# Заметки курса «Гармонический анализ»

**Источник**: an_explanations.pdf
**Лектор**: Карасёв Р.Н.

**Восторженные читатели**: Хоружий Кирилл
Примак Евгений

**От**: *24 мая 2021 г.*

## Содержание

# 1 Приближение функций

## 1.3 Пространство интегрируемых функций

### Неравенства Гёльдера и Минковского

**Def 1.1.** *Абсолютно интегрирумыми функциями* на измеримом $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называют $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ с конечным интегралом $\int_X |f(x)|\,dx$. *Расстоянием*[1] между функциями $f$ и $g$ будем считать $\int_X |f(x) - g(x)|\,dx$.

**Def 1.2.** Обозначим через $L_1(X)$ факторпространство линейного пространства абсолютно интегрируемых функций по его линейному подпространству почти всюду равных нулю функций. То есть функции на 0 расстоянии считаем равными. *Нормой* будем считать

$$\|f\|_1 = \int_X |f(x)|\,dx.$$

**Def 1.3.** Для измеримого по Лебегу $X \subset \mathbb{R}^n$ и числа $p \geqslant 1$ *факторпространство* измеримых по Лебегу функций на $X$ с конечной (полу)нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p\,dx\right)^{1/p},$$

по модулю функций равных нулю почти всюду, назовём $L_p(X)$.

`Очень хорошим, симметричным, актуальным для описания квантовой механики оказывается` $L_2$ `пространство, на котором естественно вводить скалярное произведение, его порождающее.`

**Def 1.4.** В комплексном случае норма $L_2$ порождена *скалярным произведением*

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx \qquad \longrightarrow \qquad \|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}.$$

**Thr 1.5** (Неравенство Гёльдера)**.** *Возьмём $p, q > 1$ такие, что $1/p + 1/q = 1$. Пусть $f \in L_p(X)$ и $g \in L_q(X)$. Тогда*

$$\int_X |fg|\,dx \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

$\triangle$. Для доказательства достаточно проинтегрировать неравенство вида

$$|fg| \leqslant \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}.$$

Осталось получить само неравенство. $\square$

**Con 1.6.** *Для измеримых функций и чисел $p, q > 0$, таких что $1/p + 1/q = 1$, имеет место формула*

$$\|f\|_p = \sup\left\{\int_X fg\,dx \;\middle|\; \|g\|_q \leqslant 1\right\}. \tag{1.1}$$

$\triangle$. По неравенству Гёльдера норма $f$ не менее супремума правой части (?), более того равенство достигается при выборе

$$g(x) = \frac{\operatorname{sign} f(x)|f(x)|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}}.$$

$\square$

**Def 1.7.** Функция $f\colon V \mapsto \mathbb{R}$ на векторном пространство называется выпуклой, если для любых $x, y \in V$ и любого $t \in (0, 1)$ имеет место неравенство

$$f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y).$$

Функция называется *строго выпуклой*, если неравенство строгое $\forall x \neq y$ и $t \in (0, 1)$.

**Lem 1.8.** *Если в семействе функций $f_\alpha\colon V \mapsto \mathbb{R}$, $\alpha \in A$, все функции выпуклые, то*

$$f(x) = \sup\{f_\alpha(x) \mid \alpha \in A\}$$

*тоже выпуклая*[2].

**Thr 1.9** (Неравенство Минковского)**.** *Для функций $f, g \in L_p$ при $p \geqslant 1$*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

[1] В силу неравенства $|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|$ расстояние конечно.

[2] Если разрешить в определении выпуклости значение $+\infty$.

#### Полнота пространства интегрируемых функций

Далее в разделе всегда предполагается суммирование по $k$ от 1 до $\infty$. Глобально можно сказать, что `в нормированном пространстве вопрос полноты сводится в вопросу сходимости рядов`, у которых сходятся суммы норм.

**Def 1.10.** Назовём последовательность $(f_n)$ *фундаментальной*, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon\colon \forall n, m \geqslant N_\varepsilon\ \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

**Lem 1.11.** *Пусть у последовательности функций $(u_k)$ из $L_p(X)$ сумма $\sum \|u_k\|_p$ оказалась конечной. Тогда $S(x) = \sum u_k(x)$ определена для почти всех $x$ и $\|S\|_p \leqslant \sum \|u_k\|_p$.*

**Lem 1.12.** *Пусть у последовательности функций $(u_k)$ из $L_p(x)$ сумма $\sum \|u_k\|_p$ оказалась конечной. Тогда $S(x) = \sum u_k(x)$ определена для почти всех $x$ и $S = \sum u_k$ в смысле сходимости в пространстве $L_p(X)$.*

**Thr 1.13.** *Пространство $L_p(X)$ полно.*

Вообще сходимость в $L_p(X)$ может не означать поточечной сходимости ни в одной точке.

### 1.4 Приближение функций ступенчатыми и бесконечно гладкими

**Def 1.14.** Назовём *элементарно ступенчатыми* функции с конечным числом ступенек, в основании которых лежат элементарные множества.

**Thr 1.15.** *Можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить элементарно ступенчатой $\forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)$.*

**Thr 1.16.** *Всякую $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить бесконечно дифференцируемой функцией с компактным носителем.*

Мне кажется, было бы полезно вернуться к разделу с приближением функций, и дописать в начало.

## 2 Ограниченная вариация, абсолютная непрерывность и осцилляция

### 2.5 Функции ограниченной вариации

**Def 2.1.** Функция $f$ на промежутке $I$ имеет *ограниченную вариацию*, если для любых $x_0 < x_1 < \ldots M x_N \in I$ (в любом количестве)

$$|f(x_0) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \ldots + |f(x_{N-1}) - f(x_N)| \leqslant M,$$

для некоторой константы $M$. Наименьшую константу $M$ в этом неравенстве назовём *вариацией* функции $f$ равную $\|f\|_B$, что задаёт *полунорму*, вида

$$\|f\|_B = \sup\left\{ |f(x_0) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \ldots + |f(x_{N-1}) - f(x_N)| \;\middle|\; N \in \mathbb{N}, a \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant b \right\}$$

Важно что вариация функции аддитивна и выпукла, в смысле $\|f+g\|_B \leqslant \|f\|_B + \|g\|_B$.

**Lem 2.2.** *Функцию ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$ можно представить в виде суммы двух функций $f = u + d$, одна из которых возрастает, а другая убывает. При этом $\|f\|_B = \|u\|_B + \|d\|_B$ и если $f$ была непрерывной, то $u, d$ тоже будут непрерывны.*

**Thr 2.3** (Вторая теорема о среднем). *Если $f$ интегрируема по Лебегу с конечным интегралом, а $g$ монотонна и ограниченна на $[a, b]$, то при некотором $\nu \in [a, b]$*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a+0)\int_a^\nu f(x)\,dx + g(b-0)\int_\nu^b f(x)\,dx.$$

Таким образом приходим к утверждению о том, что `функции ограниченной вариации допускают оценку интеграла своего произведения с другой функцией`

$$|\int_a^b f(x)g(x)\,dx| \leqslant (|g(a+0)| + \|g\|_B) \cdot \sup\left\{ \left| \int_\nu^b f(x)\,dx \right| \text{ при } \nu \in [a, b] \right\}.$$

## 2.6 Абсолютно непрерывные функции и обобщенная формула Ньютона-Лейбница

Для формулы Ньютона-Лейбница условие липшицевости можно ослабить до следующего:

**Def 2.4.** Функция $F$ на промежутке $I$ *абсолютно непрерывна* , если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$, такое что $\forall\, x_1 \leqslant y_1 \leqslant x_2 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant x_N \leqslant y_N \in I$ из неравенства

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \ldots + |x_N - y_N| \leqslant \delta$$

следует, что

$$|F(x_1) - F(y_1)| + |F(x_2) - F(y_2)| + \ldots + |F(x_N) - F(y_N)| \leqslant \varepsilon.$$

Говоря неформально, сумма модулей приращений функции на системе непересекающихся отрезков должна стремиться к нулю при суммарной длине системы, стремящейся к нулю.

**Lem 2.5.**

**Thr 2.6.** *Для некоторой $f \in L_1[a,b]$, всякая обобщенная первообразная $F$*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

*является абсолютно непрерывной и её производная почти всюду существует и совпадает с $f$.*

**Lem 2.7.** *Абсолютно непрерывная на отрезке функция $f$ имеет на нём ограниченную вариацию. Также на отрезке существует разложение $f$ в сумму двух монотонных абсолютно непрерывных функций.*

**Thr 2.8.** *Абсолютно непрерывная функция $F\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ почти всюду имеет производную и является обобщенной первообразной своей производной с выполнением формулы Ньютона-Лейбница*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,dt.$$

Легко показать через. . . ух, ну по **лемме Безиковича**, посмотреть можно здесь.

**Con 2.9** (Обобщенное интегрирование по частям)**.** *Если $f \in L_1[a,b]$, а $g$ абсолютно непрерывна, то верна формула интегрирования по частям*

$$\int_a^b fg\,dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx,$$

*где $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.*

**Lem 2.10.** *Функция $f\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда она может быть сколь угодно близко в $B$-норме приближена кусочно-линейными функциями.*

А дальше про борелевские меры на отрезках и интеграл Лебега–Стилтьеса.

## 2.7 (до 2.9) Осцилляции и равномерные осцилляции

**Def 2.11.** Определим *коэффициент Фурье* (с точностью до умножения на константу)

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx.$$

**Thr 2.12.** *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то $|c_f(y)| \leqslant \|f\|_1$ и $c_f(y)$ непрерывно зависит от $y$.*

**Thr 2.13** (Лемма об осцилляции)**.** *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то выражение*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx$$

*стремится к нулю при $y \to \infty$.*

**Lem 2.14.** *Еси производная $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и производные до $k$-й включительно*[3] *находятся в $L_1(\mathbb{R})$, то*

$$c_f(y) = o\left(\frac{1}{y^k}\right), \qquad t \to \infty.$$

[3] Для $k$-й достаточно существования почти всюду.

**Thr 2.15.** *Если $f \in L-1(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, то выражение*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx$$

*оказывается $O(1/y)$ при $y \to \infty$.*

**Con 2.16.** *Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ имеет абсолютно непрерывную $(k-1)$-ую производную, производные до $k$-й включительно находятся в $L_1(\mathbb{R})$, а $f^{(k)}$ (возможно, после изменения на множестве меры нуль) имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, тогда*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx = O\left(\frac{1}{y^{k+1}}\right), \qquad y \to \infty.$$

**Thr 2.17** (Лемма о равномерной осцилляции)**.** *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то выражение*

$$c(y,\xi,\eta) = \int_{\xi}^{\eta} f(x)e^{-ixy}\,dx$$

*стремится к нулю при $y \to \infty$ равномерно по $\xi,\ \eta$.*

### Периодические функции

**Def 2.18.** Для $2\pi$-*периодической функции* $f(x+2\pi) \equiv f(x)$ *коэффициенты Фурье* запишутся, как

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{(f, e^{inx})}{\|e^{inx}\|_2^2},$$

где последнее выражение понимается в смысле скалярного произведения и нормы в $L_2[-\pi,\pi]$.

**Thr 2.19.** *Пусть функция $f$ имеет период $2\pi$ и абсолютно непрерывную $(k-1)$-ую производную, причём $f^(k)$ (возможно, после изменения на множестве меры нуль) имеет ограниченную вариацию на $[-\pi,\pi]$, тогда*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \qquad n \to \infty.$$

**Lem 2.20.** *Усли у $2\pi$-периодической функции ограниченной вариации есть ненулевое конечное число разрывов, и она кусочно абсолютно непрерывна, то оценка $O(1/n)$ для коэффициентов Фурье неулучшаема.*

**Thr 2.21.** *Пусть функция $f$ непрерывна и $2\pi$-периодическая, тогда для коэффициента Фурье имеется оценка*

$$c_n = O(\omega_f(\pi/n)),$$

*где $\omega_f$ – модуль непрерывности $f$.*

## 3 Ряд Фурье в пространстве $L_2$

**Thr 3.1** (Теорема Вейерштрасса для тригонометрических многочленов)**.** *Всякую непрерывную на $[-\pi,\pi]$ функцию $f$, для которой $f(-\pi) = f(\pi)$, можно сколь угодно близко равномерно приблизить тригонометрическими многочленами вида*

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

**Thr 3.2** (Теорема Стоуна-Вейерштрасса)**.** *Пусть у нас зафиксирован компакт $K$ и дана алгебра непрерывных функций $\mathcal{A}$ на этом компакте, которая разделяет точки, то есть для любых $x \neq y \in K$ найдётся $f \in \mathcal{A}$, такая что $f(x) \neq f(y)$. Тогда Всякую непрерывную на $K$ функцию можно сколь угодно близко равномерно приблизить функциями из $\mathcal{A}$.*

Вспомнить про $\|f\|_C$. Равномерное приближение является приближением по норме $L_2$, так как на отрезке $[-\pi,\pi]$ имеется неравенство $\|f\|_2 \leqslant \sqrt{2\pi}\|f\|_C$. В случае $L_2$ нормы определим коэффициенты, которыми собираемся приближать.

**Thr 3.3** (Оптимальность коэффициентов Фурье)**.** *Для всякой $f \in L_2[-\pi,\pi]$ и данного числа $n$ лучшее по норме $L_2$ приближение $f$ тригонометрическим многочленом $\sum_{-n}^{+n} c_k e^{ikx}$ дают коэффициенты Фурье*

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,dx.$$

**Lem 3.4** (неравенство Бесселя)**.** *Из доказательства предыдущей теоремы, можем получить, что*

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2, \qquad \Rightarrow \qquad \|f\|_2^2 \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2, \qquad \overset{\text{trig}}{\Rightarrow} \qquad \|f\|_2^2 \geqslant 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.$$

*Точно ли до $n$?*

**Lem 3.5** (Представление действительнозначной функции)**.** *Для действительнозначной функции представление в виде ряда Фурье перепишется в виде*

$$f = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx,$$

*для $k \geqslant 1$. Неравенство Бесселя тогда запишется так:*

$$\|f\|_2^2 \geqslant \frac{\pi}{2} |a_0|^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

**Thr 3.6** (Сходимость ряда Фурье в среднеквадратичном)**.** *Для вской комплекснозначной $f \in L_2[-\pi, \pi]$*

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

*в смысле сходимости суммы в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$, а также выполняется равенство Парсеваля*

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Пока мы не доказали, что в полученную формулу можно подставить хоть одно конкретное значение $x$. Тот факт, что ряд Фурье функции из $L_2[-\pi, \pi]$ на самом деле сходится к этой функции почти всюду, был доказан Л. Карлесоном (1966), а до этого был известен как гипотеза Лузина.

# 4 Ряд Фурье и его сходимость

**Def 4.1.** Обозначим *частичную сумму* тригонометрического ряда Фурье для $2\pi$-периодической функции $f$ как

$$T_n(f, x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}.$$

**Lem 4.2.** *Для $n$-й частичной суммы ряда Фурье $2\pi$-периодической функции имеет место формула в виде свёртки*

$$T_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) \, dT,$$

*с ядром Дирихле*

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} t\right)}.$$

**Lem 4.3** (Равномерная ограниченность интегралов от ядра Дирихле)**.** *Существует такая константа $C$, что*

$$\left| \int_a^b D_n(t) \, dt \right| \leqslant C$$

*для любых $a, b \in [-\pi, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$.*

**Thr 4.4** (Равномерный принцип локализации)**.** *Запищем для $\delta \in (0, \pi)$*

$$T_n(f, x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x+t) - f(x)\right) D_n(t) \, dt = \int_{-\delta}^{\delta} \left(f(x+t) - f(x)\right) D_n(t) \, dt + \int_M (f(x+t) - f(x)) D_n(t) \, dt,$$

*где $M = \{t \mid \delta \leqslant |t| \leqslant \pi\}$. Если $f \in L_1[-\pi, \pi]$, то*

$$\int_M \left(f(x+t) - f(x)\right) D_n(t) \, dt \;\to\; 0, \qquad n \to \infty.$$

*Если $f$ ограничена на отрезке $[a, b]$, то это выражение стремится к нулю равномерно по $x \in [a, b]$.*

**Def 4.5.** Функция $f$ называется гёльдеровой степени $\alpha > 0$, если для любых $x$, $y$ из области определения

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^{\alpha}$$

с некоторой константой $C$.

**Thr 4.6** (Признак Липшица сходимости ряда Фурье). *Для абсолютно интегрируемой $2\pi$-периодической функции, которая является гёльдеровой с некоторыми $C$, $\alpha > 0$ на интервале $(A, B) \supset [a, b]$*

$$T_n(f, x) \to f(x)$$

*равномерно $x \in [a, b]$ при $n \to \infty$.*

**Thr 4.7** (Признак Дирихле сходимости ряда Фурье). *Для абсолютно интегрируемой $2\pi$-периодической функции, которая является непрерывной с ограниченной вариацией на интервале $(A, B) \supset [a, b]$*

$$T_n(f, x) \to f(x)$$

*равномерно по $x \in [a, b]$ при $n \to \infty$.*

Далее несколько лемм, сформулированных в виде задач, а именно признак Дирихле сходимости ряда Фурье в точке, признак Липшица сходимости ряда Фурье в точке, признак Дини сходимости ряда Фурье в точке. Ага, это 13 тема. А потом будут темы 14 - 17.

### Интегрирование ряда Фурье

**Thr 4.8** (Почленное интегрирование ряда Фурье). *Пусть $f \in L_1[-\pi, \pi]$ соответствует не обязательно сходящийся ряд Фурье, записанный в действительном виде как*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + B_n \sin nx).$$

*Тогда ряд Фурье можно почленно интегрировать, то есть выполняется формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0(b-a) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n \sin nx}{n} - \frac{b_n \cos nx}{n}\right)\Bigg|_a^b.$$

**Lem 4.9.** *Разложим $\cos ax$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ при $a \notin \mathbb{Z}$ в ряд Фурье. Легко получить, что*

$$\operatorname{ctg} x = v.p. \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - \pi k}$$

$$\frac{1}{\sin x} = v.p. \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x - \pi k}$$

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right).$$

**Lem 4.10.** *Формула дополнения для бета-функции про $p \in (0, 1)$*

$$B(p, 1-p) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{-p}\,dt = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

**Lem 4.11.** *Для $0 < |x| < \pi$ верно, что*

$$\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x = \sum_{n,k \geqslant 1} \frac{2x^{2k-1}}{\pi^{2k} n^{2k}},$$

*откуда можно получить значения сумм $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.*

### Суммирование тригонометрических рядов по Фейеру

**Def 4.12.** Определим *ядро Фейера*

$$\Phi_n(t) = \frac{D_0(t) + D_1(t) + \ldots + D_n(t)}{n+1} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} \frac{n+1-|k|}{n+1} e^{ikx},$$

как усреднение ядер Дирихле. Соответствующая *сумма Фейера* будет соответствовать усреднением первых $n+1$ частичных сумм ряда Фурье,

$$S_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\xi)\Phi_n(\xi)\,d\xi = \frac{T_0(f, x) + \ldots + T_n(f, x)}{n+1}.$$

Записав

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} = \frac{1}{4\pi}\frac{\cos nt - \cos\left((n+1)t\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)},$$

и суммируя, получаем

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{4\pi}\frac{1-\cos\left((n+1)t\right)}{(n+1)\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{(n+1)\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

**Thr 4.13.** *Для непрерывной $2\pi$-периодической $f$*

$$S_n(f,x) \rightrightarrows f(x),$$

*то есть сходится равномерно.*

# 5 Интеграл Фурье и преобразование Фурье

# 6 Банаховы пространства

**Def 6.1.** Векторное пространство $E$ *нормировано*, если для всякого вектора $v \in E$ имеется неотрицательное исло $\|v\|$, удовлетворяющее свойствам:

1. $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$ (однородность при умножении на константу);
2. $\|v+w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$ (неравенство треугольника);
3. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (невырожденность).

