

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ КУРСА «ТЕОРИЯ ПОЛЯ»

Авторы: Хоружий Кирилл
Евгений Примак

От: 18 июня 2021 г.

Содержание

1 Общие сведения I	2
2 Упражнения	2
У1	2
У2	2
У3	3
У4	3
3 Первое задание	4
Т1	4
Т2	4
Т3	5
Т4	6
Т5	6
Т6	7
Т7	8
4 Общие сведения II	9
5 Второе задание	10
Т8	10
Т9	11
Т10	11
Т11	11
Т12	12
Т13	13
Т14	15
Т15	16
Т16	16
Т17	17
Т18	17
Т19	18
Т20	19

1 Общие сведения I

Для кинематики полезно было бы ввести следующие величины

$$\gamma(v) = \gamma_v = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad \beta(v) = \beta_v = \frac{v}{c}, \quad \Lambda(v, OX) = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\beta_v \gamma_v & 0 & 0 \\ -\beta_v \gamma_v & \gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где Λ – преобразование Лоренца, для которого, кстати, верно, что $\Lambda^{-1}(v) = \Lambda(-v)$.

Также преобразование Лоренца можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_v \gamma \\ -\beta_v \gamma & \mathbb{E} + \frac{\gamma_v - 1}{\beta_v^2} \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

что очень удобно и полезно.

Говоря о движении заряда в ЭМ-поле, хотелось бы получить уравнения движения. По принципу наименьшего действия

$$\delta S = \delta \int_a^b \left(-mc ds - \frac{e}{c} A_i dx^i \right) = 0, \quad ds = \sqrt{dx_i dx^i} \Rightarrow \delta S = - \int_a^b \left(mc \frac{dx_i d\delta x^i}{ds} + \frac{e}{c} A_i d\delta x^i + \frac{e}{c} \delta A_i dx^i \right) = 0,$$

где проинтегрировав по частям первые два слагаемые получаем

$$\int_a^b \left(mc du_i \delta x^i + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^i dx^k - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^i \delta x^k \right) = 0, \Rightarrow \int_a^b \left(mc \frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k \right) \delta x^i ds = 0$$

где $(\delta \dots)|_a^b = 0$ в силу варьирования при заданных пределах. Также сделаны замены $du_i \rightarrow (u_i)'_s ds$, $dx^i \rightarrow u^i ds$. А это уже победа, ведь в силу произвольности δx^i получаем

$$\frac{mc^2}{e} \frac{du^i}{ds} = F^{ik} u_k = F^{ik} g_{kj} u^j, \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

что позволяет всегда смотреть на движение заряда в постоянном ЭМ-поле, как на систему линейных дифференциальных уравнений, решать которую, по крайней мере относительно $s = ct$ решать мы умеем.

2 Упражнения

У1

Строчка с символами Кронекера:

$$\delta_\alpha^\alpha = 3, \quad \delta_\alpha^\beta \delta_\beta^\gamma = \delta_\alpha^\gamma, \quad \delta_\alpha^\beta \delta_\beta^\gamma \delta_\gamma^\alpha = \delta_\alpha^\alpha = 3.$$

По определению символа Леви-Чивиты, раскроем определитель:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma} &= \begin{vmatrix} \delta_\alpha^{\alpha'} & \delta_\alpha^{\beta'} & \delta_\alpha^\gamma \\ \delta_\beta^{\alpha'} & \delta_\beta^{\beta'} & \delta_\beta^\gamma \\ \delta_\gamma^{\alpha'} & \delta_\gamma^{\beta'} & \delta_\gamma^\gamma \end{vmatrix} = \delta_\alpha^{\alpha'} (\delta_\beta^{\beta'} \delta_\gamma^\gamma - \delta_\beta^\gamma \delta_\gamma^{\beta'}) - \delta_\alpha^{\beta'} (\delta_\beta^{\alpha'} \delta_\gamma^\gamma - \delta_\beta^\gamma \delta_\gamma^{\alpha'}) + \delta_\alpha^\gamma (\delta_\beta^{\alpha'} \delta_\gamma^{\beta'} - \delta_\beta^{\beta'} \delta_\gamma^{\alpha'}) = \\ &= \delta_\alpha^{\alpha'} (3\delta_\beta^{\beta'} - \delta_\beta^{\beta'}) - \delta_\alpha^{\beta'} (2\delta_\beta^{\alpha'}) + \delta_\alpha^{\beta'} \delta_\beta^{\alpha'} - \delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^{\beta'} \delta_\gamma^{\alpha'} = \boxed{\delta_\alpha^{\alpha'} \delta_\beta^{\beta'} - \delta_\alpha^{\beta'} \delta_\beta^{\alpha'}}. \end{aligned}$$

Далее просто в последнем равенстве приравниваем в первом случае $\beta' = \beta$, а во втором ещё и $\alpha = \alpha'$, получая:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\alpha'\beta\gamma} = 3\delta_\alpha^{\alpha'} - \delta_\alpha^{\alpha'} = 2\delta_\alpha^{\alpha'}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = 2\delta_\alpha^\alpha = 6.$$

У2

- $[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]]^i = \varepsilon^i_{jk} a^j [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]^k = \varepsilon^i_{jk} a^j \varepsilon^k_{mn} b^m c^n = (\delta_m^i \delta_{jn} - \delta_n^i \delta_{jm}) a^j b^m c^n = a^j b^i c_j - c^i a^j b_j = b^i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - c^i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$
- $([\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot [\mathbf{c} \times \mathbf{d}]) = \varepsilon_{ijk} a^j b^k \varepsilon^i_{mn} c^m d^n = (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) a^j b^k c^m d^n = a^j b^k c_j d_k - a^j b^k c_k d_j = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$

- Тут придется применить результаты первого примера этого упражнения:

$$([\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot [[\mathbf{b} \times \mathbf{c}] \times [\mathbf{c} \times \mathbf{a}]]) = (\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]) (\mathbf{b} \cdot [\mathbf{c} \times \mathbf{a}]) - (\mathbf{a} \cdot [\mathbf{c} \times \mathbf{a}]) (\mathbf{b} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]) = \\ = a^i \varepsilon_{ijk} b^j c^k \cdot b^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} c^\beta a^\gamma - a^i \varepsilon_{ijk} c^j a^k \cdot b^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} b^\beta c^\gamma = (a^i \varepsilon_{ijk} b^j c^k)^2 = (\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}])^2$$

У3

Сразу оговорим, что все нечетные степени, ввиду инвариантности по перестановкам при усреднении дадут нуль.

Для четных же будем получать какие-то симметричные тензоры, которые могут быть выражены через всевозможные комбинации символов Кронекера. Так для два-тензора:

$$\langle n_\alpha n_\beta \rangle = z_{ab} = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta}.$$

В силу единичности n при свертке два-тензора из них должна получиться единица. Симметричный единичный два-тензор, инвариантный к поворотам это и есть Кроннекер на троих.

Для четырех же возьмём все возможные комбинации символов Кроннекера:

$$\langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu \rangle = \frac{1}{c} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\mu} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\gamma}).$$

Опять же нужно найти константу c , чтобы свертка четыре-тензора была единичной:

$$\delta^{\alpha\beta} \delta^{\gamma\mu} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\mu} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\gamma}) = 9 + \delta_\gamma^\beta \delta_\beta^\gamma + \delta_\mu^\beta \delta_\beta^\mu = 15. \quad \Rightarrow \quad \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu \rangle = \frac{1}{15} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\mu} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\gamma}).$$

У4

а)

- $(\text{rot rot } \mathbf{A})^i = \varepsilon^i_{jk} \nabla^j (\varepsilon^k_{\alpha\beta} \nabla^\alpha A^\beta) = (\delta_\alpha^i \delta_{j\beta} - \delta_\beta^i \delta_{j\alpha}) \nabla^j \nabla^\alpha A^\beta = \nabla^i (\nabla_j A^j) - \nabla_j \nabla^j A^i = (\text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A})^i.$
- $(\text{rot}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}])^i = \varepsilon^i_{jk} \nabla^j \varepsilon^k_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta = (\delta_\alpha^i \delta_{j\beta} - \delta_\beta^i \delta_{j\alpha}) (a^\alpha \nabla^j b^\beta + b^\beta \nabla^j a^\alpha) = a^i \nabla^j b_j - b^i \nabla^j a_j + b_j \nabla^j a^i - a^j \nabla^j b^i = \\ = (\mathbf{a} \cdot \text{div } \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \text{div } \mathbf{a})^i + ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b})^i.$
- $(\text{rot } f \mathbf{A})^i = \varepsilon^i_{jk} \nabla^j f A^k = \varepsilon^i_{jk} (f \nabla^j A^k + A^k \nabla^j f) = f \varepsilon^i_{jk} \nabla^j A^k + \varepsilon^i_{jk} \nabla^j f = (f \text{rot } \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \text{grad } f)^i.$
- $\text{div } f \mathbf{A} = \nabla_i f A^i = A^i \nabla_i f + f \nabla_i A^i = (\mathbf{A} \cdot \text{grad } f) + f \text{div } \mathbf{A}.$
- $\text{div}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \nabla_i \varepsilon^i_{jk} a^j b^k = \varepsilon^i_{jk} (b^k \nabla_i a^j + a^j \nabla_i b^k) = \varepsilon^i_{jk} b^k \nabla_i a^j + \varepsilon^i_{jk} a^j \nabla_i b^k = b^k \varepsilon_k^i{}^j \nabla_i a^j - a^j \varepsilon_j^i{}^k \nabla_i b^k = \\ = (\mathbf{b} \cdot \text{rot } \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{b}).$
- $[\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})]^i = \nabla^i a^j b_j = a^j \nabla^i b_j + b_j \nabla^i a^j$

Рассмотрим такую штуку: $((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b})^j = a_i \nabla^i b^j$

И такую: $(\mathbf{a} \times [\nabla \times \mathbf{b}])^i = \varepsilon^i_{jk} a^j \varepsilon^k_{\alpha\beta} \nabla^\alpha b^\beta = (\delta_\alpha^i \delta_{j\beta} - \delta_\beta^i \delta_{j\alpha}) a^j \nabla^\alpha b^\beta = a^j \nabla^i b_j - a_j \nabla^j b^i$

Из этих штук и можем составить начальную:

$$[\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})]^i = \nabla^i a^j b_j = a^j \nabla^i b_j + b_j \nabla^i a^j = [\mathbf{a} \times [\nabla \times \mathbf{b}]]^i + [\mathbf{b} \times [\nabla \times \mathbf{a}]]^i + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a}.$$

б)

- $\text{rot}[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] = 2\boldsymbol{\omega}.$
- $\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r} = a^i \nabla_i \mathbf{r}^j = a^i \delta_i^j = \mathbf{a}$

в)

- $\text{grad } r = \nabla^i \sqrt{r^j r_j} = \frac{1}{2} \frac{\nabla^i r^j r_j}{\sqrt{r^j r_j}} = \frac{r^j \delta_j^i}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$
- $\text{div } \mathbf{r} = \nabla_\alpha r^\alpha = \delta_\alpha^\alpha = 3.$
- $(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r} = a^i \nabla_i \mathbf{r}^j = \mathbf{a}.$
- $\text{grad } f(r) = \nabla^i f(r) = f'_r \nabla^i \sqrt{r^j r_j} = f'_r \frac{\mathbf{r}}{r}.$

- $\text{rot } \mathbf{a}(r) = \varepsilon^i_{jk} \nu^j a^k(r) = \varepsilon^i_{jk} (a^k)'_r \frac{\nabla^j r}{r} = \frac{1}{r} [\mathbf{a}'_r \times \mathbf{r}]$.
- $\text{div } \mathbf{a}(r) = \nabla^i a_i(r) = (a_i)'_r \nabla^i r = \frac{1}{r} (\mathbf{a}'_r \cdot \mathbf{r})$.

