

# ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ II»

---

Автор: Шишкин П.Е.

От: 22 апреля 2021 г.

## Содержание

<b>1 От авторов</b>	<b>2</b>
1.1 Шрифт для личных сообщений . . . . .	2
1.2 Благодарности . . . . .	2
1.3 Заходите в гости . . . . .	2
<b>2 I. Первые интегралы и их использование для решений автономных систем</b>	<b>2</b>
2.1 С. §14: 12 . . . . .	2
2.2 Ф.: 1149 . . . . .	3
2.3 Т1 . . . . .	4
2.4 С. §16: 5 . . . . .	5
2.5 С. §16: 26 . . . . .	6
<b>3 II. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка</b>	<b>6</b>
3.1 С. §17: 5 . . . . .	6
3.2 С. §17: 16 . . . . .	7
3.3 С. §17: 22 . . . . .	8
3.4 С. §17: 79 . . . . .	9
3.5 С. §17: 83 . . . . .	11
3.6 Т2 . . . . .	12
<b>4 III. Вариационное исчисление</b>	<b>13</b>
4.1 С. §19: 21 . . . . .	13
4.2 С. §19: 45 . . . . .	13
4.3 С. §19: 72 . . . . .	14
4.4 С. §19: 105 . . . . .	15
4.5 Т3 . . . . .	15
4.6 С. §20.1: 9 . . . . .	16
4.7 С. §20.1: 12 . . . . .	16
4.8 Т4 . . . . .	16
4.9 С. §20.2: 5 . . . . .	17
4.10 С. §20.3: 2 . . . . .	17
4.11 С. §21: 1 . . . . .	17
4.12 Т5* . . . . .	17

# 1 От авторов

## 1.1 Шрифт для личных сообщений

Меня попросили писать текст не имеющий отношения к решению как-то выделенно, поэтому отныне текст, который я пишу просто от души и сердца, будет написан курсивным шрифтом цвета лягушки в обмороке (я серьёзно, такой цвет есть)

## 1.2 Благодарности

Я благодарен \*список людей\* за \*причины\* *FIXME*

## 1.3 Заходите в гости

Заходите в гости, всегда всем рад :)

# 2 I. Первые интегралы и их использование для решений автономных систем

## 2.1 С. §14: 12

Исследовать при всех значениях вещественного параметра  $a$  поведение фазовых траекторий на всей фазовой плоскости для системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax(x^2 + y^2 - 2) \\ \dot{y} = -x + ay(x^2 + y^2 - 2) \end{cases} \quad (1)$$

Уравнение выглядит, как что-то в полярных координатах. Чем же, перейдём к ним

$$\begin{aligned} x &= r \sin(\varphi) & \dot{x} &= r \cos(\varphi)\dot{\varphi} + \dot{r} \sin(\varphi) \\ y &= r \cos(\varphi) & \dot{y} &= -r \sin(\varphi)\dot{\varphi} + \dot{r} \cos(\varphi) \end{aligned}$$

Откуда:

$$\begin{cases} r \cos(\varphi)\dot{\varphi} + \dot{r} \sin(\varphi) = r \cos(\varphi) + ar \sin(\varphi)(r^2 - 2) \\ -r \sin(\varphi)\dot{\varphi} + \dot{r} \cos(\varphi) = -r \sin(\varphi) + ar \cos(\varphi)(r^2 - 2) \end{cases}$$

Откуда можно получить

$$\begin{cases} \dot{r} = ra(r^2 - 2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$$

Здесь уже очевидны 3 случая: 1)  $a > 0$ , 2)  $a < 0$  3)  $a = 0$ . 1) неустойчивый предельный цикл радиуса  $\sqrt{2}$  2) устойчивый предельный цикл радиуса  $\sqrt{2}$  3) центр. Разница при различных знакопределённых параметрах будет в скорости "навивания" на предельный цикл, но характер движения будет схожий.

Кстати,  $\dot{\varphi} = 1$  - это первый интеграл. В целом мы сказали при каких параметрах, что но можно это всё безобразие построить 1. Чтобы было максимально красиво, построим фазовую диаграмму для  $r$  график в декартовых координатах и зависимость угла от радиуса. Кстати такая фигня с производной фи получилась из-за неклассической замены икса с синусом. Т.е. немного континтутивно что  $\varphi = 1$  это цикл по часовой стрелке, но и замена  $x = \sin(\varphi)$  это что-то безумное (я просто хотел кушать а не думать)

