Заметки курса по общей физики «Оптика»

Авторы конспекта: Хоружий К.
Примак Е.

От: *26 мая 2021 г.*

Содержание

1 Интерференция

1.1 Общие сведения об интерференции

Явления интерференции и дифракции – яркое проявление волновой теории света. В этих явлениях интересны относительные значения таких фотометрических величин как: лучистый поток, световой поток, освещенность. Таким образом нас не будет особо интересовать конкретная фотометрическая величина, а потому введём и будем следить за *интенсивностью колебаний*:

$$I = \langle \boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^* \rangle.$$

Соответственно, в точке, где перекрывается два колебания электрического поля: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$, будем иметь:

$$I = I_1 + I_2 + I_{12},$$

где последний член называется *интерференционным членом.* Если он обращается в нуль, то такие источники называют *не когерентными*, и *когерентными* иначе.

Для двух параллельных волн, введя амплитуды: $A_1 = a_1 e^{i\varphi_1}$ и для второй аналогично будем иметь:

$$E_1 = A_1 e^{i\omega t}, \quad E_2 = A_2 e^{i\omega t} \qquad \Rightarrow \qquad E = E_1 + E_2 = (A_1 + A_2)e^{i\omega t}.$$

Не сложно получить выражения для результирующей амплитуды и фазы:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2}{a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2}.$$

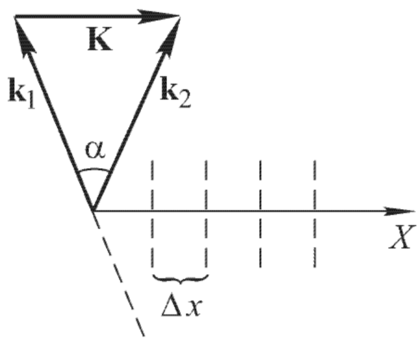
То есть введя интенсивности можем убедиться в предположениях сделанных выше. Например, если фазы φ_1 и φ_2 отличаются на целое четное число π, то результирующая I максимальна. Если же на нечетное число π, то I минимальна:

$$I_{\text{макс}} = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2, \quad I_{\text{макс}} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2$$

И если $\varphi_1 - \varphi_2 = m\pi \pm \pi/2$, то $I = I_1 + I_2$. То есть наши предложения сами по себе ниче так и на самом деле вполне верны и не для параллельных лучей.

Две плоские волны:

$$E_1 = a_1 \cos(\omega t - \boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{r} + \delta_1), \quad E_2 = a_2 \cos(\omega t - \boldsymbol{k}_2 \boldsymbol{r} + \delta_2).$$



Тут как и раньше получаем разность фаз:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \boldsymbol{K}\boldsymbol{r} + (\delta_2 - \delta_1).$$

Поверхности разных $\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$ – плоскости обозначенные штрихами на рисунке – параллельные $\boldsymbol{k}$. Вдоль них и результирующая интенсивность колебаний будет постоянна. Аналогично: максимум при четном π для $\varphi_2 - \varphi_1$, минимум при нечетном.

Расстояния же между соседними минимумами или максимума находится их условия

$$K\Delta x = 2\pi.$$

И если $k_1 = k_2 = k = 2\pi/\lambda$.

То находим

$$\Delta x = \frac{2\pi}{K} = \frac{\pi}{k\sin(\alpha/2)} = \frac{\lambda}{2\sin(\alpha/2)} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta x \approx \frac{\lambda}{\alpha} \text{ при малых } \alpha.$$

Если теперь поставить плоский экран параллельно плоскости $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2$, то расстояния между серединами соседних светлых(темных) полос – *ширина интерференционной полосы* будет равна Δx. Аналогично, если экран установлен перпендикулярно. Если же теперь от перпендикулярного положения поворачивать экран, на угол φ, то ширина интерференционной полосы будет

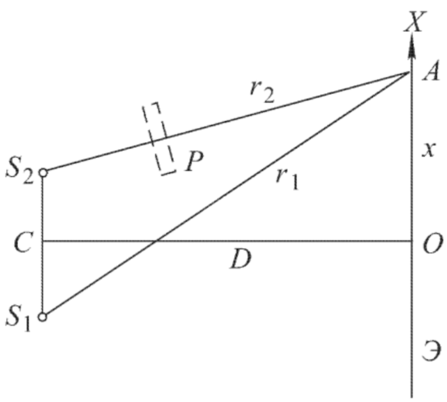
$$\Delta_\varphi x = \Delta x / \cos\varphi.$$

Сферические монохроматические волны. Будем рассматривать перекрытия волн от двух точечных источников. Амплитуда для сферической волны будет затухать обратно пропорционально r, то есть вдоль каждой интерференционной полосы интенсивность будет меняться. Но мы не будем обращать внимания на это изменение. В случае одинаковых фаз для двух источников получаем:

$$\Delta\varphi = k(r_2 - r_1) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(r_2 - r_1).$$

У нас опять светла, когда $2m\pi$, и темна при $2\pi(m + 1/2)$. Это условие можно записать и в случае наличия сред, то есть думать надо о разности оптических путей:

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \int n_2 dl - \int n_1 dl = \begin{cases} m\lambda & \text{светлая полоса,} \\ (m+1/2)\lambda & \text{темная полоса.} \end{cases}$$



Для наглядности приведем результаты для интерференции в такой задаче.

$$r_1 - r_2 = \frac{xd}{D} = \alpha x,$$

для малого угла схождения интерферирующих лучей $\alpha \approx d/D$. Для одинаковых и синфазных источников:

$$I = 2I_1\left(1 + \cos\frac{2\pi\alpha x}{\lambda}\right).$$

Ширина интерференционной полосы $\Delta x = \lambda/\alpha$.
Если же на пути одного из лучей поставить пластинку P толщиной l и с преломлением n, то произойдёт смещение интерференционной картины на $N = (n-1)l/\Delta x$ полос в ту сторону, с какой была введена пластинка

1.2 Конечные размеры источника и пространственная когерентность

Два точечных источника. Рассмотрим интереференцию света от двух источников A и B (рис. (1)). Считая

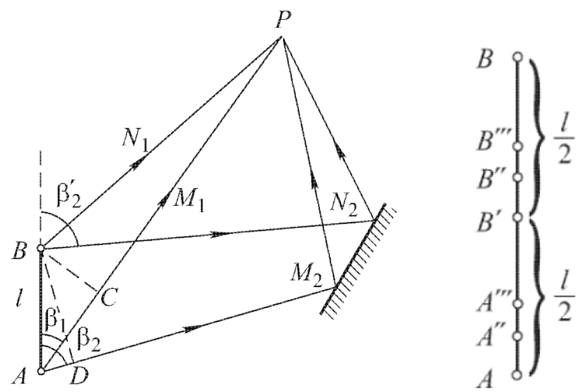


Рис. 1: К пространственной когерентности

$l = AB$ достаточно малым, то для разности оптических лучей можно написать $l\cos\beta_1$ и $l\cos\beta_2$. Тогда для разности оптической разности хода лучей от A и B верно, что

$$\Delta = [(AM_1P) - (AM_2P)] - [(BN_1P) - (BN_2P)] = l|\cos\beta_1 - \cos\beta_2|,$$

которая определяет сдвиг одной интерферецинной картины относительно другой. При $\Delta = \lambda/2$ максимумы одной – минимумы другой, при $\Delta = \lambda$ резонируют.

Стоит заметить, что мы условно считаем, что при $\Delta = (m + 1/4)\lambda$, $m \in \mathbb{Z}$ – всё хорошо. А ещё $\beta = \beta'$.

Протяженный источник. Считая, что все точки излучают некогерентно, разобьём на пары источников (A, B'), (A'', B'') и т.д. находящиъся на $l/2$ друг от друга. Тогда, при $\Delta/2 = \lambda/2$ от каждой пары будет просто светлый фон, получаем условия

$$\Delta \equiv l(\cos\beta_2 - \cos\beta_2) = m\lambda,$$

при выполнении которого на экране один только освещенный фон без полос. При $\Delta = (m+\alpha)\lambda$ источник можно разбить на две части $m\colon \alpha$, где меньшая часть источника даст интерференционные полосы на светлом фоне от большей части источника.

Если крайние лучи выходят симметрично к $\perp AB$, т.е. $\beta_2 = \pi - \beta_1$, то $\cos\beta_2 = -\cos\beta_1$, и тогда хорошая интерференция будет при

$$(l/2)|cos\beta_1 - \cos\beta_2| \leqslant \lambda/4, \qquad l\sin(\Omega/2) \leqslant \lambda/4,$$

где Ω – угол между крайними лучами, угол интерференциии.

Def 1.1. Два источника, позволяющие наблюдать интереференцию света от них, называют *пространственно когерентными*, иначе – *пространственно некогерентными.*

В случае жемонохроматичного света, можем говорить про пространственную когерентность при
$$\sigma = \pi\lambda^2/(4\varphi^2).$$

1.3 Влияние немонохроматичности света

Рассмотри два точечных немонохроматичных источников света: длины волн λ и $\lambda' = \lambda + \delta\lambda$. Точка с $\Delta = 0$ – *центр интерференионной картины.*

Две спектральные линии. Если фазы S_1 и S_2 то центр сохранится. Волны придут в противофазе, при
$$N\lambda' = \left(N + {}^1/_2\right)\lambda, \quad\Rightarrow\quad N = \frac{\lambda}{2(\lambda' - \lambda)} = \frac{\lambda}{2\delta\lambda}.$$
Когда номер полосы мал по сравнению с величиной N, интерференционные полосы будут отчётливы, при номере N для λ и $(N + 1.2)$ для λ' полосы пропадут, а вот на $2N$ и $2N + 1$ уже снова будут в фазе.

Кусочек спектра. Пусть теперь $\lambda \in (\lambda, \lambda + \delta\lambda)$, тогда разобьём всё на пары на расстоянии $\delta\lambda/2$ друг от друга, к каждой из которых верно значение для N (при $\delta\lambda \to \delta\lambda/2$), поэтому первые полосы исчезнут при
$$N = \lambda/\delta\lambda,$$
что в два раза больше дискретного случая.

Временная когерентность. Вообще можно сказать, что для когерентности необходимо, чтобы разность хода лучей не превосходила длину цуга $L = c\tau$, тогда
$$N_{\max} = \frac{\Lambda}{\lambda} = \frac{\tau}{T} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\omega}{\delta\omega}.$$
Если учесть, что $\lambda = 2\pi/k$ и $T = 2\pi/\omega$, то $\tau \cdot \delta\omega = 2\pi$ и $L \cdot \delta k = 2\pi$.

