Теория к курсу «Аналитическая механика II» ФОПФ

За авторством: Хоружего К.
Примака Е.

От: *11 февраля 2021 г.*

Содержание

Малые колебания консервативной системы около положения равновесия

14.1 Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия

Устойчивость равновесия

Thr 14.1 (Общее уравнение статики[1]). *Чтобы некоторое допускаемое идеальными удерживающими связями состояние равновесия системы было состоянием равновесия на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, необходимо и достаточно, чтобы для любого момента времени из этого интервала элементарная работа активных сил на любом виртуальном перемещении равнялась нулю, т.е. чтобы выполнялось*

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0 \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1).$$

Если система является потенциальной, то уравнения примут вид

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} = 0.$$

Def 14.2. Положение равновесия $q = 0$ – *устойчиво по Ляпунову*, если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$, такая что

$$\forall \;\; |q(t_0)| < \delta, \; |\dot{q}(t_0)| < \delta: \qquad |q(t)| < \varepsilon, \; |\dot{q}(t)| < \varepsilon, \qquad \forall t \geqslant t_0. \tag{14.1}$$

Def 14.3. Положение равновесия $q = 0$ – *неустойчиво по Ляпунову*, если $\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0$, такая что

$$\forall \delta > 0 \;\; \exists |q(t_0)| < \delta, \; |\dot{q}(t_0)| < \delta, \;\; t^*: \qquad |q(t^*)| > \varepsilon \text{ или } |\dot{q}(t^*)| > \varepsilon. \tag{14.2}$$

Теорема Лагранжа

Thr 14.4 (Теорема Лагранжа-Дирихле). *Если в положении равновесия конесервативной системы* $\Pi(q)$ *имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.*

Lem 14.5. *При наличии гироскопических и диссипативных сил положение равновесия сохранится.*

Теоремы Ляпунова о неустойчивости положения равновесия консервативной системы

Thr 14.6 (Теорма Ляпунова о неустойчивости I). *Если в положении равновесия* $\Pi(q)$ *не имеет минимума и это определяется по квадратичной форме её разложения в ряд (в окрестности положения равновесия), то это положение равновесия неустойчиво.*

Thr 14.7 (Теорема Ляпунова о неустойчивости II). *Если в положении равновесия* $\Pi(q)$ *имеет строгий максимум и это определяется по наинизшей степени её разложения в ряд (в окрестности положения равновесия), то это положение равновесия неустойчиво.*

Устойчивость движения

15.1 Основные понятия и определения

Возмущенное движение

Пусть уравнение движение представлено в виде:

$$\frac{dy_i}{dt} Y_i(y_1, y_2, \ldots, y_m, t) \; (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{15.3}$$

Рассмотрим частное движение — частное решение этой системы с начальными условиями

$$y_i^* = f_i(t)(i = 1, 2, \ldots, m), \;\; y_{i0} = f_i(t_0)(i = 1, 2, \ldots, m). \tag{15.4}$$

Нас будут интересовать движения системы при отклонении от начальных условий y_{i0} от значений $f_i(t_0)$.

[1]Если с необходимостью всё понятно, то достаточность может быть доказана через уравнения Аппеля (см. п. 158, Маркеев П. А.).

Def 15.8. Движение системы, описываемое (15.2) называется *невозмущенным* движением. Все другие движения механической системы при тех же силах, что и движение (15.2) — *возмущенные* движения.

Def 15.9. *Возмущениями* назовём разности вида:

$$x_i = y_i - f_i(t) \ (i = 1, 2, \dots, m). \tag{15.5}$$

Def 15.10. Теперь, произведя замену по формулам (15.3) в уравнениях (15.1) получим *дифференциальные уравнения возмущенного движения*:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_m, t) \ (i = 1, 2, \dots, m). \tag{15.6}$$

Уравнения (15.4) имеют частное решение $x_i \equiv$ отвечающее невозмущенному движению.

Def 15.11. Движение называется *установившимся*, если $X_i \neq g(t)$, в противном же случае — *неустановившимся*.

Def 15.12 (Устойчивость по Ляпунову)**.** Невозмущенное движение называется *устойчивым* по отношению к переменным y_i, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon)\colon \forall$ возмущенных движений, для которых

$$|x_i(t_0)| < \delta, \ \forall t > t_0 \ \text{ выполняется } \ |x_i(t)| < \varepsilon. \tag{15.7}$$

Def 15.13 (Асимптотическая устойчивость)**.** Невозмущенное движение называется *асимптотически устойчивым* по отношению к переменным y_i, если оно устойчиво и $\exists \delta$ – маленькие такие, что для возмущенных движений удовлетворяющим условиям (15.5) верно:

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0 \ (i = 1, 2, \dots, m). \tag{15.8}$$

Функции Ляпунова

Для простоты будем изучать толко установившиеся движения. В уравнениях возмущенного движения (15.4) функции X_i будем считать непрерывными в области

$$|x_i| < H(= \mathrm{const}) \ (i = 1, 2, \dots, m), \tag{15.9}$$

и такими, что уравнения (15.4) при начальных значениях x_{i0} из области (15.7) допускают единственное решение.

