Вторая контрольная работа по теории вероятностей

Автор: Хоружий Кирилл

От: *18 мая 2021 г.*

1 Контрольная работа №2

Первая задача

Вероятность выпадения решки равна $p_0 = 0.42$. Монетка подброшена 1000 раз, и решка выпала 360 раз. Сколько раз необходимо подрбросить такую же монетку, чтобы доля выпавших решек отличалась от p_0 менее, чем в первые 1000 бросков с вероятностью $p_1 = 0.95$.

Thr 1.1 (ЦПТ Ляпунова). *Пусть ξ_1, ξ_2, … – независимые и одинакоово распределенные случайные величины с конечной и ненулевой дисперсией: $0 < \mathrm{D}\,\xi_1 < \infty$. Тогда имеет место слабая сходимость*

$$\frac{S_n - n\,\mathrm{E}\,\xi_1}{\sqrt{n\,\mathrm{D}\,\xi_1}} \underset{n\to\infty}{\to} \mathrm{N}_{0,1}, \qquad S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n.$$

последовательности центрированных и нормированных сумм случайных величин к стандартному нормальному распределению.

Точнее S_n стремится к N_{a,σ^2}, где в пределах данной задачи верно, что $A = n\,\mathrm{E}\,\xi_1 = 0.42n$, а $\sigma = \sqrt{n\,\mathrm{D}\,\xi_1} = \sqrt{n0.42(1-0.42)} = \sqrt{npq}$.

По условиям задачи требуется попадание в интервал $[a, b] = [0.36n,\ 0.48n]$. Тогда

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-A)^2}{2\sigma^2}\right) = \Phi\left(\sqrt{n}\frac{A-a}{\sqrt{2pq}}\right) = 0.95, \qquad \Rightarrow \qquad n = \frac{2X^2pq}{(A-a)^2} = 260,$$

где $X = 1.38$ можно найти по таблице.

Вторая задача

Известно, что ковариационная матрица случайного вектора $(X,\,Y,\,Z)^{\mathrm{T}}$ равна

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ -1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Хочется найти все возможные значения λ, а также λ, соответсвующий минимальной вариации величины $\xi = X + \lambda Y - 2Z$.

Для начала поймём возможные значения λ: матрица неотрицательно определена, а значит, по критерию Сильвестра:

$$\det M = 7 - 2\lambda - 2\lambda^2 > 0, \qquad \Rightarrow \Big/ \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{15}\right) \Big/ \Rightarrow \qquad \lambda \in \left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2};\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}\right].$$

Теперь можем найти оптимальное значение λ для $\boldsymbol{\xi} = X + \lambda Y - 2Z = (1,\ \lambda,\ -2)^{\mathrm{T}}$ в базисе (X, Y, Z):

$$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} M \xi = 2\lambda^2 - 10\lambda + 14 = 2\left(\lambda - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}, \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{5}{2}.$$

Однако можно заметить, что верхняя граница $(-1+\sqrt{15})/2 \approx 1.44 < 2.5$, следовательно минимум достигается на правой границе $\lambda_{\mathrm{opt}} = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{15}\right)$.

Четвертая задача

Известно, что плотность распределения переменной Y дана

$$f_Y(y) = C\exp\left(-y^2 + 4y - 10\right), \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Найдём константу C, а также матожидание и дисперсию Y.

Заметим, что $f_Y(y) = C\exp\left(-(y-2)^2 - 6\right) = \frac{C}{e^6}\exp\left(-(y-2)^2\right)$, – нормальное распределение с $\mathrm{E}\,Y = a = 2$. Осталось найти

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C}{e^6}\exp\left(-(y-2)^2\right)\,dy = \sqrt{\pi}Ce^{-6} = 1, \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{e^6}{\sqrt{\pi}}.$$

Итого, распределение перепишется в виде

$$f_\xi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{(y-2)^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}\right),$$

собственно $\mathrm{D}\, Y = \sigma^2 = 1/2$.

Пятая задача

Случайные величины $X_1, \ldots, X_{100}$ независимы и одинаково распределены, в частности с $N(0, \sigma^2)$, $\sigma = 2$. Найдём распределение вектора $(Y,\, Z)^{\mathrm{T}}$, где $Y = X_{61} + X_{62} + \ldots + X_{100}$, и $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_{80}$.

Lem 1.2. *Если две случайные величины $\xi \in N_{a_1, \sigma_1^2}$, $\eta \in N_{a_2, \sigma_2^2}$ независимы, то $\xi + \eta \in N_{a_1+a_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2}$.*

Lem 1.3. *Пусть есть две величины $\xi_1 \in N_{a_1, \sigma_1^2}$ и $\xi_2 \in N_{a_2, \sigma_2^2}$ с ковариациоей σ_{12}, тогда $\det \Sigma = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1-\rho^2)$, где $\rho = \sigma_{12}/(\sigma_1\sigma_2)$ – коэффицент корреляции. Плотность двумерного нормального распределения в этом случае:*

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^2 \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2} - \rho \frac{2(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right).$$

И это замечательно, ведь по условию X_i и X_j независимы при $i \neq j$, а тогда Y и Z распределены нормально. Получается, остается найти ковариацию $\rho(Y, Z)$, и мы найдём искомое распределение.

Для начала, $\mathrm{D}\, Y = 40\sigma^2$, $\mathrm{D}\, Z = 80\sigma^2$, также по условию $a_1 = a_2 = 0$. Ковариация Y и Z по линейности:

$$\operatorname{cov}\left(\textstyle\sum_{i=61}^{100} X_i,\, \sum_{j=1}^{80} X_j\right) = \sum_{i=61}^{100}\sum_{j=1}^{80} \operatorname{cov}(X_i, X_j) = 20\sigma^2, \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \frac{20}{\sqrt{40\cdot 80}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 2^{-3/2}.$$

где учтено, что

$$\operatorname{cov}(X_i,\, X_i) = \mathrm{E}\, X_i^2 - \mathrm{E}^2\, X_i = \mathrm{D}\, X_i = \sigma^2.$$

Итого, искомое распределение:

$$f(Y, Z) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \cdot 20\sqrt{7}} \exp\left(-\frac{1}{140\sigma^2}\left[2Y^2 - YZ + Z^2\right]\right).$$