

# БИЛЕТЫ КУРСА «ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

---

Источник: [an\\_explanations.pdf](#)

Лектор: Карасёв Р.Н.

Восторженные читатели: Хоружий Кирилл  
Примаков Евгений

От: 13 июня 2021 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Приближение функций <math>\Rightarrow</math>, в среднем и среднеквадратичном</b>	<b>3</b>
1.1	Приближение функций кусочно-линейными и многочленами . . . . .	3
1.2	Приближение $2\pi$ -периодических функций тригонометрическими многочленами . . . . .	4
1.3	* Алгебры непрерывных на компактах функций. Теорема Стоуна-Вейерштрасса . . . . .	4
1.4	Пространства $L_p$ . Неравенства Гёльдера и Минковского. . . . .	5
1.5	Полнота пространства $L_p$ . . . . .	6
1.6	Приближение функций в $L_p$ ступенчатыми и бесконечно гладкими . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Ограниченная вариация, абсолютная непрерывность и осцилляция</b>	<b>8</b>
2.7	Функции ограниченной вариации . . . . .	8
2.8	Абсолютно непрерывные функции . . . . .	9
2.9	Абсолютная непрерывность интеграла с переменных верхним пределом . . . . .	9
2.10	Обобщенная формула Ньютона-Лейбница . . . . .	10
2.11	Абсолютная непрерывность произведения абсолютно непрерывных и обобщенное интегрирование по частям . . . . .	10
2.12	Теорема Римана об осцилляции и равномерной осцилляции . . . . .	10
2.13	Порядок убывания коэффициентов Фурье абсолютно непрерывных функций . . . . .	11
2.14	Порядок убывания коэффициентов Фурье функций ограниченной вариации . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Ряд Фурье в пространстве <math>L_2</math></b>	<b>12</b>
3.15	Неравенство Коши-Буняковского . . . . .	13
3.16	Неравенство Бесселя и оптимальность коэффициентов Фурье . . . . .	13
3.17	Полные системы в пространстве $L_2$ . . . . .	14
3.18	Равенство Парсеваля для Фурье функций из $L_2[-\pi, \pi]$ . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Тригонометрический ряд Фурье и его сходимость</b>	<b>15</b>
4.19	Интегральное представление частичных сумм ряда Фурье, ядро Дирихле . . . . .	15
4.20	Принцип локализации для рядов Фурье и равномерный принцип локализации . . . . .	16
4.21	Признак Липшица равномерной сходимости ряда Фурье . . . . .	16
4.22	Признак Дирихле равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье на отрезке . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Банаховы пространства</b>	<b>17</b>
5.40	Нормированные векторные и банаховы пространства . . . . .	17
5.41	Теорема Бэра в банаховом пространстве . . . . .	17
5.42	Двойственное к банахову пространство . . . . .	17
5.43	Теорема Банаха-Штейнгауза . . . . .	17
5.44	Расходимость рядов Фурье . . . . .	17
5.46	Непрерывные линейные отображения . . . . .	18
5.47	Факторпространство банахового пространства . . . . .	18
5.48	Изоморфизм непрерывных линейных отображений . . . . .	18
5.49	Эпсилон-сети, предкомпактность и вполне ограниченность . . . . .	18
5.50	Теорема Арцела-Асколи . . . . .	18

<b>6</b>	<b>Гильбертовы пространства</b>	<b>19</b>
6.51	Гильбертово пространство . . . . .	19
6.52	Полнота и замкнутость ортонормированной системы в гильбертовом пр-ве . . . . .	19
6.53	Изометрии гильбертовых пространств . . . . .	19
6.54	Метрическая проекция и двойственное к гильбертову пр-во . . . . .	19
6.55	Двойственное к гильбертову пространству . . . . .	19
<b>7</b>	<b>Обобщенные функции</b>	<b>20</b>
7.63	Пространство $\mathcal{E}$ и топология в нём . . . . .	20
7.64	Связь непрерывности и ограниченности . . . . .	20
7.65	Описание через интегрирование производных по отрезку . . . . .	20
7.66	Пространство $\mathcal{D}$ и сходимость в нём . . . . .	20
7.67	Пространство обобщённых функций. Регулярные и нерегулярные . . . . .	20
7.68	Топология и сходимость в $\mathcal{D}'$ . . . . .	21
7.69	Дифференцирование обобщенных функций . . . . .	21
7.70	Умножение на бесконечно гладкую функцию . . . . .	21
7.71	Носитель распределения из пространства обобщённых функций . . . . .	22
7.72	Преобразование Фурье для обобщённых функций . . . . .	22

# 1 Приближение функций $\Rightarrow$ , в среднем и среднеквадратичном

## 1.1 Приближение функций кусочно-линейными и многочленами

*Носитель* функции – дополнение к объединению всех открытых множеств, на которых функция равна нулю, иначе – замыкание множества точек, в которых функция не равна нулю. Получается носитель функции всегда замкнут и для функций на  $\mathbb{R}^n$  компактность носителя означает ограниченность.

**Lem 1.1.** Для непрерывной с компактным носителем  $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $t_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , последовательность  $f_n(x) = f(x + t_n) \Rightarrow f$ .

$\Delta$ . Непрерывная функция с компактным носителем равномерно непрерывна, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}, \forall t, (|t| < \delta \Rightarrow |f(x - t) - f(x)| < \varepsilon),$$

что можно интерпретировать как равномерной сходимости  $f(x - t_n) \Rightarrow f(x)$ . □

**Thr 1.2.** Для  $|x| < 1$  и  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

с радиусом сходимости не менее 1.

**Lem 1.3.**  $f(x) = \sqrt{x}$  можно равномерно приблизить многочленами на любом отрезке  $[0, a]$ .

$\Delta$ . Заменой переменной  $x = a - y$  сведем вопрос к приближению функции

$$g(y) = \sqrt{a + \delta} \sqrt{1 - \frac{y}{a + \delta}},$$

который раскладывается по предыдущей лемме в степенной ряд при  $|y| \leq a + \delta$ , причём при  $|y| \leq a$  ряд сходится равномерно, тогда  $g(y)$  приближается многочленом на  $[0, a]$ , соответственно и  $\sqrt{x}$  тоже. □

**Lem 1.4.**  $f(x) = |x|$  можно равномерно приблизить многочленами на любом отрезке  $[-a, a]$ .

$\Delta$ . На отрезке  $[0, a^2]$  приближаем  $\sqrt{t}$  многочленом  $|\sqrt{t} - P(t)| < \varepsilon$ . Подставим  $x = \sqrt{t}$ , тогда на  $x \in [0, a]$  верно  $|x - P(x^2)| < \varepsilon$ , что можно продолжить на  $[-a, a]$ , продолжая  $x$  чётным образом как  $|x|: ||x| - P(x^2)| < \varepsilon$ . □

**Thr 1.5.** Всякую непрерывную кусочно-линейную на отрезке  $[a, b]$  функцию можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленом.

$\Delta$ . Если функция со скачком производной на  $\Delta$ , то  $f(x) - \Delta/2|x - x_i|$  будет уже без скачка, тогда кусочно-линейная представится в виде

$$f(x) = \sum_i c_i |x - x_i| + ax + b,$$

где каждое слагаемое уже приближаемо. □

Этого достаточно, чтобы приближать кусочно-линейные многочленами. Осталось понять, как приближать непрерывные на отрезке функции кусочно-линейными. Определим

$$\varphi_\delta(x) = \begin{cases} 0, & x < -\delta, \\ 1 - |x|/\delta, & |x| \leq \delta \\ 0, & x > \delta. \end{cases}$$

Такая функция кусочно линейная, непрерывная, и её носитель –  $[-\delta, \delta]$ .

**Lem 1.6.** Для непрерывной  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ :  $\sum_{k=0}^m f(k/m) \varphi_{1/m}(x - k/m) \Rightarrow f$ .

△. Воспользуемся разбиением единицы

$$\sum_{k=0}^m \varphi_{1/m}(x - k/m) = 1.$$

Умножая это на  $f(x)$  и вычитая  $f_m(x)$ , получаем

$$f(x) - f_m(x) = \sum_{k=0}^m (f(x) - f(k/m)) \varphi_{1/m}(x - k/m).$$

При фиксированном  $x$  в правой части слагаемые ненулевые только при  $|x - k/m| < 1/m$ . Тогда правую часть оценим через модуль непрерывности

$$\left| \sum_{k=0}^m (f(x) - f(k/m)) \varphi_{1/m}(x - k/m) \right| \leq \sum_{k=0}^m \omega_f(1/m) \varphi_{1/m}(x - k/m) = \omega_f(1/m),$$

который стремится к нулю при  $m \rightarrow \infty$  по непрерывности  $f$ . Напомним, что

$$\omega_f(\delta) = \sup \{ \rho(f(x) - f(y)) \mid x, y \in M, \rho(x, y) < \delta \}$$

□

**Thr 1.7.** *Всякую  $f: [a_1, b_1] \times [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{R}$  можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленом.*

△. Сначала масштабируем параллелепипед в единичный куб. Потом равномерно приближаем непрерывную функцию комбинацией произведений кусочно-линейных функций отдельных переменных:

$$f: [0, 1]^n \mapsto \mathbb{R}, \quad f_m(x) = \sum_{k_1, \dots, k_n} f\left(\frac{k_1}{m}, \dots, \frac{k_n}{m}\right) \varphi_{1/m}\left(x_1 - \frac{k_1}{m}\right) \dots \varphi_{1/m}\left(x_n - \frac{k_n}{m}\right).$$

Потом их приближаем многочленами.