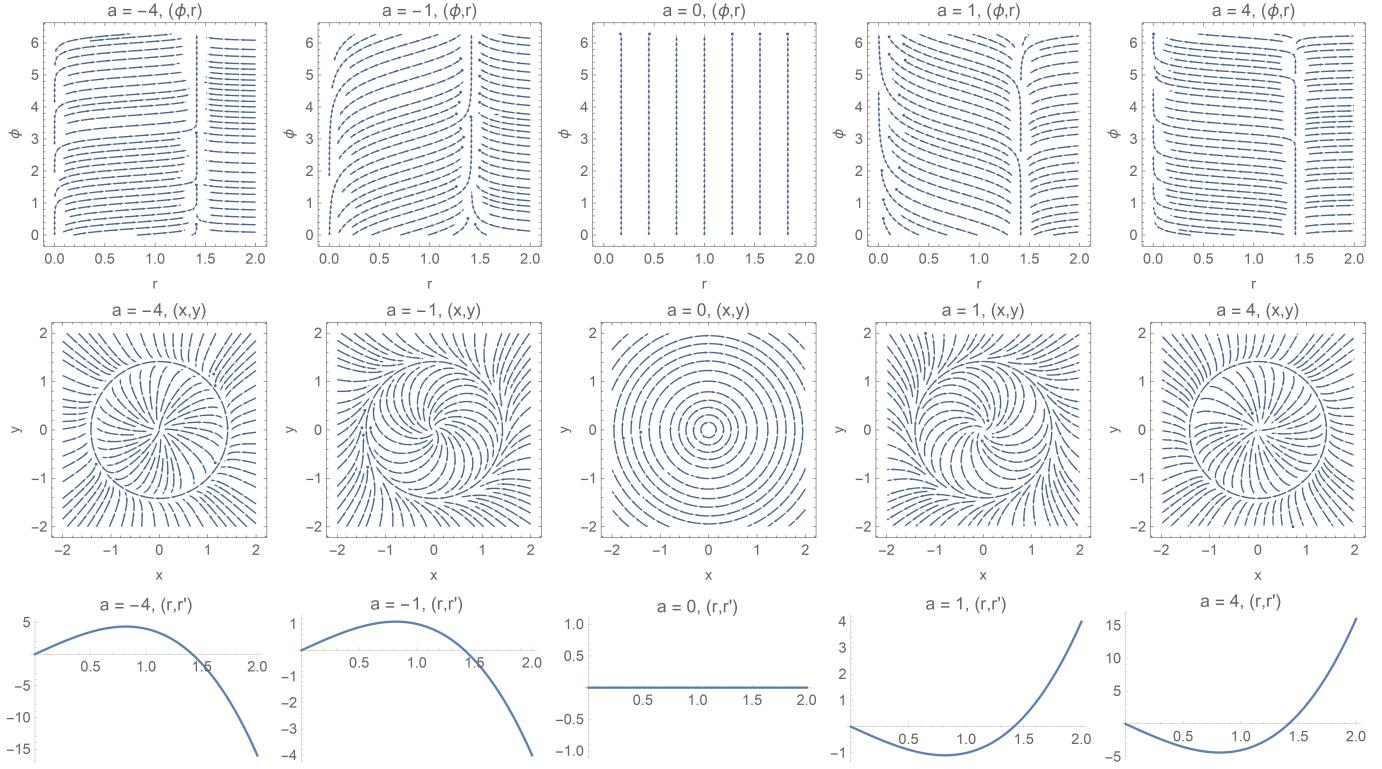


Рис. 1: Фазовые диаграммы 14.12 в различных координатах для различных параметров

## 2.2 $\Phi.: 1149$

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = x + y + z \\ \dot{z} = x - y \end{cases} \quad (2)$$

Довольно очевидно, что выделить 2 каких-то уравнения без третьей переменной тут не выйдет (*ну или я слишком слаб и не могу этого сделать*) поэтому воспользуемся правилом пропорции (чёрной магией):

$$A/B = C/D = E/F = k; \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0 \rightarrow \frac{\alpha A + \beta C + \gamma E}{\alpha B + \beta D + \gamma F} = k$$

Тогда можно записать учитывая  $k = dt$ :

$$\frac{\alpha dx + \beta dy + \gamma dz}{\alpha(y - x) + \beta(x + y + z) + \gamma(x - y)} = dt$$

Возьмём  $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1$  тогда знаменатель обнулится, а значит и числитель должен быть ноль (*на самом деле можно было бы сформулировать этот шаг гораздо проще, просто вычитая первое и третье уравнения друг из друга, но 1) правило пропорции весьма полезная штуковина в этих задачах, так что чего бы не сформулировать его, 2) обожаю делить на 0 эхэхэхэхэ*

Итак, мы получаем что:  $dx + dz = 0$  а значит мы нашли первый интеграл системы 2:  $C_1 = x + z$ . Подставим его

во второе и первое уравнения 2 и получим

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y+C_1} &= \frac{dx}{y-x} \\ y'(y-x) &= (y+C_1) \\ //y = x+t//\end{aligned}$$

нормальная замена, не обижайте её, не будьте как Дима(

$$\begin{aligned}tt' &= x+C_1 \\ t^2 &= x^2 + 2C_1x + C_2 \\ C_2 &= y^2 - 2xy + 2(x+z)x\end{aligned}$$

Найдены 2 ПИ. Осталось проверить их на независимость.

$$\operatorname{rg} \begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x} & \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_1}{\partial z} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x} & \frac{\partial C_2}{\partial y} & \frac{\partial C_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \operatorname{rg} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2y+4x+2z & 2y-2x & 2x \end{vmatrix} = 2$$

тут хочется сказать 2 вещи: 1) интегралов целая куча зависимых, и то что мой  $C_2$  не совпадает с ответом в задачнике, это ок, потому что они друг через друга выражаются 2) так-то очевидно что они независимы, всё-таки второй зависит от  $y$  а первый - нет; но на письмаках требуют считать ранг, потому проверяю так

Ответ:  $C_2 = y^2 - 2xy + 2(x+z)x$ ,  $C_1 = \frac{11(x+y)}{09.2002}$

## 2.3 Т1

Найти первые интегралы уравнений. Используя их, исследовать поведение траекторий на фазовой плоскости.  
а)  $\ddot{x} + \sin(x) = 0$

Сделаем замену  $\dot{x} = y$  тогда:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin(x) \end{cases}$$

по правилу пропорции и обнуляя знаменатель:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha dx + \beta dy}{\alpha y - \beta \sin(x)} &= dt \\ //\beta = y, \alpha = \sin(x)// \\ -\cos(x) + \frac{y^2}{2} &= C_1\end{aligned}$$

Второго первого интеграла тут не будет, иначе бы задача математического маятника решалась слишком легко. Зато у нас есть интеграл энергии. Из него можно немного подумать и получить различные ситуации:  $C_1 = 0$ ,  $C_1 > 0$ ,  $C_1 < 0$ . Подставив этот первый интеграл, можно сделать линеаризацию системы, получить что  $(2\pi n, 0)$  - центры,  $(\pi(2k-1), 0)$  - седла, и получить такое поведение: 2

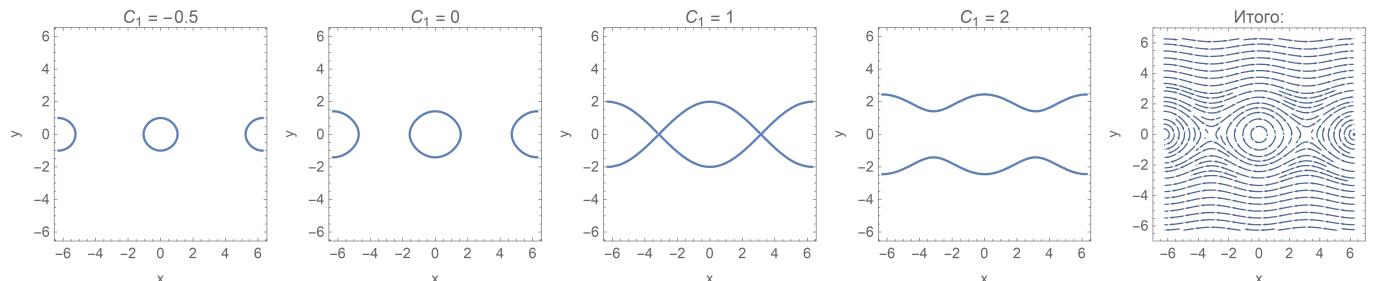


Рис. 2: T1(a)

