

ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА II»

Автор: Хоружий Кирилл

От: 4 мая 2021 г.

Содержание

1	Первое задание по аналитической механике	2
1.1	Малые колебания консервативных систем	2
1.2	Диссипативные системы и вынужденные колебания	5
1.3	Элементы теории бифуркаций в нелинейных системах	10
1.4	Метод усреднения и метод нормальных форм в теории нелинейных колебаний	14
2	Второе задание по аналитической механике	17
2.1	Функция Гамильтона и канонические уравнения	17
2.2	Элементы теории детерминированного хаоса и КАМ-теории	19

1 Первое задание по аналитической механике

1.1 Малые колебания консервативных систем

№16.11

Введём ось OX координат вдоль туннеля, выбрав в качестве $x = 0$ положение равновесия. Тогда кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2.$$

Интегрируя силу, действующую на тело, находим потенциальную энергию

$$F_x = -\frac{GM(x)m}{r^2(x)} \cdot \frac{x}{r} = -G\kappa x, \quad \frac{G\kappa R^3}{R^2} = g, \quad \Rightarrow \quad \Pi = \int F dx = \frac{1}{2} \frac{g}{R} x^2.$$

Так удачно вышло, что T и Π – квадратичные формы. Запишем вековое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{g}{R}, \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

№16.33

Выбрав оси, как показано на рисунке, получим систему с 2 степенями свободы. Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2).$$

Потенциальная энергия для трёх пружинок (сдвинутая так, чтобы положение равновесия был 0)

$$\Pi = \frac{c}{2} (x_2)^2 + \frac{c}{2} (x_1)^2 + \frac{2c}{2} (x_2 - x_1)^2.$$

И снова так вышло, что T и Π – квадратичные формы, так что

$$\det \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^j} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \det \left[c \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \lambda m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0, \quad \Rightarrow \quad (\lambda m)^2 + 9c^2 - 6\lambda mc - 4c^2 = 0.$$

Соответственно находим квадраты частот

$$\lambda^2 - 6\lambda \frac{c}{m} + 5 \frac{c^2}{m^2} = \left(\lambda_1 - \frac{c}{m} \right) \left(\lambda_2 - 5 \frac{c}{m} \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 : (-2c \quad 2c) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \lambda_2 : (2c \quad 2c) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Соответственно, уравнение движения будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin \left(\sqrt{\frac{c}{m}} t + \alpha_1 \right) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin \left(\sqrt{\frac{5c}{m}} t + \alpha_2 \right).$$

№16.47

Запишем с учётом малости колебаний кинетическую энергию системы

$$T = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} (l \dot{\varphi}_2 + l \dot{\varphi}_1)^2.$$

И, опять же, с учетом малости, потенциальную

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{c}{2} ((l\varphi_1)^2 + (l\varphi_1 + l\varphi_2)^2) + mgl \cos \varphi_1 + mgl (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) = \\ &= \frac{c}{2} ((l\varphi_1)^2 + (l\varphi_1 + l\varphi_2)^2) + 2mgl \left(1 - \frac{\varphi_1^2}{2} \right) + mgl \left(1 - \frac{\varphi_2^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Как обычно, получив квадратичные формы (хотя бы в малом приближение) радуемся и переходим к поиску частот собственных колебаний

$$\det \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^j} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \det \left[\begin{pmatrix} 2cl^2 - 2mgl & cl^2 \\ cl^2 & cl^2 - mgl \end{pmatrix} - \lambda ml^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0.$$

Раскрыв, получаем уравнение вида

$$2[(cl^2 - ml^2\lambda] - mgl)^2 - [cl^2 - ml^2\lambda]^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{2}mgl}{\sqrt{2} \pm 1} = [cl^2 - ml^2\lambda], \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{c}{m} - 2\frac{g}{l} \mp \sqrt{2}\frac{g}{l}.$$

Теперь подставляем известные λ , и находим амплитудные векторы

$$\begin{aligned}\lambda_1 : (2 + 2\sqrt{2} \quad 2 + \sqrt{2}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 & \Rightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}; \\ \lambda_2 : (2 - 2\sqrt{2} \quad 2 - \sqrt{2}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 & \Rightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Это позволяет нам записать уравнение движения малых колебаний (при $c/m > (2 + \sqrt{2})g/l$)

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sin \left(\sqrt{\frac{c}{m} - (2 + \sqrt{2}) \frac{g}{l}} t + \alpha_1 \right) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \sin \left(\sqrt{\frac{c}{m} - (2 - \sqrt{2}) \frac{g}{l}} t + \alpha_2 \right).$$

№16.64

Запишем кинетическую энергию системы

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{nm}{2} \dot{x}_2^2.$$

И, считая 0 в положении равновесия, потенциальную энергию системы, запасенную в сжатых пружинах

$$\Pi = \frac{c}{2} (x_2 - x_1)^2 + \frac{c}{2} (x_3 - x_2)^2.$$

В таком случае

$$\det \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^j} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \det \left[c \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0.$$

Раскрывая, приходим у уравнению на λ вида

$$\lambda_1 \left(\lambda_2 - \frac{c}{m} \right) \left(\lambda_3 - \frac{(2+n)c}{nm} \right) = 0.$$

Соответственно, амплитудные векторы находим, как

$$\begin{aligned}\lambda_1 : \begin{pmatrix} -c & 2c & -c \\ c & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 & \Rightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \lambda_2 : \begin{pmatrix} c & 2c - nc & c \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 & \Rightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \lambda_3 : \begin{pmatrix} c & nc & c \\ 0 & c & 2c/n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 & \Rightarrow \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} n \\ -2 \\ n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Что ж, уравнение движения малых колебаний запишется в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (C_1 t + \alpha_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin \left(\sqrt{\frac{c}{m}} t + \alpha_2 \right) + C_3 \begin{pmatrix} n \\ -2 \\ n \end{pmatrix} \sin \left(\sqrt{\frac{(n+2)c}{nm}} t + \alpha_3 \right).$$

№16.107

Знаем, что кинетическая энергия и обобщенные силы для системы могут быть записаны в виде¹

$$T = \frac{1}{2} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad Q_i = b_{ik} \dot{q}_k,$$

где a_{ik} – положительно определенная квадратичная форма, а $b_{ik} = -b_{ki}$ – кососимметричная квадратичная форма.

Запишем уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad \Rightarrow \quad a_{ik} \ddot{q}_k = b_{i\alpha} \dot{q}_\alpha.$$

Осталось этот набор уравнений решить.

Воспользуемся алгоритмом приведения двух квадратичных форм к каноническому виду. Выберем в качестве скалярного произведения a_{ik} , в терминах a_{ik} выберем ортогональный базис так, чтобы a_{ik} было равно δ_{ik} .

¹С глубоким сожалением вынуждены оставить баланс индексов в рамках этой задачи. Немое суммирование подразумевается, при повторении индексов.

Повернём через u_{ik} базис, приведя b_{ik} к каноническому виду b_{jl}^* , указанному в условии с m блоков 2×2 .

$$\begin{cases} \delta_{ik} \ddot{q}_k = b_{i\alpha} \dot{q}_\alpha, \\ u_{kj} q_j^* = q_k \end{cases} \Rightarrow u_{li}^{-1} \cdot \left(\delta_{ik} u_{kj} \ddot{q}_j^* = b_{i\alpha} u_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta^* \right) \stackrel{\square i=1}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1^* \\ \ddot{q}_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1^* \\ \dot{q}_2^* \end{pmatrix}.$$

И таких систем с колебаниями у нас будет m штук

$$\begin{cases} \ddot{q}_1^* = -\nu \dot{q}_2^* \\ \ddot{q}_2^* = \nu \dot{q}_1^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1^* = -\nu \ddot{q}_2^* \\ \ddot{q}_2^* = \nu \ddot{q}_1^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1^* = \frac{A}{\nu} \cos(\nu t + \alpha) + C_1 \\ q_2^* = \frac{A}{\nu} \sin(\nu t + \alpha) + C_2. \end{cases}$$

Нули же в каноническом виде b_{ij} будут соответствовать трансляциям

$$q^* = At + B.$$

Собирая всё вместе, находим, что

$$q_\alpha = u_{\alpha i} q_i^*, \quad q_i^* = \begin{cases} (A_j / \nu_j) \cdot \cos(\nu_j t + \alpha_j) + B_{2j-1} & \text{при } i = 2j - 1 \leq 2m; \\ (A_j / \nu_j) \cdot \sin(\nu_j t + \alpha_j) + B_{2j} & \text{при } i = 2j \leq 2m; \\ (A_j) \cdot t + B_j & \text{при } i = j > 2m. \end{cases}$$

1.2 Диссипативные системы и вынужденные колебания

№17.11 (а)

Известно, что система описывается, как

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + x - \alpha y = 0 \\ \ddot{y} + \dot{y} - \beta x + y = 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad A = B = E, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда запишем уравнение на собственные числа

$$\det(A\lambda^2 + B\lambda + C) = \det \begin{vmatrix} \lambda^2 + \lambda + 1 & -\alpha \\ -\beta & \lambda^2 + \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0,$$

Раскрывая,

$$(\lambda^2 + \lambda + 1)^2 - \beta\alpha = (\lambda^2 + \lambda + 1 - i\gamma)(\lambda^2 + \lambda + 1 + i\gamma) = 0.$$

Получается, что

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{\pm 4i\gamma - 3} \right),$$

где введено обозначение $\gamma = \sqrt{-\beta\alpha}$. По теореме об асимптотической устойчивости достаточно, чтобы $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, соответственно найдём все γ удовлетворяющие этому условию.

Пусть $\alpha \cdot \beta > 0$, тогда $\gamma = i\sqrt{|\alpha\beta|}$, или

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{\mp 4\kappa - 3} \right), \quad \Rightarrow \quad |4\kappa - 3| < 1, \quad \Rightarrow \quad |\kappa| = |\alpha\beta| < 1,$$

где было введено обозначение $\kappa = |\alpha\beta|$.

