Заметки курса по общей физики «Оптика»

Авторы конспекта: Хоружий К.
Примак Е.

От: *20 мая 2021 г.*

Содержание

1 Элементы фурье-оптики

1.1 Дифракция на решетке как краевая задача

1.1.1 Метод Рэлея

Пусть решетка – бесконечна, её переднюю поверхность будем называть **входом**, а заднюю – **выходом**. Плоскость решетки примем за XY, а ось Z по распространению волны.

Падающую волну представим в виде: $E_0 = Ae^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}$. Тут полагаем $z = 0$, ищем поле на входе решетки, в силу линейности $E_{\text{вых}} = DE_{\text{вх}}$.

Здесь введен коэффициент пропускания D решетки. Теперь чтобы решить задачу о дифракции на решетки нам достаточно найти D, тогда мы уже будем знать поле на выходе из решетки, а значит и во всем пространстве дальше. Уравнение

$$\Delta E + k^2 E = 0$$

должно при $z = 0$ переходить в $E_{\text{вых}}(x,y) = D(x,y)E_{\text{вх}}(x,y)$. Такой подход к решению задача называется *методом Рэлея*.

Для одномерной решетки можно представить D как функцию с периодом d:

$$D = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} D_m e^{-impx}, \qquad p = \frac{2\pi}{d}.$$

Таким образом:

$$E_{\text{вых}} = DE_{\text{вх}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} AD_m e^{i[\omega t - (k_x + mp)x]}.$$

Общим решением нашего волнового уравнения будет:

$$E = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{i(\omega t - \boldsymbol{q_m r})},$$

на которое надо наложить в связи с граничным условием:

$$q_{mx} = k_x + mp, \qquad q_{my} = 0.$$

И так как $\boldsymbol{q}^2 - k^2$, то $q_{mz} = \sqrt{k^2 - q_{mx}^2}$ – для однородных волн и $q_{mz} = -i\sqrt{k^2 - q_{mx}^2}$ для неоднородных (поверхностных).

Тогда для поля на выходе можно написать:

$$E_{\text{вых}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_m e^{i(\omega t - q_{mx}x)} \qquad \Rightarrow \qquad a_m = AD_m.$$

Теперь если $k_x = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\sin\theta$, $q_{mx} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\sin\vartheta_m$ и $p = 2\pi/d$ то получаем основную формулу дифракционной решетки:

$$d(\sin\vartheta_m - \sin\theta) = m\lambda.$$

Что видим? Спектр за решеткой состоит из одних только главных максимумов, но это нормально, так как решетка бесконечна. В формулу для волны входят как однородные так и не однородные волны, а значит она описывает поле на любых расстояниях от решетки. При нормальном падении света наивысший порядок однородных волн $m \leqslant d/\lambda$, иначе имеем неоднородные волны, которые затухают как $\exp(-\chi_m z)$, где

$$\chi_m = \sqrt{k^2 - q_{mz}^2} = \frac{2\pi}{d}\sqrt{m^2 - (d/\lambda)^2}.$$

Интересно по-исследовать поле далеко от решетки. При $z \gg d$ оно состоит только из однородных волн. А если $d < \lambda$ то вообще из одной плоской волны $(m = 0)$.

Тут можно найти красивый эффект **саморепродукции**. Каждое слагаемое в разложении нашей волны – поле плоской волны с пространственной частотой: $u_n = n\frac{2\pi}{d}$. Для точки отстоящей на z от решетки фаза n-ой плоской волны:

$$\varphi_n = \chi_n z = \sqrt{k^2 - q_{nx}^2} \approx kz - \frac{zq_{nx}^2}{2k},$$

что верно для волн с узким спектром $|q| \ll k$.