Def 15.14 (Функция Ляпунова)**.** В области $|x_i| < h$, где $h > 0$ — достаточно малое число, будем рассматривать функции *Ляпунова* $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$, предполагая их непрерывно дифференцируемыми, однозначными и обращающимися в нуль в начале координат $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$.

Def 15.15. *Производной* dV/dt функции V в силу уравнений возмущенного движения (15.4) называется:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial x^i} X_i.$$

Таким образом производная от функции Ляпунова также $g(x_1, x_2, \dots, x_m)$, будет непрерывной в той же облачи и обращаться в нуль в начале координат.

Def 15.16. $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$ назовём *определенно-положительной* в области $|x_i| < h$, если всюду в этой облачи, кроме начал координат верно: $V > 0$. Аналогично с определенной отрицательно. В обоих случаях функция V называется *знакоопределенной.*

Def 15.17. Если в области $x_i < h$ функция V может принимать значения только одного знака, но может обращаться в нуль не толко в начале координат, то она называется *знакопостоянной.*

Def 15.18. Наконец, если функция может принимать в области как значения большие нуля, так и меньшие, она называется *знакопеременной.*

15.2 Основные теоремы прямого метода Ляпунова

Здесь и далее для простоты рассматриваем установившееся движение.

Thr 15.19 (Теорема Ляпунова об устойчивости)**.** *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует знакоопределенная функция V, производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений является знакопостоянной функцией противоположного знака с V, или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.*

Thr 15.20 (Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует знакоопределенная функция $V(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений есть знакоопределенная функция противоположного знака с V, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

Теоремы о неустойчивости

Def 15.21. Окрестностью положения равновесия, считая, что положение равновесия находится в точке $q^1 = \ldots = q^n = 0$, назовём область такую, что

$$|q^i| < h, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Def 15.22. Областью $V > 0$ назовём какую-либо область окрестности положения равновесия, в которой $V(x_1, x_2, \ldots, x_m) > 0$. Поверхность $V = 0$ назовём границей области $V > 0$.

Thr 15.23 (Теорема Читаева о неустойчивости). *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция $V(x_1, \ldots, x_m)$ такая, что в сколь угодно малой окрестности положения равновесия существует область $V > 0$ и во всех точках области $V > 0$ производная $\dot{V}$ в силу уравнений принимает положительные значения, **то** невозмущенное движение неустойчиво.*

Def 15.24. Функцию V, удовлетворяющую теореме Читаева о неустойчивости, называют *функцией Читаева.*

Thr 15.25 (I теорема Ляпунова о неустойчивости движения). *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция $V(x_1, \ldots, x_m)$ такая, что ее производная $\dot{V}$ в силу этих уравнений есть функция знакоопределенная, сама функция V не является знакопостоянной, противоположного с $\dot{V}$ знака, то невозмущенное движенние неустойчиво.*

Thr 15.26 (II теорема Ляпунова о неустойчивости движения). *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция V такая, что её производная, в силу этих уравнений, в области положения равновесия может быть представлена в виде*

$$\dot{V} = æV + W,$$

*где æ – положтельная постоянная, а W **или** тождественно обращается в нуль, **или** представляет собой знакопостоянную функцию. Если W – знакопостоянная функция, а V **не является** знакопостоянной функцией: $WV < 0$, **то** невозмущенное движение неустойчиво (ну и если $w \equiv 0$).*

15.3 Усточивость по первому приближению

Постановка задачи

Запишем уравнения установившегося возмещенного движения в виде

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}). \tag{15.10}$$

Функции X_i будем считать аналитическими в окрестности начала координат, причем их разложения в ряды начинаются с членов не ниже второго порядка малости относительно $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Вопрос об устойчивости движения очень часто исследуется при помощи уравнений первого приближения:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}, \tag{15.11}$$

которые получаются из полных уравнений возмущенного движения (15.8) при отбрасывании в последних нелинейных относительно $x_1, x_2, \ldots, x_m$ членов.

Можно составить характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0, \tag{15.12}$$

которое в общем виде даст решение $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{m} c_j \boldsymbol{j}_j e^{\lambda_j t}$.