Так как здесь основной игрок – длина цуга, то говорят про *пространственную когерентность*, связанная с *узостью спектрального интервала* $\Delta\omega$. Для времени когерентности верно соотношение
$$\tau_{\text{ког}} \approx \frac{2\pi}{\Delta\omega} \approx \frac{1}{\Delta\nu}, \quad\Rightarrow\quad L \approx c\tau_{\text{ког}} = \lambda\frac{\nu}{\delta\nu} = \frac{\lambda^2}{\delta\lambda},$$
что называется *длиной когерентности.*

Квазимонохроматичность. Если область $\Delta\omega$ в которую входит *p. v.* интеграла Фурье, и $\Delta\omega/\omega \ll 1$, то результирующее колебание называется *квазимонохроматическое.* Запишем произвольные квазимонохроматические колебания в виде
$$E(t) = a(t)e^{i\omega_0 t},$$
где $a(t)$ – медленная амплитуда, таким образом колебания модулированы, меняется $a(t)$ – амплитудная модуляция, меняется фаза – *фазовая модуляция.*

Так как детекция происходит в основном для интенсивности, то про неё и будем гворить, квадрат поля может быть представлен в виде
$$(\operatorname{Re} E)^2 = \left(\frac{E + E^*}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(E^2 + E^{*2}\right) + \frac{1}{2}EE^*.$$
Если считать $a = a_0(t)e^{i\delta(t)}$, где $a_0(t)$ и $\delta(t)$ – межденно меняющиеся вещественная амплитуда и фаза, то
$$E^2 + E^{*2} = 2a_0^2\cos\left[2(\omega_0 r + \delta)\right],$$
что быстроосциллирует, так что 0. Поэтому интенсивность $\langle EE^*\rangle$.

Два источника. Рассмотрим теперь сумму колебаний от двух источников из S_1 и S_2 с отставваиями на θ_1 и θ_2. Тогда результирующее
$$E \equiv E(P, t) = E_1(t - \theta_1) + E_2(t - \theta_2).$$
Умножая на комплексно-сопряженное и усредняя по времени приходим к выражению вида
$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\operatorname{Re}\left[f_{12}(\theta)\right],$$
где $\theta = \theta_2 - \theta_1$.

Def 1.2. *Корреляционной функцией* колебаний $E_1(t - \theta_1)$ и $E_2(t - \theta_2)$ называют
$$\langle E_1(t - \theta_1)E_2^*(t - \theta_2)\rangle = \langle E_1(t)E_2^*(t - \theta)\rangle = F_{1,2}(\theta) = \sqrt{I_1 I_2} f_{1,2}(\theta).$$
Она характеризует степень согласованности колебаний. Функция $f_{1,2}$ называется *нормированной корреляционной функцией.* Разделив её на быстро осциллирующую функцию $e^{i\omega_0 t}$ можем перейти к *комплексной степени*

когерености колебаний

$$\gamma_{1,2}(\theta) = f_{1,2}(\theta) e^{-i\omega_0\theta},$$

модуль которой – степень когерентнсоти колебаний в точке P.

Итого, в терминах γ, переходим к

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\mathrm{Re}\left[\gamma(\theta)e^{i\omega_0\theta}\right] = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}|\gamma_{1,2}(\theta)|\cos(\omega_0\theta + \delta(\theta)),$$

где $\gamma_{1,2}(\theta) = |\gamma_{1,2}|e^{i\delta}$. Однако γ меняется медленно, так что в максимумах $\cos(\omega_0\theta + \delta) = +1$ и в минимумах $\cos(\omega_0\theta + \delta) = -1$, тогда

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}|\gamma_{1,2}(\theta)|, \qquad I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}|\gamma_{1,2}(\theta)|, \qquad \Rightarrow \qquad V \equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}|\gamma_{1,2}(\theta)|.$$

Получается, что при $\gamma_{1,2}(\theta) = 0$ колеабния *некогеренты*, и если $\gamma_{1,2}(\theta) \equiv 0$, $\forall\theta$, то *некогерентность полная*, тогда всюду имеет место *закон фотометрического сложения.*

Интереференция *полная* при $\gamma_{1,2}(\theta) \equiv 1$, такой случай реализуется при наложении строго периодических, в частности монохроматических, пучков одинаковых периодов. Вопросы *пространственной* и *временной* когерентности колебаний некоторого поля могут быть сведены к рассмотрению γ для ситуции рис. 2.

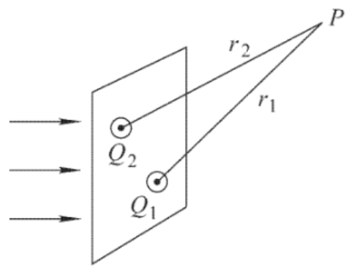


Рис. 2: Расчёт пространственной и временной когерентности.

Оборванная синусоида. Пусть есть sin вплоть до некоторого τ по которому и будем усреднять

$$E(t) = \begin{cases} \sin\omega_0 t, & t \in [0,\tau], \\ 0, & t \notin [0,\tau], \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \gamma(\theta) = \begin{cases} 1 - \theta/\tau, & \theta < \tau, \\ 0, & \theta > \tau. \end{cases}$$

что может быть получено из выражения

$$\langle E(t)E^*(t-\theta)\rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau e^{i\omega_0\theta}\,dt = \frac{\tau-\theta}{\tau}e^{i\omega_0\theta} = F(\theta) = f(\theta).$$

Связь автокорреляционной функции и спектральной плотности. Да, они связаны: $F(\theta)$ и $I_\omega(\omega)$. Для установления связи запишем по определению

$$F(\theta) = \langle E(t)E^*(t-\theta)\rangle = \frac{1}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} E(t)E^*(t-\theta)\,dt,$$

подтсавляя $E^*(t-\theta) = \int_0^\infty a^*(\omega)e^{-i\omega(t-\theta)}\,d\omega$, а также вспоминая выражения для $a(\omega)$, и меняя порядок интегрирования приходим к

$$a(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} E(t)e^{-i\omega t}\,dt, \qquad \Rightarrow \qquad F(\theta) = \frac{2\pi}{\tau}\int_0^{+\infty} a^*(\omega)a(\omega)e^{i\omega\theta}\,d\omega = \int_0^\infty I_\omega(\omega)e^{i\omega\theta}\,d\omega,$$

где учтено, что $I_\omega(\omega) = \frac{2\pi}{\tau}a^*(\omega)a(\omega)$. Это формула – фурье-разложение $F(\theta)$, поэтому верно и обратное

$$F(\theta) = \int_0^\infty I_\omega(\omega)e^{i\omega\theta}\,d\omega, \qquad \Rightarrow \qquad I_\omega(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta)e^{-i\omega\theta}\,d\theta.$$

Вообще можно показать, что $F(-\theta) = F^*(\theta)$, тогда последняя формула перепишется в виде:

Thr 1.3 (теорема Винера-Хинчина). *Связь между спектральной плотностью мощности сигнала и его автокорреляционной функцией может быть записана в виде:*

$$I_\omega(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\infty F(\theta)e^{-i\omega\theta}\,d\theta + c.c.\right],$$

что позволяет измерять I_ω для волн.

1.4 Теорема Ван-Циттера-Цернике

Пространственную когерентность $\gamma_{1,2}$ для точек Q_1 и Q_2 экрана, освещаемого протяженным квазимонохроматическим самосветящимся источником света. Если рассматриваемая точка P равноудалена от Q_1 и Q_2 то можем рассматривать просто волны в Q_1 и Q_2. В качетсве источника рассматривается площадка $\sigma \parallel$ экрану.

В точках Q_1 и Q_2 может быть определена интенсивность

$$I_1 \equiv I(Q_1) = \int_\sigma \frac{I(S)\, dS}{r_1^2}, \qquad I_2 \equiv I(Q_2) = \int_\sigma \frac{I(S)\, dS}{r_2^2}.$$

Введя нормирующий множитель, можем найти $\gamma_{1,2}(\theta \ll 1)$:

$$\gamma_{1,2}(0) = \frac{1}{\sqrt{I_1 I_2}} \int \frac{I(S)}{r_1 r_2} e^{ik(r_2 - r_1)}\, dS.$$

Таким образом мы говорим, что:

Thr 1.4 (теорема Ван-Циттера-Цернике)**.** *Комплексная степень взаимной когерентности в точках Q_1 и Q_2 равна комплексной амплитуде в точке Q_1 соответстствующей дифрагированной волны.*

2 Спектральные приборы и многослойные структуры

2.1 Интерференция в пленках и в пластинках

Тонкая плёнка. Рассмотрим тонкую пленку толщины d и показателя прелмления n. При освещении точечным истоником света, мы увилим разность хода лучей в

$$\Delta = (A'CB') + \frac{\lambda}{2} = 2nd\cos\psi + \frac{\lambda}{2},$$

где ψ – угол преломления, $\lambda/2$ – следставие преломления от среды с большим показателем преломления. Интерференция может наблюдаться как в отраженном свете, так и в преломленном, однако проще всего наблюдать интерференцию света на самой пластинке. Если рассмотреть потерю в 5% при отражении, то увидим, что основная интенсивность приходится на лучи 2, 3 и $1'$ (рис. 3).