Сравним набег фаз n-ой плоской волны с $\varphi_0 = kz$:

$$\Delta\varphi_n = \varphi_0 - \varphi_n = \frac{z}{2k}\left(\frac{2\pi}{d}\right)^2 n^2 = \pi\frac{\lambda z}{d^2}n^2.$$

В плоскости наблюдения отстоящую от решетки на $z_1 = \frac{2d^2}{\lambda}$ (это будет находится в зоне френелевской дифракции) будем иметь разность фаз $\Delta\varphi_n = 2\pi n^2$. Заметим так же, что разность фаз от любых двух плоских волн будет $\Delta\varphi = 2\pi(n_1^2 - n_2^2)$ тоже кратна 2π. Значит в разложении волны ничего не меняется, так как это период, значит в плоскости z_1 поле повторяет по интенсивности пропускающую функцию решетки, ну а точнее:

$$f(x, z_1) = e^{ikz_1} f_0(x).$$

Это же свойство повторения характерно и для

$$z_m = m\frac{2d^2}{\lambda}\,(m = 1, 2\ldots).$$

Этот эффект еще также носит названия **эффекта Таблота**.

Теперь посмотрим на небесконечную решетку.

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(f)e^{-ifx}df.$$

На выходе поле:

$$E_{\text{вых}} = A\int_{-\infty}^{+\infty} C(f)e^{-f(k_x+f)x}df.$$

Решение тогда будет:

$$E = A\int_{-\infty}^{+\infty} C(f)e^{-i\boldsymbol{qr}}df.$$

Задавая функцию пропускания для такой конечной решетки:

$$D(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } -\infty < x < -L, \\ \sum\limits_{-\infty}^{\infty} D_m e^{impx} \text{ если } -L < x < +L, \\ 0 \text{ если } +L < x < +\infty. \end{cases}$$

Вычислим коэффициент Фурье:

$$C(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} D(x)e^{ifx}dx = \frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} D_m\frac{\sin[L(f-mp)]}{f-mp}.$$

И получаем:

$$E = \sum_m E_m = \frac{A}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} D_m\frac{\sin[L(f-mp)]}{f-mp}e^{-i\boldsymbol{qr}}df = \frac{Ad}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} D_m\frac{\sin[(N/a)(fd-2m\pi)]}{fd-2m\pi}e^{i\boldsymbol{qr}}df.$$

Интенсивность такой волны достигает максимума когда знаменатель обращается в нуль, то есть когда $q_x = k_x + mp = 0$. Получаем направление на главный максимум:

$$\frac{\sin[(N/2)(fd-2m\pi)]}{(fd-2m\pi)} = \frac{N}{2}$$

Так же можно определить направления на главные минимумы. В итоге получили все очень зачетающимся с теорией про диф решетки и даже больше!

2 Кристаллооптика

2.1 Плоские волны в кристаллах

Поведение света всё также описывается уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{D}}, \qquad \operatorname{rot}E = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{H}},$$

однако усложняются материальные уравнения:

$$D^j = \varepsilon_i^j E^i,$$

где ε_{ij} – *тензор диэлектрической проницаемости*, или *диэлектрический тензор.*

Рассмотрим плоские монохроматические волны вида

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})},$$

где $\boldsymbol{A} \in \{\boldsymbol{E},\, \boldsymbol{H},\, \boldsymbol{D}\}$. Понятно, что

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = -i\left[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}\right], \qquad \partial_t\boldsymbol{D} = -i\omega\boldsymbol{D}, \qquad \ldots$$

Подставив это в уравнения Максвелла, вводя верно волновой нормали $\boldsymbol{N} = \frac{v}{\omega}\boldsymbol{k}$, получаем

$$\boldsymbol{D} = -\frac{c}{v}\left[\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{H}\right], \qquad \boldsymbol{H} = \frac{c}{v}\left[\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{E}\right],$$

где v – нормальная скорость волны.

Актуально, как никогда, значение вектора Пойтинга

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right].$$

Lem 2.1. *Вектор пойтинга $\boldsymbol{S}$ определяет направление световых лучей, то есть $S \parallel \boldsymbol{u} = d_{\boldsymbol{k}}\omega$.*

Стоит заметит, что в кристаллая $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{N}$ не совпадают по направлению. Однако, как видно из формул, плоские волны в кристалле поперечн в отношении векторов $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{H}$. Вектора $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{S}$ лежат в плоскости, перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{H}$.