У5

Суть в том, чтобы скалярно домножая на константу, получать интегралы от форм, которые можно позже преобразовать по формуле Стокса.

- $\mathbf{c} \cdot \int_V \nabla f d^3 r = \int_V \text{div}(\mathbf{c}f) = \oint_{\partial V} \omega_{\mathbf{c}f}^2 = \oint_{\partial V} \mathbf{c}f \cdot d\mathbf{S}$.
- $\mathbf{c} \cdot \int_V \text{rot } \mathbf{A} d^3 r = \int_V \nabla \cdot [\mathbf{A} \times \mathbf{c}] d^3 r = \int_V \text{div}[\mathbf{A} \times \mathbf{c}] d^3 r = \oint_S [\mathbf{A} \times \mathbf{c}] \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{c} \cdot [d\mathbf{S} \times \mathbf{A}] = -\oint_S \mathbf{c} [A \times d\mathbf{S}]$.
- $\mathbf{c} \cdot \int_S [\nabla f \times d\mathbf{S}] = \int_S d\mathbf{S} \cdot [\mathbf{c} \times \nabla f] = -\int_S d\mathbf{S} \cdot \text{rot } \mathbf{c}f = -\oint \mathbf{c}f \cdot d\mathbf{l}$.
- $\oint_S [\nabla \times \mathbf{A}] d\mathbf{S} = \int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$, т.к. $\Gamma = \emptyset$.

3 Первое задание

T1

Для начала запишем преобразование Лоренца для системы K' :

$$t' = \gamma_{v_x} \left(t - \beta_x \frac{x}{c} \right), \quad x' = \gamma_{v_x} (x - v_x t), \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Аналогично перейдём к системе K'' , выразив компоненты через их представление в системе K'

$$t'' = \gamma_{v'_y} \left(t' - \beta_{v'_y} \frac{y'}{c} \right), \quad x'' = x', \quad y'' = \gamma_{v'_y} (y' - v'_y t'), \quad z'' = z'.$$

Центр системы K'' неподвижен в координатах системы K'' , соответственно

$$x'' = y'' = z'' = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{K''} = v_x t \\ y_{K''} = \gamma_{v_x}^{-1} v'_y t \end{cases},$$

что соответствует $(x, y)[t]$ для координат центра системы K'' в системе K .

Теперь найдём движение центра системы K в системе K'' , подставив значения $x = y = 0$,

$$x''_K = -\gamma_{v_x} v_x t, \quad y''_K = -\gamma_{v'_y} \gamma_{v_x} v'_y t, \quad t''_K = -\gamma_{v'_y} \gamma_{v_x} t.$$

Можно заметить, что

$$\gamma_{v'_y} \gamma_{v_x} \approx \gamma \left(\sqrt{v_x^2 + v_y'^2} \right) = \gamma_v, \quad \beta_{v_x}, \beta_{v'_y} \ll 1.$$

Теперь нас интересует направление прямой $\parallel \mathbf{v}$ — движения K'' в системе K :

$$\text{tg } \varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\dot{y}_{K''}}{\dot{x}_{K''}} = \gamma_{v_x}^{-1} \frac{v'_y}{v_x}.$$

Угол же между осью x'' и движением центра системы K может быть найден, как

$$\text{tg}(\theta + \varphi) = \frac{dy''_K}{dt''} \Big/ \frac{dx''_K}{dt''} = \gamma_{v'_y} \frac{v'_y}{v_x} = \gamma_{v_x} \gamma_{v'_y} \text{tg } \varphi \approx \gamma_v \text{tg } \varphi.$$

С другой стороны, раскрывая тангенс суммы, находим

$$\text{tg } \theta + \text{tg } \varphi = \gamma_v \text{tg } \varphi (1 - \text{tg } \varphi \text{tg } \theta), \quad \Rightarrow \quad \text{tg } \theta = \frac{(\gamma_v - 1) \text{tg } \varphi}{1 + \gamma_v \text{tg}^2 \varphi}.$$

T2

Аппроксимируем движение ИСО в моменты времени t и $t + dt$ сопутствующими ИСО K' и K'' . Пусть K — лабораторная система отсчета, K' — сопутствующая ИСО $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v}(t)$, а K'' — сопутствующая ИСО движущаяся относительно K со скоростью $\mathbf{v}(t + dt) = \mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Далее для удобства будем считать, что K'' движется относительно K' со скоростью $d\mathbf{v}'$.

Проверим, что последовательное применение $\Lambda(d\mathbf{v}') \cdot \Lambda(\mathbf{v})$ эквивалентно $R(\varphi) \cdot \Lambda(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$, где $R(\varphi)$ — вращение в $\{xyz\}$. Для этого просто найдём

$$R(\varphi) = \Lambda(d\mathbf{v}') \cdot \Lambda(\mathbf{v}) \cdot \Lambda(\mathbf{v} + d\mathbf{v})^{-1}.$$

Пусть ось $x \parallel \mathbf{v}$, ось y выберем так, чтобы $d\mathbf{v} \in \{Oxy\}$. Теперь, согласно (1.2), считая $|\mathbf{v}| = \beta_1$, $d\mathbf{v}' = (\beta'_x, \beta'_y)^T$ можем записать (пренебрегая слагаемыми β'_x, β'_y второй и выше степени):

$$\Lambda(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 & 0 & 0 \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(d\mathbf{v}') = \begin{bmatrix} 1 & -\beta'_x & -\beta'_y & 0 \\ -\beta'_x & 1 & 0 & 0 \\ -\beta'_y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь можем выразить $d\mathbf{v}'$ через $d\mathbf{v}$, считая \mathbf{r}_f центром системы K''

$$\mathbf{r}'_f = \Lambda(d\mathbf{v}') \cdot \Lambda(\mathbf{v})\mathbf{r}_f = (ct', 0, 0, 0)^T \Rightarrow \beta(\mathbf{v} + d\mathbf{v})_x = \frac{\beta_1 + \beta'_x}{1 + \beta_1\beta'_x}, \quad \beta(\mathbf{v} + d\mathbf{v})_y = \frac{\gamma_{\beta_1}\beta_y}{1 + \beta_1\beta_x}.$$

где скорость находим аналогично первому номеру. Тут стоит заметить, что скоростью β_x можно было бы пренебречь в сравнении с β_1 , так как скорее всего первый порядок малость β_x не войдёт в ответ, однако хотелось бы в этом убедиться.

Зная $d\mathbf{v}$ можем найти $d\mathbf{v}'$:

$$\beta'_x = \gamma_{\beta_1}^2 \beta_x, \quad \beta'_y = \gamma \beta_y.$$

Но это на потом.

Через \mathbf{v} , $d\mathbf{v}'$ теперь можем найти $\Lambda(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$, и посчитать обратную матрицу:

$$\Lambda^{-1}(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \gamma_{\beta_1}(\beta_1\beta_x + 1) & \gamma_{\beta_1}(\beta_1 + \beta_x) & \beta_y & 0 \\ \gamma_{\beta_1}(\beta_1 + \beta_x) & \gamma_{\beta_1}(\beta_1\beta_x + 1) & \frac{\beta_1\beta_y}{\gamma_{\beta_1}^{-1} + 1} & 0 \\ \beta_y & \frac{\beta_1\beta_y}{\gamma_{\beta_1}^{-1} + 1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Наконец можем посчитать матрицу поворота, которая в первом приближении действительно не содержит β_x :

$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\beta_1\beta'_y}{\sqrt{1-\beta_1^2}+1} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1\beta'_y}{\sqrt{1-\beta_1^2}+1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

что действительно соответствует повороту в плоскости $\{xy\}$ вокруг оси z с углом φ равным

$$\varphi = -\frac{\beta_y\beta_1}{\gamma_{\beta_1}^{-2} + \gamma_{\beta_1}^{-1}} = -\frac{\gamma_{\beta_1}^2}{\gamma_{\beta_1} + 1} \beta_1\beta_y,$$

где φ малый, в силу малости β_y . Так вот, в результате поворота координатных осей меняются и любые векторы, неподвижные в неИСО, то есть искомая угловая скорость

$$\omega_z = -\frac{\gamma_{\beta_1}^2}{\gamma_{\beta_1} + 1} \beta_1(\beta_y/\Delta t), \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = -\frac{\gamma_{\beta_1}^2}{\gamma_{\beta_1} + 1} [\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] = \frac{\gamma_{\beta_1}^2}{\gamma_{\beta_1} + 1} [\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \boldsymbol{\beta}],$$

что и требовалось доказать.

ТЗ

Посмотрим на сопутствующую вращающемуся интерферометру в точке рассматриваемого луча. Для луча можем записать волновой вектор, как

$$\bar{k}'_{\pm} = \left(\frac{\omega}{c}, \pm n \frac{\omega}{c}, 0, 0 \right),$$

где знак выбирается в соответствии с направлением обхода. Считая, что ось Ox направлена вдоль вращения интерферометра в рассматриваемой точке

$$ck_{\pm} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \pm n\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega\gamma(1 \pm n\beta) \\ \omega\gamma(n \pm \beta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$ck_{x,\pm} = \omega\gamma(n \pm \beta).$$

Можно заметить, что у света также зависит частота от направления движения, судя по формуле выше, но в силу малости скорости вращения, это приведет только к оооооооо медленной осцилляции в интерференции

$$I_{\text{инт}} = I_1 + I_2 + \langle (\mathbf{E}_{10} \cdot \mathbf{E}_{20}) \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \dots) \rangle,$$

так что по идее этим эффектом можно пренебречь.

