Заметки курса «Аналитическая механика II»

Семинарист: Сахаров А. В.

Восторженные слушатели: Хоружий К.
Примак Е.

От: *30 марта 2021 г.*

Содержание

1 Малые колебания консервативных систем.

Запишем уравнения Лагранжа для консервативной голономной системе:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \qquad q \in M^n; \qquad q, \dot q \in TM^n.$$

Тогда можно сказать, что

$$L(q, \dot q, t) \colon TM^n \times \mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{R}^1.$$

Параллельным переносом выберем $q = 0$ – положение равновесия. Тогда считаем, что $q(t),\ \dot q(t) \in \varepsilon$ – окрестности. В идеале мы хотим всё линеаризовать, тогда

$$T = T_2 + T_1 + T_0 = T_2 = \frac{1}{2}\dot q^i \dot q^j A_{ij}(q) \approx \frac{1}{2}\dot q^{\mathrm{T}} A(0) \dot q + \ldots, \qquad A(0) = \frac{\partial^2 T(0)}{\partial \dot q^{\mathrm{T}} \partial \dot q}.$$

т. к. для консервативных систем $T_1 = T_0 = 0$.

Аналогично можем сделать для потенциальной энергии

$$\Pi = \Pi(0) + \frac{\partial \Pi(0)}{\partial q^{\mathrm{T}}} q + \frac{1}{2} q^{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial q^{\mathrm{T}} \partial q} q + \ldots \approx \frac{1}{2} q^{\mathrm{T}} C(0) q, \qquad C(0) = \frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial q^{\mathrm{T}} \partial q}.$$

Таким образом мы пришли к уравнениям вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{A\ddot q + Cq = 0.}$$

Последнее уравнение называется *уравнением малых колебаний*. Важно, что A – положительно определена, в силу невырожденности уравнений на $\ddot q$ уравнений Лагранжа.

Из линейной алгебры понятно, что существуют координаты $\boldsymbol{\theta} \in M^n$, а также невырожденная матрица перехода к новым координатам $U \colon \boldsymbol{q} = U\boldsymbol{\theta}$, и $U^{\mathrm{T}}AU = E,\ U^{\mathrm{T}}CU = \Lambda$ – диагональная матрица. Тогда верно, что

$$T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}} A \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}} U^{\mathrm{T}} A U \dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot\theta_i^2.$$

Аналогично для потенциальной энергии

$$\Pi = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} C q = \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}} U^{\mathrm{T}} C U \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}} \Lambda \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \theta_i^2.$$

Это ещё сильнее упрощает уравнения Лагранжа:

$$A\ddot{\boldsymbol{q}} + C\boldsymbol{q} = 0 \qquad \to \qquad \ddot\theta_i + \lambda_i \theta_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь λ_i – действительные диагональные элементы Λ. При различных λ получаем, что

$$\begin{aligned} \lambda_i > 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \theta_i = c_i \sin(\sqrt{\lambda_i} t + \alpha_i); \\ \lambda_i = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \theta_i = c_i t + \alpha_i.; \\ \lambda_i < 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \theta_i = c_i \exp(\sqrt{-\lambda_i} t) + \alpha_i \exp(-\sqrt{-\lambda_i} t). \end{aligned}$$

где последние два – уже не колебаниям.

Возвращаясь к удобной форме, получаем, что

$$\boldsymbol{q} = U\boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{u}_i \sin(\sqrt{\lambda_i} t + \alpha_i),$$

где $\boldsymbol{u}_i$ – амплитудный вектор i-го главного колебания. `Таким образом консервативная система движется по суперпозиции некоторых главных колебаний (гармонических осцилляций).`

Иначе мы можем интерпретировать это так, что кинетическая энергия[1] образует некоторую метрику, а амплитудные вектора образуют некоторый ортонормированный базис.

$$U^{\mathrm{T}} A U = E \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{u}_j = \delta_{ij}$$

Получив матрицы $A,\ C$ переходим к $[C - \lambda A]\boldsymbol{u} = 0$, получая

$$|C - \lambda A| = 0,$$

что называют *вековым уравнением*, или *уравнением частот*. Из него получим $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, и уже перейдём к системе уравнений вида $|C - \lambda_i A|\boldsymbol{u}_i = 0$.

---

[1] Переписать грамотнее.

2 Вынужденные колебания и диссипативные системы

2.1 Вынужденные колебания

Давайте испортим консервативность так, чтобы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i(t).$$

Как выяснили раннее

$$q = U\theta. \qquad U^{\mathrm{T}}AU = E, U^{\mathrm{T}}CU = \Lambda.$$

Посчитаем элементарную работу добавленной силы

$$\delta A = Q_i \delta q^i = \Theta^{\mathrm{T}}\delta\theta = Q^{\mathrm{T}}U\delta\theta,$$

тогда можно записать, что

$$\Theta = U^{\mathrm{T}}Q, \qquad Q = \left(U^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\Theta,$$

то есть *преобразование обобщенных сил*. То есть уравнение приходит к виду

$$A\ddot{q} + Cq = Q(t), \qquad \overset{\text{бог с индексами}}{=} \qquad \ddot{q}_i + \lambda_i\theta_i = \Theta_i(t).$$

Тогда ответ запишется в виде

$$q = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{u}_i \sin\left(\sqrt{\lambda_i}\, t + \alpha_i\right) + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i \theta_i^*(t),$$

где вторая сумма соотвествует *вынужденным колебаниям*, а первая свободным гармоническим колебаниям.