Получается, что если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$ не сонаправлены, то зная направление $\boldsymbol{E}$ мы знаем направление и $\boldsymbol{D}$, а тогда и $\boldsymbol{H}$, и $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{S}$ соответственно тоже. При $\boldsymbol{E} \parallel \boldsymbol{D}$ любая прямая $\perp\boldsymbol{E}$ может служить направлением магнитного поля. Подставляя $\boldsymbol{H}$ в $\boldsymbol{D}$ можем найти

$$\boldsymbol{D} = \frac{c^2}{v^2}\boldsymbol{E} - \frac{c^2}{v^2}\left(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{e}\right)\boldsymbol{N},$$

и, т.к. $(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{N}) = 0$, то скалярно умножая на $\boldsymbol{D}$ находим

$$v^2 = c^2\frac{(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})}{D^2}.$$

Таким образом вектор $\boldsymbol{E}$ в кристале является *главным.*

2.2 Оптически одноосные кристаллы

Def 2.2. *Оптически одноосными* называют кристаллы, свойства которых обладают симметрей вращения относительно некоторого направления, называемого *оптической осью кристалла.*

Разложим $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$ на составляющие параллельные оптической оси, и нормальный к ней, тогда

$$\boldsymbol{D}_\parallel = \varepsilon_\parallel \boldsymbol{E}_\parallel, \qquad \boldsymbol{D}_\perp = \varepsilon_\perp \boldsymbol{E}_\perp,$$

где $\varepsilon_\parallel$ и $\varepsilon_\perp$ – продольная и поперечные диэлектрические проницаемости кристалла. Плоскости, в которой лежат оптическая ось кристалла и нормаль $\boldsymbol{N}$, называется *главным сечением кристалла.*

Def 2.3. Если электрический вектор $\boldsymbol{D}$ перпендикулярен к главному сечению, то скорость волны не зависит от направдения её распространения, такая волна называется *обыкновенной.*

Тогда $\boldsymbol{D} \equiv \boldsymbol{D}_\perp$, тогда и $\boldsymbol{D} = \varepsilon_\perp \bar{E}$, соответственно

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_\perp \boldsymbol{E}, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{c} D = H\frac{c}{v} \\ H = E\frac{c}{v} \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad v = v_\perp \equiv v_{\mathrm{o}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_\perp}}.$$

Def 2.4. Если электрический вектор $\boldsymbol{D}$ лежит в главном сечении, то скорость волны зависит от направления распространенияЮ и такую волну называют *необыкновенной.*

Вектор $\boldsymbol{E}$ в таком случае также лежит в главном сечении, и $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_N + \boldsymbol{E}_D$. В таком случае, верно

$$\boldsymbol{H} = \frac{c}{v}\left[\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{E}_D\right], \qquad E_D = \frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}}{D} = \frac{E_\parallel D_\parallel + E_\perp D_\perp}{D} = \frac{1}{D}\left(\frac{D_\parallel^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{D_\perp^2}{\varepsilon_\perp}.\right)$$

Соответсвующие проекции можно заменить на $D\sin\alpha$, где α – угол между оптической осью и волновой нормалью. Вводя $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{N_\perp^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{N_\parallel^2}{\varepsilon_\perp}$ можем перейти к

$$E_D = D\left(\frac{\sin^2\alpha}{\varepsilon_\parallel} + \frac{\cos^2\alpha}{\varepsilon_\perp}\right) = \frac{D}{\varepsilon}, \qquad H = \frac{c}{v}E_D, \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = c\sqrt{\frac{N_\perp^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{N_\parallel^2}{\varepsilon_\perp}} \equiv v_\parallel.$$

Когда $N_\perp = 0$, то понятно, что $v = c/\sqrt{\varepsilon_\perp} = v_\perp = v_{\mathrm{o}}$, – нет разницы между обыкновенной и необыкновенной. В случае $N_\parallel = 0$ верно, что $v = v_{\mathrm{e}} \overset{\mathrm{def}}{=} c/\sqrt{\varepsilon_\parallel}$.