В силу различности k_+ и k_- можем найти разность хода

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = 2\pi R \frac{\gamma\omega\beta}{c},$$

считая данной угловую скорость вращения интерферометра Ω приходим к выражению вида

$$\Delta\varphi = \frac{2\gamma}{c^2} \omega \Omega \pi R^2 \stackrel{\gamma \sim 1}{\approx} \frac{2\pi}{c^2} \omega \Omega R^2,$$

где $\gamma \approx 1$ для корректности результата, так как при расчете не учитывалось изменение метрики для неИСО.

T4

Теперь рассмотрим реакцию превращения электрона и позитрона в мюон и антимюон:

$$e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-.$$

Хотелось бы зная энергию сталкивающихся частиц найти эффективную массу системы $((\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2)$ и энергии μ^\pm .

Для 4-импульса $p^i = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p})$, для которого верно

$$c^2(2m_\mu)^2 \leq (p_1^i + p_2^i)^2 = \bar{p}_1^2 + \bar{p}_2^2 + 2\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2 = c^2 2m_e^2 + 2(\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 / c^2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2).$$

что приводит нас к неравенству

$$c^2(2m_\mu^2 - m_e^2) \leq \frac{1}{c^2} \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2.$$

При равных энергия $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$ и $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ верно, что

$$\mathbf{p}_1^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - m_e^2 c^2,$$

тогда

$$c^2(2m_\mu^2 - m_e^2) \leq \frac{1}{c^2} \mathcal{E}^2 + \mathbf{p}_1^2 = \frac{2}{c^2} \mathcal{E}^2 - m_e^2 c^2,$$

таким образом

$$\mathcal{E} \geq m_\mu c^2, \quad T_{\text{порог}} = (m_\mu - m_e) c^2.$$

При налете на неподвижную частицу $\mathcal{E}_2 = m_e c$ и $\mathbf{p}_2 = 0$, тогда

$$(2m_\mu^2 - m_e^2) c^2 \leq \mathcal{E}_1 m_e, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_1 \geq \left(2 \frac{m_\mu^2}{m_e} - m_e \right) c^2.$$

Соответственно для пороговой энергии верно

$$T_{\text{порог}} = \frac{2c^2}{m_e} (m_\mu^2 - m_e^2).$$

T5

Имеем две частицы, 4-импульсы которых в начальный момент:

$$p_\gamma^i = \begin{pmatrix} \varepsilon_\gamma \\ \mathbf{p}_\gamma \end{pmatrix}, \quad |p_\gamma^i| \approx \varepsilon_\gamma. \quad p_e^i = \begin{pmatrix} \varepsilon_e \\ \mathbf{p}_e \end{pmatrix}, \quad |p_e^i| = \beta_e \varepsilon_e.$$

Перейдём в систему центра инерции двух частиц. Пусть пусть движется со скоростью β , тогда матрица преобразования для такой пересадки и аберация угла будут

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \cos \theta \beta}.$$

Запишем закон сохранения импульса до и после столкновения, штрихами пометим величины после столкновения.

$$p_\gamma^i + p_e^i = p_\gamma'^i + p_e'^i \quad \Rightarrow \quad (p_e^i)^2 = (p_\gamma^i + p_e^i - p_\gamma'^i)^2 = p_\gamma^2 + p_e^2 + p_\gamma'^2 + 2p_e p_\gamma - 2p_e p_\gamma' - 2p_\gamma p_\gamma',$$

пренебрегая квадратом импульса фотонов получаем

$$m_e^2 = m_e^2 + 2p_e p_\gamma - 2p_e p'_\gamma - 2p_\gamma p'_\gamma \Rightarrow p_e p_\gamma - p_e p'_\gamma - p_\gamma p'_\gamma = 0.$$

Перемножим компоненты 4-импульсов:

$$\varepsilon_e \varepsilon_\gamma - \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\gamma - \varepsilon_e \varepsilon'_\gamma + \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}'_\gamma - \varepsilon_\gamma \varepsilon'_\gamma + \mathbf{p}_\gamma \cdot \mathbf{p}'_\gamma = 0.$$

Пусть частицы разлетелись под углом θ :

$$\varepsilon_e \varepsilon_\gamma + \varepsilon_e \varepsilon_\gamma \beta_e - \varepsilon_e \varepsilon'_\gamma + \beta_e \varepsilon_e \varepsilon'_\gamma \cos \theta - \varepsilon_\gamma \varepsilon'_\gamma + \varepsilon_\gamma \varepsilon'_\gamma \cos(\pi - \theta) = 0.$$

Откуда не сложно выразить энергию фотона после столкновения, заметим, что по условию задачи: $\varepsilon_\gamma / \varepsilon_e = 10^{-11}$, такими членами будем пренебрегать:

$$\varepsilon'_\gamma = \frac{\varepsilon_e \varepsilon_\gamma (1 + \beta_e)}{\varepsilon_e (1 - \beta_e \cos \theta) + \varepsilon_\gamma (1 + \cos \theta)} = \frac{\varepsilon_\gamma (1 + \beta_e)}{1 - \beta_e \cos \theta + \frac{\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_e} (1 + \cos \theta)} \approx \frac{\varepsilon_\gamma (1 + \beta_e)}{1 - \beta_e \cos \theta}.$$

Имея формулу плюс-минус общую не сложно ответить на вопрос про рассеяние назад:

$$\varepsilon'_\gamma (\cos \theta = -1) \approx \varepsilon_\gamma = 2 \text{ эВ}.$$

в то время, как вперед пролетает:

$$\varepsilon'_\gamma (\cos \theta = 1) \approx \frac{\varepsilon_\gamma \varepsilon_e^2}{m_e^2} \approx 320 \text{ ГэВ}.$$

Т6

Пион распадается на нейтрино и мюон: $\pi \rightarrow \mu + \nu$. Будем работать в система центра инерции.

$$p_{0\mu}^i = p_{0\mu}^i + p_{0\nu}^i \Rightarrow (p_{0\mu}^i)^2 = (p_{0\pi}^i - p_{0\nu}^i)^2 \Rightarrow m_\mu^2 c^2 = c^2 (m_\pi^2 + m_\nu^2) - 2p_{0\pi}^i p_{0\nu}^i = c^2 m_\pi^2 - 2m_\pi \varepsilon_{0\nu}.$$

Откуда получаем

$$\varepsilon_{0\nu} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c^2 = \frac{140^2 - 105^2}{2 \cdot 140} \cdot 1^2 = 31 \text{ МэВ}.$$

Переходя в лабораторную систему отсчёта:

$$\varepsilon_\nu = \gamma(v) \varepsilon_{0\nu} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta_0 \right).$$

Подставляя углы θ_0 найдём минимальную и максимальную энергии:

$$\varepsilon_{\min}^\nu = \varepsilon_{0\nu} \gamma(v) \left(1 - \frac{v}{c} \right) \approx 0.4 \text{ МэВ}, \quad \varepsilon_{\max}^\nu = \varepsilon_{0\nu} \gamma(v) \left(1 + \frac{v}{c} \right) \approx 2666 \text{ МэВ}.$$

Для определения среднего значения сначала нужно задаться вопросом распределения по углу отклонения, пока в системе покоя π :

$$\varepsilon_\nu = \gamma(v) \varepsilon_{0\nu} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta_0 \right) \xrightarrow{d} d\varepsilon = \frac{v}{c} \gamma \varepsilon_0 d \cos \theta_0.$$

Из всех частиц N_0 в телесном угле $d\Omega_0$ заключено:

$$\frac{dN}{N_0} = \frac{d\Omega_0}{4\pi} = \frac{1}{2} (d \cos \theta) \frac{d\varphi}{2\pi} \Rightarrow \frac{dN}{N_0} = \frac{1}{4\pi} \frac{c d\varepsilon}{v \gamma \varepsilon_0} (2\pi) = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}.$$

Но это всё было в системе центра инерции, нужно перейти в лабораторную, а тогда произойдёт абберация:

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta'}.$$

Таким образом

$$\frac{dN}{d \cos \theta} = \left(\frac{dN}{d \cos \theta'} \right) \frac{d \cos \theta'}{d \cos \theta} = \left(\frac{dN}{d \cos \theta'} \right) \frac{1 - \beta^2}{(\beta \cos \theta - 1)^2},$$

где $dN/d \cos \theta'$ — распределение по углу в системе центра инерции, которое в силу изотропности пространства постоянно. Так как в правой части отсутствует энергия, то распределение энергии по углу — постоянно, тогда

$$\langle \varepsilon^\nu \rangle = 1333 \text{ МэВ}.$$

Т7

Выберем оси z по \mathbf{H} , ось y так, чтобы в $\mathbf{E} \in \text{Oyz}$. Тогда тензор электромагнитного поля запишется:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -E \sin \theta & -E \cos \theta \\ 0 & 0 & -H & 0 \\ E \sin \theta & H & 0 & 0 \\ E \cos \theta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

с учетом $\theta = \pi/2$, $E = \alpha H$, $mc^2/e = K$, вспомнив (1.3), запишем уравнение движения

$$\frac{mc^2}{e} \frac{du^i}{ds} = F^{ik} u_k = F^{ij} g_{jk} u^k, \quad \Rightarrow \quad K \frac{d\bar{u}}{ds} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha H & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 \\ \alpha H & -H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{u},$$

где $\bar{u} = (u_0, u_x, u_y, u_z) = \bar{p}/mc$. Линейные дифференциальные уравнения мы решать вроде умеем, так что находим собственные числа, как

$$\det(F^{ik} g_{kj} - \lambda \mathbb{E}_j^i) = \lambda^2(\lambda^2 - H^2(\alpha^2 - 1)) = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= 0, \\ \lambda_{3,4} &= \pm H \sqrt{\alpha^2 - 1}. \end{aligned}$$

И, соответственно, собственные векторы ($\alpha \neq 1$):

$$(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} & -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} & 1 & 0 \\ \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} & \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Осталось подставить начальные условия

$$\bar{u}(s=0) = (\mathcal{E}_0/c, p_{0x}, p_{0y}, p_{0z})^T/mc,$$

находим уравнения относительно \bar{u} для трёх случаев. При $\alpha \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} u_x(s) &= -\frac{(\alpha p_0 - p_{0x}) \cos\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2} e H s}{c^2 m}\right)}{(1-\alpha^2) cm} - \frac{(\alpha^2 - 1) p_{0y} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2} e H s}{c^2 m}\right)}{(1-\alpha^2)^{3/2} cm} - \frac{\alpha(\alpha p_{0x} - p_0)}{(1-\alpha^2) cm}, \\ u_y(s) &= \frac{(\alpha p_0 - p_{0x}) \sin\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2} e H s}{c^2 m}\right)}{\sqrt{1-\alpha^2} cm} + \frac{p_{0y} \cos\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2} e H s}{c^2 m}\right)}{cm}. \end{aligned}$$

При $\alpha > 1$:

$$\begin{aligned} u_x(s) &= \frac{(\alpha p_0 - p_{0x}) \cosh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1} e H s}{c^2 m}\right)}{(\alpha^2 - 1) cm} + \frac{p_{0y} \sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1} e H s}{c^2 m}\right)}{\sqrt{\alpha^2 - 1} cm} + \frac{\alpha(\alpha p_{0x} - p_0)}{(\alpha^2 - 1) cm}, \\ u_y(s) &= \frac{(\alpha p_0 - p_{0x}) \sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1} e H s}{c^2 m}\right)}{\sqrt{\alpha^2 - 1} cm} + \frac{p_{0y} \cosh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1} e H s}{c^2 m}\right)}{cm}. \end{aligned}$$

И при $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned} u_0(s) &= \frac{e^2 H^2 s^2 (p_0 - p_{0x})}{2c^5 m^3} + \frac{e H p_{0y} s}{c^3 m^2} + \frac{p_0}{cm} \\ u_x(s) &= \frac{e^2 H^2 s^2 (p_0 - p_{0x})}{2c^5 m^3} + \frac{e H p_{0y} s}{c^3 m^2} + \frac{p_{0x}}{cm}, \\ u_y(s) &= \frac{e H s (p_0 - p_{0x})}{c^3 m^2} + \frac{p_{0y}}{cm}. \end{aligned}$$

и по оси z движение с $u_z = p_{0z}/mc = \text{const}$, а $s = c\tau$.

