

ЗАБАВНЫЕ ФАКТЫ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Источник: Чернова Н.И., Теория вероятностей

Авторы заметок: Хоружий Кирилл
Примаков Евгений

От: 1 апреля 2021 г.

Содержание

1	Основные понятия теории вероятностей	2
1.1	Элементы комбинаторики	2
1.2	События и операции над ними	2
1.3	Дискретное пространство элементарных исходов	2
1.4	Дискретное пространство элементарных исходов	3
1.5	Геометрическая вероятность	3
2	Аксиоматика теории вероятностей	4
2.1	Алгебра и σ -алгебра событий	4
2.2	Мера и вероятностная мера	4
3	Условная вероятность и независимость	5
3.1	Условная вероятность	5
3.2	Независимость событий	6
3.3	Формула полной вероятности	6
3.4	Формула Байеса	6
4	Схема Бернулли	6
4.1	Распределение числа успехов в n испытаниях	6

1 Основные понятия теории вероятностей

1.1 Элементы комбинаторики

Для начала подружмся с комбинаторикой, взяв некоторую её проекцию на теорвер

Thr 1.1. Пусть множества $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ состоит из k элементов, а множество $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ – из m элементов. Тогда можно образовать равно km пар (a_i, b_j) .

Thr 1.2. Общее количество различных наборов при выборе k элементов из n без возвращения и с учётом порядка равняется

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

где A_n^k называется числом размещений из n элементов по k элементов.

Thr 1.3. Общее количество различных наборов при выборе k элементов из n без возвращения и без учета порядка равняется

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где число C_n^k называется числом сочетаний из n элементов по k элементов.

Thr 1.4. Общее количество различных наборов при выборе k элементов из n с возвращением и без учёта порядка равняется

$$C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}.$$

1.2 События и операции над ними

Def 1.5. Пространством элементарных исходов называют множество Ω , содержащее все возможные взаимоисключающие результаты данного случайного эксперимента. Элементы множества Ω называются элементарными исходами и обозначаются ω .

Def 1.6. Событиями называются подмножества Ω . Говорят, что произошло событие A , если эксперимент завершился одним из элементарных исходов, входящих в множество A .

Вообще в силу таких определений события и множества оказываются очень похожими, так что определены операции объединения, пересечения, дополнения, а также взятия противоположенного $\bar{A} = \Omega \setminus A$. Также можно выделить достоверное событие Ω и невозможное \emptyset .

События A и B называются несовместными, если они не могут произойти одновременно: $A \cap B = \emptyset$. События A_1, \dots, A_n называются попарно несовместными, если несовместны любые два из них: $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$. Говорят, что событие A влечет событие B ($A \subseteq B$), если $A \Rightarrow B$.

1.3 Дискретное пространство элементарных исходов

Пространство элементарных исходов назовём дискретным, если множество Ω конечно или счётно: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n, \dots\}$.

Def 1.7. Сопоставим каждому элементарному исходу ω_i число $p_i \in [0, 1]$ так, чтобы $\sum p_i = 1$. Вероятностью события A называют число

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i,$$

где с случае $A = \emptyset$ считаем $P(A) = 0$.

Def 1.8 (Классическое определение вероятности). Говорят, что эксперимент описывается классической вероятностной моделью, если пространство его элементарных исходов состоит из конечного числа равновероятных исходов. Для любого события верно, что

$$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}. \quad (1.1)$$

Эту формулу называют классическим определением вероятности.

Тут стоит вспомнить три схемы из модели с урнами: схема выбора с возвращением и с учётом порядка (n^k), выбора без возвращения и с учётом порядка (A_n^k), а также выбора без возвращения и без учёта порядка (C_n^k), описываются классической вероятностной моделью. А вот схема выбора с возвращением и без учёта порядка уже не описывается классической вероятностью.

