c(\varphi a - \psi a)^2 + \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} + 1 - \frac{\psi^2}{2}\right) mg\frac{l}{2}.$$

Переходя в СО движущейся платформы, к системе добавляется инерциальная сила

$$M = \frac{mA}{2}\sin(\omega t)\omega^2 l,$$

действующая на центры масс стержней.

С помощью уравнений Лагранжа второго рода переходим к уравнениям вида

$$A\ddot{\boldsymbol{q}} + C\boldsymbol{q} = M, \qquad A = J\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a^2c + mgl & -2ca^2 \\ -2ca^2 & 2a^2c + mgl \end{pmatrix}$$

Из векового уравнения теперь можем найти собственные частоты системы, для получения однородного решения

$$\det(C - \lambda A) = 0, \quad \Rightarrow \quad \left(mg\frac{l}{2} - J\lambda\right)\left(a^2c + mg\frac{l}{2} - J\lambda\right) = 0,$$

[2] Тут при решении была потеряна двойка, выделенная красным цветом, но перерешивать как-то грустно.

откуда легко находим $\lambda$

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}\frac{g}{l}, \qquad , \quad \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = \frac{3}{2}\frac{g}{l} + \frac{6ca^2}{ml^2}, \qquad \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

из которых уже можем составить ФСР.

Теперь перейдём к поиску частного решения[3] :

$$\varphi = \alpha\sin(\omega t), \psi = \beta\sin(\omega t), \quad \Rightarrow \quad -A\omega^2\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} + C\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \frac{mA\omega^2 l}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.,$$

вводя матрицу

$$\Lambda = C - A\omega^2, \quad \Rightarrow \quad \Lambda\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \frac{mA\omega^2 l}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \Lambda^{-1}\frac{mA\omega^2 l}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Считая $\Lambda^{-1}$, находим частное решение и получаем ответ

$$\begin{pmatrix}\varphi\\\psi\end{pmatrix} = \frac{3A\omega^2}{3g - 2l\omega^2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\sin(\omega t) + C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}}\,t + \alpha_1\right) + C_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l} + \frac{6ca^2}{ml^2}}\,t + \alpha_2\right).$$

**18.62**

Известно, что кинетическая и потенциальная энергия системы могут быть записаны, как

$$T = \frac{1}{2}a_{ik}\dot{q}^i\dot{q}^k, \qquad \Pi = \frac{1}{2}c_{ik}q^i q^k.$$

С помощью уравнений Лагранжа второго рода можем перейти к системе

$$A\ddot{\boldsymbol{q}} + C\dot{q} = A\boldsymbol{u}_1\gamma\sin(\omega t).$$

Так как $A$, $C$ – (невырожденные) положительно-определенные симметричные квадратичные формы, то они во-первых обратимы, а во вторых коммутируют (т.к. одновременно приводятся к диагональному виду), а значит и $A^{-1}C$ симметрична, соответственно имеет ортогональный базис.

Собственно, известно, что

$$\begin{cases}\det(C - \lambda_i A) = 0\\(C - \lambda_i A)\boldsymbol{u}_i = 0,\end{cases} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}C\,\boldsymbol{u}_i = \lambda_1\boldsymbol{u}_i.$$

Перейдём к базису из собственных векторов (и переменным $\theta$), тогда уравнения примут вид

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\dot{q} = \begin{pmatrix}1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\gamma\sin(\omega t).$$

Так как резонанс возможен только на собственных частотах системы, и $\lambda_1 = \omega_1^2$, то единственная частота, на которой возможен резонанс равна $\omega_1$.

[3]Так как по условию $\varphi$ и $\psi$ малые, то про резонанс говорить не приходится.