□

sw

## 1.2 Приближение $2\pi$ -периодических функций тригонометрическими многочленами

**Thr 1.8** (теорема Вейерштрасса). *Всякую непрерывную на  $[-\pi, \pi]$  функцию  $2\pi$ -периодичную  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для которой  $f(-\pi) = f(\pi)$  можно сколько угодно точно равномерно приблизить*

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

△. Многочлен от тригонометрического многочлена – всё ещё многочлен. Рассмотрим некоторую непрерывную  $g(\cos x)$ , которую можем приблизить на компакте  $P(\cos x)$ . В частности, можем приблизить  $2\pi$ -периодическую функцию

$$\psi_\delta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_\delta(x - 2\pi k),$$

так как она чётна и  $2\pi$ -периодична, а значит зависит от  $\cos x$  непрерывно. Далее любую непрерывную  $2\pi$ -периодическую  $f$  будем приближать суммами

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^m f(2\pi k/m) \psi_{2\pi/m}(x - 2\pi k/m),$$

аналогично раннее доказанной лемме.

□

## 1.3 \* Алгебры непрерывных на компактах функций. Теорема Стоуна-Вейерштрасса

**Def 1.9.** Множество  $\mathcal{A} \subseteq C(x)$  (– непрерывные на компакте функции) называется *алгеброй*, если она содержит константы ( $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{A}$ ) и топологически "замкнута" относительно операций  $\cdot$  и  $+$ .

**Def 1.10.** *Алгебра разделяющая точки* –  $\forall a, b \in \mathbb{R}, x = y \in X, \exists f \in \mathcal{A}$  такая что  $f(x) = a$ , а  $f(y) = b$ .

**Thr 1.11** (теорема Стоуна-Вейерштрасса). Пусть у нас зафиксирован компакт  $K$  и дана алгебра непрерывных функций  $\mathcal{A}$  на этом компакте, которая разделяет точки. Тогда любую непрерывную на  $K$  функцию можно сколь угодно близко равномерно приблизить функциями из  $\mathcal{A}$ .

## 1.4 Пространства $L_p$ . Неравенства Гёльдера и Минковского.

**Def 1.12.** Абсолютно интегрируемыми функциями на измеримом  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  называют  $f: X \mapsto \mathbb{R}$  с конечным интегралом  $\int_X |f(x)| dx$ . Расстоянием<sup>1</sup> между функциями  $f$  и  $g$  будем считать  $\int_X |f(x) - g(x)| dx$ .

**Def 1.13.** Нормой в векторном пространстве  $V$  над полем  $\mathbb{F}$  называется функционал  $p: V \mapsto \mathbb{R}_+$ , обладающий свойствами:

1.  $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0_V$  – невырожденность нормы (в полунорме это неверно);
2.  $\forall x, y \in V, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$  – неравенство треугольника;
3.  $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in V, p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ .

**Def 1.14.** Обозначим через  $L_1(X)$  факторпространство линейного пространства абсолютно интегрируемых функций по его линейному подпространству почти всюду равных нулю функций. То есть функции на 0 расстоянии считаем равными. Нормой будем считать

$$\|f\|_1 = \int_X |f(x)| dx.$$

**Def 1.15.** Для измеримого по Лебегу  $X \subset \mathbb{R}^n$  и числа  $p \geq 1$  факторпространство измеримых по Лебегу функций на  $X$  с конечной (полу)нормой

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p dx \right)^{1/p},$$

по модулю функций равных нулю почти всюду, назовём  $L_p(X)$ .

Очень хорошим, симметричным, актуальным для описания квантовой механики оказывается  $L_2$  пространство, на котором естественно вводить скалярное произведение, его порождающее.

**Def 1.16.** В комплексном случае норма  $L_2$  порождена скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \longrightarrow \quad \|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}.$$

**Thr 1.17** (Неравенство Гёльдера). Возьмём  $p, q > 1$  такие, что  $1/p + 1/q = 1$ . Пусть  $f \in L_p(X)$  и  $g \in L_q(X)$ . Тогда

$$\int_X |fg| dx \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

△. Добьёмся (домножением на константу) ситуации с  $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ . Тогда достаточно проинтегрировать неравенство вида

$$|fg| \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}.$$

Неравенство же можем получить из выпуклости логарифма

$$\ln(\alpha a + \beta b) \geq \alpha \ln a + \beta \ln b, \quad \alpha + \beta = 1, \quad \Rightarrow \left/ \begin{matrix} \alpha = p^{-1} \\ \beta = q^{-1} \end{matrix} \right/ \Rightarrow \ln \left( \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \right) \geq \frac{\ln a}{p} + \frac{\ln b}{q} = \ln(a^{1/p} b^{1/q}).$$

□

**Con 1.18.** Для измеримых функций и чисел  $p, q > 0$ , таких что  $1/p + 1/q = 1$ , имеет место формула

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \int_X fg dx \mid \|g\|_q \leq 1 \right\}. \quad (1.1)$$

<sup>1</sup>В силу неравенства  $|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$  расстояние конечно.

△. По неравенству Гёльдера норма  $f$  не менее супремума правой части, более того равенство достигается при выборе

$$g(x) = \frac{\text{sign } f(x) |f(x)|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}}.$$

□

**Def 1.19.** Функция  $f: V \mapsto \mathbb{R}$  на векторном пространстве называется *выпуклой*, если для любых  $x, y \in V$  и любого  $t \in (0, 1)$  имеет место неравенство

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Функция называется *строго выпуклой*, если неравенство строгое  $\forall x \neq y$  и  $t \in (0, 1)$ .

**Lem 1.20.** Если в семействе функций  $f_\alpha: V \mapsto \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in A$ , все функции выпуклые, то

$$f(x) = \sup\{f_\alpha(x) \mid \alpha \in A\}$$

тоже выпуклая<sup>2</sup>.

△. Выпуклость функции нескольких переменных означает выпуклость всех её ограничений на прямые, а значит достаточно доказать это для функции одной переменной, что допускает графическое доказательство. □

**Thr 1.21** (Неравенство Минковского). Для функций  $f, g \in L_p$  при  $p \geq 1$

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

△. В силу предыдущих двух утверждений норма  $\|\cdot\|_p$  – выпуклая функция на  $L_p$ , тогда, в частности

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p \leq \frac{1}{2} (\|f\|_p + \|g\|_p), \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{f}{2} + \frac{g}{2} \right\|_p \leq \left\| \frac{f}{2} \right\|_p + \left\| \frac{g}{2} \right\|_p,$$

где последнее верно по 1-однородности нормы. □

## 1.5 Полнота пространства $L_p$

### Полнота пространства интегрируемых функций

Далее в разделе всегда предполагается суммирование по  $k$  от 1 до  $\infty$ , если не сказано иного. Глобально можно сказать, что в нормированном пространстве вопрос полноты сводится в вопросу сходимости рядов, у которых сходятся суммы норм.

**Def 1.22.** Назовём последовательность  $(f_n)$  *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \forall n, m \geq N_\varepsilon \quad \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

**Lem 1.23.** Пусть у последовательности функций  $(u_k)$  из  $L_p(X)$  сумма  $\Sigma = \sum \|u_k\|_p$  оказалась конечной. Тогда  $S(x) = \sum u_k(x)$  определена для почти всех  $x$  и  $\|S\|_p \leq \sum \|u_k\|_p$ .

△. Определим возрастающую последовательность

$$\rho_N(x) = \left( \sum_{k=1}^N |u_k(x)| \right)^p, \quad \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \quad \int_X \rho_N(x) \leq \left( \sum_{k=1}^N \|u_k(x)\| \right)^p \leq \Sigma^p \quad \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \quad \rho(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(x).$$

Первое следствие получается по неравенству Минковского, второе по теореме о монотонной сходимости функции:  $\rho(x)$  почти всюду конечна и имеет конечный интеграл, что означает почти всюду абсолютную сходимость ряда  $\sum u_k(x)$ .

Функция  $\sigma_N(x) = \left| \sum u_k(x) \right|^p$  сходится к  $|S(x)|^p$  почти всюду и  $\sigma_N(x) \leq \rho(x)$ . По теореме об ограниченной сходимости

$$\left\| \sum u_k(x) \right\|_p^p \rightarrow \|S\|_p^p, \quad \Rightarrow \quad \|S\|_p \leq \sum \|u_k\|_p,$$

по предельному переходу в неравенстве Минковского. □

<sup>2</sup>Если разрешить в определении выпуклости значение  $+\infty$ .

**Lem 1.24.** Пусть  $y$  последовательности функций  $(u_k)$  из  $L_p(X)$  сумма  $\Sigma = \sum \|u_k\|_p$  оказалась конечной. Тогда  $S(x) = \sum u_k(x)$  определена для почти всех  $x$  и (что отличает эту лемму от предыдущей)  $S = \sum u_k$  в смысле сходимости в пространстве  $L_p(X)$ .