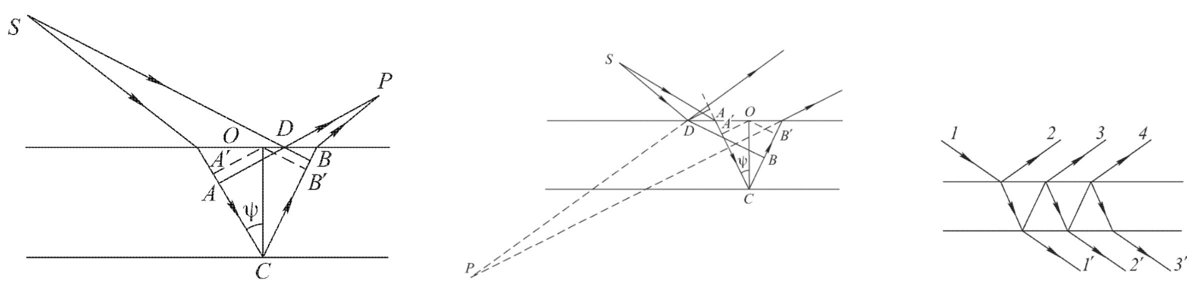


Рис. 3: К интерференции в пленках и пластинках

Кольца Ньютона. Если прижать линзу к пластинке, то будут интерференционные *колечки Ньютона.* Можно показать, что разность хода будет

$$d = \frac{x^2}{2R}, \qquad \Delta = 2d + \frac{\lambda}{2} = \frac{x^2}{R} + \frac{\lambda}{2},$$

где R – радиус кривизны линзы, а x – полярная координата. Светлый кольца будут при $\Delta = m\lambda$, тогда радиум m-го светлого кольца:

$$x_m^{\text{светл}} = \sqrt{\left(m - {}^1\!/_2\right)\lambda R} = \sqrt{\lambda R/2}\sqrt{2m-1}, \qquad x_m^{\text{тёмн}} = \sqrt{m\lambda R} = \sqrt{\lambda R/2}\sqrt{2m}.$$

2.2 Многолучевая интерференция

Прошедшая волна. Обозначим через R коэффицент отражение света от границы раздела пластинки с воздухом. При отсутсвии поглощения $(1-R)$ проходит через границу, если среды по обе стороны одинаковы, то и R будут одинаковы. Пусть свет монохроматичен Пусть интенсивность света I_0, тогда интенсивности прошедших

пучков будут
$$I_{1'} = (1-R)^2, \quad I_{2'} = R^2(1-R)^2 I_0, \quad I_{3'} = R^4(1-R)^2 I_0, \quad \ldots$$
а соответсвеющие вещественные амплитуды
$$a_{1'} = (1-R)a_0, \quad a_{2'} = R(1-R)a_0, \quad a_{3'} = R^2(1-R)a_0, \ldots.$$
Амплитула прошедшей волны представится убывающей геометрической прогрессией
$$a_\text{d} = a_0(1-R)\left[1 + Re^{-i\Phi} + R^2 e^{-2i\Phi} + \ldots\right], \quad \Phi = k\Delta = \frac{4\pi}{\lambda} nd\cos\psi, \quad \Rightarrow \quad a_\text{d} = \frac{1-R}{1-Re^{-i\Phi}} a_0.$$
где Φ – разность фаз между соседними пучками. Интенсивность прошедшей волны
$$I_\text{d} = \frac{(1-R)^2}{|1-Re^{-i\Phi}|^2} a_0^2 = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R\sin^2(\Phi/2)} I_0,$$
что позволяет сделать некоторые выводы.

Отраженная волна. Аналогичный расчёт приведет к
$$I_1 = RI_0, \qquad I_2 = R(1-R)^2 I_0, \qquad I_3 = R^3(1-R)^2 I_0, \qquad \ldots,$$
$$a_1 = \sqrt{R}a_0, \qquad a_2 = -\sqrt{R}(1-R)a_0, \qquad a_3 = -\sqrt{R}R(1-R)a_0, \qquad \ldots,$$
где знак в a – следставие появления $\lambda/2$. Результирующая амплитуда будет иметь вид
$$a_r = \sqrt{R}a_0 - \sqrt{R}(1-R)a_0 e^{-i\Phi}\left[1 + Re^{-i\Phi} + R^2 e^{-2i\Phi} + \ldots\right], \quad \Rightarrow \quad I_r = \frac{4R\sin^2(\Phi/2)}{(1-R)^2 + 4R\sin^2(\Phi/2)} I_0,$$
где всё также $\Phi = k\Delta = \frac{4\pi}{\lambda} nd\cos\psi$.

При $R \ll 1$ увидим случай двулучевой интерференции, при $R \approx 1$ уже интереснее (рис. 4). В окрестности

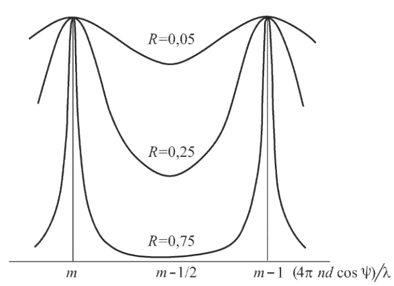


Рис. 4: Пики для пластинки

максимума m-го порядка $\Phi = \pi m + \varphi$, тогда ввиду малости φ можем написать
$$I_\text{d} = \frac{I_\text{max}}{1 + R\varphi^2/(1-R^2)}, \quad \frac{R\varphi^2}{(1-R)^2} = 1 \text{ при } I_\text{d} = {}^1\!/_2 I_\text{max}, \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi = 2\varphi = 2\frac{1-R}{\sqrt{R}}.$$

Разрешающая способность. Имеем дело с интерференцией высоких порядков, поэтому требуется высокая *монохроматичность света* ($\lambda/\delta\lambda \gg m$).

Def 2.1. Разрешающая способность определяет наименьшее расстояние между близкими спектральными линиями, которые изображаются в виде раздельных спектральных линий. Если максимум одного пика находится не ближи полуширины другого, то их считают различимыми.

Определим минимальную разность $\delta\lambda = \lambda' - \lambda$. Для интерферометра Фабри-Перо верно, что n одинаков для двух длин волн. В точке A' – максимум m-го порядка для λ', а потому $\Phi' = 2\pi m$. В той же точке λ имеет разность фаз $\Phi = 2\pi m + (1-R)/\sqrt{R}$, т.е в рассматриваемой точке $\Phi' - \Phi = \delta\Phi = (1-R)/\sqrt{R}$. Но ввиду $n = n'$ верно, что $\delta\Phi/\Phi = |\delta\lambda/\lambda|$. Учтя, что в максимуме $\Phi = 2\pi m$, находим
$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{2\pi\sqrt{R}}{1-R} m, \text{ — \textit{разрешающая способность спектрального прибора.}}$$

Интерферометр Фабри-Перо. Он состоит из двух стеклянных или кварцевых пластинок P_1 и P_2, между которыми обычно находится воздух. Отражающая способность доводится до 95-98 %, шероховатости допустимы в пределах 0.01λ. Интерференционная картина состоит из концентрических колец равного наклона. Ввиду малости угла ψ условие главного интерференционного максимума $2h\cos\psi = m\lambda$ можно записать в виде $h(2-\psi^2) = m\lambda$ откуда *угловая дисперсия* равна
$$\frac{d\psi}{d\lambda} = -\frac{m}{2h\psi} = -\frac{1}{\lambda\psi},$$

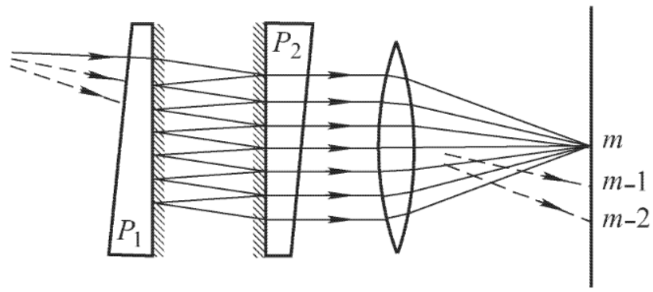


Рис. 5: Интерферометр Фабри-Перо.

которая значительно превышает дисперсию других спектральных приборов.

Интерферометр Фабри-Перо как резонатор. В этом разделе волны распространяются нормально к поверхности резонатора. Соответсвенно прибор прозрачен для длин вол излучения, удовлетворяющих условию $m\lambda = 2L$. Также L – расстояние между зеркалами $\gg \lambda$, а также $1 - R \ll 1$. Добротность запишем, как

$$Q = 2\pi \frac{E_0}{\Delta E},$$

где E_0 – накопленная энергия, а ΔE – энергия, теряемая за период колебаний. В указанных предположениях верно, что есть стоячая волна, эквивалентная суперпозиции двух бегущих.

Def 2.2. *Резонатор* – колебательная система, устройство, способное накапливать энергию колебаний, поставляемую из внешнего источника.

Если поток энергии в каждой их волн равен P, то энергия равна

$$E_0 = 2P\tau_L = 2PL/c,$$

где $\tau_L = L/c$ – время, за которое волна проходит расстояние L между пластинами. Поскольку можность потерь составляет $(1-R)2P$, то за период колебаний T теряется энергия

$$\Delta E = 2P(1-R)T.$$

Так как $\lambda = cT$, то по определению находим

$$Q = 2\pi \frac{E_0}{\Delta E_0} = 2\pi \frac{L}{\lambda} \frac{1}{1-R}.$$

Зная добротность, мы можем найти эффективную ширину линии излучения, выходящего из резонатора: $\Delta\lambda_{\text{eff}} = \lambda/Q$, по определению добротности $Q = \omega/\Delta\omega$, преобразованного с помощью равенства $\Delta/\omega = \Delta\lambda/\lambda$ вытекающего из $\omega = 2\pi c/\lambda$. В таком случае приходим к формуле вида

$$\Delta\lambda = \lambda \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\lambda^2}{2L}.$$

Таким образом выделяемые резонатором линии являются в высокой степени монохроматическими.

Теперь читателю предоставляется прочитать текст идущий далее, а потом вернуться к этим строчкам, где я опишу интерферометр Фабри-Перо как спектральный прибор. Если он у нас заполнен однородной однородной средой с показателем преломления n.

Порядок спектра $m = 2h/\lambda$, где h – расстояник между отражающими поверхностями. Для такого порядка спектра:

$$\delta\Phi = (1-R)/\sqrt{R}, \qquad \Phi_{\max} = 2\pi m, \qquad \Phi_{\min} = \frac{4\pi dn\cos\psi}{\lambda}.$$

Только теперь n и ψ имеют разные значения для λ и λ'. И только $n\sin\psi = n'\sin\psi' = \sin\varphi$. Тогда должно быть:

$$\frac{\delta\Phi}{\Phi} = \frac{\delta n}{n} - \frac{\sin\psi\delta\psi}{\cos\psi} - \frac{\delta\lambda}{\lambda}.$$

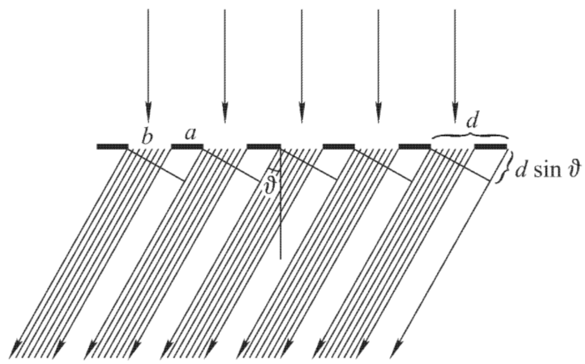
С помощью условия:

$$\frac{\delta n}{n} + \frac{\cos\psi}{\sin\psi}\delta\psi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\delta\Phi}{\Phi} = \frac{1}{\cos^2\psi}\frac{\delta n}{n} - \frac{\delta\lambda}{\lambda}.$$

То, подставляя значения $\delta\Phi$, $\Phi_{\max}$ и $\delta n = \left(\frac{dn}{d\lambda}\right)\delta\lambda$ разрешающая способность получается

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{2\pi\sqrt{R}m}{1-R}\left(1 - \frac{1}{\cos^2\psi}\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right).$$

2.3 Дифракционная решетка



Имеем простейший случай: лучи падают перпендикулярно, d – *период решетки*, ϑ – угол дифракции. Разность хода между волнами, исходящими из соседних щелей

$$\Delta = d\sin\vartheta,$$

а разность фаз

$$\delta = kd\sin\vartheta = 2\pi d\sin\vartheta/\lambda.$$

Поле, наблюдаемое от первой щели определяется формулой

$$E_1 = \frac{b\sin\alpha}{\alpha}.$$

Поля же излучаемые остальными щелями:

$$E_2 = E_1 e^{-i\delta}, \qquad E_3 = E_1 e^{-2i\delta}, \qquad \ldots \qquad E_N = E_1 e^{-i(N-1)\delta}.$$

Полное поле представится как сумма всех:

$$E = E_1\frac{1-e^{-iN\delta}}{1-e^{-i\delta}} = E_1\frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}e^{-i(N-1)\delta/2} \qquad \Rightarrow \qquad I = I_1\left[\frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}\right]^2.$$

Заметим, что при

$$\delta/2 = m\pi \qquad \Leftrightarrow \qquad d\sin\vartheta = m\lambda.$$

получаем $I = N^2 I_1$ – *главные максимумы*, где m – целое число, *порядок главного максимума*. Это соотношение так же определяет направление ϑ на главные максимумы.