## 1.3 Элементы теории бифуркаций в нелинейных системах

### T2

Рассмотрим уравнение вида

$$\dot{x} = (x-a)(x^2-a),$$

найдём положения равновесия

$$\dot{x} = 0, \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x = a \\ &x = \pm\sqrt{a}, \quad a > 0 \end{aligned}\right.$$

Соответственно, при неположительных $a$ существует единственное положение равновесия $x^* = a$, при поло-

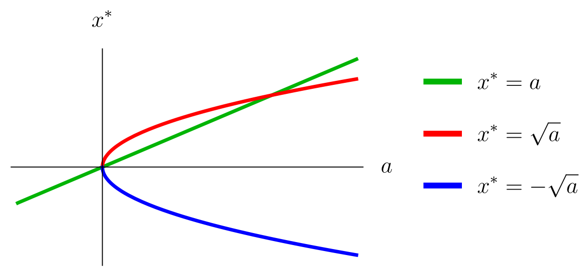


Рис. 1: Зависимость положения равновесия $x^*$ от параметра $a$ к №T2

жительных $a \neq 1$ существует три положения равновесия $x^* \in \{a, +\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$, и при $a = 1$ существует два положения равновесия $x^* \in \{+1, -1\}$. Соответствующие зависимости $\dot{x}(x, a)$ приведены на рисунке 2.

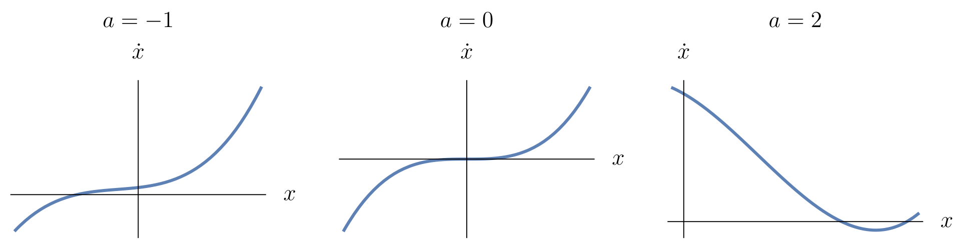


Рис. 2: Зависимость $\dot{x}(x)$ при различных $a$ к №T2

### T3

Исследуем систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = k\left(\dfrac{b}{a-x} - x\right) \end{cases}$$

Рассмотрим положение равновесия $\dot{x} = \dot{y} = 0$, при $x \neq a$

$$x^* = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\right),$$

что приводит нас к следующим случаям.

Пусть $a^2 = 4b$, тогда $x^* = a/2$, попробуем найти фазовый портрет по линейному приближению

$$\det(J - \lambda E) = \lambda^2 - k\left(\frac{b}{(a-x^*)^2} - 1\right) = k \cdot 0 = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0,$$

следовательно линейным приближением здесь не воспользоваться.

При $a^2 > 4b$,

$$x^* = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = \frac{a}{2} \pm \delta,$$

тогда

$$\lambda^2 = \frac{5}{4}(4b - a^2) \pm a\delta,$$

в случае $+a\delta$ $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = 0$, следовательно это *центр*, при $-a\delta$ получается $\lambda^2 = 100b - 9a^2 > 64b > 0$, следовательно это *седло*.

При $a^2 < 4b$ не существует положения равновесия, что приводит нас к физовым диаграммам аналогичным задаче T4.

### T4

Запишем уравнения Бине для движения в метрике Шварцшильда:

$$u'' + u = \frac{a}{2c^2}v^2 + \frac{3}{2}au^2,$$

где $r^2\dot\varphi = c,\ u = 1/r$. Перейдём к системе

$$\begin{cases} u' = y \\ y' = \dfrac{3}{2}au^2 + \dfrac{a}{2c^2}v^2 - u \end{cases}$$

положение равновесия которой находится в точке

$$y^* = 0, \qquad u^* = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 3\frac{v^2a^2}{c^2}}}{3a}.$$

Зависимость $u^*(c)$ представлена на рисунке, соответственно положение равновесия существует только при $c \geqslant \sqrt{3}va$, при чём при равенстве оно единственно.