Пример с гипергеометрическим распределением

Из урны, в которой K белых и $N - K$ чёрных шаров, наудачу и без возвращения вынимают n шаров, где $n \leq N$. Термин «наудачу» означает, что появление любого набора из n шаров равновозможно. Найти вероятность того, что будет выбрано k белых и $n - k$ чёрных шаров.

Результат – набор из n шаров. Общее число $\text{card } \Omega = C_N^n$. Пусть A_k – событие, состоящее в том, что в наборе окажется k белых и $n - k$ чёрных. Есть ровно C_K^k способов выбрать k белых шаров из K , и C_{N-K}^{n-k} способов выбрать $n - k$ чёрных шаров из $N - K$. Тогда $\text{card } A_k = C_K^k C_{N-K}^{n-k}$,

$$P(A_k) = \frac{\text{card } A_k}{\text{card } \Omega} = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Этот набор вероятностей называется *гипергеометрическим распределением* вероятностей.

1.4 Дискретное пространство элементарных исходов

Пространство элементарных исходов назовём дискретным, если множество Ω конечно или счётно: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n, \dots\}$.

Def 1.9. Сопоставим каждому элементарному исходу ω_i число $p_i \in [0, 1]$ так, чтобы $\sum p_i = 1$. Вероятностью события A называют число

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i,$$

где с случае $A = \emptyset$ считаем $P(A) = 0$.

Def 1.10 (Классическое определение вероятности). Говорят, что эксперимент описывается *классической вероятностной моделью*, если пространство его элементарных исходов состоит из конечного числа равновозможных исходов. Для любого события верно, что

$$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}. \quad (1.2)$$

Эту формулу называют *классическим определением вероятности*.

Тут стоит вспомнить три схемы из модели с урнами: схема выбора с возвращением и с учётом порядка (n^k), выбора без возвращения и с учётом порядка (A_n^k), а также выбора без возвращения и без учёта порядка (C_n^k), описываются классической вероятностной моделью. А вот схема выбора с возвращением и без учёта порядка уже не описывается классической вероятностью.

Пример с гипергеометрическим распределением

Из урны, в которой K белых и $N - K$ чёрных шаров, наудачу и без возвращения вынимают n шаров, где $n \leq N$. Термин «наудачу» означает, что появление любого набора из n шаров равновозможно. Найти вероятность того, что будет выбрано k белых и $n - k$ чёрных шаров.

Результат – набор из n шаров. Общее число $\text{card } \Omega = C_N^n$. Пусть A_k – событие, состоящее в том, что в наборе окажется k белых и $n - k$ чёрных. Есть ровно C_K^k способов выбрать k белых шаров из K , и C_{N-K}^{n-k} способов выбрать $n - k$ чёрных шаров из $N - K$. Тогда $\text{card } A_k = C_K^k C_{N-K}^{n-k}$,

$$P(A_k) = \frac{\text{card } A_k}{\text{card } \Omega} = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Этот набор вероятностей называется *гипергеометрическим распределением* вероятностей.

1.5 Геометрическая вероятность

Def 1.11. Пусть некоторая область $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ такая, что $\mu(\Omega)$ конечна. Пусть эксперимент состоит из равновероятного выбора случайной точки в области Ω . *Геометрическое определение вероятности:*

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu\Omega}.$$

Если для точки выполнены условия геометрического определения, то говорят, что точка *равномерно распределена* в Ω .

2 Аксиоматика теории вероятностей

2.1 Алгебра и σ -алгебра событий

Def 2.1. Множество \mathcal{A} , элементами которого являются некоторые подмножества Ω называют *алгеброй*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- A1) $\Omega \in \mathcal{A}$ (алгебра содержит достоверные события);
- A2) если $A \in \mathcal{A}$, то $\bar{A} \in \mathcal{A}$ (вместе с любым множеством алгебра содержит противоположное к нему);
- A3) если $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{A}$, то $A \cup B \in \mathcal{A}$ (вместе с любыми двумя множествами алгебра содержит их объединение).