При $\alpha \cdot \beta < 0$ верно, что $\gamma = \kappa^2$, тогда

$$\operatorname{Re} \sqrt{z} = \operatorname{Re} \left(\sqrt{|z|} \cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi k \right) \right) < 0, \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a^2 + b^2} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) < 1,$$

где комплексное число под корнем было представлено как $a + ib$. Тогда

$$\sqrt{9 + 16\kappa^2} - 3 < 2, \quad \Rightarrow \quad 9 + 16\kappa^2 < 5, \quad \Rightarrow \quad |\alpha\beta| < 1.$$

Получается достаточным условием асимптотической устойчивости является условие $|\alpha\beta| < 1$.

№17.8

Ниже представлено решение прикольной задачи по линейной алгебре, и отсутствует доказательное решение. По-хорошему можно просто записать функцию Ляпунова, как в ответах, и всё. Диссипация не является полной в этой системе.

Для начала рассмотрим систему, в которой нижний грузик привязан к полу пружинкой жесткости $c_{n+1} = 0$, так матрица для потенциальной энергии станет немного симметричнее.

Выберем в качестве координат положения грузиков, где $q^i = 0$ соответствует положению равновесия i -го груза. Запишем потенциальную энергию системы

$$2\Pi = c_1 q_1^2 + c_2 (q_1 - q_2)^2 + \dots + c_n (q_n - q_{n-1})^2 + c_{n+1} q_{n+1}^2.$$

Тогда матрица потенциальной энергии C примет вид

$$C_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^j}, \quad \Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & & \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 & \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & & \\ & 0 & & \ddots & -c_n \\ & & & -c_n & c_n + c_{n+1} \end{pmatrix}$$

Запишем уравнение Лагранжа второго рода, и рассмотрим систему в линейном приближении

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i, \quad \Rightarrow \quad A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = A\ddot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + C\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q} = -B\dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = -\beta \dot{q}_n^2.$$

Получается, что диссипация является полной, а значит имеет смысл вспомнить теорему о добавлении в систему диссипативных сил с полной диссипацией.

Thr 1.1 (Теорема Томсона-Тэта-Четаева). Если в некотором изолированном положении равновесия потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией (и/или гироскопических) это положение равновесия становится асимптотически устойчивым.

По теореме Лагранжа-Дирихле положение равновесия $\mathbf{q} = 0$ устойчиво, если в положение равновесия достигается локальный минимум потенциала Π . Получается остается показать, что матрица C положительно определена, или, по критерию Сильвестра, что все угловые миноры Δ_i матрицы C положительны.

Посчитав несколько миноров ручками, приходим к виду Δ_i , которое докажем по индукции.

$$\text{Предположение: } \Delta_n = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j$$

$$\text{База: } \Delta_2 = \det \begin{vmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{vmatrix} = c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_1 c_3 = \sum_{i=1}^{2+1} \frac{1}{c_i} \left(\prod_{j=1}^{2+1} c_j \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Переход: } \Delta_{n+1} &\stackrel{(I)}{=} (c_{n+1} + c_{n+1})\Delta_n - c_{n+1}^2 \Delta_{n-1} = \\ &= c_{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j + c_{n+2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j - c_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^n c_j = \\ &= c_{n+2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j + c_{n+1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j + \frac{1}{c_{n+1}} \prod_{j=1}^{n+1} c_j \right) - c_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^n c_j = \\ &\stackrel{(II)}{=} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+2} c_j + \frac{1}{c_{n+2}} \prod_{j=1}^{n+2} c_j = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+2} c_j, \quad \text{Q. E. D.} \end{aligned}$$

Действительно, первый переход (I) получается, раскрытием определителя Δ_{n+1} по нижней строчке. В переходе (II) были сделаны замены, вида

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j = c_{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^n c_j; \quad \prod_{j=1}^{n+1} c_j = \frac{1}{c_{n+2}} \prod_{j=1}^{n+2} c_j; \quad c_{n+2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+2} c_j.$$

Полученная формула для Δ_n ясно даёт понять, что $\Delta_i > 0$ для $i = 1, \dots, n$, что доказывает положительную определенность C , а значит и локальный минимум потенциала Π достигается в положение равновесия $\mathbf{q} = 0$.

Таким образом выполняются условия теоремы Лагранжа-Дирихле, как и условия теоремы Томсона-Тэта-Четаева, а значит положение равновесия $\mathbf{q} = 0$ является асимптотически устойчивым.

№17.20

Запишем систему в матричном виде

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = 0,$$

и воспользуемся теоремой Ляпунова об асимптотической устойчивости. Действительно, существует функция, такая, что

$$V = E = T + \Pi = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j + \frac{1}{2} c_{\alpha\beta} q^\alpha q^\beta > 0.$$

В силу уравнений движения

$$\frac{dE}{dt} = a_{ij} \ddot{q}^i \dot{q}^j + c_{\alpha\beta} \dot{q}^\alpha q^\beta = -b_\gamma (\dot{q}^\gamma) < 0,$$

из чего следует асимптотическая устойчивость системы.

№17.28

Есть некоторая система такая, что

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = \alpha_1(x^2 - x^1), \\ \dot{x}^2 = \alpha_2(x^3 - x^2), \\ \dots \\ \dot{x}^n = \alpha_n(x^1 - x^n) \end{cases}$$

и снова найдём функцию Ляпунова, например, V вида

$$2V = \frac{1}{\alpha_1}(x_1 - a)^2 + \frac{1}{\alpha_2}(x_2 - a)^2 + \dots + \frac{1}{\alpha_n}(x_n - a)^2,$$

тогда, в силу уравнений системы,

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\dot{x}_1}{\alpha_1}(x_1 - a) + \dots + \frac{\dot{x}_n}{\alpha_n}(x_n - a) = (x_1 - a)(x_2 - x_1) + \dots + (x_n - a)(x_1 - x_n) = \\ &= -\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} + x_n x_1 = -\frac{1}{2}(x_n^2 - 2x_n x_1 + x_1^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1})^2 < 0,\end{aligned}$$

аналогично №17.20, по теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости, положение равновесия системы асимптотически устойчиво.

№18.17

Известно что на груз действуют две силы

$$F_1(t) = A_1 \sin \omega_1 t, \quad F_2(t) = A_2 \cos \omega_2 t,$$

и сопротивление среды $F = -\beta v$.

Запишем кинетическую и потенциальную энергию системы

$$T = \frac{m}{2} \dot{q}^2, \quad \Pi = \frac{c}{2} q^2.$$

Из уравнений Лагранжа второго рода находим

$$m\ddot{q} + \beta\dot{q} + cq = F_1 + F_2 = A \sin(\omega_1 t) + B \cos(\omega_2 t).$$

Для начала найдём собственные колебания системы

$$m\lambda^2 + \beta\lambda + c = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4mc}}{2m}.$$

Найдём теперь частные решения для вынужденных колебаний, в виде

$$q = \alpha_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \alpha_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2),$$

подставляя в уравнения движения получаем, что (рассмотрим ω_1 , для ω_2 рассуждения аналогичны)

$$\sin(\omega_1 t + \varphi_1)(x - m\omega_1^2) + \cos(\omega_1 t + \varphi_1)\omega_1\beta = \frac{A}{\alpha_1} \sin \omega_1 t, \quad \Rightarrow \quad \sin(\omega_1 t + \varphi_1 + \varkappa) = \frac{A}{\alpha_1} \frac{\sin \omega_1 t}{\sqrt{(c - m\omega_1^2)^2 + \beta^2 \omega_1^2}},$$

где \varkappa такая, что

$$\cos \varkappa = \frac{c - m\omega_1^2}{\sqrt{(\omega_1\beta)^2 + (c - m\omega_1^2)^2}}.$$

Сравнивая выражения, находим константы

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\varkappa_1 \\ \varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \varkappa_2 \end{cases} \quad \alpha_i(\omega_i) = \frac{A_i}{\sqrt{(m\omega_i - c)^2 + \omega_i^2 \beta^2}},$$

и подставляем в ответ

$$q = \alpha_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \alpha_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

№18.31

И снова запишем кинетическую и потенциальную энергию системы, как

$$T = \frac{1}{2} J (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2), \quad \Pi = \frac{c}{2} \varphi_1^2 + \frac{c}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2.$$

Из уравнений Лагранжа второго рода перейдём к систем²

$$\begin{aligned}J\ddot{\varphi}_1 + c(2\varphi_1 - \varphi_2) &= M_0 \sin \omega t \\ J\ddot{\varphi}_2 + \beta\dot{\varphi}_2 + c(\varphi_2 - \varphi_1) &= 0.\end{aligned}$$

Искать собственные числа здесь оказалось плохой идеей, так что просто будем искать решение в виде

$$\varphi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}.$$

²Тут при решении была потеряна **двойка**, выделенная красным цветом, но перерешивать как-то грустно.

Для первого слагаемого

$$\begin{cases} -J\omega^2 a_1 + ca_1 - ca_2 = \mathcal{M} \\ -J\omega^2 a_2 + \beta i\omega a_2 + ca_2 - ca_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(c - J\omega^2) - ca_2 = \mathcal{M} \\ a_2(c - J\omega^2 + i\beta\omega) = ca_1 \end{cases}$$

Для второго слагаемого

$$\begin{cases} -J\omega^2 b_1 + cb_1 - cb_2 = -\mathcal{M} \\ -J\omega^2 b_2 - \beta i\omega b_2 + cb_2 - cb_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{b_2}{c}(c - J\omega^2 - i\beta\omega) \\ b_2 \left(\frac{c - J\omega^2}{c}(c - J\omega^2 + i\beta\omega - c) \right) = -\mathcal{M} \end{cases},$$

где $\mathcal{M} = M_0/(2i)$. Также хочется ввести некоторые постоянные

$$\varkappa = \frac{c - J\omega^2}{c}(c - J\omega^2 + i\beta\omega) - c, \quad \xi = \frac{c - J\omega^2}{c}(c - J\omega^2 + i\beta\omega - c), \quad \eta =$$

тогда получим хорошие выражения для искоемых переменных

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\mathcal{M}}{\varkappa} \frac{c - J\omega^2 + i\beta\omega}{c} \\ a_2 = \frac{\mathcal{M}}{\varkappa} \end{cases}, \quad \begin{cases} b_1 = -\frac{\mu}{\xi} \frac{c - J\omega^2 - i\beta\omega}{c} \\ b_2 = -\frac{\mu}{\xi} \end{cases}.$$

Теперь их можно поставить в решение уравнения и получить ответ:

$$\varphi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}.$$

№18.37

Момент инерции стержня $J = \frac{1}{3}ml^2$, тогда, считая отклонения малыми, кинетическую и потенциальную энергию системы можем записать, как

$$T = \frac{1}{2}J(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2), \quad \Pi = \frac{1}{2}c(\varphi a - \psi a)^2 + \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} + 1 - \frac{\psi^2}{2}\right)mg\frac{l}{2}.$$

Переходя в СО движущейся платформы, к системе добавляется инерциальная сила

$$M = \frac{mA}{2} \sin(\omega t)\omega^2 l,$$

действующая на центры масс стержней.