б)  $\ddot{x} - x + x^2 = 0$

Сделаем замену  $\dot{x} = y$  тогда:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^2 \end{cases}$$

по правилу пропорции и обнуляя знаменатель:

$$\frac{\alpha dx + \beta dy}{\alpha y + \beta(x - x^2)} = dt$$

$$/\!\beta = y, \alpha = -(x - x^2) //$$

$$-3x^2 + 2x^3 + 3y^2 = C_1$$

Можно построить эту петельку: 3

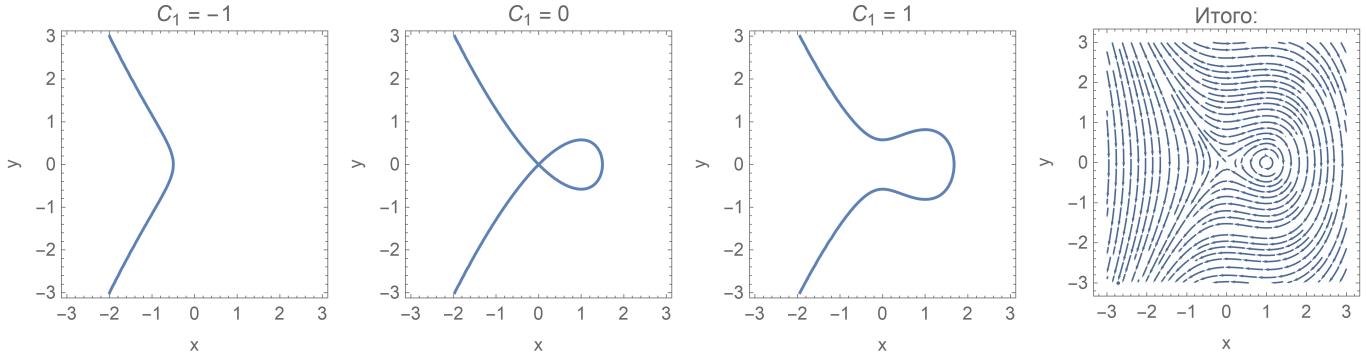


Рис. 3: Т1(б)

## 2.4 С. §16: 5

Найдя первый интеграл, решить систему в указанной области

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{x}{y}, \\ \dot{y} = \frac{y}{x}, (x > 0, y > 0). \end{cases} \quad (3)$$

Поскольку  $dx \frac{y}{x} + dy \frac{x}{y} = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y^2} &= -\frac{dx}{x^2} \\ \frac{1}{y} &= -\frac{1}{x} + C_1 \\ y &= \frac{x}{C_1 x - 1} \end{aligned}$$

Подставим  $y$  в первое уравнение 3:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 - C_1 x \\ \frac{dx}{1 - C_1 x} &= dt \\ x &= \frac{C_2}{C_1} e^{-C_1 t} + \frac{1}{C_1} \end{aligned}$$

Подставим  $x$  в  $y$  и получаем ответ:

Ответ:  $x = \frac{C_2}{C_1} e^{-C_1 t} + \frac{1}{C_1}$ ,  $y = \frac{e^{C_1 t}}{C_1 C_2} + \frac{1}{C_1}$  ответ не сходится с ответом в учебнике в силу разных обозначений  $C_2$ . Так-то ответ мой правильный (ответ учебника я в вольфраме не проверял)

## 2.5 C. §16: 26

Найдя два независимых первых интеграла системы, решить систему в указанной области.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = 2x^3 - xy - z, \\ \dot{z} = xz - 2x^4, (x > 0) \end{cases} \quad (4)$$

Хмм, кажется что первое уравнение системы интегрируется. Ну раз так, проинтегрируем:  $x = \frac{1}{C_1 - t}$ . Далее смотрим на оставшиеся 2 уравнения. Возьмём то в котором кроме  $x$  не более 1 другой переменной. Т.е. третье. Подставив  $x$  можем получить:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{z}{C_1 - t} - 2 \frac{1}{(C_1 - t)^4} \\ //\tau &= C_1 - t, \dot{z} = -\frac{dz}{d\tau} = -z' // \\ z' + \frac{z}{\tau} &= 2 \frac{1}{\tau^4} \end{aligned}$$

//О, это же уравнение Эйлера, его мы умеем решать заменой  $\tau = e^T$ ,  $z'_\tau = z'_T e^{-T}$  //

$$z' + z = 2e^{-3T}$$

//находит общее, угадываем частное, благо тут оно очевидное и получаем ответ//

$$z(T) = C_2 e^{-T} - e^{-3T} = z(\tau) = \frac{C_2}{\tau} - \frac{1}{\tau^3} = z(t) = \frac{C_2}{C_1 - t} - \frac{1}{(C_1 - t)^3}$$

Теперь подставим  $x(t)$  и  $z(t)$  во второе уравнение системы 4:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{3}{(C_1 - t)^3} - \frac{C_2}{(C_1 - t)} - \frac{y}{C_1 - t} \\ //C_1 - t &= e^T, \dot{y} = y'_T e^{-T} // \\ -y'_T e^{-T} &= 3e^{-3T} - C_2 e^{-T} - ye^{-T} \\ y'_T - y &= C_2 - 3e^{-2T} \\ y(T) &= C_3 e^T - C_2 + e^{-2T} = y(t) = C_3(C_1 - t) - C_2 + \frac{1}{(C_1 - t)^3} \end{aligned}$$

И чтобы посмотреть на этот ужас скопированно:

$$\text{Ответ: } x(t) = \frac{1}{C_1 - t},$$

$$y(t) = C_3(C_1 - t) - C_2 + \frac{1}{(C_1 - t)^3},$$

$$z(t) = \frac{C_2}{C_1 - t} - \frac{1}{(C_1 - t)^3}.$$

На самом деле надо ещё показать что первые интегралы  $C_1, C_2$  независимы. Ну если очень хочется можно их выразить, явно посчитать ранг и т.д. Но я воспользуюсь следующим утверждением: поскольку система разрешима (мы смогли решить 2 уравнение) с использованием этих первых 2 интегралов, то они независимы. Пока эти первые интегралы больше используются, как оконстанты. И мало смысла смотреть на них как-то иначе. В следующей части задания это будет не совсем так.

