Заметки курса «Современная оптика»

Лектор: Колдунов Л. М.

Восторженные слушатели: Хоружий К.
Примак Е.

От: *1 марта 2021 г.*

Содержание

1 Геометрическая оптика

1.1 Волновое уравнение

В общем оптика устроена как-то так: ГО $\subset$ ВО $\subset$ ЭО $\subset$ КО. Вспомним уравнения Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \dfrac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} \boldsymbol{B} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

Будем считать, что нет свободных токов и зарядов. Как вариант, можно найти решение в виде

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp\left(i\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right).$$

Важно, что верны формально замены

$$\frac{\partial}{\partial t} \to i\omega, \qquad \begin{cases} \partial_x \to -ik_x, \\ \partial_y \to -ik_y, \\ \partial_z \to -ik_z, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nabla \to -i\boldsymbol{k}, \qquad \nabla^2 \to -k^2.$$

Приходим к уравнению вида

$$-k^2\boldsymbol{E} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\omega^2\boldsymbol{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}, \quad \to \quad \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{n}.$$

Можем посмотреть на $\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = \text{const}$. Тогда

$$\omega\, dt - k\, dz = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

1.2 Уравнения эйконала

1. Свет распространяется в виде лучей.
2. Среда характеризуется показателем преломления n, более того[1] $c_{\text{ср}} = c/n$.
3. $\int n\, dl \to \min$ (принцип Ферма).

Def 1.1. *Оптический путь* можем определить, как

$$S = \int_A^B n(\boldsymbol{r})\, dl.$$

Посмотрим на уравнение

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad E(\boldsymbol{r}, t) = a(\boldsymbol{r})\exp\left(ik_0\Phi(\boldsymbol{r}) - i\omega t\right),$$

где $\Phi(\boldsymbol{r})$ называем *эйконалом*, а a - амплитуда.

Тогда формально получаем следующее:

$$\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega, \ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \to -\omega^2, \qquad \frac{\partial}{\partial x}E = a'_x \exp(\ldots) + a(\boldsymbol{r})ik_0\,\Phi'_x\exp(\ldots),$$

И для второй производной

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = a''_{xx}\exp(\ldots) + 2ik_0 a'_x\Phi'_x\exp(\ldots) + ik_0 a\Phi''_{xx}\exp(\ldots) - a(\boldsymbol{r})k_0^2|\Phi'_x|^2\exp(\ldots).$$

Таким образом нашли ΔE

$$\nabla^2 E = \nabla^2 a\exp(\ldots) - a(\boldsymbol{r})k_0^2|\operatorname{grad}\Phi|^2\exp(\ldots) + i\left(2k_0(\operatorname{grad} a, \operatorname{grad}\Phi) + k_0 a\nabla^2\Phi\right)\exp(\ldots).$$

Внимательно посмотрели на волновое уравнение, решили сгруппировать вещественную часть и мнимую

$$\nabla^2 a\exp(\ldots) - a(\boldsymbol{r})k_0^2|\operatorname{grad}\Phi|^2\exp(\ldots) + \frac{\omega^2}{c^2}n^2 a\exp(\ldots) = 0, \quad \Rightarrow \quad |\operatorname{grad}\Phi|^2 = \underbrace{\frac{1}{al_0^2}\nabla^2 a}_{\text{изм. ампл.}} + n^2.$$

[1] Будем считать, что лучу нужно проходить больший оптический путь.

Ну, будем считать, что (настоящая область применимости волновой оптики)

$$\left|\lambda \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right| \ll \left|\frac{\partial a}{\partial x}\right|, \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|\lambda \frac{\partial a}{\partial x}\right| \ll a, \qquad \lambda \to 0.$$

И приходим к *уравнению Эйконала*

$$\boxed{|\operatorname{grad}\Phi| = n.} \tag{1.1}$$

Ещё раз вспомним, что волновой фронт имеет вид

$$\omega t - k_0 \Phi = \text{const}.$$

Запишем, что (живём вдоль $\boldsymbol{S}$)

$$\operatorname{grad}\Phi = n\boldsymbol{S}, \qquad \|\boldsymbol{S}\| = 1, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial S} = n.$$

Тогда

$$\omega\, dt - k_0\, d\Phi = 0, \quad \Rightarrow \quad \omega\, dt = k_0\, d\Phi = k_0 \frac{\partial\Phi}{\partial S}\, dS = k_0 n\, dS.$$

1.3 Принцип Ферма

Пусть Φ – однозначно задан, тогда

$$\operatorname{grad}\Phi = n\boldsymbol{S}, \quad \Rightarrow \quad \oint n\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{l} = 0, \quad \Rightarrow \quad \int_{ACB} n\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{ADB} n\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{l}.$$

Но $\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{l} = S\, dl = dl$ на ACB. Тогда

$$\int_{ACB} n\, dl = \int_{ADB} n\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{l} \leqslant \int_{ADB} n\, dl.$$

Что доказывает принцип Ферма.

