Заметки курса «Аналитическая механика II»

Семинарист: Сахаров А. В.

Восторженные слушатели: Хоружий К.
Примак Е.

От: *25 февраля 2021 г.*

Содержание

1 Малые колебания консервативных систем.

Запишем уравнения Лагранжа для консервативной голономной системе:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \qquad q \in M^n; \qquad q, \dot{q} \in TM^n.$$

Тогда можно сказать, что

$$L(q, \dot{q}, t) \colon TM^n \times \mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{R}^1.$$

Параллельным переносом выберем $q = 0$ – положение равновесия. Тогда считаем, что $q(t),\ \dot{q}(t) \in \varepsilon$ – окрестности. В идеале мы хотим всё линеаризовать, тогда

$$T = T_2 + T_1 + T_0 = T_2 = \frac{1}{2}\dot{q}^i\dot{q}^j A_{ij}(q) \approx \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}} A(0)\dot{q} + \ldots, \qquad A(0) = \frac{\partial^2 T(0)}{\partial \dot{q}^{\mathrm{T}} \partial \dot{q}}.$$

т. к. для консервативных систем $T_1 = T_0 = 0$.

Аналогично можем сделать для потенциальной энергии

$$\Pi = \Pi(0) + \frac{\partial \Pi(0)}{\partial q^{\mathrm{T}}} q + \frac{1}{2} q^{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial q^{\mathrm{T}} \partial q} q + \ldots \approx \frac{1}{2} q^{\mathrm{T}} C(0) q, \qquad C(0) = \frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial q^{\mathrm{T}} \partial q}.$$

Таким образом мы пришли к уравнениям вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{A\ddot{q} + Cq = 0.}$$

Последнее уравнение называется *уравнением малых колебаний*. Важно, что A – положительно определена, в силу невырожденности уравнений на $\ddot{q}$ уравнений Лагранжа.

Из линейной алгебры понятно, что существуют координаты $\boldsymbol{\theta} \in M^n$, а также невырожденная матрица перехода к новым координатам $U \colon \boldsymbol{q} = U\boldsymbol{\theta}$, и $U^{\mathrm{T}}AU = E$, $U^{\mathrm{T}}CU = \Lambda$ – диагональная матрица. Тогда верно, что

$$T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}} A \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}} U^{\mathrm{T}} A U \dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{\theta}_i^2.$$

Аналогично для потенциальной энергии

$$\Pi = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} C q = \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}} U^{\mathrm{T}} C U \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}} \Lambda \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \theta_i^2.$$

Это ещё сильнее упрощает уравнения Лагранжа:

$$A\ddot{\boldsymbol{q}} + C\boldsymbol{q} = 0 \qquad \to \qquad \ddot{\theta}_i + \lambda_i \theta_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь λ_i – действительные диагональные элементы Λ. При различных λ получаем, что

$$\begin{aligned} \lambda_i > 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \theta_i = c_i \sin(\sqrt{\lambda_i} t + \alpha_i); \\ \lambda_i = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \theta_i = c_i t + \alpha_i.; \\ \lambda_i < 0 \qquad &\Rightarrow \qquad \theta_i = c_i \exp(\sqrt{-\lambda_i} t) + \alpha_i \exp(-\sqrt{-\lambda_i} t). \end{aligned}$$

где последние два – уже не колебаниям.

Возвращаясь к удобной форме, получаем, что

$$\boldsymbol{q} = U\boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{u}_i \sin(\sqrt{\lambda_i} t + \alpha_i),$$

где $\boldsymbol{u}_i$ – амплитудный вектор i-го главного колебания. `Таким образом консервативная система движется по суперпозиции некоторых главных колебаний (гармонических осцилляций).`

Иначе мы можем интерпретировать это так, что кинетическая энергия[1] образует некоторую метрику, а амплитудные вектора образуют некоторый ортонормированный базис.

$$U^{\mathrm{T}} A U = E \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{u}_j = \delta_{ij}$$

Получив матрицы $A,\ C$ переходим к $[C - \lambda A]\boldsymbol{u} = 0$, получая

$$|C - \lambda A| = 0,$$

что называют *вековым уравнением*, или *уравнением частот*. Из него получим $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, и уже перейдём к системе уравнений вида $|C - \lambda_i A|\boldsymbol{u}_i = 0$.

[1] Переписать грамотнее.