Если у решетки $a = b$, то все главные максимумы четных порядков вообще не появятся, так как условие максимума решетки перейдёт в условие минимума дифракции на одной щели $I_1 = 0$:

$$d\sin\vartheta = 2n\lambda \qquad \Rightarrow \qquad b\sin\vartheta = n\lambda.$$

Таким образом в рассматриваемом направлении ни одна щель, а потому и решетка в целом не излучают.

Дифракционные минимумы получаются из условия:

$$d\sin\vartheta = \left(m\frac{p}{N}\right)\lambda.$$

Максимумы, получающиеся между двумя соседними минимумами, называются *второстепенными максимумами*. Таким образом между двумя соседними максимумами располагается $(N-1)$ минимум и $(N-2)$ добавочный максимум. И на эту всю красоту накладывается минимумы дифракции на одной щели.

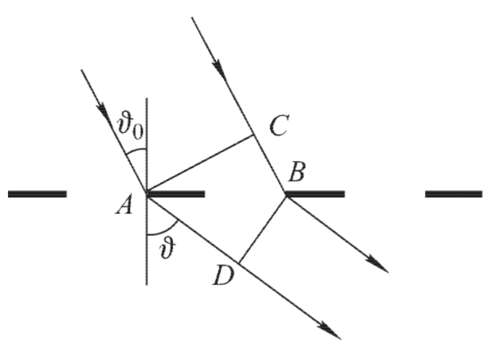
Второстепенные максимумы находятся примерно между минимумами давайте определим направление δ на них:

$$\frac{\delta}{2} = \left(m + \frac{2p+1}{2N}\right)\pi.$$

Найдём теперь интенсивность второстепенных максимумов в окрестности главного, то есть при $N \gg 1$ и малых номерах этих максимумов p, а $\delta/2$ – мал:

$$\sin\frac{\delta}{2} = \pm\sin\frac{2p+1}{2N} \approx \pm\frac{2p+1}{2N}\pi \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{I_1}{\pi^2}\left(\frac{2N}{2p+1}\right)^2 = \frac{4}{(2p+1)^2\pi^2}I_{\text{гл}}.$$

Таким образом интенсивности максимумов к главному относятся как очень малые величины. И при большом числе щелей они вообще не играют роли.



Если же волна падает на решетку под углом, то разность хода между соседними щелями становится равной:

$$d(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0).$$

Мы имеем новое условие на главные максимумы:

$$d(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0) = m\lambda,$$

а минимумы:

$$d(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0) = \left(m + \frac{p}{N}\right)\lambda.$$

И наконец если решетка – грубая, то при углах падения ϑ_0 близких к $90°$ можно написать:

$$d\cos\vartheta_0 \cdot (\vartheta - \vartheta_0) = m\lambda.$$

Где $d\cos\vartheta_0$ – типа новый период, который мы уже вправе от угла падения уменьшать, делая решетку менее грубой.

2.4 Диф-решетка как спектральный прибор

Как мы видели выше дифракционная решетка имеет раскидывать волны, падающие на нее, под разными углами. Введём характеристики такого спектрального прибора.

Угловой дисперсией называют производную $d\vartheta/d\lambda$. Чем она больше, тем больше расстояние между двумя спектральными линиями.

$$\frac{d}{d\lambda}\left[d(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0) = m\lambda\right] \qquad \rightsquigarrow \qquad \frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\vartheta} = \frac{\sin\vartheta - \sin\vartheta_0}{\lambda\cos\vartheta}.$$

Таким образом угловая дисперсия не зависит от параметров решетки, а определяется только длинами волн и углами падения и дифракции.

Дисперсионная область – максимальная ширина спектрального интервала $\Delta\lambda$, при котором ещё нет перекрытия спектральных линий.

Пусть падающие длины лежат в диапазоне: $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$. Пусть $(m+1)$ порядок λ с m порядком λ'. Тогда

$$\begin{cases} d(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0) = m\lambda' \\ d(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0) = (m+1)\lambda \end{cases} \quad\Rightarrow\quad m\lambda' = (m+1)\lambda \quad\Rightarrow\quad \lambda' - \lambda \equiv \Delta\lambda = \lambda/m.$$

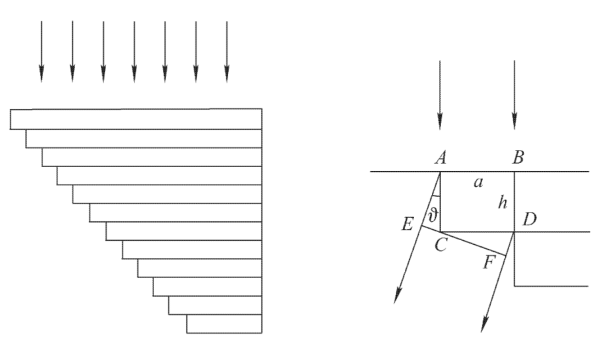
Разрешающая способность аппарата – $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$. А наименьшая разность длин волн двух спектральных линий $\delta\lambda$, при которой спектральный аппарат разрешает эти линии, называется *спектральным разрешаемым расстоянием.* То есть мы стремимся, чтобы дифракционные картины около каждого спектра были как можно более узкими, вдобавок к узкой дисперсии.

Спектральные линии с близкими длинами волн λ и λ' считаются разрешенными, если главный максимум дифракционной картины для одной длины волны совпадает по своему положению с первым дифракционным минимумом в том же порядке для другой длины волны.

$$\begin{cases} d(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0) = m\lambda' \\ d(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0) = \left(m + \dfrac{1}{N}\right)\lambda \end{cases} \quad\Rightarrow\quad m\lambda' = (m + \frac{1}{N})\lambda \quad\Rightarrow\quad \lambda' - \lambda \equiv \delta\lambda = \lambda/(Nms).$$

Таким образом получаем критерий Релея $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nm$.

2.5 Эшелон Майкельсона



Для такой картинки разность хода будет:

$$\Delta = nh + a\sin\vartheta - h\cos\vartheta = m\lambda.$$

Положения главных максимумов определятся из условия

$$nh + a\sin\vartheta - h\cos\vartheta = m\lambda.$$

Найдём дисперсию:

$$\frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{m}{a\cos\vartheta + h\sin\vartheta} \approx = \frac{a}{m} = \frac{h(n-1)}{a\lambda}.$$

Что описывает эшелона как достаточно хороший спектрометр. Его дисперсионная область:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda^2}{h(n-1)}.$$

Она очень мала, что является большим недостатком эшелона.

Разрешающая способность:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nm = \frac{Nh(n-1)}{\lambda}.$$

Эту формулу можно уточнить, приняв во внимание дисперсию по длине волны от стекла:

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{Nh}{\lambda}\left[(n-1) - \lambda\frac{dn}{d\lambda}\right].$$

И аналогичные аналогичными рассуждениями:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m - h(dn/d\lambda)}, \qquad \frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{m - h(dn/d\lambda)}{a\cos\vartheta + h\sin\vartheta}.$$

2.6 Разрешающая способность призмы

3 Элементы фурье-оптики

3.1 Дифракция на решетке как краевая задача

3.1.1 Метод Рэлея

Пусть решетка – бесконечна, её переднюю поверхность будем называть **входом**, а заднюю – **выходом**. Плоскость решетки примем за XY, а ось Z по распространению волны.

Падающую волну представим в виде: $E_0 = Ae^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}$. Тут полагаем $z = 0$, ищем поле на входе решетки, в силу линейности:

$$E_{\text{вых}} = DE_{\text{вх}}.$$

Здесь введен коэффициент пропускания D решетки. Теперь чтобы решить задачу о дифракции на решетки нам достаточно найти D, тогда мы уже будем знать поле на выходе из решетки, а значит и во всем пространстве дальше. Уравнение

$$\Delta E + k^2 E = 0$$

должно при $z = 0$ переходить в $E_{\text{вых}}(x,y) = D(x,y)E_{\text{вх}}(x,y)$. Такой подход к решению задача называется *методом Рэлея*.

Для одномерной решетки можно представить D как функцию с периодом d:

$$D = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} D_m e^{-impx}, \qquad p = \frac{2\pi}{d}.$$

Таким образом:

$$E_{\text{вых}} = DE_{\text{вх}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} AD_m e^{i[\omega t - (k_x + mp)x]}.$$

Общим решением нашего волнового уравнения будет:

$$E = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{i(\omega t - \boldsymbol{q_m r})},$$

на которое надо наложить в связи с граничным условием:

$$q_{mx} = k_x + mp, \qquad q_{my} = 0.$$

И так как $\boldsymbol{q}^2 - k^2$, то $q_{mz} = \sqrt{k^2 - q_{mx}^2}$ – для однородных волн и $q_{mz} = -i\sqrt{k^2 - q_{mx}^2}$ для неоднородных (поверхностных).

