

ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА II»

Авторы: Хоружий Кирилл

От: 4 мая 2021 г.

Содержание

1 Второе задание по аналитической механике	2
1.1 Функция Гамильтона и канонические уравнения	2
1.2 Элементы теории детерминированного хаоса и КАМ-теории	4

1 Второе задание по аналитической механике

1.1 Функция Гамильтона и канонические уравнения

19.9

Найдём гамильтониан системы, и составим канонические уравнения движения механической системы, с лагранжианом вида

$$L = \frac{1}{2} ((\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^2 + a\dot{q}_1^2 t^2) - a \cos q_2.$$

Что ж, выразим импульсы, через обобщенные скорости

$$\begin{cases} p_1 = \partial_{\dot{q}_1} L &= \dot{q}_1 - \dot{q}_2 + q\dot{q}_1 t^2, \\ p_2 = \dots &= \dot{q}_2 - \dot{q}_1 \end{cases} \Rightarrow \quad \dot{q}_1 = \frac{p_1 + p_2}{at^2}, \quad \dot{q}_2 = \frac{p_1 + p_2(1 + at^2)}{at^2}.$$

И получим функцию Гамильтона

$$H = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - L = \frac{(p_1 + p_2)^2}{2at^2} + a \cos q_2 - \frac{p_2^2}{2}.$$

Канонические уравнения системы:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{p_1 + p_2}{at^2}, \\ \dot{q}_2 &= \frac{p_1 + p_2}{at^2} - p_2, \\ \dot{p}_1 &= 0, \\ \dot{p}_2 &= a \sin(q_2). \end{aligned}$$

19.15

Решим обратную задачу, попробуем найти лагранжиан механической системы, гамильтониан которой имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \frac{p_1^2 + p_2^2}{q_1^2 + q_2^2} + a(q_1^2 + q_2^2).$$

Для начала перейдём к обобщенным скоростям

$$\dot{q}_1 = \frac{p_1}{q_1^2 + q_2^2}, \quad \dot{q}_2 = \frac{p_2}{q_1^2 + q_2^2}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_1 = (q_1^2 + q_2^2)\dot{q}_1, \\ p_2 = (q_1^2 + q_2^2)\dot{q}_2. \end{cases}$$

Лагранжиан же примет вид

$$L = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - H = \left[\frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - a \right] (q_1^2 + q_2^2).$$

19.32

Найдём гамильтониан для двойного маятника, состоящего из двух одинаковых стержней массы m и для l .

Координаты центар масс стержней:

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{l}{2} \cos \alpha_1, & x_1 &= \frac{l}{2} \sin \alpha_1, \\ h_2 &= l \cos \alpha_1 + \frac{l}{2} \cos \alpha_2, & x_2 &= l \sin \alpha_1 + \frac{l}{2} \sin \alpha_2. \end{aligned}$$

Тогда кинетическая и потенциальная энергия системы

$$\Pi = mg(h_1 + h_2), \quad T = \frac{m}{2} l^2 (\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2) + \frac{m}{24} (\dot{x}_1^2 + \dot{h}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{h}_2^2).$$

Подставляя координаты, находим

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{6} l^2 m (4\alpha_1'^2 + \alpha_2'^2 + 3\alpha_2' \alpha_1' \cos(\alpha_1 - \alpha_2)), \\ \Pi &= gm \left(\frac{3}{2} l \cos(\alpha_1) + \frac{1}{2} l \cos(\alpha_2) \right), \end{aligned}$$

что не так плохо, как могло бы быть. Для консервативной системы с адекватными связями

$$H = E = T + \Pi, \quad L = T - \Pi, \quad \begin{aligned} p_1 &= \partial_{\dot{q}_1} L, \\ p_2 &= \partial_{\dot{q}_2} L. \end{aligned}$$

Ну, подставляя координаты, находим

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{6} l^2 m (8\dot{\alpha}_1 + 3\dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)), & \dot{\alpha}_1 &= \frac{12(3p_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - 2p_1)}{l^2 m (9 \cos(2(\alpha_1 - \alpha_2)) - 23)}, \\ p_2 &= \frac{1}{6} l^2 m (2\dot{\alpha}_2 + 3\dot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)), & \dot{\alpha}_2 &= \frac{12(3p_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - 8p_2)}{l^2 m (9 \cos(2(\alpha_1 - \alpha_2)) - 23)}. \end{aligned}$$