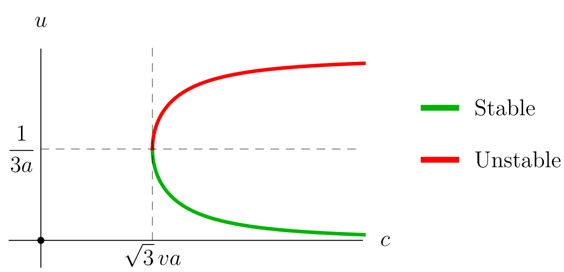


Рис. 3: Бифуркационная диаграмма стационарных точек уравнения Бине к №T4

Посмотрим на устойчивость положения равновесия

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3au - 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = 3au - 1 = \pm\sqrt{1 - 3\frac{v^2a^2}{c^2}},$$

получается плюсу соответствует седл, а минусу центр. Соответствующие фазовые портреты представлены на рисунке, при $a, v = 1$.

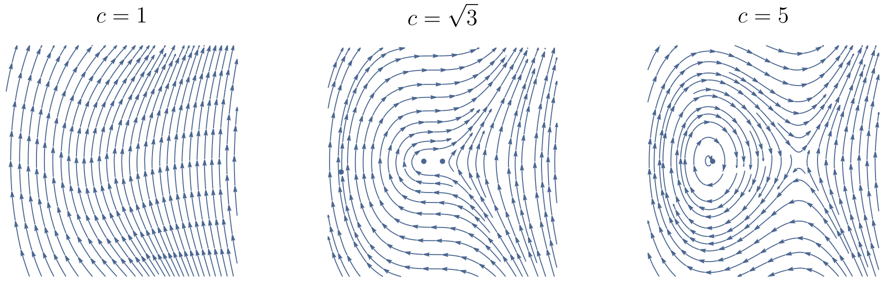


Рис. 4: Фазовый портрет системы №T4 (бифуркация при плавном изменение $c$)

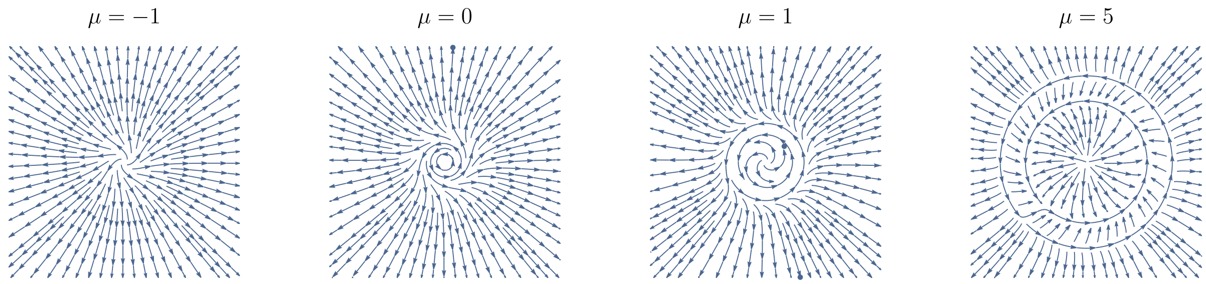


Рис. 5: Фазовый портрет системы №T5 (бифуркация при плавном изменение $\mu$)

### T5

Покажем существование предельного цикла, и нарисуем фазовые портреты для системы

$$\dot{x} = -y + x(\mu - x^2 - y^2)(\mu - 2x^2 - 2y^2)$$
$$\dot{y} = x + y(\mu - x^2 - y^2)(\mu - 2x^2 - 2y^2)$$

при различных параметрах $\mu$.