Например, шаром с центром $c$ и с радиусом $r$ в нормированном пространстве $E$ называется множество

$$B_c(r) = \{x \in E \mid \|x-c\| \leqslant r\}.$$

Заметим, что норма полностью определяется единичным шаром с центром в нуле $B_0(1)$, а именно

$$\|x\| = \inf\{|1/t| \mid tx \in B_0(1)\}.$$

**Thr 6.2** (Теорема Бэра для открытых множеств)**.** *Счётное семейство открытых всюду плотных подмножеств банахова пространства $E$ имеет непустое пересечение.*

**Con 6.3** (Теорема Бэра для замкнутых множеств)**.** *Если банахово пространство $E$ покрыто счётным семейством замкнутых множеств, то одно из них имеет непустую внутренность.*

**Thr 6.4** (Неподвижные точки сжимающих отображений)**.** *Пусть $E$ – банахово пространство. Пусть $X \subset E$ – замкнутое подмножество и $f\colon X \mapsto X$ является сжимающим, то есть*

$$\exists C < 1 \;:\; \forall x, y \in X \;\; \|f(x) - f(y)\| \leqslant C\|x-y\|.$$

*Тогда $f$ имеет неподвижную точку $x \in X$, такую что $f(x) = x$.*

# 7 Банаховы пространства и их двойственные

**Def 7.1.** *Банахово пространство* – полное нормированое пространство.

### Дополнительная задача о $\cos e^{ix}$

Найдём суммы вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{\cos(2nx)}{(2n)!} + i(-1)^n\frac{\sin(2nx)}{(2n)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{2inx}}{(2n)!},$$

далее, принимая $z = e^{ix}$, найдём по определению

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{2inx}}{(2n)!} = \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \cos(z) = \cos\left(e^{ix}\right).$$

# 8 Собственные интегралы с параметром

**Thr 8.1** (непрерваность интеграла по параметру)**.** *Пусть $f\colon X \times E \mapsto \mathbb{R}$, где $E$ – область определения $\alpha$, а $X$ для $x$. Пусть также $f(x,\alpha) \in \mathcal{L}(X)\ \ \forall\alpha$, где $\mathcal{L}(X)$ – интегрируема по Лебегу на множестве $X$, $f(x,\alpha)$ непрерывна почти всюду по $\alpha$, и $|f(x,\alpha)|$ мажорируется Лебег-интегрируесой функцией $\forall\alpha \in E$. Тогда*

$$I(\alpha) = \int_X f(x,\alpha)\,dx$$

*непрерывен.*

**Con 8.2** (непрерваность интеграла по параметру по Кудрявцеву)**.** *Если функция $f(x,\alpha)$ непреывна в прямоугольнике*

$$K = \{(x,\alpha):\quad a \leqslant x \leqslant b, \alpha_1 \leqslant \alpha_2\},$$

*то интеграл*

$$\Phi(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$$

*есть непрерывная функция параметра $\alpha$ на отрезке $[\alpha_1,\alpha_2]$. В частности, возможен предельный переход под знаком интеграла:*

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \int_a^b \lim_{a\to\alpha_0} f(x,\alpha)\,dx.$$

**Con 8.3.** *Пусть $f\colon [a,+\infty) \mapsto \mathbb{R}$. Если $f$ непрерывна на $[a,+\infty)\times[c,d]$* ***и***

$$I(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$$

*сходится равномерно по $\alpha$ нв $[c,d]$,* ***то*** *$I(\alpha)$ непрерывен по $\alpha$ на $[c,d]$.*

**Thr 8.4.** *Пусть $f\colon X\times E \mapsto \mathbb{R}$, где $E$ – область определения $\alpha$, а $X$ для $x$. Пусть также $f(x,\alpha) \in \mathcal{L}(X)\ \ \forall\alpha$, где $\mathcal{L}(X)$ – интегрируема по Лебегу на множестве $X$, $\exists f'(x,\alpha) \in \mathbb{R}$ почти всюду по $\alpha$, и $|f'_\alpha(x,\alpha)|$ мажорируется Лебег-интегрируесой функцией $\forall\alpha \in E$ почти всюду. Тогда*

$$I(\alpha) = \int_X f(x,\alpha)\,dx$$

*дифференцируем $E$ и $I'(\alpha) = \int_X f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$.*

**Con 8.5.** *Пусть $f\colon [a,b]\times[c,d] \mapsto \mathbb{R}$, $f$ и $f'_\alpha$ непрерынва на $[a,b]\times[c,d]$,* ***то***

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\ \in C^1[c,d]; \qquad I'(\alpha) = \int_a^b f'_a(x,\alpha)\,dx.$$

**Con 8.6.** *Пусть $I(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$. Для удобства выберем $a_0 = \inf_\alpha a(\alpha)$ и $b_0 = \sup_\alpha b(\alpha)$. Также требуем непрерывность $f$ и $f'_x$ на $[a_0,b_0]\times[c,d]$. Считаем, что $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ дифференцируемы.* ***Тогда*** *$I(\alpha)$ – дифференцируем по $\alpha$ на $[c,d]$. Более того, в таких условиях верна формула*

$$I'(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx + f(b(\alpha),\alpha)\cdot b'_\alpha(\alpha) - f(a(\alpha),\alpha)\cdot a'_\alpha(\alpha).$$

**Con 8.7.** *Пусть функция $f\colon [a,+\infty)\times[c,d] \mapsto \mathbb{R}$.* ***Если*** *существвует $\alpha_0 \in [c,d]$ такое, что*

$$I(\alpha) = \int_a^\infty f(x,\alpha_0)\,dx$$

*сходится, $f$ и $f'_\alpha$ непрерывны на $[a,+\infty)\times[c,d]$, и*

$$\int_a^\infty f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$

*сходится равномерно по $\alpha$ на $E$,* ***тогда*** *$I(\alpha) \in C^1[c,d]$ и*

$$I'_\alpha(\alpha) = \int_a^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx.$$

**Thr 8.8** (интегрирование интегралов, зависящих от параметров)**.** *Если функция $f(x,\alpha)$ непрерывна в прямоугольнике, то интеграл есть функция, интегрируемая на отрезке $[\alpha_1,\alpha_2]$ и справедливо*

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left(\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right)d\alpha = \int_a^b\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\,d\alpha\right)dx.$$

## 8.1 К. III, §13

### 13.4

Пусть $f(x)$ непрерывна и принимает положительные значения на $[0,1]$. Докажем, что функция

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2} f(x)\,dx$$

разрывна при $\alpha = 0$.

Функции $\varphi\colon \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}$ и $f$ Лебег-интегрируемы по $x$ на $[0,1]$, знакопостоянны $\forall x \in (0,1)$, а также $f$ –непрерывна, тогда можем воспользоваться первой теоремой о среднем

$$I(\alpha) = f(\xi(\alpha))\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha}, \qquad 0 \leqslant \xi(\alpha) \leqslant 1.$$

Тогда для $\forall \varepsilon > 0$

$$|F(\varepsilon) - F(-\varepsilon)| = \left|(f(\xi(\alpha)) + f(\xi(-\alpha)))\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}\right| \geqslant 2\,in_{x\in[0,1]} f(x)\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}\right|\varepsilon \underset{\to}{\to} 0\pi \min_{x\in[0,1]} f(x) > 0,$$

что говорит о разрывности функции.

### 13.5(1)

Выясним, справедливо ли равенство

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx = \int_0^1 \lim_{\alpha\to 0} f(x,\alpha)\,dx,$$

где $f(x,\alpha) = \frac{x}{\alpha^2}e^{-x^2/\alpha^2}$.

Ну, вообще нельзя. Переходя к пределу под знаком интеграла, получаем нуль. Если же вычислить интеграл, а затем перейти к пределу, то получим

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^1 \frac{x}{\alpha^2}e^{-x^2/\alpha^2}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\int_0^1 e^{-x^2/\alpha^2}\,d\left(\frac{x^2}{\alpha^2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{\alpha\to 0}\left(1 - e^{-1/\alpha^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что $f$ разрывна в точке $(0,0)$, вот теоремы о предельном переходе и не работает, необходимо проверять вычислением.

### 13.8(3)

Выясним, равны ли интегралы

$$I_1(\alpha) = \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,\alpha)\,d\alpha\right)dx \stackrel{?}{=} \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,\alpha)\,d\alpha\right)dx = I_2(\alpha), \qquad f(x,\alpha) = \left(\frac{x^5}{\alpha^4} - \frac{2x^3}{\alpha^3}\right)e^{-x^2/\alpha}.$$

Считая $t = -x^2/\alpha$ и $dt = x^2(-1/\alpha^2)\,d\alpha$, перейдём к интегралу

$$g(x) = \int_0^1 d\alpha\left(\frac{x^5}{\alpha^4} - \frac{2x^3}{\alpha^3}\right)e^{-x^2/\alpha} = \int_{x^2}^{\infty}\left(\frac{t^2-2t}{x}\right)e^{-t}\,dt = \frac{1}{x}\int_{x^2}^{\infty}\left(t^2-2t\right)e^{-t}\,dt = \frac{1}{x}\left(-t^2e^{-t}\right)\Big|_{x^2}^{+\infty} = x^3e^{-x^2}.$$

Возвращаясь к первоначальному интегрированию

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2e^{-x^2}\,d(x^2) = \frac{1}{2}\int_0^1 te^{-t}\,dt = -\frac{1}{2}(t+1)e^{-t}\big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}.$$

С другой стороны – другой интеграл,

$$h(\alpha) = \int_0^1 dx f(x,\alpha) = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{1/\alpha}(t^2-2t)e^{-t}\,dt = \frac{1}{2\alpha}\left\{-t^2e^{-t}\right\}\Big|_0^{1/\alpha} = -\frac{1}{2\alpha^3}e^{-1/\alpha}.$$

Остается посчитать интеграл по $\alpha$

$$\int_0^1 h(\alpha)\,d\alpha = -\frac{1}{2}\int_1^{\infty} te^{-t}\,dt = -\frac{1}{e},$$

что приводит к противоречию, – интегралы LHS и RHS е равны друг другу.

### 13.12

Пусть $a > 0$, $b > 0$. Вычислим интеграл

$$I_1 = \int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx, \qquad I_2 = \int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx.$$

Внутри аргумента интеграла можно увидеть другой интеграл, так что рассмотрим вместо $I_{1,2}$ два повторных интеграла

$$I_1 = \int_0^1 dx \int_a^b x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\, dy, \qquad I_2 = \int_0 61 \int_a^b x^y \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\, dy.$$

Обозначим аргументы новых $I_{1,2}$ за $f_1$ и $f_2$, которые непрерывны, поэтому позволяют перестановку по Фубини:

$$I_1 = \int_a^b dy \int_0^1 x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\, dx, \qquad I_2 = \int_a^b dy \int_0^1 x^y \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\, dx.$$

Подставим $x = e^{-t}$:

$$I_1 = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-t(y+1)} \sin t\, dt, \qquad I_2 = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-t(y+1)} \cos t\, dt.$$

Новый аргумент интегрировать мы уже умеем, так что находим

$$I_1 = \int_a^b \frac{dy}{(y+1)^2+1}, \qquad I_2 = \int_a^b \frac{(y+1)\, dy}{(y+1)^2+1},$$

что также интегрируется, так что находим

$$I_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}\right), \qquad I_2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}\right).$$

### 13.14(3)

Найти $\Phi'(\alpha)$, если

$$\Phi(\alpha) = \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Обозначая аргумент интеграла за $f(\alpha, x)$ заметим, что $f$ и $f'_\alpha$ непрерывны, т.к. интеграл собственный, то, интегрируя по частям, находим, что

$$\Phi'(\alpha) = e^{\alpha|\sin\alpha|}(-\sin\alpha) - e^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha + \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\, dx.$$

### 13.17

Есть интеграл вида

$$I(\alpha) = \int_0^b \frac{dx}{x^2+\alpha^2}.$$

Дифференцируя его по параметру $\alpha > 0$ вычислим интграл

$$J(\alpha) = \int_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}.$$

Считая интеграл собственным, заметим, что аргумент интеграла ($f(x,\alpha)$), а также $f'_\alpha$ непрерывны. Раз так, то можем интегрировать под знаком интеграла:

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial\alpha} = \int_0^b dx\, \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{x^2+\alpha^2} = -2\alpha\int_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2} = -2\alpha J(\alpha).$$

Таким образом приходим к

$$J(\alpha) = \frac{1}{2\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha}\right) = \frac{1}{2\alpha^3}\left\{\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha} + \frac{b\alpha}{b^2+\alpha^2}\right\}.$$

### 13.18 (1)

Теперь, применяя дифференцирование по параметру $\alpha$, вычислим

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\alpha^2 - \sin^2\varphi\right)\, d\varphi.$$

Опять таки, перед нами собственный интеграл, с непрерывным аргументом и его производной по $\alpha$, соответсвенно интегрируемые по Лебегу, поэтому законно писать, что

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\left(\alpha^2-\sin^2\varphi\right)\, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \frac{2\alpha\, d\varphi}{\alpha^2-\sin^2\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}.$$

Таким образом находим, что

$$I(\alpha) = \pi \ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}) + C.$$

С другой стороны

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \{2\ln\alpha + o(1)\}\, d\varphi = \pi \ln \alpha + o(1)$$
$$I(\alpha) = \pi\ln\alpha + \pi\ln 2 + C + o(1),$$

при больших $\alpha$. Получается, что

$$I(\alpha) = \pi \ln\left\{\frac{1}{2}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}\right)\right\}.$$

**13.28 (T1)**

Докажем формулу для $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \psi_n(x), \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \qquad \psi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x y^n \cos\left(y + \frac{\pi n}{2}\right) dy, & x \neq 0, \\ \dfrac{\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)}{n+1}, & x = 0,\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Уже из этого потом покажем, что верна оценка

$$\left|\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}, \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

Ну, выражение для $I_n$ справедливо при $n = 1$. Пусть формула для $I_n$ также верна при некотором $n = k$, тогда дифференцируя обе части по $x$ с последующим применением инетгрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} I_{k+1} = \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \frac{1}{x}\cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) - \frac{k+1}{x^{k+2}} \int_0^x y^k \cos\left(y + \frac{k\pi}{2}\right) dy = \\ &= \frac{1}{x}\cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) - \frac{k+1}{x^{k+2}}\left(\frac{y^{k+1}}{k+1}\cos\left(y + \frac{k\pi}{2}\right)\Bigg|_0^x + \frac{1}{k+1}\int_0^x y^{k+1}\sin\left(y + \frac{k\pi}{2}\right) dy\right) = \\ &= -\frac{1}{x^{k+2}}\int_0^x y^{k+1} \sin\left(y + \frac{k\pi}{2}\right) dy = \frac{1}{x^{k+2}} \int_0^x y^{k+1}\cos\left(y + \frac{(k+1)\pi}{2}\right) dy, \qquad x \neq 0. \end{aligned}$$

Раскладывая $\sin x$ в ряд Тейлора, можем найти

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}, \quad \forall x, \qquad \Rightarrow \qquad f^{(n)}(0) = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)}{n+1}.$$

Далее, при $x \neq 0$,

$$\left|\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n \cos\left(y + \frac{\pi n}{2}\right) dy\right| \leqslant \frac{1}{|x|^{n+1}}\int_0^{|x|} y^n\, dy = \frac{1}{n+1},$$

а при $x = 0$,

$$|f^{(n)}(0)| = \frac{\left|\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right|}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}, \qquad \overset{\forall x}{\Rightarrow} \qquad \left|\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}, \qquad \text{Q. E. D.}$$

## 9 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

**Def 9.1.** Интеграл, сходящийся $\forall \alpha \in E$, вида

$$I(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx$$

называют *равномерно сходящимся на множестве* $E$, если

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon \colon \forall \alpha \in E,\ \forall \xi \geqslant \delta_\varepsilon \quad \left|\int_\xi^\infty f(x,\alpha)\, dx\right| \leqslant \varepsilon.$$

Если построить отрицание, то поймём, что *интеграл сходится неравномерно* на $E$, если

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \colon \forall \delta \in [\alpha, +\infty) \;\; \exists \alpha_\delta \in E, \; \xi_\delta \in [\delta, +\infty) \colon \left| \int_{\xi_\delta}^{+\infty} f(x, \alpha_\delta)\, dx \right| \geqslant \varepsilon_0.$$

Определение равномерной сходимости соответствует условию

$$\lim_{\xi \to +\infty} \left( \sup_{\alpha \in E} \int_{\xi}^{+\infty} f(x, \alpha)\, dx \right) = 0.$$

**Lem 9.2** (признак Вейерштрасса). *Если на $[a, +\infty)$ $\exists \varphi(x)$ такая, что $|f(x, \alpha)| \leqslant \varphi(x)$ $\forall x \in [a, +\infty)$ и $\forall \alpha \in E$, и если $\int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx$ сходится, то $I(\alpha)$ сходится абсолютно и равномерно на $E$.*

**Lem 9.3** (признак Дирихле). *Интеграл*

$$\int_a^\infty f(x, \alpha) g(x, \alpha)\, dx$$

*сходтся равномерно по $\alpha$ на $E$, если $\forall \alpha \in E$ функции $f$, $g$, $g'_x$ непрерывны по $x$ на множестве $[a, +\infty)$ и удовлетворяют следующим условиям: $g(x, \alpha) \rightrightarrows 0$ при $x \to \infty$, $g'_x(x, \alpha)$ $\forall \alpha$ не меняет знака при $x \in [a, +\infty)$, функция $f$ $\forall \alpha \in E$ имеет ограниченную первообразную $\forall x$, $\alpha$.*

**Lem 9.4** (критерий Коши). *Интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на $E$ тогда и тольког тогда, когда выполняется условие Коши:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon \in (a, \infty) \; : \; \forall \xi' \in [\varphi_\varepsilon, +\infty), \; \xi'' \in [\delta_\varepsilon, +\infty), \; \forall \alpha \quad \left| \int_{\xi'}^{\xi''} f(x, \alpha)\, dx \right| < \varepsilon.$$

**Lem 9.5** (непрерывность). *Если функция $f(x, \alpha)$ непрерывна на $D = \{(x, a) \mid a \leqslant x < +\infty, \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha)2\}$ и $I(\alpha)$ сходится равномерно по $\alpha$ на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$, то функция $I(\alpha)$ непрерывна на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$.*

## 9.1 К. III, §14

### 14.1(1, 2)

Докажем в 14.1(1) равномерную сходимость интеграла

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \qquad E = [\alpha_0; +\infty), \quad \alpha_0 > 1.$$

По признаку Вейерштрассе $x^\alpha \geqslant x^{\alpha_0}$, если $x > 1$, $\alpha > \alpha_0 > 1$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \leqslant \int_1^\infty \frac{dx}{x^{\alpha_0}} \qquad \Rightarrow \qquad M(x) = \frac{1}{x^{\alpha_0}}.$$

что соответствует сходимости. Аналогично 14.1(2), интеграл вида

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \qquad E = (0, \alpha_0), \quad \alpha_0 < 1.$$

Так как $x < 1$, то верно, что при $\alpha < \alpha_0 < 1$ функция $x^\alpha \geqslant x^{\alpha_0}$, что позволяет найти Лебег-интегрируемую мажоранту на $E$.

### 14.6(3)

Докажем, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на множестве $E_1$, и сходится неравномерно на $E_2$, если

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{4 + (x - \alpha)^6}, \qquad E_1 = [-\infty, 0], \quad E_2 = [1, +\infty).$$

Для начала на $E_1$:

$$\left| \int_\xi^{-\infty} \frac{dx}{4 + (x - \alpha)^6} \right| = \left| \int_{\xi - \alpha}^{+\infty} \frac{dt}{4 + t^6} \right|, \qquad \sup_{\alpha \in E_1} \left| \int_{\xi - \alpha}^{+\infty} \frac{dt}{4 + t^6} \right| = \int_\xi^{+\infty} \frac{dt}{4 + t^6} \underset{\xi \to +\infty}{\to} 0,$$

что соответсвует равномерной сходимости.

В случае же $E_2$, по аналогичным рассуждениям, приходим к

$$\sup_{\alpha \in E_2} \left| \int_{\xi - \alpha}^{+\infty} \frac{dt}{4 + t^6} \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{4 + t^6} \underset{\xi \to +\infty}{\not\to} 0,$$

что говорит о неравномерной сходимости.

**14.6(4)**

Теперь на множествах $E_1 = [0, 2]$ и $E_2 = [0, +\infty)$ рассмотрим интеграл вида
$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \exp(-(x-\alpha)^2)\, dx.$$
По определению равномерной непрерывности рассмотрим
$$\Omega(E) = \lim_{\xi\to+\infty} \sup_{\alpha\in E} \left| \int_\xi^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}\, dx \right| = \lim_{\xi\to+\infty} \sup_{\alpha\in E} \left| \int_{\xi-\alpha}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \right|.$$
В силу ограниченности $E_1$ $\Omega(E_1) = 0$. А вот на $E_2$ уже будет верно, что
$$\sup_{\alpha\in E_2} \left| \int_{\xi-\alpha}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \underset{\xi\to+\infty}{\not\to} 0,$$
что говорит о неравномерной сходимости.