Пусть так вышло, что

$$\begin{cases} \theta_i^* = b_i \sin(\Omega t) \\ \Theta_i(t) = a_i \sin(\Omega t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b_i\left(\lambda_i - \Omega^2\right) = a_i, \quad \Rightarrow \quad \theta_i^* = \frac{a_i}{\lambda_i - \Omega^2}\sin(\Omega t).$$

В случае же *резонанса* ищем решение в виде

$$\theta_i^*(t) = b_i t \cos(\Omega t), \quad \Rightarrow \quad b_i = -\frac{a_i}{2\Omega}.$$

И здесь мы видим первые звоночки от Пуанкаре, о конце линейной теории.

Задача 1 (18.42)

Есть некоторая платформа, перемещающаяся по закону $a \sin \omega t$. На ней подвешены куча стержней, соединенных пружинами разной упругости, на разных высотах. Вопрос – на каких ω возможен резонанс?

Перейдём в СО платформы, тогда возбуждающая сила – сила инерции, соотвественно для всех стержней возбуждающая сила одинаковая

$$\boldsymbol{J}_i^e = -m\boldsymbol{w}_i^e = m\omega^2 a \sin(\omega t)\boldsymbol{e}.$$

Посчитаем обобщенные силы, как

$$Q_1^e = \ldots = Q_n^e = \frac{\delta A_i}{\delta\varphi_i} = \frac{(\boldsymbol{J}_i^e \cdot \delta\boldsymbol{r}_i)}{\delta\varphi_i} = \frac{1}{2}m\omega^2 al\sin(\omega t).$$

Получается, что мы посчитали столбец обобщенных сил

$$\boldsymbol{Q} = \frac{l}{2}\left[1,\ 1,\ \ldots, 1\right]^{\mathrm{T}}\ a\omega^2 m\sin(\omega t).$$

По крайней мере мы можем сказать, что у нас есть главная частота

$$\lambda_1 = \frac{3g}{2l}, \qquad \boldsymbol{u}_1 = \left[1,\ 1,\ \ldots, 1\right]^{\mathrm{T}}.$$

Теперь выпишем матрицу кинетической энергии

$$A = \frac{ml^2}{6}E, \qquad U^{\mathrm{T}}AU = E, \quad \Rightarrow \quad UU^{\mathrm{T}} = E,$$

с точностью до множителя. Тогда $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ – ортогональный базис.

Теперь вспоминаем, что

$$\Theta = U^{\mathrm{T}}Q = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}} \\ \ldots \\ \boldsymbol{u}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \boldsymbol{u}_1\ \frac{1}{2}a\omega^2 lm\sin(\omega t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{u}_1 \\ \ldots \\ \boldsymbol{u}_n^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{u}_1 \end{pmatrix}\ \frac{1}{2}a\omega^2 lm\sin(\omega t) = \begin{pmatrix} n \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}_1\ \frac{1}{2}a\omega^2 lm\sin(\omega t).$$

Ура, от сих приходим к приятным уравнениям Лагранжа

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_q + \lambda_1 \dot{\theta}_1 = na\omega^2 \dfrac{l}{2} \sin\omega t, \ddot{\theta}_2 + \lambda_2 \theta_2 \\ \qquad \dots \\ \ddot{\theta}_n + \lambda_n \theta_n = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{3g}{2l}}.$$

2.2 Диссипативные системы

И снова испортим консервативную систему до диссипативной,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + \tilde{Q}_i(\dot{q}) = Q_i(q, \dot{q}).$$

С кинетической всё как обычно, тогда

$$T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}} A \dot{\boldsymbol{q}}; \qquad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}(0) + \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{q} + \frac{\partial \boldsymbol{Q}(0)}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}}\dot{\boldsymbol{q}} = -C\boldsymbol{q} - B\dot{\boldsymbol{q}}.$$

Где ввели матрицы вида

$$C = -\frac{\partial \boldsymbol{Q}(0)}{\partial \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}}; \qquad B = -\frac{\partial \boldsymbol{Q}(0)}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}}.$$

В таком случае уравнение примет вид

$$A\ddot{\boldsymbol{q}} + B\dot{\boldsymbol{q}} + C\boldsymbol{q} = 0, \tag{2.1}$$

получили *линеаризация уравнений Лагранжа I*. Но его сходу к каноническом виду не привести.

Вспомним, что энергия системы

$$E = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}} \cdot A\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{q} \cdot C\boldsymbol{q}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = A\ddot{\boldsymbol{q}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + C\boldsymbol{q} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} = [A\ddot{\boldsymbol{q}} + C\boldsymbol{q}] \cdot \dot{\boldsymbol{q}} = -B\dot{\boldsymbol{q}}^2 = N.$$

И пошла классификация: если $N \equiv 0$, то силы называем *гироскопическими*. Если $N \leqslant 0$, то силы *диссипативные*.

Def 2.1. Положение равновесия $\boldsymbol{q}^*$ называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво **и**

$$\exists \delta \colon \forall\, |\dot{\boldsymbol{q}}| < \delta,\ |\boldsymbol{q}| < \delta \quad \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{q}(t) = 0,\ \lim_{t\to\infty} \dot{\boldsymbol{q}}(t) = 0.$$

Возвращаясь к уравнению, вспомним что решение ищется в виде[2]

$$\boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{2n} C_i \boldsymbol{u}_i \exp(\lambda_i t), \quad \Rightarrow \quad \left[A\lambda^2 + B\lambda + C\right]\boldsymbol{u} = 0, \quad \Rightarrow \quad \det\left[A\lambda^2 + B\lambda + C\right] = 0,$$

тогда мы находим $2n$ решений $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$, и, соответственно, $2n$ амплитудных векторов.