С помощью уравнений Лагранжа второго рода переходим к уравнениям вида

$$A\ddot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = M, \quad A = J \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a^2c + mgl & -2ca^2 \\ -2ca^2 & 2a^2c + mgl \end{pmatrix}$$

Из векового уравнения теперь можем найти собственные частоты системы, для получения однородного решения

$$\det(C - \lambda A) = 0, \Rightarrow \left(mg\frac{l}{2} - J\lambda\right) \left(a^2c + mg\frac{l}{2} - J\lambda\right) = 0,$$

откуда легко находим λ

$$\lambda_1 = \frac{3}{2}\frac{g}{l}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{2}\frac{g}{l} + \frac{6ca^2}{ml^2}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

из которых уже можем составить ФСР.

Теперь перейдём к поиску частного решения³:

$$\varphi = \alpha \sin(\omega t), \psi = \beta \sin(\omega t), \Rightarrow -A\omega^2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{mA\omega^2 l}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

вводя матрицу

$$\Lambda = C - A\omega^2, \Rightarrow \Lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{mA\omega^2 l}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \frac{mA\omega^2 l}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Считая Λ^{-1} , находим частное решение и получаем ответ

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \frac{3A\omega^2}{3g - 2l\omega^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\omega t) + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}}t + \alpha_1\right) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l} + \frac{6ca^2}{ml^2}}t + \alpha_2\right).$$

³Так как по условию φ и ψ малые, то про резонанс говорить не приходится.

№18.62

Известно, что кинетическая и потенциальная энергия системы могут быть записаны, как

$$T = \frac{1}{2} a_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k, \quad \Pi = \frac{1}{2} c_{ik} q^i q^k.$$

С помощью уравнений Лагранжа второго рода можем перейти к системе

$$A\ddot{\mathbf{q}} + C\dot{\mathbf{q}} = A\mathbf{u}_1 \gamma \sin(\omega t).$$

Так как A , C – (невырожденные) положительно-определенные симметричные квадратичные формы, то они во-первых обратимы, а во вторых коммутируют (т.к. одновременно приводятся к диагональному виду), а значит и $A^{-1}C$ симметрична, соответственно имеет ортогональный базис.

Собственно, известно, что

$$\begin{cases} \det(C - \lambda_i A) = 0 \\ (C - \lambda_i A)\mathbf{u}_i = 0, \end{cases} \Rightarrow A^{-1}C\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i.$$

Перейдём к базису из собственных векторов (и переменным θ), тогда уравнения примут вид

$$\ddot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \gamma \sin(\omega t).$$

Так как резонанс возможен только на собственных частотах системы, и $\lambda_1 = \omega_1^2$, то единственная частота, на которой возможен резонанс равна ω_1 .

1.3 Элементы теории бифуркаций в нелинейных системах

№Т2

Рассмотрим уравнение вида

$$\dot{x} = (x - a)(x^2 - a),$$

найдем положения равновесия

$$\dot{x} = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = a \\ x = \pm\sqrt{a}, \quad a > 0 \end{cases}$$

Соответственно, при неположительных a существует единственное положение равновесия $x^* = a$, при поло-

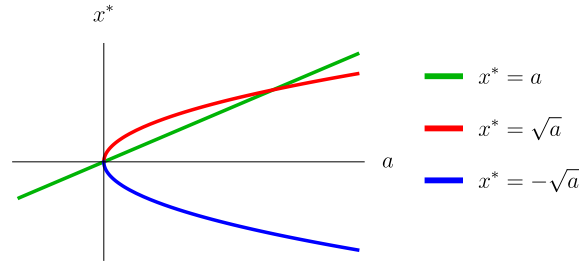


Рис. 1: Зависимость положения равновесия x^* от параметра a к №Т2

жительных $a \neq 1$ существует три положения равновесия $x^* \in \{a, +\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$, и при $a = 1$ существует два положения равновесия $x^* \in \{+1, -1\}$. Соответствующие зависимости $\dot{x}(x, a)$ приведены на рисунке 2.

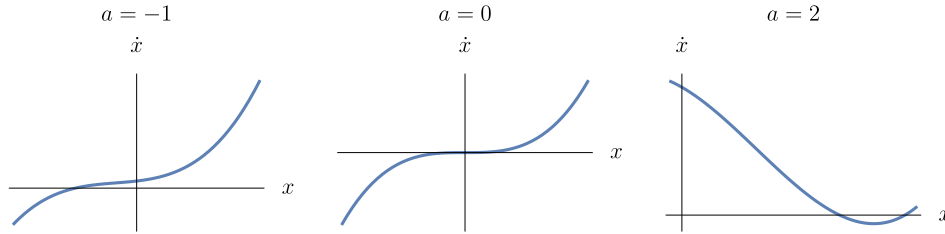


Рис. 2: Зависимость $\dot{x}(x)$ при различных a к №Т2

№Т3

Исследуем систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = k \left(\frac{b}{a-x} - x \right) \end{cases}$$

Рассмотрим положение равновесия $\dot{x} = \dot{y} = 0$, при $x \neq a$

$$x^* = \frac{1}{2} \left(a \pm \sqrt{a^2 - 4b} \right),$$

что приводит нас к следующим случаям.

Пусть $a^2 = 4b$, тогда $x^* = a/2$, попробуем найти фазовый портрет по линейному приближению

$$\det(J - \lambda E) = \lambda^2 - k \left(\frac{b}{(a-x^*)^2} - 1 \right) = k \cdot 0 = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0,$$

следовательно линейным приближением здесь не воспользоваться.

При $a^2 > 4b$,

$$x^* = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = \frac{a}{2} \pm \delta,$$

тогда

$$\lambda^2 = \frac{5}{4}(4b - a^2) \pm a\delta,$$

в случае $+a\delta \operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 0$, следовательно это *центр*, при $-a\delta$ получается $\lambda^2 = 100b - 9a^2 > 64b > 0$, следовательно это *седло*.

При $a^2 < 4b$ не существует положения равновесия, что приводит нас к фазовым диаграммам аналогичным задаче Т4.

№Т4

Запишем уравнения Бине для движения в метрике Шварцшильда:

$$u'' + u = \frac{a}{2c^2}v^2 + \frac{3}{2}au^2,$$

где $r^2\dot{\varphi} = c$, $u = 1/r$. Перейдём к системе

$$\begin{cases} u' = y \\ y' = \frac{3}{2}au^2 + \frac{a}{2c^2}v^2 - u \end{cases}$$

положение равновесия которой находится в точке

$$y^* = 0, \quad u^* = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 3\frac{v^2 a^2}{c^2}}}{3a}.$$

Зависимость $u^*(c)$ представлена на рисунке, соответственно положение равновесия существует только при $c \geq \sqrt{3}va$, при чём при равенстве оно единственно.

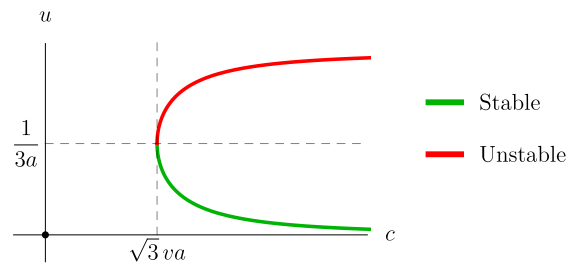


Рис. 3: Бифуркационная диаграмма стационарных точек уравнения Бине к №Т4

Посмотрим на устойчивость положения равновесия

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3au - 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = 3au - 1 = \pm \sqrt{1 - 3\frac{v^2 a^2}{c^2}},$$

получается плюсу соответствует седл, а минусу центр. Соответствующие фазовые портреты представлены на рисунке, при $a, v = 1$.

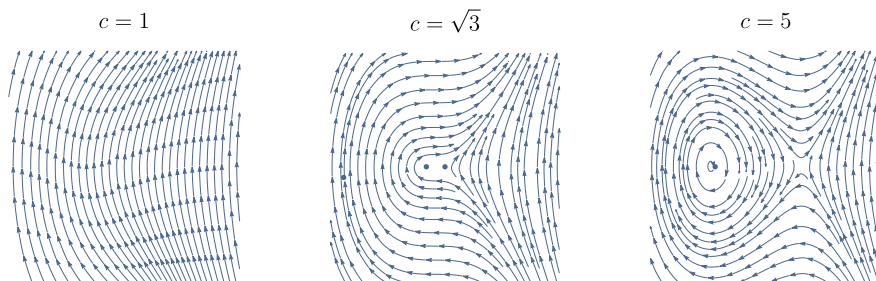


Рис. 4: Фазовый портрет системы №Т4 (бифуркация при плавном изменении c)

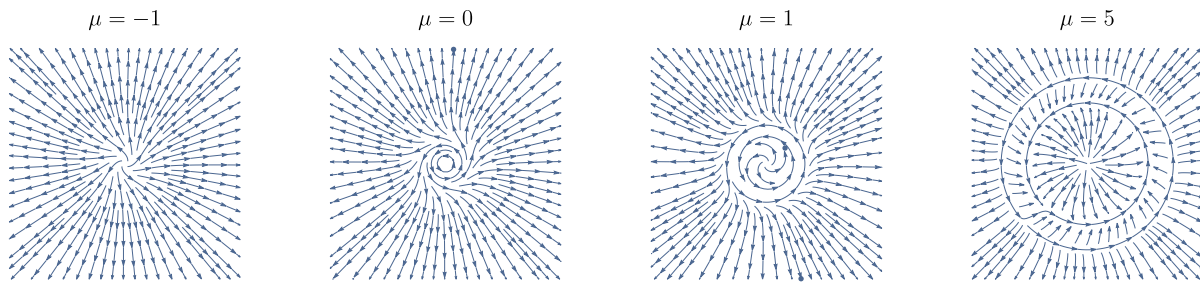


Рис. 5: Фазовый портрет системы №Т5 (бифуркация при плавном изменении μ)

№Т5

Покажем существование предельного цикла, и нарисуем фазовые портреты для системы

$$\dot{x} = -y + x(\mu - x^2 - y^2)(\mu - 2x^2 - 2y^2)$$

$$\dot{y} = x + y(\mu - x^2 - y^2)(\mu - 2x^2 - 2y^2)$$

при различных параметрах μ .