Перейдём к полярным координатам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = r\left((2r^4 - 3r^2\mu + \mu^2)\cos\varphi - \sin\varphi\right) \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = r\left((2r^4 - 3r^2\mu + \mu^2)\sin\varphi + \cos\varphi\right) \end{cases}.$$

Рассмотрим $\dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi = \dot{r}$, и $\dot{y}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi = r\dot{\varphi}$:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(2r^4 - 3r^2\mu + \mu^2) \\ r\dot{\varphi} = r \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{dr}{d\varphi} = r(2r^4 - 3r^2\mu + \mu^2).$$

Судя по виду уравнений можно предположить, что при некоторых $\mu$ производная $dr/d\varphi = 0$ (более аккуратные рассуждения будут проведены в задаче T6), тогда

$$(2r^4 - 3r^2\mu + \mu^2) = 2\left(r^2 - \frac{\mu}{2}\right)\left(r^2 - \mu\right) = 2\left(r^2 - r_1^2\right)\left(r^2 - r_2^2\right) = 0,$$

где $r_1^2 = \mu/2$ и $r_2^2 = \mu$. Соответсвенно при $\mu > 0$ существует периодическая траектория при $r \in \{r_1, r_2\}$. Из вида производной $\dot{r}$ знаем, что

$$\operatorname{sign}\dot{r} = \begin{cases} 1, & r \in (0, r_1) \cup (r_2, +\infty) \\ -1, & r \in (-r_1, r_2) \end{cases}$$

Следовательно траектория $\dot{\varphi} = 1,\ r = r_2$ является неустойчивой, а $\dot{\varphi} = 1,\ r = r_2$ устойчива, а соответсвенно и является предельным циклом.

При отрицательных $\mu$ существует единственное положение равновесия в $x = y = 0$, являющееся устойчивым фокусом (см. вид $\dot{r}$), а при $\mu > 0$ становится неустойчивым фокусом. Таким образом приходим к фазовым портретам изображенным на рисунке 5.

### T6

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = -y + \mu x - xy^2,$$
$$\dot{y} = \mu y + x - y^3.$$

Аналогично T5 перейдём к полярным координатам, и выразим $\dot{\varphi}$ и $\dot{r}$, так вышло, что и здесь всё хорошо, и

$$\begin{cases} r\dot{\varphi} = r \\ \dot{r} = r\mu - r^3\sin^2(\varphi) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{dr}{d\varphi} = r(\mu - r^2\sin^2\varphi).$$

Найдём значения $r = r_*$, где $\dot{r}$ меняет знак

$$r_*^2 = \mu\sin^{-2}\varphi,$$

что возможно только при $\mu > 0$. Аналогично предыдущей задаче рассмотрим $\operatorname{sign}\dot{r}$, и получим

$$\operatorname{sign}\dot{r} = \begin{cases} 1 & r < r_* \\ -1 & r > r_* \end{cases}$$

Подробнее рассмотрим положение равновесия $x = y = 0$, которое в силу постоянства $\dot\varphi$ единственное. В линейном приближение,

$$J = \begin{pmatrix} \dot x'_x & \dot x'_y \\ \dot y'_x & \dot y'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu - y^2 & -1-2xy \\ 1 & \mu - 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\det(J - \lambda E) = (\mu-\lambda)^2 + 1 = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = \mu \pm 1.$$

Тогда при $\mu < 0$, по теореме Ляпунова об устойчивости в линейном приближение, $x = y = 0$ – устойчивый фокус, при $\mu = 0$ верно, что $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, следовательно это центр, а при $\mu > 0$ фокус становится неустойчивым. Это позволяет прийти к фазовы портретам при различным значениям $\mu$, изображенным на рисунке 6.