## 3 II. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

### 3.1 C. §17: 5

Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши с указанным начальным условием

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z^2(x - 3y) \frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{x^2}{y} \text{ при } 3yz = 1 \quad (5)$$

Найдём характеристическую систему уравнения 5.

$$\begin{cases} \dot{x} = x, & (1) \\ \dot{y} = y, & (2) \\ \dot{z} = z^2(x - 3y), & (3) \end{cases}$$

Для решения надо найти 2 независимых первых интеграла. В данной задаче можно просто составить 2 линейные комбинации:

$$\begin{aligned} (1) \cdot y - (2) \cdot x &= 0 & (1) \cdot z^2 - (2) \cdot 3z^2 - (3) &= 0 \\ y \cdot dx &= x \cdot dy & z^2 \cdot dx - 3z^2 \cdot dy - dz &= 0 \\ \frac{dx}{x} &= \frac{dy}{y} & dx - 3dy - \frac{dz}{z^2} &= 0 \\ \ln \frac{x}{y} &= C_1(x, y, z) & x - 3y + \frac{1}{z} &= C_2(x, y, z) \end{aligned}$$

Вообще должно быть очевидно, что  $C_1$  и  $C_2$  независимы, потому что  $C_2$  зависит от  $z$  а  $C_1$  - нет. Но давайте проверим ранг. *просто это-то тут очевидно, а если наткнуться на задачу где не очевидно, а матаппарат не будет отработан будет печально*

$$\operatorname{rg} \begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x} & \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_1}{\partial z} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x} & \frac{\partial C_2}{\partial y} & \frac{\partial C_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \operatorname{rg} \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{1}{x} & 0 \\ 1 & -3 & -\frac{1}{z^2} \end{vmatrix} = 2$$

Значит решением 5 будет  $F[U_1(x, y, z), U_2(x, y, z)]$  где  $F$  - любая непрерывно дифференцируемая функция,  $U_1(x, y, z) = \frac{x}{y}$ ,  $U_2(x, y, z) = x - 3y + \frac{1}{z}$ . Здесь я выкинул логарифм, потому что если логарифм отношения первого интеграла, то и без логарифма первый интеграл. Вообще это надо было сделать раньше, но я сделал тут :)

Решим ЗК.

$$\begin{cases} u = \frac{x^2}{y} \\ 3yz = 1 \\ \frac{x}{y} = U_1 \\ x - 3y + \frac{1}{z} = U_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{x^2}{y} \\ 3yz = 1 \\ \frac{x}{y} = U_1 \\ x = U_2 \end{cases}$$

$$u = U_1 U_2 = \frac{x}{y} \left( x - 3y + \frac{1}{z} \right)$$

Ответ:

Общее решение 5:  $F[U_1(x, y, z), U_2(x, y, z)]$  где  $F$  - любая непрерывно дифференцируемая функция,  $U_1(x, y, z) = \frac{x}{y}$ ,  $U_2(x, y, z) = x - 3y + \frac{1}{z}$ .

Решение ЗК 5:  $u = U_1 U_2 = \frac{x}{y} \left( x - 3y + \frac{1}{z} \right)$

### 3.2 C. §17: 16

Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши с указанным начальным условием

$$(z - x + 3y) \frac{\partial u}{\partial x} + (z + x - 3y) \frac{\partial u}{\partial y} - 2z \frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{4y}{z} \text{ при } x = 3y . \quad (6)$$

Найдём характеристическую систему уравнения 6.

$$\begin{cases} \dot{x} = z - x + 3y, & (1) \\ \dot{y} = z + x - 3y, & (2) \\ \dot{z} = -2z, & (3) \end{cases}$$

Тут линейная комбинация только одна (ну или я слаб)  $(1) + (2) + (3) = 0 \Rightarrow dx + dy + dz = 0 \Rightarrow x + y + z = C_1$ . Подставим этот первый интеграл во вторые 2 уравнения:

$$\begin{cases} \dot{y} = C_1 - 4y \\ \dot{z} = -2z \end{cases}$$

//перемножая крест накрест получим//

$$\begin{aligned} -2z\dot{y} &= \dot{z}(C_1 - 4y) \\ \frac{dz}{2z} &= \frac{-dy}{C_1 - 4y} \\ C_2 &= \frac{z^2}{C_1 - 4y} = \frac{z^2}{x + z - 3y} \end{aligned}$$

Проверим независимость:

$$\text{rg} \begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x} & \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_1}{\partial z} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x} & \frac{\partial C_2}{\partial y} & \frac{\partial C_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \dots = 2$$

Осталось только решить ЗК.

$$\begin{cases} u = \frac{4y}{z} \\ x = 3y \\ x + y + z = U_1 \\ \frac{z^2}{x+z-3y} = U_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{4y}{z} \\ x = 3y \\ 4y + z = U_1 \\ z = U_2 \end{cases}$$

$$u = U_1/U_2 - 1 = \frac{x}{y}(x - 3y + \frac{1}{z}) = \frac{(x + y + z)(x - 3y + z)}{z^2} - 1$$

Ответ:

Общее решение 6:  $F[U_1(x, y, z), U_2(x, y, z)]$  где  $F$  - любая непрерывно дифференцируемая функция,  $U_1(x, y, z) = x + y + z, U_2(x, y, z) = \frac{z^2}{x+z-3y}$ .