**14.7(2)**

Исследдуем на равномерную сходимость интеграл вида
$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\, dx, \qquad E = [0, 1].$$
И снова по определению рассмотрим интеграл
$$\left| \int_\xi^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\, dx \right| = \left| \int_{\alpha\xi}^{+\infty} e^{-t}\, dt \right| = e^{-\alpha\xi}.$$
В условиях задачи
$$\alpha > 0, \qquad e^{-\alpha\xi} \geqslant \varepsilon_0 \in (0, 1).$$
Точнее рассмотрим
$$\alpha\xi \leqslant \ln\frac{1}{\varepsilon_0}, \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha \leqslant \frac{1}{\xi}\ln\frac{1}{\varepsilon_0}.$$
Далее, по определению,
$$\exists\varepsilon_0 > 0\ \forall\delta > 0\ \exists\xi_\delta = \delta\ \exists\alpha(\delta) = \frac{1}{\delta}\ln\frac{1}{\varepsilon_0}, \qquad \Rightarrow \qquad \left| \int_{\xi_\delta}^{+\infty} f(x,\alpha)\, dx \right| = e^{-\alpha(\delta)\xi(\delta)} \geqslant \varepsilon_0.$$

**Признак Абеля**

**Lem 9.6** (признак Абеля)**.** *Если интеграл $I(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\, dx$ сходится равномерно на $[\alpha_1, \alpha_2]$ и функция $\varphi$ ограничена и монотонна по $x$, то интеграл*
$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\varphi(x,y)\, dx \underset{[\alpha_1,\alpha_2]}{\rightrightarrows}.$$

$\triangle$. Для $\forall\varepsilon > 0$, по Критерию Коши, $\exists B(\varepsilon)$ такое, что $\forall b'$, $\xi$, $b'' > B(\varepsilon)$ независимо от $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ выполняется
$$\left| \int_{b'}^{\xi} f(x,\alpha)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M}, \qquad \left| \int_\xi^{b''} f(x,\alpha)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M},$$
где $M = \sup_{x,\alpha} |\varphi(x,\alpha)| \neq 0$.

Далее, так как $\varphi$ монотонна по $x$, а функция $f$ интегрируема, то, по второй теореме о среднем, имеем
$$\int_{b'}^{b''} f(x,\alpha)\varphi(x,\alpha)\, dx = \varphi(b'+0,\alpha)\int_{b'}^{\xi} f(x,\alpha)\, dx + \varphi(b''-0,\alpha)\int_\xi^{b''} f(x,\alpha)\, dx,$$
где $b' \leqslant \xi \leqslant b''$. Отсюда, учитывая неравенства, получаем оценку
$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x,\alpha)\varphi(x,\alpha)\, dx \right| \leqslant |\varphi(b'+0,\alpha)| \cdot \left| \int_{b'}^{\xi} f(x,\alpha)\, dx \right| + |\varphi(b''-0,\alpha)| \cdot \left| \int_\xi^{b''} f(x,\alpha)\, dx \right| < \varepsilon,$$
для $\forall\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$. А это, по критерию Коши, и означает, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на $E$. $\square$

**14.7(4)**

Исследуем на равномерную сходимость на $E$ интеграл $I(\alpha)$ вида

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^\alpha}\,dx, \qquad E = [0, +\infty).$$

Сделав замену $x = \sqrt{t}$, получим

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t\,dt}{2(1+t^{p/2})\sqrt{t}}.$$

По признаку Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ сходится, а функция $\frac{1}{2}\left(1+t^{\alpha/2}\right)^{-1}$ при $\alpha \geqslant 0$ монотонна по $t$ и ограничена числом 0.5, следовательно, по *признаку Абеля*, интеграл сходится равномерно.

**14.7(6)**

Исследуем на равномерную сходимость на $E$ интеграл $I(\alpha)$ вида

$$I(\alpha) = \int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^\alpha}, \qquad E = (0, 2).$$

Положим $x = 1/t$, $t > 0$. Тогда

$$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-\alpha}}\,dt, \qquad \Rightarrow \qquad \int_\xi^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-\alpha}}\,dt = \frac{\cos\xi}{\xi^{2-\alpha}} + (\alpha-2)\int_\xi^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{3-\alpha}}\,dt.$$

Последний интеграл [!] сходится равномерно, поэтому при достаточно большм $\xi$ справедлива оценка

$$\left|\int_B^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3-\alpha}}\,dt\right| < \varepsilon_1, \qquad \varepsilon > 0.$$

Возвращаясь к первому слагаемому, заметим, что оно не может быть сделано сколь уголно малым $\forall \Xi \geqslant \xi$ равномерно относительно параметра $\alpha$. Действительно, пусть $\xi > 0$ задано, а также $0 < \varepsilon_2 \leqslant 1/2$, тогда выбирая $\Xi = 2\pi k > \xi$, $k \in \mathbb{N}$ значение параметра $\alpha$ из неравенства $0 < 2 - \alpha < \ln(\varepsilon_2^{-1})/\ln(2\pi\kappa)$ находим, что

$$\left|\frac{\cos\xi}{\xi^{2-\alpha}}\right| = \frac{1}{(2k\pi)^{2-\alpha}} > \varepsilon_2,$$

что означает, что исследуемый интеграл сходится неравномерно.

**Lem 9.7.** *Если $f(x,\alpha) \rightrightarrows f(x,\alpha_0)$ на каждом интерва $[a,b]$ и $|f(x,\alpha)| \leqslant F(x)$, где $F(x)$ – Лебег-интегрируема, то*

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx = \int_a^{+\infty} \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)\,dx.$$

$\triangle$. Оценим по абсолютной величине разность

$$\int_0^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx - \int_0^{+\infty} f(x,\alpha_0)\,dx = \int_a^b \left(f(x,\alpha) - f(x,\alpha_0)\right)\,dx + \int_a^b f(x,\alpha)\,dx - \int_b^{+\infty} f(x,\alpha_0)\,dx, \qquad b > a.$$

Для $\forall\varepsilon > 0$ задано, в силу мажорируемости Лебег-интегрируемой функцией, при достаточно большом $b$ справедливы оценки

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx\right| \leqslant \int_b^{+\infty} F(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \left|\int_b^{+\infty} f(x,\alpha_0)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

а в силу условия равномерной сходимости – оценка

$$|f(x,\alpha) - f(x,\alpha_0)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}, \qquad \forall x \in [a,b],$$

если разность $|y - y_0|$ достаточно мала.

Таким образом получаем

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx - \int_a^{+\infty} f(x,\alpha_0)\,dx\right| < \varepsilon,$$

при достаточно малом $|\alpha - \alpha_0|$. $\square$

### 14.21

Покажем, что есть $f$ непрерывна и ограничена на промежутке $[0, +\infty)$, то

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha f(x)}{x^2 + \alpha^2}\, dx = f(0).$$

Как обычно положим $x = t\alpha$, при $t > 0$ и $y > 0$. Тогда

$$I = \lim_{y \to +0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(ty)}{t^2 + 1}\, dt.$$

Так как $|f(ty)|/(t^2+1) \leqslant M/(t^2+1)$, где $|f(ty)| \leqslant M = \text{const}$, $\int_0^{+\infty} dt/(t^2+1) = \pi/2$ (сходится), а в силу непрерывности $f$ дробь $\frac{f(t\alpha)}{t^2+1} \rightrightarrows \frac{f(0)}{t^2+1}$ при $y \to +0$ на каждлм конечном интервале $[a, b]$, то, согласно выше рассмотренной лемме, находим

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(t\alpha)}{t^2+1}\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \lim_{\alpha \to +0} \frac{f(t\alpha)}{t^2+1}\, dt = f(0).$$

В силу нечетности интеграла по $\alpha$, имеем

$$\lim_{\alpha \to -0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha f(x)}{x^2 + \alpha^2}\, dx = -f(0).$$

## 9.2 T2

**Интеграл Дирихле**. Вычислим *интеграл Дирихле*

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx \tag{9.1}$$

Для начала вычислим некоторый другой интеграл:

$$\Phi(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx, \qquad \Phi'_\alpha(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\beta x} \cos(\alpha x)\, dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Действительно, считая $f'_\alpha(x, \alpha) = e^{-\beta x}\cos(\alpha x)$, заметим, что $f$ и $f'_\alpha$ непрерывны на $E$, $\int_0^{\infty} f(x, \alpha)\, dx$ сходится $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ по Дирихле:

$$\left| \int_0^{\infty} \sin(\alpha x)\, dx \right| = \left| \frac{\cos(\alpha t) - 1}{\alpha} \right| \leqslant \frac{2}{|\alpha|}, \qquad \alpha \neq 0,$$

а функция $x^{-1} e^{-\beta x}$ убывает на промежутке $(0, +\infty)$, также верно, что $\int_0^{\infty} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx$ сходится равномерно по признаку Вейерштрассе, следовательно можем дифференцировать под знаком интеграла.

Теперь, интегриря $\alpha$ на отрезке $[0, \alpha]$ находим

$$\Phi(\alpha, \beta) - \Phi(0, \beta) = \beta \int_0^{\alpha} \frac{dt}{t^2 + \beta^2} = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta}.$$

Понятно, что $I(\alpha) = -I(\alpha)$, так что далее считаем $\alpha > 0$. Имеем право рассмотреть $\beta \in [0, 1]$, точнее предел

$$\lim_{\beta \to +0} \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx = I(\alpha) = \lim_{\beta \to +0} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом для произвольного $\alpha$ верно, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(\alpha). \tag{9.2}$$

**Интеграл Лапласа**. Вычислим интегралы Лапласа

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2}\, dx = \int_0^{\infty} f(x, \alpha)\, dx, \qquad K(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1 + x^2}\, dx.$$

Без ограничения общности рассмотрим $\alpha > 0$. Проверим, что можем дифференцировать под знаком интеграла: $f(x, \alpha)$ непрерывна $\forall \alpha$, $x$, интеграл

$$\int_0^{+\infty} f'_\alpha\, dx = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1 + x^2}\, dx,$$

сходится равномерно по $\alpha$ на $[a_0, +\infty)$ для $\forall \alpha_0 > 0$, получается верно, что

$$I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1 + x^2} = -K(\alpha).$$

Складывая с известным выражением интеграла Дирихле, находим

$$I'(\alpha) + \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \left( \frac{\sin \alpha x}{x} - \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)}\, dx.$$

Аргумент интеграла непрерывен, как и его производная по $\alpha$, они Лебег-интегрируемы, поэтому, дифференцируя под знаком интеграла, находим

$$I''(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx.$$

Так мы приходим к дифференциальному уравнению на $I(\alpha)$:

$$I''(\alpha) - I(\alpha) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad I(\alpha) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha}.$$

Рассматривая пределы $\alpha \to 0$ и $\alpha \to +\infty$, находим константы интегрирования $C_1 = 0$ и $C_2 = \pi/2$. В силу четности $I(\alpha)$ находим

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Бонусом находим $K(\alpha) = -I'_\alpha(\alpha)$:

$$K(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|} \cdot \operatorname{sign} \alpha.$$

**Интегралы Френеля**. Вычислим *интеграл Френеля*

$$I = \int_0^{+\infty} \sin^2 x^2\, dx.$$

Для нахождения нам понадобится *интеграл Эйлера-Пуассона* и, возможно, *интеграл Лапласа*:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2}..$$

Полагая $x^2 = t$ запишем интеграл $I$ в виде

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt.$$

При $t > 0$ справедливо равенство

$$\int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\, du = \Big/ x = \sqrt{t} u \Big/ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\, du, \tag{9.3}$$

Так приходим к двойному интегралу

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin t\, dt \int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\, du.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \sin t\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4}.$$

Который легко вычисляется, если заметить, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{(1/x^2)\, dx}{1+(1/x)^4} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

Поэтому

$$2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{(1+1/x^2)\, dx}{x^2+1/x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{d(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{x-1/x}{\sqrt{2}} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Откуда уже и получаем

$$I = \int_0^{+\infty} \sin^2 x^2\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{9.4}$$

## 9.3 Т3

Докажем *формулу Фруллани*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = f(0) \ln \frac{b}{a}, \qquad a > 0,\ b > 0,$$

где $f$ – непрерывная функция и $\int_A^{\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx$ сходится $\forall A > 0$.

В силу условий теоремы

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x}\,dx = \int_{Aa}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt, \qquad \int_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x}\,dx = \int_{Ab}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt, \quad \Rightarrow \quad \int_A^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int_{Aa}^{Ab} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

По *первой теореме о среднем*, получаем

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(\xi)\int_{Aa}^{Ab}\frac{dt}{t} = f(\xi)\ln\frac{b}{a}, \qquad Aa \leqslant \xi \leqslant Ab.$$

Поскольку функция $f$ непрерывна, то $\lim_{A\to+0} f(\xi) = f(0)$, откуда находим

$$\lim_{A\to+0}\int_A^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a}. \tag{9.5}$$

Стоит заметить, что если $\int_A^{\infty} f(x)/x\,dx$ расходится, то

$$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty), \qquad \exists \int_A^{+\infty} \frac{f(x)-f(+\infty)}{x}\,dx \in \mathbb{R}, \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \big(f(0)-f(+\infty)\big)\ln\frac{b}{a}.$$

## 9.4 К. III, §15

### 15.1(1, 2, 3, 4)

**1)** Найдём интеграл вида

$$\int_0^{+\infty} \left(\cos^2(ax)-\cos^2(bx)\right)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\cos(2ax)-\cos(2bx)\right)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}.$$

где воспользовались формулой Фрулани, выбрав $\cos(2ax) = f(ax)$.

**2)** Теперь найдём

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{-ax^2}-e^{-bx^2}\right)\frac{dx}{x} = \ln\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a},$$

**3)** Интеграл вида

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}\,dx = \Big/\begin{array}{c} x=\sqrt{t}, \\ dx = dt/(2\sqrt{t}) \end{array}\Big/ = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{2t}\,dt = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}.$$

**4)** И, наконец, вычислим интеграл вида

$$\int_0^1 \frac{x^a-x^b}{\ln x}\,dx = \Big/\ln\frac{1}{x} = t\Big/ = \int_{\infty}^0 \frac{dt}{t}e^{-t}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right) = \int_0^{\infty}\left(e^{-(b+1)t}-e^{-(a+1)t}\right)\frac{dt}{t} = \ln\frac{a+1}{b+1}$$

### 15.2(1)

Найдём интеграл, вида

$$\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\alpha x}{x^2}\,dx = -\int_0^{+\infty}\sin^2\left(\frac{\alpha x}{2}\right)d\left(\frac{1}{x}\right) = -\left.\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}x\right)}{x}\right|_0^{+\infty} + \frac{\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi|\alpha|}{2},$$

где модуль вполне правомерен в силу чётности $\cos(\alpha x)$.

### 15.3(2)

Интеграл

$$\int_0^{\infty}\sin x\cos^2 x\frac{dx}{x} = \int_0^{+\infty}\sin(x)\frac{1+\cos(2x)}{2}\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin x\cos 2x}{x}\,dx,$$

где уже хочется подставить $\sin(3x)-\sin(x) = 2\sin(x)\cos(2x)$:

$$\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\sin(3x)}{x}\,dx - \frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

### 15.4(3)

Есть интеграл вида

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^4(\alpha x)}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx..$$

Заметим, что $f$, $f'_\alpha$ существуют почти всюду по $\alpha$, $f'_\alpha = \frac{4\sin^3(\alpha x)\cos(\alpha x)}{x}$ мажорируется $10x^2$ при малых $x$ и *не абсолютно* интегрируема при больших по признаку Дирихле, соответственно можем нтегрировать под знаком интеграла

$$I'_\alpha(\alpha) = \int_0^{+\infty} 4\sin^3(\alpha x)\cos(\alpha x)\frac{dx}{x} = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x}\left(\frac{1}{4}\sin(2x\alpha) - \frac{1}{8}\sin(4x\alpha)\right) = \frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\alpha,$$

что верно $\forall\alpha$.

Возвращаясь к интегралу, находим, что

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{4}|\alpha| + 0,$$

так как $I(0) = 0$.

**Thr 9.8** (интерирование по частям)**.** *Воообще*

$$\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)g'_x(x,\alpha)\,dx = f(x,\alpha)g(x,\alpha)\Big|_a^\infty - \int_a^{+\infty} f'_x(x,\alpha)g(x,\alpha)\,dx,$$

*работает, когда $f, g \in C^1$ по $x$ и любые два из трёх написанных пределов существуют.*

## 15.5(6)

Вычислим интеграл вида

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty}\sin^3(x)\cos(\alpha x)\frac{dx}{x^3}.$$

Интегрируя по частям

$$\sin^3 x\cos(\alpha x) = \frac{3}{8}\left(\sin(\alpha+1)x - \sin(\alpha-1)x\right) - \frac{1}{8}\left(\sin(\alpha+3)x - \sin(\alpha_3)x\right),$$

для $\alpha > 3$. В общем приходим к выражению

$$\begin{aligned}
I(\alpha) &= \int_0^{+\infty}\sin^3(x)\cos(\alpha x)\frac{dx}{x^3} = \int_0^\infty \sin^3 x\cos(\alpha x)\,d\left(\frac{-1}{2x^2}\right) = \\
&= \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\sin^3 x\cos\alpha x\Big|_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,d(\sin^3 x\cos\alpha x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\sin^3(x)\cos(\alpha x)\right)'_x f\left(-\frac{1}{x}\right) = \\
&= -\frac{1}{2x}\left(\sin^3 x\cos(\alpha x)\right)'_x\Big|_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\,d\left(\sin^3 x\cos\alpha x\right)'_x = \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x}\Bigg(\frac{3}{8}\left[(\alpha+1)^2\sin(\alpha+1)x - (\alpha-1)2\sin(\alpha-1)x\right] - \\
&\qquad \frac{1}{8}\left[(\alpha+3)^2\sin(\alpha+3)x - (\alpha-3)^2\sin(\alpha-3)x\right]\Bigg) = \\
&= -\frac{\pi}{4}\left\{\frac{3}{8}(\alpha+1)^2 - \frac{3}{8}(\alpha-1)^2 - \frac{1}{8}(\alpha+3)^2 + \frac{1}{8}(\alpha-3)^2\right\} = 0
\end{aligned}$$

## 15.6(3)

С помощью дифференцирования по параметру вычислим

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\sin\lambda x\,dx = \int_0^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx, \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \lambda \neq 0.$$

Для начала проверим, что можем дифференцировать по параметру $\lambda$. Действительно $f \in \mathcal{L}(X)$, $f'_\lambda = \left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right)\cos(\lambda x)$ существует, конечна и Лебег-интегрируема ($< e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}$) $\forall\lambda$. Тогда, дифференцируя под знаком интеграла

$$I'_\lambda(\lambda) = \int_0^{+\infty}\left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right)\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2} - \frac{\beta}{\beta^2+\lambda^2}.$$

В таком случае $I(\lambda)$

$$I(\lambda) = \int I'_\lambda(\lambda)\,d\lambda = \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda}{\beta}\right) + C = \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda}{\beta}\right),$$

где $C = 0$ так как $I(0) = 0$.

**15.6(5)**

При выполнении всех условий о дифференцирование интеграла по параметру, для интеграла

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

может быть так посчитан.

Действительно,

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{1+(\alpha x)^2} = \int_0^1 dx\left[\sqrt{1-x^2}(1+(\alpha x)^2)\right]^{-1} =$$

$$= \Big/ x = \cos t,\ dx = -\sin t\,dt \Big/ = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

Тогда $I(\alpha)$

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\int \frac{d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} + C = \frac{\pi}{2}\ln\left|\alpha + \sqrt{\alpha^2+1}\right| + C = \frac{\pi}{2}\ln\left(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}\right),$$

где $I(0)=0$ так что $C=0$.

**15.13(5)**

Попробуем через интеграл Эйлера-Пуассона доказать, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+\alpha^2/x^2)}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

Представим интеграл в виде

$$\int_0^1 \exp\left(-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) + \int_1^{+\infty}\left(-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)dx,$$

далее, произведя замену $y = 1/x$ в первом интеграле получаем

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \exp\left(-\alpha^2 y^2 + \frac{1}{y^2 1}\right)\frac{dy}{y^2} + \int_1^{+\infty}\exp\left(-y^2 - \frac{\alpha^2}{y^2}\right)dy.$$

Так как подынтегральные функции $f_1$ и $f_2$ сходятся непрерывны при всех $\alpha$ и $1 \leqslant y < +\infty$, а соответствующие интегралы, по признаку Вейерштрасса, сходятся равномерно:

$$|f_1| \leqslant \frac{1}{y^2}, \qquad |f_2| \leqslant e^{-y^2},$$

и интегралы

$$\int_1^{+\infty}\frac{dy}{y^2}, \qquad \int_1^{+\infty} e^{-y^2}\,dy$$

сходятся, то функция $I$ непрерывна $\forall |\alpha| \in \mathbb{R}$.