△. По предыдущей лемме для остатка  $r_N(x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k(x)$ :

$$\|r_N\|_p \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \|u_k\|_p, \quad \text{при } N \rightarrow \infty,$$

что и означает сходимость в терминах  $L_p$ . □

**Thr 1.25.** Пространство  $L_p(X)$  полно.

△. Рассмотрим фундаментальную последовательность  $(f_k)$  в  $L_p(X)$  для подпоследовательности которой докажем сходимость. Выберем её так, чтобы  $\|f_k - f_l\|_p \leq 2^{-k-1}$  при всех  $l > k$ .

Пусть тогда  $u_1 = f_1$ ,  $u_k = f_k - f_{k-1}$ , получается хотим доказать сходимость суммы телескопического ряда  $\sum u_k$ , для которых  $\|u_k\|_p \leq 2^{-k}$ . По предыдущей лемме ряд почти всюду сходится к  $S \in L_p(X)$ , а  $(f_k)$  сходятся к  $S$  по норме  $L_p(X)$ . □

Так и сводится в  $L_p$  вопрос полноты к вопросу сходимости рядов, со сходящейся суммой норм. Вообще сходимость в  $L_p(X)$  может не означать поточечной сходимости ни в одной точке.

## 1.6 Приближение функций в $L_p$ ступенчатыми и бесконечно гладкими

**Def 1.26.** Назовём элементарно ступенчатыми функции с конечным числом ступенек, в основании которых лежат элементарные множества.

**Thr 1.27.** Пусть функция  $f: X \mapsto \mathbb{R} \in L_p$  с конечным интегралом. Положим для  $M > 0$

$$f_M(x) = \begin{cases} M, & f(x) \geq M; \\ f(x), & |f(x)| \leq M; \\ -M, & f(x) \leq -M; \end{cases} \Rightarrow \lim_{M \rightarrow +\infty} \|f_M\|_p = \|f\|_p.$$

**Thr 1.28.** Пусть функция  $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  и  $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ . Тогда  $f$  можно сколь угодно близко приблизить в среднем элементарно ступенчатой функцией.

**Thr 1.29.** Можно сколь угодно близко по норме  $\|\cdot\|_p$  приблизить элементарно ступенчатой  $\forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ .

△. Интеграл разности  $f - f_M$  можно оценить, как

$$\begin{aligned} |f(x) - M|^p &\leq |f(x)|^p - M^p, & f(x) > M; \\ |f(x) + M|^p &\leq |f(x)|^p - M^p, & f(x) < -M; \end{aligned}$$

что получается из выпуклости  $|x|^p$ .

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|f|^p - |f_M|^p) dx < \varepsilon^p, \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} |f - f_M|^p dx < \varepsilon^p.$$

Осталось перейти к ограниченной функции  $g = f_M|_{[-a,a]^n}$ . В силу непрерывности интеграла Лебега по множествам

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{[-a,a]^n} |g(x)|^p dx,$$

поэтому можем приблизить  $f_M$  функцией  $g$  с точностью  $\varepsilon$  функцией  $h \leq M$  с  $\text{supp } h = Q = [-a,a]^n$ . Таким образом  $h$  измерима по Лебегу, то есть  $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$ .

Теперь возвращаемся к приближению функции из  $L_1$  элементарно ступенчатой  $s$  в норме  $L_1$ :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h - s| dx < \varepsilon', \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} |h(x) - s(x)|^p dx \leq (2M)^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |h - s| dx < (2M)^{p-1} \varepsilon'.$$

Тогда можем добиться

$$\|f - s\|_p < \|f - g\|_p + \|g - h\|_p + \|h - s\|_p < 3\varepsilon,$$

при выборе  $s = s(\varepsilon)$ . □

**Thr 1.30.** Всякую  $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$  можно сколь угодно близко по норме  $\|\cdot\|_p$  приблизить бесконечно дифференцируемой функцией с компактным носителем.

△. Вспомним хороший набор функций

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ e^{-1/x}, & x > 0. \end{cases} \quad \varphi(x) = f(x+1)f(1-x), \quad \varphi_\varepsilon(x) = A\varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_1}{\varepsilon}\right) \cdots \varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_n}{\varepsilon}\right),$$

где последняя нормирована быть с единичным интегралом и отлична от нуля только в  $U_\varepsilon(0)$ . Тогда можем построить

$$\psi(x) = B \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt, \quad B: \begin{cases} \psi(x) \equiv 0, & x \leq 1; \\ \psi(x) \equiv 1, & x \geq 1; \end{cases} \Rightarrow \psi_{\varepsilon,\delta}(x) = \psi\left(\frac{\delta + \varepsilon - 2|x|}{\varepsilon - \delta}\right),$$

где  $\psi_{\varepsilon,\delta}$  отлична от нуля только в  $U_\varepsilon(0)$  и тождественно равна 1 в  $U_\delta(0)$ .

Осталось свёрткой приблизить каждую ступеньку на параллелепипеде  $P$ , точнее  $\chi_P$  в норме  $L_p$ , тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_P - g(x)|^p dx \leq \mu[U_\varepsilon(P)] - \mu P,$$

что стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow +0$ . □

*Дополнительно.* Также по теореме Стоуна-Вейерштрасса любую  $f \in L_p(X)$  можно сколь угодно близко по норме  $\|\cdot\|_p$  приблизить ограниченным на  $X$  многочленом, где  $X$  – ограниченное измеримое в  $\mathbb{R}^n$  множество.

Также для любой  $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$  можно показать непрерывность сдвига в  $L_p$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{при } |t| \rightarrow 0,$$

показав это для непрерывной функции с компактным носителем, а затем по неравенству Минковского, приближая  $f$ , доказать утверждение.

## 2 Ограниченная вариация, абсолютная непрерывность и осцилляция

### 2.7 Функции ограниченной вариации

**Def 2.1.** Функция  $f$  на промежутке  $I$  имеет *ограниченную вариацию*, если для любых  $x_0 < x_1 < \dots < x_N \in I$  (в любом количестве)

$$|f(x_0) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \dots + |f(x_{N-1}) - f(x_N)| \leq M,$$

для некоторой константы  $M$ . Наименьшую константу  $M$  назовём *вариацией* функции  $f$  равную  $\|f\|_B$ , что задаёт *полуноорму*, вида

$$\|f\|_B = \sup \left\{ |f(x_0) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \dots + |f(x_{N-1}) - f(x_N)| \mid N \in \mathbb{N}, a \leq x_1 \leq \dots \leq x_N \right\}$$

Вообще это длина кривой в одномерном варианте, в частности кривая в  $\mathbb{R}^n$  спрямляема только при конечной вариации каждой своей координаты. Важно что вариация функции аддитивна и выпукла, в смысле  $\|f+g\|_B \leq \|f\|_B + \|g\|_B$ .

**Lem 2.2.** Функцию ограниченной вариации на отрезке  $[a, b]$  можно представить в виде суммы двух функций  $f = u + d$ , одна из которых возрастает, а другая убывает. При этом  $\|f\|_B = \|u\|_B + \|d\|_B$  и если  $f$  была непрерывной, то  $u, d$  тоже будут непрерывны.

△. Определим *вариацию вверх*  $u(x)$  как  $\sup$  сумм положительных приращений и *вариацию вниз*  $d(x)$  как  $\inf$  сумм отрицательных приращений. Любой набор приращений даст  $f(x)$  и его можно разбить на две части, одна из которых даст  $u(x)$  а другая  $d(x)$ . Тогда

$$f(x) = u(x) + d(x), \quad \|f\|_{[a,x]} = u(x) - d(x),$$

при чём  $u(x) \uparrow$  и  $d(x) \downarrow$ . Так как вариация монотонной функции – модуль её приращения, то  $\|f\|_B = \|u\|_B + \|d\|_B$ .

Покажем теперь, что  $f \in C[a, b] \Rightarrow u, d \in C[a, b]$ . Функции  $u$  и  $-d$  не убывают, покажем, что нет скачков. Их сумма  $u(x) - d(x)$  равна  $\|f\|_{[a,x]}$  так что осталось показать, что у вариации нет скачков, что сводится к утверждению о непрерывности зависимости длины спрямляемой кривой от параметра. □



Вспомним, что для монотонной  $g$  и  $f \in L_1$  верна следующая теорема о среднем:

**Thr 2.3** (Вторая теорема о среднем). *Если  $f$  интегрируема по Лебегу с конечным интегралом, а  $g$  монотонна и ограничена на  $[a, b]$ , то при некотором  $\nu \in [a, b]$*

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a+0) \int_a^\nu f(x) dx + g(b-0) \int_\nu^b f(x) dx.$$

Таким образом приходим к утверждению о том, что функции ограниченной вариации допускают оценку интеграла своего произведения с другой функцией. В силу предыдущей леммы для любой функции ограниченной вариации  $g$  из второй теоремы о среднем

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq (|g(a+0)| + \|g\|_B) \cdot \sup \left\{ \left| \int_\nu^b f(x) dx \right| \text{ при } \nu \in [a, b] \right\}.$$

## 2.8 Абсолютно непрерывные функции

Для формулы Ньютона-Лейбница условие липшицевости можно ослабить до следующего:

**Def 2.4.** Функция  $F$  на промежутке  $I$  абсолютно непрерывна, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ , такое что  $\forall x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq \dots \leq x_N \leq y_N \in I$  из неравенства

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_N - y_N| \leq \delta$$

следует, что

$$|F(x_1) - F(y_1)| + |F(x_2) - F(y_2)| + \dots + |F(x_N) - F(y_N)| \leq \varepsilon.$$

Говоря неформально, сумма модулей приращений функции на системе непересекающихся отрезков должна стремиться к нулю при суммарной длине системы, стремящейся к нулю.

