Задание по курсу «Аналитическая механика II»

Авторы: Хоружий Кирилл

От: *9 февраля 2021 г.*

Содержание

1 Первое задание по аналитической механике.

1.1 Малые колебания консервативных систем

16.11

Введём ось OX координат вдоль туннеля, выбрав в качестве $x = 0$ положение равновесия. Тогда кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2.$$

Интегрируя силу, действующую на тело, находим потенциальную энергию

$$F_x = -\frac{GM(x)m}{r^2(x)} \cdot \frac{x}{r} = -G\kappa x, \qquad \frac{G\kappa R^3}{R^2} = g, \quad \Rightarrow \quad \Pi = \int F\, dx = \frac{1}{2}\frac{g}{R}x.$$

Так удачно вышло, что T и Π – квадратичные формы. Запишем вековое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{g}{R}, \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

16.33

Выбрав оси, как показано на рисунке, получим систему с 2 степенями свободы. Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right).$$

Потенциальная энергия для трёх пружинок (сдвинутая так, чтобы положение равновесия был 0)

$$\Pi = \frac{c}{2}(x_2)^2 + \frac{c}{2}(x_1)^2 + \frac{2c}{2}\left(x_2 - x_1\right)^2.$$

И снова так вышло, что T и Π – квадратичные формы, так что

$$\det\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^j} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \det\left[c\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \lambda m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0, \quad \Rightarrow \quad (\lambda m)^2 + 9c^2 - 6\lambda mc - 4c^2 = 0.$$

Соответственно находим квадраты частот

$$\lambda^2 - 6\lambda\frac{c}{m} + 5\frac{c^2}{m^2} = \left(\lambda_1 - \frac{c}{m}\right)\left(\lambda_2 - 5\frac{c}{m}\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 : \begin{pmatrix} -2c & 2c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 & \Rightarrow \ \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \lambda_1 : \begin{pmatrix} 2c & 2c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 & \Rightarrow \ \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Соответственно, уравнение движения будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\, t + \alpha_1\right) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{5c}{m}}\, t + \alpha_2\right).$$

16.47

Запишем с учётом малости колебаний кинетическую энергию системы

$$T = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}\left(l\dot{\varphi}_2 + l\dot{\varphi}_1\right)^2.$$

И, опять же, с учетом малости, потенциальную

$$\begin{aligned} \Pi = &\frac{c}{2}\left((l\varphi_1)^2 + (l\varphi_1 + l\varphi_2)^2\right) + mgl\cos\varphi_1 + mgl(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) = \\ = &\frac{c}{2}\left((l\varphi_1)^2 + (l\varphi_1 + l\varphi_2)^2\right) + 2mgl\left(1 - \frac{\varphi_1^2}{2}\right) + mgl\left(1 - \frac{\varphi_2^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Как обычно, получив квадратичные формы (хотя бы в малом приближение) радуемся и переходим к поиску частот собственных колебаний

$$\det\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^j} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \det\left[\begin{pmatrix} 2cl^2 - 2mgl & cl^2 \\ cl^2 & cl^2 - mgl \end{pmatrix} - \lambda ml^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0.$$

Раскрыв, получаем уравнение вида

$$2([cl^2 - ml^2\lambda] - mgl)^2 - [cl^2 - ml^2\lambda]^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{2}mgl}{\sqrt{2} \pm 1} = [cl^2 - ml^2\lambda], \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{c}{m} - 2\frac{g}{l} \mp \sqrt{2}\frac{g}{l}.$$

Теперь подставляем известные λ, и находим амплитудные векторы

$$\lambda_1 : \quad \begin{pmatrix} 2+2\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 : \quad \begin{pmatrix} 2-2\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Это позволяет нам записать уравнение движения малых колебаний (при $c/m > (2+\sqrt{2})g/l$)

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m} - \left(2+\sqrt{2}\right)\frac{g}{l}}\, t + \alpha_1\right) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m} - \left(2-\sqrt{2}\right)\frac{g}{l}}\, t + \alpha_2\right).$$

16.64

Запишем кинетическую энергию системы

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2\right) + \frac{nm}{2}\dot{x}_2^2.$$

И, считая 0 в положении равновесия, потенциальную энергию системы, запасенную в сжатых пружинах

$$\Pi = \frac{c}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{c}{2}(x_3 - x_2)^2.$$

В таком случае

$$\det\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^j} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \det\left[c\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0.$$

Раскрывая, приходим у уравнению на λ вида

$$\lambda_1\left(\lambda_2 - \frac{c}{m}\right)\left(\lambda_3 - \frac{(2+n)c}{nm}\right) = 0.$$

Соответственно, амплитудные векторы находим, как

$$\lambda_1 : \quad \begin{pmatrix} -c & 2c & -c \\ c & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 : \quad \begin{pmatrix} c & 2c-nc & c \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_3 : \quad \begin{pmatrix} c & nc & c \\ 0 & c & 2c/n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} n \\ -2 \\ n \end{pmatrix}.$$

Что ж, уравнение движения малых колебаний запишется в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (C_1 t + \alpha_1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\, t + \alpha_2\right) + C_3 \begin{pmatrix} n \\ -2 \\ n \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{(n+2)c}{nm}}\, t + \alpha_3\right).$$

16.107

Знаем, что кинетическая энергия и обобщенные силы для системы могут быть записаны в виде[1]

$$T = \frac{1}{2} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \qquad Q_i = b_{ik}\dot{q}_k,$$

где a_{ik} – положительно определенная квадратичная форма, а $b_{ik} = -b_{ki}$ – кососимметричная квадратичная форма.

Запишем уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad \Rightarrow \qquad a_{ik}\ddot{q}_k = b_{i\alpha}\dot{q}_\alpha.$$

Осталось этот набор уравнений решить.