При пристальном взгляде на u_0 и u_x

$$u_0 - u_x = \frac{p_0 - p_{0x}}{cm} = \frac{\mathcal{E}_0 - c p_{0x}}{mc^2} = \text{const}.$$

Для скорости по оси x получили компоненту, независящую от времени ($E < H$) — это скорость дрейфа:

$$v_{\text{др}} = u_x^{\neq f(s)} c = c \frac{\alpha(\alpha p_{0x} - p_0)}{(\alpha^2 - 1) cm} = \left/ \frac{p_0 \approx mc}{\alpha \ll 1} \right/ = c\alpha = c \frac{E}{H},$$

что соответствует нерелятивистскому случаю.

Для случая $H < E$:

$$v_{\text{др}} = u_x^{\neq f(s)} c = c \frac{\alpha(\alpha p_{0x} - p_0)}{(\alpha^2 - 1)cm} = \left/ \frac{p_0 \approx mc}{\alpha \gg 1} \right/ = \frac{p_0}{cm} \frac{c}{\alpha} = -\frac{c}{\alpha} = -c \frac{H}{E},$$

что уже очень похоже на правду.

Тут стоит заметить, что решение получено в параметризации собственным временем системы, что, конечно, дает представление о геометрии происходящего, но, возможно, не всегда информативно. Решение в параметризации временем лабораторной системы отсчета можно посмотреть [здесь](#).

Видеть три случая с движением по спирали и по.. чему-то вроде цепной линии тоже вполне логично: в зависимости от значения α можно пересечь в систему ($\alpha > 1$), где $H' = 0$, и увидеть движение по \sim цепной, а при $\alpha < 1$ перейти к системе с $E' = 0$ и движением по окружности, движущейся относительно лабораторной с дрейфовой скоростью.

Также замечу, что $\text{sign } \alpha$ – инвариант, в силу существующих инвариантов поля (свертов тензора ЭМ-поля)

$$F_{ik}F^{ik} = H^2 - E^2 = H^2(1 - \alpha^2) = \text{inv}, \quad \epsilon^{iklm}F_{ik}F_{lm} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = \text{inv},$$

что и является основой для вышеприведенных рассуждений.

4 Общие сведения II

Запишем действие взаимодействия S_{int}

$$S_{\text{int}} = -\frac{e}{c} \int d\tau u^\mu A_\mu,$$

учитывая $u^\mu = dx^\mu/d\tau$:

$$S_{\text{int}} = -\frac{1}{c} \int d^3V \rho \int d\tau \frac{dx^\mu}{d\tau} A_\mu = -\frac{1}{c} \int dt d^3V \rho \frac{dx^\mu}{dt} A_\mu,$$

что можем переписать в случае неподвижных зарядов ($\frac{dx^\mu}{dt} = (c, \vec{0})^T$), как

$$S_{\text{int}} = - \int dt \int d^3V \cdot \rho \varphi(\mathbf{r}), \quad \Rightarrow \quad L_{\text{int}} = - \int d^3V \rho A_0(\mathbf{r}), \quad \Rightarrow \quad U = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) A_0(\mathbf{r}).$$

Thr 4.1 (Теорема Адемолло-Гатто). Если к исходному действию S_0 , приводящему к периодическому движению, и, следовательно, к адиабатическому инварианту \mathcal{I} , добавлено возмущение с малым параметром λ , так что полной действие $S = S_0 + \lambda \int V(q, \dot{q}) dt$, то инвариант, по-прежнему, сохраняется с точностью до членов второго порядка малости по λ : $\frac{d}{dt} \mathcal{I} = O(\lambda^2)$.

Тензор энергии-импульса поля:

$$T_\mu^\nu = \frac{1}{4\pi c} F^{\nu\lambda} F_{\lambda\mu} + \frac{1}{16\pi c} F^2 \delta_\mu^\nu,$$

где $F^2 = F_{ij}F^{ij}$. В частности, пространственная и временная компоненты

$$T_0^0 = \frac{1}{8\pi c} (\mathbf{H}^2 + \mathbf{E}^2), \quad T_0^\alpha = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]^\alpha.$$

Баланс энергии можем записать в интегральном и в дифференциальном виде:

$$\frac{d}{dt} \left(W_{\text{ч}} + \int d^3r c T_0^0 \right) + \int d^3r \text{div } \mathbf{S} = 0, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}], \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \frac{d}{dt} c T_0^0 + \text{div } \mathbf{S} = 0.$$

Аналогично, баланс импульса:

$$\frac{d}{dt} \left(p^\beta + \frac{1}{c^2} \int d^3r S^\beta \right) = \int d^3r c \nabla_\alpha T_\beta^\alpha, \quad \frac{1}{c} (j_0 \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{H})^\beta + \frac{1}{c^2} \frac{dS^\beta}{dt} = c \nabla_\alpha T_\beta^\alpha.$$

Для электрического, и магнитного поля, во время *электрического дипольного излучения* верно, что

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{cr^2} \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{d}} - \frac{1}{c^2 r} \mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{r^3} (3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathbf{d}) + \frac{1}{cr^2} (3(\dot{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \dot{\mathbf{d}}) + \frac{1}{c^2 r} ((\ddot{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \ddot{\mathbf{d}}).$$

Вектор потока энергии в волновой зоне

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \frac{1}{4\pi c^3 r^2} \mathbf{n} \ddot{\mathbf{d}}^2 \sin^2 \theta, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{J} = \frac{2}{3c^3} \langle \ddot{\mathbf{d}}^2 \rangle.$$

где θ – угол между векторами \mathbf{n} и $\ddot{\mathbf{d}}$, \mathcal{J} – полная интенсивность дипольного излучения.

5 Второе задание

T8

Заряд электрона распределен с плотностью

$$\rho(r) = \frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right).$$

Найдём энергию взаимодействия электронного облака с ядром в случае ядра, как точечного заряда, и в случае ядра, как равномерно заряженного шара радиуса r_0 . Точнее найдём значение следующего выражения:

$$S_{\text{int}} = -\frac{e}{c} \int d\tau u^\mu A_\mu, \quad \Rightarrow \quad U = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) A_0(\mathbf{r}).$$

Ядро, как точечный заряд. Вспоминая, что $\mathbf{E} = -\nabla A_0$ и $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho_N$, тогда $\nabla(-\nabla A_0) = -\Delta A_0 = 4\pi\rho_N$, тогда плотность заряда ядра

$$\rho_N = -e \cdot \delta(\mathbf{r}).$$

Для электронного облака известно $\rho(\mathbf{r})$, тогда

$$-\Delta A_0 = -4\pi e \delta(\mathbf{r}), \quad \Rightarrow \quad A_0 = -\frac{e}{r},$$

и, соответственно,

$$U = \int d^3r \frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a} \cdot \left(-\frac{e}{r}\right) \stackrel{\text{sp. c. s.}}{=} -\frac{e^2}{\pi a^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \int_0^\infty r^2 dr \frac{1}{r} e^{-2r/a},$$

упрощая выражение, переходим к интегралу вида

$$U = -\frac{e^2}{\pi a^3} \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \int_0^\infty dr r e^{-2r/a} = -\frac{e^2}{a} \approx 27.2 \text{ эВ},$$

где интеграл мы взяли по частям:

$$\int_0^\infty dt t^n e^{-t} = e^{-t} t^n \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} n dt = \dots = n!.$$

Ядро, как шар. Здесь стоит разделить пространство на две области:

$$A_0 = \begin{cases} -e/r, & r \geq r_0, \\ \frac{e}{2r_0^3} r^2 - \frac{3}{2} \frac{e}{r_0}, & r \leq r_0, \end{cases}$$

где A_0 для $r \leq r_0$ находится, как решение уравнения Пуассона ($\rho_N = \text{const}$):

$$\int_0^{r_0} d^3r \rho_N = -e, \quad \rho_N = -\frac{3}{4\pi} \frac{e}{r_0^3}, \quad \Delta A_0 = -3 \frac{e}{r_0^3}, \quad A_0(r_0) = -\frac{e}{r_0}.$$

Так как задача симметрична относительно любых поворотов, то $A_0 \equiv A_0(r)$, тогда

$$\Delta A_0 = \frac{d^2 A_0}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dA_0}{dr}, \quad \Rightarrow \quad A_0'' + \frac{2A_0'}{r} = \frac{(rA_0)''}{r} = -3 \frac{e}{r_0^3}.$$

Интегрируя, находим

$$rA_0 = -\frac{3e}{r_0^3} \left(\frac{1}{6} r^3 + c_1 r + c_2 \right), \quad \Rightarrow \quad A_0(r) = -\frac{e}{2r_0^3} r^2 + \tilde{c}_1 + \frac{\tilde{c}_2}{r}.$$

Подставляя граничное условие, находим

$$\tilde{c}_1 = -\frac{3}{2} \frac{e}{r_0}, \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{e}{2r_0^3} r^2 - \frac{3}{2} \frac{e}{r_0}.$$

Осталось посчитать интеграл вида

$$U = \int d^3r \rho A_0 \stackrel{\text{sp. c. s.}}{=} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \int_0^\infty r^2 dr \cdot \rho A_0 = 4\pi I,$$