Тогда для поля на выходе можно написать:

$$E_{\text{вых}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_m e^{i(\omega t - q_{mx}x)} \qquad \Rightarrow \qquad a_m = AD_m.$$

Теперь если $k_x = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\sin\theta$, $q_{mx} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\sin\vartheta_m$ и $p = 2\pi/d$ то получаем основную формулу дифракционной решетки:

$$d(\sin\vartheta_m - \sin\theta) = m\lambda.$$

Что видим? Спектр за решеткой состоит из одних только главных максимумов, но это нормально, так как решетка бесконечна. В формулу для волны входят как однородные так и не однородные волны, а значит она описывает поле на любых расстояниях от решетки. При нормальном падении света наивысший порядок однородных волн $m \leqslant d/\lambda$, иначе имеем неоднородные волны, которые затухают как $\exp(-\chi_m z)$, где

$$\chi_m = \sqrt{k^2 - q_{mz}^2} = \frac{2\pi}{d}\sqrt{m^2 - (d/\lambda)^2}.$$

Интересно по-исследовать поле далеко от решетки. При $z \gg d$ оно состоит только из однородных волн. А если $d < \lambda$ то вообще из одной плоской волны ($m = 0$).

Тут можно найти красивый эффект **саморепродукции**. Каждое слагаемое в разложении нашей волны – поле плоской волны с пространственной частотой: $u_n = n\frac{2\pi}{d}$. Для точки отстоящей на z от решетки фаза n-ой плоской волны:

$$\varphi_n = \chi_n z = \sqrt{k^2 - q_{nx}^2} \approx kz - \frac{zq_{nx}^2}{2k},$$

что верно для волн с узким спектром $|q| \ll k$.

Сравним набег фаз n-ой плоской волны с $\varphi_0 = kz$:

$$\Delta\varphi_n = \varphi_0 - \varphi_n = \frac{z}{2k}\left(\frac{2\pi}{d}\right)^2 n^2 = \pi\frac{\lambda z}{d^2}n^2.$$

В плоскости наблюдения отстоящую от решетки на $z_1 = \frac{2d^2}{\lambda}$ (это будет находится в зоне френелевской дифракции) будем иметь разность фаз $\Delta\varphi_n = 2\pi n^2$. Заметим так же, что разность фаз от любых двух плоских волн будет $\Delta\varphi = 2\pi(n_1^2 - n_2^2)$ тоже кратна 2π. Значит в разложении волны ничего не меняется, так как это период, значит в плоскости z_1 поле повторяет по интенсивности пропускающую функцию решетки, ну а точнее:

$$f(x, z_1) = e^{ikz_1} f_0(x).$$

Это же свойство повторения характерно и для

$$z_m = m\frac{2d^2}{\lambda}\,(m = 1, 2\ldots).$$

Этот эффект еще также носит названия **эффекта Таблота**.

Теперь посмотрим на небесконечную решетку.

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(f)e^{-ifx}df.$$

На выходе поле:

$$E_{\text{вых}} = A\int_{-\infty}^{+\infty} C(f)e^{-f(k_x+f)x}df.$$

Решение тогда будет:

$$E = A\int_{-\infty}^{+\infty} C(f)e^{-i\boldsymbol{qr}}df.$$

Задавая функцию пропускания для такой конечной решетки:

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\infty < x < -L, \\ \sum\limits_{-\infty}^{\infty} D_m e^{impx}, & \text{если } -L < x < +L, \\ 0, & \text{если } +L < x < +\infty. \end{cases}$$

Вычислим коэффициент Фурье:

$$C(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} D(x)e^{ifx}dx = \frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} D_m\frac{\sin[L(f - mp)]}{f - mp}.$$

И получаем:

$$E = \sum_m E_m = \frac{A}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} D_m\frac{\sin[L(f - mp)]}{f - mp}e^{-i\boldsymbol{qr}}df = \frac{Ad}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} D_m\frac{\sin[(N/a)(fd - 2m\pi)]}{fd - 2m\pi}e^{i\boldsymbol{qr}}df.$$

Интенсивность такой волны достигает максимума когда знаменатель обращается в нуль, то есть когда $q_x =$

$k_x + mp = 0$. Получаем направление на главный максимум:

$$\frac{\sin[(N/2)(fd - 2m\pi)]}{(fd - 2m\pi)} = \frac{N}{2}$$

Так же можно определить направления на главные минимумы. В итоге получили все очень зачетающимся с теорией про диф решетки и даже больше!

Стоит ещё сказать про **соотношение неопределенности**.

Рассматривая щель b освещаемую нормально падающей волной имеем для выходной волны:

$$f_0(x) = \{1, |x| \leqslant b, 0, |x| \geqslant b.$$

Фурье коэффициент находим как:

$$C_0(u) = b\frac{\sin \frac{b}{2}u}{\frac{b}{2}u}$$

Тут ширина первого максимума составляет $|\Delta u| \lesssim \frac{2\pi}{b}$ Посмотрев на пропускание щели заметим соотношение

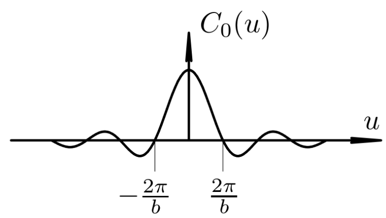


Рис. 6: К соотношению неопределенностей на плоской щели.

неопределенности:

$$\Delta x \cdot \Delta u \sim 2\pi.$$

Пространственная протяженность Δx определяется характером самого препятствия. Разброс же плоских волн за отверстием даёт дифракционную расходимость пучка света за отверстием:

$$\Delta u = k\Delta(\sin\alpha) \quad \Rightarrow \quad \Delta(\sin\alpha) \approx \frac{\lambda}{b} \quad \Rightarrow \quad \Delta\alpha \approx \frac{\lambda}{b}.$$

3.1.2 Метод Аббе

Работаем все с теми же понятиями. Сначала за объект возьмём дифракционную решетку. Так же при падении параллельных лучей монохроматического света у нас до какого-то порядка максимума будут однородные волны, а дальше неоднородными, которые затухая, на расстояниях порядка λ в наш объектив не попадут.

Поставим перед объективом диафрагму, пропускающую определенные порядки спектров. Например, если пропускается лишь нулевой, то о решетке(объекте) мы никакой информации не получим, а в плоскости изображения получим равномерно освещенное поле.

Поэтому возьмём диафрагму, пропускающую m и $m+1$ порядки. Которые оставят только плоские волны, которые будут интерферировать между собой:

$$E_m = a_m \cos(\omega t - \boldsymbol{k}_m \boldsymbol{r}), \qquad E_{m+1} = a_{m+1} \cos(\omega t - \boldsymbol{k}_{m+1} \boldsymbol{r}).$$

Примем за плоскость решетки XY, волна распространяется в сторону Z. Посмотрим на какую-нибудь плоскость $z = \mathrm{const}$ и найдём расстояние между интерференционными полосами в ними:

$$\Delta\varphi = (k_{m+1,x} - k_{m,x})\Delta x.$$

Видим, что интенсивность света будет периодически повторяться $\Delta\varphi = 2\pi, 4\pi, \ldots$ (типа саморепродукция). И шириной интерференционной полосы возьмём Δx при $\Delta\varphi = 2\pi$.

Направления на взятые максимумы:

$$d \cdot (\sin\vartheta_m - \sin\theta) = m\lambda, \qquad d \cdot (\sin\vartheta_{m+1} - \sin\theta) = (m+1)\lambda.$$

Так же знаем:

$$k_{m,x} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\sin\vartheta_m \qquad k_{m+1,x} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\sin\vartheta_{M+1}$$

Тогда получаем:

$$k_{m+1,x} - k_{m,x} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(\sin\vartheta_{m+1} - \sin\vartheta_m) = \frac{2\pi}{d}.$$

Таким ширина полосы: $\Delta x = \frac{2\pi}{2\pi d} = d$. И экстраполируя не на ближайшие максимумы аналогично получаем

$$\Delta x = \frac{d}{\Delta m}.$$

Стоит обобщить, сказав, что чем больше дифрагированных волн различных порядков проходит через диафрагму, тем совершеннее получается изображение.

Решетка бралась как простейший объект, для которого хватает оставить наименее совершенное изображение, которое даст только понятие о её периодичности. Тогда оценим разрешающую способность объектива в который нормально попали 1ый и -1ый максимумы. Пусть у объектива ещё показатель преломления n. Минимальные период решетки, при котором:

$$d\sin\alpha = \frac{\lambda}{n} \qquad \Rightarrow \qquad l_{\text{мин}} = \frac{\lambda}{n\sin\alpha}.$$

Нормальная такая оценка получилось, с точностью до домножения на константу порядка единицы.

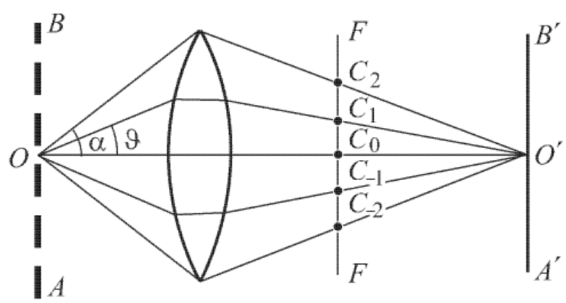
Упрощение связанное с рассмотрением объекта-решетки не принципиально. За объектом произвольной формы возникнут самые разные дифрагировавшие пучки. Угол дифракционной расходимости на первый минимум будет таким, что

$$nl\sin\vartheta \sim \lambda,$$

для l – линейного размера объекта. Минимальные же размеры объекта для лучей падающих под углом α будет определятся условием $\vartheta \sim \alpha$, а именно опять

$$l_{\min} \sim \frac{\lambda}{n\sin\alpha}.$$

О чем же думал Аббе? Что давайте смотреть на изображения, которые даёт нам линза в такой же манере (или любой другой оптический прибор). В фокусе мы получаем дифракционную картину из точек C_k, которую



Аббе назвал первичным изображением объекта. Далее по Гюйгенсу-Френелю можно рассчитать световое поле далее за фокальной плоскостью, пусть они соберутся нашим объективом хоть где-то дальше, тогда получим *вторичное изображение* или *вторичную дифракцию*.

3.2 Разрешающая способность при когерентном и некогерентном освещении

Рассматриваем идеальные оптические системы, а конечный рассматриваемый объект как совокупность точечных источников, каждый из которых изображается кружком Эйри(с окружающими его дифракционными кольцами). Наша задача сводится к рассмотрению двух случаев точечных

1. некогерентных источников — складываются их интенсивности — самосветящиеся — телескоп;

2. когерентых источнико — складываются их напряженности — освещаемые — микроскоп.

