Заметки курса «Современная оптика»

Лектор: Колдунов Л. М.

Восторженные слушатели: Хоружий К.
Примак Е.

От: *9 февраля 2021 г.*

Содержание

1 Геометрическая оптика

1.1 Волновое уравнение

В общем оптика устроена как-то так: ГО $\subset$ ВО $\subset$ ЭО $\subset$ КО. Вспомним уравнения Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \dfrac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{B} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

Будем считать, что нет свободных токов и зарядов. Как вариант, можно найти решение в виде

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp\left(i\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right).$$

Важно, что верны формально замены

$$\frac{\partial}{\partial t} \to i\omega, \qquad \begin{cases} \partial_x \to -ik_x, \\ \partial_y \to -ik_y, \\ \partial_z \to -ik_z, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nabla \to -i\boldsymbol{k}, \qquad \nabla^2 \to -k^2.$$

Приходим к уравнению вида

$$-k^2\boldsymbol{E} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\omega^2\boldsymbol{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}, \quad \to \quad \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{n}.$$

Можем посмотреть на $\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = \text{const}$. Тогда

$$\omega\, dt - k\, dz = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

1.2 Уравнения эйконала

1. Свет распространяется в виде лучей.
2. Среда характеризуется показателем преломления n, более того[1] $c_{\text{ср}} = c/n$.
3. $\int n\, dl \to \min$ (принцип Ферма).

Def 1.1. *Оптический путь* можем определить, как

$$S = \int_A^B n(\boldsymbol{r})\, dl.$$

Посмотрим на уравнение

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad E(\boldsymbol{r}, t) = a(\boldsymbol{r})\exp\left(ik_0\Phi(\boldsymbol{r}) - i\omega t\right),$$

где $\Phi(\boldsymbol{r})$ называем *эйконалом*, а a - амплитуда.

Тогда формально получаем следующее:

$$\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega, \ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \to -\omega^2, \qquad \frac{\partial}{\partial x}E = a'_x\exp(\ldots) + a(\boldsymbol{r})ik_0\,\Phi'_x\exp(\ldots),$$

И для второй производной

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = a''_{xx}\exp(\ldots) + 2ik_0a'_x\Phi'_x\exp(\ldots) + ik_0a\Phi''_{xx}\exp(\ldots) - a(\boldsymbol{r})k_0^2|\Phi'_x|^2\exp(\ldots).$$

Таким образом нашли ΔE

$$\nabla^2 E = \nabla^2 a\exp(\ldots) - a(\boldsymbol{r})k_0^2|\operatorname{grad}\Phi|^2\exp(\ldots) + i\left(2k_0(\operatorname{grad} a, \operatorname{grad}\Phi) + k_0a\nabla^2\Phi\right)\exp(\ldots).$$

Внимательно посмотрели на волновое уравнение, решили сгруппировать вещественную часть и мнимую

$$\nabla^2 a\exp(\ldots) - a(\boldsymbol{r})k_0^2|\operatorname{grad}\Phi|^2\exp(\ldots) + \frac{\omega^2}{c^2}n^2a\exp(\ldots) = 0, \quad \Rightarrow \quad |\operatorname{grad}\Phi|^2 = \underbrace{\frac{1}{al_0^2}\nabla^2 a}_{\text{изм. ампл.}} + n^2.$$

[1] Будем считать, что лучу нужно проходить больший оптический путь.

Ну, будем считать, что (настоящая область применимости волновой оптики)

$$\left|\lambda \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right| \ll \left|\frac{\partial a}{\partial x}\right|, \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|\lambda \frac{\partial a}{\partial x}\right| \ll a, \qquad \lambda \to 0.$$

И приходим к *уравнению Эйконала*

$$\boxed{|\operatorname{grad}\Phi| = n.} \tag{1.1}$$

Ещё раз вспомним, что волновой фронт имеет вид

$$\omega t - k_0\Phi = \mathrm{const}.$$

Запишем, что (живём вдоль $\boldsymbol{S}$)

$$\operatorname{grad}\Phi = n\boldsymbol{S}, \qquad \|\boldsymbol{S}\| = 1, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial S} = n.$$

Тогда

$$\omega\, dt - k_0\, d\Phi = 0, \quad \Rightarrow \quad \omega\, dt = k_0\, d\Phi = k_0 \frac{\partial\Phi}{\partial S}\, dS = k_0 n\, dS.$$