1.4 Траектория луча (?)

Для луча верно, что

$$n\boldsymbol{S} = \operatorname{grad}\Phi, \qquad |d\boldsymbol{r}| = dl, \qquad \boldsymbol{S} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dl}.$$

В таком случае верно, что

$$n\frac{d\boldsymbol{r}}{dl} = \operatorname{grad}\Phi, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dl}(n\frac{d\boldsymbol{r}}{dl}) = \frac{d}{dl}\operatorname{grad}\Phi = \operatorname{grad}\frac{d\Phi}{dl} = \operatorname{grad} n.$$

Получили *уравнение траектории луча*

$$\boxed{\frac{d}{dl}\left(n\frac{d\boldsymbol{r}}{dl}\right) = \operatorname{grad} n}. \tag{1.2}$$

Например, в однородной среде

$$n = \text{const}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dl^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}l + \boldsymbol{b}.$$

Можно сделать ещё так (найти кривизну траектории?)

$$\boldsymbol{S}\frac{dn}{dl} + n\frac{d\boldsymbol{S}}{dl} = \nabla n, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{S}}{dl} = \frac{1}{n}\left(\nabla n - \boldsymbol{S}\frac{dn}{dl}\right).$$

Получаем (вспомнив трёхгранник Френе)

$$\frac{\boldsymbol{N}}{R} = \frac{1}{n}\left(\nabla n - \boldsymbol{S}\frac{dn}{dl}\right), \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{N^2}{R} = \frac{(\boldsymbol{N}\cdot\nabla n)}{n},$$

или

$$(\boldsymbol{N}\cdot\nabla n) > 0, \quad \Rightarrow \quad \text{луч поворачивает в} \uparrow n. \tag{1.3}$$

1.5 Уравнение луча в параксиальном приближение

Пусть есть некоторая $n(y)$. Пусть луч движется $\theta(y)$, рассмотрим ситуацию преломления, тогда

$$n(y)\cos\theta(y) = n(y + dy)\cos\theta(y + dy), \quad \Rightarrow \quad \left(n(y) + \frac{dn}{dy}\Delta y\right)(\cos\theta(y) - \sin\theta(y)).$$

Раскрыв скобки, получим

$$n(y)\cos\theta(y) = n(y)\cos\theta(y) + \frac{dn}{dy}\cos\theta(y)\Delta y - n(y)\sin\theta(y)\frac{d\theta}{dy}\Delta y.$$

Запишем чуть аккуратнее:

$$\frac{dn}{dy}\cos\theta(y) = n(y)\sin\theta(y)\frac{d\theta}{dy},$$

Считая, что $\sin\theta(y) \approx \theta(y) = dy/dx$, тогда

$$\frac{1}{n}\frac{dn}{dy} = \operatorname{tg}\theta\frac{d\theta}{dy} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad \Rightarrow \qquad y''_{xx} = \frac{1}{n}\frac{dn}{dy}. \tag{1.4}$$

1.6 Пример слоистой среды

Рассмотрим вещество с коммерческим названием SELFOC и переменным показателем преломления вида

$$n^2 = n_0^2(1-\alpha^2y^2)$$

Считая $\alpha y \ll 1$, подставляя в уравнение луча находим, что

$$y''_{xx} = \frac{1}{n_0(1-\alpha^2y^2)^{1/2}}\frac{dn}{dy} = \frac{-n_0\alpha^2y}{n_0} = -\alpha^2y,$$

и мы снова всё свели к гармоническому осциллятору.

Нужно ещё разобрать мнимую часть, в которой сидит факт об отсутствии взаимодействия лучей.

2 Матричная оптика

Будем рассматривать оптически центрированные системы, введем нормально к OX ось OY. Всё у нас аксиально симметрично, тогда луч можно характеризовать

$$\{y_1, \theta_1\} \to \{y_1, n_1\theta_1\},$$

где принято обозначение $n\theta \overset{\text{def}}{=} V$.