Thr 2.2 (Достаточное условие асимптотической устойчивости)**.** *Для того, чтобы решение* $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^*$ *было асимптотически устойчиво достаточно, чтобы*

$$\operatorname{Re}\lambda_i < 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, 2n\}.$$

Если $\exists \lambda_i \colon \operatorname{Re}\lambda_i > 0$*, тогда всё не так хорошо.*

Как узнать, что ..., для этого достаточно посмотреть на рыбу

$$a_m \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + a_0 = 0,$$

и отрежем голову и хвост, получим матрицу

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & \dots & 0 \\ a_m & a_{m-2} & \dots & 0 \\ 0 & a_{m-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix},$$

так получили матрицу Гурвица.

Thr 2.3 (Критерий Рауса-Гурвица)**.** *Для того, чтобы* $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ *необходимо и достаточно, чтобы* $a_i > 0$*, и*

$$\Delta_1,\ \Delta_3,\ \ldots,\ \Delta_{m-1} > 0.$$

Есть другие формы.

---

[2] В общем случае решение системы вообще сложнее (при кратных λ), но качественно всё примерно в таком же духе, поэтому, ну, всё хорошо.

3 Элементы теории бифуркаций

Общий подход

Запишем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q,$$

где основная идея Гамильтонова формализма – всегда уравнения разрешимы относительно ускорений $\ddot{q} = \ddot{q}(q, \dot{q})$. Пусть $x_1 = q_1$, $x_2 = \dot{q}_1$, $x_3 = q_2$, $x_4 = \dot{q}_2$, и т.д. Приведем уравнения к *нормальной форме Коши*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in M^{2n},$$

где M^{2n} – фазовое пространство, или пространство состояний.

Не умоляя общности будем просто рассматривать системы вида $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, считая, что $\boldsymbol{x} \in M^n$. Посмотрим на некоторую $\boldsymbol{x}_0 \in M^n$, – начальные условия. Продолжаем считать, что решение охапки диффуров единственно, тогда и через каждую точку конфигурационного многообразия проходит единственная траектория.

Def 3.1. Множество траекторий (интегральных кривых) образует *фазовый портрет*. *Бифуркация* – качественное изменение фазового портрета при плавном изменении параметров модели. *Бифуркационная диаграмма* отображает бифуркацию системы.

3.1 Двумерные динамические системы

Посмотрим ещё на системы на $\mathbb{R}^2$.

Def 3.2. *Предельный цикл* – замкнутая периодическая траектория (ЗПТ) системы дифференциальных уравнений, изолированная от других ЗПТ. Также ЗПТ такая, что для всех траекторий из некоторой окрестности периодических траекторий стремится к ней при $t \to +\infty$ (установившийся периодический цикл) **или** при $t \to -\infty$ (неустановившийся предельный цикл).

Другими словами является аттрактором для некоторой своей окрестности.

4 Метод усреднений и нормальные формы

4.1 Метод усреднений

Рассмотрим уравнение вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon h(x, \dot{x}) = 0.$$

Рассмотрим систему в терминах быстрого времени $\tau = t$ и медленного $T = \varepsilon t$. В первом приближение получим, что

$$\begin{aligned} O(1)\colon \qquad & x_0 = r(T)\cos(\omega\tau + \varphi(T)) \\ O(\varepsilon)\colon \qquad & \partial_\tau^2 x_1 + \omega^2 x_1 = -2\partial_\tau\partial_T x_0 - h = +2\omega\partial_T(r\cos(\omega\tau+\varphi)) - h = \\ & = 2\omega(r'\sin(\omega\tau+\varphi)) + r\varphi'\cos(\omega\tau+\varphi) - h \end{aligned}$$

и далее будем считать, что $\omega\tau + \varphi = \theta$, и разложим h в ряд Фурье. Тогда

$$h = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta,$$

соответственно, дабы убить резонансные слагаемые,

$$\begin{aligned} 2\omega r' - b_1 &= 0 \\ 2\omega r\varphi' - a_1 &= 0. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega r' = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} h\sin\theta\, d\theta & = \langle h \sin\theta\rangle \\ \omega r\varphi' = \ldots & = \langle h\cos\theta\rangle \end{cases}$$

Осциллятор Ван дер Поля

Рассмотрим уравнения вида

$$\ddot{x} + x + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} = 0,$$

что соответствует рассмотренному случаю с $\omega = 1$, или $(\tau + \varphi = \theta)$

$$\begin{aligned} h &= (r^2\cos^2(\tau+\varphi) - 1)(-r\sin(\tau+\varphi)) = \\ &= r(\sin\theta - r^2\cos^2\theta\sin\theta), \end{aligned}$$

тогда

$$r' = r = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sin^2\theta - r^2\cos^2\theta\sin^2\theta\right)\,d\theta = \frac{r}{2}\left(1 - \frac{r^2}{4}\right),$$

что соответствует возникновению предельного цикла радиуса 2.

4.2 Нормальная форма Коши

Продолжаем рассматривать

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} = 0\colon \boldsymbol{f}(0) = 0,$$

также будем считать, что $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ – аналитическая функция, и разложим её в ряд. Уравнение вида

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),$$

хотим свести к линейному виду. Сделаем следующую замену

$$\boldsymbol{x} \to \tilde{\boldsymbol{x}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \Lambda\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{g}(\tilde{\boldsymbol{x}}),$$

далее сделаем замену

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}),$$

где $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y})$ – «вектор» из полиномов минимальной нелинейной степени.

