Билеты курса «Гармонический анализ»

Источник: an_explanations.pdf
Лектор: Карасёв Р.Н.

Восторженные читатели: Хоружий Кирилл
Примак Евгений

От: *11 июня 2021 г.*

Содержание

1 Банаховы пространства

1.46 Непрерывне линейные отображения

Def 1.1. **Норма** линейного $A\colon E \to F$ между банаховыми — $||A|| = \sup\{||A(x)|| \mid x \in E, ||x|| \leqslant 1\}$.

Можно сформулировать утверждения:

$$\forall x \in E,\ ||Ax|| \leqslant ||A|| \cdot ||x||$$

и для $f\colon E \to F$ и $g\colon F \to G$ верно:

$$||g \circ f|| \leqslant ||g|| \cdot ||f||.$$

Ядро отображения между банаховыми это просто $\ker A = \{x \in E \mid Ax = 0\}$.

1.47 Факторпространство банахового пространства

Def 1.2. Если $G \subset E$ – замкнутое неполное подпространство E, то на факторпрострнастве E/G **норма**:

$$||x + G|| = \inf\{||x + y|| \mid y \in G\} = \inf\{||x - y|| \mid y \in G\} = \operatorname{dist}(x, G) = \operatorname{dist}(0, x + G).$$

Lem 1.3. *Определенная выше $|| \cdot ||\colon E/G \to \mathcal{R}$ для замкнутого $G \subset E$ в банаховом E явялется нормой.*

Lem 1.4. *Естественная проекция $\pi\colon E \to E/G$ для замкнутого $G \in E$ имеет единичную норму.*

Lem 1.5. *Факторпространство E/G банохова пространства по замкнутому подпространству полно.*

1.48 Изоморфизм непрерывных линейных отображений

Lem 1.6. *Если отображение банаховых $A\colon E \to F$ непрерывно, то соответствующее $\bar{A}\colon E/\ker A \to F$ тоже непрерывно и $||\bar{A}|| = ||A||$.*

Def 1.7. Линейное отображене банаховых $A\colon E \to F$ — **изоморфизм**, если A непрерывно и $\boldsymbol{A}$ тоже непрерывно.

Def 1.8. Если линейное непрерывное из банаховых $A\colon E \to F$ имеет замкнутый $\operatorname{Im} A(E)$, то оно порождает изоморфизм $E/\ker A \to A(E)$.

1.49 Эпсилон-сети, предкомпактность и вполне ограниченность

Def 1.9. Для топологического пространства M, его $X \subseteq M$ — **предкомпактным**, если $\overline{X}$ – компактно.

Def 1.10. $X \subseteq M$ называется **вполне ограниченным**, если $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \subseteq X$ – конечная ε-сеть. (равносильно и утверждение с $N \subset X$) Или $\forall \varepsilon > 0$, X покрывается конченым набором шаров с центрами в X и радиусами ε.

Thr 1.11. *Для полного метрического пространства M, его $X \subseteq M$ – компактно $\iff X$ – вполне ограничено.*

1.50 Теорема Арцела-Асколи

Def 1.12. Множество функций $X \subset C(K)$(над метрическим компактом) **равностепенно непрерывно** , если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\colon \forall f \in X\, \forall x, y \in K,\ \rho(x, y) < \delta \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Если все функции ещё и L-липшецивы, то $|f(x) - f(y)| = L\rho(x, y)$.

Def 1.13. **Модуль непрерывности** липшецивых функций:

$$\omega_X(\delta) = \sup\left\{|f(x) - f(y)| \mid f \in X,\ \rho(x, y) < \delta\right\}.$$

И тогда, X – равностепенно непрерывно $\iff \omega_X(\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$.

Thr 1.14 (Арцела-Асколи)**.** *Множество $X \subset C(K)$ предкомпактно $\iff X$ равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно.*

2 Гильбертовы пространства

2.51 Гильбертово пространство

Def 2.1. Если норма в банаховом E порождается +определённым $||x|| = \sqrt{(x,x)}$, то E — **гильбертово**.

Thr 2.2 (Неравнество Коши-Буняковского). $|(x,y)| \leqslant ||x|| \cdot ||y||$

$$(ax+by, ax+by) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad |a|^2||x||^2 + a\bar{b}(x,y) + b\bar{a}\overline{(x,y)} + |b|^2||y||^2 \geqslant 0$$

Thr 2.3. *Вещественное банахаво E – гильбертово* ***тогда и только тогда****, когда $\forall x, y \in E$:*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$

2.52 Полнота и замкнутость ортонормированной системы в гильбертовом пр-ве

Def 2.4. Последовательность векторов (φ_k) — **полная система векторов** в банаховом E, если $\overline{\langle\varphi_k\rangle} = E$. Другими словами $\forall x \in E$ и $\forall > 0$ найдется конечная $a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n$ такая, что $||x - a_1\varphi_1 - \cdots - a_n\varphi_n|| < \varepsilon$.

Def 2.5. (φ_k) — **замкнутая система векторов** в гильбертовом H, если в $\forall x \in H\colon (x, \varphi_k) = 0$, $\forall k$.

Thr 2.6. *$\forall\varphi_k$ – ортогональной в гильбертовом H эквивалентны утверждения:*

- *полнота системы;*
- *замкнутость системы;*
- *сходимость ряда Фурье $\forall x \in H$ по системе (φ_k) к x;*
- *равенство Парсеваля для коэффициентов Фурье $\forall x \in H$ по данной системе.*

2.53 Изометрии гильбертовых пространств

Def 2.7. Линейное $A\colon E \to F$ — **изометрия**, если оно биективно и сохраняет норму: $||A|| = ||A^{-1}|| = 1$.

Lem 2.8. *Изометрия гильбертовых пространств сохраняет скалярное произведение.*

Thr 2.9 (Рисса-Фишера). *$\forall H$, в котором $\exists$ счетная полная система элементов, изометрична $\mathcal{C}^n(\mathcal{R}^n)$ или комплексному(действительному) варианту бесконечномерного пространства последовательностей $l_2 = L_2(\mathcal{N})$.*

2.54 Метрическая проекция и двойственное к гильбертову пр-во

Thr 2.10. *$V \subset H$ – замкнутое линейное подпространство (афинное) гильбертова. $\forall x \in H\, \exists! P_V(x) \in V$ ближайший к x то есть $||x - P_V(x)|| = dist(x, V)$.*

Thr 2.11. *Если $V \subset H$ – замкнутое линейное подпространство, то* ***метрическая проекция*** *$P_V\colon H \to V$ линейна, $||P_V|| = 1$ при $V \neq 0$ и имеет место ортогональное разложение в прямую сумму замкнутых подпространств $H = V \oplus \ker P_V$.*

2.55 Двойственное к гильбертову пространству

Thr 2.12. *$\forall y \in H\colon \lambda_y(x) = (x, y)$. Тогда $\lambda_y \in H'$, $||\lambda_y|| = ||y||$ и все элементы двойственного пространства H' имеют такой вид.*