Вообще после прохождения оптической системы можем записать, что происходит некоторое линейное преобразование

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_1\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\theta_1 \end{pmatrix}.$$

2.1 Матрица перемещения

Пусть луч распространяется в однородной среде, под θ_1 распространяется, тогда $\theta_2 = \theta_1$. Что произошло с y? Ну, $y_2 = y_1 + l\theta_1$, тогда

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_2\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\theta_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где соответствующую матрицу обозначим за T.

2.2 Матрица преломления на сферической поверхности

Есть некоторая ось OX, будем считать радиус кривизны положительным, если он идёт направо. Смотреть рис. O2.1. Верно, что

$$n_1\beta_1 = n_2\beta_2, \qquad \beta_1 = \theta_1 + \alpha, \qquad \beta_2 = \theta_2 + \alpha.$$

Тогда,

$$\alpha = \frac{y_1}{R}, \quad \Rightarrow \quad n_2\theta_2 = n_1\theta_1 + (n_1 - n_2)\frac{y_1}{R}, \quad \Leftrightarrow \quad V_2 = V_1 + \frac{n_1 - n_2}{R} y_1.$$

Теперь можем записать матрицу преломления P

$$P(y, V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix}, \qquad P(y, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где $(n_2 - n_1)/R$ называют *оптической силой*.

2.3 Общий подход

Пусть есть схема рис. 02.2, тогда

$$\underbrace{M_3 M_2 M_1}_{M} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}, \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{a} = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} \boldsymbol{b}.$$

Посмотрим на коэффициенты, приравнивая их к 0. Пусть

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix},$$

тогда $\theta_2 = cy_1$, тогда при $D = 0$, получается, что $O\Pi_1$ – фокальная плоскость (слева).

Пусть $B = 0$, тогда $y_2 = Ay_1$, тогда это изображение, и говорим, что эти *плоскости сопряженные*, а коэффициент A – *коэффициент поперечного увеличения*.

Пусть $C = 0$, тогда $\theta_2 = \theta_1 D$, что соответствует телескопической системой, а коэффициент D – *коэффициент углового увеличения*.

Теперь рассмотрим $A = 0$, получается, что это фокальная плоскость справа.

2.4 Задачи

Пример №0

Рассмотрим преломление на первой границе, где

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{nR_1} & 1/n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} + \frac{1-n}{R_1} & 1 \end{pmatrix},$$

получается оптическая сила системы получилась равной
$$(n-1)\left(-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right),$$
согласно определению.

Найдём теперь после линзы изображение объекта (рис. О2.4)
$$\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1/F & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{b}{F} & b\\ -\frac{1}{F} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-b/F & a(1-b/F)+b\\ -1/F & -a/F+1\end{pmatrix}.$$
Для сопряженности плоскостей необходимо и достаточно, чтобы $B=0$, то есть
$$a+b-\frac{ab}{F}=0,\qquad\Rightarrow\qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}.$$
Тогда увеличение можно увидеть в $A=1-b/F$.

Пример №2

Показатель преломления $n=1.56$, высота стрелки $h=2$ мм, в переменных (y,V) запишем (см. рис. 02.5)
$$\begin{pmatrix}1 & x/n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -0.56/2.8 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 15\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{x}{7.8} & 15-\frac{x}{0.78}\\ -0.2 & -2\end{pmatrix},$$
требуя сопряженности плоскостей
$$15-\frac{x}{0.78}=0,\qquad\Rightarrow\qquad x=11.7\text{ см}.$$
Коэффициент увеличения а-ля $1/D$, то есть равен $-1/2$.

Пример №4

Параллельный пучок света проходит через шарик радиуса $R=1$ см, с показателем преломления $n=1.4$. С шариком $n=2$ луч собирается на полюсе шарика. В общем случае
$$\begin{pmatrix}1 & F\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{-(1-n)}{-R} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{2R}{n}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{n-1}{R} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2F(n-1)+(n-2)R}{nR} & \frac{F(-n)+2F+2R}{n}\\ \frac{2-2n}{nR} & \frac{2}{n}-1\end{pmatrix},$$
тогда
$$-2F(n-1)=R(n-2).$$

