Заметки курса «Современная оптика»

Лектор: Колдунов Л. М.

Восторженные слушатели: Хоружий К.
Примак Е.

От: *26 апреля 2021 г.*

Содержание

1 Геометрическая оптика

1.1 Волновое уравнение

В общем оптика устроена как-то так: ГО $\subset$ ВО $\subset$ ЭО $\subset$ КО. Вспомним уравнения Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \dfrac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} \boldsymbol{B} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

Будем считать, что нет свободных токов и зарядов. Как вариант, можно найти решение в виде

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp\left(i\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right).$$

Важно, что верны формально замены

$$\frac{\partial}{\partial t} \to i\omega, \qquad \begin{cases} \partial_x \to -ik_x, \\ \partial_y \to -ik_y, \\ \partial_z \to -ik_z, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nabla \to -i\boldsymbol{k}, \qquad \nabla^2 \to -k^2.$$

Приходим к уравнению вида

$$-k^2\boldsymbol{E} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\omega^2\boldsymbol{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}, \quad \to \quad \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{n}.$$

Можем посмотреть на $\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = \mathrm{const}$. Тогда

$$\omega\, dt - k\, dz = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

1.2 Уравнения эйконала

1. Свет распространяется в виде лучей.
2. Среда характеризуется показателем преломления n, более того[1] $c_{\text{ср}} = c/n$.
3. $\int n\, dl \to \min$ (принцип Ферма).

Def 1.1. *Оптический путь* можем определить, как

$$S = \int_A^B n(\boldsymbol{r})\, dl.$$

Посмотрим на уравнение

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad E(\boldsymbol{r}, t) = a(\boldsymbol{r})\exp\left(ik_0\Phi(\boldsymbol{r}) - i\omega t\right),$$

где $\Phi(\boldsymbol{r})$ называем *эйконалом*, а a - амплитуда.

Тогда формально получаем следующее:

$$\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega, \ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \to -\omega^2, \qquad \frac{\partial}{\partial x}E = a'_x \exp(\ldots) + a(\boldsymbol{r})ik_0\,\Phi'_x \exp(\ldots),$$

И для второй производной

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = a''_{xx}\exp(\ldots) + 2ik_0 a'_x \Phi'_x \exp(\ldots) + ik_0 a\Phi''_{xx}\exp(\ldots) - a(\boldsymbol{r})k_0^2|\Phi'_x|^2\exp(\ldots).$$

Таким образом нашли ΔE

$$\nabla^2 E = \nabla^2 a\exp(\ldots) - a(\boldsymbol{r})k_0^2|\operatorname{grad}\Phi|^2\exp(\ldots) + i\left(2k_0(\operatorname{grad} a, \operatorname{grad}\Phi) + k_0 a\nabla^2\Phi\right)\exp(\ldots).$$

Внимательно посмотрели на волновое уравнение, решили сгруппировать вещественную часть и мнимую

$$\nabla^2 a\exp(\ldots) - a(\boldsymbol{r})k_0^2|\operatorname{grad}\Phi|^2\exp(\ldots) + \frac{\omega^2}{c^2}n^2 a\exp(\ldots) = 0, \quad \Rightarrow \quad |\operatorname{grad}\Phi|^2 = \underbrace{\frac{1}{al_0^2}\nabla^2 a}_{\text{изм. ампл.}} + n^2.$$

[1] Будем считать, что лучу нужно проходить больший оптический путь.

Ну, будем считать, что (настоящая область применимости волновой оптики)

$$\left|\lambda \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right| \ll \left|\frac{\partial a}{\partial x}\right|, \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|\lambda \frac{\partial a}{\partial x}\right| \ll a, \qquad \lambda \to 0.$$

И приходим к *уравнению Эйконала*

$$\boxed{|\operatorname{grad}\Phi| = n.} \tag{1.1}$$

Ещё раз вспомним, что волновой фронт имеет вид

$$\omega t - k_0 \Phi = \text{const}.$$

Запишем, что (живём вдоль $\boldsymbol{S}$)

$$\operatorname{grad}\Phi = n\boldsymbol{S}, \qquad \|\boldsymbol{S}\| = 1, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial S} = n.$$

Тогда

$$\omega\, dt - k_0\, d\Phi = 0, \quad \Rightarrow \quad \omega\, dt = k_0\, d\Phi = k_0 \frac{\partial \Phi}{\partial S}\, dS = k_0 n\, dS.$$

1.3 Принцип Ферма

Пусть Φ – однозначно задан, тогда

$$\operatorname{grad}\Phi = n\boldsymbol{S}, \quad \Rightarrow \quad \oint n\boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{l} = 0, \quad \Rightarrow \quad \int_{ACB} n\boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{ADB} n\boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{l}.$$

Но $\boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{l} = S\, dl = dl$ на ACB. Тогда

$$\int_{ACB} n\, dl = \int_{ADB} n\boldsymbol{S} \cdot d\boldsymbol{l} \leqslant \int_{ADB} n\, dl.$$

Что доказывает принцип Ферма.

1.4 Траектория луча (?)

Для луча верно, что

$$n\boldsymbol{S} = \operatorname{grad}\Phi, \qquad |d\boldsymbol{r}| = dl, \qquad \boldsymbol{S} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dl}.$$

В таком случае верно, что

$$n\frac{d\boldsymbol{r}}{dl} = \operatorname{grad}\Phi, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dl}(n\frac{d\boldsymbol{r}}{dl}) = \frac{d}{dl}\operatorname{grad}\Phi = \operatorname{grad}\frac{d\Phi}{dl} = \operatorname{grad} n.$$

Получили *уравнение траектории луча*

$$\boxed{\frac{d}{dl}\left(n\frac{d\boldsymbol{r}}{dl}\right) = \operatorname{grad} n}. \tag{1.2}$$

Например, в однородной среде

$$n = \text{const}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dl^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}l + \boldsymbol{b}.$$

Можно сделать ещё так (найти кривизну траектории?)

$$\boldsymbol{S}\frac{dn}{dl} + n\frac{d\boldsymbol{S}}{dl} = \nabla n, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{S}}{dl} = \frac{1}{n}\left(\nabla n - \boldsymbol{S}\frac{dn}{dl}\right).$$

