

# ЗАМЕТКИ КУРСА «АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА II»

---

Семинарист: Сахаров А. В.

Восторженные слушатели: Хоружий К.  
Примак Е.

От: 9 февраля 2021 г.

## Содержание

1	Малые колебания консервативных систем.	2
2	Вынужденные колебания и диссипативные системы	3

# 1 Малые колебания консервативных систем.

Запишем уравнения Лагранжа для консервативной голономной системе:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad q \in M^n; \quad q, \dot{q} \in TM^n.$$

Тогда можно сказать, что

$$L(q, \dot{q}, t): TM^n \times \mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{R}^1.$$

Параллельным переносом выберем  $q = 0$  – положение равновесия. Тогда считаем, что  $q(t), \dot{q}(t) \in \varepsilon$  – окрестности. В идеале мы хотим всё линейризовать, тогда

$$T = T_2 + T_1 + T_0 = T_2 = \frac{1}{2} \dot{q}^i \dot{q}^j A_{ij}(q) \approx \frac{1}{2} \dot{q}^T A(0) \dot{q} + \dots, \quad A(0) = \frac{\partial^2 T(0)}{\partial \dot{q}^T \partial \dot{q}}.$$

т. к. для консервативных систем  $T_1 = T_0 = 0$ .

Аналогично можем сделать для потенциальной энергии

$$\Pi = \Pi(0) + \frac{\partial \Pi(0)}{\partial q^T} q + \frac{1}{2} q^T \frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial q^T \partial q} q + \dots \approx \frac{1}{2} q^T C(0) q, \quad C(0) = \frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial q^T \partial q}.$$

Таким образом мы пришли к уравнениям вида

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A\ddot{q} + Cq = 0.}$$

Последнее уравнение называется *уравнением малых колебаний*. Важно, что  $A$  – положительно определена, в силу невырожденности уравнений на  $\ddot{q}$  уравнений Лагранжа.

Из линейной алгебры понятно, что существуют координаты  $\theta \in M^n$ , а также невырожденная матрица перехода к новым координатам  $U: q = U\theta$ , и  $U^T A U = E$ ,  $U^T C U = \Lambda$  – диагональная матрица. Тогда верно, что

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T U^T A U \dot{\theta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i^2.$$

Аналогично для потенциальной энергии

$$\Pi = \frac{1}{2} q^T C q = \frac{1}{2} \theta^T U^T C U \theta = \frac{1}{2} \theta^T \Lambda \theta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i \theta_i^2.$$

Это ещё сильнее упрощает уравнения Лагранжа:

$$A\ddot{q} + Cq = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta}_i + \lambda_i \theta_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь  $\lambda_i$  – действительные диагональные элементы  $\Lambda$ . При различных  $\lambda$  получаем, что

$$\begin{aligned} \lambda_i > 0 & \Rightarrow \theta_i = c_i \sin(\sqrt{\lambda_i} t + \alpha_i); \\ \lambda_i = 0 & \Rightarrow \theta_i = c_i t + \alpha_i.; \\ \lambda_i < 0 & \Rightarrow \theta_i = c_i \exp(\sqrt{-\lambda_i} t) + \alpha_i \exp(-\sqrt{-\lambda_i} t). \end{aligned}$$

где последние два – уже не колебаниям.

Возвращаясь к удобной форме, получаем, что

$$q = U\theta = \sum_{i=1}^n c_i u_i \sin(\sqrt{\lambda_i} t + \alpha_i),$$

где  $u_i$  – амплитудный вектор  $i$ -го главного колебания. Таким образом консервативная система движется по суперпозиции некоторых главных колебаний (гармонических осцилляций).

Иначе мы можем интерпретировать это так, что кинетическая энергия<sup>1</sup> образует некоторую метрику, а амплитудные вектора образуют некоторый ортонормированный базис.

$$U^T A U = E \quad \Rightarrow \quad u_i^T A u_j = \delta_{ij}$$

Получив матрицы  $A, C$  переходим к  $[C - \lambda A]u = 0$ , получая

$$|C - \lambda A| = 0,$$

что называют *вековым уравнением*, или *уравнением частот*. Из него получим  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , и уже перейдём к системе уравнений вида  $|C - \lambda_i A| u_i = 0$ .

<sup>1</sup>Переписать грамотнее.

## 2 Вынужденные колебания и диссипативные системы

### Вынужденные колебания

Давайте испортим консервативность так, чтобы

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i(t).$$

Как выяснили ранее

$$q = U\theta, \quad U^T AU = E, U^T CU = \Lambda.$$

Посчитаем элементарную работу добавленной силы

$$\delta A = Q_i \delta q^i = \Theta^T \delta \theta = Q^T U \delta \theta,$$

тогда можно записать, что

$$\Theta = U^T Q, \quad Q = (U^T)^{-1} \Theta,$$

то есть *преобразование обобщенных сил*. То есть уравнение приходит к виду

$$A\ddot{q} + Cq = Q(t), \quad \text{бог с индексами} \quad \ddot{q}_i + \lambda_i \theta_i = \Theta_i(t).$$

Тогда ответ запишется в виде

$$q = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i \sin(\sqrt{\lambda_i} t + \alpha_i) + \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \theta_i^*(t),$$

где вторая сумма соответствует *вынужденным колебаниям*, а первая свободным гармоническим колебаниям.

Пусть так вышло, что

$$\begin{cases} \theta_i^* = b_i \sin(\Omega t) \\ \Theta_i(t) = a_i \sin(\Omega t) \end{cases} \Rightarrow b_i (\lambda_i - \Omega^2) = a_i, \quad \Rightarrow \theta_i^* = \frac{a_i}{\lambda_i - \Omega^2} \sin(\Omega t).$$

В случае же *резонанса* ищем решение в виде

$$\theta_i^*(t) = b_i t \cos(\Omega t), \quad \Rightarrow b_i = -\frac{a_i}{2\Omega}.$$

И здесь мы видим первые звоночки от Пуанкаре, о конце линейной теории.