**Lem 2.5.** Абсолютно непрерывная на отрезке функция  $f$  имеет на нём ограниченную вариацию. Также на отрезке существует разложение  $f$  в сумму двух монотонных абсолютно непрерывных функций.

$\Delta$ . Для данной абсолютно непрерывной  $f: [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  рассмотрим  $f = u + d$ , также вспомним  $u[x] + (-d[x]) = v(x) = \|f|_{[a,x]}\|_B$ . Осталось показать абсолютную непрерывность  $v(x)$ .

От противного:  $\exists \varepsilon > 0$  такое, что сумма приращений  $v$  на некоторых отрезках не менее  $\varepsilon$ . По аддитивности вариации  $v(y_i) - v(x_i) = \|f|_{[x_i, y_i]}\|_B$ , тогда

$$\exists [x_{i1}, y_{i1}], \dots, [x_{iN_i}, y_{iN_i}] \subset [x_i, y_i], : |f(x_{i1}) - f(y_{i1}) + \dots + f(x_{iN_i}) - f(y_{iN_i})| \geq \frac{v(y_i) - v(x_i)}{2}.$$

Суммируя такие неравенства по всем  $i = 1, \dots, N$  получаем, что сумма модулей приращений  $f$  не менее  $\varepsilon/2$ , что противоречит абсолютной непрерывности  $f$ .  $\square$

## 2.9 Абсолютная непрерывность интеграла с переменных верхним пределом

**Thr 2.6.** Для некоторой  $f \in L_1[a, b]$ , всякая обобщенная первообразная  $F$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

является абсолютно непрерывной и её производная почти всюду существует и совпадает с  $f$ .

$\Delta$ . В силу теоремы о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом, производная  $F$  почти всюду равна  $f$ . Осталось показать абсолютную непрерывность  $F$ . Как и раньше, приблизим  $f$  ограниченной  $g \leq M$ , так что  $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ . Тогда при наборе отрезков  $S$  длины  $< \delta$

$$\int_S |g(x)| dx \leq M\delta, \quad \int_S |f(x) - g(x)| < \varepsilon, \Rightarrow \int_S |f(x)| dx \leq M\delta + \varepsilon, \Rightarrow \int_S |f(x)| dx \leq 2\varepsilon,$$

что и означает сумме приращений  $F$  на отрезках  $S$  не более  $2\varepsilon$  при  $\mu[S] < \delta$ .  $\square$

## 2.10 Обобщенная формула Ньютона-Лейбница

**Thr 2.7** (обобщенная формула Ньютона-Лейбница). Абсолютно непрерывная функция  $F: [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  почти всюду имеет производную и является обобщенной первообразной своей производной с выполнением формулы Ньютона-Лейбница

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t) dt.$$

Легко показать через...ух, ну по лемме **Безикевича**, посмотреть можно [здесь](#).

## 2.11 Абсолютная непрерывность произведения абсолютно непрерывных и обобщенное интегрирование по частям

**Con 2.8** (Обобщенное интегрирование по частям). Если  $f \in L_1[a, b]$ , а  $g$  абсолютно непрерывна, то верна формула интегрирования по частям

$$\int_a^b fg dx = F(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) dx,$$

где  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ .

$\triangle$ . Производная  $g'$  существует почти всюду, функция  $F$  абсолютно непрерывна по ранее доказанной теореме, тогда  $Fg$  тоже абсолютно непрерывна:

$$F(y)g(y) - F(x)g(x) = [F(y) - F(x)]g(y) + [g(y) - g(x)]F(x).$$

Тогда  $(Fg)' = fg + Fg'$ , к её приращению применима формула Ньютона-Лейбница, так и получаем интегрирование по частям.  $\square$

*Дополнительно.* Функция  $f: [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда она может быть сколь угодно близко в  $B$ -норме приближена кусочно-линейными функциями.

## 2.12 Теорема Римана об осцилляции и равномерной осцилляции

**Def 2.9.** Определим коэффициент Фурье (с точностью до умножения на константу)

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy} dx.$$

**Thr 2.10.** Если  $f \in L_1(\mathbb{R})$ , то  $|c_f(y)| \leq \|f\|_1$  и  $c_f(y)$  непрерывно зависит от  $y$ .

**Thr 2.11** (Теорема об ограниченной сходимости). Пусть неотрицательная функция  $g$  на измеримом  $X$  имеет конечный интеграл. Пусть  $f_k$  измеримы на  $X$ ,  $|f_k| \leq g$  для всех  $k$  и  $f_k \rightarrow f$  поточечно на  $X$ . Тогда  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k dx = \int_X f dx$ .

$\triangle$ . По теореме об ограниченной сходимости разрешен предельный переход под знаком интеграла, значит  $c_f(y)$  непрерывно зависит от  $y$ . **Расписать бы это.**  $\square$

**Thr 2.12** (Лемма Римана об осцилляции). Если  $f \in L_1(\mathbb{R})$ , то выражение

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy} dx$$

стремится к нулю при  $y \rightarrow \infty$ .

△. У Кудрявцева математичненько всё расписано. Получим оценку на порядок убывания  $c_f(y)$  при  $y \rightarrow \infty$  считая  $f^{(k-1)}$  абсолютно непрерывной и производные до  $k$ -й включительно  $\in L_1(\mathbb{R})$ , тогда интегрируя по частям (дифференцируя функцию) получим:

$$\begin{aligned} c_f(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d\left(\frac{e^{-ixy}}{-iy}\right) = f(x) \left(\frac{e^{-ixy}}{-iy}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \cdot \left(\frac{e^{-ixy}}{-iy}\right) dx = \\ &= \frac{c[f'](y)}{iy} = \dots = \frac{c[f^{(k)}](y)}{(iy)^k} = O\left(\frac{1}{y^k}\right), \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тут мы воспользовались компактностью носителя функции и её производных.

Рассмотрим теперь  $\forall f \in L_1(\mathbb{R})$ . Найдём бесконечно гладкую  $g$  с компактным носителем  $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ . Тогда  $\forall y \in \mathbb{R}$ :

$$|c[f](y) - c[g](y)| = |c[f - g](y)| \leq \varepsilon.$$

При этом для  $c[g](y) \rightarrow 0$  доказали (быстрее любой степени). Отсюда следует, что  $\lim_{y \rightarrow \infty} |c[f](y)| < \varepsilon$ , точнее равен нулю.  $\square$

**Thr 2.13** (Лемма о равномерной осцилляции). Если  $f \in L_1(\mathbb{R})$ , то выражение

$$c[f](y, \xi, \eta) = \int_{\xi}^{\eta} f(x) e^{-ixy} dx$$

стремится к нулю при  $y \rightarrow \infty$  равномерно по  $\xi, \eta$ .

△. Разобьём  $\mathbb{R}$  на конечное число промежутков числами  $x_1 < \dots < x_N$  так, чтобы на каждом промежутке  $\int |f| < \varepsilon$ . Для  $\xi$  и  $\eta$  найдём ближайшие  $x_i, x_j$ :

$$\left| \int_{\xi}^{\eta} f(x) e^{-ixy} dx \right| \leq \left| \int_{x_i}^{x_j} f(x) e^{-ixy} dx \right| + 2\varepsilon$$

и при достаточно большом  $\varepsilon$  по доказанному неравномерному варианту, применяемого к ограничению  $f$  на  $[x_i, x_j]$ , что и доказывает равномерную оценку.  $\square$

## 2.13 Порядок убывания коэффициентов Фурье абсолютно непрерывных функций

**Lem 2.14.** Если производная  $f^{(k-1)}$  абсолютно непрерывна и производные до  $k$ -й включительно<sup>3</sup> находятся в  $L_1(\mathbb{R})$ , то

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx = o\left(\frac{1}{y^k}\right), \quad y \rightarrow \infty.$$

△. Всё как раньше, но слагаемые вида  $f^{(l)}(x) e^{-ixy} \Big|_{-\infty}^{+\infty}$  исчезают в силу конечности пределов  $f^{(l)}$  на бесконечности. Так как  $f^{(l+1)} \in L_1(\mathbb{R})$ , то  $f^{(l)}$  имеет конечные пределы в  $-\infty$  и  $+\infty$ , которые должны быть равны нулю, так как  $f^{(l)}$  конечного интеграла. Я бы и эту штуку посмотрел в другой книжке.  $\square$

## 2.14 Порядок убывания коэффициентов Фурье функций ограниченной вариации

**Thr 2.15.** Если  $f \in L - 1(\mathbb{R})$  имеет ограниченную вариацию на  $\mathbb{R}$ , то выражение

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx = O(1/y), \quad y \rightarrow +\infty.$$

△. Получим оценку для интеграла по  $[a, b]$ . Можем представить  $f = u + g$  в виде суммы монотонно возрастающей и убывающей. Тогда по второй теореме о среднем

$$c_{[a,b]}[f](y) = \int_a^b f(x) e^{-ixy} dx = u(a+0) \int_a^\nu e^{-ixy} dx + u(b-0) \int_\nu^b e^{-ixy} dx + g(a+0) \int_a^\psi e^{-ixy} dx + g(b-0) \int_\psi^b e^{-ixy} dx.$$

<sup>3</sup>Для  $k$ -й достаточно существования почти всюду.