Получаем (вспомнив трёхгранник Френе)

$$\frac{\boldsymbol{N}}{R} = \frac{1}{n}\left(\nabla n - \boldsymbol{S}\frac{dn}{dl}\right), \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{N^2}{R} = \frac{(\boldsymbol{N} \cdot \nabla n)}{n},$$

или

$$(\boldsymbol{N} \cdot \nabla n) > 0, \quad \Rightarrow \quad \text{луч поворачивает в} \uparrow n. \tag{1.3}$$

1.5 Уравнение луча в параксиальном приближение

Пусть есть некоторая $n(y)$. Пусть луч движется $\theta(y)$, рассмотрим ситуацию преломления, тогда

$$n(y)\cos\theta(y) = n(y + dy)\cos\theta(y + dy), \quad \Rightarrow \quad \left(n(y) + \frac{dn}{dy}\Delta y\right)(\cos\theta(y) - \sin\theta(y)).$$

Раскрыв скобки, получим

$$n(y)\cos\theta(y) = n(y)\cos\theta(y) + \frac{dn}{dy}\cos\theta(y)\Delta y - n(y)\sin\theta(y)\frac{d\theta}{dy}\Delta y.$$

Запишем чуть аккуратнее:

$$\frac{dn}{dy}\cos\theta(y) = n(y)\sin\theta(y)\frac{d\theta}{dy},$$

Считая, что $\sin\theta(y) \approx \theta(y) = dy/dx$, тогда

$$\frac{1}{n}\frac{dn}{dy} = \operatorname{tg}\theta\frac{d\theta}{dy} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \Rightarrow \quad y''_{xx} = \frac{1}{n}\frac{dn}{dy}. \tag{1.4}$$

1.6 Пример слоистой среды

Рассмотрим вещество с коммерческим названием SELFOC и переменным показателем преломления вида

$$n^2 = n_0^2(1 - \alpha^2 y^2)$$

Считая $\alpha y \ll 1$, подставляя в уравнение луча находим, что

$$y''_{xx} = \frac{1}{n_0(1-\alpha^2y^2)^{1/2}}\frac{dn}{dy} = \frac{-n_0\alpha^2 y}{n_0} = -\alpha^2 y,$$

и мы снова всё свели к гармоническому осциллятору.

Нужно ещё разобрать мнимую часть, в которой сидит факт об отсутствии взаимодействия лучей.

2 Матричная оптика

Будем рассматривать оптически центрированные системы, введем нормально к OX ось OY. Всё у нас аксиально симметрично, тогда луч можно характеризовать

$$\{y_1, \theta_1\} \to \{y_1, n_1\theta_1\},$$

где принято обозначение $n\theta \overset{\text{def}}{=} V$.

Вообще после прохождения оптической системы можем записать, что происходит некоторое линейное преобразование

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_1\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\theta_1 \end{pmatrix}.$$

2.1 Матрица перемещения

Пусть луч распространяется в однородной среде, под θ_1 распространяется, тогда $\theta_2 = \theta_1$. Что произошло с y? Ну, $y_2 = y_1 + l\theta_1$, тогда

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_2\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\theta_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где соответствующую матрицу обозначим за T.

2.2 Матрица преломления на сферической поверхности

Есть некоторая ось OX, будем считать радиус кривизны положительным, если он идёт направо. Смотреть рис. O2.1. Верно, что

$$n_1\beta_1 = n_2\beta_2, \qquad \beta_1 = \theta_1 + \alpha, \qquad \beta_2 = \theta_2 + \alpha.$$

Тогда,

$$\alpha = \frac{y_1}{R}, \quad \Rightarrow \quad n_2\theta_2 = n_1\theta_1 + (n_1 - n_2)\frac{y_1}{R}, \quad \Leftrightarrow \quad V_2 = V_1 + \frac{n_1 - n_2}{R} y_1.$$

Теперь можем записать матрицу преломления P

$$P(y, V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix}, \qquad P(y, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где $(n_2 - n_1)/R$ называют *оптической силой.*

2.3 Общий подход

Пусть есть схема рис. 02.2, тогда

$$\underbrace{M_3 M_2 M_1}_{M} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}, \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{a} = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} \boldsymbol{b}.$$

Посмотрим на коэффициенты, приравнивая их к 0. Пусть

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix},$$

тогда $\theta_2 = cy_1$, тогда при $D = 0$, получается, что $O\Pi_1$ – фокальная плоскость (слева).

Пусть $B = 0$, тогда $y_2 = Ay_1$, тогда это изображение, и говорим, что эти *плоскости сопряженные*, а коэффициент A – *коэффициент поперечного увеличения.*

Пусть $C = 0$, тогда $\theta_2 = \theta_1 D$, что соответствует телескопической системой, а коэффициент D – *коэффициент углового увеличения.*

Теперь рассмотрим $A = 0$, получается, что это фокальная плоскость справа.

2.4 Задачи

Пример №0

Рассмотрим преломление на первой границе, где

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{nR_1} & 1/n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} + \frac{1-n}{R_1} & 1 \end{pmatrix},$$

получается оптическая сила системы получилась равной

$$(n-1)\left(-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right),$$

согласно определению.

Найдём теперь после линзы изображение объекта (рис. O2.4)

$$\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1/F & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{b}{F} & b\\ -\frac{1}{F} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-b/F & a(1-b/F)+b\\ -1/F & -a/F+1\end{pmatrix}.$$

Для сопряженности плоскостей необходимо и достаточно, чтобы $B=0$, то есть

$$a+b-\frac{ab}{F}=0,\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}.$$

Тогда увеличение можно увидеть в $A=1-b/F$.

Пример №2

Показатель преломления $n=1.56$, высота стрелки $h=2$ мм, в переменных (y,V) запишем (см. рис. 02.5)

$$\begin{pmatrix}1 & x/n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -0.56/2.8 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 15\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{x}{7.8} & 15-\frac{x}{0.78}\\ -0.2 & -2\end{pmatrix},$$

требуя сопряженности плоскостей

$$15-\frac{x}{0.78}=0,\quad\Rightarrow\quad x=11.7\ \text{см}.$$

Коэффициент увеличения а-ля $1/D$, то есть равен $-1/2$.

Пример №4

Параллельный пучок света проходит через шарик радиуса $R=1$ см, с показателем преломления $n=1.4$.

