

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ I КУРСА «ТЕОРИЯ ПОЛЯ»

Авторы: Ж_иК

От: 17 марта 2021 г.

Содержание

1	Общие сведения	2
2	Первое задание	2
T1	2
T2	2
T3	3
T4	4

1 Общие сведения

Для кинематики полезно было бы ввести следующие величины

$$\gamma(v) = \gamma_v = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad \beta(v) = \beta_v = \frac{v}{c}, \quad \Lambda(v, OX) = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\beta_v \gamma_v & 0 & 0 \\ -\beta_v \gamma_v & \gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где Λ – преобразование Лоренца, для которого, кстати, верно, что $\Lambda^{-1}(v) = \Lambda(-v)$.

Также преобразование Лоренца можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_v \gamma \\ -\beta_v \gamma & \mathbb{E} + \frac{\gamma_v - 1}{\beta_v^2} \beta \otimes \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

2 Первое задание

T1

Для начала запишем преобразование Лоренца для системы K' :

$$t' = \gamma_{v_x} \left(t - \beta_x \frac{x}{c}\right), \quad x' = \gamma_{v_x} (x - v_x t), \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Аналогично перейдём к системе K'' , выразив компоненты через их представление в системе K'

$$t'' = \gamma_{v'_y} \left(t' - \beta_{v'_y} \frac{y'}{c}\right), \quad x'' = x', \quad y'' = \gamma_{v'_y} (y' - v'_y t'), \quad z'' = z'.$$

Центр системы K'' неподвижен в координатах системы K'' , соответственно

$$x'' = y'' = z'' = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{K''} = v_x t \\ y_{K''} = \gamma_{v_x}^{-1} v'_y t \end{cases},$$

что соответствует $(x, y)[t]$ для координат центра системы K'' в системе K .

Теперь найдём движение центра системы K в системе K'' , подставив значения $x = y = 0$,

$$x''_K = -\gamma_{v_x} v_x t, \quad y''_K = -\gamma_{v'_y} \gamma_{v_x} v'_y t, \quad t''_K = -\gamma_{v'_y} \gamma_{v_x} t.$$

Можно заметить, что

$$\gamma_{v'_y} \gamma_{v_x} \approx \gamma \left(\sqrt{v_x^2 + v_y'^2} \right) = \gamma_v, \quad \beta_{v_x}, \beta_{v'_y} \ll 1.$$

Теперь нас интересует направление прямой $\parallel \mathbf{v}$ – движения K'' в системе K :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\dot{y}_{K''}}{\dot{x}_{K''}} = \gamma_{v_x}^{-1} \frac{v'_y}{v_x}.$$

Угол же между осью x'' и движением центра системы K может быть найден, как

$$\operatorname{tg}(\theta + \varphi) = \frac{dy''_K}{dt''} \Big/ \frac{dx''_K}{dt''} = \gamma_{v'_y} \frac{v'_y}{v_x} = \gamma_{v_x} \gamma_{v'_y} \operatorname{tg} \varphi \approx \gamma_v \operatorname{tg} \varphi.$$

С другой стороны, раскрывая тангенс суммы, находим

$$\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \varphi = \gamma_v \operatorname{tg} \varphi (1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \theta), \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{(\gamma_v - 1) \operatorname{tg} \varphi}{1 + \gamma_v \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

T2

Аппроксимируем движение ИСО в моменты времени t и $t + dt$ сопутствующими ИСО K' и K'' . Пусть K – лабораторная система отсчета, K' – сопутствующая ИСО $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v}(t)$, а K'' – сопутствующая ИСО движущаяся относительно K со скоростью $\mathbf{v}(t + dt) = \mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Далее для удобства будем считать, что K'' движется относительно K' со скоростью $d\mathbf{v}'$.

Проверим, что последовательное применение $\Lambda(d\mathbf{v}') \cdot \Lambda(\mathbf{v})$ эквивалентно $R(\varphi) \cdot \Lambda(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$, где $R(\varphi)$ – вращение в $\{xyz\}$. Для этого просто найдём

$$R(\varphi) = \Lambda(d\mathbf{v}') \cdot \Lambda(\mathbf{v}) \cdot \Lambda(\mathbf{v} + d\mathbf{v})^{-1}.$$

Пусть ось $x \parallel \mathbf{v}$, ось y выберем так, чтобы $d\mathbf{v} \in \{Oxy\}$. Теперь, согласно (1.1), считая $|\mathbf{v}| = \beta_1$, $d\mathbf{v}' = (\beta'_x, \beta'_y)^T$ можем записать (пренебрегая слагаемыми β'_x, β'_y второй и выше степени):

$$\Lambda(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 & 0 & 0 \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(d\mathbf{v}') = \begin{bmatrix} 1 & -\beta'_x & -\beta'_y & 0 \\ -\beta'_x & 1 & 0 & 0 \\ -\beta'_y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь можем выразить $d\mathbf{v}'$ через $d\mathbf{v}$, считая \mathbf{r}_f центром системы K''

$$\mathbf{r}'_f = \Lambda(d\mathbf{v}') \cdot \Lambda(\mathbf{v})\mathbf{r}_f = (ct', 0, 0, 0)^T \Rightarrow \beta(\mathbf{v} + d\mathbf{v})_x = \frac{\beta_1 + \beta'_x}{1 + \beta_1\beta'_x}, \quad \beta(\mathbf{v} + d\mathbf{v})_y = \frac{\gamma_{\beta_1}\beta_y}{1 + \beta_1\beta_x}.$$

где скорость находим аналогично первому номеру. Тут стоит заметить, что скоростью β_x можно было бы пренебречь в сравнении с β_1 , так как скорее всего первый порядок малость β_x не войдёт в ответ, однако хотелось бы в этом убедиться.