Однако как правило уравнения возмущенного движения нелинейны. Поэтому возникает задача об определении условий, при которых выводы об устойчивости, полученные из анализа уравнений первого приближения (15.9), справедливы и для полных уравнений возмущенного движения (15.8) при любых нелинейных членах X_i. Эта задача была полностью решена Ляпуновым.

Устойчивость по первому приближению

Thr 15.27. *Если* $\forall \lambda_i$ *уравнения* (15.10)*:* $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$*, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво независимо от нелинейных членов в* (15.8)*.*

Если же $\exists \lambda_i$: $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$*, то возмущенное движение неустойчиво — тоже независимо от нелинейных членов в* (15.8)*.*

Если же $\exists \lambda_i$: $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$*, то подбирая нелинейные члены можно показать, что положение как устойчиво, так и неустойчиво.*

((Когда-нибудь здесь появится доказательство))

Критерий Рауса-Гурвица

Запишем уравнение (15.10) в виде

$$a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\lambda + a_m = 0. \tag{15.13}$$

Коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_m$ этого уравнения — вещественные числа. Без ограничения общности $a_0 > 0$.

По теореме Виета имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{a_1}{a_0} &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m),\\
\frac{a_2}{a_0} &= \lambda_1\lambda_2 + \ldots + \lambda_{m-1}\lambda_m,\\
&\vdots\\
\frac{a_m}{a_0} &= (-1)^m\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m.
\end{aligned}$$

Таким образом для отрицательности всех вещественных частей корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ необходимо чтобы все его коэффициенты были положительны.

Однако такого утверждения не достаточно. Необходимое и достаточное условие дается критерием Рауса-Гурвица.

Def 15.28. Назовем *матрицей Гурвица*:

$$\begin{pmatrix}
a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0\\
a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0\\
0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0\\
0 & a_0 & a_2 & \ldots & 0\\
\vdots & & & \ddots & \\
 & & & & a_m
\end{pmatrix}$$

Рекомендуем читателям самостоятельно разобраться в правилах её построения (мнемонических и нет).

Рассмотрим главные миноры матрицы Гурвица (*определители Гурвица*):

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ a_0 & a_2\end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5\\ a_0 & a_2 & a_4\\ 0 & a_1 & a_3\end{vmatrix},\ \ldots\ \Delta_m = a_m\Delta_{m-1}.$$

Thr 15.29 (Критерий Рауса-Гурвица)**.** *Для того, чтобы все корни уравнения* (15.11) *с вещественными коэффициентами и положительным старшим* a_0 *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:*

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots\ \Delta_m > 0. \tag{15.14}$$

Если же хотя бы одно из неравенств имеет противоположный смысл, то уравнение (15.11) *имеет корни, вещественные части которых положительны.*

15.4 Влияние диссипативных и гироскопических сил на устойчивость равновесия консервативной системы

Влияние гироскопических сил и диссипативных сил с полной диссипацией на устойчивое положение равновесия голономной системы

Thr 15.30 (Теорема Томсона-Тэта-Четаева)**.** *Если в некотором изолированном положении равновесия потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то при добавлении гироскопических и диссипативных* *сил с полной диссипацией это положение равновесия становится асимптотически устойчивым.*

Влияние гироскопических и диссипативных сил на неустойчивое равновесие

Разложим до квадратичных членов кинетическую и потенциальную энергию системы, и приведем к каноническому виду

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{\theta}_i^2, \qquad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\theta_i^2.$$

Если Π положительно определена, то все величины λ_i положительны, и положение устойчиво. Если же присутствуют отрицательные λ_i, то положение равновесия неустойчиво (по теореме о неустойчивости по первому приближению).

Def 15.31. Величины λ_i Пуанкаре предложил называть *коэффициентами устойчивости.* Число отрицательных коэффициентов устойчивости называется *степенью неустойчивости.*

Thr 15.32. ***Если*** *среди коэффициентов устойчивости хотя бы один является отрицательным,* ***то*** *изолированное положение равновесия не может быть стабилизировано диссипативными силами с полной диссипацией.*

Thr 15.33. ***Если*** *степень неустойчивости изолированного положения равновесия консервативной системы нечетна,* ***то*** *стабилизация его добавлением гироскопических сил невозможна.* ***Если*** *степень неустойчивости четна,* ***то*** *гироскопическая стабилизация возможна.*

Thr 15.34. ***Если*** *изолированное положение равновесия консервативной системы имеет отличную от нуля степень неустойчивости,* ***то*** *оно остается неустойчивым при добавлении гироскопических сил и диссипативных сил с полной диссипацией.*

Def 15.35. Устойчивость, существующую при одних потенциальных силах, называют *вековой*, а устойчивость, полученную с помощью гироскопических сил, – временной.