Пусть $|\alpha| \geqslant \varepsilon > 0$. Поскольку функции $\partial_\alpha f_1$ и $\partial_\alpha f_2$ непрерывны в области $|\alpha| \geqslant \varepsilon,\ 1 \leqslant y < +\infty$, а соответствующие интегралы от них, в силу мажорантного признака, сходятся равномерно, то функция $I'$ непрерывна при $\alpha \neq 0$. Следовательно

$$I'_\alpha(\alpha) = -2\alpha\int_0^{+\infty}\exp\left(-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x^2}.$$

Кроме того, положив в исходном интеграле $x = \alpha/y$, $y > 0$, можем написать

$$I(\alpha) = \alpha\int_0^{+\infty}\exp\left(-y^2 - \frac{\alpha^2}{y^2}\right)\frac{dy}{y^2}.$$

Сравнивая последние два интеграла, получаем дифференциальное уравнение $I' + 2I = 0$, решая которое, находим

$$I(\alpha) = Ce^{-2\alpha}.$$

В силу непрерывности $I(\alpha)$ находим, что $I(0) = \sqrt{\pi}/2$, откуда $C = \sqrt{\pi}/2$. Окончательно,

$$I(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-2|\alpha|\right).$$

**Lem 9.9.** *Верно представление, вида*

$$\frac{1}{x^2+1} = \int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)}\,dy.$$

**15.15(1, 4)**

**1)** Найдём интеграл, вида
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\alpha x)}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(2\alpha x)}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\alpha x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-2|\alpha|}\right).$$
**4)** Теперь хочется взять интеграл
$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\alpha x)}{x^2(1+x^2)}\,dx = \int_0^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx.$$
Заметим, что $f(x,\alpha)$ Лебег-интегрируема $\forall \alpha \in E$. Рассмотрим
$$f'_\alpha = \frac{\sin 2\alpha x}{x^2(1+x^2)}.$$
для которой верно, что
$$\left|\frac{2\sin 2\alpha x}{x(1+x^2)}\right| \leqslant \left|\frac{1}{1+x^2}\right|, \quad x < 0.1/\alpha, \qquad \left|\frac{2\sin 2\alpha x}{x(1+x^2)}\right| \leqslant \left|\frac{2}{x^3}\right|, \quad x > 1,$$
соответственно, $f'_\alpha$ Лебег-интегрируема. Тогда верно, что
$$I'_\alpha(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\alpha x}{x(1+x^2)}\,dx.$$
Дифференцируем дальше, по крайней мере хотим, для этого необходимо, чтобы $f'_\alpha$ и $f''_{\alpha,\alpha}$ были бы Лебег-интегрируемы и существуют $\forall \alpha$, что верно. Тогда
$$\frac{d^2 I(\alpha)}{d\alpha^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\alpha x)}{1+x^2}\,dx = 2\frac{\pi}{2}e^{-2|\alpha|}.$$
Последний интеграл уже берется:
$$I''(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{2\cos 2\alpha x}{1+x^2}\,dx = 2\frac{\pi}{2}e^{-2\alpha}.$$
Отсюда находим
$$I'_\alpha(\alpha) = -\frac{\pi}{2}e^{-2\alpha} + C_1 = -\frac{\pi}{2}e^{-2\alpha} + \frac{\pi}{2},$$
и, наконец, находим
$$I(\alpha) = \frac{\pi}{4}e^{-2\alpha} + \frac{\pi}{2}\alpha + C_2, \qquad \Rightarrow \qquad I(\alpha) = \frac{\pi}{4}\left(e^{-2\alpha} + 2\alpha - 1\right), \qquad \alpha > 0.$$

# 10 Интеграл Фурье и преобразование Фурье

Введём прямое и обратное преобразование Фурье:
$$f(x) \mapsto \hat{f}(y) = F[f](y) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}\,dt, \tag{10.1}$$
$$f(y) \mapsto \check{f}(x) = F^{-1}[f](x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ixt}\,dt. \tag{10.2}$$
Далее выпишем некоторые свойства преобразования Фурье.

*Фомула обращения.* Если непрерывная функция $f$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и имеет в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ конечные односторонние производные, то
$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f.$$

*Непрерывность.* Если функция $f$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то её преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ – непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}$ функция, для которой верно
$$\lim_{y\to+\infty}\hat{f}(y) = \lim_{y\to-\infty}\hat{f}(y) = 0.$$

*Преобразования Фурье производной.* Если функция $f$ и её производные до $n$-го порядка включительно непрерывны и абсолтно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то
$$F[f^{(k)}] = (iy)^k F[f], \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

*Производная преобразования Фурье.* Если функция $f$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а функции $f(x), xf(x), \ldots, x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то функция $\hat{f}(y) = F[f](y)$ имеет на $\mathbb{R}$ производные до $n$-го порядка включительное, причем
$$\hat{f}^{(k)}(y) = (-i)^k F[x^k f(x)], \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Также полезно определить *интеграл Фурье*, как интеграл вида
$$f(x) \sim F^{-1}[F[f]](x) = v.p.\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ty}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} c(y)e^{ixy}\,dy,$$
где
$$c(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iyt}\,dt.$$
Иначе, через тригонометрические функции
$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(y)\cos(yx)\,dx + \int_0^{+\infty} b(y)\sin(yx)\,dx,$$
где
$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos(yt)\,dt, \qquad b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin(yt)\,dt.$$

## 10.1 K. III, §17

### 17.1(4)

Представим функцию $f(x)$ интегралом Фурье, если $f(x)$ вида
$$f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}, \qquad a \neq 0.$$
Заметим, что $b(y) = 0$, а $a(y)$
$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(yt)}{t^2+a^2}\,dt = \Big/ t = ax \Big/ \frac{2}{\pi a}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ayx)}{1+x^2} = \frac{2}{\pi a}\frac{\pi}{2}e^{-ya},$$
таким образом находим представление в виде интеграла Фурье
$$f(x) = \frac{1}{|a|}\int_0^{+\infty} e^{-y|a|}\cos(xy)\,dy.$$

### 17.2(3)

Представим функцию $f(x)$ интегралом Фурье, если $f(x)$ вида
$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & |x| \leqslant \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$
Для начала заметим, что $b(y) = 0$, а $a(y)$
$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} dt f(t)\cos(yt) = \frac{2}{\pi}\begin{cases} \cos(\pi y/2), & y \neq 1 \\ \pi/4, & y = 1 \end{cases}$$
В таком случае можем сопоставить функции её интеграл Фурье
$$f(x) \sim \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\pi y/2)}{y^2-1}\cos(xy)\,dy.$$

### 17.6(2)

Представим интегралом Фурье функцию $f(x)$, продолжив её чётным образом на $(-\infty, 0)$, если
$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ -, & |X| > 1. \end{cases}$$

Функция является кусочно-гладкой и абсолютно интегрируемой на $(-\infty, \infty)$, следовательно, её можно представить интегралом Фурье, в силу четности $b(\lambda) = 0$, а $a(\lambda)$
$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos\lambda x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin\lambda}{\lambda}.$$
Таким образом находим представление:
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\cos(\omega x)\,d\omega, \qquad |x| \neq 1.$$

В точках же $x = \pm 1$, интеграл Фурье равен $1/2$.

### 17.7(4)

Теперь найдём преобразование Фурье у аналогичной функции:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leqslant \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

Преобразование Фурье найдём, как интеграл вида

$$F[f](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}\,\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)(-i)\sin(yt)\,\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = 2\int_0^{\pi} \sin t \sin(yt)(-i)\,\frac{dt}{\sqrt{2\pi}},$$

который уже легко считается

$$F[f](y) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi y)}{1-y^2}, & y \neq \pm 1, \\ \dfrac{\pi}{2}, & y = \pm 1. \end{cases}$$

### 17.8(2, 4)

**2)** Найдём преобразование Фурье функции

$$f(x) = e^{-x^2/2}.$$

Преобразование Фурье найдём, как интеграл вида

$$F[f](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}\,\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}e^{-ity}\,\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = \Big/ t/\sqrt{2} = x \Big/ = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(\sqrt{2}yx)\,dx =$$
$$= e^{-y^2/2},$$

где мы воспользовались свойством

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos(2\alpha x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha^2}.$$

**6)** Найдём преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{d^2}{dx^2}(xe^{-|x|}).$$

Преобразование Фурье найдём, как интеграл вида

$$F[f](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2}{dt^2}(te^{-|t|})e^{-iyt}\,\frac{dt}{d\sqrt{2\pi}} = y^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,\frac{\partial}{\partial(iy)}e^{-iyt}\,\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} =$$
$$= -iy^2\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\cos(yt)\,dt = i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\,\frac{y^2}{(1+y^2)^2}.$$

### 17.14

Рассмотрим преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ функции $f(x) = 1/(1+|x|^5)$.

**1)** Рассмотрим третью производную

$$\partial_y^3 F[f](y) = (-i)^3 F[t^3 f](y) = (-i)^3\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3}{1+|t|^5}e^{-iyt}\,\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi(y).$$

Заметим, что

$$|\Psi(y)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|^3}{1+|t|^5}\cdot 1\cdot\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} < +\infty,$$

по признаку Вейерштрассе.

**2)** Заметим, что $y^5 O(y^{-5}) = O(1)$, а также $(iy)^5 F[f](y) = O(1)$ в окрестности больших $y$. Если $\exists C\colon \overset{\circ}{U}(x_0)\colon |f(x)/g(x)| \leqslant C$, то говорят, что $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$. Верно, что

$$\varphi(y) = (iy)^5 F[f](y) = F[f^{(5)}](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\partial^5 f(t)}{\partial t^5}\right)e^{-iyt}.$$

Тогда верна оценка

$$|\varphi(y)| = |y|^5|F[f](y)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}\left|\frac{\partial^5 f(t)}{\partial t^5}\right| \equiv C < +\infty.$$

Более того

$$|F[f](y) \leqslant \frac{X}{|y|^5}, \quad \Rightarrow \quad F[f](y) = O\left(\frac{1}{y^5}\right).$$

**3)** Наконец получим оценку для больших $y$:

$$|\varphi(y)| = |y|^5\Big|F[f](y)\Big| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial^5 f(t)}{\partial t^5}e^{-iyt}\right|.$$

Так приходим к оценке

$$\Big|F[f](y)\Big| = \frac{1}{|y|^5}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial^5 f(t)}{\partial t^5}e^{-iyt}\right| = \frac{K(y)}{|y|^5},$$

где $C(y)$ бесконечно малое при $y \to \infty$ по лемме Лебега-Римана, или лемме об осцилляции.

**Lem 10.1** (лемма Римана-Лебега)**.** *Если $f(x)$ такая, что $\int_{\mathbb{R}} |f| < +\infty$, то $\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ipx} \to 0$ при $p \to \infty$.*

**17.17(2)**

Найдём $\varphi(y)$, если

$$\int_0^{+\infty} \varphi(y)\sin(xy)\,dy = e^{-x}, \quad x > 0.$$

Через обратное преобразование Фурье:

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty}\left(\cos(xy)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\pi}\varphi(t)\cos(yt) + \sin(xy)2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\pi}\varphi(t)\sin(yt)\right)dy,$$

тогда

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} dye^{-y}\sin(xy) = \frac{2}{\pi}\frac{x}{1+x^2}, \quad x > 0.$$

## 10.2 T4

Докажем, что функции вида $P(x)e^{-x^2/2}$, где $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, при преобразовании Фурье переходти в функцию того же вида, причём степень многочлена не повышается.

Действительно,

$$F[f](y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}}P_\alpha(t)e^{-t^2/2}e^{-iyt} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}P_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial(-iy)}e^{-yt}\right) =$$

$$= P_\alpha\left(i\frac{\partial}{\partial y}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}e^{-iyt} \overset{17.8(2)}{=} P_\alpha\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)e^{-y^2/2}.$$

Осталось показать, что степень многочлена не увеличилась, для этого достаточно рассмотреть

$$F[f](y) = p_\alpha\cdot\left(i\frac{\partial}{\partial y}\right)^n e^{-y^2/2} + P_{\alpha-1}\left(i\frac{\partial}{\partial y}\right)e^{-y^2/2} = p_\alpha i^\alpha(-y)^\alpha e^{-y^2/2} + Q_{\alpha-1}(y)e^{-y^2/2} + P_{\alpha-1}\left(i\frac{\partial}{\partial y}\right)e^{-y^2/2},$$

поэтому степень не повышается.

## 10.3 T5

Вычислим интегралы Лапласа с помощью образения преобразования Фурье:

$$I(y) = \int_0^{+\infty} dx\frac{\cos(yx)}{1+x^2}, \quad K(y) = \int_0^{+\infty} dx\frac{x\sin(yx)}{1+x^2}.$$

В частности рассмотрим функцию $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, где $\alpha > 0$, тогда

$$F[f](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}, \qquad F^{-1}[g](x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}g(y)e^{ixy}.$$

Теперь воспользуемся формулой образения, и найдём

$$f(x) = F^{-1}\left[F[f]\right](x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \frac{\alpha\cos(2y)}{\alpha^2+y^2} = e^{-\alpha|x|}, \qquad \alpha > 0.$$

Соответственно, при $\alpha = 1$, найдём

$$\int_0^{+\infty} dy \frac{\cos(xy)}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}.$$

Аналогично находим $K(\alpha)$, а именно $F[f'](y) = iyF[f](y)$

$$F^{-1}[F[f']](x) = f'(x) = F^{-1}\left[iyF[f]\right](x) = 2\int_0^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} i\sin(xy)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha iy}{\alpha^2+y^2} = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} dy \frac{\alpha y\sin(xy)}{\alpha^2+y^2} = -\alpha \operatorname{sign} x e^{-\alpha|x|},$$

что при $\alpha = 1$ перейдёт в интеграл вида

$$\int_0^{+\infty} \frac{y\sin(xy)}{1+y^2}\, dy = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(x)e^{-|x|}.$$

## 10.4 T6

Пусть $f \in S(\mathbb{R})$, $\forall x_0, y_0 \in \mathbb{R}$:

$$\|(x-x_0)f(x)\|_2 \cdot \|(y-y_0)\hat{f}(y)\| \geqslant \frac{1}{2}\|\hat{f}\|_2^2.$$

Для начала рассмотрим $(y-y_0)\hat{f}(y)$. Сделаем замену $t = y - y_0$, тогда

$$(y-y_0)\hat{f}(y) = t\hat{f}(y_0+t),$$

раскрывая, находим

$$\hat{f}(y_0+t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+y_0)e^{-iyt}\, dt = e^{iy_0t}F[f](y).$$

Построим следующую цепочку равенств

$$\|(y-y_0)\hat{f}(y)\|_2 = \|f\hat{f}(y_0+t)\| = \|te^{iy_0t}\hat{f}(t)\|_2.$$

Также заметим, что такое преобразование сохраняет норму (что логично):

$$\|ge^{iy_0t}\|_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} ge^{iy_0t}\cdot\overline{ge^{iy_0t}}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g\bar{g}\, dt = \|g\|_2.$$

Тогда

$$\|te^{iy_0t}\hat{f}(t)\|_2 = \|t\hat{f}(t)\|_2 = \|\hat{f}'(t)\|_2.$$

Теперь, воспользовавшись унитарностью преобразования Фурье, найдём

$$\|\hat{f}'(t)\|_2 = \|f'(t)\|_2.$$

Наконец, можем свести изначальное утверждение к неравенству

$$\|xf(x)\|_2 \cdot \|f'(x)\|_2 \geqslant \frac{1}{2}\|f\|_2^2,$$

которое уже можем доказать по неравенству Коши-Буняковского

$$\int_{\mathbb{R}}(xf(x))^2\, dx \int_{\mathbb{R}}(f')^2\, dx \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}} xf(x)f'(x)\, dx\right)^2 = \left(-xf^2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f^2(x)\, dx\right)^2 = \frac{1}{4}\|f\|_2^4, \qquad \text{Q. E. D.}$$

где равенство нулю на границах обусловлено принадлежности пространству Шварца.

## 10.5 T7

Найдём преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} x^{p-1}e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

при $p > 0$.

Для начала рассмотрим

$$\frac{d\hat{f}}{dx} = -iF[f\cdot x] = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x^p e^{-x-ixy}\, dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{xpe^{-x(1+iy)}}{-1-iy}\Bigg|_0^{+\infty}\right) - \frac{ip}{\sqrt{2\pi}}\int x^{p-1}\frac{e^{-x-ixy}}{-1+iy}\, dx = \frac{-ip\hat{f}(y)}{1+iy},$$

что даёт нам некоторое дифференциальное уравнение на $\hat{f}$ вида
$$\frac{d\hat{f}}{\hat{f}} = \frac{(-ip)\,dy}{1+iy}, \qquad \Rightarrow \qquad \hat{f}(y) = C(1+iy)^{-p}.$$
Осталось найти константу интегрирования, при $y=0$:
$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^p e^{-x}\,dx = \frac{\Gamma(p)}{\sqrt{2\pi}},$$
откуда находим
$$\hat{f}(y) = \frac{\Gamma(p)}{\sqrt{2\pi}}(1+iy)^{-p}.$$

## 10.6 T8

Пусть фунция $f \in L_1(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на всей прямой. Докажем, что свёртка
$$f * \ldots * f$$
$k+2$ раза будет $k$ раз непрерывно дифференцируема.

Рассмотрим
$$\hat{h}(y) = (2\pi)^{-k/2-1}(\hat{f}(y))^{k+2}.$$
Если $f \in L_1(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, то
$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\,dx,$$
будет равным $O(1/y)$ при $y \to \infty$. Тогда $\hat{h}(y) = O(y^{-k-2})$ при больших $y$.

Теперь рассмотрим
$$F^{-1}[h](y)\colon \frac{d}{dy} F^{-1}[h](y) = F[(-it)h(t)](y),$$
также верно, что
$$(F^i)^{(k)} = F[(-it)^k h[t]](y) \to \int_{-\infty}^{+\infty} O\left(\frac{1}{y^2}\right) e^{iyt}\,dt.$$
Вспомним, что $I(\alpha) = \int f(x,\alpha)\,dx$ непрерывен при $f$ непрерывной, и $I(\alpha)$ сходящемуся равномерно по $\alpha$:
$$|f(x)| = O(g(x)),$$
когда найдётся $\kappa$ такая, что
$$|f(x)| \leqslant \kappa |g(x)|, \qquad \Rightarrow \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} O\left(\frac{1}{y^2}\right) e^{iyt}\,dt \leqslant \kappa \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^2} e^{iyt}\,dt = \frac{-i\kappa e^{iyt}}{y^3} \leqslant \frac{\kappa}{y^3},$$
следовательно сходится равномерно по признаку Вейерштрассе, а значит и $k$-я производная существует и непрерывна.

## 10.7 T9

Найдём преобразование Фурье функции $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ вида $f(x) = e^{-A(x)}$, где $A(x)$ – положительно определенная квадратичная форма.