Перейдём к полярным координатам

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi = r((2r^4 - 3r^2\mu + \mu^2) \cos \varphi - \sin \varphi) \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi = r((2r^4 - 3r^2\mu + \mu^2) \sin \varphi + \cos \varphi) \end{cases}.$$

Рассмотрим $\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi = \dot{r}$, и $\dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi = r \dot{\varphi}$:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(2r^4 - 3r^2\mu + \mu^2) \\ r \dot{\varphi} = r \end{cases} \Rightarrow \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{dr}{d\varphi} = r(2r^4 - 3r^2\mu + \mu^2).$$

Судя по виду уравнений можно предположить, что при некоторых μ производная $dr/d\varphi = 0$ (более аккуратные рассуждения будут проведены в задаче Т6), тогда

$$(2r^4 - 3r^2\mu + \mu^2) = 2 \left(r^2 - \frac{\mu}{2} \right) (r^2 - \mu) = 2 (r^2 - r_1^2) (r^2 - r_2^2) = 0,$$

где $r_1^2 = \mu/2$ и $r_2^2 = \mu$. Соответственно при $\mu > 0$ существует периодическая траектория при $r \in \{r_1, r_2\}$. Из вида производной \dot{r} знаем, что

$$\text{sign } \dot{r} = \begin{cases} 1, & r \in (0, r_1) \cup (r_2, +\infty) \\ -1, & r \in (-r_1, r_2) \end{cases}$$

Следовательно траектория $\dot{\varphi} = 1$, $r = r_2$ является неустойчивой, а $\dot{\varphi} = 1$, $r = r_1$ устойчива, а соответственно и является предельным циклом.

При отрицательных μ существует единственное положение равновесия в $x = y = 0$, являющееся устойчивым фокусом (см. вид \dot{r}), а при $\mu > 0$ становится неустойчивым фокусом. Таким образом приходим к фазовым портретам изображенным на рисунке 5.

№Т6

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = -y + \mu x - xy^2,$$

$$\dot{y} = \mu y + x - y^3.$$

Аналогично Т5 перейдём к полярным координатам, и выразим $\dot{\varphi}$ и \dot{r} , так вышло, что и здесь всё хорошо, и

$$\begin{cases} r \dot{\varphi} = r \\ \dot{r} = r\mu - r^3 \sin^2(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{dr}{d\varphi} = r(\mu - r^2 \sin^2 \varphi).$$

Найдём значения $r = r_*$, где \dot{r} меняет знак

$$r_*^2 = \mu \sin^{-2} \varphi,$$

что возможно только при $\mu > 0$. Аналогично предыдущей задаче рассмотрим $\text{sign } \dot{r}$, и получим

$$\text{sign } \dot{r} = \begin{cases} 1 & r < r_* \\ -1 & r > r_* \end{cases}$$

Подробнее рассмотрим положение равновесия $x = y = 0$, которое в силу постоянства $\dot{\varphi}$ единственное. В линейном приближение,

$$J = \begin{pmatrix} \dot{x}'_x & \dot{x}'_y \\ \dot{y}'_x & \dot{y}'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu - y^2 & -1 - 2xy \\ 1 & \mu - 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\det(J - \lambda E) = (\mu - \lambda)^2 + 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \mu \pm i.$$

Тогда при $\mu < 0$, по теореме Ляпунова об устойчивости в линейном приближение, $x = y = 0$ – устойчивый фокус, при $\mu = 0$ верно, что $\text{Re}(\lambda) = 0$, следовательно это центр, а при $\mu > 0$ фокус становится неустойчивым. Это позволяет прийти к фазовы портретам при различных значениям μ , изображенным на рисунке 6.

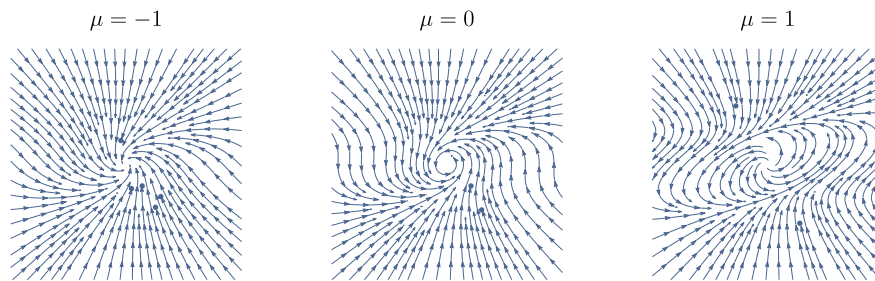


Рис. 6: Бифуркация Пуанкаре-Андронов-Хопфа к №Т6

1.4 Метод усреднения и метод нормальных форм в теории нелинейных колебаний

№Т7

Исследуем параметрический резонанс в уравнении Матё

$$\ddot{x} + (a + \varepsilon \cos t)x = 0,$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$. Будем считать $a = 1 + c\varepsilon^2$, и рассматривать задачу относительно медленного времени $\tau = t$ и быстрого времени $T = \varepsilon^2 t$. Пусть также $a = 1 + c\varepsilon^2$, где $c = (1)$. Величинами порядка $o(\varepsilon^2)$ пренебрежем.

Для начала перепишем дифференцирование по времени в терминах T, τ :

$$\begin{aligned} d_t &= \partial_\tau + \varepsilon^2 \partial_T, \\ d_{t,t}^2 &= \partial_{\tau,\tau}^2 + 2\varepsilon^2 \partial_\tau \partial_T, \end{aligned}$$

где слагаемым $\varepsilon^4 \partial_{T,T}^2$ пренебрегли.

Для поиска решения воспользуемся естественным анзацем, вида

$$x = x_0(\tau, T) + \varepsilon x_1(\tau, T) + \varepsilon^2 x_2(\tau, T),$$

тогда, после подстановки в уравнение Матё и группировки по степеням⁴ ε , получим набор условий. При ε^0

$$\varepsilon^0: \quad \ddot{x}_0(\tau, T) + x_0(\tau, T) = 0, \quad \Rightarrow \quad x_0 = A(T)e^{i\tau} + B(T)e^{-i\tau}.$$

При ε^1 , подставляя значение x_0 находим, что

$$\varepsilon^1: \quad \ddot{x}_1(\tau, T) + x_1(\tau, T) = -\frac{1}{2} (A + B + Ae^{2i\tau} + Be^{-2i\tau}),$$

решая это дифференциальное уравнение относительно $x_1(\tau, T)$ находим, что

$$x_1(\tau, T) = \frac{1}{6} (Ae^{2i\tau} + Be^{-2i\tau}) + A_1(T)e^{i\tau} + B_1(T)e^{-i\tau} - \frac{1}{2} (A + B).$$

Наконец, подставим значения x_0, x_1 в коэффициент при ε^2 . Здесь уже возможно возникновение резонанса, так как кроме части с $\ddot{x}_2 + x_2$ остаются периодичные слагаемые с единичной частотой. Хотелось бы, чтобы наше приближение работало, так что коэффициенты при резонансных слагаемых будем требовать равными 0. Тогда получаем два следующих условия на $A(T)$ и $B(T)$

$$\begin{aligned} 2iB' &= cB - A/4 - B/6 \\ -2iA' &= cA - B/4 - A/6 \end{aligned}$$

решая систему линейных дифференциальных уравнений, находим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A(T) &= C_1 \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{(c - 5/12)(c + 1/12)} T \right), \\ \operatorname{Re} B(T) &= C_2 \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{(c - 5/12)(c + 1/12)} T \right), \end{aligned}$$

при отрицательном аргументе корня, мы получим комплексный аргумент у косинуса, то есть гиперболический косинус, который неограниченно растёт, иначе же решение ограничено. Получается, что

$$\left(c - \frac{5}{12} \right) \left(c + \frac{1}{12} \right) < 0, \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{12} < c < \frac{5}{12},$$

вспоминая, что $a = 1 + c\varepsilon^2$, получаем

$$1 - \frac{\varepsilon^2}{12} < a < 1 + \frac{5}{12}\varepsilon^2, \quad \text{Q. E. D.}$$

с учетом пренебрежения слагаемых порядка $o(\varepsilon^2)$.

№Т8

Сразу подставим $\lambda_2 = 2\lambda_1$ и приведем к нормальной форме Коши уравнения вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + c_{20} x_2^2 + c_{11} x_1 x_2 + c_{1,2} x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= 2\lambda_1 x_2 + d_{20} x_1^2 + d_{11} x_1 x_2 + d_{02} x_2^2, \end{aligned}$$

диагональный вид уже получен, остается подобрать многочлен \mathbf{p} такой, что

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{p}(\mathbf{y}), \quad \dot{\mathbf{y}} = \Lambda \mathbf{y} + \Lambda \mathbf{p} + \mathbf{g}^2(\mathbf{y}) - \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}^T} \Lambda \mathbf{y} + O(y^3)$$

⁴Коэффициент при каждой степени должен быть нулевым.