Прямой подстановкой получаем, что

$$\dot{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}}\dot{\boldsymbol{y}} = \left(E + \frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}}\right)\dot{\boldsymbol{y}} = \Lambda\boldsymbol{y} + \Lambda\boldsymbol{p} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{p}), \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{y}} = \left(E + \frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}}\right)^{-1}\left(\Lambda\boldsymbol{y} + \Lambda\boldsymbol{p} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{p})\right),$$

а теперь разложим всё в ряд и оставим слагаемые степени не более $\deg\boldsymbol{p} = k$, тогда

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{y}} &= \left(E - \frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}}\right)(\Lambda\boldsymbol{y} + \Lambda\boldsymbol{p} + \boldsymbol{g}^m(\boldsymbol{y})) + O(|y|^{m+1}) = \\ &= \Lambda\boldsymbol{y} + \Lambda\boldsymbol{p} + \boldsymbol{g}^m(\boldsymbol{y}) - \frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}}\Lambda\boldsymbol{y} + O(|\boldsymbol{y}|^{m+1}). \end{aligned}$$

Вспомним, что понятно как выглядит p_i

$$p_i = \sum_{k_1,\ldots,k_n} p^i_{k_1,\ldots,k_n} y^{k_1}\ldots y^{k_n}, \qquad k_1 + \ldots + k_n = m,$$

а также g_i^m

$$g_i^m = \sum_{k_1,\ldots,k_n} g^i_{k_1,\ldots,k_n} y^{k_1}\ldots y^{k_n},$$

работая с каждым мономом приходим к уравнениям

$$\lambda_i p^i_{k_1,\ldots,k_n} - (k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \ldots + k_n\lambda_n)\,p^i_{k_1,\ldots,k_n} = -g^i_{k_1,\ldots,k_n}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{p^i_{k_1,\ldots,k_n} = \frac{-g^i_{k_1,\ldots,k_n}}{\lambda_i - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\lambda})}},$$

что приводит нас к следующей теореме.

Thr 4.1 (Теорема Пуанкаре-Дюлака)**.** *Можно всё убрать, кроме резонансных слагаемых.*

5 Уравнение Гамильтона

Запишем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \qquad L = \frac{1}{2}a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j - \Pi.$$

Пусть есть некоторый импульс

$$p = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}} = A\dot{q} + \ldots, \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = A^{-1} + \ldots, \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} (q,\dot{q},t)\text{— лагранжевы переменные} \\ (q,p.t)\text{— гамильтоновы переменные} \end{array}$$

5.1 Немного геометрии

Было конфигурационное многообразие размерности n. Каждому состоянию соответствует точка на многообразии, $\dot{q} \in T_q M$. Собственно, $p \in T_q^* M$ (TM – касательное расслоение) лежит в кокасательном пространстве (T^*M – кокасательное расслоение)(почему?). Тогда возьмем некоторый функционал

$$H(q, p, t)\colon T^*M \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1.$$

Считая $(q, t) = \text{const}$

$$dL = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot d\dot{q} = p \cdot \, d\dot{q}, \qquad d(\dot{q}p) = p\, d\dot{q} + \dot{q}\, dp = \, dL + \dot{q}\, dp.$$

Тогда давайте всё сгруппируем

$$d(\dot{q}p - L) = \dot{q}\, dp = \frac{\partial H}{\partial p}\, dp.$$

То есть $dL = pdq$, а $dH = \dot{q}\, dp$.

Def 5.1. Определим гамильтониан, как

$$H(q, p, t) \overset{\text{def}}{=} p \cdot \dot{q}(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t).$$

5.2 Уравнения Гамильтона

Запишем дифференциал Гамильтониана

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q}\, dq + \frac{\partial H}{\partial p}\, dp + \frac{\partial H}{\partial t}\, dt,$$
$$dH = \dot{q}\, dp + p\, d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q}\, dq - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial t}\, dt.$$

Во-первых отсюда следует, что

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{5.1}$$

Также имея право приравнивать коэффициенты

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \ \dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}}. \tag{5.2}$$

Которые, о чудо, уже существуют в нормальной форме Коши.

Замечания

Консервативные системы

Для консервативной системы

$$L = T_2 - \Pi, \qquad \Rightarrow \qquad H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q} - T_2 + \Pi = T_2 + \Pi = E. \tag{5.3}$$

Вообще уравнения Гамильтона написал ещё Лагранж, а H, потому что Гюйгенс. А выше мы получили полную механическую энергию.

Общность происходящего

Последовательный курс - некоторая история, должна быть приемственность тем. В общем так мы и движемся в сторону большей абстракции. Но минус в том, что лагранжева механика и гамильтонова механика существуют сами по себе. Гамильтонова система это (M, ω, H), где M – конфигурационное $2n$-мерное многообразие, ω – 2-форма, а H – гамильтониан, то есть функция гамильтоновых переменных.