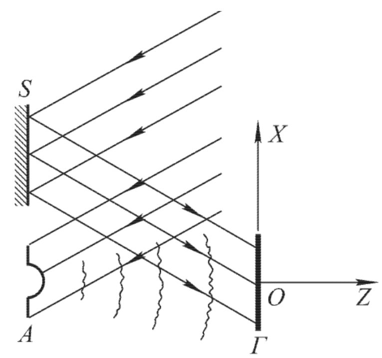
Разрешающие способности соответственно:

$$\text{телескоп: } \vartheta_{\text{мин}} = 1,22\frac{\lambda}{D} \qquad \text{микроскоп: } l_{\text{мин}} = 0.61\frac{\lambda}{n\sin\alpha}$$

где α – апертурный угол, l – расстояние между кружками Эйри, ϑ – угловой размер наблюдаемого объекта.

4 Голография

Идея голографии Габора заключается в том, что свет, попадая на объект рассеивается, и рассеянные лучи несут все информацию о форме и рельефе объекта. Однако для восстановления из таких лучей изображения нужна ещё информация о фазе изначально падавшего пучка, которую можно получить, если предварительно разделить этот пучок и часть его пустить на зеркало, чтобы переотразить в область, где мы хотим получать голограмму. Пучок, рассеивающийся на предмете называется, называется *предметным*, а несущий информацию о фазе – *опорным*. Полученная картина на Г записывается, например на чувтсвительную пластину, и называется голограммой, от греческого «голог» – полный, «графе» – пишу. Позже осветив её той же опорной волной можно получить восстановленное изображение объекта.



Запись голограммы – очень тонкое дело. Необходимая степень монохроматичности света: $\boxed{\dfrac{\lambda}{\delta l} \gtrsim m}$, где m – максимальный порядок интерференции наблюдающийся при голографировнии.

Для хорошей установки и объекта с линейными размерами L этот порядок можно оценить $\boxed{m \sim \dfrac{L}{\lambda}}$. Таким образом должно быть: $\boxed{\delta\lambda < \dfrac{\lambda^2}{L}}$.

Требования к размеру источника тоже достаточно жестки: $\Delta x = \lambda/\alpha$, где α – угол схождения крайних интерферирующих лучей. По порядку это что-то вроде $\alpha = h/l$, где h – ширина опорного пучка, а l – расстояния между предметом и голограммой. Таким образом $\boxed{\Delta x < \dfrac{\lambda l}{h}}$.

И так, о чем же сама голография. Представим поле рассеянной волны и отраженной:

$$u = a(\boldsymbol{r})e^{i[\omega t - \Phi(\boldsymbol{r})]}, \qquad v = be^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})}.$$

Тут мы сделали упрощение, что поля не векторные, а скалярные, что для нас не сильно критично, и при таком упрощении $a(\boldsymbol{r})$, $\Phi(\boldsymbol{r})$ и b будем считать вещественными. На пластинке Г интенсивность:

$$I = v^*u + vu^* + v^*v + u^*u, \qquad I_0 = ba(x,y,0)e^{i[k_x x - \Phi(x,y,0)]} + ba(x,y,0)e^{-i[k_x x - \Phi(x,y,0)]} + b^2 + a^2(x,y,0).$$

где мы направили ось Z перпендикулярно плоскости $\Gamma = XY$.

Допустим теперь, что нашу пластину, покрытую фотоэмульсией мы проявили и скопировали, получив позитив голограммы. Пусть у позитива пропускаемость $D = I_0$, такую позитивную голограмму можно использовать для восстановления $u(\boldsymbol{r}, t)$. Для этого голограмму просвечивают таким же $v(\boldsymbol{r}, t)$, он испытает дифракцию на голограмме типа как на диф-решетке. По методу Рэлея получим поле на выходе и будем искать решение волнового уравнения:

$$E_{\text{вых}} = Dv(x,y,0) = I_0 be^{i(\omega t - k_x x)}, \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2 E = 0.$$

Будем искать решение для E в виде $E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$, с граничными условиями:

$$E_{1\ \text{вых}} = b^2 a(x,y,0)e^{i[\omega t - \Phi(x,y,0)]}, \qquad E_{3\ \text{вых}} = b^3 e^{i(\omega t - k_x x)},$$
$$E_{2\ \text{вых}} = b^2 a(x,y,0)e^{i[\omega t + \Phi(x,y,0) - 2k_x x]}, \qquad E_{4\ \text{вых}} = ba^2(x,y,0)e^{i(\omega t - k_x x)}.$$

Будем решать. Проще всего найти функцию $E_3 = b^3 e^{i(\omega t - \boldsymbol{kr})} = b^2 v(\boldsymbol{r}, t)$, это есть ни что иное, как опорная волна, распространяющаяся за голограмму.

Основной же интерес для голографии представляет собой поле E_1, b – постоянно, тогда:

$$E_1 = b^2 a(x,y,z)e^{i[\omega t - \Phi(x,y,z)]} = b^2 u(\boldsymbol{r}, t).$$

Действительно, видим, что это волна, уходящая от голограммы. Она даст мнимое изображение объекта, в том же самом месте, в котором он находился до получения голограммы.

Для нахождения E_2 сначала посмотрим на случай, когда опорный луч падает нормально плоскости голограммы, тогда $k_x = 0$, и немного другое граничное условие дадут решение

$$E_{2\ \text{вых}} = b^2 a(x, y, 0) e^{i[\omega t + \Phi(x,y,0)]} \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{E}_2(x, y, z) = b^2 a(x, y, z) e^{i[\omega t + \Phi(x,y,z)]}.$$

Такая волна снова создаёт мнимое изображение, как и только что рассмотренная выше E_1, но она распространяется к голограмме, а не от нее, значит не может служить решением рассматриваемой нами задачи. Чтобы починиться в уравнении Гельмгольца заменим $z \mapsto -z$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial (-z)^2} + k^2 E = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E_2 = b^2 a(x, y, -z) e^{i[\omega t \Phi(x,y,-z)]}.$$

Теперь волна идёт от голограммы, является решением нашей краевой задачи, и формирует таким образом действительное изображение.

5 Кристаллооптика

5.1 Плоские волны в кристаллах

Поведение света всё также описывается уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{D}}, \qquad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{H}},$$

однако усложняются материальные уравнения:

$$D^j = \varepsilon_i^j E^i,$$

где ε_{ij} – *тензор диэлектрической проницаемости*, или *диэлектрический тензор*.

Рассмотрим плоские монохроматические волны вида

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})},$$

где $\boldsymbol{A} \in \{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{D}\}$. Понятно, что

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = -i \left[\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H}\right], \qquad \partial_t \boldsymbol{D} = -i\omega \boldsymbol{D}, \qquad \ldots$$

Подставив это в уравнения Максвелла, вводя верно волновой нормали $\boldsymbol{N} = \frac{v}{\omega} \boldsymbol{k}$, получаем

$$\boldsymbol{D} = -\frac{c}{v} \left[\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{H}\right], \qquad \boldsymbol{H} = \frac{c}{v} \left[\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{E}\right],$$

где v – нормальная скорость волны.

Актуально, как никогда, значение вектора Пойтинга

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi} \left[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}\right].$$

Lem 5.1. *Вектор пойтинга $\boldsymbol{S}$ определяет направление световых лучей, то есть $S \parallel \boldsymbol{u} = d_{\boldsymbol{k}} \omega$.*

Стоит заметит, что в кристаллая $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{N}$ не совпадают по направлению. Однако, как видно из формул, плоские волны в кристалле поперечн в отношении векторов $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{H}$. Вектора $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{S}$ лежат в плоскости, перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{H}$.

Получается, что если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$ не сонаправлены, то зная направление $\boldsymbol{E}$ мы знаем направление и $\boldsymbol{D}$, а тогда и $\boldsymbol{H}$, и $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{S}$ соответственно тоже. При $\boldsymbol{E} \parallel \boldsymbol{D}$ любая прямая $\perp \boldsymbol{E}$ может служить направлением магнитного поля. Подставляя $\boldsymbol{H}$ в $\boldsymbol{D}$ можем найти

$$\boldsymbol{D} = \frac{c^2}{v^2} \boldsymbol{E} - \frac{c^2}{v^2} \left(\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{e}\right) \boldsymbol{N},$$

и, т.к. $(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{N}) = 0$, то скалярно умножая на $\boldsymbol{D}$ находим

$$v^2 = c^2 \frac{(\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E})}{D^2}.$$

Таким образом вектор $\boldsymbol{E}$ в кристале является *главным*.

5.2 Оптически одноосные кристаллы

Def 5.2. *Оптически одноосными* называют кристаллы, свойства которых обладают симметрей вращения относительно некоторого направления, называемого *оптической осью кристалла*.

Разложим $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$ на составляющие параллельные оптической оси, и нормальный к ней, тогда

$$\boldsymbol{D}_\parallel = \varepsilon_\parallel \boldsymbol{E}_\parallel, \qquad \boldsymbol{D}_\perp = \varepsilon_\perp \boldsymbol{E}_\perp,$$

где $\varepsilon_\parallel$ и $\varepsilon_\perp$ – продольная и поперечные диэлектрические проницаемости кристалла. Плоскости, в которой лежат оптическая ось кристалла и нормаль $\boldsymbol{N}$, называется *главным сечением кристалла*.

Def 5.3. Если электрический вектор $\boldsymbol{D}$ перпендикулярен к главному сечению, то скорость волны не зависит от направдения её распространения, такая волна называется *обыкновенной.*

Тогда $\boldsymbol{D} \equiv \boldsymbol{D}_\perp$, тогда и $\boldsymbol{D} = \varepsilon_\perp \bar{E}$, соответственно

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_\perp \boldsymbol{E}, \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} D = H\frac{c}{v} \\ H = E\frac{c}{v} \end{array} \quad \Rightarrow \quad v = v_\perp \equiv v_\mathrm{o} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_\perp}}.$$

Def 5.4. Если электрический вектор $\boldsymbol{D}$ лежит в главном сечении, то скорость волны зависит от направления распространенияЮ и такую волну называют *необыкновенной.*

Вектор $\boldsymbol{E}$ в таком случае также лежит в главном сечении, и $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_N + \boldsymbol{E}_D$. В таком случае, верно

$$\boldsymbol{H} = \frac{c}{v}\left[\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{E}_D\right], \qquad E_D = \frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}}{D} = \frac{E_\parallel D_\parallel + E_\perp D_\perp}{D} = \frac{1}{D}\left(\frac{D_\parallel^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{D_\perp^2}{\varepsilon_\perp}.\right)$$

Соответсвующие проекции можно заменить на $D\sin\alpha$, где α – угол между оптической осью и волновой нормалью. Вводя $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{N_\perp^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{N_\parallel^2}{\varepsilon_\perp}$ можем перейти к

$$E_D = D\left(\frac{\sin^2\alpha}{\varepsilon_\parallel} + \frac{\cos^2\alpha}{\varepsilon_\perp}\right) = \frac{D}{\varepsilon}, \qquad H = \frac{c}{v}E_D, \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = c\sqrt{\frac{N_\perp^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{N_\parallel^2}{\varepsilon_\perp}} \equiv v_\parallel.$$

Когда $N_\perp = 0$, то понятно, что $v = c/\sqrt{\varepsilon_\perp} = v_\perp = v_\mathrm{o}$, – нет разницы между обыкновенной и необыкновенной. В случае $N_\parallel = 0$ верно, что $v = v_\mathrm{e} \overset{\mathrm{def}}{=} c/\sqrt{\varepsilon_\parallel}$.