С шариком $n=2$ луч собирается на полюсе шарика. В общем случае

$$\begin{pmatrix}1 & F\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{-(1-n)}{-R} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{2R}{n}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{n-1}{R} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2F(n-1)+(n-2)R}{nR} & \frac{F(-n)+2F+2R}{n}\\ \frac{2-2n}{nR} & \frac{2}{n}-1\end{pmatrix},$$

тогда

$$-2F(n-1)=R(n-2).$$

Пример №11

См. рис. O2.5. Пусть оптические силы P_1 и P_2, а расстояние l, тогда

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{F_2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & l\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{F_1} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{l}{F_1} & l\\ -\frac{F_1+F_2-l}{F_1F_2} & 1-\frac{l}{F_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-P_1 & l\\ P_1+P_2-P_1P_2l & 1-P_2\end{pmatrix}.$$

Давайте считать $1/F=(n-1)G$. Хочется избавиться от зависимости от n. Тогда

$$l=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)G_1}+\frac{1}{(n-1)G_2}\right)=\frac{F_1+F_2}{2}.$$

3 Матричная оптика (Продолжение)

Обобщение на случай отражения

Была некоторая матрица преломления

$$P(y,V)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{n_2-n_1}{R} & 1\end{pmatrix},$$

и матрица распространения

$$T=\begin{pmatrix}1 & l/n\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

В случае отражения видимо хочется заменить $n\to -n$. Знак θ определяется, как вниз, или вверх.

Пусть теперь $n_1 = n$, $n_2 = -n$, тогда матрица отражения

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(-n-n)/r & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n/r & 1 \end{pmatrix}.$$

Так фокусное расстояние для сферического зеркала $R/2$, что логично. В случае же, если мы захотим следить за направлениями осей, то можно вернуться к переменным $\{z, \theta\}$.

Пример 1 (плоскопараллельная пластина)

Пусть есть пластинка толшины h, то

$$\begin{pmatrix} 1h/n & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} 1 & hN/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 2 (плоскопараллельная пластина)

Задача 13, см. рис. 03.1, блокнот 3, что позволяет построить матрицу отражения. Если добавить распространения в воздухе, то можно поговорить про фокальные плоскости.

3.1 Периодические оптические системы

Пусть есть некоторая периодическая система с матрицей $ABCD$, действующая на луч $\{y_0, V_0\}$

$$\begin{pmatrix} y_m \\ V_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} y_0 \\ V_0 \end{pmatrix}.$$

Хотелось бы понять на устойчивость такого действия системы на луч, для этого посмотрим на

$$\begin{pmatrix} y_{m+1} \\ V_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_m \\ V_m \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_{m+1} = Ay_m + Bv_m \\ v_{m+1} = Cy_m + Dv_m \end{cases} \quad \Rightarrow \quad V_m = \frac{y_{m+1} - Ay_m}{B},$$

теперь можем, забыв про V, говорить про y_m

$$\frac{y_{m+1} - Ay_{m+1}}{B} = Cy_m + \frac{D(y_{m+1} - Ay_m)}{B}, \quad \Rightarrow \quad y_{m+2} - Ay_{m+1} = BCy_m + D(y_{m+1} - Ay_m)$$

и, наконец,

$$y_{m+2} - (A+D)y_{m+1} + \cancelto{1}{(AD - BC)}y_m = 0,$$

которое решается также, как и диффур, подстановкой $y_m = y_0 h^m$, тогда

$$y_m = y_0 h^m, \quad \Rightarrow \quad h^2 - (A+D)h + 1 = 0,$$

считая $\operatorname{tr} M = A + D \overset{\text{def}}{=} 2b$, находим, что

$$h^2 - 2bh + 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad h_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - 1}$$

что приводит нас к некоторому к следующей классификации

$|b| > 1$ – неустойчивый режим

$|b| = 1$ – граница

$|b| < 1$ – устойчивость

Рассмотрим $b < 1$ и для удобства положим $b = \cos\varphi$, тогда

$$h_{1,2} = \cos\varphi \pm i \sin\varphi = e^{i\varphi}, \quad \Rightarrow \quad y_m = \alpha_1 e^{im\varphi} + \alpha_2 e^{-im\varphi} = \underline{y_{\max}} \sin(m\varphi + \underline{\varphi_0}),$$

где подчеркнутые параемтры определяются начальными условиями.

Стоит заметить, что хотелось бы θ_m периодической.

Пример 2

См. рис. O3.2, блокнот 3. Получаем b

$$b = \frac{2 - f/F}{2}, \quad |b| < 1, \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{d}{F} < 4.$$

Пусть $d = F$, тогда $b = 1/2$, соответственно $b = \cos\varphi$, и $\varphi = \pi/3$, получается система будет периодичной.

При $d = 2F$, $b = 0$. При $d = 0$ получим одну линзу. При $d = 4F$ будем понятная картинка.

Пример 3 (Оптический резонатор)

Матрица будет выглядеть так (см. Блокнот). Тогда b

$$b = 2\underbrace{\left(1+\frac{L}{R_1}\right)}_{g_1}\underbrace{\left(1+\frac{L}{R_2}\right)}_{g_2} - 1,$$

и рассмотрим $0 \leqslant g_1 g_2 \leqslant 1$.

Первый случай (1) плоского резонатора находится на гранце. Другой случай (2) это симметричный кофокальный резонатор, тогда $R_1 = -L$, и $R_2 = -L$. Возможен симметричный концентрический $R_1 = R_2 = -L/2$.

Пусть есть некоторая активная среда, процесс накачки.

4 Оптика пучков

Вспомним волновое уравнение

$$\nabla^2 E - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0,$$

пусть $\varepsilon \neq 1$ и $\mu = 1$, считая волну монохроматической всегда можем получить уравнение Гельмгольца

$$E = f(r)\exp(-i\omega t), \qquad \Rightarrow \qquad \nabla^2 f + \varepsilon k^2 f = 0,$$

где $k_0^2 = \omega^2/c^2$. Есть решение в виде плоской волны $f_0 e^{-k_0 \cdot r}$, решение в виде $Ar^{-1}e^{ik_0\cdot r}$. Можно рассматривать также параболическое приближение.