где I , соответственно, равен

$$I = \int_0^{r_0} r^2 dr \cdot (A_0 - A_0^{\text{точ}} + A_0^{\text{точ}}) + \int_0^\infty r^2 dr \rho A_0^{\text{точ}} = \int_0^\infty r^2 dr \rho A_0^{\text{точ}} + \int_0^{r_0} r^2 dr \rho (A_0 - A_0^{\text{точ}}).$$

Таким образом искомая энергия представилась, как $U = U_{\text{точ}} + \Delta U$, где ΔU – некоторая поправка, связанная с ненулевым размером ядра. Она равна

$$\Delta U = 4\pi \int_0^{r_0} r^2 dr \rho \cdot (A_0 - A_0^{\text{точ}}) = \frac{4e^2}{a^3} \int_0^{r_0} dr e^{-2r/a} \left(\frac{e}{2r_0^3} r^4 - \frac{3}{2} \frac{e}{r_0} r^2 + er \right).$$

Если разложить экспоненту в ряд, то найдём, что $r_0/a \approx 10^{-5} \ll 1$, тогда получится интеграл вида

$$\Delta U = \frac{4e^2}{a^3} \left(\frac{e}{2r_0^3} \frac{1}{5} r_0^5 - \frac{3}{2} \frac{e}{r_0} \frac{1}{3} r_0^3 + e \frac{r_0^2}{2} \right) = \frac{4}{9} \left(\frac{e^2}{2a} \right) \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 = 2.2 \times 10^{-11} U_{\text{точ}}.$$

T9

Потенциал диполя

$$\varphi = -\mathbf{d} \cdot \nabla \frac{1}{r} = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

Соответственно, поле диполя

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{r^3},$$

в случае $r \neq 0$. Если же учесть такую возможность, то

$$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{r^3} - \frac{4\pi}{3} \delta(\mathbf{r}) \mathbf{d}.$$

Потенциальная энергия диполя:

$$U = \int d^3r \rho A_0 = -q\varphi(\mathbf{R}) + q\varphi(\mathbf{R} + \mathbf{l}) = q(\mathbf{l} \cdot \nabla) \varphi = \mathbf{d} \cdot (\nabla \varphi) = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}.$$

Подставляя \mathbf{E}_{ext} находим

$$U = \frac{(\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2) - 3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_1)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_2)}{r_{12}^3} + \frac{4\pi}{3} \delta(\mathbf{r}_{12}) (\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2),$$

где \mathbf{r}_{12} – радиус вектор от первого диполя, ко второму.

T10

Нас просят найти дипольный момент двух полусфер. Так как нас спросили только про дипольный момент, а про распределение зарядов не спросили, то мы последнее и не будем находить.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi^{(l)}.$$

Известно что (ЛЛШ §41) :

$$\varphi^{(l)} = \sum_a e_a \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} D_l^{(m)} Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{r_a^l}{R_0^{l+1}}. \quad (5.1)$$

Любой скалярный потенциал мы всегда можем разложить по сферическим гармоникам:

$$\varphi(z) = \sum_{l,m} c_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) R(z).$$

На сфере: $R = z$:

$$\begin{aligned} \varphi(r) = \begin{cases} \Phi_0, & z > 0 \\ -\Phi_0, & z < 0 \end{cases} \Rightarrow \int \varphi(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sin \theta d\theta d\varphi = i \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos \theta \varphi(r) \sin \theta d\theta d\varphi = \\ = i \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left(-\int_0^{\pi/2} \Phi_0 \cos \theta d \cos \theta + \int_{\pi/2}^\pi \Phi_0 \cos \theta d \cos \theta \right) = 2\Phi_0 \pi i \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(-\frac{\cos^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\cos^2 \theta}{2} \Big|_{\pi/2}^\pi \right). \end{aligned}$$

Мы получили, что из (5.1) взяв как и в выводе формулы до $l = 1$:

$$2\pi i \Phi_0 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} = \frac{4\pi}{3} \frac{1}{r} D_l^m = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} i d_z \frac{1}{r} \Rightarrow d_z = r \frac{3\Phi_0}{2}.$$

T11

Задача аксиально симметрична относительно оси Oz , дан потенциал:

$$v(r, 0) = v_0 \left(1 - \frac{r^2 - a^2}{r\sqrt{r^2 + a^2}} \right), \quad r > a.$$

Хочется узнать $v(r, \theta)$ при условии, что $r \gg a$.

Соответственно раскладываем в ряд, раз $r \gg a$, и получаем:

$$v(z, 0) = v_0 \left(1 - \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) \left(1 + \frac{a^2}{z^2} \right)^{-1/2} \right) \simeq v_0 \left(1 - \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) \left(1 + \frac{a^2}{2z^2} \right) \right) = v_0 \left(\frac{3a^2}{2z^2} - \frac{a^4}{2z^4} \right).$$

С другой стороны по теории должно было бы получиться разложение вида

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' = \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{d}\mathbf{r}}{r^3} + \frac{r_\alpha r_\beta D_{\alpha\beta}}{2r^5} + \frac{O_{\alpha\beta\gamma} r_\alpha r_\beta r_\gamma}{6r^7} + \dots$$

. Сравнивая степени в разложении получаем:

$$Q = 0, \quad D_{zz} = 0, \quad d_z = \frac{3a^2}{2}v_0, \quad O_{zzz} = -3a^4v_0.$$

Теперь применим аксиальную симметрию: $\mathbf{d} = \int \rho(\mathbf{r})\mathbf{r} d^3 r$. В дипольном моменте компоненты $d_x = d_y = 0$, что мы получаем так же как в упражнении про усреднение $\rho(x, y) = \rho(-x, -y)$.

Далее $D_{\alpha\alpha} = 0$, значит $D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0$ то есть $D_{xx} = -D_{yy}$, но в силу аксиальной симметрии такое возможно лишь если $D_{xx} = D_{yy} = 0$.

Наконец $O_{\alpha\alpha\beta} = 0$. То есть $O_{xxz} + O_{yyz} + O_{zzz} = 0$, тогда получаем:

$$O_{xxz} = O_{yyz} = -\frac{O_{zzz}}{2} = \frac{3a^4}{2}v_0$$

$$O_{xzx} = O_{yzy} = O_{zxx} = O_{zyy} = \frac{3a^4}{2}v_0$$

Вариант со всеми разными: $O_{xyz} = \int \rho(x, y, z)(15xyz)d^3 r = 0$, так как $\rho(x) = \rho(-x)$. И поэтому же $O_{xxx} = O_{yyy} = 0$.

И не взятые ещё:

$$O_{zzx} = O_{zzy} = O_{xzz} = O_{yzz} = O_{zxx} = O_{zyy} = 0.$$

$$O_{xxy} = O_{yyx} = O_{xyx} = O_{yxy} = O_{yxx} = O_{xyy} = 0.$$

Теперь давайте, как нас просят в задаче, подставим $z = r \cos \theta$:

$$v_0(r, \theta) = \frac{3a^2v_0}{2} \frac{\cos \theta}{r^2} + \left(-\frac{a^4v_0}{2r^4} \cos^3 \theta + \frac{3O_{xxz}xxz}{6r^7} + \frac{3O_{yyz}yyz}{6r^7} \right) = \frac{3a^2v_0}{2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2} + \frac{\left(\frac{3}{4} \cos \theta \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \cos^3 \theta \right)}{r^4} a^4 v_0.$$

/так как по сферической замене: $xxz = r^3 \cos \theta \sin^2 \theta \cos^2 \varphi$, $yyz = r^3 \cos \theta \sin^2 \theta \sin^2 \varphi$ /

T12

Для движения в постоянном магнитном поле можно записать уравнения движения

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}], \quad \mathbf{p} = \frac{W\mathbf{v}}{c^2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{W}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}],$$

или, считая $\mathbf{H} \parallel Oz$,

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0, \quad \omega_L = \frac{eH}{W} = \frac{eH}{mc\gamma}, \quad r = \frac{cp_t}{eH}.$$

Рассмотрим теперь адиабатический инвариант, вида

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{P}_t d\mathbf{r} = \frac{1}{2\pi} \oint \mathbf{p}_t dt + \frac{e}{2\pi c} \oint \mathbf{A} d\mathbf{r},$$

вспоминая, что $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{H}$, по теореме Стокса, находим

$$I = rp_t - \frac{e}{2c} Hr^2 = \frac{cp_t^2}{2eH}, \quad \Rightarrow \quad \frac{p_\perp^2}{H} = \tilde{I}.$$

Так что, по теореме Адемолло-Гатто, I сохраняется и в случае слабонеоднородного магнитного поля.

Изменения энергии за период найдём, выразив:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{W^2}{c^2} \right) = \frac{d}{dt} p^2, \quad \Rightarrow \quad \Delta W = \frac{2\pi}{\omega_L} \dot{W} = \frac{2\pi}{\omega_L} \frac{c}{2W} \frac{2e\dot{H}J}{c} = \frac{\pi c}{eH} J \dot{H}.$$

Найдём теперь изменение r и W при изменении поля от H_1 до H_2 . Во-первых

$$\frac{p_1^2}{H_1} = \frac{p_2^2}{H_2} = J.$$

Далее, считая $c = 1$, запишем

$$W_1^2 - m^2 = \frac{H_2}{H_1} (W_2^2 - m^2), \quad \Rightarrow \quad W_2^2 = \sqrt{m^2 \left(1 - \frac{H_1}{H_2}\right) + \frac{H_1}{H_2} W_1^2}, \quad \Rightarrow \quad W_2 - W_1 \approx \frac{J}{2m} (H_2 - H_1).$$

Чуть проще обстоит дело с радиусами

$$r_2 = \frac{cp_2}{eH_2} = \frac{c}{e} \frac{p_1}{\sqrt{H_1 H_2}} = r_1 \sqrt{\frac{H_1}{H_2}}.$$

T13

Известен дипольный момент земли $\mu = 8.1 \cdot 10^{25}$ гаусс·см³. Найдём в полярных координатах линии магнитного диполя, и определим, как меняется поле вдоль силовой линии.