что возможно, при

$$p_i = \frac{g_i^2}{k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n - \lambda_i}.$$

Из этого находим

$$\begin{aligned} p_{20}^1 &= \frac{c_{20}}{\lambda_1}, & p_{11}^1 &= \frac{c_{11}}{\lambda_2}, & p_{02}^1 &= \frac{c_{02}}{3\lambda_1}, \\ p_{20}^2 &= \frac{\neq 0}{0}, & p_{11}^2 &= \frac{d_{11}}{\lambda_1}, & p_{02}^2 &= \frac{d_{02}}{2\lambda_1}, \end{aligned}$$

и записываем нормальную форму

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_{20}y_1^2 \end{pmatrix} + O(|\mathbf{y}|^3).$$

№Т9

Посмотрим на маятник

$$\ddot{x} + \sin x = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_1^2/6, \end{cases}$$

тогда

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Посмотрим на замену $\mathbf{x} = S\mathbf{u}$, тогда

$$\dot{\mathbf{u}} = \Lambda \mathbf{u} + S^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ X_1^3/6 \end{pmatrix},$$

или, в координатах,

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -iu_1 - i(u_1 - u_2)^3/12 \\ \dot{u}_2 = iu_2 - i(u_1 - u_2)^3/12 \end{cases} \quad \mathbf{g} = \frac{-i}{12} \begin{pmatrix} u_1^3 - 3u_1^2u_2 + 3u_1u_2^2 - u_2^3 \\ u_1^3 - 3u_1^2u_2 + 3u_1u_2^2 - u_2^3 \end{pmatrix}.$$

Во имя упрощения уравнений, перейдём к переменным

$$\mathbf{u} = \mathbf{y} + \mathbf{p}(\mathbf{y}), p_i = \frac{g_i^k}{k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n - \lambda_i},$$

тогда коэффициенты многочлена

$$\begin{aligned} p_{03}^1 &= \frac{1}{48}, & p_{12}^1 &= -\frac{1}{8}, & p_{21}^1 &= \frac{\neq 0}{0}, & p_{30}^1 &= \frac{1}{24}, \\ p_{03}^2 &= \frac{1}{24}, & p_{12}^2 &= \frac{\neq 0}{0}, & p_{21}^2 &= \frac{1}{8}, & p_{30}^2 &= \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

Получается, остались только резонансные слагаемые,

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iy_1 + iy_1^2y_2/4 \\ iy_2 - iy_1y_2^2/4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1 = C_1(t)e^{it}, \\ y_2 = C_2(t)e^{-it}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1 = \gamma_2 \exp(i(\gamma_1 - 4)t/4), \\ y_2 = \gamma_1/\gamma_2 \cdot e^{-i(\gamma_1 - 4)t/4}. \end{cases}$$

Теперь подставим начальные условия $t = 0$ и $x_1 = a$, $x_2 = 0$. Пусть

$$\begin{cases} u = x_2 + ix_1 \\ \bar{u} = x_2 - ix_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_2 = u_1 + u_2 \\ x_1 = i(u_1 - u_2) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \operatorname{Re} u = u_1 + u_2 \\ \operatorname{Im} u = u_1 - u_2 \end{cases}$$

Тогда

$$u\bar{u}(t=0) = a^2 = \operatorname{Re}^2 u + \operatorname{Im}^2 u = 2(u_1^2 + u_2^2),$$

также

$$\operatorname{tg} \operatorname{Arg} u = \frac{\operatorname{Re} u}{\operatorname{Im} u} = 0, \quad \Rightarrow \quad u_1^2 - u_2^2 = 0.$$

Пренебрегая членам $O(y_1^3)$ находим, что

$$u_1 = y_1, \quad \Rightarrow \quad u_1^2 \approx y_1^2,$$

аналогично $u_2^2 \approx y_2^2$, другими словами

$$y_1^2 + y_2^2 = \frac{a^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad \gamma_2^2 + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} = \frac{a^2}{2}.$$

также верно, что

$$y_1^2 - y_2^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \gamma_1^2 = \gamma_2^4, \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = \gamma_2^2, \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = \frac{a^2}{4}.$$

Вспомнив, как выглядит $y_1(t)$ находим, что

$$\omega = \left| 1 - \frac{\gamma}{4} \right| = \left| 1 - \frac{a^2}{16} \right|,$$

что очень сильно похоже на правду.

№Т10

Возможно, тут алгебраическая ошибка. Уравнение Бине для светового луча

$$u'' + u = \frac{3}{2}au^2, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \frac{3}{2}ax_1^2 \end{cases}$$

что в плане диагонализации абсолютно аналогично №Т9, а значит

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = i(u_1 - u_2), \\ x_2 = u_1 + u_2. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_1 = -iu_1 - \frac{3}{4}a(u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2) \\ u_2 = iu_2 - \frac{3}{4}a(u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2). \end{cases}$$

Теперь подберем соответствующий многочлен.

$$\begin{aligned} p_{20}^1 &= -\frac{3}{4}ai, & p_{11}^1 &= -\frac{3}{2}ai, & p_{02}^1 &= \frac{1}{4}ai, \\ p_{20}^2 &= -\frac{1}{4}ai, & p_{11}^2 &= \frac{3}{2}ai, & p_{02}^2 &= \frac{3}{4}ai. \end{aligned}$$

Ура, нет резонансов, тогда

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -iy_1, \\ \dot{y}_2 = iy_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_1 = y_1 + ai \left(-\frac{3}{4}y_1^2 - \frac{3}{2}y_1y_2 + \frac{1}{4}y_2^2 \right) \\ u_2 = y_2 + ai \left(-\frac{1}{4}y_1^2 + \frac{3}{2}y_1y_2 + \frac{3}{4}y_2^2 \right). \end{cases}$$

2 Второе задание по аналитической механике

2.1 Функция Гамильтона и канонические уравнения

19.9

Найдём гамильтониан системы, и составим канонические уравнения движения механической системы, с лагранжианом вида

$$L = \frac{1}{2} ((\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^2 + a\dot{q}_1^2 t^2) - a \cos q_2.$$

Что ж, выразим импульсы, через обобщенные скорости

$$\begin{cases} p_1 = \partial_{\dot{q}_1} L &= \dot{q}_1 - \dot{q}_2 + q\dot{q}_1 t^2, \\ p_2 = \dots &= \dot{q}_2 - \dot{q}_1 \end{cases} \Rightarrow \quad \dot{q}_1 = \frac{p_1 + p_2}{at^2}, \quad \dot{q}_2 = \frac{p_1 + p_2(1 + at^2)}{at^2}.$$

И получим функцию Гамильтона

$$H = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - L = \frac{(p_1 + p_2)^2}{2at^2} + a \cos q_2 - \frac{p_2^2}{2}.$$

Канонические уравнения системы:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{p_1 + p_2}{at^2}, \\ \dot{q}_2 &= \frac{p_1 + p_2}{at^2} - p_2, \\ \dot{p}_1 &= 0, \\ \dot{p}_2 &= a \sin(q_2). \end{aligned}$$

19.15

Решим обратную задачу, попробуем найти лагранжиан механической системы, гамильтониан которой имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \frac{p_1^2 + p_2^2}{q_1^2 + 1} + a(q_1^2 + q_2^2).$$

Для начала перейдём к обобщенным скоростям

$$\dot{q}_1 = \frac{p_1}{q_1^2 + q_2^2}, \quad \dot{q}_2 = \frac{p_2}{q_1^2 + q_2^2}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_1 = (q_1^2 + q_2^2)\dot{q}_1, \\ p_2 = (q_1^2 + q_2^2)\dot{q}_2. \end{cases}$$

Лагранжиан же примет вид

$$L = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - H = \left[\frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - a \right] (q_1^2 + q_2^2).$$

19.32

Найдём гамильтониан для двойного маятника, состоящего из двух одинаковых стержней массы m и для l .

Координаты центар масс стержней:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{l}{2} \cos \alpha_1, & x_1 &= \frac{l}{2} \sin \alpha_1, \\ h_2 &= l \cos \alpha_1 + \frac{l}{2} \cos \alpha_2, & x_2 &= l \sin \alpha_1 + \frac{l}{2} \sin \alpha_2. \end{aligned}$$

Тогда кинетическая и потенциальная энергия системы

$$\Pi = mg(h_1 + h_2), \quad T = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2) + \frac{m}{24} (\dot{x}_1^2 + \dot{h}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{h}_2^2).$$

Подставляя координаты, находим

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{6} l^2 m (4\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 + 3\alpha_2' \alpha_1' \cos(\alpha_1 - \alpha_2)), \\ \Pi &= gm \left(\frac{3}{2} l \cos(\alpha_1) + \frac{1}{2} l \cos(\alpha_2) \right), \end{aligned}$$

что не так плохо, как могло бы быть. Для консервативной системы с адекватными связями

$$\begin{aligned} H = E = T + \Pi, \quad L = T - \Pi, \quad p_1 &= \partial_{\dot{q}_1} L, \\ p_2 &= \partial_{\dot{q}_2} L. \end{aligned}$$

Ну, подставляя координаты, находим

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{6} l^2 m (8\dot{\alpha}_1 + 3\dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)), & \dot{\alpha}_1 &= \frac{12(3p_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - 2p_1)}{l^2 m (9 \cos(2(\alpha_1 - \alpha_2)) - 23)}, \\ p_2 &= \frac{1}{6} l^2 m (2\dot{\alpha}_2 + 3\dot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)), & \dot{\alpha}_2 &= \frac{12(3p_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - 8p_2)}{l^2 m (9 \cos(2(\alpha_1 - \alpha_2)) - 23)}. \end{aligned}$$

Возможно, после подстановки станет в гамильтониан станет лучше:

$$H = -mg \frac{l}{2} [3 \cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)] + \frac{1}{ml^2} \frac{6(p_1^2 - 3p_1 p_2 \cos(q_1 - q_2) + 4p_2^2)}{(9 \sin^2(q_1 - q_2) + 7)}$$

И канонические уравнения ($\alpha_1 = q_1, \alpha_2 = q_2$):

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{12(3p_2 \cos(q_1 - q_2) - 2p_1)}{l^2 m (9 \cos(2(q_1 - q_2)) - 23)}, \\ \dot{q}_2 &= \frac{12(3p_1 \cos(q_1 - q_2) - 8p_2)}{l^2 m (9 \cos(2(q_1 - q_2)) - 23)}, \\ \dot{p}_1 &= -\frac{3}{2} glm \sin(q_1) - \frac{36 \sin(q_1 - q_2) (p_1 p_2 (9 \cos(2(q_1 - q_2)) + 41) - 12(p_1^2 + 4p_2^2) \cos(q_1 - q_2))}{l^2 m (23 - 9 \cos(2(q_1 - q_2)))^2}, \\ \dot{p}_2 &= -\frac{1}{2} glm \sin(q_2) - \frac{36 \sin(q_1 - q_2) (12(p_1^2 + 4p_2^2) \cos(q_1 - q_2) - p_1 p_2 (9 \cos(2(q_1 - q_2)) + 41))}{l^2 m (23 - 9 \cos(2(q_1 - q_2)))^2}. \end{aligned}$$

Гамильтониан сходится с приведенным в ответах, что не может не радовать.