Задача 19.24

Есть некоторая сфера, у которой радиус – известная функция времени $R(t)$ (реономная связь), есть сила тяжести $\boldsymbol{g}$. В качестве координат выберем сферические θ, φ.

$$\boldsymbol{r} = (\dots) \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{m}{2}(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) + \frac{m}{2}\dot{R}^2.$$

Потенциальная энергия

$$\Pi = mgR\cos\theta.$$

Теперь

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot q_\theta} = mR^2\dot\theta, \qquad \Rightarrow \qquad \dot\theta = \frac{p_\theta}{mR^2},$$

$$p_\varphi = mR^2\dot\varphi^2\sin^2\theta, \qquad \Rightarrow \qquad \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta}$$

Теперь

$$H = p\cdot q - L = p_\varphi\varphi + p_\theta\dot\theta - L = \frac{mR^2}{2}\left(p_\theta^2 + \frac{p^2\varphi}{\sin^2\theta}\right) - \frac{m}{2}\dot R^2(t) + mgR(t)\cos\theta.$$

Запишем теперь уравнения Гамильтона

$$\dot\theta = \frac{p_\theta}{mR^2}, \qquad \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta},$$

что вполне логично, а также второй набор

$$\dot p_\theta = -mg\dot R$$

5.3 Уравнения Рауса

Идея в том, что можно делать преобразование только по некоторому набору переменных, что приводит нас к функции Раусса

$$R = \left(\sum_{i=k+1}^{n} p_i\hat{\dot q}_i\right) - L(q, \dot q_1, \ldots, \dot q_{k+1}, \hat{\dot q}_k, \ldots, \hat{\dot q}_n, t),$$

где шляпка соответствует выражению через q, p, t. Можно ещё здесь уравнения записать, см. билеты.

5.4 Уравнения Уиттекера

Хочется уменьшать порядок дифференциальных уравнений. Пусть $H(q,p) \equiv h$. Тогда у нас есть некоторая $2n-1$-поверхность. Пусть

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} \neq 0, \qquad \Rightarrow \qquad p_1 = -K(q, p_2, \ldots, p_n, h).$$

Получается, что траектории заполняют не всё пространство, а некоторое его подпространство. Количество уравнения можем сменить с $2n$ до $2n-2$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_i} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial p_i} = 0.$$

Теперь выпешем уравнения Гамильтона

$$\dot q_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \qquad \dot p_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1},$$

$$\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Тогда

$$\frac{dq_i}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\bigg/\frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dq_1} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\bigg/\frac{\partial H}{\partial p_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_i}, \qquad i = 2, \ldots, n. \tag{5.4}$$

Красота и победа!)

6 Интегралы системы

Есть система Гамильтона

$$\begin{cases} \dot q = \partial_p H \\ \dot p = -\partial_q H \end{cases}$$

и для них существуют первые интегралы – $\varphi(q,p,t)$ – сохранение на любых траектория движения системы.

Как их получать? Во-первых, до тех пор, пока гамильтонин явно от времени не зависит – это первый интеграл:

$$\partial_t H = 0, \qquad \Rightarrow \qquad d_t H = 0.$$

Аналогично

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad p_i = \text{const}.$$

Def 6.1. *Скобкой Пуассона* для функции гамильтоновых переменных может быть определена, как

$$\{\varphi, \psi\} = \frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial \psi}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial \psi}{\partial q}.$$

Что происходит и почему

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\dot{p} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\{\varphi, H\} = 0,$$

соответственно скобки пуассона – вплоне логичный критерий первого интеграла.

Thr 6.2. *Если φ, ψ – первые интагралы, то $\{\varphi, \psi\}$ – это первый интеграл или число.*

Первые интегралы бывают зависимы, так для $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ можем составить

$$\operatorname{rg} \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\partial(q^i, p_j, t)} = m.$$

Thr 6.3 (Теорема Э. Нетер)**.** *Пусть есть некоторое однопараметрическое семейство $\tilde{q} = \tilde{q}(q, t, \alpha)$ и $\tilde{t} = \tilde{t}(q, t, \alpha)$ где $\alpha \in \mathbb{R}^1$ такое, что дифференцируемо, $\alpha = 0 \sim$ тождественное преобразование, и*

$$L\left(\tilde{q}, \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}}, t\right) d\tilde{t} = L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) dt.$$

Тогда в системе есть первый интеграл, который вычисляется так:

$$\varphi(q, p, t) = \tilde{p} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} - H \cdot \left(\frac{\partial \tilde{t}}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}.$$

Например,

$$\tilde{q} = q + \alpha, \qquad \Rightarrow \qquad p_q = \text{const}$$

$$\tilde{t} = t + \alpha, \qquad \Rightarrow \qquad H = \text{const}.$$

Задача 1

Пусть есть некоторая точка в радиальном потенциальном поле. Лагранжиан

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \varphi^2) - \Pi(r).$$

Тогда вполне логично рассмотреть $\tilde{\varphi} = \varphi + \alpha$, тогда

$$I = p_\varphi \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \alpha}_{\alpha=0} = p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi},\right)$$

так что момент сохраняется. `Вопрос: если есть первый интеграл, то существует ли симметрия для этого первого интеграла?`

6.1 Интегральные инварианты

Def 6.4. *Интегральный инвариант* – интегральное выражение, от гамильтоновых переменных, сохраняющееся на некоторой области траектории прямых путей.

Скажем, что N – конфигурационное многообразие, $(q, \dot{q}) \in TN$, также введем $\boldsymbol{x} = (q, p)^{\mathrm{T}}$, где

$$\boldsymbol{x} \in M^{2n} \equiv T^*N.$$

Продолжим итерации, перейдем к

$$(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) \in TM^{4n}.$$

Теперь введем некоторый

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) \equiv L(q, p, \dot{q}, \dot{p}, t) = p \cdot \dot{q} - H(q, p, t).$$

Также мы знаем, что

$$\delta \int L\, dt = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

что верно для задачи варьирования за закрепленными концами.

