

# ЗАМЕТКИ КУРСА «СОВРЕМЕННАЯ ОПТИКА»

---

**Лектор:** Колдунов Л. М.

**Восторженные слушатели:** Хоружий К.  
Примак Е.

**От:** 22 февраля 2021 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Геометрическая оптика</b>	<b>2</b>
1.1	Волновое уравнение . . . . .	2
1.2	Уравнения эйконала . . . . .	2
1.3	Принцип Ферма . . . . .	3
1.4	Траектория луча (?) . . . . .	3
1.5	Уравнение луча в параксиальном приближение . . . . .	3
1.6	Пример слоистой среды . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Матричная оптика</b>	<b>5</b>
2.1	Матрица перемещения . . . . .	5
2.2	Матрица преломления на сферической поверхности . . . . .	5
2.3	Общий подход . . . . .	5
2.4	Задачи . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Матричная оптика (Продолжение)</b>	<b>6</b>
3.1	Периодические оптические системы . . . . .	7

# 1 Геометрическая оптика

## 1.1 Волновое уравнение

В общем оптика устроена как-то так: ГО  $\subset$  ВО  $\subset$  ЭО  $\subset$  КО. Вспомним уравнения Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Будем считать, что нет свободных токов и зарядов. Как вариант, можно найти решение в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}).$$

Важно, что верны формально замены

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega, \quad \begin{cases} \partial_x \rightarrow -ik_x, \\ \partial_y \rightarrow -ik_y, \\ \partial_z \rightarrow -ik_z, \end{cases} \Rightarrow \nabla \rightarrow -i\mathbf{k}, \quad \nabla^2 \rightarrow -k^2.$$

Приходим к уравнению вида

$$-k^2 \mathbf{E} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \omega^2 \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}, \quad \rightarrow \quad \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{n}.$$

Можем посмотреть на  $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const}$ . Тогда

$$\omega dt - k dz = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

## 1.2 Уравнения эйконала

1. Свет распространяется в виде лучей.
2. Среда характеризуется показателем преломления  $n$ , более того<sup>1</sup>  $c_{\text{ср}} = c/n$ .
3.  $\int n dl \rightarrow \min$  (принцип Ферма).

**Def 1.1.** *Оптический путь* можем определить, как

$$S = \int_A^B n(\mathbf{r}) dl.$$

Посмотрим на уравнение

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad E(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \exp(ik_0 \Phi(\mathbf{r}) - i\omega t),$$

где  $\Phi(\mathbf{r})$  называем *эйконалом*, а  $a$  - амплитуда.

Тогда формально получаем следующее:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2, \quad \frac{\partial}{\partial x} E = a'_x \exp(\dots) + a(\mathbf{r}) ik_0 \Phi'_x \exp(\dots),$$

И для второй производной

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = a''_{xx} \exp(\dots) + 2ik_0 a'_x \Phi'_x \exp(\dots) + ik_0 a \Phi''_{xx} \exp(\dots) - a(\mathbf{r}) k_0^2 |\Phi'_x|^2 \exp(\dots).$$

Таким образом нашли  $\Delta E$

$$\nabla^2 E = \nabla^2 a \exp(\dots) - a(\mathbf{r}) k_0^2 |\operatorname{grad} \Phi|^2 \exp(\dots) + i(2k_0(\operatorname{grad} a, \operatorname{grad} \Phi) + k_0 a \nabla^2 \Phi) \exp(\dots).$$

Внимательно посмотрели на волновое уравнение, решили сгруппировать вещественную часть и мнимую

$$\nabla^2 a \exp(\dots) - a(\mathbf{r}) k_0^2 |\operatorname{grad} \Phi|^2 \exp(\dots) + \frac{\omega^2}{c^2} n^2 a \exp(\dots) = 0, \quad \Rightarrow \quad |\operatorname{grad} \Phi|^2 = \underbrace{\frac{1}{a l_0^2} \nabla^2 a}_{\text{изм. ампл.}} + n^2.$$

<sup>1</sup>Будем считать, что лучу нужно проходить больший оптический путь.