Во-первых
$$A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} = \frac{1}{2} A_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta.$$
Тогда преобразование Фурье можно найти, как интеграл, вида
$$F[f](\boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n t}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} A_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta - i y_\alpha t^\alpha\right) = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \exp\left(-\frac{1}{2}(A^{-1})_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta\right) \equiv \frac{\exp(-A^{-1}(\boldsymbol{y}))}{\sqrt{\det A}}. \tag{10.3}$$
Докажем эту замечательную формулу.
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{2}(O\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}} A (O\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} O^{\mathrm{T}} A O \boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} D \boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\sum_\alpha \left(\sqrt{\lambda_\alpha} x^\alpha\right)\left(\sqrt{\lambda_\alpha} x_\alpha\right) = \frac{1}{2} z^\alpha z_\alpha.$$
Дифференциал можем переписать в виде
$$d^n t = \left|\frac{\partial(t_1,\ldots,t_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} d^n x\right| = |\det O| d^n x = \frac{d^n z}{\sqrt{\det A}}.$$

Также можем рассмотреть скалярное произведение:

$$(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{t}) = (O^{\mathrm{T}})_{\alpha\beta} y^\alpha x^\beta = \sum_\beta \frac{1}{\sqrt{\lambda_b}} O_{\beta\alpha} y^\alpha z^\beta = k_\beta z^\beta.$$

Итого наш первоначальный интеграл сводится к

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n z}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det A}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{z}) - i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{z})\right) = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \prod_{\alpha=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz^\alpha}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z^\alpha)^2 - ik_\alpha z^\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det A}} \prod_{\alpha=1}^n \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\right) = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \prod_{\alpha=1}^n e^{-A^{-1}(y)},$$

где воспользовались равенством

$$k_\alpha k^\alpha = \sum_\alpha \frac{1}{\lambda_\alpha} O_{\beta\alpha} (O^{\mathrm{T}})^{\alpha\gamma} y^\beta y_\gamma = (A^{-1})^\gamma_\beta y^b y)\gamma = 2A^{-1}(\boldsymbol{y}),$$

что в итоге доказывает написанную формулу

$$\boxed{F\left[e^{-A(x)}\right](\boldsymbol{y}) = \frac{\exp(-A^{-1}(\boldsymbol{y}))}{\sqrt{\det A}}}.$$

# 11 Третье задание по математическому анализу

### 14.8(2)

Рассмотрим интеграл с подвижной особенностью. В частности есть $c(\alpha) \in [a, b]$:

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \left(\int_a^{c(\alpha)} + \int_{c(\alpha)}^b\right) f(x,\alpha)\,dx.$$

В частности опишем ситуации, когда функция неограничена на нижнем и верхнем пределе:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\alpha_1(\varepsilon) \geqslant a\ \forall\xi_1 > \alpha_1(\varepsilon)\ \forall\varepsilon\in E\ \left|\int_{\xi_1}^{c(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично для нижнего предела

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\alpha_2(\varepsilon) \leqslant b\ \forall\xi_2 > \alpha_2(\varepsilon)\ \forall\varepsilon\in E\ \left|\int_{c(\alpha)}^{\xi_2} f(x,\alpha)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если взять $\Delta$ большое правильным образом, то приходим к определению вида

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta(\varepsilon) > 0\ \forall\delta_1\in(0,\Delta(\varepsilon))\ \forall\delta_2\in(0,\Delta(\varepsilon))\ \forall\alpha\in E\ \left|\int_{c(\alpha)-\delta_1}^{c(\alpha)+\delta_2} f(x,\alpha)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Теперь можем перейти к примеру:

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin(\alpha x)}{\sqrt{|x-\alpha|}}\,dx,$$

тогда, по определению,

$$\left|\int_{\alpha-\delta_1}^{\alpha+\delta_2} \frac{\sin(\alpha x)\,dx}{\sqrt{|x-\alpha|}}\right| \leqslant \int_{\alpha-\delta_1}^{\alpha+\delta_2} \frac{dx}{\sqrt{|x-\alpha|}} = \int_{\alpha-\delta_1}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{|x-\alpha|}} + \int_\alpha^{\alpha+\delta_2} \frac{dx}{\sqrt{|x-\alpha|}} = 2\sqrt{\delta_1} + 2\sqrt{\delta_2} < 4\Delta(\varepsilon),$$

в таком случае достаточно взять $\Delta(\varepsilon) = \varepsilon^2/16$.

## 11.1 Сходимость и полнота систем функций в пространствах $C$ и $L_p$

Можно построить следующую систему вложений: топологические пространства $\supset$ метрические пространства $\supset$ нормированные пространства $\supset$ предгильбертовы пространства.

**Def 11.1.** *Банахово пространство* – полное нормированое пространство.

**Def 11.2.** *Гильбертово пространство* – банахово пространство, с нормой, порожденной положительно определенным скалярным произведением $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

**Def 11.3.** *Гильбертово пространство* – ~~полное~~ нормированое пространство, с нормой, порожденной положительно определенным скалярным произведением $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Приведем некоторые примеры: пространство непрерывных функций $C[a,b]$ с нормой $\|\cdot\|_C = \|\cdot\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]}|x(t)|$. Пространство $L_p$. Пространство $C_p$, совпадающее с $C[a,b]$, но с нормой $\|\cdot\|_2$ – предгильбертово, кстати.

**T1**

Построим табличку сходимостей. Для начала вспомним, что если $\mu(A)<+\infty$ и $1\leqslant p_1<p_2\leqslant+\infty$, то
$$\|\cdot\|_{p_1}\leqslant C(\mu(A),p_1,p_2)\|\cdot\|_{p_2},\qquad C(\ldots)=(\mu(A))^{\frac{p_2-p_1}{p_1p_2}}.$$
В частности, можно перейти к пределу, и обнаружить, что
$$\|\cdot\|_1\leqslant C(\ldots)\|\cdot\|_\infty,\qquad \|\cdot\|_\infty=\lim_{p\to\infty}\|\cdot\|_p\equiv\|\cdot\|_C.$$
Таким образом из сходимости $L_2$ следует сходимость в $L_1$.

Ещё раз напишем, что значит сходимость по норме:
$$f_n\underset{L_p}{\to}f\qquad\Leftrightarrow\qquad\forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \forall n\geqslant N_\varepsilon\ \|f_n-f\|_p<\varepsilon.$$
Тогда рассмотрим
$$\|f_n-f\|_1\leqslant\sqrt{b-a}\|f_n-f\|<\varepsilon,\qquad\square.$$
Теперь докажем $f_n\underset{C}{\to}f\ \Rightarrow\ f_n\underset{L_2}{\to}f$, где сходимость по $C$-норме:
$$\forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \forall n\geqslant N_\varepsilon\ \forall x\in A\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$
Ну, действительно,
$$\|f_n-f\|_2^2=\int_A|f_n-f|^2(x)\mu(\,dx)\leqslant\int_A\left\{\sup_{x\in A}|f_n-f|(x)\right\}^2\mu(\,dx)=\left\{\sup_{x\in A}|f_n-f|(x)\right\}^2\mu(A),$$
где множитель перед $\mu(A)$ стремится к 0 при $n\to\infty$, $\quad\square$.

Также стоит вспомнить, что из равномерной сходимости следует поточечная сходимость. По определению, поточечная сходимость:
$$\forall x\in A\ \forall\varepsilon>0\ \exists N(\xi,\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n\geqslant N\ |f_n-f|(x)<\varepsilon.$$
Получается, что достаточно взять $N(x,\varepsilon)=N(\varepsilon)$ и получить искомое утверждение.

В качетсве контрпримера рассмотрим $f_n(x)=n\operatorname{arcctg}(n/x^2)$ с $A=[1,\infty)$. По отрицанию условия Коши, если
$$\exists\varepsilon_0\ \forall k\in\mathbb{N}\ \exists n\geqslant k\ \exists p\in\mathbb{N}\ \exists\tilde{x}\in A\colon\ |f_{n+p}-f_n|(\tilde{x})\geqslant\varepsilon_0,$$
то последовательность $f_n$ не явдяется равномерно сходящейся. Действительно, при $n=k$, $p=2k-2n$, $\tilde{x}=\sqrt{k}=\sqrt{n}$, верно, что
$$|f_{n+p}-f_n|(\tilde{x})=n|2\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}1|\geqslant|2\operatorname{arctg}2-\pi/4|=\varepsilon_0>0,$$
что говорит об отсутсвие равномерной сходимости. При этом $f_n\to x^2$ поточечно на $x\in E$.

**Контрпримеры**. Покажем, что $f_n\underset{L_1}{\to}f\not\Rightarrow f_n\underset{L_2}{\to}f$. Прямую мы умеем строить по двум точкам
$$\frac{f-f_0}{f_1-f_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0},$$
Построим последовательность функций вида
$$\frac{f_n-c_n}{0-c_n}=\frac{x-0}{x_n-0},\qquad f_n(x)=\begin{cases}c_n(1-\frac{x}{x_n}), & x\in[0,x_n),\\ 0, & x\in[x_n,1].\end{cases}$$
Контропримеры строим на отрезке $[0,1]$. Выберем последоательность сходящуюся к 0 в $L_1$ норме:
$$\|f_n-0\|_1=\int_0^{x_n}\left|c_n\left(1-\tfrac{x}{x_n}\right)\right|\mu(\,dx)=\frac{1}{2}c_nx_n,\qquad\|f_n-0\|_2^2=\frac{1}{3}c_n^2x_n,\qquad\Rightarrow\qquad\|f_n\|_2=\frac{1}{\sqrt{3}}c_n\sqrt{x_n}.$$
Пусть $c_nx_n=\alpha_n$ – бесконечно малая последовательность. Выберем $x_n=1/n$, тогда $c_n=n\alpha_n$.

Для $\|f_n\|_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\alpha_n}{\sqrt{x_n}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{n}\alpha_n$, что устремим к $\infty$, выбрав
$$\alpha_n=\frac{1}{n^{1/2-\xi}},\qquad\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right),\qquad\square.$$
Эту историю можно обобщить до отсутсвия следствия в $\|f_n\|_p=c_nx_n^{1/p}(1+p)^{-1/p}$. Тогда можем взять $\alpha_n=\left(n^{1-1/p-\xi}\right)^{-1}$, для $\xi\in(0,1-1/p)$.

Теперь покажем, что $f_n \underset{L_2}{\to} f \not\Rightarrow f_n \underset{C}{\to} f$. Пусть $f_n \to 0$ в $L_2$ норме. Пусть

$$\|f_n - 0\|_2 = \|f_n\| = \frac{c_n}{\sqrt{3}} x_n = \alpha_n, \qquad x_n = \frac{1}{n}.$$

Пусть $f_n$ вида

$$f_n(x) = \{\sqrt{3}\alpha_n \sqrt{n}(1 - nx), \quad x \in [0, 1/n)0, \quad x \in (1/n, 1].$$

В таком случае

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n - 0|(x) = \sup_{x\in[0,1/n]} |\sqrt{3}\alpha_n \sqrt{n}(1 - nx)| = \sqrt{3}\alpha_n\sqrt{n} \not\to 0, \qquad \alpha_n = \frac{1}{n^{1/2-\xi}}, \qquad \xi \in [0, 1/2),$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь есть поточечная сходимость но нет сходимости в $L_1$. Построим пилу, вида

$$f_n(x) = \begin{cases} c_n \frac{x_{1,n}-x}{x_{1,n}-x_n}, & x \in (x_{1,n}, x_n], \\ c_n \frac{x_{2,n}-x}{x_{2,n}-x_n}, & x \in [x_n, x_{2,n}), \\ 0, & x \in [0, x_{1,n}] \cup [x_{2,n}, 1]. \end{cases}$$

В этой задаче достаточно считать $x_{1,n} = 1/(n+1)$, а $x_{2,n} = 1/n$, тогда

$$\|f_n\|_1 = c_n \frac{x_{2,n} - x_{1,n}}{2} = \frac{c_n}{2} \frac{1}{(n+1)n} \to \infty.$$

Чтобы это сделать, достаточно выбрать $c_n = n^{2+\xi}$. Однак поточечно такой зуб пилы сходится к 0. Действительно, при $x = 0$ $f_n(0) = 0$. Для остальных $x$ можно показать, что по определению $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

**T2**

Приведем пример, когда последовательность функция $(f_n)$ сходится в пространстве $L_1[a, b]$, но для любого $x \in [a, b]$ последовательность чисел $f_n(x)$ расходится.

Из сходимости в $L_1$ следует сходимость по мере, так что можем воспользоваться *примером Рисса.* Пусть $f_n \underset{L_2}{\to} f \equiv 0$. Рассмотрим конструкцию вида

$$\varphi_{m,k}(x) = \xi \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right](x), \qquad m \in \mathbb{N}_0,$$

где $k = 0, 1 \ldots, 2^m - 1$. Утверждается, что $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists! m, k\ :\ n = 2^m + k$. Таким нетривиальным образом мы (точнее Рисс) решили дробить ступеньку. Верно, что

$$\|f_n - 0\|_1 = \int_{k/2^m}^{(k+1)/2^m} \varphi_{m,k}(x)\, dx = \frac{1}{2^m} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Однако, для $\forall x \in [0, 1]$ существует бесконечное число сленов последовательности равных 0 и 1. Таким образом поточечно последовательнсоть расходится.

**T3**

Докажем, что естественное отображение $C[a, b] \to L_1[a, b]$ не сюръективно, не забывая, что элементы $L_1$ – это не функции, а классы эквивалентности.

Достаточно выбрать функцию, вида

$$f(x) = \operatorname{sign} x,$$

которую *нельзя* изменить на множестве нулевой меры, чтобы сделать её непрерывной.

**T4**

Выясним полноты некоторых систем функций в пространстве $L_2[0, \pi/2]$. Начём с

$$\{f_n(x) = \sin[(2n - 1)x]\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

**Def 11.4.** Пусть $X$ – нормированное пространство. Система $S = \{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ называется *полной*, если $\forall x \in X$ $\forall\varepsilon > 0\ \exists\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{A}$, а также $\exists f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n} \in S$ такие, что $\|x - (\alpha_1 f_{\alpha_1} + \ldots + \alpha_n f_{\alpha_n})\|_X < \varepsilon$.

Стоит подчеркнуть, что это не определение базиса, так как $\alpha \equiv \alpha(\varepsilon)$. Это определение слабее базиса, это – приближение.

Если мы возьмём $L_2[-\pi,\pi]$, и систему вида $\{1, \sin(nx), \cos(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$, то она будет полна, более того будет являеться базисом. В рамках задачи мы интересуемся промежутком $[0,\pi/2]$.

Более того, такая система полна в $\mathring{C}[-\pi,\pi]$, $(f(-\pi)=f(\pi))$, чем мы потом воспользуемся в T5.

В смысле $L_2$ мы можем приближать, игнорируя счётное число точек:

$$\|f-\tau_n\|_2^2 = \int_0^{\pi/2} |f-\tau_n|(x)\mu(\,dx).$$

Достраивая функцию специфичным образом на отрезок $[-\pi,\pi]$ (u, d, u, d), пользуемся знанием о полноте тригонометрической системы и приходим к полной системе.

Для понимания продолжения функции с отрезка $[0,\pi/2]$, на $[-\pi,\pi]$, достаточно построить функции, образующие системы (рис. 1). И, аналогично, для $k=2$ (рис. 2).

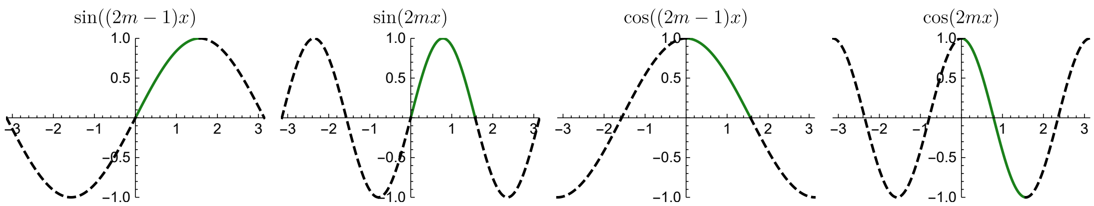


Рис. 1: Графики функция при $m=1$ для T4

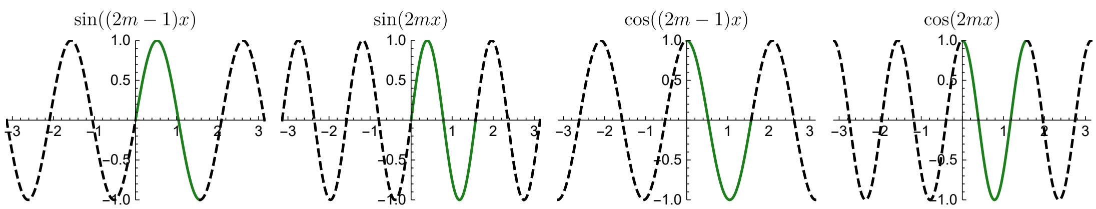


Рис. 2: Графики функция при $m=2$ для T4

### T5

Аналогично T4, рассмотрим полноту систем некоторых функция в пространстве $C[0,\pi/2]$. В частности покажем, что $\exists\tilde{x}\in C[0,\pi/2]$ и $\exists\varepsilon_0\ \forall\tau_n$. Все синусы упираются в 0, выберем $\tilde{x}(t)=1$, тогда

$$\|\tilde{x}-\tau_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,\pi/2]} |\tilde{x}(t)-\tau_n(t)| \geqslant |\tilde{x}-\tau_n| = |\tilde{x}-\tau_n|(0) = |1-0| = \varepsilon_0.$$

Получается, что ломаются все синусы и косинусы с «нечётными дугами» (достаточно взять $t=\frac{\pi}{2}$), что явно видно по построению.

Итого, единственная хорошая система, – $\cos(2k\,x)$.

### T6. Функции Эрмита

Приведем пример счетной системы фукций, полной в $L_2(\mathbb{R})$. В частности, воспользуемся функциями Эрмита:

$$\varphi_n(t) = c_n H_n(t) e^{-\frac{1}{2}t^2}, \qquad H_n(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}\frac{d^n}{dt^n}e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

Утверждается, что это базис $L_2(\mathbb{R})$, докажем это.

Есть система функций

$$\mathcal{L} = \{\varphi_n(t)\} = \{\rho(t)e^{-\frac{1}{2}t^2},\ \rho\in\mathcal{P}\}.$$

Так как $L_2$ – гильбертово пространство, то достаточно проверить замкнутость системы, то есть показать, что $\mathcal{L}^\perp = \{0\}$. По определению:

$$f\in\mathcal{L}^\perp, \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} f(t)t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = 0, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Рассмотрим преобразование Фурье:

$$F\left[f(t)e^{-\frac{1}{2}t^2}\right](y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} f(t)e^{-\frac{1}{2}t^2}, e^{-iyt} = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} f(t)e^{-\frac{1}{2}t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iyt)^n}{n!} =$$

$$\overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iy)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} f(t) \underbrace{t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}}_{=0 \text{ по условию}} = 0,$$

таким образом мы выяснили, что Фурье функции $\equiv 0$.

Далее воспользуемся тем, что $f(t)e^{-\frac{1}{2}t^2} \in L_2(\mathbb{R})$, а значит работает равенство Парсеваля:

$$\int_{\mathbb{R}} \left| f(t)e^{-\frac{1}{2}t^2} \right|^2 \frac{dt}{2\pi} = \int_{\mathbb{R}} \left| F[\ldots](y) \right|^2 dy = 0, \quad \Rightarrow \quad f(t)e^{-\frac{1}{2}t^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad f(t) = 0,$$

по крайней мере кроме множества меры нуль. Таким образом функции эрмита составляют базис в $L_2$.

### T7

Возьмём функцию, которая лежит в $L_2$, но не лежит в $\mathring{C}[-\pi, \pi]$, например, ограничение $\operatorname{sign} x$. И рассмотрим подпространство $V \subset \mathring{C}[-\pi, \pi]$, заданное ортогональностью к ней, то есть заданное формулой

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\, dx = \int_{0}^{\pi} f(x)\, dx.$$

Это $V$ есть замкнутое подпространство в $\mathring{C}[-\pi, \pi]$ и в нём можно выбрать какую-то полную систему, и даже её ортогонализовать. Если начать с тригонометрической системы, то косинусы и чётные синусы и так лежат в $V$, нечётные синусы надо будет подправить, скомбинировав их с $\sin x$, а потом ещё ортогонализовать (что может быть неприятно).

В итоге, система не может быть полна в $\mathring{C}[-\pi, \pi]$, так как её линейные комбинации не выходят за пределы $V$. А что касается замкнутости, то переходя в гильбертово $L_2$ видно, что ортогональное дополнение к замыканию образа $V$ в гильбертовом пространстве одномерно и натянуто на этот вот $\operatorname{sign} x$, который разрывен и не лежит в образе $\mathring{C}[-\pi, \pi]$. Так что замкнутость в терминах $\mathring{C}[-\pi, \pi]$ есть.

## 11.2 Банаховы пространства и их двойственные

### T8

Здесь, и далее $p(x) = \|x\|$, $q(x) = \|x\|'$. Нормы *эквивалентны*, если

$$\exists m, M \ :\ mp(x) \leqslant q(x) \leqslant Mp(x) \ \ \forall x.$$

Так вот, всегда есть $\{e_k\}_{k=1}^n$ базис Гамиля, такой что $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$, где естественно ввести норму вида

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Пусть $q(x)$ – ещё одна норма на $X$, в качестве мажоранты выберем $M = \max\limits_{i=1,\ldots,n} q(e_i)$. Теперь можем оценить сумму сверху:

$$q(x) = q\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| q(e_k) \leqslant M \cdot p(x).$$

И оценить снизу:

$$|q(x) - q(y)| \leqslant q(x - y) \leqslant M \cdot p(x - y),$$

вообще это значит, что $q$ – липшецев функционал, – непрерывный функционал на $X$ с нормой $p$, а тогда и $q(x)$ непрерывный функционал $X$ с нормой $p(x)$.