Тогда

$$\delta\int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L\,dt = (p\delta q - H\delta t)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\left[\left(\dot p + \frac{\partial H}{\partial q}\right)\cdot\delta q + \left(\dot q - \frac{\partial H}{\partial p}\right)\cdot\delta p\right]dt.$$

Это приводит нас к **трубке прямых путей**. Вводим согласованные контуры по α.

Вспоминаем, что

$$\int_{\alpha=0}^{\alpha=1}\delta S(\alpha) = S(1) - S(0) \equiv 0.$$

Тогда

$$\oint_{C_0}(p\delta q - H\delta t) - \oint_{C_1}(p\delta q - H\delta t) = 0,$$

что в силу произвольности выбранных контуров

$$J_{\text{ПК}} = \oint_C (p\delta q - H\delta t) = \text{const}$$

что приводит нас к *интегралу Пуанкаре-Картана.*

В изохронном случае

$$I_{\Pi} = \oint p\delta q = \text{const}$$

что приводит к univрсальному интегральному инварианту Пуанкаре. `Прикол в том, что он не особо зависит от` H`.`

Пример

Пусть $L = \frac{1}{2}(\dot q^2 - q^2)$, и в качестве C_0 выберем $q = \cos\alpha$ и $\dot q = \sin\alpha$, при $t \equiv 0$. Хочется найти вид трубки прямых путей и посчитать интегральный инвариант:

$$\begin{cases} q = A\cos(t+\alpha) \\ p = \dot q = -A\sin(t+\alpha) \end{cases}$$

Тогда

$$q^2 + p^2 = A^2,$$

что соответсвует окружности, или, в случае с движением по времени, цилиндру. Интеграл Пуанкаре тогда

$$I_{\Pi} = \oint p\delta q = \int_0^{2\pi} p\frac{\partial q}{\partial\alpha}\delta\alpha = \int_0^{2\pi}\cos^2\alpha\,d\alpha \overset{!}{=} A^2\pi.$$

то есть пока $n = 1$ интеграл Пуанкаре – это просто фазовый объем, который для всех гамильтоновых систем сохраняется.

6.2 Обратные теоремы теории интегральных инвариантов

Пока что мы сформулировали, что если система Гамильтонова, то у нее сохраняется интегральный инвариант Пуанкаре и интегральный инвариант Пуанкаре Картана.

Но верно и обратно, если $\forall\bar c$

$$I_{\Pi} = \oint p\delta q = \text{const}, \quad\Rightarrow\quad \exists H(q,p,t).$$

Если же сохранятся для некоторой F интеграл $I_{\text{ПК}}$, то $H = F(q,p,t) + f(t)$.

7 Канонические преобразования

Thr 7.1 (Теорема Ли Хуа-Сжуна). *Был некоторый интегральный инвариант Пуанкаре, так вот, утверждается, что*

$$J = \oint A(q,p,t)\cdot\delta q + B(q,p,t)\cdot\delta p = const\cdot J_{\Pi},$$

только вот интегральный инвариант Пуанкаре существует для трубки прямых путей, а сейчас мы обобщаем это на отношения для разных трубок.

Говоря о некоторых следствиях

$$\oint q\delta p = c\oint p\delta q, \qquad \Rightarrow \qquad \oint \underbrace{(q\delta p - cp\delta q)}_{\delta\Phi} = 0.$$

Раньше были уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \qquad \Big/ \tilde q = \tilde q(q,t) \Big/ \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde L}{\partial \dot{\tilde q}} - \frac{\partial \tilde L}{\partial \tilde q} = 0.$$

Но, скорости не преобразуются.

Чуть прикольнее в уравнениях Якоби

$$\begin{cases} \tilde q = \tilde q(q,p,t) \\ \tilde p = \tilde p(q,p,t) \end{cases} \qquad \left|\frac{\partial(\tilde q,\tilde p)}{\partial(q,p)}\right| \neq 0. \tag{7.1}$$

что приводит к ситуации

$$\begin{cases} \dot q = \partial_p H \\ \dot p = -\partial_q H \end{cases} \qquad \to \qquad \begin{cases} \dot{\tilde q} = \tilde Q(\dot{\tilde q}, \dot{\tilde p}, t) \\ \dot{\tilde p} = \tilde P(\dot{\tilde q}, \dot{\tilde p}, t) \end{cases}$$

Def 7.2. Преобразование (7.1) называется каноническим, если оно переводит любую гамильтонову систему в гамильтонову.

Из вариационных принципов умеем получать уравнения Лагранжа, да и уравнения Гамильтона тоже

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (p\cdot\dot q - H)\, dt = 0.$$

Как раньше выбираем $\dot{\boldsymbol{x}} = [q,\, p]^{\mathrm{T}}$, что приведет к $2n$ переменным.