2 Вынужденные колебания и диссипативные системы

2.1 Вынужденные колебания

Давайте испортим консервативность так, чтобы
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i(t).$$
Как выяснили раннее
$$q = U\theta. \qquad U^{\mathrm{T}}AU = E, U^{\mathrm{T}}CU = \Lambda.$$
Посчитаем элементарную работу добавленной силы
$$\delta A = Q_i \delta q^i = \Theta^{\mathrm{T}}\delta\theta = Q^{\mathrm{T}}U\delta\theta,$$
тогда можно записать, что
$$\Theta = U^{\mathrm{T}}Q, \qquad Q = \left(U^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\Theta,$$
то есть *преобразование обобщенных сил*. То есть уравнение приходит к виду
$$A\ddot{q} + Cq = Q(t), \quad \overset{\text{бог с индексами}}{=} \quad \ddot{q}_i + \lambda_i\theta_i = \Theta_i(t).$$
Тогда ответ запишется в виде
$$q = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{u}_i \sin\left(\sqrt{\lambda_i}\, t + \alpha_i\right) + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_i \theta_i^*(t),$$
где вторая сумма соотвествует *вынужденным колебаниям*, а первая свободным гармоническим колебаниям.

Пусть так вышло, что
$$\begin{cases} \theta_i^* = b_i \sin(\Omega t) \\ \Theta_i(t) = a_i \sin(\Omega t) \end{cases} \quad\Rightarrow\quad b_i\left(\lambda_i - \Omega^2\right) = a_i, \quad\Rightarrow\quad \theta_i^* = \frac{a_i}{\lambda_i - \Omega^2}\sin(\Omega t).$$
В случае же *резонанса* ищем решение в виде
$$\theta_i^*(t) = b_i t\cos(\Omega t), \quad\Rightarrow\quad b_i = -\frac{a_i}{2\Omega}.$$
И здесь мы видим первые звоночки от Пуанкаре, о конце линейной теории.

Задача 1 (18.42)

Есть некоторая платформа, перемещающаяся по закону $a\sin\omega t$. На ней подвешены куча стержней, соединенных пружинами разной упругости, на разных высотах. Вопрос – на каких ω возможен резонанс?

Перейдём в СО платформы, тогда возбуждающая сила – сила инерции, соотвественно для всех стержней возбуждающая сила одинаковая
$$\boldsymbol{J}_i^e = -m\boldsymbol{w}_i^e = m\omega^2 a\sin(\omega t)\boldsymbol{e}.$$
Посчитаем обобщенные силы, как
$$Q_1^e = \ldots = Q_n^e = \frac{\delta A_i}{\delta\varphi_i} = \frac{(\boldsymbol{J}_i^e \cdot \delta\boldsymbol{r}_i)}{\delta\varphi_i} = \frac{1}{2}m\omega^2 al\sin(\omega t).$$
Получается, что мы посчитали столбец обобщенных сил
$$\boldsymbol{Q} = \frac{l}{2}\left[1,\ 1,\ \ldots, 1\right]^{\mathrm{T}}\ a\omega^2 m\sin(\omega t).$$
По крайней мере мы можем сказать, что у нас есть главная частота
$$\lambda_1 = \frac{3g}{2l}, \qquad \boldsymbol{u}_1 = \left[1,\ 1,\ \ldots, 1\right]^{\mathrm{T}}.$$
Теперь выпишем матрицу кинетической энергии
$$A = \frac{ml^2}{6}E, \qquad U^{\mathrm{T}}AU = E, \quad\Rightarrow\quad UU^{\mathrm{T}} = E,$$
с точностью до множителя. Тогда $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ – ортогональный базис.

Теперь вспоминаем, что
$$\Theta = U^{\mathrm{T}}Q = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}} \\ \ldots \\ \boldsymbol{u}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \boldsymbol{u}_1\ \frac{1}{2}a\omega^2 lm\sin(\omega t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{u}_1 \\ \ldots \\ \boldsymbol{u}_n^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{u}_1 \end{pmatrix}\ \frac{1}{2}a\omega^2 lm\sin(\omega t) = \begin{pmatrix} n \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{u}_1\ \frac{1}{2}a\omega^2 lm\sin(\omega t).$$

Ура, от сих приходим к приятным уравнениям Лагранжа

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_q + \lambda_1 \dot{\theta}_1 = na\omega^2 \dfrac{l}{2} \sin\omega t, \ddot{\theta}_2 + \lambda_2\theta_2 \\ \qquad \ldots \\ \ddot{\theta}_n + \lambda_n \theta_n = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{3g}{2l}}.$$

2.2 Диссипативные системы

И снова испортим консервативную систему до диссипативной,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + \tilde{Q}_i(\dot{q}) = Q_i(q, \dot{q}).$$

С кинетической всё как обычно, тогда

$$T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}} A \dot{\boldsymbol{q}}; \qquad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}(0) + \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{q} + \frac{\partial \boldsymbol{Q}(0)}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}}\dot{\boldsymbol{q}} = -C\boldsymbol{q} - B\dot{\boldsymbol{q}}.$$

Где ввели матрицы вида

$$C = -\frac{\partial \boldsymbol{Q}(0)}{\partial \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}}; \qquad B = -\frac{\partial \boldsymbol{Q}(0)}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}}.$$

В таком случае уравнение примет вид

$$A\ddot{\boldsymbol{q}} + B\dot{\boldsymbol{q}} + C\boldsymbol{q} = 0, \tag{2.1}$$

получили *линеаризация уравнений Лагранжа I*. Но его сходу к каноническом виду не привести.