Термин оптическая ось введен для обозначения прямой, вдоль которой обе волны распростаняются с одинаковыми скоростями, и таким прямых в общем случае, поэтому кристалл называется *оптически двуосным.* В рассмотренном частном случае оси совпали, и получился *оптически одноосный* кристалл.

Lem 2.5. *В общем случае волна, вступающая в кристалл изотропной среды, разделяется внутри кристалла на две линейно поляризованные волны: обыкновенную, вектор электрической индукции которой перпендикулярен к главному сечению, и необыкновенную с вектором электрической индукции, лежащим в главном сечении.*

Про показатели преломления. В кристаллая верны законы преломления для *волновых нормалей*: их направления подчиняются закону Снеллиуса

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi_\perp} = n_\perp, \qquad \frac{\sin\varphi}{\sin\psi_\parallel} = n_\parallel,$$

где $n_\perp$ и $n_\parallel$ – показатели прелоления обыкновенной и необыкноуенной волн, т.е.

$$n_\perp = \frac{c}{v_\perp} = n_\text{o}, \qquad n_\parallel = \frac{c}{v_\parallel} = \left(\frac{N_\perp^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{N_\parallel^2}{\varepsilon_\perp}\right)^{-1/2}.$$

Постоянная n_o называется *обыкновенным показателем преломления*. Когда необыкновенная волна распространяется перпендикулярно к оптической оси ($N_\perp = 1$),

$$n_\parallel = \sqrt{\varepsilon_\parallel} \stackrel{\text{def}}{=} n_\text{e}.$$

Величина n_e – *необыкновенный показатель преломления кристалла.*

Двойное лучепреломление. При преломлении на первой поверхности пластинки волна внутри кристалла разделяется на обыкноыенную, и необыкновенную. Эти волны поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях и распространяются внутри пластинки в разных направлниях и с разными скоростями. Таким образом можно добиться пространственного разделения двух лучей.

Поляризационные устройства. Комбинация кристаллов – поляризационная призма[1] . Существуют *однолучевые* (на полном внутренне отражении) и *двулучевые.*

Def 2.6. Допустимая разность углов наклона между крайними лучами падающего на призму пучка называется *апертурой полной поляризации призмы.*

Def 2.7. *Дихроизм* – свойство кристаллов, состоящее в различном поглощении веществом света в зависимости от его поляризации. Всего различают: *линейный дихроизм* (при $\perp$ направлениях линейной поляризации); *эллиптический дихроизм* (различное поглощение для правой и левой эллиптической поляризации); *круговой дихроизм* (различные направления круговой поляризации, иначе – *эффект Коттона*).

Анализ поляризованного света. *Пластинка в четверть волны* ($\lambda/4$), вносит дополнительную разность фаз в $\pi/2$ между проходящими через неё лучами, поляризованными во взаимно перпедикулярных плоскостях.

Интерференция поляризованных лучей.

Волны в двуосных кристаллах.

Лучи и волновые нормали.

2.3 Двойное преломление в электрическом и магнитном полях (эффект Керра)

Электрический эффект Керра состоит в том, что многие изотропные тела при введении в постоянное электрическое поле становится оптически анизотропным. В частности, ведут себч как одноосные двупреломляющие кристаллы, оптическая ось которых параллельна приложенному электрическому полю.

Пусть внешнее поле $\boldsymbol{E}_0$ *однородно*. Понятно, что $n_\text{e} - n_\text{o}$ зависит от $\boldsymbol{E}_0$ в виде

$$n_\text{e} - n_\text{o} = qE_0^2,$$

для малых полей, где q зависит только от вещества и от λ. В таком случае разность фаз между обыкновенной и необыкновенными лучами будет

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_\text{e} - n_\text{o})l = 2\pi BlE^2,$$

где l – толщина образца, а $B \equiv q/\lambda$ – *постоянная Керра.* **Явление Керра объясняется анизотропией самих молекул.**

Для эффекта Керра в газах, в случае полностью анизотропных молекул, можно показать, что при $\boldsymbol{E} \parallel \boldsymbol{E}_0$ показатель преломления будет *необыкновенным*, тогда

$$n = 1 + \frac{2\pi}{3}N\beta,$$

[1] Самая первая призма – *николь*, 1828 г.