Но и в новых переменных хочется видеть что-то похожее,

$$\delta \int \left(\tilde p\cdot\dot{\tilde q} - \tilde H\right) dt = 0,$$

что приводит нас к мысли о том, что

$$\tilde p\cdot\dot{\tilde q} - \tilde H = c(p\cdot\dot q - H) - \frac{d\tilde F}{dt}(q,p,t).$$

домножая, получаем

$$\tilde p\cdot\, d\tilde q - \tilde H\, dt = cp\, dq - H\, dt - \, dF,$$

тогда

$$d\tilde q = \frac{\partial\tilde q}{\partial t}\, dt + \delta^t\tilde q, \qquad dF = \frac{\partial F}{\partial t}\, dt + \delta^t F.$$

так приходим к уравнению

$$\tilde p\cdot\frac{\partial\tilde q}{\partial t}\, dt + \tilde p\cdot\partial^t\tilde q - \tilde H\, dt = cp\cdot\, dq - cH\, dt - \frac{\partial F}{\partial t}\, dt - \delta^t F,$$

что приводит к уравнению

$$\boxed{\tilde p\cdot\delta^t\tilde q - cp\, dq = -\delta^t F}, \quad \text{— критерий канонического преобразования,} \tag{7.2}$$

где c – *валентность*, соответствующая теореме Ли Хуа-Сжуна, а F – производящая функция.

Thr 7.3 (критерий каноничности преобразования)**.** *Если существует c и F такие, что выполняется* (7.2)*, то преобразование $(p,q)\mapsto(\tilde p,\tilde q)$ канонично.*

Бонусом находим новый Гамильтониан, приравнивая коэффициенты при dt.

$$\tilde H = cH + \frac{\partial F}{\partial t} + \tilde p\cdot\frac{\partial\tilde q}{\partial t}.$$

Решим Задачу

Возьмем такое преобразование

$$\begin{cases} \tilde q = p\,\mathrm{tg}\,t \\ \tilde p = q\,\mathrm{ctg}\,t \end{cases}, \qquad H = \frac{qp}{\sin t\,\cos t}.$$

тогда

$$\tilde p\,\delta^t\tilde q = q\,\mathrm{ctg}\,t\ \mathrm{tg}\,t\,\delta^t p = q\delta^t p = \delta^t(qp) - p\delta q, \qquad \Rightarrow \qquad \tilde p\cdot\delta^t\tilde q - (-1)p\delta q = -\delta(-qp).$$

Теперь можем найти новый гамильтониан

$$\tilde{H} = (-1)\frac{pq}{\sin t\, \cos t} + 0 + \frac{q\,\mathrm{ctg}(t)\, p}{\cos^2 t} = 0,$$

что очень здорово, ведь в новых переменных $\dot{\tilde{q}} = 0$, $\dot{\tilde{p}} = 0$, что позволило найти первые интегралы системы, а также движение

$$\begin{cases} q = \beta\,\mathrm{tg}\, t, \\ p = \alpha\,\mathrm{ctg}\, t. \end{cases}$$

7.1 Импульсы не нужны

Вообще, пусть нам хочется в $(q, \tilde{q})$ *описание*

$$\left|\frac{\partial \tilde{q}}{\partial p}\right| \neq 0, \qquad \Rightarrow \qquad (q, p) \to (q, \tilde{q}).$$

Отличная идея! Теперь $F \to S(q, \tilde{q}, t)$ – производящая функция. К слову, такие преобразования называются *свободными*. Кусок вывода сразу можем выкинуть и перейти к

$$\tilde{p} \cdot d\tilde{q} - \tilde{H}\, dt = cp \cdot\, dq - cH\, dt - \, dS,$$

что дает возможность работать сразу работать с независимыми дифференциалами

$$\begin{cases} \tilde{p} = -\partial_{\tilde{q}} S \\ p = c^{-1}\partial_q S \end{cases} \quad - \quad \text{критерий каноничности в } (q, \tilde{q}) \textit{ описание}.$$

Ещё и гамильтониан, как раньше, находим

$$\tilde{H} = cH + \partial_t S.$$

Задача 2

Есть преобразование

$$\begin{cases} q = \sqrt{2\tilde{p}}\cos\tilde{q} \\ p = \sqrt{2\tilde{p}}\sin\tilde{q} \end{cases}, \qquad H = \frac{q^2 + p^2}{2}.$$

Теперь

$$p = q\,\mathrm{tg}\,\tilde{q}, \qquad \tilde{p} = \frac{q^2}{2\cos^2\tilde{q}},$$

и теперь, интегрируя,

$$\begin{cases} \dfrac{q^2}{2}(1 + \mathrm{tg}^2\,\tilde{q}) = -\partial_{\tilde{q}} S, \\ q\,\mathrm{tg}\,\tilde{q} = c^{-1}\partial_q S, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad S = -\left(\frac{q^2}{2}\,\mathrm{tg}\,\tilde{q}\right), \qquad c = -1.$$

И новый гамильтониан

$$\tilde{H} = -H = -\tilde{p}.$$

Заметим, что тут уже не восстановить Лагранжиан, – преобразования Лежандра вырожденно. И уравнения движения

$$q = \sqrt{2\alpha}\cos(-t + \beta)$$
$$p = \sqrt{2\alpha}\sin(-t + \beta).$$

7.2 Симплектическая геометрия (симплектология)

Гамильтонова система – набор (M, ω, H), где $\dim M = 2n$ – конфигурационное многообразие, H – гамильтониан, ω – симплектическая 2-форма.