Вообще из A1 и A2 следует, что $\emptyset = \bar{\Omega} \in \mathcal{A}$. Пункт A3 экстраполируется на любой конечный набор. Кстати, объединение можно заменить (в силу закона де Моргана) на пересечение:

$$xy \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \overline{xy} \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \bar{x} + \bar{y} \in \mathcal{A}.$$

Thr 2.2 (закон де Моргана). Для множеств x, y верно, что

$$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}, \quad \overline{xy} = \bar{x} + \bar{y},$$

где $xy = x \cap y$, $x + y = x \cup y$.

В случае счётного пространства элементарных исходов A3 алгебры оказывается недостаточно, так приходим к σ -алгебре:

Def 2.3. Множество \mathcal{F} , элементами которого являются некоторые подмножества Ω называется σ -алгеброй, если выполнены следующие условия:

- S1) $\Omega \in \mathcal{F}$ (алгебра содержит достоверные события);
- S2) если $A \in \mathcal{F}$, то $\bar{A} \in \mathcal{F}$ (вместе с любым множеством алгебра содержит противоположное к нему);
- S3) если $\{A_i\} \in \mathcal{F}$, то $\cup_i A_i \in \mathcal{F}$ (вместе с любым *счётным* набором событий σ -алгебра содержит их объединение).

Def 2.4. Минимальной σ -алгеброй, содержащей набор множеств \mathcal{U} , называется пересечение всех σ -алгебр, содержащих \mathcal{U} .

Def 2.5. Минимальная σ -алгебра, содержащая множество \mathcal{U} всех интервалов на вещественной прямой называется *борелевской сигма-алгеброй* в \mathbb{R} и обозначается $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Итак, оказался определен специальный класс \mathcal{F} подмножеств Ω , названный σ -алгеброй событий. Применение счетного числа любых операций к множествам из \mathcal{F} снова дает множество из \mathcal{F} . *Событиями* будем называть только множества $A \in \mathcal{F}$.

2.2 Мера и вероятностная мера

Def 2.6. Пусть Ω – некоторое непустое множество \mathcal{F} – σ -алгебра его подмножеств. Функция

$$\mu: \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R} \cap [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

называется *мерой* на (Ω, \mathcal{F}) , если она удовлетворяет условиям

- $\mu_1)$ $\mu(A) \geq 0$ для любого множества $A \in \mathcal{F}$;
- $\mu_2)$ \forall счетного $\{A_i\} \in \mathcal{F}$ таких, что $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ мера их объединения равна сумме их мер:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Последнее свойство называют *счётной аддитивностью* или σ -аддитивностью меры.

Thr 2.7 (свойство непрерывности меры). Пусть дана убывающая последовательность $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$ множеств из \mathcal{F} , причем $\mu(B_1) < \infty$. Пусть $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$. Тогда $\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$.

Def 2.8. Пусть Ω – непустое множество, \mathcal{F} – σ -алгебра его подмножеств. Мера $\mu: \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ называется *нормированной*, если $\mu(\Omega) = 1$. Другое название нормированной меры – *вероятность*.

Def 2.9. Пусть Ω – пространство элементарных исходов, \mathcal{F} – σ -алгебра его подмножеств (событий). *Вероятностью* или *вероятностной мерой* на (Ω, \mathcal{F}) называется функция

$$P: \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$$

обладающая свойствами

P1) $P(A) \geq 0$ для любого события $A \in \mathcal{F}$;

P2) для любого счётного набора *попарно несовместных* событий $\{A_i\} \in \mathcal{F}$ имеет равенство

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k);$$

P3) вероятность достоверного события равна единице: $P(\Omega) = 1$.

Свойства (P1) – (P3) называют *аксиомами вероятности*.