19.69

Тяжелое колечко массы m скользит по гладкой проволочной окружности массы M и радиуса r , которая может вращаться вокруг своего вертикального диаметра. Составим уравнения движения системы в форме уравнений Рауса (выбрав такие обобщенные скорости, чтобы всё сошлось):

$$\Pi = mgR \cos \psi, \quad T = \frac{m}{2} \left((\dot{\varphi} R \sin \psi)^2 + (\dot{\psi} R)^2 \right) + \frac{MR^2}{2} \frac{\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Лагранжиан знаем, как $L = T - \Pi$, функцию Рауса через

$$R(\psi, \varphi, \dot{\psi}, p_\varphi) = p_\varphi \dot{\varphi} - L(\psi, \varphi, \dot{\psi}, p_\varphi),$$

Находя из $p_\varphi = \partial_{\dot{\varphi}} L$ значение $\dot{\varphi}$, находим функцию Рауса

$$\dot{\varphi} = \frac{2p_\varphi}{r^2(M + 2m \sin^2 \psi)}, \quad \Rightarrow \quad R = mgR \cos \psi - \frac{mR^2}{2} \dot{\psi}^2 + \frac{p_\varphi^2}{R^2(M + 2m \sin^2 \psi)}.$$

19.70

В сферических координатах лагранжиан релятивистской частицы в поле тяготения имеет вид

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta}{c^2}} + \frac{G}{r}.$$

Найдём соответствующую функцию Рауса. Аналогично предыдущей задаче, из $p_\varphi = \partial_{\dot{\varphi}} L$ находим $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = \pm \frac{p_\varphi}{r \sin \theta} \sqrt{\frac{c^2 - \dot{r}^2 - \dot{\theta}^2 r^2}{p_\varphi^2 + c^2 m^2 r^2 \sin^2 \theta}},$$

что подставляем в выражение для функции Рауса $R = p_\varphi \dot{\varphi} - L$, откуда получаем

$$R = m_0 c^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}{c^2}\right) \left(1 + \frac{p_\varphi^2}{m_0^2 c^2 r^2 \sin^2 \theta}\right)} - \frac{G}{r}.$$

19.72

Для системы с лагранжианом вида

$$L = \frac{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + q_1^2 \dot{q}_3^2}{2} - \frac{q_1^2 + q_2^2}{2}.$$

Сразу перепишем это в терминах (q, p) разбив на кинетическую и потенциальную энергии:

$$T = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2/q_1^2}{2}, \quad \Pi = \frac{q_1^2 + q_2^2}{2}.$$

Осталось сказать, что $T + \Pi = H = h = \text{const}$, и найти

$$p_3 = K = \pm q_1 \sqrt{2h - (p_1^2 + p_2^2) - (q_1^2 + q_2^2)}.$$

Теперь выпишем уравнения Гамильтона

$$\dot{q}_1 = \partial_{p_1} H, \quad \dot{p}_1 = -\partial_{q_1} H, \quad \dot{q}_i = \partial_{p_i} H, \quad \dot{p}_i = -\partial_{q_i} H.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dq_2}{dq_1} &= \frac{\partial K}{\partial p_2} = -\frac{p_2 q_1}{\sqrt{2h - p_1^2 - p_2^2 - q_1^2 - q_2^2}}, \\ \frac{dp_2}{dq_1} &= -\frac{\partial K}{\partial q_2} = \frac{q_1 q_2}{\sqrt{2h - p_1^2 - p_2^2 - q_1^2 - q_2^2}}. \end{aligned}$$

2.2 Элементы теории детерминированного хаоса и КАМ-теории

T19

Для гамильтоновой системы $H_0 = 7I_1 - I_2$ найдём уравнения движения $x(t) = \sqrt{2I_1} \cos \varphi_1$, $y = \sqrt{2I_1} \sin \varphi_1$, при наложении возмущения εH_1 , с

$$\begin{aligned} 1) \quad H_1 &= \sqrt{2I_1} \cos \varphi_1 \cos 6\varphi_2 = \frac{\sqrt{2I_1}}{2} [\cos(\varphi_1 + 6\varphi_2) + \cos(\varphi_1 - 6\varphi_2)] \\ 2) \quad H_1 &= \sqrt{2I_1} \cos \varphi_1 \cos 7\varphi_2 = \frac{\sqrt{2I_1}}{2} [\cos(\varphi_1 + 7\varphi_2) + \cos(\varphi_1 - 7\varphi_2)]. \end{aligned}$$

Система является вырожденной в терминах

$$\left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j} \right| = 0,$$

т.к. $\omega_1 = \partial_{I_1} H_0 = 7 = \text{const}$, $\omega_2 = \partial_{I_2} H_0 = -1 = \text{const}$. По аналогичным причинам

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{I}^T \partial \mathbf{I}} & \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

то есть ω_2/ω_1 не зависит I_1, I_2 .

Первый случай. Так как возмущение явно периодически, то можем попробовать найти новые хорошие переменные через производящую функцию S , вида

$$S = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \varepsilon S_1, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \psi = \varphi + \varepsilon \partial_{\mathbf{I}} S \\ J = \mathbf{I} + \varepsilon \partial_{\boldsymbol{\varphi}} S \end{cases}$$

Саму функцию ищем в виде

$$S = \sum_i S_i \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}) = S_1 \sin(\varphi_1 + 6\varphi_2) + S_2 \sin(\varphi_1 - 6\varphi_2).$$

Вспомогая, что $\partial_{\mathbf{I}} H_0 \cdot \partial_{\boldsymbol{\varphi}} S = -[H_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi})]_{\text{период}}$, находим⁵

$$S_1 = \frac{\sqrt{2I_1}}{2(7-6)}, \quad S_2 = \frac{\sqrt{2I_1}}{2(7+6)}.$$

Теперь можем найти новые переменные

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_1 + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2I_1}} \sin(\varphi_1 + 6\varphi_2) + \varepsilon \frac{\sqrt{2I_1}}{26} \sin(\varphi_1 - 6\varphi_2), \\ \psi_2 &= \varphi_2, \\ J_1 &= I_1 + \frac{\varepsilon\sqrt{2I_1}}{2} \cos(\varphi_1 + 6\varphi_2) + \frac{\varepsilon\sqrt{2I_1}}{26} \cos(\varphi_1 - 6\varphi_2), \end{aligned}$$

с новым гамильтонианом $\hat{H} = 7J_1 - J_2 + o(\varepsilon)$, $J_1, J_2 = \text{const}$, и $\psi_1 = 7t + C_1$, $\psi_2 = -t + C_2$. Выражение для второго интеграла системы содержит I_2 , поэтому нам неинтересно.

⁵Заодно переобозначая $\varepsilon \rightarrow -\varepsilon$, так как в этом месте потерялся знак.

Осталось выразить I_1 и φ_1 в терминах x, y :

$$\varphi_1 = \arctg \frac{y}{x}, \quad x^2 + y^2 = 2I_1,$$

а также (считая константы нулевыми), подставляя x, y в уравнения

$$\psi_1 = \varphi_1 + \frac{\varepsilon}{4I_1} \left(\frac{14}{13} y \cos 6t - \frac{12}{13} x \sin 6t \right) = \arctg \frac{y}{x} + \frac{\varepsilon}{13} \frac{1}{x^2 + y^2} [7y \cos(6t) - 6x \sin(6t)].$$

Аналогично для выражения J_1 :

$$J_1 = I_1 + \frac{\varepsilon}{13} [7x \cos(6t) + 6y \sin(6t)].$$

Итоговая система для $x(t)$ и $y(t)$ получилась вида

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{\varepsilon}{13} [7x \cos(6t) + 6y \sin(6t)], \\ 7t &= \arctg \frac{y}{x} + \frac{\varepsilon}{13} \frac{1}{x^2 + y^2} [7y \cos(6t) - 6x \sin(6t)], \end{aligned}$$

которую можно уже и не решать.

Второй случай. Если повторить рассуждения первого случая, то увидим деление на 0 в выражение для S_1 , однако производящую функцию вида

$$S = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\varphi} + S_2, \quad S_2 = \frac{\sqrt{2I_1}}{28},$$

всё можем рассмотреть, чтобы избавиться от одной из возмущающих гармоник.

Новые переменные будут вида

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_1 + \frac{\varepsilon}{28\sqrt{2I_1}} \sin(\varphi_1 - 7\varphi_2), \\ \psi_2 &= \varphi_2, \\ J_1 &= I_1 + \frac{\varepsilon\sqrt{2I_1}}{28} \cos(\varphi_1 - 7\varphi_2), \\ J_2 &= I_2 - \frac{\varepsilon\sqrt{2I_1}}{4} \cos(\varphi_1 - 7\varphi_2), \end{aligned}$$

с новым гамильтонианом вида

$$\hat{H} = 7J_1 - J_2 + \frac{\varepsilon\sqrt{2J_1}}{2} \cos(\psi_1 + 7\psi_2) + o(\varepsilon).$$

В таком случае уравнения движения могут быть записаны, как

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \partial_{J_1} \hat{H} = 7 + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2J_1}} \cos(\psi_1 + 7\psi_2), \\ \dot{\psi}_2 &= -1, \\ \dot{J}_1 &= \varepsilon \frac{\sqrt{2I_1}}{2} \sin(\psi_1 + 7\psi_2), \end{aligned}$$

а J_2 нас как и раньше не интересует.