Выберем некоторую ось z. Есть два места, где встречается r – в числителе и аргументе экспоненты. Известно, что $r^2 = \rho^2 + z^2$, тогда

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = z\left(1 + \frac{\rho^2}{z^2}\right)^{1/2} \approx z + \frac{\rho^2}{2z}.$$

Говоря об аргументе хочется, чтобы всё работало, для этого

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(z + \frac{\rho^2}{2z} + \ldots\right) = \frac{2\pi}{\lambda}z + \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\rho^2}{2z} + \ldots, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\rho^2}{2z} \ll \pi.$$

Так[2] и пришли к *параболическому приближению*, вида

$$f = \frac{A}{z}\exp\left(ikz + ik\frac{\rho^2}{2z}\right).$$

4.1 Параболическое приближение

Подробнее посмотрим на

$$f(\boldsymbol{r}) = A(\boldsymbol{r})\exp(ikz).$$

Точнее нас интересует некоторая модуляция сигнала

$$\frac{\partial A}{\partial z}\lambda \ll A \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial A}{\partial z} \ll \frac{A}{\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial A}{\partial z} \ll A \cdot k,$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\cdot\lambda \ll \frac{\partial A}{\partial z} \qquad \Rightarrow \qquad \ldots \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll \frac{\partial A}{\partial z}\cdot k.$$

Считая $k^2 = \varepsilon\omega^2/c^2$, можем записать, что

$$\nabla^2 f + \frac{\varepsilon}{c^2}\omega^2 f = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \nabla^2 f + k^2 f = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial z}e^{ikz} + Aike^{ikz}$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \nabla_\perp^2.$$

Для второй производной

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}e^{ikz} + 2\frac{\partial A}{\partial z}ike^{ikz} - Ak^2 e^{ikz}.$$

Подставляя всё в уравнение находим, что

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2\frac{\partial A}{\partial z}ik - \cancel{Ak^2} + \nabla_\perp^2 A + \cancel{Ak^2} = 0.$$

[2] Видно, что входит n зон Френеля.

Вспоминая малость второй производной, получаем

$$\boxed{\nabla_\perp^2 A + 2ik\frac{\partial A}{\partial z} = 0} \quad \text{— параксиальное приближение уравнения Гельмгольца.} \tag{4.1}$$

Возможно, тут минус. На всякий случай хочется проверить, что параболическая волна это решение.

Однако, мы будем подробнее работать конкретно с решением

$$f(r) = \frac{A}{z}\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2}{2z}\right), \quad \Rightarrow \quad f(r) = A(r)e^{-ikz}, \qquad A(r) \overset{\text{def}}{=} \frac{A}{z}\exp\left(-ik\frac{\rho^2}{2z}\right).$$

Здесь хочется сделать некоторый сдвиг

$$z \longrightarrow q(z) \overset{\text{def}}{=} z + iz_0,$$

где $z_0 = \text{const}$ (Рэлеевская длина), $q(z)$ – q-параметр. Тогда уравнение придет к виду

$$f(r) = \frac{A}{z+iz_0}\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2}{2(z+iz_0)}\right).$$

Далее заметим, что

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z+iz_0} = \frac{z-iz_0}{z^2+z_0^2}, \quad \Rightarrow \quad f(r) = A\left(\frac{z}{z^2+z_0^2} - i\frac{z_0}{z^2+z_0^2}\right)\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2}{2}\left(\frac{z}{z^2+z_0^2} - i\frac{z_0}{z^2+z_0^2}\right)\right).$$

Тогда получается

$$f(r) = A\left(\frac{z}{z^2+z_0^2} - i\frac{z_0}{z^2+z_0^2}\right)\exp\left(-\frac{k\rho^2}{2}\frac{z_0}{z^2+z_0^2}\right)\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2 z}{2(z^2+z_0^2)}\right).$$

Внимательно оглядев выражение в экспоненте, понимаем что хочется переписать его в виде

$$-\frac{2\pi}{2}\frac{\rho^2 z_0}{\lambda(z^2+z_0^2)} = -\frac{\rho^2}{\frac{\lambda}{z_0\pi}(z^2+z_0^2)} = -\frac{\rho^2}{W^2(z)}, \qquad W^2(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{\lambda}{z_0\pi}(z^2+z_0^2). \tag{4.2}$$

Другим переобозначением будет

$$\frac{z}{z^2+z_0^2} = \frac{1}{z\left(1+\frac{z_0^2}{z^2}\right)}, \qquad R(z) \overset{\text{def}}{=} z\left(1+\frac{z_0^2}{z^2}\right). \tag{4.3}$$

Тогда исходное уравнение перепишется в виде

$$f(r) = A\left(\frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi W^2(z)}\right)\exp\left(-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right)\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)}\right).$$

Приводя к удобной форме комплексную амплитуду, получим

$$f(r) = \frac{A}{iz_0}\frac{W_0}{W(z)}\exp\left(-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right)\exp\left(-ikz - ik\frac{\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z)\right), \quad \zeta \overset{\text{def}}{=} \arctan\frac{z}{z_0}, \quad W_0 \overset{\text{def}}{=} W(0). \tag{4.4}$$

4.2 Интенсивность

Def 4.1. Интенсивность есть

$$I = \langle|\boldsymbol{S}|\rangle_t = \left\langle\frac{c}{4\pi}\sqrt{\varepsilon}E^2\right\rangle = \frac{cn}{4\pi}\left\langle E^2\right\rangle = \frac{cn}{8\pi}E_0^2, \qquad [I] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}\cdot\text{см}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}.$$

Но далее $I \sim E_0^2$ превращается $I = E^2$. Вспоминая, что всё хорошо, и $I = EE^*$, находим, что

$$I = A_0^2\frac{W_0^2}{W^2(z)}\exp\left(-\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right), \tag{4.5}$$

и именно поэтому пучки называются Гауссовыми. Получается, что при увеличение z наш пучок размывается (см. $I(\rho)$). Если мы задумаемся, что есть $I_{\text{центр}}(z) \sim 1/z^2$.

Если нас интересует мощность, то

$$P = \int_0^\infty I(\rho)2\pi\rho\,d\rho = \frac{1}{2}I_0\pi W_0^2, \qquad I_0 = A_0^2.$$

Если посчитать

$$\alpha = \frac{1}{P}\int_0^{\rho_0} I(\rho, z)2\pi\rho\,d\rho = 1 - \exp\left(-\frac{2\rho_0^2}{W^2(z)}\right),$$

так, например, $\rho_0 = W(z)$ приводит к величине $\alpha \approx 0.86$, а при $\rho_0 = \frac{3}{2}W(z)$ получим $\alpha \approx 0.99$. Поэтому $W(r)$ называется *радиусом (диаметром) пучка*.