Def 2.10. Тройка (Ω, \mathcal{F}, P) , в которой Ω – пространство элементарных исходов, \mathcal{F} – σ -алгебра его подмножеств и P – вероятная мера на \mathcal{F} , называется *вероятностным пространством*.

Вообще, для вероятности верны следующие свойства

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Для любого конечного набора попарно несовместных событий $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ имеет место равенство $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$.
3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
4. Если $A \subseteq B$, то $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
5. $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$.
6. $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

И это всё, конечно, хорошо, но если мы хотим что-то посчитать, то

Thr 2.11 (Формула включения-исключения). Для вероятности, в частности для двух событий, верно, что

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

и, обобщая, для объединения n множеств

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \sum_{i < j < m} P(A_i A_j A_m) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n).$$

3 Условная вероятность и независимость

3.1 Условная вероятность

Def 3.1. Условной вероятностью события A при условии, что произошло событие B , называется число

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

которое само собой определено только при $P(B) > 0$.

Thr 3.2. Если $P(B) > 0$ и $P(A) > 0$, то

$$P(A \cap B) = P(B) P(A|B) = P(A) P(B|A).$$

Thr 3.3. Для любых событий A_1, \dots, A_n верно равенство:

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}),$$

если все участвующие в нём условные вероятности определены.

3.2 Независимость событий

Def 3.4. События A и B называются *независимыми*, если $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Из этого определения вытекают следующие леммы.

Lem 3.5. Пусть $P(B) > 0$. Тогда события A и B независимы тогда и только, когда $P(A|B) = P(A)$.

Lem 3.6. Пусть A и B несовместны. Тогда независимыми они будут только в том случае, если $P(A) = 0$ или $P(B) = 0$.

Другими словами несовместные события не могут быть независимыми. Зависимость между ними – просто причинно-следственная: если $A \cap B = \emptyset$, то $A \subseteq \bar{B}$, т.е. при выполнении A события B не происходит.

Lem 3.7. Если события A и B независимы, то независимы и события A и \bar{B} , \bar{A} и B , \bar{A} и \bar{B} .

Def 3.8. События A_1, \dots, A_n называются *независимыми в совокупности*, если для любого $1 \leq k \leq n$ и любого набора различных меж собой индексов $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ имеет место равенство

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}).$$

3.3 Формула полной вероятности

Def 3.9. Конечный или счётный набор попарно несовместных событий $\{H_i\}$ таких, что $P(H_i) > 0 \forall i$ и $\cup_i H_i = \Omega$, называется *полной группой событий* или разбиением пространства Ω . Также события, образующие полную группу событий, часто называют *гипотезами*.

При подходящем выборе гипотез для любого события A могут быть сравнительно просто вычислены $P(A|H_i)$ и, собственно, $P(H_i)$. Как посчитать вероятность события A ?

Thr 3.10 (формула полной вероятности). Пусть дана полная группа событий $\{H_i\}$. Тогда вероятность любого события A может быть вычислена по формуле

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) \cdot P(A|H_i).$$

3.4 Формула Байеса

Thr 3.11 (формула Байеса). Пусть $\{H_i\}$ – полная группа событий, и A – некоторое событие, $P(A) > 0$. Тогда условная вероятность того, что имело место событие H_k , если в результате эксперимента наблюдалось событие A , может быть вычислена по формуле

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) \cdot P(A|H_i)}. \quad (3.1)$$

Def 3.12. Вероятности $P(H_i)$, вычисленные заранее, до проведения эксперимента, называют¹ *априорными* вероятностями. Условные вероятности $P(H_i|A)$ называют² *апостериорными* вероятностями.

Формула Байеса позволяет переоценить заранее известные вероятности после того, как получено знание о результате эксперимента. Эта формула находит многочисленные применения в экономике, статистике, социологии и т.п.

4 Схема Бернулли

4.1 Распределение числа успехов в n испытаниях

¹ *a priori* – « до опыта ».

² *a posteriori* – « после опыта ».