Пример №11

См. рис. О2.5. Пусть оптические силы P_1 и P_2, а расстояние l, тогда
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{F_2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & l\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{F_1} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{l}{F_1} & l\\ -\frac{F_1+F_2-l}{F_1F_2} & 1-\frac{l}{F_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-P_1 & l\\ P_1+P_2-P_1P_2l & 1-P_2\end{pmatrix}.$$
Давайте считать $1/F=(n-1)G$. Хочется избавиться от зависимости от n. Тогда
$$l=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)G_1}+\frac{1}{(n-1)G_2}\right)=\frac{F_1+F_2}{2}.$$

3 Матричная оптика (Продолжение)

Обобщение на случай отражения

Была некоторая матрица преломления
$$P(y,V)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{n_2-n_1}{R} & 1\end{pmatrix},$$
и матрица распространения
$$T=\begin{pmatrix}1 & l/n\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$
В случае отражения видимо хочется заменить $n\to -n$. Знак θ определяется, как вниз, или вверх.

Пусть теперь $n_1 = n$, $n_2 = -n$, тогда матрица отражения

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(-n-n)/r & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n/r & 1 \end{pmatrix}.$$

Так фокусное расстояние для сферического зеркала $R/2$, что логично. В случае же, если мы захотим следить за направлениями осей, то можно вернуться к переменным $\{z, \theta\}$.

Пример 1 (плоскопараллельная пластина)

Пусть есть пластинка толшины h, то

$$\begin{pmatrix} 1h/n & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} 1 & hN/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2 (плоскопараллельная пластина)

Задача 13, см. рис. 03.1, блокнот 3, что позволяет построить матрицу отражения. Если добавить распространения в воздухе, то можно поговорить про фокальные плоскости.

3.1 Периодические оптические системы

Пусть есть некоторая периодическая система с матрицей $ABCD$, действующая на луч $\{y_0, V_0\}$

$$\begin{pmatrix} y_m \\ V_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} y_0 \\ V_0 \end{pmatrix}.$$

Хотелось бы понять на устойчивость такого действия системы на луч, для этого посмотрим на

$$\begin{pmatrix} y_{m+1} \\ V_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_m \\ V_m \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_{m+1} = Ay_m + Bv_m \\ v_{m+1} = Cy_m + Dv_m \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V_m = \frac{y_{m+1} - Ay_m}{B},$$

теперь можем, забыв про V, говорить про y_m

$$\frac{y_{m+1} - Ay_{m+1}}{B} = Cy_m + \frac{D(y_{m+1} - Ay_m)}{B}, \quad \Rightarrow \quad y_{m+2} - Ay_{m+1} = BCy_m + D(y_{m+1} - Ay_m)$$

и, наконец,

$$y_{m+2} - (A+D)y_{m+1} + \cancelto{1}{(AD - BC)} y_m = 0,$$

которое решается также, как и диффур, подстановкой $y_m = y_0 h^m$, тогда

$$y_m = y_0 h^m, \quad \Rightarrow \quad h^2 - (A+D)h + 1 = 0,$$

считая $\operatorname{tr} M = A + D \overset{\text{def}}{=} 2b$, находим, что

$$h^2 - 2bh + 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad h_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - 1}$$

что приводит нас к некоторому к следующей классификации

$|b| > 1$ – неустойчивый режим

$|b| = 1$ – граница

$|b| < 1$ – устойчивость

Рассмотрим $b < 1$ и для удобства положим $b = \cos\varphi$, тогда

$$h_{1,2} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi = e^{i\varphi}, \quad \Rightarrow \quad y_m = \alpha_1 e^{im\varphi} + \alpha_2 e^{-im\varphi} = \underline{y_{\max}} \sin(m\varphi + \underline{\varphi_0}),$$

где подчеркнутые параемтры определяются начальными условиями.

Стоит заметить, что хотелось бы θ_m периодической.

Пример 2

См. рис. O3.2, блокнот 3. Получаем b

$$b = \frac{2 - f/F}{2}, \quad |b| < 1, \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{d}{F} < 4.$$

Пусть $d = F$, тогда $b = 1/2$, соответственно $b = \cos\varphi$, и $\varphi = \pi/3$, получается система будет периодичной.

При $d = 2F$, $b = 0$. При $d = 0$ получим одну линзу. При $d = 4F$ будем понятная картинка.

Пример 3 (Оптический резонатор)

Матрица будет выглядеть так (см. Блокнот). Тогда b

$$b = 2\bigg(\underbrace{1 + \frac{L}{R_1}}_{g_1}\bigg)\bigg(\underbrace{1 + \frac{L}{R_2}}_{g_2}\bigg) - 1,$$

и рассмотрим $0 \leqslant g_1 g_2 \leqslant 1$.