Воспользуемся алгоритмом приведения двух квадратичных форм к каноническому виду. Выберем в качестве скалярного произведения a_{ik}, в терминах a_{ik} выберем ортогональный базис так, чтобы a_{ik} было равно δ_{ik}.

[1] С глубоким сожалением вынуждены оставить баланс индексов в рамках этой задачи. Немое суммирование подразумевается, при повторение индексов.

Повернём через u_{ik} базис, приведя b_{ik} к каноническому виду b^*_{jl}, указанному в условии с m блоков 2×2.

$$\begin{cases} \delta_{ik}\ddot{q}_k = b_{i\alpha}\dot{q}_\alpha, \\ u_{kj}q^*_j = q_k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u^{-1}_{li} \cdot \left(\delta_{ik}u_{kj}q^*_j = b_{i\alpha}u_{\alpha\beta}q^*_\beta \right) \quad \overset{\sqsupset\, i=1}{\Rightarrow} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}^*_1 \\ \ddot{q}^*_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}^*_1 \\ \dot{q}^*_2 \end{pmatrix}.$$

И таких систем с колебаниями у нас будет m штук

$$\begin{cases} \ddot{q}^*_1 = -\nu\dot{q}^*_2 \\ \ddot{q}^*_2 = -\nu\dot{q}^*_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dddot{q}^*_1 = -\nu\ddot{q}^*_2 \\ \dddot{q}^*_2 = -\nu\ddot{q}^*_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q^*_1 = \dfrac{A}{\nu}\cos(\nu t + \alpha) + C_1 \\ q^*_2 = \dfrac{A}{\nu}\sin(\nu t + \alpha) + C_2. \end{cases}$$

Нули же в каноническом виде b_{ij} будут соответствовать трансляциям

$$q^* = At + B.$$

Собирая всё вместе, находим, что

$$q_\alpha = u_{\alpha i}q^*_i, \qquad q^*_i = \begin{cases} (A_j/\nu_j) \cdot \cos(\nu_j t + \alpha_j) + B_{2j-1} & \text{при } i = 2j-1 \leqslant 2m; \\ (A_j/\nu_j) \cdot \sin(\nu_j t + \alpha_j) + B_{2j} & \text{при } i = 2j \leqslant 2m; \\ (A_j) \cdot t + B_j & \text{при } i = j > 2m. \end{cases}$$

1.2 Диссипативные системы и вынужденные колебания

17.8

Давайте посмотрим на случай, например, при $n = 4$.

$$|A\lambda^2 + B\lambda + C| = 0, \quad f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} (c_1+c_2)+\lambda^2 m_1 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3+\lambda^2 m_2 & -c_3 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3+c_4+\lambda^2 m_3 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & \beta\lambda + c_4 + \lambda^2 m_4 \end{pmatrix} = 0;$$

Получим уравнение вида

$$\begin{aligned} f(\lambda) = \lambda^8 &\cdot (m_1m_2m_3m_4) + \\ +\lambda^7 &\cdot (\beta m_1m_2m_3) + \\ +\lambda^6 &\cdot (c_4m_1m_2m_3 + c_2m_1m_4m_3 + c_3m_1m_4m_3 + c_1m_2m_4m_3 + c_2m_2m_4m_3 + \\ &+ c_3m_1m_2m_4 + c_4m_1m_2m_4) + \\ +\lambda^5 &\cdot (\beta c_3m_1m_2 + \beta c_4m_1m_2 + \beta c_1m_3m_2 + \beta c_2m_3m_2 + \beta c_2m_1m_3 + \beta c_3m_1m_3) + \\ +\lambda^4 &\cdot (c_3c_4m_1m_2 + c_1c_4m_3m_2 + c_2c_4m_3m_2 + c_1c_3m_4m_2 + c_2c_3m_4m_2 + \\ &+ c_1c_4m_4m_2 + c_2c_4m_4m_2 + c_2c_4m_1m_3 + c_3c_4m_1m_3 + c_2c_3m_1m_4 + \\ &+ c_2c_4m_1m_4 + c_3c_4m_1m_4 + c_1c_2m_3m_4 + c_1c_3m_3m_4 + c_2c_3m_3m_4) + \\ +\lambda^3 &\cdot (\beta c_2c_3m_1 + \beta c_2c_4m_1 + \beta c_3c_4m_1 + \beta c_1c_3m_2 + \beta c_2c_3m_2 + \beta c_1c_4m_2 + \\ &+ \beta c_2c_4m_2 + \beta c_1c_2m_3 + \beta c_1c_3m_3 + \beta c_2c_3m_3) + \\ +\lambda^2 &\cdot (c_2c_3c_4m_1 + c_1c_3c_4m_2 + c_2c_3c_4m_2 + c_1c_2c_4m_3 + c_1c_3c_4m_3 + \\ &+ c_2c_3c_4m_3 + c_1c_2c_3m_4 + c_1c_2c_4m_4 + c_1c_3c_4m_4 + c_2c_3c_4m_4) + \\ +\lambda^1 &\cdot (\beta c_1c_2c_3 + \beta c_1c_4c_3 + \beta c_2c_4c_3 + \beta c_1c_2c_4) + \\ +\lambda^0 &\cdot (c_1c_2c_3c_4). \end{aligned}$$

И теперь посчитаем миноры в матрице Гурвица, то получим, что

$$\Delta_1 = m_1m_2m_3\,\beta, \quad \Delta_2 = c_4\, m_1^2m_2^2m_3^2\,\beta, \quad \Delta_3 = c_4^2\, m_1^3m_2^3m_3^2\,\beta^2, \quad \Delta_4 = c_3c_4^3\, m_1^4m_2^4m_3^2\,\beta^2.$$