Функция ограниченной вариации имеет пределы на бесконечности, а из интегрируемости следует их равенство нулю. Тогда значения  $u(a+0)$ ,  $u(b-a)$ ,  $g(a+0)$ ,  $g(b-0)$  оцениваются полной вариацией  $\|f\|_B$ , а интегралы оцениваются по модулю как  $\frac{2}{|y|}$ .  $\square$

**Con 2.16.** Пусть функция  $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  имеет абсолютно непрерывную  $(k-1)$ -ую производную, производные до  $k$ -й включительно находятся в  $L_1(\mathbb{R})$ , а  $f^{(k)}$  (возможно, после изменения на множестве меры нуль) имеет ограниченную вариацию на  $\mathbb{R}$ , тогда

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx = O\left(\frac{1}{y^{k+1}}\right), \quad y \rightarrow \infty.$$

$\triangle$ . Можно получить интегрированием по частям, аналогично лемме 2.14, только используя предыдущую теорему.  $\square$

## Периодические функции

**Def 2.17.** Для  $2\pi$ -периодической функции  $f(x+2\pi) \equiv f(x)$  коэффициенты Фурье запишутся, как

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{(f, e^{inx})}{\|e^{inx}\|_2^2},$$

где последнее выражение понимается в смысле скалярного произведения и нормы в  $L_2[-\pi, \pi]$ .

Для таких функций сохраняются утверждения, доказанные выше.

**Thr 2.18.** Пусть функция  $f$  имеет период  $2\pi$  и абсолютно непрерывную  $(k-1)$ -ую производную, причём  $f^{(k)}$  (возможно, после изменения на множестве меры нуль) имеет ограниченную вариацию на  $[-\pi, \pi]$ , тогда

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

$\triangle$ . Здесь слагаемые  $f(x)e^{-ixy}|_{-\pi}^{+\pi}$  обращаются в нуль в силу  $2\pi$ -периодичности, поэтому можем воспользоваться теоремой об ограниченной вариации.  $\square$

**Lem 2.19.** Если у  $2\pi$ -периодической функции ограниченной вариации есть ненулевое конечное число разрывов, и она кусочно абсолютно непрерывна, то оценка  $O(1/n)$  для коэффициентов Фурье неумлучшаема.

**Thr 2.20.** Пусть функция  $f$  непрерывна и  $2\pi$ -периодическая, тогда для коэффициента Фурье имеется оценка

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{inx} dx = O(\omega_f(\pi/n)),$$

где  $\omega_f$  – модуль непрерывности  $f$ .

$\triangle$ . Перейдём к переменной  $x = x' + \pi/n$ , тогда

$$c_n = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x' + \pi/n) e^{-inx'} dx', \quad \Rightarrow \quad |c_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2} (f(x + \pi/n) - f(x)) e^{-inx} dx \right| \leq \frac{1}{2} \omega_f(\pi/n).$$

Так и получаем не очень точную, но полезную оценку.  $\square$

## 3 Ряд Фурье в пространстве $L_2$

### 3.15 Неравенство Коши-Буняковского

**Thr 3.1** (Неравенство Коши-Буняковского). Пусть функции  $f, g: X \mapsto \mathbb{R}$  измеримы по Лебегу, а также  $|f|^2, |g|^2 \in L_1(X)$ . Тогда

$$\left( \int_X f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_X |f(x)|^2 dx \right) \cdot \left( \int_X |g(x)|^2 dx \right).$$

$\triangle$ . Домножая на константы добиваемся нормировки к 1 интегралов  $|f|^2$  и  $|g|^2$ . Тогда

$$|fg| \leq \frac{|f|^2}{2} + \frac{|g|^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad \int_X |fg| dx \leq 1, \quad \Rightarrow \quad \left| \int_X fg dx \right| \leq 1.$$

□

По теореме 1.30 любую  $f \in L_2[-\pi, \pi]$  можно сколь угодно близко по норме приблизить бесконечно гладкой функцией с носителем строго в  $(-\pi, \pi)$ . Такая функция продолжается до бесконечно гладкой  $2\pi$ -периодической и по теореме 1.8 равномерно приближается тригонометрическим многочленом  $\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ .

Равномерное приближение является приближением по норме  $L_2$ , так как на отрезке  $[-\pi, \pi]$  имеется неравенство  $\|f\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_C$ . В случае  $L_2$  нормы определим коэффициенты, которыми собираемся приближать.

**Дописать про геометрическое представление коэффициентов Фурье.**

### 3.16 Неравенство Бесселя и оптимальность коэффициентов Фурье

**Thr 3.2** (Оптимальность коэффициентов Фурье). Для всякой  $f \in L_2[-\pi, \pi]$  и данного числа  $n$  лучшее по норме  $L_2$  приближение  $f$  тригонометрическим многочленом  $\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$  дают коэффициенты Фурье

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx.$$

$\triangle$ . Воспользуемся скалярным произведением в  $L_2$ , занумеруем  $e^{ikx}$  в некотором порядке  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ , где далее будет важна лишь ортогональность этих функций относительно введенного скалярного произведения. Пусть мы приближаем  $\varphi = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k$  и оптимизируем  $a_k$ , тогда

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^N \bar{a}_k (f, \varphi_k) - \sum_{k=1}^N a_k (\varphi_k, f) + \sum_{k=1}^N |a_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2.$$

Далее, по определению коэффициентов Фурье в виде  $(f, \varphi_k) = c_k \|\varphi\|_2^2$  находим

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^N (\bar{a}_k c_k + a_k \bar{c}_k - |a_k|^2) \|\varphi_k\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^N |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2 + \sum_{k=1}^N |c_k - a_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2,$$

откуда оптимально положить  $a_k = c_k$ .

□

**Lem 3.3** (неравенство Бесселя). Из доказательства предыдущей теоремы, можем получить, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^N |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2, \quad \Rightarrow \quad \|f\|_2^2 \geq \sum_{k=1}^N |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2, \quad \stackrel{\text{trig}}{\Rightarrow} \quad \|f\|_2^2 \geq 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2.$$

**Точно ли до  $n$ ?**

**Lem 3.4** (Представление действительнзначной функции). Для действительнзначной функции представление в виде ряда Фурье переписется в виде

$$f = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx,$$

для  $k \geq 1$ . Неравенство Бесселя тогда запишется так:

$$\|f\|_2^2 \geq \frac{\pi}{2} |a_0|^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

### 3.17 Полные системы в пространстве $L_2$

Пусть  $\{\varphi_i\}$  – ортогональная система в  $L_2$ . Допустим  $f = \sum_i c_i \varphi_i$ , где коэффициенты  $c_i$  могут быть найдены непосредственно:

$$c_i = \frac{(f, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)},$$

что упрощается в случае ортонормированной системы до  $c_i = (f, \tilde{\varphi}_i)$ . Числа  $c_i$  и называются *коэффициентами Фурье элемента  $f$*  в ортогональной системе  $\varphi_i$ .

В таких терминах можем определить и *ряд Фурье* элемента  $f$  по ортогональной системе  $\{\varphi_k\}$ :

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} \varphi_k,$$

где если система  $\varphi_k$  конечна, то ряд сводится к конечной сумме.

Так например можно выделить ортогональную систему  $\{1, \cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}\}$ . Или, например, многочлены Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n,$$

образующих ортогональную систему.

**Def 3.5.** Система  $\{\varphi_\alpha; \alpha \in \mathcal{A}\}$  векторов нормированного пространства  $X$  называется *полной по отношению к множеству  $E \subseteq X$*  (полной в  $E$ ), если любой вектор  $x \in E$  можно сколь угодно точно в смысле нормы пространства  $X$  приблизить конечными линейными комбинациями векторов системы. Другими словами  $E \subset \bar{L}\{\varphi_\alpha\}$  – замыкание линейной оболочки векторов.

**Thr 3.6** (условие полноты ортогональной системы). Пусть  $X$  – линейное пространство со скалярным произведением, а  $\varphi_k$  – конечная или счётная система ортогональных векторов в  $X$ . Тогда следующие условия эквивалентны:

1. система  $\{\varphi_k\}$  полна по отношению к множеству  $E \subseteq X$ ;
2. для любого вектора  $f \in E \subset X$  имеет место разложение в ряд Фурье в смысле нормы;
3. для любого вектора  $f \in E \subset X$  имеет место равенство Парсеваля  $\|f\|^2 = \sum_k |(f, \varphi_k)|^2 / (\varphi_k, \varphi_k)$ .