Термин оптическая ось введен для обозначения прямой, вдоль которой обе волны распростаняются с одинаковыми скоростями, и таким прямых в общем случае, поэтому кристалл называется *оптически двуосным.* В рассмотренном частном случае оси совпали, и получился *оптически одноосный* кристалл.

Lem 5.5. *В общем случае волна, вступающая в кристалл изотропной среды, разделяется внутри кристалла на две линейно поляризованные волны: обыкновенную, вектор электрической индукции которой перпендикулярен к главному сечению, и необыкновенную с вектором электрической индукции, лежащим в главном сечении.*

Про показатели преломления. В кристаллая верны законы преломления для *волновых нормалей*: их направления подчиняются закону Снеллиуса

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi_\perp} = n_\perp, \qquad \frac{\sin\varphi}{\sin\psi_\parallel} = n_\parallel,$$

где $n_\perp$ и $n_\parallel$ – показатели прелоления обыкновенной и необыкноуенной волн, т.е.

$$n_\perp = \frac{c}{v_\perp} = n_\mathrm{o}, \qquad n_\parallel = \frac{c}{v_\parallel} = \left(\frac{N_\perp^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{N_\parallel^2}{\varepsilon_\perp}\right)^{-1/2}.$$

Постоянная n_o называется *обыкновенным показателем преломления.* Когда необыкновенная волна распространяется перпендикулярно к оптической оси ($N_\perp = 1$),

$$n_\parallel = \sqrt{\varepsilon_\parallel} \overset{\mathrm{def}}{=} n_\mathrm{e}.$$

Величина n_e – *необыкновенный показатель преломления кристалла.*

Двойное лучепреломление. При преломлении на первой поверхности пластинки волна внутри кристалла разделяется на обыкноыенную, и необыкновенную. Эти волны поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях и распространяются внутри пластинки в разных направлниях и с разными скоростями. Таким образом можно добиться пространственного разделения двух лучей.

Поляризационные устройства. Комбинация кристаллов – поляризационная призма[1] . Существуют *однолучевые* (на полном внутренне отражении) и *двулучевые.*

Def 5.6. Допустимая разность углов наклона между крайними лучами падающего на призму пучка называется *апертурой полной поляризации призмы.*

Def 5.7. *Дихроизм* – свойство кристаллов, состоящее в различном поглощении веществом света в зависимости от его поляризации. Всего различают: *линейный дихроизм* (при $\perp$ направлениях линейной поляризации); *эллиптический дихроизм* (различное поглощение для правой и левой эллиптической поляризации); *круговой дихроизм* (различные направления круговой поляризации, иначе – *эффект Коттона*).

[1]Самая первая призма – *николь*, 1828 г.

Анализ поляризованного света. *Пластинка в четверть волны* ($\lambda/4$), вносит дополнительную разность фаз в $\pi/2$ между проходящими через неё лучами, поляризованными во взаимно перпедикулярных плоскостях.

Интерференция поляризованных лучей.

Волны в двуосных кристаллах.

Лучи и волновые нормали.

5.3 Двойное преломление в электрическом и магнитном полях (эффект Керра)

Электрический эффект Керра состоит в том, что многие изотропные тела при введении в постоянное электрическое поле становится оптически анизотропным. В частности, ведут себч как одноосные двупреломляющие кристаллы, оптическая ось которых параллельна приложенному электрическому полю.

Пусть внешнее поле $\boldsymbol{E}_0$ *однородно*. Понятно, что $n_\mathrm{e} - n_\mathrm{o}$ зависит от $\boldsymbol{E}_0$ в виде

$$n_\mathrm{e} - n_\mathrm{o} = qE_0^2,$$

для малых полей, где q зависит только от вещества и от λ. В таком случае разность фаз между обыкновенной и необыкновенными лучами будет

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_\mathrm{e} - n_\mathrm{o})l = 2\pi BlE^2,$$

где l – толщина образца, а $B \equiv q/\lambda$ – *постоянная Керра*. **Явление Керра объясняется анизотропией самих молекул.**

Для эффекта Керра в газах, в случае полностью анизотропных молекул, можно показать, что при $\boldsymbol{E} \parallel \boldsymbol{E}_0$ показатель преломления будет *необыкновенным*, тогда

$$n = 1 + \frac{2\pi}{3}N\beta,$$

где β – поляризуемость молекулы вдоль оси молекулы. Если же $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{E}_0$, то показатель преломления будет обыкновенным, и

$$n_\mathrm{o} = 1 + 2\pi N\beta\langle\sin^\vartheta\rangle,$$

где ϑ – угол[2] между $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{s}$.

Забавный факт: из полученных соотноешний можем получить

$$\frac{n_\mathrm{e} - n}{n_\mathrm{o} - n} = -2,$$

что выполняется для большинства веществ.

Проводя некоторый аккуратны расчёт можем получить выражение для постоянной Керра:

$$n_\mathrm{e} - n_\mathrm{o} = \frac{n-1}{5}\frac{\beta}{kT}E_0^2.$$

5.4 Линейный электрооптический эффект Поккельса

Рассмотрим *ангармонический осциллятор* при наличии внешнего постоянного электрического поля E_0

$$\ddot{r} + 2\gamma\dot{r} + \omega_0^2 r + \beta r^2 = -\frac{e}{m}E_0,$$

где β – постоянная. Считая $r = r_0 + q$ можем перейти к уравнению с новой частотой

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + (\omega_0^2 + 2\beta r_0)q = 0,$$

откужа видно изменение частоты колебания на

$$\Delta\omega_0^2 = -\frac{2e\beta}{m\omega_0^2}E_0^2.$$

Смещение собственных частот меняет кривую дисперсии, т.е. показатель преломления n среды. В простейшем случае, когда ω_0 одна (см. §84), изменение n определяется выражением

$$\Delta n = \frac{\partial n}{\partial\omega_0^2}\Delta\omega_0^2 = -\frac{\partial n}{\partial\omega_0^2} - \frac{\partial n}{\partial\omega_0^2}\frac{2e\beta}{m\omega_0^2}E_0 = \frac{\partial n}{\partial\omega}\frac{e\beta}{m\omega\omega_0^2}E_0.$$

При фиксированном внешнем $\boldsymbol{E}_0$ величина Δn зависит от направления распространения света. Это сказывается на двойном преломлении среды. *Изменеие двойного преломления вещества из-за смещения собственной частоты во внешнем электрическом поле называется электрооптическим эффектом Поккельса.*

[2] Дописать.

В этом эффекте изменения пропорциональны первой степени E_0. *Эффект Поккельса может наблюдаться только в кристаллах, не обладающих центром симметрии.* Устройство, основанное на эффекте Поккельса, называют *ячейкой Поккельса.*

Она представляет собой кристалл, помещаемый между двумя скрещенными николями. Такое устройство действует так же, как и ячейка Керра. Николи не пропускают свет, когда нет внешнего электрического поля, но при наложении такого поля пропускание появляется. Необходимо, чтобы кристалл до наложения внешнего электрического поля не давал двойного преломления. Этого можно достигнуть, если взять оптически одноосный кристалл, вырезанный перпендикулярно к оптической оси, а свет направить вдоль этой оси. Внешнее поле Eq может быть направлено либо перпендикулярно (поперечный модулятор света), либо параллельно распространению света (продольный модулятор).

5.5 Вращение плоскости поляризации

Если линейно поляризованный свет проходит через плоскопараллельный слой вещества, то в некоторых случаях плоскость поляризации света оказывается повернутой относительно своего исходного положения. Это явление называется *вращением плоскости поляризации* или оптической активностью. Если вещество не находится во внешнем магнитном поле, то оптическая активность и вращение плоскости поляризации называются *естестыенными.* В противоположнос случае говорят о *магнитном вращении плоскости поляризации*, или *эффекте Фарадея.*

Вращение против часовов – *положительное*, по часовой – *отрицательное.* Это свойство, как и в случе с шурупом, не зависит от того, в каком из двух прямо противоположных напралний распространяетя свет[3] .

В области прозрачности и малого поглощения эта история хорошо согласуется с опытом формула Друде

$$\xi = \alpha L, \qquad \alpha = \sum_i \frac{B_i}{\lambda^2 - \lambda_i^2},$$

где B_i – постоянные, λ_i – длины волн, соответсвующие собтсвенным чатсота рассматриваемого вещества.

По Френелю вращение плоскости поляризации – проявление *кругового двойного лучепрпеломления.* Две волны, которые могут распространятся в оптически активной среде с разными скоростями, поляризованы *по кругу*: по левому и по правому.

Покажем достаточность такого предположения:

$$\begin{aligned} E_x &= A\cos\xi\cos(\omega t - kz), \\ E_y &= A\sin\xi\cos(\omega y - kz), \end{aligned} \qquad \xi = -\alpha z, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} E_x &= \tfrac{A}{2}\cos(\omega t - kz + \alpha z) + \tfrac{A}{2}\cos(\omega t - kz - \alpha z), \\ E_y &= \tfrac{A}{2}\cos(\omega t - kz + \alpha z + \pi/2) + \tfrac{A}{2}\cos(\omega t - kz - \alpha z - \pi/2). \end{aligned}$$

Разложим полученную волну на две: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\text{п}} + \boldsymbol{E}_{\text{л}}$, где для $\boldsymbol{E}_{\text{п}}$ и $\boldsymbol{E}_{\text{л}}$ имеет смысл ввеси $k_{\text{п}} = k - \alpha$ и $k_{\text{л}} = k + \alpha$. Полученные волны соответствуют правой и левой круговой поляризации. Скорости этих волн определяются выражениями

$$v_{\text{п}} = \frac{\omega}{k-\alpha}, \qquad v_{\text{л}} = \frac{\omega}{k+\alpha},$$

и соответсвующие показатели преломления $n = c/v$. Подробнее,

$$n_{\text{r}} = \frac{c}{v_{\text{r}}} = \frac{c}{\omega}(k-\alpha), \qquad n_{\text{l}} = \frac{c}{v_{\text{l}}} = \frac{c}{\omega}(k+\alpha), \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{\omega}{2c}(n_{\text{l}} - n_{\text{r}}).$$

Френель выдвинул гипотезу, что возможно независимое распространения поляризованных по кругу волн, с сохранением поляризации, которую подтвердил эксперементально. Тем самым задача объяснения вращения плоскости поляризации была сведена к задаче объяснения кругового двойного лучепреломления.