Вспомним зависимость радиуса пучка от z

$$W(z) = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}\left(1+\frac{z^2}{z_0^2}\right)},$$

где в $W_0 = W(0) = \sqrt{\lambda z_0/\pi}$, а при больших z

$$\lim_{z\to\infty} W(z) \approx z\sqrt{\frac{\lambda}{\pi z_0}}, \qquad \theta = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi z_0}} = \frac{W_0}{z_0} = \lambda\sqrt{\frac{1}{\lambda\pi z_0}} \approx \frac{\lambda}{W_0}.$$

Также можно указать $2z_0$ – *глубина резкости*.

Если взять гелий-неоновый лазер при длине волны $\lambda_0 = 633$ нм, получится из $2W_0 = 2$ см, то $2z_0 = 1$ км, а при $2W_0 = 200$ мкм будет $2z_0 = 1$ мм.

Тот момент, что фаза набегает на π – эффект Гюйи. Говоря о волновом фронте,

$$k\left(z+\frac{\rho^2}{2R}\right)+\zeta(z) = 2\pi m, \quad \Rightarrow \quad z+\frac{\rho^2}{2R} = m\lambda + \frac{\zeta\lambda}{2\pi},$$

что приводит нас к тому, что $\rho^2/2R$ – *радиус кривизны.*

5 Интерференция

На любом приемнике получаем

$$\langle f\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)\,dt, \qquad \tau \gg T.$$

На деле фиксируем

$$I = \langle|\boldsymbol{S}|\rangle = \frac{c}{4\pi}\left[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}\right] = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\varepsilon}\langle E^2\rangle \sim \langle E^2\rangle.$$

Не стоит забывать, что

$$I = |E^2| = \langle(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*)\rangle_t.$$

Теперь, возвращаясь к интерференции,

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2, \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{E}^2| = |\boldsymbol{E}_1|^2+|\boldsymbol{E}_2|^2+(\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2^*)+(\boldsymbol{E}_1^*,\boldsymbol{E}_2).$$

Дальше вспоминаем про монохроматичность света

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_{10}\exp\left(-i\omega_1 t + ik_1 l_1\right)$$

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_{20}\exp\left(-i\omega_2 t + ik_2 l_2\right)$$

что приводит к

$$\begin{aligned} I = |\boldsymbol{E}|^2 &= I_1+I_2+(\boldsymbol{E}_{10}\cdot\boldsymbol{E}_{20})\cdot[\exp(i(\omega_2-\omega_1)t+i(k_1l_1-k_2l_2))+\text{ к.с.}] \\ &= I_1+I_2+(\boldsymbol{E}_{10}\cdot\boldsymbol{E}_{20})\cos\left((\omega_2-\omega_1)t+(k_1l_1-k_2l_2)\right). \end{aligned}$$

Тогда для наблюдени интерференции хочется, чтобы

$(\boldsymbol{E}_{10}\cdot\boldsymbol{E}_{20}) \neq 0$

$\varphi_1(t)-\varphi_2(t) = \text{const}$

$\omega_1 = \omega_2$

Однако хочется рассмотреть ситуацию

$\boldsymbol{E}_{10} \parallel \boldsymbol{E}_{20}$

$\varphi_1(t)-\varphi_2(t) = 0$

$\omega_1 \approx \omega_2$

В таком случае уравнение примет вид

$$I = I_0+I_0+2I_0\cos\left((\omega_1-\omega_2)t+\text{const}\right) = 2I_0(1+\cos((\omega_1-\omega_2)t+\text{const})$$

Считая

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1-\omega_2} > \tau.$$

Так приходим к разрешающей способности спектральных приборов

$$R = \frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{\nu}{d\nu} \overset{\text{exm}}{=} \frac{5893}{6}$$

для натрия. Вообще этот метод называется **гетероденирование** света.

5.1 Фурье-спектроскопия

Пример из общей физики

См. рис. О5.1, верно, что

$$I = 2I_0(1+\cos(k\Delta)) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{\omega}{c}vt\right)\right), \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega = \omega\frac{v}{c}t.$$

Вообще надо аккуратно посчитать, но получится точно так.

Не монохроматическая волна

Пусть есть некоторый сигнал с шириной линии δk, средней K_0 и

$$I = J_0\delta K.$$

Выделим конкретную ширину dk и $J_0\,dk$, тогда

$$dI = 2J_0\,dk(1+\cos(k\Delta)),$$

как в предыдущем примере. Приходим к интегралу

$$I = \int_{k_0-\delta k/2}^{k_0+\delta k/2} 2J_0(1+\cos(k\Delta))\,dk = 2I_0\left(1+\cos\left(k\Delta\right)\ \operatorname{sinc}\left(\frac{\delta k\Delta}{2}\right)\right)$$

где мы складываем интенсивности в силу приличности размерном ширины δk. При этом *видность*

$$V = \left|\operatorname{sinc}\left(\frac{\delta k\Delta}{2}\right)\right|$$

Фурье интерферометр – интерферометр классический, только двигается зеркало. Интенсивность источника

$$I(\Delta) = 2\int_0^\infty J(k)(1+\cos k\Delta)\,dk = 2\int_0^\infty J(k)\,dk + 2\int_0^\infty J(k)\cos(k\Delta)\,d,$$

где первый интеграл равен $I(0)/2$, тогда

$$I(\Delta) - \frac{I(0)}{2} = 2\int_0^\infty J(k)\cos(k\Delta)\,dk.$$

То есть мы измерили в нуля, где-то далеко, по ней делаем *обратное преобразование Фурье* и находим $J(k)$. Должно получится что-то вроде

$$I(\Delta) - \frac{I(0)}{2} = \frac{1}{1+\frac{\Delta^2}{\Delta_0^2}}.$$

Интерферометр Фабри-Перо

Рассмотрим пластинку с показателем n на которую падает плоский фронт.