**Lem 11.5.** *Шары в пространстве компактны тогда, и только тогда, когда* $\dim X < +\infty$.

Рассмотрим сферу $S = \{x \in X \mid p(x) = 1\}$ – компакт. Но мы знаем, что непрерывный функционал на компакте достигает своего миниимума:

$$\min_{x \in S} q(x) = \min_{p(x)=1} q(x) = m > 0.$$

Тогда на сфере $S$ верно, что $q(x) \geqslant m$. Тогда в $X$ $q(x) \geqslant m \cdot p(x)$. Действительно,

$$q(tx) = |t| q(x), \quad p(tx) = |t|\, p(x), \qquad \Rightarrow \qquad q(tx) = \frac{p(tx)}{p(x)} q(x) \geqslant m\, p(tx).$$

Собственно, $mp(x) \leqslant q(x) \leqslant M \cdot p(x)$, $Q.E.D.$

### T9. Пространство $c$

Пространство состоит из некоторых бесконечномерных «векторов» (последовательностей):

$$x = \big(x(1), x(2), \ldots, x(k), \ldots\big), \qquad \left|\lim_{k\to\infty} x(k)\right| < +\infty.$$

Норма определена, как

$$p(x) = \|x\|_c = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)| = \|x\|_\infty.$$

Докажем, что это пространство является банаховым, а именно полноту по $\|\cdot\|_\infty$ норме.

Рассмотрим последовательность $x_n$, где

$$x_n = (x_n(1), \ldots, x_n(k), \ldots).$$

Глобально хотим показать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant N(\varepsilon) \;\; \forall l \in \mathbb{N} \quad \|x_{n+l} - x_n\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_{n+l}(k) - x_n(k)| < \varepsilon.$$

Попробуем через это продраться: из сходимости следует, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \;\; |x_{n+l}(k) - x_n(k)| < \varepsilon.$$

Здесь можем выделить $(x_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ – числовая фундаментальная в $\mathbb{R}$. По критерию Коши:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{n\to\infty} x_n(k) = y(k) \in \mathbb{R},$$

уставнавливается покомпонентая сходимость. Теперь рассмотрим

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_n(k) - y(k)| = \|x_n - y\|_\infty < \varepsilon,$$

что автоматически означает, что $\exists y$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = y.$$

Следующий этап – показать, что

$$\exists \lim_{k\to\infty} y(k) \in \mathbb{R},$$

то есть показать полноту пространства:

$$\begin{aligned} |y(k+q) - y(k)| &= |y(k+q) - x_n(k+q) + x_n(k+q) - x_n(k) + x_n(k) - x_n(k)| \\ &\leqslant |y(k+q) - x_n(k+q)| + |y(k) - x_n(k)| + |x_n(k+q) - x_n(k)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом мы доказали полноту пространства[4] .

### T10. Критерий Йордана-фон Неймана

Хочется понять, можно ли ввести на пространстве $C[a,b]$ скалярное произведение так, что норма пространства будет получаться из этого скадяного произведения.

**Thr 11.6** (критерий Йордана-фон Неймана)**.** *Норма $\|\circ\|_X$ порождается скалярным произведением тогда, и тоглько тогда, когда $\|\circ\|_X$ удовлетворяет правилу параллелограмма:*

$$\forall x, y \in X \quad \|x+y\|_X^2 + \|x-y\|_X^2 = 2\|x\|_X^2 + 2\|y\|_X^2.$$

Выберем $C[0,\pi/2]$, и $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$. Заметим, что

$$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1, \qquad \|x+y\|_\infty = \sqrt{2}, \qquad \|x-y\|_\infty = 1, \qquad 2+1 \neq 2+2,$$

таким образом пространство не гильбертово.

### T11. Поиск функционала

Далее будем обозначать за $\mathcal{D}(A)$ область определения оператора $A$, и $\mathcal{R}(A)$ – область значений. Оператор действует $A\colon X \mapsto Y$, где $X$ и $Y$ – линейные нормированные пространства.

[4] $c_0, c_{00}, l_\infty$ – банаховы ли? (!): $c_0$ (сходящиеся к 0), $c_{00}$ (финитные), $l_\infty$ (ограниченные).

**Def 11.7.** Говорится, что линейный оператор $A\colon X \mapsto Y$ *непрерывен* а точка $x \in \mathcal{D}(A)$, если $\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}(A)$, сходящейся к $x$ в $X$, $Ax_n \to Ax$ в $Y$. Оператор *глобально непрерывен*, если он непрерывен $\forall x \in \mathcal{D}(A)$.

**Lem 11.8.** *Для того, чтобы линейный оператор $A$ был непрерывен на всей $\mathcal{D}(A)$, необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен в нуле.*

**Def 11.9.** Линейный оператор $A\colon X \mapsto Y$ называется *ограниченным*, если $\exists C > 0\colon \|Ax\|_Y \leqslant C \cdot \|x\|_X \ \forall x \in \mathcal{D}(A)$. Наименьшее из чисел $C$ называется *нормой* оператора $A$ и обозначается $\|A\|$.

**Lem 11.10.** *Для того, чтобы линейный оператор был ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы он переводил всякое ограниченное в $X$ множество, в ограниченное в $Y$.*

**Thr 11.11.** *Оператор $A$ непрерывен тогда, и только тогда, когда он ограничен.*

**Thr 11.12** (о норме линейного оператора)**.** *Верно, что*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Найдём норму функционала

$$A\colon f \mapsto \sum_{k=0}^{N} (-1)^k f\left(\frac{k}{N}\right),$$

на пространстве $C[0,1]$.

Вообще нормированным пространством мы называем пару вида $(X, \|\circ\|_X)$. И пусть есть некоторый непрерывный ограниченный оператор из $X$ в $Y$. Если $Y = \mathbb{C}(\mathbb{R})$,

$$A = F\colon X \to \mathbb{C}(\mathbb{R}),$$

то $A$ называют *функционалом*. Выберем в качетсве $X = C[0,1]$, а в качетсве $F\colon C[0,1] \mapsto \mathbb{C}(\mathbb{R})$. Функционал вида

$$F[f] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Что есть норма функционала? Норма функционала есть

$$\|F\| = \sup_{\|f\|_\infty \leqslant 1} |F[f]| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |F[f]| = \inf\{L > 0 \mid |F[f]| \leqslant L\|f\|_\infty\}, \qquad \forall f \in C[0,1].$$

`Глобально, это доказывается, например, в Константинове очень подробно.`

`Всегда легко сверху ограничить.` Тривиальный шаг:

$$|F[f]| = \left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = (n+1)\cdot \|f\|_\infty.$$

Продолжаем,

$$\frac{|F[f]|}{\|f\|_\infty} \leqslant n+1, \qquad \Rightarrow \qquad \|F\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |F[f]| \leqslant n+1.$$

Теперь выберем функцию $f_s(x) = f(k/n) = (-1)^k$. На ней мы действительно достигаем супремум, тогда

$$\|F\| = |F[f_s]| = n+1.$$

Таким образом нашли норму оператора.

В более общем случае можем показать, что

$$F[f] = \sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k), \qquad |F[f]| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |c_k| \cdot \|f\|_\infty, \qquad \Rightarrow \qquad \|F\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

Далее, определив схожим образом непрерывную функцию $\tilde{f}$, равную $\operatorname{sign} c_k$ в $t = t_k$ увидим, что $\|\tilde{f}\| = 1$,

$$\|F[\tilde{f}]\| \geqslant |F[\tilde{f}]| = \sum_{k=1}^{n} |c_k|,$$

таким образом решили чуть более общую задачу.

### T12

Пусть функция $g$ непрерывна на $[a,b]$. Найдём норму линейного отображения $M_g\colon L_2[a,b] \mapsto L_2[a,b]$, где $A_g(f) = [f]$ – мультипликативный оператор. Здесь $X = Y = L_2[a,b]$.

По опредению, норма оператора $\|A_g\| = \sup_{\|f\|_X=1} \|A_g[f]\|_Y$. Аналогично, ищем ограничение сверху:

$$\|A_g[f]\|_2^2 = \|gf\|_2^2 = \int_{[a,b]} |gf|^2(x)\mu(\,dx) \leqslant \int_{[a,b]} \left\{ \sup_{x\in[a,b]} |g(x)| \right\}^2 |f(x)|^2\mu(\,dx).$$

Вынесенный супремум позволит записать:

$$\|A_g[f]\|_2^2 \leqslant \|g\|_\infty^2 \|f\|_2^2, \qquad \Rightarrow \qquad \|A_g\| = \sup_{\|f\|_2=1} \|A_g[f]\|_2 \leqslant \|g\|_\infty.$$

Далее покажем, что норма не достигается, но сколь угодно близко приближается.

Есть функция

$$\sup_{x\in[a,b]} |g(x)| = |g(c)|,$$

есть некоторая $f_\varepsilon \in L_2[a,b]$ вида

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_\varepsilon, & x \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon], \\ 0, & x \notin [c-\varepsilon, c+\varepsilon], \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \|f_\varepsilon\|_2^2 = \int_{[c-\varepsilon,c+\varepsilon]} \alpha_\varepsilon^2 \mu(dx) = \alpha_\varepsilon^2 \cdot 2\varepsilon = 1, \qquad \alpha_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}.$$

В таком случае рассмотрим

$$\|A_g[f_\varepsilon]\|_2^2 = \|gf_\varepsilon\|_2^2 = \alpha_\varepsilon^2 \int_{[c-\varepsilon,c+\varepsilon]} |g(x)|^2\mu(dx) = \alpha_\varepsilon^2 \cdot 2\varepsilon |g(x_{c,\varepsilon})|^2 \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \|g\|_\infty^2,$$

в силу непрерывности $g$, по теореме о среднем.

Можно пойти другим путем, по определению:

$$\forall \varepsilon \in (0, \|g\|_\infty), \qquad \exists x_\varepsilon \subseteq [a,b] \ g(x) \geqslant \|g\|_\infty - \varepsilon,$$

почти всюду на $X_\varepsilon$. Выберем $h(x)$ вида

$$h(x) = \operatorname{sign} g(x) \ \chi_{X_\varepsilon}(x), \qquad \|h_\varepsilon\|_1 = \|h_\varepsilon\|_2 = \mu(X_\varepsilon),$$

тогда верно, что

$$\|A_g\| \geqslant \|A_g[h_\varepsilon]\|_1 \cdot \|h_\varepsilon\|_1 = \int_{[a,b]} |g(x)| \chi_{X_\varepsilon}(x)\mu(\,dx) \geqslant (\|g\|_\infty - \varepsilon)\, \chi\mu(X_\varepsilon), \qquad \Rightarrow \qquad \|A_g\| = \|g\|_\infty.$$

Аналогично в $L_2$:

$$\|A_g\|^2 \geqslant \||g|\chi_{X_\varepsilon}\|_2^2 \cdot \|h_\varepsilon\|_2^2 \geqslant \|g\|_\infty^2 \mu^2(X_\varepsilon),$$

что приводит такому же результату.

## T13

Сначала найдём норму оператора $F$, откуда уже получим значение нормы для $J$, где

$$F[f] = \int_a^b g(t)f(t)\,dt, \qquad J[f] = \int_a^b K(x,y)f(y)\,dy,$$

где $g \in C[a,b]$, а $F,\ J$ – линейные функционалы на $C[a,b]$.

**Первая часть**. Функционал $F$ ограничен в силу

$$|F[f]| \leqslant \int_a^b |g(t)|f(t)|\,dt \leqslant \|f\|_\infty \cdot \int_a^b |g(t)|\,dt.$$

Далее выберем произвольное $\varepsilon > 0$. По *теореме Кантора* найдётся такое разбиение отрезка $[a,b]$ точками $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, что колебание $\omega_i(g)$ функции $g$ на $i$-ом отрезке $\Delta_i = [t_{i-1}, t_i]$ удовлетворяет неравенствам

$$\omega_i(g) < \varepsilon, \qquad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Разобьём все $\Delta_i$ на две группы. В первую группу отнесем те отрезки, на которых $g$ сохраняет знак. Пусть это будут отрезки $\Delta_1', \ldots, \Delta_r'$. Вторую группу $\Delta_1'', \ldots, \Delta_s''$ образуют отрезки, на которых $g$ меняется знак. В каждом промежутке второго типа существует точка, в которой $g$ обращается в нуль. Ввиду установленных неравенств там $|g(t)| < \varepsilon$.

На промежутках первого типа положим $\tilde{f}(t) = \operatorname{sign} g(t)$, в остальных точках $\tilde{f}(t)$ – линейная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству $|\tilde{f}| \leqslant 1$. Тогда $\|\tilde{f}\| = 1$, и

$$\|F\| = \sup_{\|f\|=1} |F[f]| \geqslant |F[\tilde{f}]| = \left| \int_a^b g(t)\tilde{f}(t)\,dt \right| = \left| \sum_{k=1}^{r} \int_{\Delta'_k} |g(t)|\,dt + \sum_{i=1}^{s} \int_{\Delta''_i} g(t)\tilde{f}(t)\,dt \right| \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{r} \int_{\Delta'_k} |g(t)|\,dt - \sum_{i=1}^{s} \int_{\Delta''_i} = \int_a^b |g(t)|\,dt - 2\sum_{i=1}^{s} \int_{\Delta''_i} |g(t)|\,dt \geqslant \int_a^b |g(t)|\,dt - 2\varepsilon \cdot \mu[a,b],$$

что ввиду произвольности $\varepsilon$ означает, что $\|F\| \geqslant \int_a^b |g(t)|\,dt$, что вместе со знанием супремума позволяет утверждать: $\|f\| = \int_a^b |g(t)|\,dt$.

**Вторая часть**. Переходим к поиску нормы $J$:

$$\|J[f]\| = \sup_{t\in[a,b]} \left| \int_a^b K(t,s)f(s)\,ds \right| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)| \cdot |f(s)|\,ds \leqslant \|f\| \cdot \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,ds,$$

таким образом, по определению

$$\|J\| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,ds \overset{\text{def}}{=} M.$$

Так как ядро $K$ непрерывно, то непрерывен и интеграл $\int_a^b |K|\,ds$, поэтому $\exists t_0 \in [a,b]$ такой, что $M = \int_a^b |K(t_0,s)|\,ds$.

Как было показано в первой части, $q(x) = \int_a^b |K(t_0,s)| f(s)\,ds$ – линейный непрерывный функционал на $C[a,b]$ с нормой равной $M$. Таким образом, выбирая $\tilde{f}$ так, чтобы $\operatorname{sign} \tilde{f(s)} = \operatorname{sign} K(t_0,s)$ может утверждать, что супремум достигается, и

$$\|J\| = M = \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,ds.$$

**Thr 11.13** (Теоремма Бэра для открытых множеств)**.** *Счётное семейство открытых всюду плотных подмножеств банахова пространства имеет непустое пересечение.*

**Thr 11.14** (Теорема Бэра для замкнутых множеств)**.** *Если банахово пространство $E$ покрыто счётным семейством замкнутых множеств, то одно из них имеет непустую внутренность.*

### T14

Докажем, что алгебраический базис бесконечномерного банахова пространства не может быть счётным.

Вводился алгебраический базис Гамиля $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$, где $\forall x \in E$ представляется в виде $x\ \sum_{k=1}^n x_k e_{\alpha_k}$. Получается, что нужно показать, что в бесконечномерном банаховом пространстве такой базис не может быть счётным: докажем от противного.

Пусть $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, тогда пространство описывется, как

$$E_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \mid x_1,\ldots,x_k \in \mathbb{R} \right\} = \langle E_1,\ldots,e_n \rangle, \qquad \Rightarrow \qquad E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

Но по теореме Бэра для замкнутых множеств $E$ не может быть счётным объединением нигде не плотных множеств.

Точнее, это было бы возможно, только с случае непустой внутренности одного из пространств $E_n$, что невозможно.

### T15

Приведем пример плотного в $X = C[a,b]$ банахова пространства, со счётным базисом.

По теореме Вейерштрассе система степеней $A$ полна в $C[a,b]$, что равносильно тому, что линейная оболочка системы степеней $A$ плотна на $C[a,b]$. Таким образом, $A$ со счётным базисом, является ответом на задачу.

**Def 11.15.** Последовательность элементов $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется *базисом* в пространстве[5] $X$, если $\forall x \in X$ существует единственный набор $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ таких, что сумма вида (не конечная не при каком $n$)

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists! \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}\ \forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}_0\ \forall n \geqslant N_\varepsilon\ \|x - \sum_{k=0}^{n} x_k e_k\|_X = \|x - S_n\| < \varepsilon.$$

[5]Если линейное нормированное пространство имеет не более, чем счётный базис, то оно сепарабельно. Однако существуют сепарабельные банаховы пространства без базиса.

**Thr 11.16** (Теорема Банаха-Штейнгауза для линейных функционалов). *Пусть семейство линейный функционалов $Y \subset E'$ ограничено в любой точке банахова пространства $E$, то есть для любого $x \in E$ множество чисел $\{\lambda(x) \mid \lambda \in Y\}$ ограничено. Тогда $Y$ ограничено в смысле нормы в $E'$.*

### T16

**Thr 11.17** (Расходимость ряда Фурье в точке). *Существует непрерывная $2\pi$-периодическая функция, ряд Фурье которой расходится в точке 0.*

$\triangle$. На пространстве $\dot{C}[-\pi,\pi]$ непрерывных $2\pi$ -периодических функций с нормой $\|\cdot\|_C$ определим линейный функционал

$$\lambda_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t)\,dt,$$

это значение $n$-й частичной суммы ряда Фурье в точке 0, $T_n(f,0)$. Можно заметить по определению нормы, что его норма равна

$$\|\lambda_n\| = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt.$$

Оценим интеграл модуля ядра Дирихле стандартным способом:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(n+1/2)x|}{2\pi|\sin x/2|}\,dx \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(n+1/2)x|}{\pi|x|}\,dx = \int_{-\pi(1+1/2)}^{\pi(1+1/2)} \frac{|\sin u|}{\pi|u|}\,du \geqslant$$
$$\geqslant \int_{-\pi(1+1/2)}^{\pi(1+1/2)} \frac{\sin^2 u}{\pi|u|}\,du = \int_{-\pi(1+1/2)}^{\pi(1+1/2)} \frac{1-\cos 2u}{2\pi|u|}\,du \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos 2u}{2\pi|u|}\,du = +\infty, \qquad n \to \infty.$$

Получается, то нормы функционалов $\lambda_n$ при $n \to \infty$ не являются ограниченными. Следовательно, по теореме Банаха-Штейгауза, примененной в обратную сторону, для некоторой функции $f \in \dot{C}[-\pi,\pi]$ значения $\lambda_n(f) = T_n(f,0)$ не будут ограничены, и, следоватеьно, расходятся при $n \to \infty$.

$\square$

### T17

Для последовательностей

$$x = (x(1), \ldots, x(k), \ldots),$$

рассмотрим пространство вида

$$l_p = \{x \mid \|x\|_p \in \mathbb{R}\}, \qquad \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p\right)^{1/p}.$$

Возьмём пространство $l_p$ как множество, но добавим норму из пространства $l_q$, где $\infty > q > p$. Покажем, что в таком «дырявом» пространстве не выполняется теорема Бэра и принцип равномерной ограниченности.

Рассмотрим шар $A_n$ вида

$$A_n = \{x \in l_p \mid \|x\|_p \leqslant n\}, \qquad l_p = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Докажем от противного, что $A_n$ нигде не плотно.

Пусть существует такой $R > 0$ и $x_0 \in A_n \colon B_R(x_0) \subset \operatorname{cl} A_n = A_n$.

$$\forall x \in l_p\colon \quad \rho_q(x,x_0) < R, \quad \Rightarrow \quad x \in A_n \quad \Rightarrow \quad \|x\|_p \leqslant n.$$

Рассмотрим некоторую последовательность

$$z(k) = \frac{R}{2} \frac{1}{\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^{q/p}}} \frac{1}{k^{1/p}}.$$

Для начала,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (z(k))^q\right)^{1/q} = \|z\|_q = \frac{R}{2} < +\infty.$$

Далее, видим гармонический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z(k))^p = +\infty, \quad \Rightarrow \quad \exists N\colon \sum_{k=1}^{N} (z(k))^p > (2n)^p.$$

Теперь рассмотрим набор «частниных последовательностей»

$$y(k) = \{z(k), \quad k \leqslant N, 0, \quad k > N.$$

Теперь рассмотрим последовательность $h(k) = (x_0 + y)(k)$, для которой верно, что

1. $\rho_q(h, x_0) = \|y\|_q \leqslant R/2$, откуда следует $\|h\|_p \leqslant n$.
2. $\|h\|_p \geqslant \|y\|_p - \|x_0\|_p > 2n - n = n$, а тогда $\|h\|_p > n$, таким образом пришли к противоречию.

Полное пространство нельзя представить, как объединение нигде не плотных множеств, получается $l_p$ не полно. Осталось доказать, что $A_n$ замкнуто.