Первый случай (1) плоского резонатора находится на гранце. Другой случай (2) это симметричный кофокаьный резонатор, тогда $R_1 = -L$, и $R_2 = -L$. Возможен симметричный концентрический $R_1 = R_2 = -L/2$.

Пусть есть некоторая активная среда, процесс накачки.

4 Оптика пучков

Вспомним волновое уравнение

$$\nabla^2 E - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0,$$

пусть $\varepsilon \neq 1$ и $\mu = 1$, считая волну монохроматической всегда можем получить уравнение Гельмгольца

$$E = f(r)\exp(-i\omega t), \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 f + \varepsilon k^2 f = 0,$$

где $k_0^2 = \omega^2/c^2$. Есть решение в виде плоской волны $f_0 e^{-k_0 \cdot r}$, решение в виде $Ar^{-1}e^{ik_0\cdot r}$. Можно рассматривать также параболическое приближение.

Выберем некоторую ось z. Есть два места, где встречается r – в числителе и аргументе экспоненты. Известно, что $r^2 = \rho^2 + z^2$, тогда

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = z\left(1 + \frac{\rho^2}{z^2}\right)^{1/2} \approx z + \frac{\rho^2}{2z}.$$

Говоря об аргументе хочется, чтобы всё работало, для этого

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(z + \frac{\rho^2}{2z} + \ldots\right) = \frac{2\pi}{\lambda}z + \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\rho^2}{2z} + \ldots, \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\rho^2}{2z} \ll \pi.$$

Так[2] и пришли к *параболическому приближению*, вида

$$f = \frac{A}{z}\exp\left(ikz + ik\frac{\rho^2}{2z}\right).$$

4.1 Параболическое приближение

Подробнее посмотрим на

$$f(\boldsymbol{r}) = A(\boldsymbol{r})\exp(ikz).$$

Точнее нас интересует некоторая модуляция сигнала

$$\frac{\partial A}{\partial z}\lambda \ll A \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A}{\partial z} \ll \frac{A}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A}{\partial z} \ll A \cdot k,$$
$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\cdot\lambda \ll \frac{\partial A}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll \frac{\partial A}{\partial z}\cdot k.$$

Считая $k^2 = \varepsilon\omega^2/c^2$, можем записать, что

$$\nabla^2 f + \frac{\varepsilon}{c^2}\omega^2 f = 0, \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 f + k^2 f = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial z}e^{ikz} + Aike^{ikz}$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \nabla_\perp^2.$$

Для второй производной

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}e^{ikz} + 2\frac{\partial A}{\partial z}ike^{ikz} - Ak^2 e^{ikz}.$$

Подставляя всё в уравнение находим, что

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2\frac{\partial A}{\partial z}ik - \cancel{Ak^2} + \nabla_\perp^2 A + \cancel{Ak^2} = 0.$$

[2] Видно, что входит n зон Френеля.

Вспоминая малость второй производной, получаем

$$\boxed{\nabla_\perp^2 A + 2ik\frac{\partial A}{\partial z} = 0} \quad \text{— параксиальное приближение уравнения Гельмгольца.} \tag{4.1}$$

Возможно, тут минус. На всякий случай хочется проверить, что параболическая волна это решение.

Однако, мы будем подробнее работать конкретно с решением

$$f(r) = \frac{A}{z}\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2}{2z}\right), \quad \Rightarrow \quad f(r) = A(r)e^{-ikz}, \qquad A(r) \overset{\text{def}}{=} \frac{A}{z}\exp\left(-ik\frac{\rho^2}{2z}\right).$$

Здесь хочется сделать некоторый сдвиг

$$z \longrightarrow q(z) \overset{\text{def}}{=} z + iz_0,$$

где $z_0 = \text{const}$ (Рэлеевская длина), $q(z)$ – q-параметр. Тогда уравнение придет к виду

$$f(r) = \frac{A}{z+iz_0}\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2}{2(z+iz_0)}\right).$$

Далее заметим, что

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z+iz_0} = \frac{z-iz_0}{z^2+z_0^2}, \quad \Rightarrow \quad f(r) = A\left(\frac{z}{z^2+z_0^2} - i\frac{z_0}{z^2+z_0^2}\right)\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2}{2}\left(\frac{z}{z^2+z_0^2} - i\frac{z_0}{z^2+z_0^2}\right)\right).$$