Ну, будем считать, что (настоящая область применимости волновой оптики)

$$\left| \lambda \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \right| \ll \left| \frac{\partial a}{\partial x} \right|, \quad \Leftrightarrow \quad \left| \lambda \frac{\partial a}{\partial x} \right| \ll a, \quad \lambda \rightarrow 0.$$

И приходим к уравнению Эйконала

$$\boxed{|\text{grad } \Phi| = n.} \quad (1.1)$$

Ещё раз вспомним, что волновой фронт имеет вид

$$\omega t - k_0 \Phi = \text{const.}$$

Запишем, что (живём вдоль  $\mathbf{S}$ )

$$\text{grad } \Phi = n \mathbf{S}, \quad \|\mathbf{S}\| = 1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial S} = n.$$

Тогда

$$\omega dt - k_0 d\Phi = 0, \quad \Rightarrow \quad \omega dt = k_0 d\Phi = k_0 \frac{\partial \Phi}{\partial S} dS = k_0 n dS.$$

### 1.3 Принцип Ферма

Пусть  $\Phi$  – однозначно задан, тогда

$$\text{grad } \Phi = n \mathbf{S}, \quad \Rightarrow \quad \oint n \mathbf{S} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad \Rightarrow \quad \int_{ACB} n \mathbf{S} \cdot d\mathbf{l} = \int_{ADB} n \mathbf{S} \cdot d\mathbf{l}.$$

Но  $\mathbf{S} \cdot d\mathbf{l} = S dl = dl$  на  $ACB$ . Тогда

$$\int_{ACB} n dl = \int_{ADB} n \mathbf{S} \cdot d\mathbf{l} \leq \int_{ADB} n dl.$$

Что доказывает принцип Ферма.

### 1.4 Траектория луча (?)

Для луча верно, что

$$n \mathbf{S} = \text{grad } \Phi, \quad |d\mathbf{r}| = dl, \quad \mathbf{S} = \frac{d\mathbf{r}}{dl}.$$

В таком случае верно, что

$$n \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \text{grad } \Phi, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dl} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right) = \frac{d}{dl} \text{grad } \Phi = \text{grad } \frac{d\Phi}{dl} = \text{grad } n.$$

Получили уравнение траектории луча

$$\boxed{\frac{d}{dl} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right) = \text{grad } n.} \quad (1.2)$$

Например, в однородной среде

$$n = \text{const}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dl^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} = \mathbf{a}l + \mathbf{b}.$$

Можно сделать ещё так (найти кривизну траектории?)

$$\mathbf{S} \frac{dn}{dl} + n \frac{d\mathbf{S}}{dl} = \nabla n, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{S}}{dl} = \frac{1}{n} \left( \nabla n - \mathbf{S} \frac{dn}{dl} \right).$$

Получаем (вспомнив трёхгранник Френе)

$$\frac{\mathbf{N}}{R} = \frac{1}{n} \left( \nabla n - \mathbf{S} \frac{dn}{dl} \right), \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{N^2}{R} = \frac{(\mathbf{N} \cdot \nabla n)}{n},$$

или

$$(\mathbf{N} \cdot \nabla n) > 0, \quad \Rightarrow \quad \text{луч поворачивает в } \uparrow n. \quad (1.3)$$

### 1.5 Уравнение луча в параксиальном приближение

Пусть есть некоторая  $n(y)$ . Пусть луч движется  $\theta(y)$ , рассмотрим ситуацию преломления, тогда

$$n(y) \cos \theta(y) = n(y + dy) \cos \theta(y + dy), \quad \Rightarrow \quad \left( n(y) + \frac{dn}{dy} \Delta y \right) (\cos \theta(y) - \sin \theta(y)).$$

Раскрыв скобки, получим

$$n(y) \cos \theta(y) = n(y) \cos \theta(y) + \frac{dn}{dy} \cos \theta(y) \Delta y - n(y) \sin \theta(y) \frac{d\theta}{dy} \Delta y.$$

Запишем чуть аккуратнее:

$$\frac{dn}{dy} \cos \theta(y) = n(y) \sin \theta(y) \frac{d\theta}{dy},$$

Считая, что  $\sin \theta(y) \approx \theta(y) = dy/dx$ , тогда

$$\frac{1}{n} \frac{dn}{dy} = \operatorname{tg} \theta \frac{d\theta}{dy} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \Rightarrow \quad y''_{xx} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy}. \quad (1.4)$$

## 1.6 Пример слоистой среды

Рассмотрим вещество с коммерческим названием SELFOC и переменным показателем преломления вида

$$n^2 = n_0^2(1 - \alpha^2 y^2)$$

Считая  $\alpha y \ll 1$ , подставляя в уравнение луча находим, что

$$y''_{xx} = \frac{1}{n_0(1 - \alpha^2 y^2)^{1/2}} \frac{dn}{dy} = \frac{-n_0 \alpha^2 y}{n_0} = -\alpha^2 y,$$

и мы снова всё свели к гармоническому осциллятору.

Нужно ещё разобрать мнимую часть, в которой сидит факт об отсутствии взаимодействия лучей.

## 2 Матричная оптика

Будем рассматривать оптически центрированные системы, введем нормально к  $OX$  ось  $OY$ . Всё у нас аксиально симметрично, тогда луч можно характеризовать

$$\{y_1, \theta_1\} \rightarrow \{y_1, n_1\theta_1\},$$

где принято обозначение  $n\theta \stackrel{\text{def}}{=} V$ .