Пристально взглянув на систему понимаем, что хорошая затея ввести переменные $\gamma = \psi_1 + 7\psi_2$ и $\varkappa = \sqrt{2J_1}$, что приводит к системе замечательного вида

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \frac{\varepsilon}{2\varkappa} \cos \gamma, \\ \dot{\varkappa} = \frac{\varepsilon}{2} \sin \gamma, \end{cases} \Rightarrow \frac{d\gamma}{d\varkappa} = \frac{1}{\varkappa \operatorname{tg} \gamma}, \Rightarrow \ln \varkappa = -\ln \cos \gamma + \tilde{C}, \Rightarrow \boxed{\varkappa = \frac{C}{\cos \gamma}}.$$

Подставляя это в уравнения движения, находим

$$\varkappa = C \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{2C} t \right)^2}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \left(\frac{\varepsilon}{2C} t \right).$$

Теперь можно пройти обратную цепочку $\{\gamma, \varkappa\} \rightarrow \{J_1, \psi_1\} \rightarrow \{I_1, \varphi_1\} \rightarrow \{x(t), y(t)\}$, и найти искомые решения уравнений движения.

Т20

Для следующих четырёх гамильтоновых систем оценим меру устойчивых, или неустойчивых траекторий к возмущениям εH_1 при малых ($0 < \varepsilon \ll 1$). Также построим графики линий уровня $H_0(I_1, I_2)$ и отложим на них ω : $\omega_2 = \text{const}$.

Первый случай. Для гамильтониана и возмущения

$$H_0 = 42I_1^2 + I_1I_2 + 42I_2^2, \quad H_1 = 2I_1 \sin(3\varphi_1 - 18\varphi_2),$$

можем перейти к переменным $\mathbf{J}, \boldsymbol{\psi}$ через производящую функцию вида

$$S + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \varepsilon \frac{18}{5} \frac{2I_1}{84I_1 + I_2} \cos(3\varphi_1 - 18\varphi_2),$$

к гамильтониану $\hat{H} = H_0(J_1, J_2)$, и, соответственно ограниченными I_1, I_2 .

Система с H_0 является невырожденной

$$\left| \frac{\partial^2 H}{\partial I_i \partial I_j} \right| = \begin{pmatrix} 84 & 1 \\ 1 & 84 \end{pmatrix} \neq 0,$$

а также изоэнергетически невырожденной

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{I}^T \partial \mathbf{I}} & \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & 1 & 84I_1 + I_2 \\ 1 & 84 & 84I_2 + I_1 \\ 84I_1 + I_2 & 84I_2 + I_1 & 0 \end{pmatrix} = 14110(42I_1^2 + I_1I_2 + 42I_2^2) \sim H_0 > 0.$$

Таким образом мера траекторий, неустойчивых к возмущениям, равна нулю (а вообще выше мы показали, что их здесь нет).

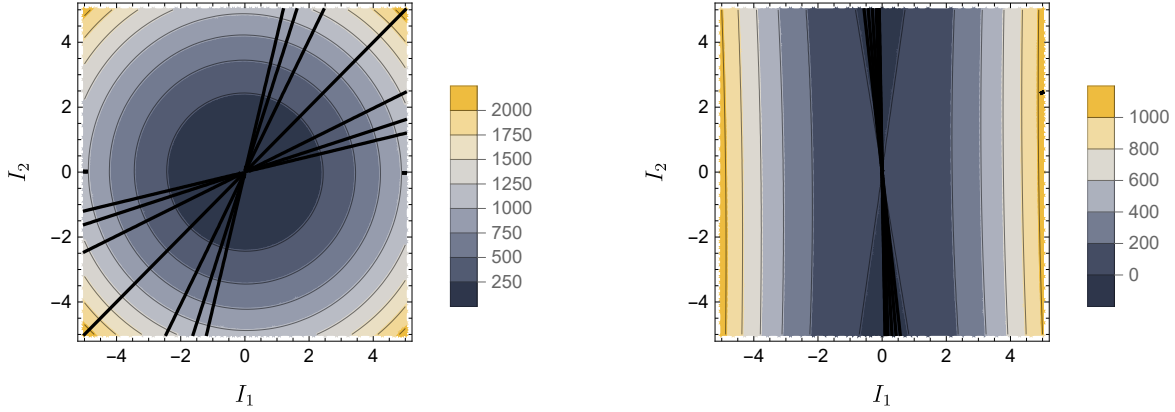


Рис. 7: Линии уровня для первого и второго случая.

Если посмотреть на

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{84I_1 + I_2}{I_1 + 84I_2} \in \mathbb{Q},$$

то можно заметить, что это просто линии, пересекающие центр графика $I_1(I_2)$ (нулевой меры).

Второй случай. Для гамильтониана и возмущения

$$H_0 = 42I_1^2 + I_1I_2 - I_2^2, \quad H_1 = 3I_2 \cos(2\varphi_1 + 14\varphi_2),$$

оценим меру неустойчивых траекторий.

Система с H_0 невырожденна

$$\left| \frac{\partial^2 H}{\partial I_i \partial I_j} \right| = \det \begin{pmatrix} 84 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -169 \neq 0,$$

также она при почти всех начальных условиях изоэнергетически невырожденна:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{I}^T \partial \mathbf{I}} & \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} = 338(7I_1 - I_2)(6I_1 + I_2),$$

но вырожденна при $7I_1 = I_2$. В общем по КАМ-теории мера разрушившихся торов – нуль.

Уравнения движения системы после возмущения:

$$\dot{I}_1 = -\partial_{\varphi_1} H = \varepsilon \cdot 6I_2 \sin(2\varphi_1 + 14\varphi_2)$$

$$\dot{I}_2 = -\partial_{\varphi_2} H = \varepsilon \cdot 42I_2 \sin(2\varphi_1 + 14\varphi_2)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \partial_{I_1} H = 2 \cdot 42I_1 + I_2$$

$$\dot{\varphi}_2 = \partial_{I_2} H = I_1 - 2I_2 + \varepsilon \cdot 3 \cos(2\varphi_1 + 14\varphi_2).$$

Внимательно на это посмотрев можно заметить удачно выбранные числа:

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} 2\varphi_1 + 14\varphi_2, \quad \dot{\gamma} = 13 \cdot 2(7I_1 - I_2) + \varepsilon \cdot 3 \cos(\gamma).$$

Ещё более внимательный взгляд подскажет, что

$$\frac{d}{dt}(7I_1 - I_2) = 0,$$

таким образом при н.у. вида $I_1(0) = \frac{1}{7}I_0(0)$ даст $7I_1 - I_2 = 0 \forall t$. Тогда и $\dot{\gamma} = \varepsilon \cdot 3 \cos \gamma$, откуда

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{e^{3\varepsilon t} - 1}{e^{3\varepsilon t} + 1}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 1, \quad \Rightarrow \quad \gamma \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}.$$

В таком случае в выражении для $\dot{I}_2 \sin \gamma \rightarrow 1$, тогда и

$$\dot{I}_2 = \varepsilon \cdot 42I_2, \quad \Rightarrow \quad I_2 = \exp(\varepsilon \cdot 42t),$$

что неограниченно растёт, и траектория убегает.

Также была вырожденность с н.у. $I_1(0) = -\frac{1}{6}I_2(0)$, но $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ подобраны не под эту скобку, и в решение там тор не ломается, решение периодически.

Здесь отношение частот аналогично первому случаю представляет

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{84I_1 + I_2}{I_1 - 2I_2} \in \mathbb{Q}$$

набор, проходящих через центр прямых, нулевой меры.

Третий случай. Для гамильтониана и возмущения

$$H_0 = 36I_1^2 + 12I_1I_2 + I_2^2, \quad H_1 = (42I_1^2 + 13I_1I_2 + I_2^2) \cdot \cos^3(\varphi_1 - 6\varphi_2),$$

оценим меру неустойчивых траекторий.

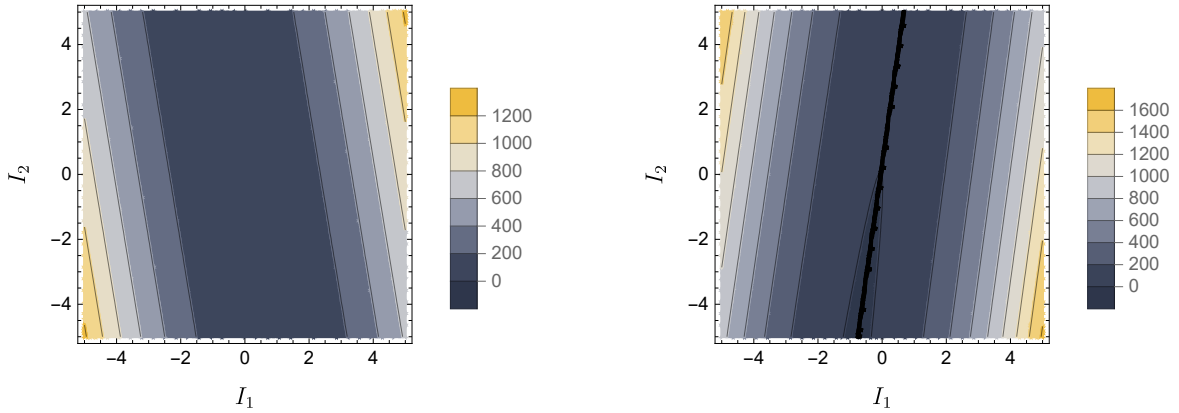


Рис. 8: Линии уровня для третьего и четвертого случая.

В этом случае система вырождена

$$\left| \frac{\partial^2 H}{\partial I_i \partial I_j} \right| = 0,$$

и изоэнергетически вырожденна:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{I}^T \partial \mathbf{I}} & \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Далее покажем, что все траектории уходят в ∞ .