Вспомним, что энергия системы

$$E = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}} \cdot A\dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{q} \cdot C\boldsymbol{q}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = A\ddot{\boldsymbol{q}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + C\boldsymbol{q} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} = [A\ddot{\boldsymbol{q}} + C\boldsymbol{q}] \cdot \dot{\boldsymbol{q}} = -B\dot{\boldsymbol{q}}^2 = N.$$

И пошла классификация: если $N \equiv 0$, то силы называем *гироскопическими*. Если $N \leqslant 0$, то силы *диссипативные*.

Def 2.1. Положение равновесия $\boldsymbol{q}^*$ называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво **и**

$$\exists \delta \colon \forall\, |\dot{\boldsymbol{q}}| < \delta,\ |\boldsymbol{q}| < \delta \quad \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{q}(t) = 0,\ \lim_{t\to\infty} \dot{\boldsymbol{q}}(t) = 0.$$

Возвращаясь к уравнению, вспомним что решение ищется в виде[2]

$$\boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{2n} C_i \boldsymbol{u}_i \exp\left(\lambda_i t\right), \quad \Rightarrow \quad \left[A\lambda^2 + B\lambda + C\right]\boldsymbol{u} = 0, \quad \Rightarrow \quad \det\left[A\lambda^2 + B\lambda + C\right] = 0,$$

тогда мы находим $2n$ решений $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$, и, соответственно, $2n$ амплитудных векторов.

Thr 2.2 (Достаточное условие асимптотической устойчивости)**.** *Для того, чтобы решение $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^*$ было асимптотически устойчиво достаточно, чтобы*

$$\operatorname{Re}\lambda_i < 0, \quad \forall i \in \{1, \ldots, 2n\}.$$

Если $\exists \lambda_i \colon \operatorname{Re}\lambda_i > 0$, тогда всё не так хорошо.

Как узнать, что ..., для этого достаточно посмотреть на рыбу

$$a_m \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + a_0 = 0,$$

и отрежем голову и хвост, получим матрицу

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & \ldots & 0 \\ a_m & a_{m-2} & \ldots & 0 \\ 0 & a_{m-1} & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & a_0 \end{pmatrix},$$

так получили матрицу Гурвица.

Thr 2.3 (Критерий Рауса-Гурвица)**.** *Для того, чтобы $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ необходимо и достаточно, чтобы $a_i > 0$, и*

$$\Delta_1,\ \Delta_3,\ \ldots,\ \Delta_{m-1} > 0.$$

Есть другие формы.

[2] В общем случае решение системы вообще сложнее (при кратных λ), но качественно всё примерно в таком же духе, поэтому, ну, всё хорошо.

3 Элементы теории бифуркаций

Общий подход

Запишем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q,$$

где основная идея Гамильтонова формализма – всегда уравнения разрешимы относительно ускорений $\ddot{q} = \ddot{q}(q, \dot{q})$. Пусть $x_1 = q_1$, $x_2 = \dot{q}_1$, $x_3 = q_2$, $x_4 = \dot{q}_2$, и т.д. Приведем уравнения к *нормальной форме Коши*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in M^{2n},$$

где M^{2n} – фазовое пространство, или пространство состояний.

Не умоляя общности будем просто рассматривать системы вида $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, считая, что $\boldsymbol{x} \in M^n$. Посмотрим на некоторую $\boldsymbol{x}_0 \in M^n$, – начальные условия. Продолжаем считать, что решение охапки диффуров единственно, тогда и через каждую точку конфигурационного многообразия проходит единственная траектория.

Def 3.1. Множество траекторий (интегральных кривых) образует *фазовый портрет*. *Бифуркация* – качественное изменение фазового портрета при плавном изменении параметров модели. *Бифуркационная диаграмма* отображает бифуркацию системы.

3.1 Двумерные динамические системы

Посмотрим ещё на системы на $\mathbb{R}^2$.

Def 3.2. *Предельный цикл* – замкнутая периодическая траектория (ЗПТ) системы дифференциальных уравнений, изолированная от других ЗПТ. Также ЗПТ такая, что для всех траекторий из некоторой окрестности периодических траекторий стремится к ней при $t \to +\infty$ (установившийся периодический цикл) **или** при $t \to -\infty$ (неустановившийся предельный цикл).

Другими словами является аттрактором для некоторой своей окрестности.