$\triangle$ . Из (1)  $\Rightarrow$  (2) в силу экстремального свойства коэффициентов Фурье. Из (2) в (3) по теореме Пифагора. Из (3)  $\Rightarrow$  (1) т.к. ввиду леммы о перпендикуляре по теореме Пифагора ... **по Зоричу можно дописать.**  $\square$

**Def 3.7.** Система элементов линейного нормированного пространства  $X$  называется *базисом пространства  $X$* , если любая конечная её подсистема состоит из линейно независимых векторов и любой вектор  $x \in X$  может быть представлен в виде  $f = \sum_k \alpha_k x_k$ , где  $\alpha_k$  – коэффициенты из поля констант пространства  $X$ , а сходимости понимается по норме пространства  $X$ .

Для доказательства неравенства Бесселя достаточно требовать ортогональность системы. В случае же равенства Парсеваля необходима *полнота* системы – возможность приблизить любую функцию  $L_2$  линейной комбинаций функций рассматриваемой системы сколь угодно точно.

### 3.18 Равенство Парсеваля для Фурье функций из $L_2[-\pi, \pi]$

**Thr 3.8** (Сходимость ряда Фурье в среднеквадратичном). Для всякой комплекснозначной  $f \in L_2[-\pi, \pi]$

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

в смысле сходимости суммы в пространстве  $L_2[-\pi, \pi]$ , а также выполняется равенство Парсеваля

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

$\triangle$ . Сначала функцию  $f$  приближаем по  $L_2$  норме тригонометрическим многочленом. Формула для квадрата точности приближения

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2\pi \sum_{k=1}^N |c_k|^2 < \varepsilon,$$

откуда при  $N \uparrow$  можем говорить про сходимость ряда Фурье по  $L_2$  норме по определению. Также получаем в пределе в неравенстве Бесселя равенство Парсеваля.  $\square$

Стоит заметить что в последней теореме использовали «симметричное» суммирование – *суммирование в смысле главного значения*:

$$v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

Пока мы не доказали, что в полученную формулу можно подставить хоть одно конкретное значение  $x$ . Тот факт, что ряд Фурье функции из  $L_2[-\pi, \pi]$  на самом деле сходится к этой функции почти всюду, был доказан Л. Карлсоном (1966), а до этого был известен как гипотеза Лузина.

## 4 Тригонометрический ряд Фурье и его сходимость

### 4.19 Интегральное представление частичных сумм ряда Фурье, ядро Дирихле

**Def 4.1.** Обозначим *частичную сумму* тригонометрического ряда Фурье для  $2\pi$ -периодической функции  $f$  как

$$T_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}.$$

**Lem 4.2.** Для  $n$ -й частичной суммы ряда Фурье  $2\pi$ -периодической функции имеет место формула в виде свёртки

$$T_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt,$$

с ядром Дирихле

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}.$$

$\triangle$ . По определению:

$$T_n[f](x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi) e^{ikx-ik\xi} d\xi = \left/ \xi = x+t \right/ = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t) \left( \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} \right) dt.$$

Теперь раскрываем геометрическую прогрессию:

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} = -\frac{e^{int}}{2\pi} \frac{e^{it} - e^{-2int}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{i(n+1/2)t} - e^{-i(n+1/2)t}}{2\pi (e^{it/2} - e^{-it/2})} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}.$$

$\square$

**Lem 4.3** (Равномерная ограниченность интегралов от ядра Дирихле). *Существует такая константа  $C$ , что*

$$\left| \int_a^b D_n(t) dt \right| \leq C$$

для любых  $a, b \in [-\pi, \pi]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

$\triangle$ . Заметим, что  $t/\sin(t/2)$  – монотонная и ограниченная на  $[-\pi, \pi]$  функция, тогда вынесем её из под знака интеграла:

$$\left| \int_a^b \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} dt \right| \sim \left| \int_a^b \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{t} dt \right| \sim \left| \int_a^b \frac{\sin t}{t} dt \right|.$$

А оставшееся выражение принимает значения  $\in [-1, 1]$ , так что имеет конечный интеграл на отрезке.  $\square$

Также можем оценить интеграл от ядра Дирихле:

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{-ikt}, \quad \Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1, \quad \Rightarrow \quad T_n[f](x) - f(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt,$$

что исследуется равномерным принципом локализации.

## 4.20 Принцип локализации для рядов Фурье и равномерный принцип локализации

**Thr 4.4** (принцип локализации). Если  $f$  —  $2\pi$ -периодическая абсолютно интегрируемая функция, то существование и значение предела последовательности её частичных сумм Фурье  $T_n[f](x)$  в любой точке  $x_0 \in \mathbb{R}$  зависит только от существования и значения предела при  $n \rightarrow \infty$  интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\delta D_n(t) (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) dt,$$

иначе говоря сходимость ряда Фурье в точке  $x_0$  определяется лишь поведением функции  $f$  в любой сколь угодно малой окрестности  $x_0$ .

△. Во-первых, по чётности ядра Дирихле, можем записать

$$T_n[f](x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_n(t) (f(x+t) + f(x-t)) dt = \left( \frac{1}{\pi} \int_0^\delta + \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \right) D_n(t) (f(x+t) + f(x-t)) dt.$$

Подробнее рассмотрим последнее слагаемое:

$$\frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2 \sin(t/2)} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

так как  $\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2 \sin(t/2)}$  интегрируемое по интегрируемости  $f$  и ограниченности  $\frac{1}{\sin(t/2)}$ . Оставшаяся величина стремится к 0 по лемме Римана об осцилляции. □

**Thr 4.5** (Равномерный принцип локализации). Запишем для  $\delta \in (0, \pi)$

$$T_n(f, x) - f(x) = \int_{-\pi}^\pi (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt = \int_{-\delta}^\delta (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt + \int_M (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt,$$

где  $M = \{t \mid \delta \leq |t| \leq \pi\}$ . Если  $f \in L_1[-\pi, \pi]$ , то

$$\int_M (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Если  $f$  ограничена на отрезке  $[a, b]$ , то это выражение стремится к нулю равномерно по  $x \in [a, b]$ .

△. Делаем то же, что и раньше, но подводим всё к лемме о равномерной осцилляции:

$$\left| \int_a^b f(x+t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \right| \sim \left| \int_a^b f(x+t) e^{i\left(n + \frac{1}{2}\right)t} dt \right| = \left| \int_{x+a}^{x+b} f(\xi) e^{i\left[n + \frac{1}{2}\right]\xi - i\left[n + \frac{1}{2}\right]x} d\xi \right| = \left| \int_{x+a}^{x+b} f(\xi) e^{i\left[n + \frac{1}{2}\right]\xi} d\xi \right|,$$

где уже можем применить лемму о равномерной осцилляции в силу  $f \in L_1$ . □

## 4.21 Признак Липшица равномерной сходимости ряда Фурье

**Def 4.6.** Функция  $f$  называется гёльдеровой степени  $\alpha > 0$ , если для любых  $x, y$  из области определения

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

с некоторой константой  $C$ .

**Thr 4.7** (Признак Липшица сходимости ряда Фурье). Для абсолютно интегрируемой  $2\pi$ -периодической функции, которая является гёльдеровой с некоторыми  $C, \alpha > 0$  на интервале  $(A, B) \supset [a, b]$

$$T_n(f, x) \rightarrow f(x)$$

равномерно  $x \in [a, b]$  при  $n \rightarrow \infty$ .

△. Вспомним локальное представление  $T_n[f](x) - f(x)$ , как

$$\left| \int_{-\delta}^\delta (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt \right| \leq C \int_{-\delta}^\delta \frac{|t|^\alpha}{2\pi |\sin t/2|} dt \leq \frac{C}{2} \int_{-\delta}^\delta |t|^{\alpha-1} dt = \frac{C}{\alpha} |\delta|^\alpha,$$

где мы воспользовались мыслью, что  $\pi |\sin t/2| \geq t$  на  $[-\pi, \pi]$ . По произвольности  $\delta$  и равномерного принципа локализации следует, что  $T_n[f](x) - f(x)$  может быть равномерно сделано сколь угодно маленьким при некотором  $\delta > 0$  и  $n$ . □



## 4.22 Признак Дирихле равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье на отрезке

**Thr 4.8** (Признак Дирихле сходимости ряда Фурье). Для абсолютно интегрируемой  $2\pi$ -периодической функции, которая является непрерывной с ограниченной вариацией на интервале  $(A, B) \supset [a, b]$

$$T_n(f, x) \rightarrow f(x)$$

равномерно по  $x \in [a, b]$  при  $n \rightarrow \infty$ .

## 5 Банаховы пространства

### 5.40 Нормированные векторные и банаховы пространства

**Def 5.1.** Векторное  $E$  – **нормировано**, если  $\forall v \in E$  имеется  $\|v\|$  такое, что:

- Однородность:  $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
- Неравенство треугольника:  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$
- Невырожденность:  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Можно эквивалентно определить норму единичным шаром с центром в  $B_0(1)$ :

$$\|x\| = \inf\{1/t \mid tx \in B_0(1)\} \quad \text{where } B_c(r) = \{x \in E \mid \|x - c\| \leq r\}.$$

**Def 5.2.** Полное нормированное пространство называется **банаховым**.

### 5.41 Теорема Бэра в банаховом пространстве

**Thr 5.3.** Счетное  $U_k$  – открытых всюду плотных подмножеств банахова  $E$  имеет  $\bigcap_k U_k \neq \emptyset$ .

**Con 5.4.** Если банахово  $E$  покрыто счетным  $(Z_k)$  замкнутых множеств, то  $\exists m: \text{int} Z_m \neq \emptyset$ .