Итак, уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \varepsilon (42I_1^2 + 13I_1I_2 + I_2^2) \cdot 3 \cos^2(\varphi_1 - 6\varphi_2) \sin(\varphi_1 - 6\varphi_2), \\ \dot{I}_2 &= \varepsilon (42I_1^2 + 3I_1I_2 + I_2^2) \cdot 3 \cos^2(\varphi_1 - 6\varphi_2) \cdot 6 \sin(6\varphi_2 - \varphi_1), \\ \dot{\varphi}_1 &= 12(6I_1 + I_2) + \varepsilon \cdot (42 \cdot 2I_1 + 13I_2) \cos^3(\varphi_1 - 6\varphi_2), \\ \dot{\varphi}_2 &= 2(6I_1 + I_2) + \varepsilon(13I_1 + 2I_2) \cos^3(\varphi_1 - 6\varphi_2). \end{aligned}$$

И снова удачно подобраны цифры:

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1 - 6\varphi_2, \quad \dot{\gamma} = \varepsilon [6I_1 + I_2] \cdot \cos^3(\varphi_1 - 6\varphi_2).$$

Удивительно так совпало, что множитель – константа,

$$6\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0, \Rightarrow 6I_1 + I_2 = \theta = \text{const},$$

в новых обозначениях мы приходим к системе вида

$$\dot{\gamma} = \varepsilon \theta \cos^3(\gamma), \Rightarrow \frac{d\gamma}{d \cos^3 \gamma} = \varepsilon \theta dt.$$

Считая $7I_1 + I_2 = \varkappa$, заметим, что

$$H_0 = \theta \varkappa, \quad \dot{\varkappa} = 3\varkappa \cdot \varepsilon \theta \cos^2(\gamma) \sin(\gamma).$$

Теперь можно пойти разными путями – выберем наиболее универсальный:

$$\frac{d\gamma}{d \cos^3 \gamma} = \varepsilon \theta dt, \Rightarrow \exp\left(\frac{\sin \gamma}{\cos^2 \gamma}\right) \frac{1 + \operatorname{tg} \gamma/2}{1 - \operatorname{tg} \gamma/2} = \exp(2\varepsilon \theta t).$$

И это замечательно, ведь получается, что при росте времени, $\gamma \rightarrow \pi/2$, а тогда выражение переписывается в виде ($\gamma = \pi/2 - T$)

$$e^{1/T^2} \frac{2}{T} = \exp\left(\ln 2 - \ln T + \frac{1}{T^2}\right) = \exp(2\varepsilon \theta t), \Rightarrow T^2 = \frac{1}{2\varepsilon \theta t},$$

где было учтено, что $\lim_{T \rightarrow 0} (1 - T^2 \ln T) = 1$. Этот замечательный результат можем подставить в $\dot{\varkappa}$:

$$\dot{\varkappa} \approx (3\varepsilon \theta) \varkappa T^2, \Rightarrow \frac{d\varkappa}{\varkappa} = \frac{3}{2} \frac{dt}{dt}, \Rightarrow \varkappa = C \cdot t^{3/2},$$

другими словами неограниченно растёт, что верно для всех траекторий, с ненулевым θ . Таким образом мера неразрушившихся торов равна нулю.

Здесь, так как система вырождена, отношение частот зафиксировано:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = 6 \frac{12I_1 + 2I_2}{12I_1 + 2I_2} = 6,$$

почти всюду.

Четвёртый случай. Для гамильтониана и возмущения

$$H_0 = 49I_1^2 - 14I_1I_2 + I_1^2 + 6I_1 + I_2, \quad H_1 = 4I_2 \sin^3(3\varphi_1 + 21\varphi_2),$$

оценим меру неустойчивых траекторий.

В этом случае система вырождена

$$\left| \frac{\partial^2 H}{\partial I_i \partial I_j} \right| = 0,$$

но при этом изоэнергетически невырождена:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{I}^T \partial \mathbf{I}} & \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} = -338.$$

Покажем, что для такой системы мера «неустойчивых» траекторий равна нулю. Уравнения движения такой возмущенной системы

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= -36I_2 \cdot \varepsilon \cos(3\varphi_1 + 21\varphi_2) \sin^2(3\varphi_1 + 21\varphi_2), \\ \dot{I}_2 &= -\varepsilon \cdot 12 \cdot 21I_2 \cos(3\varphi_1 + 21\varphi_2) \sin^2(3\varphi_1 + 21\varphi_2), \\ \dot{\varphi}_1 &= 6 + 98I_1 - 14, \\ \dot{\varphi}_2 &= 1 - 14I_1 + 2I_2 + 4\varepsilon \sin^3(3\varphi_1 + 21\varphi_2). \end{aligned}$$

Собственные частоты системы:

$$\begin{cases} \omega_1 = 6 + 14(7I_1 - I_2) \\ \omega_2 = 1 - 2(7I_1 - I_2). \end{cases}$$

Тогда и улетающие куда-то траектории должны иметь похожего вида силы (по идее), однако, получается, для этого должно выполняться соотношение

$$\omega_1 + 7\omega_2 = 13,$$

и, хотя диофантовые уравнения решаются плохо, подставить в качестве частот $\omega_1 = \pm\{3, 9\}$ и $\omega_2 = \pm\{21, 63\}$ мы можем. Ни одна из пар $\{\omega_1, \omega_2\}$ не подходит, так что, по идее, мера резонансных торов равна нулю.

У системы

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{6 + 98I_1 - 14I_2}{1 - 14I_1 + 2I_2} = C \in \mathbb{Q}$$

зависимость, как видно вырожденная:

$$I_2 = \frac{C-6}{2(7+C)} + 7I_1,$$

для $\omega_2/\omega_1 = C$, таким образом все прямые такого вида отличаются параллельным переносом.

T21

Для отображения Мандельброта $z_{n+1} = z_n^2 + c$, $z, c \in \mathbb{C}$ найдём стационарные точки и исследуем их на устойчивость. Будем считать точку стационарной, если $z_{n+1} = z_n$, тогда

$$z^2 - z + c = 0, \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2} = \begin{cases} (1 \pm 1)/2, & c = 0; \\ 1/2, & c = 1/4. \end{cases}$$

Осталось проверить их на устойчивость.

Первый случай. При $c = 0$ удобно представить

$$z_1 = |z_1|e^{i\varphi}, \quad \Rightarrow \quad |z_n| = |z_1|^{2^{n-1}} e^{i2^{n-1}\varphi} < |z_1|^{2^{n-1}}$$

то есть для стационарной точки $z_1 = 0 \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \quad |z_n| < \varepsilon$, то есть вернется к нулю сколь угодно близко (асимптотически устойчиво). Можно также сказать, что точка $z_1 = 0$ устойчива по Ляпунову: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такая, что

$$\forall |z_1| < \delta: |z_n| < \varepsilon, \quad \forall n \geq 1,$$

при $\delta = \varepsilon$.

Стационарная точка $z_1 = 1$ очевидно не обладает этими свойствами, так как при $|z_1| > 1$ точка неограниченно растёт по модулю.

Второй случай. При $c = 1$ проще всего показать, что $1/2$ – неустойчивая точка, рассмотрев $z_1 = 1/2 + \varepsilon$:

$$z_n = z_1 + n\varepsilon + o(\varepsilon),$$

таким образом при $\varepsilon > 0$ точка будет неограниченно расти n .

T22

Вычислим хаусдорфову размерность для обобщения кривой Коха, с углом между линиями θ . Примеры построения кривой на разных шагах приведены на рисунке 9. Для начала поймём, что на n -ном шаге всего

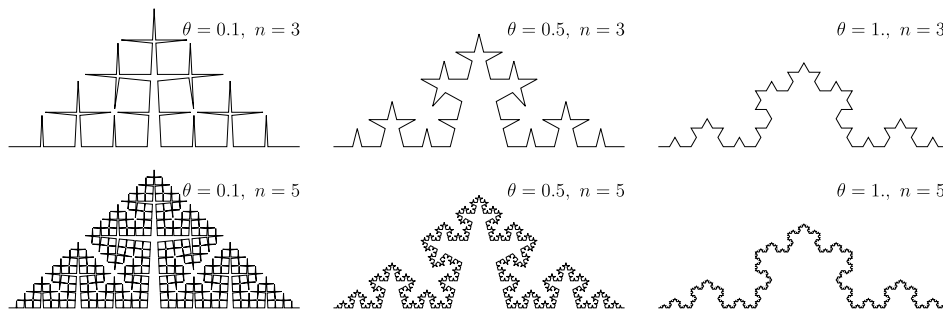


Рис. 9: Кривая из T22 при разных параметрах θ, n

будет $N = 4^n$ звеньев, длины ρ каждый. Понятно, что

$$\sin \frac{\theta}{2} = \left(\frac{\rho_n - 2\rho_{n+1}}{2} \right) / \rho = \frac{\rho_n}{2\rho_{n+1}} - 1, \quad \Rightarrow \quad \rho_n = \frac{\rho_0}{[2 + 2\sin(\theta/2)]^n}.$$

Длину кривой мы можем найти, как $N(\varepsilon)$ отрезков длины $\varepsilon = \rho$, тогда искомая размерность кривой

$$\dim(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln [2(1 + \sin \theta/2)]^n} = \frac{\ln 4}{\ln 2 + \ln [1 + \sin \frac{\theta}{2}]},$$

что любопытно рассмотреть на некоторых частных случаях.

В частности, что также видно из построения, при $\theta = 0$ кривая превратится в некоторое покрытие плоскости уменьшающейся сеткой, и $\dim(\theta = 0) = 2$. При $\theta = \pi/3$ мы придём к кривой Коха, с размерностью $\dim(\theta = \pi/3) = \ln 4 / \ln 3 \approx 1.26$, рисунок которой приведен посередине (9). Наконец, при $\theta = \pi$ мы после каждой итерации будем получать прямую, и $\dim(\theta = \pi) = 1$.

В случае, если мы будем говорить о размерности фигуры под рассматриваемой кривой, то обнаружим, что площадь на n -ной итерации может быть найдена, как

$$S_n = \frac{1}{2} \rho_0^2 \sin \theta \left[\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n} \right], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{24} \rho_0^2 \sin \theta,$$

таким образом нас интересует размерность плоской фигуры конечной площади, $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-2} \Rightarrow \dim = 2$.