Возможно, после подстановки станет в гамильтониан станет лучше:

$$H = -mg \frac{l}{2} [3 \cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)] + \frac{1}{ml^2} \frac{6(p_1^2 - 3p_1 p_2 \cos(q_1 - q_2) + 4p_2^2)}{(9 \sin^2(q_1 - q_2) + 7)}$$

И канонические уравнения ($\alpha_1 = q_1, \alpha_2 = q_2$):

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{12(3p_2 \cos(q_1 - q_2) - 2p_1)}{l^2 m (9 \cos(2(q_1 - q_2)) - 23)}, \\ \dot{q}_2 &= \frac{12(3p_1 \cos(q_1 - q_2) - 8p_2)}{l^2 m (9 \cos(2(q_1 - q_2)) - 23)}, \\ \dot{p}_1 &= -\frac{3}{2} glm \sin(q_1) - \frac{36 \sin(q_1 - q_2) (p_1 p_2 (9 \cos(2(q_1 - q_2)) + 41) - 12(p_1^2 + 4p_2^2) \cos(q_1 - q_2))}{l^2 m (23 - 9 \cos(2(q_1 - q_2)))^2}, \\ \dot{p}_2 &= -\frac{1}{2} glm \sin(q_2) - \frac{36 \sin(q_1 - q_2) (12(p_1^2 + 4p_2^2) \cos(q_1 - q_2) - p_1 p_2 (9 \cos(2(q_1 - q_2)) + 41))}{l^2 m (23 - 9 \cos(2(q_1 - q_2)))^2}. \end{aligned}$$

Гамильтониан сходится с приведенным в ответах, что не может не радовать.

19.69

Тяжелое колечко массы m скользит по гладкой проволочной окружности массы M и радиуса r , которая может вращаться вокруг своего вертикального диаметра. Составим уравнения движения системы в форме уравнений Рауса (выбрав такие обобщенные скорости, чтобы всё сошлось):

$$\Pi = mgR \cos \psi, \quad T = \frac{m}{2} \left((\dot{\varphi} R \sin \psi)^2 + (\dot{\psi} R)^2 \right) + \frac{MR^2}{2} \frac{\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Лагранжиан знаем, как $L = T - \Pi$, функцию Рауса через

$$R(\psi, \varphi, \dot{\psi}, p_\varphi) = p_\varphi \dot{\varphi} - L(\psi, \varphi, \dot{\psi}, p_\varphi),$$

Находя из $p_\varphi = \partial_{\dot{\varphi}} L$ значение $\dot{\varphi}$, находим функцию Рауса

$$\dot{\varphi} = \frac{2p_\varphi}{r^2(M + 2m \sin^2 \psi)}, \quad \Rightarrow \quad R = mgR \cos \psi - \frac{mR^2}{2} \dot{\psi}^2 + \frac{p_\varphi^2}{R^2(M + 2m \sin^2 \psi)}.$$

19.70

В сферических координатах лагранжиан релятивистской частицы в поле тяготения имеет вид

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta}{c^2}} + \frac{G}{r}.$$

Найдём соответствующую функцию Рауса. Аналогично предыдущей задаче, из $p_\varphi = \partial_{\dot{\varphi}} L$ находим $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = \pm \frac{p_\varphi}{r \sin \theta} \sqrt{\frac{c^2 - \dot{r}^2 - \dot{\theta}^2 r^2}{p_\varphi^2 + c^2 m^2 r^2 \sin^2 \theta}},$$

что подставляем в выражение для функции Рауса $R = p_\varphi \dot{\varphi} - L$, откуда получаем

$$R = m_0 c^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2}{c^2}\right) \left(1 + \frac{p_\varphi^2}{m_0^2 c^2 r^2 \sin^2 \theta}\right)} - \frac{G}{r}.$$

19.72

Для системы с лагранжианом вида

$$L = \frac{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + q_1^2 \dot{q}_3^2}{2} - \frac{q_1^2 + q_2^2}{2}.$$

Сразу перепишем это в терминах (q, p) разбив на кинетическую и потенциальную энергии:

$$T = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2/q_1^2}{2}, \quad \Pi = \frac{q_1^2 + q_2^2}{2}.$$