Пусть $t$ – точка прикосновения. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ найдётся

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in A_n \colon \rho_q(t, x_\varepsilon) < \varepsilon, \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{N} |t(k) - x_\varepsilon(k)|^q < \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad |t(k) - x_\varepsilon(k)| < \varepsilon^{1/q},$$

получается это правда и для

$$\Rightarrow \quad \forall N \in \mathbb{N} \left( \sum_{k=1}^{N} |t(k)|^p \right)^{1/p} \leqslant t(k) - x_\varepsilon(k) + x_\varepsilon(k) \leqslant \left( \sum_{k=1}^{N} |t(k) - x_\varepsilon(k)|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^{N} |x_\varepsilon(k)|^p \right)^{1/p} \leqslant \left( N \varepsilon^{p/q} \right)^{1/p} + n,$$

что стремится к $n$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом $\|t\|_p \leqslant n$.

И, наконец, докажем, что не выполняеся принцип равномерной ограниченности. Рассмотрим функционалы

$$F_n[x] = \sum_{k=1}^{n} x(k).$$

Верно, что

$$\forall x \in l_1 \quad |F_n[x]| \leqslant \|x\|_1.$$

По норме $\| \circ \|_2$ верно, что эти функционалы можно переписать в виде скалярного произведения $(x, e_n)$, где $e_n = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$:

$$F_n[x] = (x, e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{(k)} (e_n)_{(k)} = \sum_{k=1}^{n} x(k),$$

что является проявлением одной из теорем Рисса. Положив $x = e_n$ видим, что норма достигается и $\|F_n\| = n \to \infty$ при $n \to \infty$. Таким образом мы показали, что на таком пространстве не работает принцип равномерной сходимости.

### T18

Докажем, что в бесконечномерном банаховом пространстве $E$ единичный шар не является компактным.

**Lem 11.18** (Лемма Рисса или лемма о перпендикуляре)**.** *Если $X_0$ – замкнутое линейное подпространство в нормированом пространстве $X$, $X_0 \neq X$, тогда*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists x_\varepsilon \in X \colon \|x_\varepsilon\| = 1, \qquad \|x_\varepsilon - y\| \geqslant 1 - \varepsilon \quad \forall y \in X_0.$$

$\triangle$. Найдётся $z \in X \backslash X_0$, положим $\delta = \inf\{\|z - u\| \mid y \in X_0\} > 0$. Тогда выберем

$$\varepsilon_0 > 0 \colon \frac{\delta}{\delta + \varepsilon_0} > 1 - \varepsilon,$$

выберем $y_0 \in X_0$ такой, что $\|z - y_0\| < \delta + \varepsilon_0$.

Далее, считая

$$x_\varepsilon = \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|}, \quad \forall y \in X_0.$$

Теперь оценим

$$\|x_\varepsilon - y\| = \frac{1}{\|z - y_0\|} \|z - y_0 - \|z - y_0\| y\| \geqslant \frac{\delta}{\delta + \varepsilon_0} > 1 - \varepsilon.$$

Заметим, что

$$v = y_0 + \|z - y_0\| y \in X_0, \qquad \Rightarrow \qquad \|z - v\| \geqslant \delta.$$

$\square$

**Con 11.19.** *В $\forall X$ (бесконеномерном, нормированном пространстве) $\exists (x_n) \colon \|x_n\| = 1$ и $\|x_n - x_k\| \geqslant 1$, $n \neq k$. Как следставие все шары $R > 0$ в $X$ некомпактны.*

$\triangle$. Всякое бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку. Последовательность $x_n$ строится по индукции с помошью леммы Рисса.

$\square$

**Thr 11.20** (Теорема Хана-Банаха)**.** *Пусть $E$ – банахово пространтво, $F \subset E$ – его линейное подпространство. Тогда всякий ограниченный линейный функционал $\lambda \in \mathbb{F}'$ продолжается до линейногофункционала на всём $E$ без увеличения его нормы.*

**Con 11.21.** *Для всякого банахова пространства $E$ и его ненулевого элемента $x \in E$ найдётся $\lambda \in E'$, такой что $\|\lambda\| = 1$ и $\lambda[x] = \|x\|$.*

**Con 11.22.** *Естественное отображение банахова пространства в двойственное к его двойственному (второе двойственное)*

$$E \mapsto E'', \qquad x \mapsto (\lambda \mapsto \lambda(x))$$

*является вложением, сохраняющим норму.*

**Thr 11.23** (Теорема Радона-Никодима в $\mathbb{R}^n$)**.** *Пусть неотрицательная конечная борелевская мера $\mu$ на $\mathbb{R}^n$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Тогда у меры $\nu$ есть плотность, то есть борелевская $f \geqslant 0$, такая что для всякого борелевского $X$ $\nu(X) = \int_X f(x)\,dx$.*

**T19**

Выведем из теоремы Хана-Банаха, что всякое конечномерное подпространство $V$ в банаховом постранстве $E$ имеет замкнутое дополнение $W \subseteq E$, такое что $E = V \oplus W$.

**Thr 11.24.** *Для всякого ненулевого элемента $x$ нормированного пространства $X$ найдётся такой функционал $l$, что $\|l\| = 1$ и $l[f] = \|f\|$.*

$\triangle$. На одномерном пространствеЮ порожденном $x$Ю положим $l_0(tx) = t\|x\|$. Тогда $l_0(x) = \|x\|$ и $\|l_0\| =1$. Остается продолжить $l$ на $x$ с сохранением нормы. $\square$

Из этой теоремы можно получить, что в случае бесконечномерного пространства $X$ для всякого $n$ найдутся такие векторы $x_1, \ldots, x_n \in X$ и функционалы $l_1, \ldots, l_n \in X^*$, что $l_i(x_j) = \delta_{ij}$. В частности поэтому, сопряженное пространство тоже бесконечномерно.

**Con 11.25.** *Пусть $X_0$ – конечномерное подпростанство нормированного пространства $X$. Тогда $X_0$ топологически дополняемо в $X$, т.е. существует такое замкнутое линейное подпространство $X_1$, что $X$ является прямой алгебраической суммой $X_0$ и $X_1$, а естественные алгебраические проекции $P_0$ и $P_1$ на $X_0$ и $X_1$ непрерыны.*

$\triangle$. *Можно* найти базис $x_1, \ldots, x_n$ пространства $X_0$ и элементы $l_i \in X^*$ с $l_i(x_j) = \delta_{ij}$. Положим

$$X_1 \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} l_i, \qquad P_0[x] \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} l_i(x) x_i, \qquad P_1[x] \overset{\text{def}}{=} x - P_0 x.$$

Для всякого $j$ имеем $P_0[x_j] - l_j(x_j)x_j = x_j$. В таком контексте становится понятно, что $P_0|_{X_1} = 0$, и $X_0 \cap X_1 = \{0\}$, $X = X_) \oplus X_1$, ибо $x - P_0 x \in X_1$ ввиду равенств $l_j(x - P_0 x) = l_j(x) - l_j(x) l_j(x_j) = 0$. Непрерывность $P_0$ и $P_1$ понятна из опредления, более того сопадают с алгебраическими проектированиями на $X_0$ и $X_1$. $\square$

**T20**

Приведем пример замкнутого в топологии нормы множества $X \subset E'$ (двойственное к некоторому банахову пространству), которое не замкнутое в его *-слабой топологии.

Ответ – *сфера*, докажем это. Покажем, что для $X \subset E'$ $\operatorname{cl} X = X$ и $w.\operatorname{cl} X \neq X$. Что есть сфера? Сфера есть

$$S = \{f \in E' \mid \|f\| = 1\}, \qquad \operatorname{cl} S = S, \qquad w.\operatorname{cl} S = \bar{B}, \qquad \bar{B} = \{F \in E' \mid \|f\| \leqslant 1\}.$$

Введём дополнение $S_C \overset{\text{def}}{=} E \backslash S$, и покажем, что оно открыто.

Выберем $g \in S_c$ с $\|g\| < 1$ и $\varepsilon = 1 - \|g\| > 0$. Пусть $h \in B_\varepsilon(g)$, более того

$$\|h\| = \|g + h - g\| \leqslant \|g\| + \|h - g\| < 1, \qquad \Rightarrow \qquad B_\varepsilon(g) \subseteq S_c.$$

Далее, пусть $g \in S_c$ и $\|g\| > 1$, тогда $\varepsilon = \|g\| - 1 > 0$. Выберем $h \in B_\varepsilon(g)$, тогда

$$\|g\| = \|h + g - h\| \leqslant \|h\| + \|g - h\|, \qquad \Rightarrow \qquad \|h\| \geqslant \|g\| - (\|g\| - 1) = 1,$$

получается $\|h\| > 1$ и $B_\varepsilon(g) \subseteq S_c$. Таким образом $S_c$ открыто, $S$ замкнуто.

Докажем теперь, что $w.\operatorname{cl} S = \bar{B}$. Во-первых $\forall g_0 \notin B$ верно, что

$$\|g_0\| > 1, \quad \exists x_0 \in E,\ \exists \varepsilon_0 > 0\ \forall g \in U_{x_0,g_0,\varepsilon_0} \quad \|g\| > 1, \quad \Rightarrow \quad w.\operatorname{cl} S \subseteq B.$$

В чатсности, покажем, что

$$\|g\| \geqslant |g[x_0]| = |g[x_0] - g_0[x_0] + g_0[x_0]| \geqslant |g_0[x_0]| - |g[x_0] - g_0[x_0]|,$$

что уже можно сделать строго больше:

$$\|g\| > |g_0[x_0]| - \varepsilon_0 = 1,$$

где $\varepsilon_0 = |g_0[x_0]| - 1$.

Пусть теперь $\forall$ фиксированного $g_0 \in \bar{B}$ с $\|g_0\| < 1$. Тогда

$$\exists U(g_0)\colon g_0 \in \bigcap_{k=1}^{N} U_{x_k,g_k,\varepsilon_k} \subset U(g_0).$$

Утверждается, что существует ненулевой $g$ такой, что $\forall t \in \mathbb{R}$ с $g_0 + tg \in U(g_0)$.

Осталось построить цилиндрическое множество по которому «прогуляемся» до нужной нам области. Пусть

$$\varphi(t) = \|g_0 + tg\| \in C(\mathbb{R}), \qquad |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leqslant |t_1 - t_2| \cdot \|g\|.$$

Понятно, что $\varphi(0) = \|g_0\| < 1$. Тогда $\varphi(t) \geqslant |t| \cdot \|g\| - \|g\|_0 \to \infty$ при $t \to \infty$. По теореме о промежуточных значениях непрерывной функции

$$\exists t_0 \in \mathbb{R}\colon \varphi(t_0) = 1, \quad \Rightarrow \quad g_0 + t_0 g \in S.$$

Получается, что взяв точку из шара, и взяв её слабую окрестность, мы находим непустое пересечение этой окрестности со сферой. Из этого следует, что $g_0 \in w.\operatorname{cl} S$, а тогда и $\bar{B} \subseteq w.\operatorname{cl} S$, которое содержится в замкнутом шаре. Вывод: $\bar{B} = w.\operatorname{cl} S$.

### T21

Докажем, что $*$-слабой топологии $E'$ компактность некоторого множества влечет его замкнутость.

**Lem 11.26.** *Слабая топология хаусдорфова.*

Пусть $K$ – компакт в ХТП $X$. Пусть $x \in X \backslash K$. Для $\forall y \in K$ $\exists U_y$, $V_y$ (открытые) такие, что $U_y \cap V_y = \varnothing$, где $x \in U_y$ и $y \in V_y$.

Рассмотрим систему $S = \{V_y \mid y \in K\}$ – открытое покрытие компакта $K$. Также $S_0 = \{V_y \mid y \in F\}$, $F$ – конечное подмножество $K$ (т.к. $K$ – компакт).

Рассмотрим множество $U = \cap_{y\in F} U_y$ – открытая окрестность точки $x$. Утверждается, что $U \cap K = \varnothing$. Перебирая все точки $x \in K$ получаем доказательство исходного утверждения.

### T22

Хочется найти такое топологическое пространство, в котором есть компактные, но не замкнутые подмножества. В качестве такого ~~хаусдорфова~~ топологического пространства можем выбрать $X = \{a, b\}$, базой топологии $\tau = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$.

Пример выглядит искуственным, но, на мой взгляд, большинство примеров нехаумдорфовых пространств выглядят очень искуственно.

## 11.3 Распредления (обобщенные функции)

Работать будем с $\mathcal{D}(X) \overset{\text{def}}{=} C_0^\infty(X)$, $X \subseteq \mathbb{R}$. Функция называется *финитной*, если $\operatorname{supp}\varphi = K \subset X$,

$$\operatorname{supp}\varphi \overset{\text{def}}{=} \bar{Y}, \qquad Y = \{x \in X \mid \varphi(x) \neq 0\}.$$

Далее будем считать $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \equiv \mathcal{D}$.

Вспомним, что $\varphi_n \overset{\mathcal{D}'}{\to} \varphi$ означает $\exists [a, b] \supset \operatorname{supp}\varphi_n$ и $\operatorname{supp}\varphi$, а также $\varphi_n^{(k)} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi^{(k)}$, и тогда пишут, что $\lim_{n\to\infty}\varphi_n \overset{\mathcal{D}}{=} \varphi$.

Хочется определить пространство линейный непрерывных функционалов. Далее, договоримся обозначать $f(\varphi) \equiv f[\varphi] \overset{\text{def}}{=} \langle f \mid \varphi\rangle$.

**Def 11.27.** Функционал $f\colon \mathcal{D} \mapsto \mathbb{C}(\mathbb{R})$ *непрерывен* в $\mathcal{D}'$, если

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n \overset{\mathcal{D}}{=} \varphi, \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\langle f \mid \varphi_n\rangle = \langle f \mid \varphi\rangle.$$

**Def 11.28.** Всякий линейный функционал из $\mathcal{D}'$ называют *обобщенной функцией* на $\mathcal{D}$.

Каждая локально-интегрируемая функция порождает некоторую обобщенную, их назовём *регулярными*. Если не существует такой локально-интегрируемой функции в $D$ для функционала из $\mathcal{D}'$, то это *сингулярная обобщенная функция*. Стоит заметить, что регулярные обобщенные функции плотны в $\mathcal{D}'$, а их пополнением являются сингулярные.

Например, $\delta(x)$ можно представить как предел РОФ, где под пределом имеется ввиду

$$f_n \overset{\mathcal{D}'}{\to} f \qquad (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}',\ f \sin \mathcal{D}', \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \lim_{n\to\infty} \langle f_n \,|\, \varphi\rangle = \langle f \,|\, \varphi\rangle,$$

в частности тогда пишут

$$\lim_{n\to\infty} f_n \overset{\mathcal{D}'}{=} f \qquad \Leftrightarrow \qquad *w.\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

**T23**

Найдём пределы последовательностей регулярныъ элементов пространства $\mathcal{D}'$, при

$$\lim_{n\to\infty} \langle \cos(nx) \,|\, \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(nx)\varphi(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{inx}\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} \hat{\varphi}(n) = \langle 0 \,|\, \varphi\rangle \overset{\mathcal{D}'}{=} 0.$$

По той же причине

$$*w.\lim_{n\to\infty} n\sin(nx) - 0.$$

Найдём некоторые пределы в терминах обобщенных функций. В частности,

$$*w\lim_{a\to+0} \frac{a}{\pi(a^2+x^2)} = *w\lim_{\mathcal{B}_a} \frac{a}{\pi(a^2+x^2)},$$

где $\mathcal{B}_a$ – база, состоящяя из всех последовательностей, стремящихся к 0. В частности, при $a = 1/n$, перейдём к T24(a). Прямым вычислением, находим

$$\left\langle \frac{a}{\pi(a^2+x^2)} \,\middle|\, \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\varphi(x)}{\pi(a^2+x^2)}\, dx = \left( \lim_{\Lambda_+\to+\infty} \int_0^{\Lambda_+} + \lim_{\Lambda_+\to-\infty} \int_{\Lambda_-}^0 \right) \frac{a\varphi(x)}{\pi(a^2+x^2)}\, dx,$$

что интегрируя по частям можем свести к $\operatorname{arctg} x$:

$$\frac{1}{\pi} \lim_{\Lambda_+\to+\infty} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\varphi(x)\Big|_0^{\Lambda_+} - \int_0^{\Lambda_+} \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) \varphi'(x)\, dx \right\} + \frac{1}{\pi} \lim_{\Lambda_-\to-\infty} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\varphi(x)\Big|_{\Lambda_-}^0 - \int_{\Lambda_-}^0 \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) \varphi'(x)\, dx \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\varphi(x)\Big|_0^\infty + \frac{1}{2}\varphi(x)\Big|_{-\infty}^0 = \varphi(0) = \langle \delta(x) \,|\, \varphi\rangle,$$

таким образом мы нашли, что

$$\left\langle \frac{a}{\pi(a^2+x^2)} \,\middle|\, \varphi \right\rangle = \langle \delta(x) \,|\, \varphi\rangle.$$

Второй пункт сводится к интегрированию

$$\frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{1}{t}\sin\frac{t}{a}\, dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{x/a} \frac{d\sin y}{dy}\, dy = \frac{1}{\pi}\operatorname{Si}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Вспоминая, что

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{Si}(+\infty) = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{\pi}\operatorname{Si}(-\infty) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right), \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x} \overset{\mathcal{D}'}{=} \delta(x).$$

**T25**

Теперь найдём предел вида

$$*w.\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 x}{(1+n^2x^2)^2} = *w.\lim_{a\to+0} \frac{xa}{(x^2+a^2)^2} = F,$$

для этого

$$\left\langle \frac{xa}{(x^2+a^2)^2} \,\middle|\, \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xa}{(x^2+a^2)^2}\varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{a}{x^2+a^2}\right)\varphi(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\varphi'(x)}{x^2+a^2}\, dx \underset{a\to+0}{\to} \frac{\pi}{2}\varphi'(0),$$

что, учитывая предыдущую задачу, позволяет записать

$$\frac{\pi}{2}\langle \delta(x) \,|\, \varphi'\rangle = \left\langle \left(-\frac{\pi}{2}\right)\delta'(x) \,\middle|\, \varphi \right\rangle, \qquad \Rightarrow \qquad w.\lim_{a\to+0} \frac{xa}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{\pi}{2}\delta'(x),$$

### T26

Алгоритмично, обработаем выражение
$$\langle d \,|\, \varphi\rangle = \langle g\cdot\delta \,|\, \varphi\rangle = \langle \delta \,|\, g\cdot\varphi\rangle = g(0)\varphi(0) = \langle g(0_\delta) \,|\, \varphi\rangle,$$
так приходим к упрощенному выражению вида
$$g(x)\delta(x) \overset{\mathcal{D}'}{=} g(0)\delta(x).$$
Во втором пункте $f = g\delta'$, упростим выражение
$$\begin{aligned}\langle f \,|\, \varphi\rangle = \langle g\delta' \,|\, \varphi\rangle = \langle \delta' \,|\, g\varphi\rangle = -\langle \delta \,|\, (g\varphi)'\rangle = -\langle \delta \,|\, g'\varphi + g\varphi'\rangle = \\ = -g'(0)\varphi(0) - g(0)\varphi'(0) = -g'(0)\langle\delta \,|\, \varphi\rangle - g(0)\langle \delta \,|\, \varphi'\rangle = \langle g(0)\delta' - g'(0)\delta \,|\, \rangle,\end{aligned}$$
таким образом приходим к равенству в $\mathcal{D}'$:
$$g(x)\delta'(x) \overset{\mathcal{D}'}{=} -g'(0)\delta(x) + g(0)\delta'(x).$$

### T27

**Lem 11.29.** *В $\mathcal{D}'$ верно, что*
$$(g\cdot f)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k g^{(k)} f^{(m-k)}.$$

Найдём производные отдельных «строительных блоков»:
$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad \tilde{H}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$
Докажем, что
$$\operatorname{sign} x = 2\tilde{H}(x) - 1, \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sign}'(x) = 2\tilde{H}'(x) = 2\delta(x).$$
Первый шаг, по определению,
$$\Big\langle \operatorname{sign}'(x) \,\Big|\, \varphi\Big\rangle = -\langle \operatorname{sign} x \,|\, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign} x \varphi'(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = 2\varphi(0) = \langle 2\delta(x) \,|\, \varphi\rangle.$$
Теперь покажем, что
$$|x|' = (x\operatorname{sign} x)' = \operatorname{sign} x + x\operatorname{sign}' x = \operatorname{sign} x + x2\delta(x) = \operatorname{sign} x.$$
Также можем найти вторую производную
$$|x|'' = \operatorname{sign}'(x) = 2\delta(x).$$
**Пункт а**. Теперь легко посчитать, что
$$(g(x)\operatorname{sign} x)' = g'(x)\operatorname{sign} x + g(x)\operatorname{sign}'(x) = g'(x)\operatorname{sign} x + 2g(0)\delta(x),$$
где равенства подразумеваются в пространстве $\mathcal{D}'$. Для второй производной, находим
$$\begin{aligned}(g(x)\operatorname{sign} x)'' = g''\operatorname{sign} x + 2g'(x)\operatorname{sign}' x + g(x)\operatorname{sign}''(x) = g''(x)\operatorname{sign} x + 4g'(0)\delta(x) + 2g(x)\delta'(x) = \\ = g''(x)\operatorname{sign} x + 4g'(0)\delta(x) + 2\left(-g'(0)\delta(x) + g(0)\delta'(x)\right) = g''(x)\operatorname{sign} x + 2g'(0)\delta(x) + 2g(0)\delta'(x).\end{aligned}$$
**Пункт б**. Сразу подставим значение $g(x) = (x+1)e^{|x|}$:
$$\begin{aligned} g' &= e^{|x|}\left(1 + (x+1)\operatorname{sign} x\right), \\ g'' &= e^{|x|}\left(1 + \operatorname{sign} x + 2\delta(x)(x+1) + \operatorname{sign} x + x + 1\right) = 2e^{|x|}\left(1 + x/2 + \operatorname{sign} x + \delta(x)\right).\end{aligned}$$

### T28

Докажем, что слабая сходимость $\delta_{x_n} \to \delta_{x_0}$ эквивалентна обычной сходимости $x_n \to x_0$. Другими словами есть набор $f_n(x) = \delta(x - x_n)$ которые в пределе сходится к $f(x) = \delta(x - x_0)$.