Thr 7.4 (Теорема Дарбу)**.** *Всегда локально есть такие переменные, что 2-форма принимает канонический вид*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i.$$

К слову, $H\colon M \times \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}$. Также точка $x \in M$ такая, что

$$\xi \in T_x M, \qquad \omega_\xi(\ldots) = \omega(\ldots, \xi) \in T_x^* M,$$

что позволяет задать отображение

$$\omega\colon T_xM \to T_x^*M.$$

Если сделаем для всех $x \in M$, то

$$\omega\colon TM \mapsto T^*M.$$

Аналогично можем построить

$$J\colon T^*M \mapsto TM.$$

Таким образом, считая dH 1-формой,

$$J(\,dH) \in TM, \quad - \quad \text{гамильтоново векторное поле,}$$

что позволяет прийти к

$$\dot{x} = J(\,dH)(x), \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{bmatrix}.$$

`Как мы до такой жизни дошли? Было же трёхмерное пространство, время, которое на часах смотрим, наблюдаемые переменные, но как только мы захотели обобщить, выработать общий метод, пришлось прийти к` n`-мерному конфигурационному многообразию, -- деятельности воспаленного мозга.`

8 Уравнения Гамильтона-Якоби

Были разные критерии каноничности, главное, чтобы Якобиан был невырожденный. В общем план такой, если мы научимся приводить все гамильтонианы к 0 – было бы здорово.

$$\tilde{H} = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\tilde{q}} = 0 \\ \dot{\tilde{p}} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \tilde{p} = \alpha \\ \tilde{p} = -\beta \end{cases}$$

Осталось найти хорошую S, которую можем найти из уравнения

$$H(q, p, t) + \frac{1}{c}\frac{\partial S}{\partial t}(q, \alpha, t) = 0,$$

только p здесь явно не в тему ($p = \partial_q S$), так что, считая далее $S = cS$, перейдём к уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0, \tag{8.1}$$

что называаем *уравнением Гамильтона-Якоби.*

Из плюсов: решаем это уравнение – находим уравнение движения. Минусы: это нелинейное уравнение в частных производных.

Def 8.1. Функция $S(q, \alpha, t)$ назывется *полным интегралом* уравнения Гамильтона-Якоби, если она является решением и

$$\left|\frac{\partial^2 S}{\partial q^{\mathrm{T}} \partial \alpha} \neq 0\right|.$$

Так вот, полный алгоритм: находим Гамильтониан, переходим к уравнению Гамильтона-Якоби, из него вытаскиваем производящую функцию, приводящую к нулевому решению, и, обратными заменами, находим уравнения движения

$$\begin{cases} p = \partial_q S(q, \alpha, t) \\ \beta = \partial_\alpha S(q, \alpha, t) \end{cases}.$$

Единственная ± алгоритмичная надежда – метод разделения переменных. Давайте попробуем найти полный интеграл в виде

$$S = S_0(t, \alpha) + S_1(q_1, \alpha) + \ldots + S_n(q_n, \alpha).$$

Задача

Посмотрим на некоторую точку m в потенциале

$$\Pi = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3}, \qquad \boldsymbol{a} = \mathrm{const}.$$

Вообще для уравнения Гамильтона-Якоби крайне важно хорошим образом выбрать координаты, выражающим геометрию задачи.

Далее для простоты будем считать $\boldsymbol{a} \parallel Oz$, введем сферические координаты (r, θ, φ).

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2\right), \qquad \Pi = \frac{a\cos\theta}{r^2}.$$

Арнольд пишет, что хрен там вы докажите, что полного интеграла там нет.

8.1 Немного магии

Посмотрим на полную полную производную полного интеграла системы

$$\frac{dS}{dt}(q, \alpha, t) = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q}\cdot\dot{q} = p\cdot\dot{q} - H = L(q, \dot{q}, t), \qquad \Rightarrow \qquad S = \int L\,dt. \tag{8.2}$$

Теормех не единственная теория, возможно и не самая верная, но красота в глазах смотрящего, так вот, уравнения Гамильтона-Якоби – наиболее близкое к квантмеху уравнение, а-ля квазиклассическое приближение. Выглядит эта конструкция так:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi,$$

где Ψ – волновая функция, а Ψ^2 – плотность вероятности нахождения где-нибудь.

Рассмотрим Гамильтониан вида

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Pi(x, t)\right]\Psi.$$

Понятно, что где-нибудь частица да находится. Вообще, давайте считать, что

$$\Psi \sim \exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right), \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial t}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right), \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{i}{\hbar}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\right]\exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right).$$

Подставляя это в уравненеие Шредингера находим, что

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \Pi$$

что, если отбросить мнимую часть, перейдет в

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \Pi(x, t) = 0.$$

8.2 Канйническая теория возмущений (к Т12)

Давайте перейдём к $(q, \tilde{p})$ – описане. Вообще критерий тогда получится вида

$$S(q, \tilde{p}, t) \qquad \to \qquad \begin{cases} \tilde{q} = \partial_{\tilde{p}}S \\ p = c^{-1}\partial_q S \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{H} = cH + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Ещё раз используем идею о том, чтобы что-то испортить

$$H = H_0 + \varepsilon H, \qquad \varepsilon \ll 1.$$

Посмотрим на производящую функцию вида

$$S = S_0 = q\tilde{p}, \qquad \begin{cases} \tilde{q} = q, \\ \ p = \tilde{p} \end{cases}$$

которая переведет гамильтониан в себя. Но нам нужно немного систему возмутить, соответсвенно выберем

$$S = q\tilde{p} + \varepsilon S, \qquad \begin{cases} \tilde{q} = q + \varepsilon\partial_{\tilde{p}}S_1, \\ p = \tilde{p} + \varepsilon\partial_q S_1. \end{cases}$$

Так мы , подбирая S_1, сделаем для H_1 хорошую долгую жизнь

$$\tilde{H} = H_0 + O(\varepsilon^2).$$