Осталось сказать, что $T + \Pi = H = h = \text{const}$, и найти

$$p_3 = K = \pm q_1 \sqrt{2h - (p_1^2 + p_2^2) - (q_1^2 + q_2^2)}.$$

Теперь выпишем уравнения Гамильтона

$$\dot{q}_1 = \partial_{p_1} H, \quad \dot{p}_1 = -\partial_{q_1} H, \quad \dot{q}_i = \partial_{p_i} H, \quad \dot{p}_i = -\partial_{q_i} H.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dq_2}{dq_1} &= \frac{\partial K}{\partial p_2} = -\frac{p_2 q_1}{\sqrt{2h - p_1^2 - p_2^2 - q_1^2 - q_2^2}}, \\ \frac{dp_2}{dq_1} &= -\frac{\partial K}{\partial q_2} = \frac{q_1 q_2}{\sqrt{2h - p_1^2 - p_2^2 - q_1^2 - q_2^2}}. \end{aligned}$$

1.2 Элементы теории детерминированного хаоса и КАМ-теории

T19

Для гамильтоновой системы $H_0 = 7I_1 - I_2$ найдём уравнения движения $x(t) = \sqrt{2I_1} \cos \varphi_1$, $y = \sqrt{2I_1} \sin \varphi_1$, при наложении возмущения εH_1 , с

$$\begin{aligned} 1) \quad H_1 &= \sqrt{2I_1} \cos \varphi_1 \cos 6\varphi_2 = \frac{\sqrt{2I_1}}{2} [\cos(\varphi_1 + 6\varphi_2) + \cos(\varphi_1 - 6\varphi_2)] \\ 2) \quad H_1 &= \sqrt{2I_1} \cos \varphi_1 \cos 7\varphi_2 = \frac{\sqrt{2I_1}}{2} [\cos(\varphi_1 + 7\varphi_2) + \cos(\varphi_1 - 7\varphi_2)]. \end{aligned}$$

Система является вырожденной в терминах

$$\left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j} \right| = 0,$$

т.к. $\omega_1 = \partial_{I_1} H_0 = 7 = \text{const}$, $\omega_2 = \partial_{I_2} H_0 = -1 = \text{const}$. По аналогичным причинам

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{I}^T \partial \mathbf{I}} & \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

то есть ω_2/ω_1 не зависит I_1, I_2 .

Первый случай. Так как возмущение явно периодически, то можем попробовать найти новые хорошие переменные через производящую функцию S , вида

$$S = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \varepsilon S_1, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \psi = \varphi + \varepsilon \partial_I S \\ J = I + \varepsilon \partial_\varphi S \end{cases}$$

Саму функцию ищем в виде

$$S = \sum_i S_i \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}) = S_1 \sin(\varphi_1 + 6\varphi_2) + S_2 \sin(\varphi_1 - 6\varphi_2).$$

Вспоминая, что $\partial_I H_0 \cdot \partial_\varphi S = -[H_1(I, \varphi)]_{\text{период}}$, находим

$$S_1 = \frac{\sqrt{2I_1}}{2(7-6)}, \quad S_2 = \frac{\sqrt{2I_1}}{2(7+6)}.$$

Теперь можем найти новые переменные

$$\psi_1 = \varphi_1 + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2I_1}} \sin(\varphi_1 + 6\varphi_2) + \varepsilon \frac{\sqrt{2I_1}}{26} \sin(\varphi_1 - 6\varphi_2),$$

$$\psi_2 = \varphi_2,$$

$$J_1 = I_1 + \frac{\varepsilon\sqrt{2I_1}}{2} \cos(\varphi_1 + 6\varphi_2) + \frac{\varepsilon\sqrt{2I_1}}{26} \cos(\varphi_1 - 6\varphi_2),$$

с новым гамильтонианом $\hat{H} = 7J_1 - J_2 + o(\varepsilon)$, $J_1, J_2 = \text{const}$, и $\psi_1 = 7t + C_1$, $\psi_2 = -t + C_2$. Выражение для второго интеграла системы содержит I_2 , поэтому нам неинтересно.