### Задача 1 (18.42)

Есть некоторая платформа, перемещающаяся по закону  $a \sin \omega t$ . На ней подвешены куча стержней, соединенных пружинами разной упругости, на разных высотах. Вопрос – на каких  $\omega$  возможен резонанс?

Перейдём в СО платформы, тогда возбуждающая сила – сила инерции, соответственно для всех стержней возбуждающая сила одинаковая

$$\mathbf{J}_i^e = -m\mathbf{w}_i^e = m\omega^2 a \sin(\omega t) \mathbf{e}.$$

Посчитаем обобщенные силы, как

$$Q_1^e = \dots = Q_n^e = \frac{\delta A_i}{\delta \varphi_i} = \frac{(\mathbf{J}_i^e \cdot \delta \mathbf{r}_i)}{\delta \varphi_i} = \frac{1}{2} m \omega^2 a l \sin(\omega t).$$

Получается, что мы посчитали столбец обобщенных сил

$$\mathbf{Q} = \frac{l}{2} [1, 1, \dots, 1]^T a \omega^2 m \sin(\omega t).$$

По крайней мере мы можем сказать, что у нас есть главная частота

$$\lambda_1 = \frac{3g}{2l}, \quad \mathbf{u}_1 = [1, 1, \dots, 1]^T.$$

Теперь выпишем матрицу кинетической энергии

$$A = \frac{ml^2}{6} E, \quad U^T AU = E, \quad \Rightarrow UU^T = E,$$

с точностью до множителя. Тогда  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  – ортогональный базис.

Теперь вспоминаем, что

$$\Theta = U^T Q = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \dots \\ \mathbf{u}_n^T \end{pmatrix} \mathbf{u}_1 \frac{1}{2} a \omega^2 l m \sin(\omega t) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \cdot \mathbf{u}_1 \\ \dots \\ \mathbf{u}_n^T \cdot \mathbf{u}_1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} a \omega^2 l m \sin(\omega t) = \begin{pmatrix} n \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_1 \frac{1}{2} a \omega^2 l m \sin(\omega t).$$

Ура, от сих приходим к приятным уравнениям Лагранжа

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_q + \lambda_1 \dot{\theta}_1 = na\omega^2 \frac{l}{2} \sin \omega t, \ddot{\theta}_2 + \lambda_2 \theta_2 \\ \dots \\ \ddot{\theta}_n + \lambda_n \theta_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{3g}{2l}}.$$

## Диссипативные системы

И снова испортим консервативную систему до диссипативной,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + \tilde{Q}_i(\dot{q}) = Q_i(q, \dot{q}).$$

С кинетической всё как обычно, тогда

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T A \dot{\mathbf{q}}; \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(0) + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}^T} \mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{Q}(0)}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} \dot{\mathbf{q}} = -C\mathbf{q} - B\dot{\mathbf{q}}.$$

Где ввели матрицы вида

$$C = -\frac{\partial \mathbf{Q}(0)}{\partial \mathbf{q}^T}; \quad B = -\frac{\partial \mathbf{Q}(0)}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}.$$

В таком случае уравнение примет вид

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = 0, \quad (2.1)$$

получили *линеаризация уравнений Лагранжа I*. Но его схожу к каноническом виду не привести.

Вспомним, что энергия системы

$$E = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \mathbf{q} \cdot C \mathbf{q}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = A\ddot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = [A\ddot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q}] \cdot \dot{\mathbf{q}} = -B\dot{\mathbf{q}}^2 = N.$$

И пошла классификация: если  $N \equiv 0$ , то силы называем *гироскопическими*. Если  $N \leq 0$ , то силы *диссипативные*.

**Def 2.1.** Положение равновесия  $\mathbf{q}^*$  называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и

$$\exists \delta: \forall |\dot{\mathbf{q}}| < \delta, |\mathbf{q}| < \delta \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}}(t) = 0.$$

Возвращаясь к уравнению, вспомним что решение ищется в виде<sup>2</sup>

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^{2n} C_i \mathbf{u}_i \exp(\lambda_i t), \quad \Rightarrow \quad [A\lambda^2 + B\lambda + C] \mathbf{u} = 0, \quad \Rightarrow \quad \det [A\lambda^2 + B\lambda + C] = 0,$$

тогда мы находим  $2n$  решений  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ , и, соответственно,  $2n$  амплитудных векторов.

**Thr 2.2** (Достаточное условие асимптотической устойчивости). *Для того, чтобы решение  $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$  было асимптотически устойчиво необходимо, чтобы*

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, 2n\}.$$

*Если  $\exists \lambda_i: \operatorname{Re} \lambda_i > 0$ , тогда всё не так хорошо.*

Как узнать, что ..., для этого достаточно посмотреть на рыбу

$$a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + a_0 = 0,$$

и отрежем голову и хвост, получим матрицу

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & \dots & 0 \\ a_m & a_{m-2} & \dots & 0 \\ 0 & a_{m-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix},$$

так получили матрицу Гурвица.

**Thr 2.3** (Критерий Рауса-Гурвица). *Для того, чтобы  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  необходимо и достаточно, чтобы  $a_i > 0$ , и*

$$\Delta_1, \Delta_3, \dots, \Delta_{m-1} > 0.$$

*Есть другие формы.*

<sup>2</sup>В общем случае решение системы вообще сложнее (при кратных  $\lambda$ ), но качественно всё примерно в таком же духе, поэтому, ну, всё хорошо.