где β – поляризуемость молекулы вдоль оси молекулы. Если же $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{E}_0$, то показатель преломления будет обыкновенным, и

$$n_\mathrm{o} = 1 + 2\pi N\beta\langle\sin^\vartheta\rangle,$$

где ϑ – угол[2] между $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{s}$.

Забавный факт: из полученных соотноешний можем получить

$$\frac{n_\mathrm{e} - n}{n_\mathrm{o} - n} = -2,$$

что выполняется для большинства веществ.

Проводя некоторый аккуратны расчёт можем получить выражение для постоянной Керра:

$$n_\mathrm{e} - n_\mathrm{o} = \frac{n-1}{5}\frac{\beta}{kT}E_0^2.$$

2.4 Линейный электрооптический эффект Поккельса

Рассмотрим *ангармонический осциллятор* при наличии внешнего постоянного электрического поля E_0

$$\ddot{r} + 2\gamma\dot{r} + \omega_0^2 r + \beta r^2 = -\frac{e}{m}E_0,$$

где β – постоянная. Считая $r = r_0 + q$ можем перейти к уравнению с новой частотой

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + (\omega_0^2 + 2\beta r_0)q = 0,$$

откужа видно изменение частоты колебания на

$$\Delta\omega_0^2 = -\frac{2e\beta}{m\omega_0^2}E_0^2.$$

Смещение собственных частот меняет кривую дисперсии, т.е. показатель преломления n среды. В простейшем случае, когда ω_0 одна (см. §84), изменение n определяется выражением

$$\Delta n = \frac{\partial n}{\partial\omega_0^2}\Delta\omega_0^2 = -\frac{\partial n}{\partial\omega_0^2} - \frac{\partial n}{\partial\omega_0^2}\frac{2e\beta}{m\omega_0^2}E_0 = \frac{\partial n}{\partial\omega}\frac{e\beta}{m\omega\omega_0^2}E_0.$$

При фиксированном внешнем $\boldsymbol{E}_0$ величина Δn зависит от направления распространения света. Это сказывается на двойном преломлении среды. *Изменеие двойного преломления вещества из-за смещения собственной частоты во внешнем электрическом поле называется электрооптическим эффектом Поккельса.*

В этом эффекте изменения пропорциональны первой степени E_0. *Эффект Поккельса может наблюдаться только в кристаллах, не обладающих центром симметрии.* Устройство, основанное на эффекте Поккельса, называют *ячейкой Поккельса.*

Она представляет собой кристалл, помещаемый между двумя скрещенными николями. Такое устройство действует так же, как и ячейка Керра. Николи не пропускают свет, когда нет внешнего электрического поля, но при наложении такого поля пропускание появляется. Необходимо, чтобы кристалл до наложения внешнего электрического поля не давал двойного преломления. Этого можно достигнуть, если взять оптически одноосный кристалл, вырезанный перпендикулярно к оптической оси, а свет направить вдоль этой оси. Внешнее поле Eq может быть направлено либо перпендикулярно (поперечный модулятор света), либо параллельно распространению света (продольный модулятор).

2.5 Вращение плоскости поляризации

Если линейно поляризованный свет проходит через плоскопараллельный слой вещества, то в некоторых случаях плоскость поляризации света оказывается повернутой относительно своего исходного положения. Это явление называется *вращением плоскости поляризации* или оптической активностью. Если вещество не находится во внешнем магнитном поле, то оптическая активность и вращение плоскости поляризации называются *естестыенными.* В противоположнос случае говорят о *магнитном вращении плоскости поляризации*, или *эффекте Фарадея.*

Вращение против часовов – *положительное*, по часовой – *отрицательное*. Это свойство, как и в случе с шурупом, не зависит от того, в каком из двух прямо противоположных напралний распространяетя свет[3] .

[2] Дописать.