Решение ЗК 6:  $u = u = U_1/U_2 - 1 = \frac{x}{y}(x - 3y + \frac{1}{z}) = \frac{(x+y+z)(x-3y+z)}{z^2} - 1$

### 3.3 С. §17: 22

Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши с указанным начальным условием

$$(2x^2z^2 + x) \frac{\partial u}{\partial x} - (4xyz^2 - y) \frac{\partial u}{\partial y} - (4xz^3 - z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = yz^2 \text{ при } x = z \quad (7)$$

найдём характеристическую систему уравнения 7.

$$\begin{cases} \dot{x} = (2x^2z^2 + x) \\ \dot{y} = -(4xyz^2 - y) \\ \dot{z} = -(4xz^3 - z) \end{cases}$$

Найдём первые интегралы:  $z\dot{y} - y\dot{z} = 0 \Rightarrow z/y = C_1$

Со вторым интегралом немного больнее. Придётся вспомнить уравнения в полных дифференциалах. Второе и третье уже связаны первым интегралом, так что берём первое и 3 (как раз там нет  $y$ ). Перемножим их

крест-накрест.

$$dx(4xz^3 - z) + dz(2x^2z^2 + x) = 0$$

// как мы видим, это пока ещё не полный дифференциал. Попробуем домножить на  $\mu(z)$  оно зависит только от  $z$ ! //

$$\underbrace{dx \mu(4xz^3 - z)}_{=R} + \underbrace{dz \mu(2x^2z^2 + x)}_{=S} = 0 \stackrel{?}{=} d(Q)$$

// чтобы левая часть была равна дифференциальному чего-то, должно выполняться  $\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial x}$  //

$$\mu'_z(4xz^3 - z) + \mu(12xz^2 - 1) = \mu(4xz^2 + 1)$$

$$\mu'_z = -\mu \frac{2}{z}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2dz}{z}$$

$$\mu = \frac{1}{z^2},$$

// Теперь можно подставить интегрирующий множитель, найти величину, полный дифференциал который ноль //

$$\underbrace{dx(4xz - 1/z)}_{=R} + \underbrace{dz(2x^2 + \frac{x}{z^2})}_{=S} = d(Q) = 0$$

// Тут уже тривиально угадать функцию //

$$Q = 2x^2z - \frac{x}{z} = \text{const} = C_2$$

Проверим независимость ( $C_1$  зависит от  $z, y$ ,  $C_2$  зависит от  $z, x$ . Ну очевидно они независимы):

$$\text{rg} \begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x} & \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_1}{\partial z} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x} & \frac{\partial C_2}{\partial y} & \frac{\partial C_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \text{очевидно...} = 2$$

Осталось только решить ЗК.

$$\begin{cases} u = yz^2 \\ x = z \\ U_1 = z/y \\ U_2 = 2x^2z - \frac{x}{z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{4y}{z} \\ x = z \\ U_1 = z/y \\ U_2 = 2z^3 - 1 \end{cases}$$

$$u = \frac{U_2 + 1}{2U_1} = \frac{y(z - x + 2x^2z^2)}{2z^2}$$

Ответ:

Общее решение 7:  $F[U_1(x, y, z), U_2(x, y, z)]$  где  $F$  - любая непрерывно дифференцируемая функция,  $U_1(x, y, z) = z/y, U_2(x, y, z) = 2x^2z - \frac{x}{z}$ .

Решение ЗК 7:  $u = \frac{y(z - x + 2x^2z^2)}{2z^2}$

### 3.4 С. §17: 79

Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши с указанным начальным условием

$$2xy \frac{\partial u}{\partial x} + (1 - y^2 - 2xz) \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{y}{x} \frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{1}{2} - y^2 \text{ при } y^2 + xz = 1 \quad (8)$$

найдём характеристическую систему уравнения 8.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = 1 - y^2 - 2xz \\ \dot{z} = -\frac{y}{x} \end{cases}$$

Найдём первые интегралы: Перемножим крест накрест 1 и 3 уравнения.

$$\begin{aligned} -dx \frac{y}{x} &= 2dz \cdot xy \\ \frac{dx}{x^2} &= -2dz \\ \frac{1}{x} - 2z &= C_1 \end{aligned}$$

Второй, как и всегда, искать менее тривиально. Возьмём 1 и 2 уравнения и перемножим крест-накрест. Получится:

$$\begin{aligned} 2xy \cdot dy &= (1 - y^2 - 2xz)dx \\ 2xyy' &= (C_1x - y^2)dx \\ y' + y \frac{1}{2x} &= \frac{C_1}{2y} \end{aligned}$$

//О, это же уравнение Бернули.  $t = y^2, t' = 2yy'$ //

$$\begin{aligned} \frac{t'}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} \frac{1}{2x} &= \frac{C_1}{2\sqrt{t}} \\ t' + t \frac{1}{x} &= C_1 \\ t'x + t \cdot x' &= C_1x \\ (t \cdot x)' &= C_1x \\ tx &= \frac{C_1x^2}{2} + C_2 \\ C_2 = xy^2 - \frac{C_1x^2}{2} &= x(y^2 + zx) - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Проверим независимость: Один ПИ зависит от  $x$  другой нет, очевидно они независимы.

$$\text{rg} \begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x} & \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_1}{\partial z} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x} & \frac{\partial C_2}{\partial y} & \frac{\partial C_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \dots = 2$$

Осталось только решить ЗК.

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} - y^2 \\ y^2 + xz = 1 \\ U_1 = \frac{1}{x} - 2z \\ U_2 = x(y^2 + zx) - \frac{x}{2} \end{cases}$$

//я считаю, что это какая-то ужасная бяка, поэтому просто переберём варианты  $U_1 \cdot U_2, U_1/U_2$  и т.д.//

$$u = U_1 \cdot U_2 = (2xz - 1) \left( y^2 - \frac{1}{2} + xz \right)$$

Ответ:

Общее решение 8:  $F[U_1(x, y, z), U_2(x, y, z)]$  где  $F$  - любая непрерывно дифференцируемая функция,  $U_1(x, y, z) = \frac{1}{x} - 2z, U_2(x, y, z) = x(y^2 + zx) - \frac{x}{2}$ .