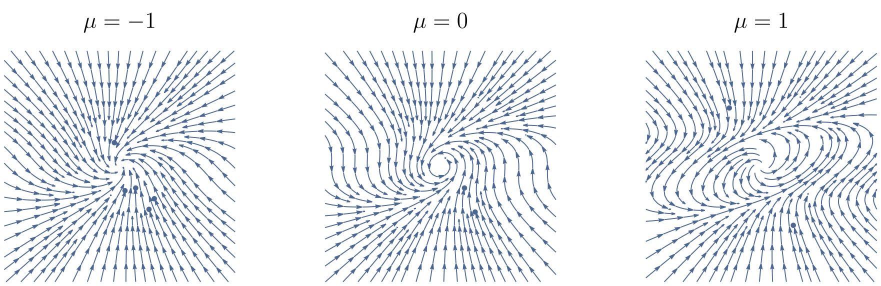


Рис. 6: Бифуркация Пуанкаре-Андронова-Хопфа к №Т6

## 1.4 Метод усреднения и метод нормальных форм в теории нелинейных колебаний

### Т7

Исследуем параметрический резонанс в уравнении Матьё

$$\ddot x + (a + \varepsilon \cos t)x = 0,$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$. Будем считать $a = 1 + c\varepsilon^2$, и рассматривать задачу относительно медленного времени $\tau = t$ и быстрого времени $T = \varepsilon^2 t$. Пусть также $a = 1 + c\varepsilon^2$, где $c =)(1)$. Величинами порядка $o(\varepsilon^2)$ пренебрежем.

Для начала перепишем дифференцирование по времени в терминах $T, \tau$:

$$d_t = \partial_\tau + \varepsilon^2 \partial_T,$$
$$d^2_{t,t} = \partial^2_{\tau,\tau} + 2\varepsilon^2 \partial_\tau \partial_T,$$

где слагаемым $\varepsilon^4 \partial^2_{T,T}$ пренебрегли.

Для поиска решения воспользуемся естественным анзацем, вида

$$x = x_0(\tau, T) + \varepsilon x_1(\tau, T) + \varepsilon^2 x_2(\tau, T),$$

тогда, после подстановки в уравнение Матье и группировки по степеням[4] $\varepsilon$, получим набор условий. При $\varepsilon^0$

$$\varepsilon^0: \quad \ddot x_0(\tau, T) + x_0(\tau, T) = 0,$$

следовательно

$$x_0 = A(T)e^{i\tau} + B(T)e^{-i\tau}.$$

При $\varepsilon^1$, подставляя значение $x_0$ находим, что

$$\varepsilon^1: \quad \ddot x_1(\tau, T) + x_1(\tau, T) = -\frac{1}{2}\left(A + B + Ae^{2i\tau} + Be^{-2i\tau}\right),$$

решая это дифференциальное уравнение относительно $x_1(\tau, T)$ находим, что

$$x_1(\tau, T) = \frac{1}{6}(Ae^{2i\tau} + Be^{-2i\tau}) + A_1(T)e^{i\tau} + B_1(T)e^{-i\tau} - \frac{1}{2}(A + B).$$

Наконец, подставим значения $x_0,\ x_1$ в коэффициент при $\varepsilon^2$. Здесь уже возможно возникновение резонанса, так как кроме части с $\ddot x_2 + x_2$ остаются периодичные слагаемые с единичной частотой. Хотелось бы, чтобы наше приближение работало, так что коэффициенты при резонансных слагаемых будем требовать равными 0. Тогда

[4] Коэффициент при каждой степени должен быть нулевым.

получаем два следующих условия на $A(T)$ и $B(T)$

$$2iB' = cB - A/4 - B/6$$
$$-2iA' = cA - B/4 - A/6$$

решая систему линейных дифференциальных уравнений, находим, что

$$\operatorname{Re} A(T) = C_1 \cos\left(\frac{1}{268}\sqrt{(c-5/12)(c+1/12)}\,T\right),$$
$$\operatorname{Re} B(T) = C_2 \cos\left(\frac{1}{268}\sqrt{(c-5/12)(c+1/12)}\,T\right),$$

при отрицательном аргументе корня, мы получим комплексный аргумент у косинуса, то есть гиперболический косинус, который неограниченно растёт, получается.