[3] Если свет заставить пройти туда и обратно через естественно-активное вещество, отразив его от зеркала, то плоскость поляризации возвратится к своему исходисходному направлению.

В области прозрачности и малого поглощения эта история хорошо согласуется с опытом формула Друде
$$\xi = \alpha L, \qquad \alpha = \sum_i \frac{B_i}{\lambda^2 - \lambda_i^2},$$
где B_i – постоянные, λ_i – длины волн, соответсвующие собтсвенным чатсота рассматриваемого вещества.

По Френелю вращение плоскости поляризации – проявление *кругового двойного лучепрпеломления.* Две волны, которые могут распространятся в оптически активной среде с разными скоростями, поляризованы *по кругу*: по левому и по правому.

Покажем достаточность такого предположения:
$$\begin{aligned} E_x &= A\cos\xi\cos(\omega t - kz), \\ E_y &= A\sin\xi\cos(\omega y - kz), \end{aligned} \qquad \xi = -\alpha z, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} E_x &= \tfrac{A}{2}\cos(\omega t - kz + \alpha z) + \tfrac{A}{2}\cos(\omega t - kz - \alpha z), \\ E_y &= \tfrac{A}{2}\cos(\omega t - kz + \alpha z + \pi/2) + \tfrac{A}{2}\cos(\omega t - kz - \alpha z - \pi/2). \end{aligned}$$
Разложим полученную волну на две: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\text{п}} + \boldsymbol{E}_{\text{л}}$, где для $\boldsymbol{E}_{\text{п}}$ и $\boldsymbol{E}_{\text{л}}$ имеет смысл ввеси $k_{\text{п}} = k - \alpha$ и $k_{\text{л}} = k + \alpha$. Полученные волны соответствуют правой и левой круговой поляризации. Скорости этих волн определяются выражениями
$$v_{\text{п}} = \frac{\omega}{k - \alpha}, \qquad v_{\text{л}} = \frac{\omega}{k + \alpha},$$
и соответсвующие покзатели преломления $n = c/v$.

Френель выдвинул гипотезу, что возможно независимое распространения поляризованных по кругу волн, с сохранением поляризации, которую подтвердил эксперементально. Тем самым задача объяснения вращения плоскости поляризации была сведена к задаче объяснения кругового двойного лучепреломления.

Поляризованные по кругу в противоположных направлениях волны в окрестности полос или линий поглощения могут отличаться не только скоростями распространения, но и коэффициентами поглощения. Тогда они выйдут с различными амплитудами. Если падающий свет был поляризован линейно, то выходящий будет поляризован эллиптически. Это явление называется круговым дихроизмом.

2.6 Магнитное вращение плоскости поляризации (эффект Фарадея)

Опыты Фарадея показали, что при наличии внешнего магнитного поля вдоль оптической оси системы, угол поворота зависит от длины пути l и напряженноести внешнего поля B, как
$$\xi = RlB,$$
де R – *постоянная Верде*, или *магнитная вращательная способность.*

При внесении в магнитное поле $\boldsymbol{B}$ у осцилляторов вещества появляются две новые резонансные частоты $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$, где Ω – ларморовская частота. Эти собственны частоты проявляеются не только в испускании (*прямой эффект Зеемана*), но и в поглощении света (*обратный эффект Зеемана*).

Нормальные волны, которые могут распространятся вдоль магнитного поля, поляризованы по кругу. Когда направления распространения света и магнитного поля совпадают, большей частоте $\omega_+ = \omega_0 + \Omega$ соответсвует вращение по, а меньшей ω_- – против часовой стрелки, если смотреть в направлении магнитного поля. Так как ω_+ и ω_- различны, то происходит сдвиг фаз волн, а соответсвенно, и повород плоскости поляризации на гол
$$\xi = \frac{\omega l}{2c}(n_- - n_+) = \frac{\pi l}{\lambda}(n_- - n_+).$$

Если построить $n_- - n_+$, то можно увидеть, что, как и в случае ларморовского вращения Ω, вращение плоскости поляризации определяется только направлением магнитного поля $\boldsymbol{B}$ и не зависят от направления распространения света. При изменение на противоположное направления распространеняи света не изменятся, в противоположность естественного вращения.