Решение ЗК 8:  $u = U_1 \cdot U_2 = (2xz - 1) \left( y^2 - \frac{1}{2} + xz \right)$

### 3.5 C. §17: 83

Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши с указанным начальным условием

$$2xy \frac{\partial u}{\partial x} + (2x - y^2) \frac{\partial u}{\partial y} + y^3 z \frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = x^2 z^2 \text{ при } y^2 = 2x \quad (9)$$

найдём характеристическую систему уравнения 9.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = 2x - y^2 \\ \dot{z} = y^3 z \end{cases}$$

Найдём первые интегралы: первые 2 уравнения крест-накрест

$$\begin{aligned} dx(2x - y^2) &= dy(2xy) \\ dx(2x - y^2) + dy(-2xy) &= 0 \\ d(x^2 - xy^2) &= 0 \\ x^2 - xy^2 &= C_1 \end{aligned}$$

первые интегралы всё более стрёмные. Даже самый первый становится какой-то жестким  $y^2 = x - \frac{C_1}{x}$   
Перемножим 1 и 3 крест-накрест:

$$\begin{aligned} dx(y^3 z) &= dz(2xy) \\ z' &= \frac{y^2 z}{2x} \\ \frac{dz}{z} &= \frac{1}{2}(1 - \frac{C_1}{x^2}) \\ \ln(z^2) &= x + \frac{C_1}{x} + C_2 \\ C_2 &= \ln(z^2) - 2x + y^2. \end{aligned}$$

Проверим независимость: как всегда очевидно независят, но проверить формально надо

$$\operatorname{rg} \begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x} & \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_1}{\partial z} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x} & \frac{\partial C_2}{\partial y} & \frac{\partial C_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \dots = 2$$

Осталось только решить ЗК.

$$\begin{cases} u = x^2 z^2 \\ y^2 = 2x \\ U_1 = x^2 - xy^2 \\ U_2 = \ln(z^2) - 2x + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = x^2 z^2 \\ y^2 = 2x \\ U_1 = -x^2 \\ e^{U_2} = z^2 \end{cases}$$

$$u = -U_1 e^{U_2} = (xy^2 - x^2) e^{\ln(z^2) - 2x + y^2} = z^2 (xy^2 - x^2) e^{-2x + y^2}$$

Ответ:

Общее решение 9:  $F[U_1(x, y, z), U_2(x, y, z)]$  где  $F$  - любая непрерывно дифференцируемая функция,  $U_1(x, y, z) = x^2 - xy^2, U_2(x, y, z) = \ln(z^2) - 2x + y^2$ .

Решение ЗК 9:  $u = z^2 (xy^2 - x^2) e^{-2x + y^2}$

### 3.6 T2

В области  $x > 0, y > 0, z > 0$  найти все решения уравнения

$$(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2xy \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{x^3 - xy^2}{z} \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

и решить задачу Коши  $u = z^2$  при  $y^2 - x^2 = 1$

найдём характеристическую систему уравнения 10.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 \\ \dot{y} = 2xy \\ \dot{z} = \frac{x^3 - xy^2}{z} \end{cases}$$

Тут есть такой красивый первый интеграл! Он закомментирован но если кто хочет посмотреть на наркоманию, можно посмотреть исходный код Тут можно заметить линейную комбинацию:  $xdx - ydy - zdz = 0 \Rightarrow C_1 = x^2 - y^2 - z^2$ . Далее выражаем  $y^2 = x^2 - z^2 - C_1$  и берём первое и третье уравнения.

$$dz(2x^2 - z^2 - C_1) - dx \left( xz + C_1 \frac{x}{z} \right) = 0$$

//Это почти уравнение в полных дифференциалах, надо всего-то домножить на  $\frac{z}{(C_1 + z^2)^3} //$

$$dz \frac{2zx - z^3 - C_1 z}{(C_1 + z^2)^3} - dx \frac{x}{(C_1 + z^2)^2} = d(C_2) = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{2(C_1 + z^2)} - \frac{x^2}{2(C_1 + z^2)^2} = \frac{1}{2x^2 - 2y^2} - \frac{x^2}{2(x^2 - y^2)^2}$$

Проверим независимость: о чудо, снова один интеграл зависит от  $z$ , а другой нет. Так что снова всё ок, но проверить тем не менее необходимо...

$$\text{rg} \begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x} & \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_1}{\partial z} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x} & \frac{\partial C_2}{\partial y} & \frac{\partial C_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \dots = 2$$

Осталось только решить ЗК.

$$\begin{cases} u = z^2 \\ y^2 - x^2 = 1 \\ U_1 = x^2 - y^2 - z^2 \\ U_2 = \frac{1}{2(C_1 + z^2)} - \frac{x^2}{2(C_1 + z^2)^2} = \frac{1}{2x^2 - 2y^2} - \frac{x^2}{2(x^2 - y^2)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = z^2 \\ y^2 - x^2 = 1 \\ U_1 = -z^2 - 1 \\ U_2 = -\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$u = -1 - U_1 = z^2 + y^2 - x^2 - 1$$

Ответ:

Общее решение 10:  $F[U_1(x, y, z), U_2(x, y, z)]$  где  $F$  - любая непрерывно дифференцируемая функция,  $U_1(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2, U_2(x, y, z) = \frac{1}{2x^2 - 2y^2} - \frac{x^2}{2(x^2 - y^2)^2}$ .

Решение ЗК 10:  $u = u = -1 - U_1 = z^2 + y^2 - x^2 - 1$  Вот и всё с первыми интегралами. Сказал бы всё плохое что я про эти задачи думаю, но я думаю о них только положительно. Какие хорошие задачи

## 4 III. Вариационное исчисление

### 4.1 C. §19: 21

Решить простейшую вариационную задачу:

$$J(y) = \int_1^e \left[ \frac{1}{2}x(y')^2 + \frac{2yy'}{x} - \frac{y^2}{x^2} \right] dx, y(1) = 1, y(e) = 2 \quad (11)$$

какая простая задача, простейшая я бы сказал Найдём экстремали:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}x(y')^2 + \frac{2yy'}{x} - \frac{y^2}{x^2} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} &= 0 \\ 2\frac{y'}{x} - 2\frac{y}{x^2} - \frac{d}{dx} \left( xy' + 2\frac{y}{x} \right) &= 0 \\ 2\frac{y'}{x} - 2\frac{y}{x^2} - y' - xy'' - 2\frac{y'}{x} + 2\frac{y}{x^2} &= 0 \\ y'' + \frac{y'}{x} &= 0 \\ y(x) &= C_1 \ln(x) + C_2 \\ //y(1) = 1, y(e) = 2// \\ \begin{cases} y(1) = 1 = C_2 + C_1 \cdot 0 \\ y(e) = 2 = C_2 + C_1 \cdot 1 \end{cases} \\ \hat{y} &= 1 + \ln(x) \end{aligned}$$