$$E_{\text{out}} = E_0\tau^2 + E_0\tau^2r^2e^{ik\Delta} + E_0\tau^2r^4e^{2ik\Delta} + \ldots$$

Аккуратно считаем разность хода

$$n(AB+BC) - CD = 2nh\cos\theta'.$$

Собираем всё вместе, и находим

$$E_{\text{out}} = E_0\tau^2(1+r^2e^{ik\Delta}+r^4e^{2ik\Delta}) = \frac{E_0\tau^2}{1-r^2e^{ikD}}.$$

Теперь найдем интенсивность

$$I = EE^* = \frac{E_0^2\tau^4}{(10r^2e^{ik\delta})(1-r^2e^{-ik\delta})} = \frac{E_0^2\tau^4}{1+r^4-2r^2\cos(k\Delta)}, \quad \Rightarrow \quad I_{\max} = E_0^2\frac{\tau^4}{(1-r^2)^2}$$

вообще там τ_1 и τ_2, но всё хорошо, более того $1-r^2 \neq \tau^2$[3], но приходим к $I_{\max} = E_0^2$ при $k\Delta = 2\pi m$.

$$\Delta_m = \frac{2\pi m}{k} = m\lambda.$$

Стандратное значение $r = 0.04$.

[3] Проботать.

...

Пусть есть некоторый набор частот

$$\nu_m = \nu_0 + m\Delta\nu. \qquad m \in [-l, l], \qquad 2l+1 \text{ частота всего.}$$

Эквидистантный (периодичнский) набор частот приведет к

$$E(t) = \sum_{m=-l}^{l} E_0 \exp\left(2\pi i(\nu_0 + m\Delta\nu)t\right) = Ee^{i2\pi\nu_0 t}\sum_{m=-l}^{l} \exp\left(2\pi i\Delta\nu tm\right) = E_0 e^{\varphi}\left(\frac{1-\exp(2\pi i\Delta\nu tN)}{1-\exp(2\pi i\Delta\nu t)}\right),$$

где $\varphi = i2\pi\nu_0 t$ но не совсем. Вспоминаем, что

$$\frac{1-e^{i\varphi}}{1-e^{i\psi}} = \ldots$$

получаем, что

$$E(t) = E_0 e^{i\psi}\frac{\sin(\pi\Delta\nu Ny)}{\sin\left(\pi\Delta\nu t\right)} \qquad \Rightarrow \qquad I(t) = E_0^2\frac{\sin^2(\pi\Delta\nu Nt)}{\sin^2(\pi\Delta\nu t)}.$$

Максимумы соответствуют $\pi\Delta_m = \pi m$, или $t_m = m/(\Delta\nu)$. Также можем получить, что характерная величина $\Delta t = 1/(\Delta\nu N)$

6 Уширение спектральных линий

6.1 Естественная ширина линии

Это скорее чисто квантовое явление, поэтому давайте сейчас немного помашем руками, пусть атом это осциллятор

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = 0,$$

что приводит к известному решению

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t}\left(\cos(\omega t) + \frac{\gamma}{2\omega}\sin(\omega t)\right) \approx x_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_0 t), \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

Далее, пусть есть преобразование Фурье

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega, \qquad A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_0 t)e^{-i\omega t}\,dt = \Big/ \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right) \Big/ = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2}\int_0^{\infty} x_0 e^{-\gamma t}e^{i(\omega_0-\omega)t}\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x_0 e^{-\gamma t}e^{i(\omega_0+\omega)t}\,dt = \\ &= \frac{x_0}{2\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-\gamma t + i(\omega_0-\omega)t}}{i(\omega_0-\omega)-\gamma} + \frac{e^{-\gamma t + i(\omega_0+\omega)t}}{-(\omega_0+\omega)-\gamma}\right]\Bigg|_0^{\infty} \approx -\frac{x_0}{2\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i(\omega_0-\omega)-\gamma}, \end{aligned}$$

где вторым слагаемым можно пренеречь, в силу ...

$$I = AA^* = \frac{x_0^2}{8\pi}\frac{1}{(\omega_0-\omega)^2+\gamma^2},$$

что дает кривую Лоренцова профиля.

Если говорить про жизнь, то ширина на полувысоте $\in [10^7, 10^9]$ Гц.

6.2 Доплеровское уширение

В зависимости от взаимного движения излучения от атома и приемника будет фиксироваться частота

$$\omega = \omega_0(1 + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})$$

Если аккуратно взять $f(v_x)$, то само собой максимум в $v_x = 0$, и максимум $J(\omega)$ будет в ω_0, а сама кривая – перекочевавший из $f(v_x)$ гауссов колокольчик.

Если говорить точнее, то

$$v_0^2 = \frac{2kT}{m}, \qquad dN = N\exp\left(-\frac{(\omega-\omega_0)^2c^2}{\omega_0^2 v_0^2}\right)\frac{c}{\omega_0}\,d\omega,$$

где, переходя к числам будем наблюдать толщину $\in [10^0, 10^9]$ Гц.

6.3 Другие примеры

Есть столкновительное уширение, глобально потенциальная энергия зависит от расстояния между атомами, начинает фаза, или частота зависеть от времени.

Есть ещё времяпролетное уширение, частица пролетает конечный пучок, тогда интегрировать нужно не от 0 до ∞, а от 0 до T, с чем тоже как-то борются.

Глобально можно их резделить на два типа: однородное и неоднородное. Например, естественная ширина линии однородна, а доплеровское неоднородно.

6.4 Внутридоплеровская спектроскопия

Постановка задачи: есть куча бегающих атомов, несколько уровней энергии. Вообще можем следить за излучением, можем за поглощением. Из уширения разные линии уровня могут слиться в одну. Хотелось бы этого избежать.

Квантмех для самых маленьких: что умеет электрон? Электрон умеет поглощать фотон, с некоторой вероятностью, характеризовать этот процесс будем некоторым сечением поглощения σ.

Аналогично для вынужденного излучения есть некоторая σ, которая такая же как и для поглощения. А ещё, что здорово, излученные фотоны практически идентичны.

Также спонтанное излучение куда-то с $h\nu$. А ещё есть безизлучательное излучение, когда энергия уходит в тепло. Всё происходит с какой-то вероятностью, за некоторое свойственное характерное время τ.