4 Метод усреднений и нормальные формы

4.1 Метод усреднений

Рассмотрим уравнение вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon h(x, \dot{x}) = 0.$$

Рассмотрим систему в терминах быстрого времени $\tau = t$ и медленного $T = \varepsilon t$. В первом приближение получим, что

$$\begin{aligned}
O(1): &\qquad x_0 = r(T)\cos(\omega\tau + \varphi(T))\\
O(\varepsilon): &\qquad \partial_\tau^2 x_1 + \omega^2 x_1 = -2\partial_\tau\partial_T x_0 - h = +2\omega\partial_T(r\cos(\omega\tau+\varphi)) - h =\\
&\qquad = 2\omega(r'\sin(\omega\tau+\varphi)) + r\varphi'\cos(\omega\tau+\varphi) - h
\end{aligned}$$

и далее будем считать, что $\omega\tau + \varphi = \theta$, и разложим h в ряд Фурье. Тогда

$$h = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta,$$

соответственно, дабы убить резонансные слагаемые,

$$\begin{aligned}
2\omega r' - b_1 &= 0\\
2\omega r\varphi' - a_1 &= 0.
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{cases}
\omega r' = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} h \sin\theta\, d\theta & = \langle h\sin\theta\rangle\\
\omega r\varphi' = \ldots & = \langle h\cos\theta\rangle
\end{cases}$$

Осциллятор Ван дер Поля

Рассмотрим уравнения вида

$$\ddot{x} + x + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} = 0,$$

что соответствует рассмотренному случаю с $\omega = 1$, или $(\tau + \varphi = \theta)$

$$h = (r^2\cos^2(\tau+\varphi) - 1)(-r\sin(\tau+\varphi)) = \\ = r(\sin\theta - r^2\cos^2\theta\sin\theta),$$

тогда

$$r' = r = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sin^2\theta - r^2\cos^2\theta\sin^2\theta\right)\, d\theta = \frac{r}{2}\left(1 - \frac{r^2}{4}\right),$$

что соответствует возникновению предельного цикла радиуса 2.

4.2 Нормальная форма Коши

Продолжаем рассматривать

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} = 0\colon \boldsymbol{f}(0) = 0,$$

также будем считать, что $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ – аналитическая функция, и разложим её в ряд. Уравнение вида

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),$$

хотим свести к линейному виду. Сделаем следующую замену

$$\boldsymbol{x} \to \tilde{\boldsymbol{x}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \Lambda\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{g}(\tilde{\boldsymbol{x}}),$$

далее сделаем замену

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}),$$

где $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y})$ – «вектор» из полиномов минимальной нелинейной степени.

Прямой подстановкой получаем, что

$$\dot{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}}\dot{\boldsymbol{y}} = \left(E + \frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}}\right)\dot{\boldsymbol{y}} = \Lambda\boldsymbol{y} + \Lambda\boldsymbol{p} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{p}), \quad \Rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{y}} = \left(E + \frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}}\right)^{-1}\left(\Lambda\boldsymbol{y} + \Lambda\boldsymbol{p} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{p})\right),$$

а теперь разложим всё в ряд и оставим слагаемые степени не более $\deg\boldsymbol{p} = k$, тогда

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \left(E - \frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}}\right)(\Lambda\boldsymbol{y} + \Lambda\boldsymbol{p} + \boldsymbol{g}^m(\boldsymbol{y})) + O(|y|^{m+1}) = \\ = \Lambda\boldsymbol{y} + \Lambda\boldsymbol{p} + \boldsymbol{g}^m(\boldsymbol{y}) - \frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}}\Lambda\boldsymbol{y} + O(|\boldsymbol{y}|^{m+1}).$$

Вспомним, что понятно как выглядит p_i

$$p_i = \sum_{k_1,\ldots,k_n} p^i_{k_1,\ldots,k_n} y^{k_1}\ldots y^{k_n}, \qquad k_1 + \ldots + k_n = m,$$

а также g_i^m

$$g_i^m = \sum_{k_1,\ldots,k_n} g^i_{k_1,\ldots,k_n} y^{k_1}\ldots y^{k_n},$$

работая с каждым мономом приходим к уравнениям

$$\lambda_i p^i_{k_1,\ldots,k_n} - (k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \ldots + k_n\lambda_n)\, p^i_{k_1,\ldots,k_n} = -g^i_{k_1,\ldots,k_n}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{p^i_{k_1,\ldots,k_n} = \frac{-g^i_{k_1,\ldots,k_n}}{\lambda_i - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\lambda})}},$$

что приводит нас к следующей теореме.

Thr 4.1 (Теорема Пуанкаре-Дюлака)**.** *Можно всё убрать, кроме резонансных слагаемых.*