По определению,
$$\forall\varphi\in\mathcal{D} \quad \lim_{n\to\infty}\langle \delta(x - x_n) \,|\, \varphi\rangle = \langle \delta(x - x_0) \,|\, \varphi\rangle.$$
В силу непрерывности функций в $\mathcal{D}$:
$$\forall\varphi\in D \quad \lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)\varphi(x_0).$$

Наконец, это можно переписать в виде
$$\forall\varphi\in\mathcal{D}\ \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varphi,\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n\geqslant N(\varphi.\varepsilon)\quad |\varphi(x_n)-\varphi(x_0)|<\varepsilon.$$
Это было дано. Хочется показать, что из этого следует $x_n\to x_0$, или
$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0\qquad \forall\varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\forall n\geqslant N_\varepsilon\quad |x_n-x_0|<\varepsilon.$$
Докажем от противного, пусть $x_n\to x_1\neq x_0$. Тогда пусть $\varkappa=|x_1-x_0|/3$, выберем функцию $\varphi=\chi_{X_0}(x)+-\chi_{X_1}(x)$, где $X_0=[x_0-\varkappa,x_0+\varkappa]$, $X_1=[x_1-\varkappa,x_1+\varkappa]$. В таком случае, в пределе, $\langle f_n(x)\,|\,\varphi\rangle=-1$, при этом по условию $\langle f(x)\,|\,\varphi\rangle=1$, что приводит нас к противоречию.

**Пример (К3, 21.75)**

Найдём
$$I=\langle(\ln x)'\mid\varphi\rangle=-\langle\ln|x|\mid\varphi\rangle=-\int_{-\infty}^{+\infty}\ln|x|\varphi'(x)\,dx=\langle\text{smth}\mid\varphi\rangle,$$
однако просто вернуть производную на лоагрифм будет нехорошо. Запишем это так:
$$I=-\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\ln|x|\varphi'(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\ln\varepsilon\cdot(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))\right]+\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$
Здесь заметим, что
$$\ln\varepsilon\cdot(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))=2\varepsilon\ln\varepsilon\cdot\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)}{2\varepsilon}=0\cdot\varphi'(0)=0,$$
тогда
$$I=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx,$$
но $1/x$ – не является локально интегрируемой в 0 функцией. Итого
$$I=\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx=\left\langle\mathcal{P}\frac{1}{x}\middle|\varphi\right\rangle.$$
Другими словами мы установили, что
$$(\ln|x|)'\overset{D'}{=}\mathcal{P}\frac{1}{x},\ \Leftrightarrow\ (\ln|x|)'\overset{*w\cdot}{=}\mathcal{P}\frac{1}{x},\ \Leftrightarrow\ \left\langle(\ln|x|)'\right|=\left\langle\mathcal{P}\frac{1}{x}\right|.$$

**Пример (К3, 21.84)**

Уместен вопрос: когда верно, что
$$\langle\lambda_f'\mid\varphi\rangle=\langle\lambda_{f'}\mid\varphi\rangle.$$
Далее пусть $\frac{d}{dx}$ – классическая производная, $f'$ – производная обобщенной функции, тогда наш вопрос будет выглядеть, как
$$\langle f'\mid\varphi\rangle=\left\langle\frac{df}{dx}\,\middle|\,\varphi\right\rangle+\sum_{k=1}^{n}\Delta f(x_k)\langle\delta(x-x_k)\mid\ldots\rangle,$$
где $x_k$ – точки разрыва классической функции $f$, а
$$\Delta f(x_k)=f(x_k+0)-f(x_k-0)\in\mathbb{R}.$$
В частности рассмотрим случай с $x_k=0$. Тогда
$$\langle f'\mid\varphi\rangle=-\langle f\,|\,\varphi'\rangle=-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi'(x)\,dx,$$
что удобно расписать в виде
$$-\left(\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\infty}\right)f(x)\varphi'(x)=-f(x)\varphi(x)\Big|_{+0}^{+\infty}-f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{-0}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{df(x)}{dx}\varphi(x)\,dx=\Delta f(0)\langle\delta(x)\,|\,\varphi\rangle+\left\langle\frac{df}{dx}\,\middle|\,\varphi\right\rangle.$$

**Т29 и Т30**

Сначала доакажем, что всякое распределение $\lambda\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ имеет первообразную, то есть такую $\mu\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, что $\mu'=\lambda$ в смысле дифференцирования обобщенных функций. Потом докажем, что любые две первообразные одного и того же распределения отличаются на константу.

**Lem 11.30.** *Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и так оказалось, что $f' = 0$, тогда $f$ имеет вид $\langle f|\varphi\rangle = c\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx$.*

$\triangle$. Утверждается, что $c = \langle f\,|\,\varphi_0\rangle$ годится, где

$$\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}): \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_0(x)\,dx = 1.$$

Итак, любую функцию $\varphi \in \mathcal{D}$ можно представить в виде

$$\varphi = -\theta\cdot\varphi_0 + \theta\cdot\varphi_0, \qquad \theta = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx.$$

Зададим функцию от вида

$$\psi(x) = \int_{\infty}^{x}\left(\varphi(t) - \theta\varphi_0(t)\right)\,dt \quad \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Собирая всё вместе находим

$$\psi' = \varphi - \theta\cdot\varphi_0, \quad \Rightarrow \quad \langle f\,|\,\varphi\rangle = \langle f\,|\,\psi' + \theta\varphi_0\rangle = \langle f\,|\,\psi'\rangle + \theta\langle f\,|\,\varphi_0\rangle,$$

где $-\langle f'\,|\,\psi\rangle = 0$ по условию. Также $\langle f\,|\,\varphi_0\rangle = c$, тогда верно, что

$$\psi' = c\cdot\theta = c\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx, \qquad \text{Q. E. D.}$$

$\square$

**Thr 11.31.** *Для всякой обобщенной функции $f$ из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ существует $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ такая, что $g' \overset{\mathcal{D}'}{=} f$. Для всякой другой $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ верно, что если $h' \overset{\mathcal{D}'}{=} f$, то $g - h \overset{\mathcal{D}'}{=} c$.*

$\triangle$. Точно также берем некоторую $\varphi$, $\psi$. Положим, по определению, что

$$\langle g\,|\,\varphi\rangle \overset{\text{def}}{=} -\langle f\,|\,\Psi\rangle,$$

для которого хотелось бы показать линейность и непрерывность.

Для этого рассмотрим

$$\langle g\,|\,\varphi_1 + \varphi_2\rangle = -\langle f\,|\,\psi_1 + \psi_2\rangle = -\left\langle f\,\middle|\,\int_{-\infty}^{x}(\varphi_1 + \varphi_2 - (\theta_1 + \theta_2)\varphi_0)\,dt\right\rangle = -\langle f\,|\,\psi_1\rangle - \langle f\,|\,\psi_2\rangle.$$

Осталось показать непрерывность, точнее показать, что линейной отображение $\varphi \to \psi$ непрерывно на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Рассмотрим в частности $\varphi_k \overset{\mathcal{D}'}{\to} 0$, для них $\theta_k \to 0$ при $k \to \infty$. Построим теперь $\varphi_k - \theta_k\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и имеют нулевые интегралы. Более того

$$\hat{l}(\varphi_k) = \psi_k = \int_{-\infty}^{x}\left(\varphi_k(t) - \theta_k\varphi_0(t)\right)\,dt \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Итого $\psi_k \to 0$ при $k \to \infty$, что и завершает доказательство непрерывности.

$\square$

**T31**

**Thr 11.32.** *Для $\forall$ СОФ $g \in \mathcal{D}'$, с носителем в открытом шаре, существует такая РОФ $f$ и $k \in \mathbb{N}$, что $f^{(k)} = g$.*

**Def 11.33.** *Носитель обобщенной функции* $\operatorname{supp} f$ – дополнение к объединению всех открытых множеств $U$, на которых $f$ равна нулю. Обобщённая функция $f$ равна нулю на $U$, если $\langle f\,|\,\varphi\rangle = 0$ для всех $\varphi$ таких, что $\operatorname{supp}\varphi$ содержится в $U$.

Примером такой функции (которая не является $m$-й производной РОФ), носитель которой не помещается в открытый шар, может служить распределение вида

$$f = \sum_{k=1}^{\infty}\delta^{(k)}(x - k).$$

Докажем от противного, пусть $g^{(m)} = f$ и $g$ – РОФ.

Ну, по определению,

$$\langle(-1)^m g^{(m)}\,|\,\varphi\rangle = (-1)^m\sum_{k=0}^{\infty}\varphi^{(k)}(x-k)(-1)^k = (-1)^m\sum_{n=N}^{N}\varphi^{(k)}(x-k)(-1)^k.$$

Распишем чуть подробнее свёртку с $g$:

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi^{(m)}(x)\,dx=(-1)^m\sum_{k=0}^{N}\varphi^{(k)}(k)(-1)^k.$$

Теперь выберем $\varphi$, такую, что это ступенька гаусс вокруг $x=m$, тогда

$$I=(-1)^m(-1)^m\varphi^{(m)}(m)=\langle\delta(x-m)\,|\,\varphi^{(m)}\rangle,$$

таким образом пришли к противоречию.

## 11.4 Преобразование Фурье обобщенных функций

Для преобразования Фурье над пространством обобщенных функций медленного роста $S$ – пространства Шварца, верны следующие утверждения:

$$\langle F[f]\,|\,\varphi\rangle=\langle f\,|\,F[\varphi]\rangle,\qquad \langle F^{-1}[f]\,|\,\varphi\rangle=\langle f\,|\,F^{-1}[\varphi]\rangle,\qquad F[f^{(n)}]=(ix)^nF[f],\qquad F^{(n)}[f]=(-i)^nF[x^nf].$$

Верно, что $\mathcal{D}\subset S$. Также важно держать в голове, что

$$F[1]=\sqrt{2\pi}\delta.$$

### T32

Найдём преобразование Фурье в $S'$ некоторых функций.

**Синус**. Найдём преобразование Фурье вида

$$\left\langle F^{-1}[\delta(x-x_0)]\,\middle|\,\varphi\right\rangle=\left\langle\delta(x-x_0)\,\middle|\,F^{-1}[\varphi]\right\rangle=F^{-1}[\varphi](x_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}}\varphi(t)e^{ix_0t}=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dtf(t)\varphi(t)=\left\langle\frac{e^{ix_0t}}{\sqrt{2\pi}}\,\middle|\,\varphi\right\rangle,\qquad\Rightarrow\qquad F^{-1}[\delta(x-x_0)](t)=\frac{e^{ix_0t}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Отсюда следует, что

$$\left\langle F[e^{ix_0t}]\,\middle|\,\varphi\right\rangle=\left\langle F\left[\sqrt{2\pi}F^{-1}[\delta(x-x_0)]\right]\,\middle|\,\varphi\right\rangle,$$

тогда можем перегрупировать, и найти

$$\left\langle F[e^{ix_0t}]\,\middle|\,\varphi\right\rangle=\langle\sqrt{2\pi}\delta(x-x_0)\,|\,\varphi\rangle.$$

Нас, правда, интересует Фурье от синуса

$$\langle F[\sin(x_0t)]\,|\,\varphi\rangle=\left\langle F\left[\frac{e^{ix_0t}-e^{-ix_0t}}{2i}\right]\,\middle|\,\varphi\right\rangle=\left\langle\sqrt{\frac{\pi}{2}}i\left(\delta(x+x_0)-\delta(x-x_0)\right)\,\middle|\,\varphi\right\rangle.$$

Тогда $\mathcal{D}'$ справедливо равенство вида

$$F[\sin(x_0t)]\overset{\mathcal{D}'}{=}\sqrt{\frac{\pi}{2}}i\big(\delta(x+x_0)-\delta(x-x_0)\big).$$

**Дельта-функция**. Пользуясь формулой $n$-й производной

$$\left\langle F[\delta^{(n)}(x)]\,\middle|\,\varphi\right\rangle=\left\langle\delta^{(n)}(x)\,\middle|\,F[\varphi]\right\rangle=(-1)^nF^{(n)}[\varphi](0)=\frac{(-1)^n}{i^n}F[x^n\varphi](0)=\left\langle\frac{(-1)^n}{i^n}\delta(x)\,\middle|\,F[x^n\varphi]\right\rangle=$$
$$=i^n\left\langle F[\delta(x)]\,\middle|\,x^n\varphi\right\rangle=\langle(ix)^nF[\delta(x)]\,|\,\varphi\rangle=\left\langle\frac{(ix)^n}{\sqrt{2\pi}}\,\middle|\,\varphi\right\rangle,$$

таким образом пришли к равенству вида

$$F[\delta^{(n)}(x)]\overset{\mathcal{D}'}{=}\frac{(ix)^n}{\sqrt{2\pi}}.$$

**Фунция Хевисайда**. Для начала найдём преобразование Фурье функции $\theta(x)e^{-tx}$ при $t>0$

$$F[\theta(x)e^{-tx}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-x(t+iy)}\,dx=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}(y-it)}.$$

Покажем теперь, что в $S'$

$$\lim_{t\to+0}\theta(x)e^{-tx}=\theta(x).$$

Действительно, для каждой функции $\varphi\in S$ и любого числа $A$ имеем

$$|\langle\theta(x)\,|\,\varphi(x)\rangle-\langle\theta(x)e^{-tx}\,|\,\varphi(x)\rangle|=\left|\int_0^\infty(1-e^{-tx})\varphi(x)\,dx\right|\leqslant\left|\int_0^A(1-e^{-tx})\varphi(x)\,dx\right|+\left|\int_A^\infty(1-e^{-tx})\varphi(x)\,dx\right|.$$

Теперь зафиксируем $\sigma \in S$ и какое-либо число $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной интегрируемости $\varphi$, существует $A > 0$ такео, что $\int_A^{+\infty} < \varepsilon/2$ , тогда
$$\left| \int_A^\infty (1 - e^{-tx})\varphi(x)\, dx \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
Выберем теперь $t_0 > 0$ так, чтобы при $0 < t < t_0$ было справедливо неравенство
$$(1 - e^{-tA}) \int_0^A |\varphi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \Rightarrow \quad |\langle \theta(x) \,|\, \varphi(x)\rangle - \langle \theta(x) e^{-tx} \,|\, \varphi(x)\rangle| < \varepsilon.$$
Таким образом утверждение про $\lim_{t\to+0} \theta(x)e^{-tx} = \theta(x)$ верно.

В силу непрерывности преобразования Фурье
$$\lim_{t\to+0} F\left[\theta(x)e^{-tx}\right] = F[\theta(x)], \quad \Rightarrow \quad F[\theta(x)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{t\to+0} \frac{i}{y - it},$$
причём мы сразу утверждаем, что $S'$ предел существует, и, кстати, обозначается за $\frac{i}{y-i0}$. Тогда
$$F[\theta(x)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{y - i0}.$$

### T33

Докажем, что если $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и преобразование Фурье $F[f] \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, то $f \equiv 0$.

По Зоричу, если есть некоторое преобраование сигнала
$$\hat{f}(\omega) \equiv F[f](\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\pi}{a}k\right) \exp\left(-i\frac{\pi k}{a}\omega\right),$$
где $\hat{F}(\omega) = 0$ за пределами $|\omega| > a$, то мы приходим ряду с некоторыми отсчётными значениями. Но, так как $f \in \mathcal{D}$, то можем записать тригонометрический полином вида
$$\hat{f}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} \sum_{k=-N}^{N} f\left(\frac{\pi}{a}k\right) \exp\left(-i\frac{\pi k}{a}\omega\right) = 0,$$
ведь у конечного полинома не может быть континуально нулей.

### Теорема Котельникова

Рассмотрим получаемый сигнал $f(t)$ с финитным спектром, отличный от нуля только для $\omega < a > 0$. Итак, $\hat{f}(\omega) \equiv 0$ при $|\omega| > a$, поэтому представление
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$
для функции с финитным спектром сводится к интегралу лишь по промежутку $[-a, a]$. На этом отрезке функцию $\hat{f}(\omega)$ разложим в ряд Фурье
$$\hat{f}(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(\hat{f}) \exp\left(i\frac{\pi\omega}{a}k\right),$$
по полной и ортогональной система на этом отрезке. Для коэффициентов этого ряда можем получить простое выражение вида
$$c_k(\hat{f}) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \hat{f}(\omega) \exp\left(i\frac{\pi\omega}{a}k\right)\, d\omega = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} f\left(-\frac{\pi}{a}k\right).$$
Собирая всё вместе находим, что
$$f(t) = \frac{1}{2a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{a}k\right) \int_{-a}^{a} \exp\left(i\omega\left(t - \frac{\pi}{a}k\right)\right)\, d\omega.$$
Вычисляя эти интегралы и приходим к *формуле Котельникова*:
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{a}k\right) \frac{\sin a\left(t - \frac{\pi}{a}k\right)}{a\left(t - \frac{\pi}{a}k\right)}.$$
Таким образом, для восстановления сообщения, опиописываемого функцией с финитным спектром, сосредоточенным в полосе частот $|\omega| < a$ достаточно передать по каналу связи лишь значения $f(k\Delta)$ (называемые

*отсчетными* значениями) данной функции через равные промежутки времени $\Delta = \pi/a$.

**T34**

Докажем, что преобразование Фурье в $S'$ переводит распределение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{2\pi n} \quad \mapsto \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n.$$

**Thr 11.34** (Формула Пуассона)**.** *Так называется следующее соотношение:*

$$\sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n).$$

$\triangle$. Формула получается при $x = 0$ из равенства вида

$$\sqrt{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n) e^{inx},$$

которое мы и докажем.

Поскольку $\varphi$, $\hat{\varphi} \in S$, ряды сходятся абсолютно и равномерно по $x$ на $\mathbb{R}$. Также чтоит заметить, что

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n)$$

бесконечно гладкая и $2\pi$-периодическая. Пусть $\{\hat{c}_k(f)\}$ – её коэффициенты Фурье по ортонормированной системе $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$. Тогда

$$\hat{c}_k(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{ikx}\, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{2\pi n}^{2p(n+1)} \varphi(x) e^{ikx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{ikx}\, dx \overset{\text{def}}{=} \hat{\varphi}(k).$$

Но ряд фурье $f$ сходится к ней в любой точке $x \in \mathbb{R}$, значит в любой точке $x \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n) = f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_n(f) \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n) e^{ikx}, \text{Q. E. D.}$$

$\square$

Тогда в пределах задания можем переписать это в терминах обобщенных функций

$$\sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \delta(x - 2\pi n) \,|\, \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \delta(x - n) \,|\, F[\varphi] \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle F[\delta(x - n)] \,|\, \varphi \rangle.$$

Тогда приходим к выражению вида

$$F\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n).$$

Вообще $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) = G$ называют *решеткой Дирака.*

Утверждается, что $G_N$ сходится в $S'$ к $G$ $\forall \varphi$. В частности,

$$\lim_{N\to\infty} \langle G_N(x) \,|\, \varphi \rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) \,\middle|\, \varphi \right\rangle,$$

так что ряд дейтсвительно сходится и всё хорошо.