**Thr 5.5** (Неподвижные точки сжимающих отображений). Для банахова  $E$  замкнутого  $X \subset E$  отображение  $f: X \rightarrow X$  – **сжимающее**, то есть

$$\exists C < 1: \forall x, y \in X \|f(x) - f(y)\| \leq C \|x - y\|.$$

Имеет неподвижную точку  $x \in X$  такую, что  $f(x) = x$ .

### 5.42 Двойственное к банахову пространство

**Def 5.6.** Для нормированного  $E$  введи двойственное  $E'$  – линейных отображений  $\lambda: E \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{C})$ . Норма:

$$\|\lambda\| = \sup\{|\lambda(x)| \mid \|x\| \leq 1\} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in E |\lambda(x)| \leq \|\lambda\| \cdot \|x\|.$$

**Lem 5.7.** Линейный функционал  $\lambda \in E'$  непрерывен **тогда и только тогда**, когда  $\|\lambda\| \leq +\infty$ .

**Thr 5.8.** Двойственное  $E'$  к нормированному  $E$  – полно по своей норме.

### 5.43 Теорема Банаха-Штейнгауза

Пусть семейство  $Y \subset E' \forall x \in E \{\lambda(x) \mid \lambda \in Y\}$  – ограничено. Тогда  $Y$  ограничено в смысле нормы  $E'$ .

### 5.44 Расходимость рядов Фурье

**Thr 5.9.** Существует  $2\pi$ -периодическая функция, ряд Фурье которой расходится в точке 0.

## 5.46 Непрерывные линейные отображения

**Def 5.10.** Норма линейного  $A: E \rightarrow F$  между банаховыми —  $\|A\| = \sup\{\|A(x)\| \mid x \in E, \|x\| \leq 1\}$ .

Можно сформулировать утверждения:

$$\forall x \in E, \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

и для  $f: E \rightarrow F$  и  $g: F \rightarrow G$  верно:

$$\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|.$$

Ядро отображения между банаховыми это просто  $\ker A = \{x \in E \mid Ax = 0\}$ .

## 5.47 Факторпространство банахового пространства

**Def 5.11.** Если  $G \subset E$  — замкнутое неполное подпространство  $E$ , то на факторпространстве  $E/G$  норма:

$$\|x + G\| = \inf\{\|x + y\| \mid y \in G\} = \inf\{\|x - y\| \mid y \in G\} = \text{dist}(x, G) = \text{dist}(0, x + G).$$

**Lem 5.12.** Определенная выше  $\|\cdot\|: E/G \rightarrow \mathcal{R}$  для замкнутого  $G \subset E$  в банаховом  $E$  является нормой.

**Lem 5.13.** Естественная проекция  $\pi: E \rightarrow E/G$  для замкнутого  $G \in E$  имеет единичную норму.

**Lem 5.14.** Факторпространство  $E/G$  банахова пространства по замкнутому подпространству полно.

## 5.48 Изоморфизм непрерывных линейных отображений

**Lem 5.15.** Если отображение банаховых  $A: E \rightarrow F$  непрерывно, то соответствующее  $\bar{A}: E/\ker A \rightarrow F$  тоже непрерывно и  $\|\bar{A}\| = \|A\|$ .

**Def 5.16.** Линейное отображение банаховых  $A: E \rightarrow F$  — **изоморфизм**, если  $A$  непрерывно и  $A$  тоже непрерывно.

**Def 5.17.** Если линейное непрерывное из банаховых  $A: E \rightarrow F$  имеет замкнутый  $\text{Im } A(E)$ , то оно порождает изоморфизм  $E/\ker A \rightarrow A(E)$ .

## 5.49 Эпсилон-сети, предкомпактность и вполне ограниченность

**Def 5.18.** Для топологического пространства  $M$ , его  $X \subseteq M$  — **предкомпактным**, если  $\bar{X}$  — компактно.

**Def 5.19.**  $X \subseteq M$  называется **вполне ограниченным**, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \subseteq X$  — конечная  $\varepsilon$ -сеть. (равносильно и утверждение с  $N \subset X$ ) Или  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $X$  покрывается конечным набором шаров с центрами в  $X$  и радиусами  $\varepsilon$ .

**Thr 5.20.** Для полного метрического пространства  $M$ , его  $X \subseteq M$  — компактно  $\iff X$  — вполне ограничено.

## 5.50 Теорема Арцела-Асколи

**Def 5.21.** Множество функций  $X \subset C(K)$  (над метрическим компактом) **равностепенно непрерывно**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall f \in X \forall x, y \in K, \rho(x, y) < \delta \iff |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Если все функции ещё и  $L$ -липшецевы, то  $|f(x) - f(y)| = L\rho(x, y)$ .

**Def 5.22.** Модуль непрерывности липшецевых функций:

$$\omega_X(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid f \in X, \rho(x, y) < \delta\}.$$

И тогда,  $X$  — равностепенно непрерывно  $\iff \omega_X(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow +0$ .

**Thr 5.23** (Арцела-Асколи). Множество  $X \subset C(K)$  предкомпактно  $\iff X$  равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

## 6 Гильбертовы пространства

### 6.51 Гильбертово пространство

**Def 6.1.** Если норма в банаховом  $E$  порождается +определённым  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ , то  $E$  — **гильбертово**.

**Thr 6.2** (Неравенство Коши-Буняковского).  $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

$$(ax + by, ax + by) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |a|^2\|x\|^2 + a\bar{b}(x, y) + b\bar{a}\overline{(x, y)} + |b|^2\|y\|^2 \geq 0$$

**Thr 6.3.** Вещественное банахово  $E$  — гильбертово **тогда и только тогда**, когда  $\forall x, y \in E$ :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

### 6.52 Полнота и замкнутость ортонормированной системы в гильбертовом пр-ве

**Def 6.4.** Последовательность векторов  $(\varphi_k)$  — **полная система векторов** в банаховом  $E$ , если  $\overline{\langle \varphi_k \rangle} = E$ . Другими словами  $\forall x \in E$  и  $\forall \varepsilon > 0$  найдется конечная  $a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n$  такая, что  $\|x - a_1\varphi_1 - \dots - a_n\varphi_n\| < \varepsilon$ .

**Def 6.5.**  $(\varphi_k)$  — **замкнутая система векторов** в гильбертовом  $H$ , если в  $\forall x \in H$ :  $(x, \varphi_k) = 0, \forall k$ .

**Thr 6.6.**  $\forall \varphi_k$  — ортогональной в гильбертовом  $H$  эквивалентны утверждения:

- полнота системы;
- замкнутость системы;
- сходимость ряда Фурье  $\forall x \in H$  по системе  $(\varphi_k)$  к  $x$ ;
- равенство Парсеваля для коэффициентов Фурье  $\forall x \in H$  по данной системе.

### 6.53 Изометрии гильбертовых пространств

**Def 6.7.** Линейное  $A: E \rightarrow F$  — **изометрия**, если оно биективно и сохраняет норму:  $\|A\| = \|A^{-1}\| = 1$ .

**Lem 6.8.** Изометрия гильбертовых пространств сохраняет скалярное произведение.

**Thr 6.9** (Рисса-Фишера).  $\forall H$ , в котором  $\exists$  счетная полная система элементов, изометрична  $C^n(\mathcal{R}^n)$  или комплексному(действительному) варианту бесконечномерного пространства последовательностей  $l_2 = L_2(\mathcal{N})$ .

### 6.54 Метрическая проекция и двойственное к гильбертову пр-во

**Thr 6.10.**  $V \subset H$  — замкнутое линейное подпространство (аффинное) гильбертова.  $\forall x \in H \exists! P_V(x) \in V$  ближайший к  $x$  то есть  $\|x - P_V(x)\| = \text{dist}(x, V)$ .

**Thr 6.11.** Если  $V \subset H$  — замкнутое линейное подпространство, то **метрическая проекция**  $P_V: H \rightarrow V$  линейна,  $\|P_V\| = 1$  при  $V \neq 0$  и имеет место ортогональное разложение в прямую сумму замкнутых подпространств  $H = V \oplus \ker P_V$ .

### 6.55 Двойственное к гильбертову пространству

**Thr 6.12.**  $\forall y \in H: \lambda_y(x) = (x, y)$ . Тогда  $\lambda_y \in H'$ ,  $\|\lambda_y\| = \|y\|$  и все элементы двойственного пространства  $H'$  имеют такой вид.