Зная $d\mathbf{v}$ можем найти $d\mathbf{v}'$:

$$\beta'_x = \gamma_{\beta_1}^2 \beta_x, \quad \beta'_y = \gamma \beta_y.$$

Но это на потом.

Через \mathbf{v} , $d\mathbf{v}'$ теперь можем найти $\Lambda(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$, и посчитать обратную матрицу:

$$\Lambda^{-1}(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \gamma_{\beta_1}(\beta_1\beta_x + 1) & \gamma_{\beta_1}(\beta_1 + \beta_x) & \beta_y & 0 \\ \gamma_{\beta_1}(\beta_1 + \beta_x) & \gamma_{\beta_1}(\beta_1\beta_x + 1) & \frac{\beta_1\beta_y}{\gamma_{\beta_1}^{-1} + 1} & 0 \\ \beta_y & \frac{\beta_1\beta_y}{\gamma_{\beta_1}^{-1} + 1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Наконец можем посчитать матрицу поворота, которая в первом приближении действительно не содержит β_x :

$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\beta_1\beta'_y}{\sqrt{1-\beta_1^2}+1} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1\beta'_y}{\sqrt{1-\beta_1^2}+1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

что действительно соответствует повороту в плоскости $\{xy\}$ вокруг оси z с углом φ равным

$$\varphi = -\frac{\beta_y\beta_1}{\gamma_{\beta_1}^{-2} + \gamma_{\beta_1}^{-1}} = -\frac{\gamma_{\beta_1}^2}{\gamma_{\beta_1} + 1} \beta_1\beta_y,$$

где φ малый, в силу малости β_y . Так вот, в результате поворота координатных осей меняются и любые векторы, неподвижные в нЕИСО, то есть искомая угловая скорость

$$\omega_z = -\frac{\gamma_{\beta_1}^2}{\gamma_{\beta_1} + 1} \beta_1(\beta_y/\Delta t), \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = -\frac{\gamma_{\beta_1}^2}{\gamma_{\beta_1} + 1} [\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] = \frac{\gamma_{\beta_1}^2}{\gamma_{\beta_1} + 1} [\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \boldsymbol{\beta}],$$

что и требовалось доказать.

ТЗ

Посмотрим на сопутствующую вращающемуся интерферометру в точке рассматриваемого луча. Для луча можем записать волновой вектор, как

$$\bar{k}'_{\pm} = \left(\frac{\omega}{c}, \pm n \frac{\omega}{c}, 0, 0 \right),$$

где знак выбирается в соответствии с направлением обхода. Считая, что ось Ox направлена вдоль вращения интерферометра в рассматриваемой точке

$$ck_{\pm} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \pm n\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega\gamma(1 \pm n\beta) \\ \omega\gamma(n \pm \beta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$ck_{x,\pm} = \omega\gamma(n \pm \beta).$$

Можно заметить, что у света также зависит частота от направления движения, судя по формуле выше, но в силу малости скорости вращения, это приведет только к ооочень медленной осцилляции в интерференции

$$I_{\text{инт}} = I_1 + I_2 + \langle (\mathbf{E}_{10} \cdot \mathbf{E}_{20}) \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \dots) \rangle,$$

так что по идее этим эффектом можно пренебречь.

В силу различности k_+ и k_- можем найти разность хода

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = 2\pi R \frac{\gamma\omega\beta}{c},$$

считая данной угловую скорость вращения интерферометра Ω приходим к выражению вида

$$\Delta\varphi = \frac{2\gamma}{c^2} \omega \Omega \pi R^2 \stackrel{\gamma \sim 1}{\approx} \frac{2\pi}{c^2} \omega \Omega R^2,$$

где $\gamma \approx 1$ для корректности результата, так как при расчете не учитывалось изменение метрики для неИСО.

T4

Теперь рассмотрим реакцию превращения электрона и позитрона в мюон и антимюон:

$$e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-.$$

Хотелось бы зная энергию сталкивающихся частиц найти эффективную массу системы и энергии μ^\pm .

Для 4-импульса $p^i = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p})$, для которого верно

$$c^2(2m_\mu)^2 \leq (p_1^i + p_2^i)^2 = \bar{p}_1^2 + \bar{p}_2^2 + 2\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2 = c^2 2m_e^2 + 2(\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 / c^2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2).$$

что приводит нас к неравенству

$$c^2(2m_\mu^2 - m_e^2) \leq \frac{1}{c^2} \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2.$$

При равных энергия $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$ и $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ верно, что

$$\mathbf{p}_1^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - m_e^2 c^2,$$

тогда

$$c^2(2m_\mu^2 - m_e^2) \leq \frac{1}{c^2} \mathcal{E}^2 + \mathbf{p}_1^2 = \frac{2}{c^2} \mathcal{E}^2 - m_e^2 c^2,$$

таким образом

$$\mathcal{E} \geq m_\mu c^2, \quad T_{\text{порог}} = (m_\mu - m_e) c^2,$$

а эффективной массе системы соответствует ...

При налете на неподвижную частицу $\mathcal{E}_2 = m_e c$ и $\mathbf{p}_2 = 0$, тогда

$$(2m_\mu^2 - m_e^2) c^2 \leq \mathcal{E}_1 m_e, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_1 \geq \left(2 \frac{m_\mu^2}{m_e} - m_e \right) c^2.$$

Соответственно для пороговой энергии верно

$$T_{\text{порог}} = \frac{2c^2}{m_e} (m_\mu^2 - m_e^2),$$

а эффективной массе значение ...