Уравнение силовых линий магнитного поля. Поле от магнитного диполя \mathbf{H} можем записать, как

$$\mathbf{H} = \frac{3(\mu \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mu}{r^3}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Считая, что $\mu = \mu \mathbf{o}$, и выбирая $Oz \parallel \mathbf{o}$, можем записать

$$\mu \cdot \mathbf{e}_r = \mu_r, \quad \mu \cdot \mathbf{e}_\theta = \mu_\theta, \quad \mu \cdot \mathbf{e}_\varphi = \mu_\varphi.$$

Также верно, что $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r = \mathbf{e}_r$. Можем вычислить все проекции

$$\mu_r = \mu(\mathbf{o} \cdot \mathbf{e}_r) = \mu(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r) = \mu \cos \theta, \quad \mu_\theta = -\mu \sin \theta, \quad \mu_\varphi = 0.$$

Так приходим к записи для векторов в сферических координатах

$$\mu = \mu(\cos \theta, -\sin \theta, 0)^T, \quad \mathbf{n} = (1, 0, 0)^T.$$

Тогда магнитное поле

$$\mathbf{H} = \frac{1}{r^3} \mu \begin{pmatrix} 3 \cos \theta - \cos \theta \\ -(-\sin \theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu}{r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d\mathbf{l} = \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin \theta d\varphi \end{pmatrix}, \quad \frac{H_r}{dl_r} = \frac{H_\theta}{dl_\theta}.$$

Раскрывая последнее уравнение находим

$$\frac{dr}{r} = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} d\theta = 2 \frac{d \sin \theta}{\sin \theta}, \quad \Rightarrow \quad \ln r = 2 \ln \sin \theta + \text{const}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{r(\theta) = r_0 \sin^2 \theta}, \quad r_0 = r(\theta = \pi/2).$$

Можно построить такой бублик (симметричный относительно оси z , или относительно поворота φ), см. рис. 1.

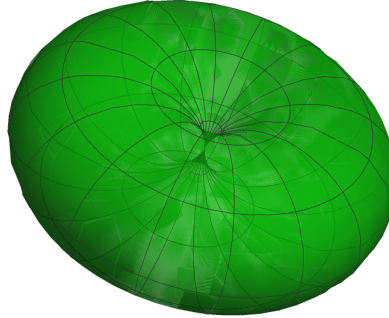


Рис. 1: Поверхность, образованная силовыми линиями в задаче 13.

Кривизна силовой линии магнитного поля. Определим $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$, для него верно

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{h}(r + \mathbf{h} dt) - \mathbf{h}(r)) = \frac{\mathbf{h}}{\rho} \cdot \mathbf{h}^2.$$

Расписывая дифференцирование, находим

$$\mathbf{h}(r + \mathbf{h} dt) - \mathbf{h}(r) = h^\alpha dt \partial_\alpha \mathbf{h}, \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} = \frac{\mathbf{n}}{\rho}.$$

Подробнее рассмотрим дифференцирование по направлению

$$\mathbf{h} \cdot \nabla = h_r \partial_r + h_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta + h_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi.$$

Магнитное поле, соответственно, равно

$$\mathbf{H}^2 = \left(\frac{\mu}{r^3}\right)^2 \cdot (3 \cos^2 \theta + 1), \quad \Rightarrow \quad h_r = \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}}, \quad h_\theta = \frac{\sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + 2}}.$$

Наконец, можем подставить их в $(\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} = (h_r \partial_r + h_\theta \frac{1}{r} \partial_\theta) \mathbf{h} = \mathbf{n}/\rho$. Так, например, на экваторе $\theta = \pi/2$, $h_r = 0$, $h_\theta = 1$:

$$\left(\frac{1}{r} \partial_\theta \right) \mathbf{h} = \frac{1}{r} \partial_\theta (h_r \mathbf{e}_r + h_\theta \mathbf{e}_\theta) \Big|_{\theta=\pi/2} = \frac{1}{r} (\partial_\theta h_r \mathbf{e}_r + h_r \partial_\theta \mathbf{e}_r + \partial_\theta h_\theta \mathbf{e}_\theta + h_\theta \partial_\theta \mathbf{e}_\theta).$$

В частности, слагаемые равны

$$\partial_\theta h_r \Big|_{\theta=\pi/2} = -2, \quad \partial_\theta h_\theta \Big|_{\theta=\pi/2} = 0.$$

В результате получаем

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h} \Big|_{\theta=\pi/2} = -\frac{3}{r} \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{n}}{\rho}, \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{экв}} = \frac{r}{3}.$$

Движение частицы. Для начала вспомним, что поле называется слабонеоднородным, если

$$r_\perp = p_\perp \frac{c}{|e|H_0} \ll \rho.$$

Движение же можно разделить на движение по спирали вокруг силовой линии и движение вдоль силовой линии.

Вспомним, про существование адиабатического инварианта, вида

$$\frac{p_\perp^2}{H} = \text{const}, \quad \mathbf{p}^2 = p_\perp^2 + p_\parallel^2.$$

Таким образом при движении $H \uparrow$ меняется и $p_\perp \uparrow$, таким образом $p_\parallel = 0$ в некоторый момент, а потом и меняет знак.

Также происходит дрейф по бинормали, обеспечивающий радиационные пояса Земли.

Ну, действительно, общее уравнение движения можем записать в виде

$$m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}].$$

Можно воспринимать происходящее как движение в постоянном магнитном поле, с поправкой к Лагранжиану $L_{\text{маг}} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}$, тогда добавочная сила

$$\mathbf{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}), \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \boldsymbol{\mu} \times \text{rot } \mathbf{H} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{H},$$

где учтено, что $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} = 0$. Итого, уравнение движения

$$m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} + (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{H}.$$

Можно показать, что $\frac{d}{dt} \mathbf{v}_\perp$ мало, и перейти к уравнению

$$\frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt} = \omega_L \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{H} + \frac{1}{mg} (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{H},$$

которое почленно распишем. В частности,

$$(\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{H} = -\mathbf{h}_\mu \cdot (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{H} - H_\mu (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}.$$

Другое слагаемое, соответственно

$$\frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt} = \dot{v}_\parallel \mathbf{h} + v_\parallel^2 (\mathbf{h} \cdot \nabla) \mathbf{h}.$$

Переписывая уравнения в ОНБ (\mathbf{h}, \mathbf{n}) , где бинормаль определим, как $\mathbf{b} = \mathbf{h} \times \mathbf{n}$.

Домножая одно из уравнений на \mathbf{h} , переходим к выражению для \mathbf{v}_\perp

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{1}{\rho\omega L} \left(v_\parallel^2 + \frac{u_\perp^2}{2} \right) \cdot \mathbf{b}.$$

Проекция на \mathbf{h} может быть найдена через скалярное домножение:

$$\dot{v}_\parallel = -\frac{\mu h^2}{m\gamma} (\mathbf{h} \cdot \nabla) H = -\frac{u_\perp^2}{2H} (\mathbf{h} \cdot \nabla) H.$$

Также можем учесть, что магнитное поле не совершает работы, тогда $u_\perp + v_\parallel^2 = \text{const}$ тогда

$$v_\parallel (\mathbf{h} \cdot \nabla) H = \dot{H}, \quad \dot{v}_\parallel \sim -(\mathbf{h} \cdot \nabla) H,$$

где мы знаем, что $u_\perp^2/H = \text{const}$. Таким образом возможны колебания v_\parallel вокруг положения 0, что и называется «магнитным зеркалом».

Зная $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$ можем определить, где возникает магнитное зеркало: из адиабатического инварианта:

$$\frac{v^2 \cos^2 \alpha}{H_{r_0}} = \frac{v_\perp^2(\pi/2)}{H(\pi/2)} = \frac{v_\perp^2(\theta_{\text{max}})}{H(\theta_{\text{max}})} = \frac{v^2}{H(\theta_{\text{max}})}.$$

Откуда можем найти

$$\frac{\sqrt{4 - 3 \sin^2 \theta_{\max}}}{\sin^6 \theta_{\max}} = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

иначе, можем записать,

$$\sin^2 \beta = \frac{\sin^6 \theta_{\max}}{\sqrt{4 - 3 \sin^2 \theta_{\max}}} \approx \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)^2, \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 86^\circ,$$

где воспользовались $R = r_0 \sin^2 \theta_{\max} \approx 6,4 \cdot 10^3$ км.

В случае же рассмотрения скорости дрейфа, мы переходим к выражению (для скорости на экваторе)

$$\mathbf{v}_{\text{др}} = -\frac{W}{ecH} \frac{f}{m} [\mathbf{n} \times \mathbf{h}], \quad \Rightarrow \quad |v_{\text{др}}| = \frac{T_{\text{кин}}}{m\omega\rho} \approx 0.009c, \quad \Rightarrow \quad |v_{\text{др}}| = 3 \cdot 10^3 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

T14

Запишем выражение для магнитного дипольного момента:

$$\boldsymbol{\mu} = g \frac{e}{2mc\gamma} [\mathbf{r} \times \mathbf{p}].$$

Обозначив момент количества движения как $\mathbf{l} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$ получим поправку в гамильтониан от взаимодействия вида:

$$H_{\text{int}} = -\frac{eg}{2mc\gamma} (\mathbf{l} \cdot \mathbf{H}) = -\frac{eg}{2mc\gamma} l_\alpha H^\alpha.$$

И так у нас есть величина, которая вообще есть функция $F(q, p, t)$, то есть

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}.$$

Тогда с таким великим механическим знанием пойдём посмотрим на наш момент импульса:

$$\frac{dl_i}{dt} = 0 + \frac{\partial l_i}{\partial r^\alpha} \left(-\frac{eg}{2mc\gamma} H^\beta \frac{\partial l_\beta}{\partial p_\alpha} \right) - \frac{\partial l_i}{\partial p_\alpha} \left(-\frac{eg}{2mc\gamma} H^\beta \frac{\partial l_\beta}{\partial r^\alpha} \right) = -\frac{eg}{2mc\gamma} H^\beta \{l_i, l_\beta\}$$

Давайте отдельно посмотрим на скобку Пуассона для таких вот векторных произведений, как моменты импульса:

$$\begin{aligned} \{l_i, l_\beta\} &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{\beta\alpha\gamma} \{r^j p^k, r^\alpha p^\gamma\} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{\beta\alpha\gamma} (\delta^{j\gamma} p^k r^\alpha - \delta^{\alpha k} p^\gamma r^j) = \varepsilon_i{}^\gamma{}_k \varepsilon_{\beta\alpha\gamma} p^k r^\alpha - \varepsilon_{ij}{}^\alpha \varepsilon_{\beta\alpha\gamma} p^\gamma r^j = \\ &= (\delta_{i\beta} \delta_{j\gamma} - \delta_{i\gamma} \delta_{j\beta}) p^\gamma r^j - (\delta_{i\beta} \delta_{k\alpha} - \delta_{i\alpha} \delta_{k\beta}) p^k p^\alpha = \delta_{i\beta} p_j r^j - p_i r_\beta - \delta_{i\beta} p_\alpha r^\alpha + p_\beta r_i = p_\beta r_i - p_i r_\beta = \varepsilon_{i\beta}{}^\gamma \varepsilon_{\gamma mn} r^m p^n = \varepsilon_{i\beta}{}^\gamma l_\gamma. \end{aligned}$$

Тогда получаем:

$$\frac{dl_i}{dt} = -\frac{eg}{2mc\gamma} \varepsilon_{i\beta}{}^\gamma l_\gamma H^\beta \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{eg}{2mc\gamma} [\mathbf{l} \times \mathbf{H}].$$

Тогда для производной по времени от магнитного дипольного момента имеем:

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \frac{eg}{2mc\gamma} [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{H}] = \frac{g}{2} [\boldsymbol{\omega}_L \times \boldsymbol{\mu}],$$

где $\boldsymbol{\omega}_L = -\frac{e\mathbf{H}}{mc\gamma}$ – Ларморовская частота.