Вообще после прохождения оптической системы можем записать, что происходит некоторое линейное преобразование

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_1\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\theta_1 \end{pmatrix}.$$

### 2.1 Матрица перемещения

Пусть луч распространяется в однородной среде, под  $\theta_1$  распространяется, тогда  $\theta_2 = \theta_1$ . Что произошло с  $y$ ? Ну,  $y_2 = y_1 + l\theta_1$ , тогда

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_2\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\theta_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где соответствующую матрицу обозначим за  $T$ .

### 2.2 Матрица преломления на сферической поверхности

Есть некоторая ось  $OX$ , будем считать радиус кривизны положительным, если он идёт направо. Смотреть рис. 02.1. Верно, что

$$n_1\beta_1 = n_2\beta_2, \quad \beta_1 = \theta_1 + \alpha, \quad \beta_2 = \theta_2 + \alpha.$$

Тогда,

$$\alpha = \frac{y_1}{R}, \quad \Rightarrow \quad n_2\theta_2 = n_1\theta_1 + (n_1 - n_2)\frac{y_1}{R}, \quad \Leftrightarrow \quad V_2 = V_1 + \frac{n_1 - n_2}{R}y_1.$$

Теперь можем записать матрицу преломления  $P$

$$P(y, V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix}, \quad P(y, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где  $(n_2 - n_1)/R$  называют *оптической силой*.

### 2.3 Общий подход

Пусть есть схема рис. 02.2, тогда

$$\underbrace{M_3 M_2 M_1}_M \mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} \mathbf{b}.$$

Посмотрим на коэффициенты, приравнявая их к 0. Пусть

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix},$$

тогда  $\theta_2 = cy_1$ , тогда при  $D = 0$ , получается, что  $ОП_1$  – фокальная плоскость (слева).

Пусть  $B = 0$ , тогда  $y_2 = Ay_1$ , тогда это изображение, и говорим, что эти *плоскости сопряженные*, а коэффициент  $A$  – *коэффициент поперечного увеличения*.

Пусть  $C = 0$ , тогда  $\theta_2 = \theta_1 D$ , что соответствует телескопической системой, а коэффициент  $D$  – *коэффициент углового увеличения*.

Теперь рассмотрим  $A = 0$ , получается, что это фокальная плоскость справа.

### 2.4 Задачи

#### Пример №0

Рассмотрим преломление на первой границе, где

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{nR_1} & 1/n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} + \frac{1-n}{R_1} & 1 \end{pmatrix},$$

получается оптическая сила системы получилась равной

$$(n-1) \left( -\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right),$$

согласно определению.

Найдём теперь после линзы изображение объекта (рис. 02.4)

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/F & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{b}{F} & b \\ -\frac{1}{F} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - b/F & a(1 - b/F) + b \\ -1/F & -a/F + 1 \end{pmatrix}.$$

Для сопряженности плоскостей необходимо и достаточно, чтобы  $B = 0$ , то есть

$$a + b - \frac{ab}{F} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}.$$

Тогда увеличение можно увидеть в  $A = 1 - b/F$ .

### Пример №2

Показатель преломления  $n = 1.56$ , высота стрелки  $h = 2$  мм, в переменных  $(y, V)$  запишем (см. рис. 02.5)

$$\begin{pmatrix} 1 & x/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.56/2.8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{7.8} & 15 - \frac{x}{0.78} \\ -0.2 & -2 \end{pmatrix},$$

требуя сопряженности плоскостей

$$15 - \frac{x}{0.78} = 0, \quad \Rightarrow \quad x = 11.7 \text{ см.}$$

Коэффициент увеличения а-ля  $1/D$ , то есть равен  $-1/2$ .

### Пример №4

Параллельный пучок света проходит через шарик радиуса  $R = 1$  см, с показателем преломления  $n = 1.4$ .

С шариком  $n = 2$  луч собирается на полюсе шарика. В общем случае

$$\begin{pmatrix} 1 & F \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{(1-n)}{-R} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2R}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-1}{R} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2F(n-1)+(n-2)R}{nR} & \frac{F(-n)+2F+2R}{n} \\ \frac{2-2n}{nR} & \frac{2}{n} - 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$-2F(n-1) = R(n-2).$$

### Пример №11

См. рис. 02.5. Пусть оптические силы  $P_1$  и  $P_2$ , а расстояние  $l$ , тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{l}{F_1} & l \\ -\frac{F_1+F_2-l}{F_1F_2} & 1 - \frac{l}{F_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - P_1 & l \\ P_1 + P_2 - P_1P_2l & 1 - P_2 \end{pmatrix}.$$

Давайте считать  $1/F = (n-1)G$ . Хочется избавиться от зависимости от  $n$ . Тогда

$$l = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(n-1)G_1} + \frac{1}{(n-1)G_2} \right) = \frac{F_1 + F_2}{2}.$$

## 3 Матричная оптика (Продолжение)

### Обобщение на случай отражения

Была некоторая матрица преломления

$$P(y, V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2-n_1}{R} & 1 \end{pmatrix},$$

и матрица распространения

$$T = \begin{pmatrix} 1 & l/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В случае отражения видимо хочется заменить  $n \rightarrow -n$ . Знак  $\theta$  определяется, как вниз, или вверх.