## 7 Обобщенные функции

### 7.63 Пространство $\mathcal{E}$ и топология в нём

Будем рассматривать функции на действительной прямой, чтобы не отвлекаться на технические тонкости. И так

**Def 7.1.**  $\mathcal{E}(\mathcal{R}) = C^\infty(\mathcal{R})$ . Топологию в таком пространстве зададим полунормами:

$$\|f\|_{K,k} = \sup\{|f^{(k)}| \mid x \in K\},$$

где  $K \subset \mathcal{R}$  – компакты и  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Ну то есть имеем семейство открытых:

$$U_{K,k,\varepsilon}(f_0) = \{f \mid \|f - f_0\|_{K,k} < \varepsilon\}.$$

**Thr 7.2.** Пространство  $\mathcal{E}$  – полно.

### 7.64 Связь непрерывности и ограниченности

**Thr 7.3.**  $\forall$  непрерывного линейного  $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathcal{R}) \exists C > 0, k \in \mathbb{Z}_+, K = [-m, m] :$

$$|\lambda(\varphi)| \leq C \max\{\|\varphi\|_{K,l} \mid 0 \leq l \leq k\} = C \sup\{|\varphi^{(l)}(x)| \mid x \in [-m, m], 0 \leq l \leq k\}.$$

### 7.65 Описание через интегрирование производных по отрезку

**Thr 7.4.**  $\forall \lambda \in \mathcal{E}'(\mathcal{R})$  задаётся интегрированием производных  $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$  по борелевским мерам со знаком конечной вариации на некотором отрезке:

$$\lambda(\varphi) = \int_{-m}^m \varphi d\mu_0 + \int_{-m}^m \varphi' d\mu_1 + \dots + \int_{-m}^m \varphi^{(k)} d\mu_k.$$

### 7.66 Пространство $\mathcal{D}$ и сходимость в нём

В основном, когда речь заходит про обобщенные функции имеется в виду именно пространство  $\mathcal{D}'$

**Def 7.5.**  $(\varphi_k) \subset \mathcal{D}(\mathcal{R})$  сходится к  $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{R})$ , если  $\text{supp } \varphi_k \in [-m, m]$  и  $\forall l \in \mathbb{Z}^+$  равномерно  $\varphi_k^{(l)} \xrightarrow{[-m, m]} \varphi_0^{(l)}$ .

С помощью сходимости в  $\mathcal{D}$  определим непрерывные линейные функционалы из которых получим  $\mathcal{D}'(\mathcal{R})$ . И если не оговорено обратного, именно его мы будем называть **пространством обобщенных функций**

### 7.67 Пространство обобщённых функций. Регулярные и нерегулярные

**Def 7.6.**  $\forall$  локально  $L_1 \ni f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  задаёт  $\lambda_f \in \mathcal{D}'(\mathcal{R})$  регулярные функции:

$$\lambda_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx$$

**Lem 7.7.** Локально интегрируемые  $f$  и  $g$  задаются  $\lambda_f = \lambda_g \in \mathcal{D}'(\mathcal{R})$  тогда и только тогда, когда они отличаются на множестве меры нуль.

Помимо регулярных в пространстве  $\mathcal{D}'$  лежат ещё нерегулярные. Давайте посмотрим на самую популярную из них.

**Def 7.8.** Дельта-функция или функция Дирака

$$\lambda_\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad \delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

Также можно говорить о смещенной дельта-функции:

$$\lambda_\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) \varphi(x) dx = \varphi(a)$$

## 7.68 Топология и сходимость в $\mathcal{D}'$

**Def 7.9.** В  $\mathcal{D}'(\mathcal{R})$  используется  $\star$ -слабая топология соответствующая поточечной сходимости. Предбаза топологии:

$$U_{\varphi,a,b} = \{\lambda \in \mathcal{D}'(\mathcal{R}) \mid a < \lambda(\varphi) < b\},$$

для  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{R})$ ,  $a < b \in \mathcal{R}$ . Сходимость в  $\mathcal{D}'(\mathcal{R}) : \lambda_n \rightarrow \lambda_0$  будем понимать в смысле  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{R}) : \lambda_n(\varphi) \rightarrow \lambda_0(\varphi)$ .

**Thr 7.10.** Пусть  $(f_k)$  локально интегрируемых:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 1$ . Пусть  $\exists C > 0 : |\int_a^b f_n(x)dx| < C$  при этом  $C$  не зависит  $a, b, n$ . Пусть ещё  $\forall \delta > 0$  (внимание, это не дельта-функция):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{+\infty} f_n(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\delta} f_n(x)dx = 0.$$

Тогда  $\lambda_{f_n} \rightarrow \delta_0$  в смысле  $\mathcal{D}'(\mathcal{R})$

**Suj 7.11.** Получаем свойство интеграла Дирихле:  $\frac{\sin \lambda x}{\pi x} \rightarrow \delta_0$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  в смысле сходимости в  $\mathcal{D}'(\mathcal{R})$ .

## 7.69 Дифференцирование обобщенных функций

Общая идея выведения действия какой-либо операции на обобщенные функции – проделать её с регулярной, а затем обобщить и на нерегулярные. Будем теперь писать действия обобщенной функции как:  $\lambda_f(\varphi) = \langle \lambda_f, \varphi \rangle$ .

**Def 7.12.** Производная от обобщенной функции:  $\langle \lambda', \varphi \rangle = -\langle \lambda, \varphi' \rangle$ .

Здесь это вынесено определением, но несложно показать интегрируя по частям функцию с компактным носителем:

$$\langle \lambda'_f, \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

Таким образом получили линейный непрерывный функционал.

Можно сформулировать утверждения вытекающие из определения производной:

1.  $\forall f \in \mathcal{D}'$  имеет производные всех порядков;
2. Если  $(f_k) \rightarrow f$  для обобщенных. То и  $f'_k \rightarrow f'$ . И так далее;

**Lem 7.13.** Всякий сходящийся ряд из обобщенных функций можно дифференцировать почленно любое количество раз.

И для примера рассмотрим тоже популярную функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \rightsquigarrow \langle \lambda_f, \varphi \rangle = \int_0^{\infty} \varphi(x)dx$$

Это **Функция Хевисайда** она обладает хайповым свойством – её производная это дельта-функция:

$$\langle \lambda'_f, \varphi \rangle = -\langle \lambda_f, \varphi' \rangle = - \int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0).$$

Покажем ещё непрерывность в смысле топологии по конспекту Романа Николаевича:

$$\lambda' \in U_{\varphi,a,b} \Leftrightarrow a < \lambda'(\varphi) < b \Leftrightarrow a < -\lambda(\varphi') < b \Leftrightarrow \lambda \in U_{-\varphi',a,b}.$$

## 7.70 Умножение на бесконечно гладкую функцию

**Def 7.14.** Умножение  $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathcal{R})$  на  $f \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$  определим как:

$$\langle \lambda f, \varphi \rangle = \langle \lambda, f\varphi \rangle.$$

При чём у нас есть правило Лейбница

$$(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$$

**Lem 7.15.** Определение умножения  $\lambda f$  корректно, то есть  $\lambda f \in \mathcal{D}'(\mathcal{R})$ .

**Lem 7.16.** Произведение  $\lambda f$  непрерывно зависит от  $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathcal{R})$ .

## 7.71 Носитель распределения из пространства обобщённых функций

Будем говорить, что для открытого  $U \subset \mathcal{R}$  обобщенная функция  $\lambda|_U = 0$ , если  $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{R}) : \lambda(\varphi) = 0$

**Lem 7.17.** Пусть для  $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathcal{R}) \exists$  открытые  $\{U_\alpha\} : \forall \alpha \lambda|_{U_\alpha} = 0$ . Тогда для  $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$  окажется  $\lambda|_U = 0$ .

**Def 7.18.** Для  $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathcal{R})$  положим  $Z_\lambda = \bigcup\{U \mid \lambda|_U = 0\}$ . Введём **носитель**  $\lambda$  как  $\text{supp } \lambda = \mathcal{R} \setminus Z_\lambda$ .

И ещё пара интересных свойств:

**Lem 7.19.**  $\forall \lambda \in \mathcal{D}'(\mathcal{R})$  с компактным носителем можно однозначно сопоставить элемент  $\mathcal{E}'(\mathcal{R})$  с помощью умножения  $\lambda$  на функцию с компактным носителем равную единице в окрестности  $\text{supp } \lambda$ .

**Thr 7.20.**  $\forall \lambda \in \mathcal{D}'(\mathcal{R})$  с компактным носителем является производной некоторого порядка от некоторой регулярной обобщённой функции.

## 7.72 Преобразование Фурье для обобщённых функций

Тут нам уже потребуется пространство  $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ . Так как

**Def 7.21.** Преобразование Фурье непрерывно переводит  $\mathcal{S}(\mathcal{R})$  в  $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ .

**Def 7.22.**  $\mathcal{S}(\mathcal{R})$  – пространство бесконечно дифференцируемых функций  $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{C}$ , у которой конечны все полунормы  $(k, n \geq 0)$

$$\|f\|_{n,k} = \sup\{x^n f^{(k)}(x) \mid x \in \mathcal{R}\}.$$

Соответственно можем определить преобразование Фурье:

$$\langle F[\lambda], \varphi \rangle = \langle \lambda, F[\varphi] \rangle.$$

Наверное тут хочется посмотреть на хороший пример: обозначим  $F[\delta] = \hat{\delta}$ , тогда

$$(\hat{\delta}, \varphi) = (\delta, \hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy} dx \Big|_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi \right)$$

Ого, мы получили, что  $F[\delta] = 1/\sqrt{2\pi}$ , а для обратного тогда  $F^{-1}[1] = \sqrt{2\pi}\delta$ . И подобным же образом получается и прямое преобразование фурье для единицы, что ранее не в обобщенных нам было не доступно.