Вообще, в эффекте Фарадея, воспользовавшись формулой Зеемана можно получить *формулу Беккереля* для постоянной Верде:
$$R = -\frac{e}{2mc^2}\lambda\frac{dn}{d\lambda},$$
где m – масса электрона, $e > 0$ – его абсолютный заряд.

Ещё можно было бы поговорить про *эффект Макалюзо и Корбино*, объясненный Фохтом, но оставим это на светлое будущее.

3 Нелинейная оптика

3.1 Нелинейная поляризацим среды

При распространении света в среде нелинейные явления в оптике связаны прежде всего с *нелинейной зависимостью* вектора поляризации среды $\boldsymbol{P}$ от напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ световой волны. Если поле $\boldsymbol{E}$ ещё не «очень сильное», то вектор $\boldsymbol{P}$ можно разложить во степеням $\boldsymbol{E}$:

$$P_j = \alpha_{jk}E_k + \alpha_{jkl}E_kE_l + \alpha_{jklm}E_kE_lE_m + \ldots,$$

где α_{jk} – *линейная поляризуемость среды*, а тензоры высших порядков называют соответственно квадратичной, кубичной, и т.д. *поляризуемостями.* Поле $\boldsymbol{E}$ предполагаем монохроматичным, среду однороднойЮ немагнитной, без дисперсии, а α – функции частот ω. Для изотропной среды все тензоры α вырождаются в скаляры.

В средах, в которых все точки явяются центрами симметрии, квадратичный член равен нулю. Однако, можем рассмотреть *качественно* процессы, полагая

$$\boldsymbol{P} = \alpha\boldsymbol{E} + \alpha_2 E\boldsymbol{E} + \alpha_3 E^2\boldsymbol{E} + \ldots,$$

где мы принимаем ущербность такого приближения, но зато можем сделать несколько правильных шагов. Разобьем поляризацию, а также индукцию, на линейную и нелиненую: $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_{\mathrm{l}} + \boldsymbol{P}_{\mathrm{nl}}$, где нелинейная часть $\boldsymbol{P}_{\mathrm{nl}} = \alpha_2 E\boldsymbol{E} + \alpha_3 E^2\boldsymbol{E} + \ldots$, а линейная $\boldsymbol{P}_{\mathrm{l}} = \alpha\boldsymbol{E}$. Тогда и $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}$ предсавится, как $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{l}=\mathrm{E}} + 4\pi\boldsymbol{P}_{\mathrm{l}}$ и нелинейная $\boldsymbol{D}_{\mathrm{nl}} = 4\pi\boldsymbol{P}_{\mathrm{nl}}$. Линейная часть $\boldsymbol{D}_{\mathrm{l}} = \varepsilon\boldsymbol{E}$, где ε – диэлектрическая проницаемость. Теперь можем записать уравнения Максвелла в виде

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}, & &\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial\boldsymbol{P}_{\mathrm{nl}}}{\partial t},\\
&\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial c}, &\Rightarrow\quad &\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t},\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{D} = 0, & &\operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{E}) = -4\pi\operatorname{div}\boldsymbol{P}_{\mathrm{nl}},\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0, & &\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0.
\end{aligned}$$

Система решается *методом последовательных приближений.* В нулевом приближение $\boldsymbol{P}_{\mathrm{nl}} = 0$, получаются уравнения *линейной электродинамики.* В качестве нулевого приближения рассмотрим

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{A}\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}),$$

где $\boldsymbol{k}^2 = \varepsilon\omega^2/c^2$. Для нахождения первого приближения вместо $\boldsymbol{E}$ подставим $\boldsymbol{E}_0$, после чего снова получим линейные уравнения, но неоднородные. Правые части могут восприниматься как если бы каждый dV переизлучал волны аки *диполь Герца* с моментом $\boldsymbol{P}_{\mathrm{nl}}\,dV$. Такими итерациями может найти сколь угодно приближений.