Ура, найдена экстремаль. Надо посмотреть будет ли это экстремумом.

$$\begin{aligned} \Delta J &= J(\hat{y} + h) - J(\hat{y}) = \int_1^e \left( \frac{1}{2}xh'(x)^2 + \frac{h'(x)(2h(x) + x + 2\ln(x) + 2)}{x} - \frac{h(x)(h(x) + 2\ln(x))}{x^2} \right) dx \\ //\text{звуки испуга Папи Шишкина}// \\ \int_1^e \left( \frac{1}{2}xh'^2 - \frac{h^2}{x^2} - h\frac{2\ln(x)}{x^2} \right) dx + \int_1^e \frac{d(h^2)}{x} + \int_1^e \left( \frac{2\ln(x)}{x} + 1 + \frac{2}{x} \right) d(h) \\ //\text{два последних интеграла по частям, с учётом граничных условий на } h(1) = h(e) = 0// \\ \int_1^e \left( \frac{1}{2}xh'^2 - \frac{h^2}{x^2} - h\frac{2\ln(x)}{x^2} \right) dx - \int_1^e \left( -\frac{h^2}{x^2} \right) dx - \int_1^e \left( -\frac{2\ln(x)}{x^2} \right) h \cdot dx \\ \int_1^e \frac{1}{2}xh'^2 \cdot dx \end{aligned}$$

Очевидно на  $(1, e)$  данный интеграл принимает исключительно положительные значения  $\Rightarrow \hat{y}$  – минимум.

Ответ:

$\hat{y} = 1 + \ln(x)$  - абсолютный минимум с вариацией  $\Delta J = J(\hat{y} + h) - J(\hat{y}) = \int_1^e \frac{1}{2}xh'^2 \cdot dx$

а можно я не буду каждый раз решать это, а просто сошлюсь на файл математики, который сразу выдаёт ответ на задачу?

### 4.2 C. §19: 45

Решить простейшую вариационную задачу:

$$J(y) = \int_0^1 \left[ (1+x^2)(y')^2 - 4xy' + yy' \sin^2 x + \frac{1}{2}y^2 \sin 2x \right] dx, y(0) = 0, y(1) = \ln 2 \quad (12)$$

Найдём экстремаль:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (x^2 + 1) y'(x)^2 - 4xy'(x) + y(x) \sin^2(x) y'(x) + \frac{1}{2} y(x)^2 \sin(2x) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} &= 0 \\ (x^2 + 1) y''(x) + 2xy'(x) &= 2 \\ y(x) &= \ln(x^2 + 1) + c_1 \operatorname{arctg}(x) + c_2 \\ //\text{подставляя граничные условия:} &\\ \hat{y} &= \ln(x^2 + 1)\end{aligned}$$

Проверим на наличие экстремума.

$$\begin{aligned}\Delta J &= J(\hat{y} + h) - J(\hat{y}) \\ \int_0^1 \left( h \left( \sin^2(x) h' + \frac{2x \sin^2(x)}{x^2 + 1} + \ln(x^2 + 1) \sin(2x) \right) + h' \left( (x^2 + 1) h' + \ln(x^2 + 1) \sin^2(x) \right) + h^2 \sin(x) \cos(x) \right) dx \\ //\text{какая жесть...} &\\ \int_0^1 \left( h^2 \sin(x) \cos(x) + h'^2(x^2 + 1) + h \left( \frac{2x \sin^2(x)}{x^2 + 1} + \ln(x^2 + 1) \sin(2x) \right) \right) dx + \\ + \int_0^1 \sin^2(x) d(h^2/2) + \int_0^1 \ln(x^2 + 1) \sin^2(x) d(h) &\\ //2 \text{ последних по частям, на краях они обнуляются, а подынтегральные выражения сократятся} &\\ \int_0^1 h'^2(x^2 + 1) dx &\end{aligned}$$

Итого, вариация определена положительно, значит экстремаль - абсолютный минимум.

Ответ:

$$\hat{y} = \ln(x^2 + 1) \text{ абсолютный минимум с вариацией } \Delta J = J(\hat{y} + h) - J(\hat{y}) = \int_0^1 h'^2(x^2 + 1) dx$$

### 4.3 C. §19: 72

Решить простейшую вариационную задачу:

$$J(y) = \int_1^4 \left[ 15\sqrt{xy} + 3x^2yy' - x^3(y')^2 \right] dx, y(1) = 1, y(4) = -3. \quad (13)$$

Для начала найдём экстремаль

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= x^3(-y'(x)^2) + 3x^2y(x)y'(x) + 15\sqrt{xy}(x) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} &= 0 \\ 6x^2y'(x) + 2x^3y''(x) + 15\sqrt{x} &= 6xy(x) \\ y(x) &= \frac{C_1}{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C_2x \\ //\text{подставляя граничные условия:} &\\ \hat{y} &= \frac{2 - x^{3/2}}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Проверим на наличие экстремума.

$$\Delta J = J(\hat{y} + h) - J(\hat{y}) = \int_1^4 \left( 3h(x) (x^2 h'(x) - x^2 + 4\sqrt{x}) - x^{3/2} h'(x) (x^{3/2} h'(x) + x^{3/2} - 8) \right) dx \\ \int_1^4 (3h(x^2 + 4\sqrt{x}) - h'^2 x^3) dx + \int_1^4 3/2 x^2 d(h^2) + \int_1^4 -x^3 + 8x^{3/2} d(h)$$

//2 последних по частям, на краях они обнуляются, а подынтегральные выражения сократятся//

$$\int_1^4 (-x^3 h'^2 - 3xh^2) dx$$

Итого, вариация определена отрицательно, значит экстремаль - абсолютный максимум.