Пусть теперь  $n_1 = n$ ,  $n_2 = -n$ , тогда матрица отражения

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(-n - n)/r & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n/r & 1 \end{pmatrix}.$$

Так фокусное расстояние для сферического зеркала  $R/2$ , что логично. В случае же, если мы захотим следить за направлениями осей, то можно вернуться к переменным  $\{z, \theta\}$ .

### Пример 1 (плоскопараллельная пластина)

Пусть есть пластинка толщины  $h$ , то

$$\begin{pmatrix} 1h/n & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} 1 & hN/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Пример 2 (плоскопараллельная пластина)

Задача 13, см. рис. 03.1, блокнот 3, что позволяет построить матрицу отражения. Если добавить распространения в воздухе, то можно поговорить про фокальные плоскости.

## 3.1 Периодические оптические системы

Пусть есть некоторая периодическая система с матрицей  $ABCD$ , действующая на луч  $\{y_0, V_0\}$

$$\begin{pmatrix} y_m \\ V_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} y_0 \\ V_0 \end{pmatrix}.$$

Хотелось бы понять на устойчивость такого действия системы на луч, для этого посмотрим на

$$\begin{pmatrix} y_{m+1} \\ V_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_m \\ V_m \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_{m+1} = Ay_m + Bv_m \\ v_{m+1} = Cy_m + Dv_m \end{cases} \Rightarrow V_m = \frac{y_{m+1} - Ay_m}{B},$$

теперь можем, забыв про  $V$ , говорить про  $y_m$

$$\frac{y_{m+1} - Ay_{m+1}}{B} = Cy_m + \frac{D(y_{m+1} - Ay_m)}{B}, \quad \Rightarrow \quad y_{m+2} - Ay_{m+1} = BCy_m + D(y_{m+1} - Ay_m)$$

и, наконец,

$$y_{m+2} - (A + D)y_{m+1} + (\overbrace{AD}^{BC})y_m = 0,$$

которое решается также, как и диффур, подстановкой  $y_m = y_0 h^m$ , тогда

$$y_m = y_0 h^m, \quad \Rightarrow \quad h^2 - (A + D)h + 1 = 0,$$

считая  $\text{tr } M = A + D \stackrel{\text{def}}{=} 2b$ , находим, что

$$h^2 - 2bh + 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad h_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - 1}$$

что приводит нас к некоторому к следующей классификации

$|b| > 1$  – неустойчивый режим

$|b| = 1$  – граница

$|b| < 1$  – устойчивость

Рассмотрим  $b < 1$  и для удобства положим  $b = \cos \varphi$ , тогда

$$h_{1,2} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi = e^{\pm i\varphi}, \quad \Rightarrow \quad y_m = \alpha_1 e^{im\varphi} + \alpha_2 e^{-im\varphi} = \underline{y_{\max}} \sin(m\varphi + \underline{\varphi_0}),$$

где подчеркнутые параметры определяются начальными условиями.

Стоит заметить, что хотелось бы  $\theta_m$  периодической.

### Пример 2

См. рис. 03.2, блокнот 3. Получаем  $b$

$$b = \frac{2 - f/F}{2}, \quad |b| < 1, \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{d}{F} < 4.$$

Пусть  $d = F$ , тогда  $b = 1/2$ , соответственно  $b = \cos \varphi$ , и  $\varphi = \pi/3$ , получается система будет периодичной.

При  $d = 2F$ ,  $b = 0$ . При  $d = 0$  получим одну линзу. При  $d = 4F$  будем понятная картинка.

**Пример 3 (Оптический резонатор)**

Матрица будет выглядеть так (см. Блокнот). Тогда  $b$

$$b = 2 \underbrace{\left(1 + \frac{L}{R_1}\right)}_{g_1} \underbrace{\left(1 + \frac{L}{R_2}\right)}_{g_2} - 1,$$

и рассмотрим  $0 \leq g_1 g_2 \leq 1$ .

Другой случай это симметричный кофокальный резонатор, тогда  $R_1 = -L$ , и  $R_2 = -L$ .