Знаем теперь гиромагнитное соотношение для дипольного момента, и тогда в первом приближении в постоянном магнитном поле:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{ge}{2mc} \mathbf{s} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{s}}^{(1)} = \frac{g}{2} \gamma [\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{s}].$$

Во втором же приближении получим прецессию Томаса, с которой мы уже работали в Задаче 2.

$$\dot{\mathbf{s}}^{(2)} = \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)c^2} [\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{v}] = \boldsymbol{\omega}_{th} \times \mathbf{s}.$$

Теперь свяжем Ларморовскую частоту с Томасоновской, зная, что

$$m\gamma \dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{v}} = [\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{v}]$$

Тогда выражение для прецессии Томаса:

$$\boldsymbol{\omega}_{th} = \frac{\gamma^2}{\gamma+1} c^2 [\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{v}] \times \mathbf{v} = -\frac{\gamma^2 v^2}{(\gamma+1)c^2} = -(\gamma-1) \boldsymbol{\omega}_L.$$

Таким образом для изменения спина получаем:

$$\dot{\mathbf{S}} = \left(\frac{g}{2} \gamma - (\gamma-1) \right) \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{s} = \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{s} + \gamma \left(\frac{g}{2} - 1 \right) \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{s}.$$

Таким образом за один оборот спин отклонится на

$$\Delta\varphi = \left(\frac{g}{2} - 1\gamma\right) \cdot 2\pi = \alpha\gamma.$$

И как нетрудно показать,

$$P = mc\sqrt{\gamma^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \sqrt{\left(\frac{P}{mc}\right)^2 + 1}$$

Тогда получаем ответ:

$$\Delta\varphi = \alpha\sqrt{\left(\frac{P}{mc}\right)^2 + 1} \simeq 0.07.$$

T15

Пусть есть плоскость Oxz , и диполь направлен под углом θ_d к оси Oz . Воспользуемся методом изображений и зеркально под проводящей плоскостью Oxy расположим второй диполь, заменяющий её.

$$\mathbf{d}_1 = d(\mathbf{e}_z \cos \theta_d + \mathbf{e} \sin \theta_d), \quad \mathbf{d}_2 = d(\mathbf{e}_z \cos \theta_d - \mathbf{e}_x \sin \theta_d).$$

Здесь введены единичные векторы, и также ещё введём на будущее \mathbf{r} вектор на точку наблюдения из середины координат, \mathbf{n} – единичный по этому направлению.

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - L\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + L\mathbf{e}_z.$$

Тут $2L$ – расстояние между диполями, будем работать в приближении $r \gg L$. Тогда примерно $\mathbf{r}_1 \parallel \mathbf{r}_2 \parallel \mathbf{n}$. И соответственно $r = (\mathbf{r}\mathbf{n})$, а остальные:

$$r_1 = (\mathbf{r}_1\mathbf{n}) = r - L(\mathbf{e}_z\mathbf{n}), \quad r_2 = (\mathbf{r}_2\mathbf{n}) = r + L(\mathbf{e}_z\mathbf{n}).$$

И для $d_{1,2}(t - \frac{r_{1,2}}{c})$

$$\mathbf{d}_1 = d(\mathbf{e}_z \cos \theta_d + \mathbf{e} \sin \theta_d) \cos(\omega t - kr_1), \quad \mathbf{d}_2 = d(\mathbf{e}_z \cos \theta_d - \mathbf{e}_x \sin \theta_d) \cos(\omega t - kr_2),$$

колеблющегося гармонически (по условию):

$$\mathbf{H} = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}_1 \times \mathbf{n}]}{c^2 r_1} + \frac{\ddot{\mathbf{d}}_2 \times \mathbf{n}}{c^2 r_2} = \frac{-\omega^2 d}{c^2 r} \left(([\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}] \cos \theta_d + [\mathbf{e}_x \times \mathbf{n}] \sin \theta_d) \cos(\omega t - \frac{\omega}{c} r_1) + ([\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}] \cos \theta_d + [\mathbf{e}_x \times \mathbf{n}] \sin \theta_d) \cos(\omega t - \frac{\omega}{c} r_2) \right)$$

Очень хочется упростить:

$$\cos(\omega t - kr_1) = \cos(\omega t - kr + kL(\mathbf{e}_z\mathbf{n})) = \cos(\omega t - kr) \cos(kL(\mathbf{e}_z\mathbf{n})) - \sin(\omega t - kr) \sin(kL(\mathbf{e}_z\mathbf{n})).$$

$$\cos(\omega t - kr_2) = \cos(\omega t - kr - kL(\mathbf{e}_z\mathbf{n})) = \cos(\omega t - kr) \cos(kL(\mathbf{e}_z\mathbf{n})) + \sin(\omega t - kr) \sin(kL(\mathbf{e}_z\mathbf{n})).$$

Тогда возвращаемся к выражению для H :

$$\mathbf{H} = \frac{-2\omega^2 d}{c^2 r} ([\mathbf{e}_z \times \mathbf{n}] \cos \theta_d \cos(\omega t - kr) \cos(kL(\mathbf{e}_z\mathbf{n})) - [\mathbf{e}_x \times \mathbf{n}] \sin \theta_d \sin(\omega t - kr) \sin(kL(\mathbf{e}_z\mathbf{n}))).$$

T16

Значит есть разноименные заряды, один будем характеризовать индексами "1 а другой "2". Будем работать в системе центра инерции:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{R}_{\text{центра инерции}} = 0.$$

Тогда не сложно вычислить:

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2(1 + \frac{m_2}{m_1}), \quad \mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}.$$

Ну и как мы показывали для излучения диполя: $I = 2|\ddot{\mathbf{d}}|^2/(3c^3)$. В нашем случае:

$$\mathbf{d} = e_1 \mathbf{r}_1 + e_2 \mathbf{r}_2 = \left(\frac{e_2 m_1 - e_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \mathbf{r} = q\mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{2q^2 \ddot{\mathbf{r}}^2}{3c^3}.$$

Введем $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Посмотрим на энергию, излучаемую за один период:

$$\delta\varepsilon = I \cdot T_{\text{период}} = I \frac{2\pi r}{v}.$$

Будем работать в предположении, что $\delta\varepsilon \ll \varepsilon$. Воспользуемся теоремой Вириала:

$$2\langle T \rangle = n\langle u \rangle, \quad T = \frac{\mu v^2}{2}, \quad \mu v^2 = -\frac{e_1 e_2}{r} \quad \rightsquigarrow \quad u = \frac{e_1 e_2}{r}.$$

Таким образом $v = \sqrt{|e_1 e_2|/\mu^2}$, тогда опять к энергии:

$$\delta\varepsilon = \frac{2q^2 \ddot{r}^2}{3c^3} \frac{\pi r^{3/2} \mu^{1/2}}{|e_1 e_2|^{1/2}} = \frac{2q^2}{3c^3} \frac{|e_1 e_2|^{3/2}}{\mu^{3/2} r^{5/2}} \pi = \frac{|e_1 e_2|}{2r} \frac{4\pi q^2}{3|e_1 e_2|} \underbrace{\frac{|e_1 e_2|^{3/2}}{c^3 \mu^{3/2} r^{3/2}}}_{(v/c)^3} = \varepsilon \left(\frac{v}{c}\right)^3 \frac{4\pi q^2}{3|e_1 e_2|} \ll \varepsilon.$$

Теперь на нас интересует $r(t)$. Знаем, что $\varepsilon = \frac{e_1 e_2}{2r}$.

$$I = -\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{d\varepsilon}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{e_1 e_2}{2r^2} \dot{r} = \frac{2q^2 \ddot{r}^2}{3c^3},$$

подставляем сюда Кулона $\mu \ddot{r} = \frac{e_1 e_2}{r^2}$, а он выполняется, так как за один оборот не очень много энергии теряется:

$$\frac{e_1 e_2}{2r^2} \dot{r} = \frac{2q^2 (e_1 e_2)^2}{3c^3 \mu^2 r^4} \quad \rightsquigarrow \quad r^2 \dot{r} = \frac{4q^2 (e_1 e_2)}{3c^3 \mu^2} = \frac{1}{3} \frac{dr^3}{dt}.$$

Не сложно тогда получается:

$$r = \left(r_0^3 + \frac{4\theta^2 (e_1 e_2)}{c^3 \mu^2} t \right)^{1/3}, \quad t_{\text{пад}} = \frac{r_0^3 \mu^2 c^3}{4q^2 (e_1 e_2)}.$$

Для атома время падения электрона на него $t \sim 10^{-8}$ секунды, и действительно в классической теории поля атомы с электронами стабильно существовать не могут.

T17

Два заряда у нас сталкиваются, излучают и летят обратно, нас интересует процесс излучения. Будем считать, что $v \ll c$. Воспользуемся выведенной формулой $I = 2|\dot{\mathbf{d}}|^2/3(c^3)$. И всё так же живём в системе центра инерции, как в прошлой задаче.

$$\mathbf{d} = e_1 \mathbf{r}_1 + e_2 \mathbf{r}_2 = \left(\frac{e_2 m_1 - e_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \mathbf{r} = q \mathbf{r}.$$

Давайте рассмотрим случай, когда $e_2 m_1 \neq e_1 m_2$. Тогда у нас не появляется лишних нулей, $I = \frac{2q^2 \ddot{\mathbf{r}}^2}{ec^3}$. И, собственно, для энергии имеем:

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt = \frac{2q^2}{3c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{r}^2 dt = \frac{2q^2}{3c^3} \int_{v_{-\infty}}^{v_{\infty}} \ddot{r} dr$$

Опять, работая с предположением: $\varepsilon_{\text{изл}} \ll \varepsilon_{\text{полная}}$, воспользуемся законом Кулона. Ещё нам, для выражения скорости понадобится закон сохранения энергии:

$$\frac{\mu v_{\infty}^2}{2} = \frac{\mu v^2}{2} + \frac{e_1 e_2}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{(e_1 e_2)^2}{r^2} = \frac{\mu^2}{4} (v_{\infty}^2 - v^2)^2,$$

что при подстановке в закон Кулона:

$$\ddot{r} = \frac{e_1 e_2}{\mu r^2} = \frac{(e_1 e_2)^2}{r^2} \frac{1}{\mu (e_1 e_2)} = \frac{\mu}{4(e_1 e_2)} (v_{\infty}^2 - v^2)^2.$$

Теперь мы готовы взять наш интеграл:

$$\varepsilon = \frac{q^2 \mu}{6c^3 (e_1 e_2)} \int_{-v_{\infty}}^{v_{\infty}} (v_{\infty}^2 - v^2) dv = \frac{\mu q^2}{6c^3 (e_1 e_2)} \left(v_{\infty}^4 v - \frac{2v^3}{3} v_{\infty}^2 + \frac{v^5}{5} \right) \Big|_{-v_{\infty}}^{v_{\infty}} = \frac{8\mu q^2}{45c^3 (e_1 e_2)} v_{\infty}^5 = \left(\frac{\mu v_{\infty}^2}{2} \right) \left(\frac{v_{\infty}}{c} \right)^3 \frac{16q^2}{45(e_1 e_2)} \ll \frac{\mu v_{\infty}^2}{2}.$$

Так и показали, что $\varepsilon \ll \varepsilon_{\text{полн}}$.