Осталось выразить I_1 и φ_1 в терминах x, y :

$$\varphi_1 = \arctg \frac{y}{x}, \quad x^2 + y^2 = 2I_1,$$

а также (считая константы нулевыми), подставляя x, y в уравнения

$$\psi_1 = \varphi_1 + \frac{\varepsilon}{4I_1} \left(\frac{14}{13} y \cos 6t - \frac{12}{13} x \sin 6t \right) = \arctg \frac{y}{x} + \frac{\varepsilon}{13} \frac{1}{x^2 + y^2} [7y \cos(6t) - 6x \sin(6t)].$$

Аналогично для выражения J_1 :

$$J_1 = I_1 + \frac{\varepsilon}{13} [7x \cos(6t) + 6y \sin(6t)].$$

Итоговая система для $x(t)$ и $y(t)$ получилась вида

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{\varepsilon}{13} [7x \cos(6t) + 6y \sin(6t)], \\ 7t &= \arctg \frac{y}{x} + \frac{\varepsilon}{13} \frac{1}{x^2 + y^2} [7y \cos(6t) - 6x \sin(6t)], \end{aligned}$$

которую можно уже и не решать.

Второй случай. Если повторить рассуждения первого случая, то увидим деление на 0 в выражение для S_1 , однако производящую функцию вида

$$S = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\varphi} + S_2, \quad S_2 = \frac{\sqrt{2I_1}}{28},$$

всё можем рассмотреть, чтобы избавиться от одной из возмущающих гармоник.

Новые переменные будут вида

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_1 + \frac{\varepsilon}{28\sqrt{2I_1}} \sin(\varphi_1 - 7\varphi_2), \\ \psi_2 &= \varphi_2, \\ J_1 &= I_1 + \frac{\varepsilon\sqrt{2I_1}}{28} \cos(\varphi_1 - 7\varphi_2), \\ J_2 &= I_2 - \frac{\varepsilon\sqrt{2I_1}}{4} \cos(\varphi_1 - 7\varphi_2), \end{aligned}$$

с новым гамильтонианом вида

$$\hat{H} = 7J_1 - J_2 + \frac{\varepsilon\sqrt{2J_1}}{2} \cos(\psi_1 + 7\psi_2) + o(\varepsilon).$$

В таком случае уравнения движения могут быть записаны, как

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \partial_{J_1} \hat{H} = 7 + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2J_1}} \cos(\psi_1 + 7\psi_2), \\ \dot{\psi}_2 &= -1, \\ \dot{J}_1 &= \varepsilon \frac{\sqrt{2I_1}}{2} \sin(\psi_1 + 7\psi_2), \end{aligned}$$

а J_2 нас как и раньше не интересует.

Пристально взглянув на систему понимаем, что хорошая затея ввеси переменные $\gamma = \psi_1 + 7\psi_2$ и $\varkappa = \sqrt{2J_1}$, что приводит к системе замечательного вида

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \frac{\varepsilon}{2\varkappa} \cos \gamma, \\ \dot{\varkappa} = \frac{\varepsilon}{2} \sin \gamma, \end{cases} \Rightarrow \frac{d\gamma}{d\varkappa} = \frac{1}{\varkappa \operatorname{tg} \gamma}, \Rightarrow \ln \varkappa = -\ln \cos \gamma + \tilde{C}, \Rightarrow \boxed{\varkappa = \frac{C}{\cos \gamma}}.$$

Подставляя это в уравнения движения, находим

$$\varkappa = C \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{2C} t \right)^2}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \left(\frac{\varepsilon}{2C} t \right).$$

Теперь можно пройти обратную цепочку $\{\gamma, \varkappa\} \rightarrow \{J_1, \psi_1\} \rightarrow \{I_1, \varphi_1\} \rightarrow \{x(t), y(t)\}$, и найти искомые решения уравнений движения.

Т20

Для следующих четырёх гамильтоновых систем оценим меру устойчивых, или неустойчивых траекторий к возмущениям εH_1 при малых ($0 < \varepsilon \ll 1$). Также построим графики линий уровня $H_0(I_1, I_2)$ и отложим на них ω : $\omega_2 = \text{const}$.