Вообще среда диспергирует. Формально всё будет работать если взять эту охапку диффуров и решать её оидельно для слагаемых с частотой ω, частотой 2ω, и т.д., подставляя везде свои ε. По идее это работает.

3.2 Первое приближение. Генерация вторых гармоник.

В нулевом приближении можем найти нелинейную добавку

$$P_{\mathrm{nl}} = \alpha_2 E_0^2 = \frac{\alpha_2 A^2}{2} + \frac{\alpha_2 A^2}{2}\cos\left[2(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\right].$$

Как ни странно – это вполне адекватный результат, первое слагаемое называют *оптическим детектированием,* – возникновением в нелинейной среде постоянной электрической поляризации при прохождении мощной световой волны.

Второе слагаеме гармонически меняется во времени. Оно вызывает *генерацию второй гармоники в нелинейной среде*, т.е. волны с частотой $\omega_2 = 2\omega$. Найдём поле этой гармоники:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{\varepsilon[2\omega]}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + i\omega\frac{4\pi\alpha_2}{c}A\boldsymbol{A}e^{2(i\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})},\\
&\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad\qquad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E} = A_1 e^{2i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}, \quad \boldsymbol{H} = B_1 e^{2i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})},\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0,
\end{aligned}$$

что соответсвует частному решению от вынужденных колебаний. Из второго уравнения следует, что $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{H}$, также верно, что $(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}_1) = (\boldsymbol{k}\cdot\bar{B}_1) = 0$, т.е плоская волна поперечна относительно $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Учитывая, что $k^2c^2 = \omega^2\varepsilon[\omega]$ можем получить:

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{2\pi\alpha_2}{\varepsilon[\omega] - \varepsilon[2\omega]}A\boldsymbol{A}.$$

Если же к частном решению, добавим общее, то увидем, что можем подобрать такую его амплитуду, чтобы интенсивность второй гармоники в начале координат обращалась в нуль:

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{2\pi\alpha_2}{\varepsilon[\omega]-\varepsilon[2\omega]} A\boldsymbol{A} \left(\cos[2(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] - \cos[2\omega t - \boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}]\right),$$

где $k_2^2 = \omega_2^2\varepsilon[2\omega]/c^2$. Возводя в квадрат и усредняя можем найти интенсивность

$$I_1 \sim \frac{\alpha_2^2\omega^2x^2I^2}{n^2c^2}\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2, \qquad \beta = \frac{(2\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{r}}{2} = \frac{(2k-k_2)x}{2},$$

где x – пройденное расстояние. Тут принебрегли различием $n[\omega]$ и $n[2\omega]$.

Таким образом с возрастанием x возрастает интенсивность второй гармоники, когда $\beta \in [0,\pi/2]\cup[\pi,3\pi/2]$, и т.д. В этих сдучаях *энергия переходит от исходной волны ко второй гармоники.* На других интервалах энергия возвращается от второй, к первой. Условие $\beta = \pi/2$ определяет расстояние, до которого происходит перекачка энергии. Это расстояние называется *когерентной длиной*, для которого верно, что

$$L_{\text{coh}} = \frac{\lambda}{4|n[\omega]-n[2\omega]|},$$

где λ – длина исходной волны.

Когда $n[\omega] = n[2\omega]$ верно, что $2\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_2$, тогда и L_{coh} обращается в бесконечность. Это условие – *фазовый синхронизм.*

Ещё в 1962 году было эксперментально продемонстрирована возможность осуществить фазовый синхронизм на частотах ω и 2ω между обыкновенной и необыкновенной волной в некоторых кристаллах.

Аналогичное явление – *генерация волн с суммарной и разностной частотами.* Если на нелинейную среду направить два можных пучка света с различными частотами ω_1 и ω_2, то из неё будет выходить свет с частотами $\{\omega_1,\, \omega_2,\, 2\omega_1,\, 2\omega_2,\, \omega_1{+}\omega_2,\, \omega_1{-}\omega_2\}$. Так можно получить излучение в инфракрасной и ультрафиолетовой области, например, ≈ 80 нм.

3.3 Второе приближение. Самофокусировка.