T18

У нас есть некий электрон летящий по окружности. Магнитное поле пусть направлено $\mathbf{H} = (0, 0, H)$. И у нас релятивистский случай $v \rightarrow c$.

Пренебрегаем излучением:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}].$$

Изменение энергии при $E = 0$ будет:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = 0.$$

То есть константа, а значит:

$$\varepsilon = \gamma m c^2 = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \text{const}.$$

Тогда далее жить намного удобнее, найдем радиус орбиты:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma m \dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}].$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \frac{e}{mc\gamma} [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{H}], \quad \mathbf{v}_0 = \frac{e}{mc\gamma} [\mathbf{r}_0 \times \mathbf{H}] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \frac{e}{\gamma mc} [\mathbf{r} \times \mathbf{H}]$$

Тогда имеем радиус и циклотронную частоту:

$$R = \frac{\gamma mc}{eH} v, \quad \Omega = \frac{eH}{\gamma mc}.$$

Далее достаточно большой блок теории – нужны запаздывающие потенциалы, но мы будем пытаться обойтись без них, введем на веру *потенциалы Лиенара-Вихерта*:

$$\varphi = \frac{e}{R \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)}, \quad \mathbf{A} = \frac{e \mathbf{v}}{R \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c}\right)}.$$

Переходим в мгновенную систему отсчета K' :

$$\mathbf{v}' = (0, 0, 0); \quad \mathbf{v}(0, v, 0); \quad \mathbf{H}(0, 0, H); \quad \mathbf{E} = (0, 0, 0).$$

Тогда, зная как преобразуются компоненты поля:

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel} = 0, \quad H'_{\parallel} = H_{\parallel} = 0.$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{E}_{\perp} - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right), \quad \mathbf{H}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{H}_{\perp} - \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{E}] \right).$$

Таким образом получаем:

$$\mathbf{H}' = (0, 0, \gamma H), \quad \mathbf{E}' = (-\beta \gamma H, 0, 0).$$

Тогда в новой системе отсчета движение описывается как:

$$\frac{dp'}{dt'} = e \mathbf{E}' + \underbrace{\frac{e}{c} [\mathbf{v}' \times \mathbf{H}']}_0 = \underbrace{\dot{\gamma}' m \mathbf{v}'}_0 + \gamma' m \dot{\mathbf{v}}' \quad \Rightarrow \quad m \dot{\mathbf{v}}' = e \mathbf{E}'.$$

$$\ddot{\mathbf{r}}' = -\frac{e \beta \gamma H}{m} \mathbf{e}_x \quad \ddot{\mathbf{d}}' = e \ddot{\mathbf{r}}' = -\frac{e^2 \beta \gamma H}{m} \mathbf{e}_x.$$

Тогда интенсивность излучения:

$$I' = \frac{2|\ddot{\mathbf{d}}'|^2}{3c^3} = \frac{2e^4 \beta^2 \gamma^2 H^2}{3m^2 c^3}.$$

Но в то же время $I' = -d\varepsilon'/dt'$ и $I = -d\varepsilon/dt$. счастью наше преобразование нам даёт, что $x' = y' = z' = 0$, и главное – $t = \gamma t'$. И большая удача, что преобразование четыре импульса системы тоже даёт нам $p'_x = p'_y = p'_z = 0$, и самое главное – $\varepsilon = \gamma \varepsilon'$. Тогда и $I = I'$, по замечанию выше.

T19

Пусть электрон движется вдоль оси x , конденсатор вызывает колебания вдоль оси y . Предполагаем, что колебания примерно не влияют на движения электрона с большой скоростью вдоль оси конденсатора.

Перейдём в систему K' , движущуюся относительно лабораторной со скоростью $\langle v_x \rangle$. 4-вектор стоячей волны в конденсаторе имеет вид $k_{\text{ст}}^{\mu} = (\omega_0/c, 0, 0, 0)^T$. В системе K' можем найти, что

$$k_{\text{ст}}^{\mu'} = \Lambda(\langle v_x \rangle, 0x)_{\nu}^{\mu} k_{\text{ст}}^{\nu} = (\gamma \omega_0/c, -\beta \gamma \omega_0, 0, 0)^T,$$

с $\beta = v/c$. Если в системе K' электроны остаются нерелятивистскими, частота частота излучения не зависит от направления и совпадает с вынуждающей сильной $k_{\text{ст}}^{0'} = \gamma \omega_0/c$.

Рассмотрим волновой 4-вектор излучения в системе K' . Считая, что излучение происходит (x, y) , можем записать

$$\tilde{k}^{\mu} = \frac{1}{c} (\gamma \omega_0, \gamma \omega_0 \cos \theta', \gamma \omega_0 \sin \theta', 0),$$

где θ' – угол между волновым вектором \mathbf{k}' и осью x . После обратного преобразования Лоренца переходим к

выражению, вида

$$k^\mu = \Lambda(-\langle v_x \rangle, Ox)_\nu^\mu \tilde{k}^\nu = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} \gamma^2 \omega_0 (1 + \beta \cos \theta') \\ \gamma^2 \omega_0 (\beta + \cos \theta') \\ \gamma \omega_0 \sin \theta' \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} \omega \\ \omega \cos \theta \\ \omega \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

внимательно посмотрев на которое, находим

$$\cos \theta = \frac{k^1}{k^0} = \frac{\beta + \cos \theta'}{1 + \beta \cos \theta'}, \quad \cos \theta' = \frac{-\beta + \cos \theta}{1 - \beta \cos \theta}, \quad \omega = \gamma^2 \omega_0 (1 + \beta \cos \theta') = \frac{\omega_0}{1 - \beta \cos \theta}.$$

Таким образом излучение происходит в формате узкого конуса вперед по движению ($\theta \approx 0$).

T20

Имеем что? $\mathbf{E}_0 \parallel \mathbf{e}_x$ и $\mathbf{H}_0 \parallel \mathbf{e}_y$. Запишем вектор Пойтинга для такой рассеянной волны:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{H}|^2 \mathbf{n} = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}|^2 \mathbf{n}.$$

Вдали от источника, как мы обсуждали выполняется $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ и равны по модулю.

Для интенсивности имеем

$$dI = \mathbf{n} S r^2 d\Omega = S_0 d\sigma,$$

где ввели дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma$, а $S_0 = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}_0|^2$.

Внутри идеально проводящего шара $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{H} = \mathbf{0}$. Рассмотрим конкретно электрическое поле в центре шара с плотностью заряда $\rho(\theta, \phi)$, взяв закон Кулона:

$$\mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \int \frac{\rho(\theta, \varphi)(-\mathbf{r})}{r^3} dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) - \underbrace{\frac{1}{r^3} \int \rho(\theta, \varphi) \mathbf{r} dS}_{\mathbf{d}} = 0.$$

Соответственно получаем: $\mathbf{d} = \mathbf{E}_0 r^3 \cos(\omega t)$.

Теперь берем Био-Савара

$$\mathbf{H}_0 \cos(\omega t) + \int \frac{[\mathbf{J} \times (-\mathbf{r})]}{cr^3} dS = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}_0 \cos(\omega t) + \frac{2}{r^3} \int \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{J}}{2c} dS = 0.$$

И аналогично $\boldsymbol{\mu} = -\frac{H_0 r^3}{2} \cos(\omega t)$.

В волновой (зоне) будет верно, что

$$\mathbf{H}_d = \frac{\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}}{c^2 r}, \quad \mathbf{H}_\mu = \frac{\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \ddot{\boldsymbol{\mu}}) - \ddot{\boldsymbol{\mu}}}{c^2 r}.$$

Таким образом вектор Пойтинга:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{H}_d + \mathbf{H}_\mu|^2 \mathbf{n} = \frac{c}{4\pi c^4 r^2} (|\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}|^2 + (\mathbf{n} \cdot \ddot{\boldsymbol{\mu}})^2 + |\ddot{\boldsymbol{\mu}}|^2 + 2([\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \ddot{\boldsymbol{\mu}}) - 2(\ddot{\boldsymbol{\mu}} \cdot [\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]) - 2(\mathbf{n} \cdot \ddot{\boldsymbol{\mu}})^2) \mathbf{n}.$$

Будем разбираться по очереди: $[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}] \cdot \mathbf{n} = 0$. Далее:

$$[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]_\alpha [\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^\alpha = |\ddot{\mathbf{d}}|^2 - (\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{d}})^2.$$

Теперь вроде как немного упростилось:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi c^3 r^2} (|\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}|^2 - (\mathbf{n} \cdot \ddot{\boldsymbol{\mu}})^2 + |\ddot{\boldsymbol{\mu}}|^2 - (\mathbf{n} \cdot \ddot{\boldsymbol{\mu}})^2 - 2(\ddot{\boldsymbol{\mu}} \cdot [\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}])) \mathbf{n}.$$

И теперь по формулам выше найдём сечение:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\omega^4 r^6}{c^4} \cos^2(\omega t) (|\mathbf{e}_x|^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x)^2 + \frac{1}{4} |\mathbf{e}_y|^2 - \frac{1}{4} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y)^2 - (\mathbf{e}_y [\mathbf{e}_x \times \mathbf{n}])) d\Omega = \\ &= \frac{\omega^4 r^6}{2c^4} \left(\frac{5}{4} - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \frac{1}{4} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos \theta \right) d\Omega. \end{aligned}$$

А теперь, как нас просят задаче, мы это возьмём и проинтегрируем!

$$\sigma = 2\pi \frac{\omega^4 r^6}{2c^4} \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) = \frac{5\pi}{3} \frac{\omega^4}{2c^4} r^6.$$