Первый случай. Для гамильтониана и возмущения

$$H_0 = 42I_1^2 + I_1I_2 + 42I_2^2, \quad H_1 = 2I_1 \sin(3\varphi_1 - 18\varphi_2),$$

можем перейти к переменным \mathbf{J} , $\boldsymbol{\psi}$ через производящую функцию вида

$$S + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \varepsilon \frac{18}{5} \frac{2I_1}{84I_1 + I_2} \cos(3\varphi_1 - 18\varphi_2),$$

к гамильтониану $\hat{H} = H_0(J_1, J_2)$, и, соответственно ограниченными I_1, I_2 .

Система с H_0 является невырожденной

$$\left| \frac{\partial^2 H}{\partial I_i \partial I_j} \right| = \begin{pmatrix} 84 & 1 \\ 1 & 84 \end{pmatrix} \neq 0,$$

а также изоэнергетически невырожденной

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{I}^T \partial \mathbf{I}} & \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & 1 & 84I_1 + I_2 \\ 1 & 84 & 84I_2 + I_1 \\ 84I_1 + I_2 & 84I_2 + I_1 & 0 \end{pmatrix} = 14110(42I_1^2 + I_1I_2 + 42I_2^2) \sim H_0 > 0.$$

Таким образом мера траекторий, неустойчивых к возмущениям, равна нулю (а вообще выше мы показали, что их здесь нет).

Второй случай.

T22

Вычислим хаусдорфову размерность для обобщения кривой Коха, с углом между линиями θ . Примеры построения кривой на разных шагах приведены на рисунке 1. Для начала поймём, что на n -ном шаге всего

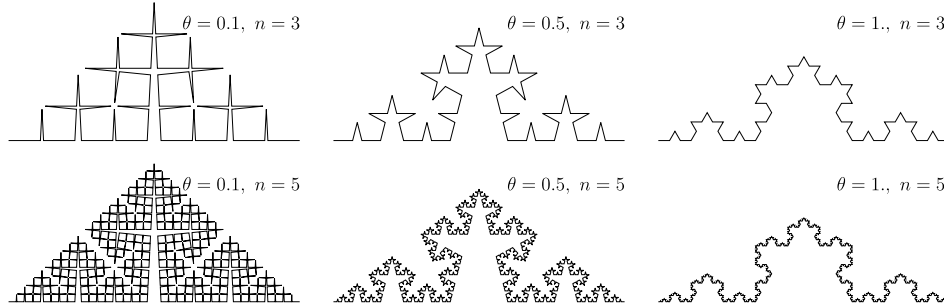


Рис. 1: Кривая из T22 при разных параметрах θ, n

будет $N = 4^n$ звеньев, длины ρ каждый. Понятно, что

$$\sin \frac{\theta}{2} = \left(\frac{\rho_n - 2\rho_{n+1}}{2} \right) / \rho = \frac{\rho_n}{2\rho_{n+1}} - 1, \quad \Rightarrow \quad \rho_n = \frac{\rho_0}{[2 + 2\sin(\theta/2)]^n}.$$

Длину кривой мы можем найти, как $N(\varepsilon)$ отрезков длины $\varepsilon = \rho$, тогда искомая размерность кривой

$$\dim(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln [2(1 + \sin \theta/2)]^n} = \frac{\ln 4}{\ln 2 + \ln [1 + \sin \frac{\theta}{2}]},$$

что любопытно рассмотреть на некоторых частных случаях.

В частности, что также видно из построения, при $\theta = 0$ кривая превратится в некоторое покрытие плоскости уменьшающейся сеткой, и $\dim(\theta = 0) = 2$. При $\theta = \pi/3$ мы придём к кривой Коха, с размерностью $\dim(\theta = \pi/3) = \ln 4 / \ln 3 \approx 1.26$, рисунок которой приведен посередине (1). Наконец, при $\theta = \pi$ мы после каждой итерации будем получать прямую, и $\dim(\theta = \pi) = 1$.

В случае, если мы будем говорить о размерности фигуры под рассматриваемой кривой, то обнаружим, что площадь на n -ной итерации может быть найдена, как

$$S_n = \frac{1}{2} \rho_0^2 \sin \theta \left[\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n} \right], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{24} \rho_0^2 \sin \theta,$$

таким образом нас интересует размерность плоской фигуры конечной площади, $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-2} \Rightarrow \dim = 2$.