Скоростные (кинематические) уравнения:

$$\dot{n}_2 = -\frac{n_2}{\tau_{\text{Б}}} - \frac{n_2}{\tau_{\text{C}}} - \ldots,$$

что соответсвует $n_2 = n_{20}\exp(-t/\langle\tau\rangle_{\text{harm}})$.

Пусть $F = I/(h\nu)$ – плотность потока фотонов, тогда

$$\dot{n}_1 = -F\sigma n_1, \qquad \Rightarrow \qquad n_1(t) = n_1(0)\exp(-F\sigma t),$$

и, соответсвенно, при различных случаях

$$\dot{n}_1 = -F\sigma n_1 + F\sigma n_2 + \frac{n_2}{\tau_{\text{Б}}}.$$

И теперь вернемся к доплеровской спектроскопии.

Пусть $n_1 + n_2 = N$. Можем записать некоторое уравнение баланса $n_2 = N - n_1$

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = -n_1\sigma F + n_2\sigma F + n_2/\tau_{\text{Б}}, \\ \dot{n}_2 = +n_1\sigma F - n_2\sigma F - n_2/\tau_{\text{Б}}, \end{cases} \Rightarrow\ \dot{n}_1 + n_1(2\sigma F + \tau_{\text{Б}}^{-1}) = N\sigma F + \frac{N}{\tau_{\text{Б}}},\ \Rightarrow\ n_1 = N\frac{\sigma F + \tau_{\text{Б}}^{-1}}{2\sigma F + \tau_{\text{Б}}^{-1}} = N\frac{F + \frac{1}{\sigma\tau_{\text{Б}}}}{2F + \frac{1}{\sigma\tau_{\text{Б}}}},$$

что соответсвует $\dot{n}_1 = \dot{n}_2 = 0$.

Если посмотреть на $n_1(F)$ и $n_2(F)$, то они стремятся к $N/2$, при $F \to +\infty$. А вообще, считая $F_s^{-1} = \sigma\tau_{\text{Б}}$, можем записать

$$n_1(F) = N\frac{F + F_s}{2F + F_s}.$$

Введя $\alpha = n_1\sigma - n_2\sigma$ – коэффициент поглощения. В термодинамике была $n\sigma\lambda$ обратно пропорционально длине свободного пробега

$$dF = -(n_1\sigma - n_2\sigma)F\,dz, \qquad \Rightarrow \qquad dF = -n_1\sigma F\,dz + n_2\sigma F\,dz.$$

Получается, что α стремится к 0 во времени.

Таким образом, если ооочень сильно светить на вещество, то можно его пробить при большой интенсивности.

При равенстве частоты лазера и частоты атома возникнет провал Лэмба. В какой-то момент научились менять частоту лазера, и научились так измерять ω_0. Если частот будет две, то также можем зафиксировать два провала Лэмба.

7 Что умеют делать электроны?

Вспомним кинематическое уравнение:

$$\dot{n}_2 = -An_2 = -\frac{n_2}{\tau_{\text{Б}}}, \qquad \dot{n}_2 = -\frac{\tau_{\text{Б}}}{\tau_{\text{сп}}}$$

где $\tau_{\text{Б}}$ – характерное время безизлучательного перехода, $\tau_{\text{сп}}$ – спонтанного перехода. Также есть поглощение:

$$\dot{n}_1 = -\sigma F n_1,$$

и вынужденное излучение

$$\dot{n}_2 = -\sigma F n_2.$$

Вообще $A, B, \sigma F$ – коэффициенты Эйнштейна.

Вспомним про «просветление», запишем набор кинематических уравнений

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = -n_1\sigma F + n_2\sigma F + n_2/\tau \\ N = n_1 + n_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \dot{n}_1 = \dot{n}_2 = 0, \quad \text{— стационарное приближение.}$$

решая эту систему находим, что

$$n_1(F) = N\frac{F\sigma\tau + 1}{1 + 2F\sigma\tau}, \qquad n_2(F) = N\frac{F\sigma\tau}{1 + 2F\sigma\tau}.$$

Также, вспоминая про поглощение, понимая как происходит поглощение фотонов,

$$dF = D(\sigma n_2 - \sigma n_1)\, dz,$$

где $\alpha \overset{\text{def}}{=} \sigma n_1 - \sigma n_2 = \sigma N$, так приходим к стандартному закону

$$dF = -F\alpha\, dz, \qquad \Rightarrow \qquad F = F_0 \exp\left(-\alpha h\right),$$

где h – толщина образца. И вообще можно найти $\alpha(F)$, который просто монотонно убывает.

7.1 Затемнение

Добавим к системе третий уровень. Договоримся, что электроны умеют переходить с 1 на 2 уровень, то на самом деле он запрыгивает чуть выше второго, и сваливается, но не с частотой $h\nu$, поэтому вынужденного излучения тут не будет.

Также за τ_2 происходит излучение с 3 на 2 не с $h\nu$. Итого остаются процессы с σ_2, σ_1, τ_1 и τ_2. На практике $\tau_2 \ll \tau_1$, примерно как 1 пс $\ll$ 1 нс.

Запишем кинематические уравнения:

$$\dot{n}_1 = -n_1\varphi_1 F + \frac{n_2}{\tau_1},$$

$$\dot{n}_2 = n_1\sigma_1 F - n_2\sigma_2 F - \frac{n_2}{\tau_1} + \frac{n_3}{\tau_2},$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = N,$$

где мы сразу перейдём к стационарному приближнию $\dot{n}_1 = \dot{n}_2 = \dot{n}_3 = 0$. Считая

$$\frac{1}{\sigma_1\tau_1} = F_1, \qquad \frac{1}{\sigma_2\tau_2} = F_2, \qquad n_2 = n_1\frac{F}{F_1}, \qquad n_3 = n_1\frac{F^2}{F_1F_2}$$

и, наконец, получаем

$$n_1 = N\left(1 + \frac{F}{F_1} + \frac{F^2}{F_1F_2}\right)^{-1}. \tag{7.1}$$

Что с n_1 – она затухает, также n_2 слегка растёт, а потом затухает, а n_3 выходит на N. Если внимательно посмотреть на $\alpha(F) = \sigma_1 n_1 \pm \sigma_2 n_2$,

$$\frac{dF}{dz} = -\alpha F.$$

Так как τ_2 мааленький, то n_3 растёт оочень медленно. Для α получается немонотонная зависимость. На деле n_3 всегда ноль, т.к. $F \ll \sqrt{F_1F_2}$. В итоге n_2 идёт к N, n_1 к 0.