1.3 Принцип Ферма

Пусть Φ – однозначно задан, тогда

$$\operatorname{grad}\Phi = n\boldsymbol{S}, \quad \Rightarrow \quad \oint n\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{l} = 0, \quad \Rightarrow \quad \int_{ACB} n\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{ADB} n\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{l}.$$

Но $\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{l} = S\, dl = dl$ на ACB. Тогда

$$\int_{ACB} n\, dl = \int_{ADB} n\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{l} \leqslant \int_{ADB} n\, dl.$$

Что доказывает принцип Ферма.

1.4 Траектория луча (?)

Для луча верно, что

$$n\boldsymbol{S} = \operatorname{grad}\Phi, \qquad |d\boldsymbol{r}| = dl, \qquad \boldsymbol{S} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dl}.$$

В таком случае верно, что

$$n\frac{d\boldsymbol{r}}{dl} = \operatorname{grad}\Phi, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dl}(n\frac{d\boldsymbol{r}}{dl}) = \frac{d}{dl}\operatorname{grad}\Phi = \operatorname{grad}\frac{d\Phi}{dl} = \operatorname{grad} n.$$

Получили *уравнение траектории луча*

$$\boxed{\frac{d}{dl}\left(n\frac{d\boldsymbol{r}}{dl}\right) = \operatorname{grad} n}. \tag{1.2}$$

Например, в однородной среде

$$n = \mathrm{const}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dl^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}l + \boldsymbol{b}.$$

Можно сделать ещё так (найти кривизну траектории?)

$$\boldsymbol{S}\frac{dn}{dl} + n\frac{d\boldsymbol{S}}{dl} = \nabla n, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{S}}{dl} = \frac{1}{n}\left(\nabla n - \boldsymbol{S}\frac{dn}{dl}\right).$$

Получаем (вспомнив трёхгранник Френе)

$$\frac{\boldsymbol{N}}{R} = \frac{1}{n}\left(\nabla n - \boldsymbol{S}\frac{dn}{dl}\right), \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{N^2}{R} = \frac{(\boldsymbol{N}\cdot\nabla n)}{n},$$

или

$$(\boldsymbol{N}\cdot\nabla n) > 0, \quad \Rightarrow \quad \text{луч поворачивает в} \uparrow n. \tag{1.3}$$

1.5 Уравнение луча в параксиальном приближение

Пусть есть некоторая $n(y)$. Пусть луч движется $\theta(y)$, рассмотрим ситуацию преломления, тогда

$$n(y)\cos\theta(y) = n(y+dy)\cos\theta(y+dy), \quad \Rightarrow \quad \left(n(y) + \frac{dn}{dy}\Delta y\right)(\cos\theta(y) - \sin\theta(y)).$$

Раскрыв скобки, получим

$$n(y)\cos\theta(y) = n(y)\cos\theta(y) + \frac{dn}{dy}\cos\theta(y)\Delta y - n(y)\sin\theta(y)\frac{d\theta}{dy}\Delta y.$$

Запишем чуть аккуратнее:

$$\frac{dn}{dy}\cos\theta(y) = n(y)\sin\theta(y)\frac{d\theta}{dy},$$

Считая, что $\sin\theta(y) \approx \theta(y) = dy/dx$, тогда

$$\frac{1}{n}\frac{dn}{dy} = \operatorname{tg}\theta\frac{d\theta}{dy} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad \Rightarrow \qquad y''_{xx} = \frac{1}{n}\frac{dn}{dy}. \tag{1.4}$$

1.6 Пример слоистой среды

Рассмотрим вещество с коммерческим названием SELFOC и переменным показателем преломления вида

$$n^2 = n_0^2(1 - \alpha^2 y^2)$$

Считая $\alpha y \ll 1$, подставляя в уравнение луча находим, что

$$y''_{xx} = \frac{1}{n_0(1-\alpha^2y^2)^{1/2}}\frac{dn}{dy} = \frac{-n_0\alpha^2 y}{n_0} = -\alpha^2 y,$$

и мы снова всё свели к гармоническому осциллятору.

Нужно ещё разобрать мнимую часть, в которой сидит факт об отсутствии взаимодействия лучей.