Тогда получается

$$f(r) = A\left(\frac{z}{z^2+z_0^2} - i\frac{z_0}{z^2+z_0^2}\right)\exp\left(-\frac{k\rho^2}{2}\frac{z_0}{z^2+z_0^2}\right)\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2 z}{2(z^2+z_0^2)}\right).$$

Внимательно оглядев выражение в экспоненте, понимаем что хочется переписать его в виде

$$-\frac{2\pi}{2}\frac{\rho^2 z_0}{\lambda(z^2+z_0^2)} = -\frac{\rho^2}{\frac{\lambda}{z_0\pi}(z^2+z_0^2)} = -\frac{\rho^2}{W^2(z)}, \qquad W^2(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{\lambda}{z_0\pi}(z^2+z_0^2). \tag{4.2}$$

Другим переобозначением будет

$$\frac{z}{z^2+z_0^2} = \frac{1}{z\left(1+\frac{z_0^2}{z^2}\right)}, \qquad R(z) \overset{\text{def}}{=} z\left(1+\frac{z_0^2}{z^2}\right). \tag{4.3}$$

Тогда исходное уравнение перепишется в виде

$$f(r) = A\left(\frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi W^2(z)}\right)\exp\left(-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right)\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)}\right).$$

Приводя к удобной форме комплексную амплитуду, получим

$$f(r) = \frac{A}{iz_0}\frac{W_0}{W(z)}\exp\left(-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right)\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z)\right), \qquad \zeta \overset{\text{def}}{=} \arctan\frac{z}{z_0}, \qquad W_0 \overset{\text{def}}{=} W(0). \tag{4.4}$$

4.2 Интенсивность

Def 4.1. Интенсивность есть

$$I = \langle |\boldsymbol{S}|\rangle_t = \left\langle \frac{c}{4\pi}\sqrt{\varepsilon}E^2\right\rangle = \frac{cn}{4\pi}\left\langle E^2\right\rangle = \frac{cn}{8\pi}E_0^2, \qquad [I] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}\cdot\text{см}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}.$$

Но далее $I \sim E_0^2$ превращается $I = E^2$. Вспоминая, что всё хорошо, и $I = EE^*$, находим, что

$$I = A_0^2\frac{W_0^2}{W^2(z)}\exp\left(-\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right), \tag{4.5}$$

и именно поэтому пучки называются Гауссовыми. Получается, что при увеличение z наш пучок размывается (см. $I(\rho)$). Если мы задумаемся, что есть $I_{\text{центр}}(z) \sim 1/z^2$.

Если нас интересует мощность, то

$$P = \int_0^\infty I(\rho)2\pi\rho\, d\rho = \frac{1}{2}I_0\pi W_0^2, \qquad I_0 = A_0^2.$$

Если посчитать

$$\alpha = \frac{1}{P}\int_0^{\rho_0} I(\rho,z)2\pi\rho\, d\rho = 1 - \exp\left(-\frac{2\rho_0^2}{W^2(z)}\right),$$

так, например, $\rho_0 = W(z)$ приводит к величине $\alpha \approx 0.86$, а при $\rho_0 = \frac{3}{2}W(z)$ получим $\alpha \approx 0.99$. Поэтому $W(r)$ называется *радиусом (диаметром) пучка.*

Вспомним зависимость радиуса пучка от z

$$W(z) = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}\left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)},$$

где в $W_0 = W(0) = \sqrt{\lambda z_0/\pi}$, а при больших z

$$\lim_{z\to\infty} W(z) \approx z\sqrt{\frac{\lambda}{\pi z_0}}, \qquad \theta = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi z_0}} = \frac{W_0}{z_0} = \lambda\sqrt{\frac{1}{\lambda\pi z_0}} \approx \frac{\lambda}{W_0}.$$

Также можно указать $2z_0$ – *глубина резкости.*

Если взять гелий-неоновый лазер при длине волны $\lambda_0 = 633$ нм, получится из $2W_0 = 2$ см, то $2z_0 = 1$ км, а при $2W_0 = 200$ мкм будет $2z_0 = 1$ мм.

Тот момент, что фаза набегает на π – эффект Гюйи. Говоря о волновом фронте,

$$k\left(z + \frac{\rho^2}{2R}\right) + \zeta(z) = 2\pi m, \quad \Rightarrow \quad z + \frac{\rho^2}{2R} = m\lambda + \frac{\zeta\lambda}{2\pi},$$

что приводит нас к тому, что $\rho^2/2R$ – *радиус кривизны.*