Так вот, $\alpha = \sigma(n_1 - n_2)$. Также $dF = -\alpha F\, dz$. Тогда

$$\text{if } \ n_1 > n_2, \quad \Rightarrow \quad \alpha > 0, \quad \frac{dF}{dz} < 0,$$

$$\text{if } \ n_1 < n_2, \quad \Rightarrow \quad \alpha < 0, \quad \frac{dF}{dz} > 0.$$

Если $n_2 > n_1$, то переходим к ситуации с инверсией населенности.

Теперь устроим её. Пусть со второго на третий уровень происходит очень быстрое сваливание (третий ниже второго). Снова запищем кинематические уравнения

$$n_1 + n_3 = N$$

$$\dot{n}_1 = -n_1 W + \frac{n_3}{\tau} + n_3\sigma F = 0.$$

Но такие схемы уже редки, чаще сейчас используют четырех уровневые системы.

Есть уровни $1, 4, 3, 2$ – $E_{14} \gg kT$. Также $\tau_{23} = 10$пс. Также с $\tau_{41} = 10$пс. Итого очень легко добиться инверсии населенности между третьим и четвертым уровнем. Накачка происходит с первого на второй уровень.

Лазер

Есть некоторая среда, есть накачка, с помощью которой происходит переброс с 1 на 4 уровень. Пока что это только усилитель. Теперь добавим зеркало 100% слева и 50% справа.

И тут на сцену выходит произвольное излучение. Как только один полетит в удачном направлении, захватит с собой остальных – лавина, успех.

8 Оптика фотонных кристаллов

8.1 Модуляция добротности

Есть *активная* и *пассивная* модуляция добротности.

Рассмотрим синхронизацию мод. Имея одинаковые фазы на всех модах из фабри перо можно получать мощные короткие импульсы. Если добавить в лазер амплитудный модулятор

$$A = A_0(1 + m\cos\Omega t)\cos\omega t,$$

то это приведет, при $\Omega = \omega$ (активная самосинхронизация), и в конечном итоге получить пики со временем порядка пикисекунд.

Пассивная самосинхронизация мод возможная с помощью *красителя* – двухуровневой системой. Характерное время отдельного выброса $\tau \sim 1/\Delta\nu$. Один из механизмов – пусть у красителя τ очень мало (время релаксации), но и I_{sat} также очень мало (возможно при эффективном сечение $I \sim 1/\sigma\tau$ достаточно большом).

8.2 Фотонные кристаллы

Фотонные кристаллы – бываем $\{1, 2, 3\}$-мерные. Например в одномерном случае можно воспринимать это как набор пластинок толшины h_i и коэффициентом преломления n_i.

Построим теорию матриц для фотонных кристаллов. Есть два типа матриц: M-типа и M-типа. Пусть в матрицу M-типа свящывается u_2 и u_1:

$$\begin{pmatrix} u_2^+ \\ u_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^+ \\ u_1^- \end{pmatrix}.$$

Приятный момент в том, что $M = M_6 M_5 \ldots M_1$.

Другой тип – *матрица рассеяния* или S-матрица, которая связывает -типа свящывается u_2 и u_1:

$$\begin{pmatrix} u_1^- \\ u_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{12} & r_{21} \\ r_{12} & t_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^+ \\ u_2^- \end{pmatrix}.$$

Но их перемножить не получится.

Хотелось бы понять переход от M матриц, к S матрицам и назад. Рубрика «занимательная арифметика»:

$$\frac{\det M}{D} = \frac{AD - BC}{D} = t_{12}, \ldots, \quad \text{ну, СЛУ, ..}$$

В общем получается связь вида

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{1}{t_{21}} \begin{pmatrix} t_{12}t_{21} & r_2 \\ -r_1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.1}$$

И, аналогично,

$$S = \begin{pmatrix} t_{12} & r_2 \\ r_1 & t_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ -C & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.2}$$

Пример №1: однородная среда

Так в однородной среде с n_0, h и для волны $E = E_0 \exp(i\omega t - ikz)$ верно, что

$$u_1^- = u_2^- e^{-i\varphi}, \quad \Rightarrow \quad S = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix},$$

откуда уже можем найти M-матрицу

$$M = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

Пример №2: системы без потерь

Рассмотрим системы без потерь
$$|u_1^+|^2 + |u_2^-|^2 = |u_1^-|^2 + |u_2^+|^2.$$
Если система без потерь, то $|t|^2 + |r|^2 = 1$, также $|t_{12}| = |t_{21}| = |t|$ и то же для r. Также верно, что
$$\frac{t_{12}}{t_{21}^*} = -\frac{r_1}{r_2^*}.$$
В случае, если мы говорим про взаимные системы, то
$$t_{12} = t_{21} = t, \qquad r_{21} = r_{12} = r.$$
Также для S матриц можем так получить условия
$$A = D^*, \qquad B = C^*, \qquad |A|^2 - |B|^2 = 1.$$
Так S и M матрицы запишутся в виде
$$S = \begin{pmatrix} t & r \\ r & t \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 1/t^*, & r/t \\ r^*/t, & 1/t \end{pmatrix}.$$

Пример №3: граница

Рассмотрим падение на границу
$$S = \begin{pmatrix} \frac{2n_1}{n_1+n_2} & \frac{n_2-n_1}{n_1+n_2} \\ \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2} & \frac{2n_2}{n_1+n_2}, \end{pmatrix}$$
по Френелю. Забавно выглядит M-матрица:
$$M = \frac{1}{2n_2} \begin{pmatrix} n_2 + n_1 & n_2 - n_1 \\ n_2 - n & n_2 + n_1 \end{pmatrix}.$$
Если добавим распространение в среде, перемножим, а также добавим второе преломление, то получим
$$M = \frac{1}{2n_2} \begin{pmatrix} n_2 + n_1 & n_2 - n_1 \\ n_2 - n & n_2 + n_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \cdot \ldots = \frac{1}{4n_1n_2} \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix}.$$
Так находим, что
$$t = \frac{AD - BC}{D} = e^{-i\varphi_1 - i\varphi_2} \frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2 - (n)}$$