Ответ:

$$\hat{y} = \frac{2-x^{3/2}}{\sqrt{x}} \text{ абсолютный максимум с вариацией } \Delta J = J(\hat{y} + h) - J(\hat{y}) = \int_1^4 (-x^3 h'^2 - 3xh^2) dx$$

#### 4.4 C. §19: 105

Показать, что допустимая экстремаль не дает экстремум функционала:

$$J(y) = \int_0^\pi \left[ (y')^2 - \frac{25}{16} y^2 + 50xy \right] dx, y(0) = 0, y(\pi) = 16\pi \quad (14)$$

Для начала найдём экстремаль

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= y'(x)^2 - \frac{1}{16} 25y(x)^2 + 50xy(x) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} &= 0 \\ 400x &= 16y''(x) + 25y(x) \\ y(x) &= 16x + C_1 \cos\left(\frac{5x}{4}\right) + C_2 \sin\left(\frac{5x}{4}\right) \\ //\text{подставляя граничные условия:}/ & \\ \hat{y} &= 16x \end{aligned}$$

Покажем теперь что экстремум отсутствует

$$\Delta J = J(\hat{y} + h) - J(\hat{y}) = \int_0^\pi \left( h'(x) (h'(x) + 32) - \frac{25h(x)^2}{16} \right) dx$$

//Здесь даже упрощать не надо ничего, просто возьмём 2 функции которые разный знак дадут//

$$\begin{aligned} h_1 &= \sin(x) \Rightarrow \Delta J = \int_0^\pi \cos(x)(\cos(x) + 32) - \frac{25 \sin^2(x)}{16} dx = -\frac{1}{32}(9\pi) \\ h_2 &= \sin(2x) \Rightarrow \Delta J = \int_0^\pi 64 \cos(2x) + \frac{1}{32}(89 \cos(4x) + 39) dx = \frac{39\pi}{32} \end{aligned}$$

Таким образом знаки приращения могут принимать как положительные так и отрицательные значения, а значит экстремаль ни минимум ни максимум.

#### 4.5 Т3

Исследовать на экстремум функционал, определив знаки приращения

$$\int_1^2 \left( \frac{2yy'}{x} - 7 \frac{y^2}{x^2} - (y')^2 - 12 \frac{y}{x} \right) dx, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 1 \quad (15)$$

Как и ранее для начала найдём экстремаль

$$\mathcal{L} = -\frac{7y(x)^2}{x^2} + \frac{2y(x)y'(x)}{x} - y'(x)^2 - \frac{12y(x)}{x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = 0$$

$$xy''(x) = \frac{6y(x)}{x} + 6$$

$$y(x) = C_2x^3 + \frac{C_1}{x^2} - x$$

//подставляя граничные условия://

$$\hat{y} = \frac{8x^5 - 31x^3 + 116}{31x^2}$$

Уже экстремаль тут как-то не очень выглядит, но дальше лучше. Посчитаем вариацию

$$\Delta J = J(\hat{y} + h) - J(\hat{y}) = \int_1^2 -\frac{31x^4h'(x)^2 + 2x(-31x^2h(x) + 16x^5 - 348)h'(x) + h(x)(217x^2h(x) + 64x^5 + 2088)}{31x^4} dx$$

//оно кажется страшным, но это просто из-за цифорок, так-то функция вполе//

$$\int_1^2 \left(-h'^2 - \frac{7}{x^2}h^2\right) dx - \int_1^2 \left(\frac{64}{31}x + \frac{2088}{31x^4}\right) h \cdot dx + \int_1^2 \frac{1}{x} d(h^2) - \int_1^2 \left(\frac{32}{31}x^2 - \frac{696}{31x^3}\right) d(h)$$

//2 последних по частям, на краях они обнулятся, а подынтегральные выражения сократятся//

$$\int_1^2 \left(-h'^2 - \frac{6}{x^2}h^2\right) dx$$

Итого, вариация определена отрицательно, значит экстремаль - абсолютный максимум.

Ответ:

$\hat{y} = \frac{8x^5 - 31x^3 + 116}{31x^2}$  абсолютный максимум с вариацией  $\Delta J = J(\hat{y} + h) - J(\hat{y}) = \int_1^2 \left(-h'^2 - \frac{6}{x^2}h^2\right) dx$  На самом деле здесь проще и оптимальнее не подставлять сразу значение экстремали, а работать с  $y$ , в некоторый момент вылезать будет появляться уравнение Эйлера-Лагранжа, которое можно приравнять к 0. А вот так сразу подставлять  $\hat{y}$  довольно неприятно. Но всё реально, просто чиселки не оч красивые

#### 4.6 С. §20.1: 9

Решить задачу со свободным концом

$$J(y) = \int_1^3 \left[8yy' \ln x - x(y')^2 + 6xy'\right] dx, y(3) = 15. \quad (16)$$

#### 4.7 С. §20.1: 12

Решить задачу без ограничений

$$J(y) = \int_1^e \left[x(y')^2 + \frac{y^2}{x} + \frac{2y \ln x}{x}\right] dx \quad (17)$$

#### 4.8 Т4

Исследовать на экстремум функционал, определив знаки приращения

$$\int_1^2 (2y + yy' + x(y')^2) dx, \quad y(1) = 1. \quad (18)$$

#### 4.9 C. §20.2: 5

Найти допустимые экстремали

$$J(y_1, y_2) = \int_0^\pi \left[ (y'_1)^2 + (y'_2)^2 - 2y_1 y_2 \right] dx, y_1(0) = 1, y_2(0) = -1, y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}, y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{\frac{\pi}{2}}. \quad (19)$$

#### 4.10 C. §20.3: 2

Исследовать функционал на экстремум, если:

$$J(y) = \int_0^1 \left[ 2e^x y - (y'')^2 \right] dx, y(0) = y'(0) = 1, y(1) = e, y'(1) = 2e \quad (20)$$

#### 4.11 C. §21: 1

Решить изопериметрическую задачу

$$J(y) = \int_0^\pi (y')^2 dx, y(0) = 0, y(\pi) = \pi, \int_0^\pi y \sin x dx = 1 \quad (21)$$

#### 4.12 T5\*

Среди всех кривых на цилиндре  $x^2 + y^2 = 1$ , соединяющих точки  $(1, 0, 0)$  и  $(0, 1, 1)$  найти кривую наименьшей длины (геодезическую кривую).