Поляризованные по кругу в противоположных направлениях волны в окрестности полос или линий поглощения могут отличаться не только скоростями распространения, но и коэффициентами поглощения. Тогда они выйдут с различными амплитудами. Если падающий свет был поляризован линейно, то выходящий будет поляризован эллиптически. Это явление называется круговым дихроизмом.

5.6 Магнитное вращение плоскости поляризации (эффект Фарадея)

Опыты Фарадея показали, что при наличии внешнего магнитного поля вдоль оптической оси системы, угол поворота зависит от длины пути l и напряженноести внешнего поля B, как

$$\xi = RlB,$$

де R – *постоянная Верде*, или *магнитная вращательная способность.*

[3]Если свет заставить пройти туда и обратно через естественно-активное вещество, отразив его от зеркала, то плоскость поляризации возвратится к своему исходисходному направлению.

При внесении в магнитное поле $\boldsymbol{B}$ у осцилляторов вещества появляются две новые резонансные частоты $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$, где Ω – ларморовская частота. Эти собственны частоты проявляеются не только в испускании (*прямой эффект Зеемана*), но и в поглощении света (*обратный эффект Зеемана*).

Нормальные волны, которые могут распространятся вдоль магнитного поля, поляризованы по кругу. Когда направления распространения света и магнитного поля совпадают, большей частоте $\omega_+ = \omega_0 + \Omega$ соответсвует вращение по, а меньшей ω_- – против часовой стрелки, если смотреть в направлении магнитного поля. Так как ω_+ и ω_- различны, то происходит сдвиг фаз волн, а соответсвенно, и поворот плоскости поляризации на гол

$$\xi = \frac{\omega l}{2c}(n_- - n_+) = \frac{\pi l}{\lambda}(n_- - n_+).$$

Если построить $n_- - n_+$, то можно увидеть, что, как и в случае ларморовского вращения Ω, вращение плоскости поляризации определяется только направлением магнитного поля $\boldsymbol{B}$ и не зависят от направления распространения света. При изменение на противоположное направления распространеняи света не изменятся, в противоположность естественного вращения.

Вообще, в эффекте Фарадея, воспользовавшись формулой Зеемана можно получить *формулу Беккереля* для постоянной Верде:

$$R = -\frac{e}{2mc^2}\lambda\frac{dn}{d\lambda},$$

где m – масса электрона, $e > 0$ – его абсолютный заряд.

Ещё можно было бы поговорить про *эффект Макалюзо и Корбино*, объясненный Фохтом, но оставим это на светлое будущее.

6 Рассеяние света

Def 6.1. *Оптически мутной* называют среду с $\langle n\rangle = \text{const}$, но содержащую макроскопические неоднородности. В таких средах свет *рассеивается в стороны*, иначе это явление называют *эффектом Тиндаля*[4].

В неоднородной неподвижной изотропной среде распространение света описывается уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{E}) = 0,$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0,$$

где $\varepsilon \equiv \varepsilon(x, y, z)$. Выделим $\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon$, где $\varepsilon_0 = \text{const}$.

Можем представить ЭМ поле в виде $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}'$, где $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H}_0$ удовлетворяют уравнениям Максвелла в однородной среде

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}_0 = \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}_0}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0) = 0,$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}_0}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{H}_0 = 0.$$

Принята номенклатура о том, что $\boldsymbol{A}_0$ – *падающая волна*, а $\boldsymbol{A}'$ – поле *рассеянного света.*

Вычитая последние две группы уравнений друг из друга, находим

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}' - \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}'}{\partial t} = \frac{\delta\varepsilon}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon_0\boldsymbol{E}') = -\operatorname{div}(\delta\varepsilon\,\boldsymbol{E}),$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}' - \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}'}{\partial t} = 0, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{H}' = 0.$$

И это очень похоже на уравнения Максвелла в однородной среде с ε_0, только первые два уравнения с *дополнительными источниками электромагнитных волн.* Введём

$$\delta\boldsymbol{P} = \frac{\delta\varepsilon}{4\pi}\boldsymbol{E},$$

тогда эти уравнения перейдут в

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}' - \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}'}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\delta\boldsymbol{P}, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon_0\boldsymbol{E}') = -4\pi\operatorname{div}(\delta\boldsymbol{P}).$$

Получается, в среде появляется дополнительная поляризация $\delta\boldsymbol{P} = \frac{\delta\varepsilon}{4\pi}\boldsymbol{E}$, так что каждый элемент объема δV получает *дополнительный дипольный момент* $\delta V \cdot \delta\boldsymbol{P}$. Они излучают, как колеблющийся *диполь Герца*, это и есть свет, рассеянный элементом объема δV.

[4] Теоретически обоснованным Рэлеем.

Рассеяние на шариках (рассеяние Ми). Пусть неоднородность создаётся шариками, радиуса a, расстояние между которыми $\gg a$. Тогда поле $\boldsymbol{E}$ внутри шарика вычисляется в контектсе однородного $\boldsymbol{E}_0$. Из электростатики следует

$$\boldsymbol{E} = \frac{3}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2}\boldsymbol{E}_0 = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\boldsymbol{E}_0,$$

где ε – диэлектрическая проницаемость шарика, ε_0 – окружающей среды. Тогда вектри шариков

$$\delta\boldsymbol{P} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{4\pi}\boldsymbol{E} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{4\pi}\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\boldsymbol{E}_0,$$

тогда дипольный момент шарика

$$\boldsymbol{p} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}(\varepsilon - \varepsilon_0)a^3\boldsymbol{E}_0.$$

Поляризованный свет. Разобраться с θ и ϑ. Пусть падающая волна *поляризована линейно*. Тогда векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{E}$ всё время параллельны одному и тому же неизменному направлению. Электрическое поле диполя (в волновой зоне) определяется выражением

$$E_1 = \frac{\sin\theta}{c^2 r}[\ddot{p}]_{t-r/v} = -\frac{\omega^2\sin\theta}{c^2 r}[p]_{t-r/v},$$

где $v = c/\sqrt{\varepsilon}$, а θ – угол между осью диполя $\boldsymbol{p}$ и направлением рассеянного излучения. Получается, *рассеянный свет поляризован линейно*, причём электрический вектор лежит в плоскости, проходящей через ось диполя $\boldsymbol{p}$ и направление излучения.

Считая интенсивностью усредненный вектор Пойтинга

$$I_1 = \frac{\sin^2\theta}{4\pi\varepsilon_0 v^3 r^2}\overline{\ddot{p}^2} = \frac{\omega^4\sin^2\theta}{4\pi\varepsilon_0 v^3 r^2}\overline{p^2}, \qquad I_0 = \frac{c}{4\pi}\overline{E_0 H_0} = \frac{v}{4\pi}\varepsilon_0\overline{E_0^2}, \qquad \Rightarrow \qquad I_1 = 9\varepsilon_0^2\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right)^2\frac{\pi^2 V_1^2}{\lambda^4}\frac{\sin^2\theta}{r^2}I_0,$$

где $V_1 = \frac{4}{3}\pi a^3$ – объем шарика. Интегрируя по сфере радиуса r с элементом поверхности $2\pi r^2\sin\theta\, d\theta$, находим

$$\mathcal{P}_1 = 24\pi^3\varepsilon_0^2\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right)\frac{V_1^2}{\lambda^4}I_0.$$

Естественный свет. Пусть теперь падающий свет *естественный*. Пусть рассеянный свет наблюдается в направлении OA под углом θ к оси его распространения Z. Угол θ – *угол рассеяния* (рис. 7). Направим ось X

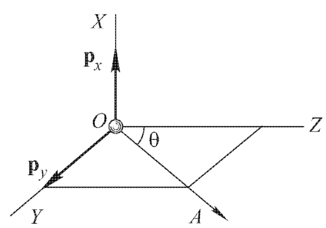


Рис. 7: Рассеяние естественного света

нормально к OA и OZ, в силу $\boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{E}_0$ верно, что $\boldsymbol{p} \parallel XY$, тогда по найденному значению для I_1 с $\theta = \pi/2$ и $\theta = \pi/2 - \vartheta$, можем найти интенсивности дипольных моментов $\boldsymbol{p}_x$ и $\boldsymbol{p}_y$. В силу ествественности падающего света, эти излучения *некогерентны*, точнее некогерентны интенсивности от $\boldsymbol{p}_x$ и $\boldsymbol{p}_y$:

$$I_{1,\boldsymbol{p}_x} = 9\varepsilon_0^2\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right)^2\frac{\pi^2 V_1^2}{\lambda^4}\frac{\sin^2\pi/2}{r^2}I_0, \qquad I_{1,\boldsymbol{p}_y} = 9\varepsilon_0^2\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right)^2\frac{\pi^2 V_1^2}{\lambda^4}\frac{\cos^2\vartheta}{r^2}I_0,$$

так что их можно просто сложить, тогда получим

$$I_1 = \frac{\omega^4}{4\pi\varepsilon_0 v^3 r^2}\left(\overline{p_x^2} + \overline{p_y^2}\cos^2\vartheta\right) = \frac{\omega^4}{4\pi\varepsilon_0 v^3 r^2}\frac{1 + \cos^2\vartheta}{2}\overline{p^2} = 9\varepsilon_0^2\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right)^2\frac{\pi^2 V_1^2}{\lambda^4}\frac{1 + \cos^2\theta}{2r^2}I_0,$$

где учтено $\overline{p_x^2} = \overline{p_y}^2 = \frac{1}{2}\overline{p^2}$. а формула для $\mathcal{P}_1$ останется без изменений.

Частично поляризованный свет. Полная линейная поляризация наблюдается только при $OA\perp$ направлению распространения падающего света, так как тогда $\boldsymbol{p}_y$ не даёт излучения.

Если же посчитать интенсивность I света, рассеиваемого объемом V, содержащим много шариков $N_{\text{шар}}V$, то, складывая интенсивности и рассматривая $r^3 \gg V$, найдём

$$I = 9\varepsilon_0^2\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right)^2\pi^2\frac{V_1^2}{\lambda^4}\frac{1 + \cos^2\theta}{2r^2}NVI_0.$$

Эта формула была получена Рэлеем, и по ней $I \sim \omega^{-4}$, что называют *законом Рэлея*, что справедливо для сред с частицами, размеры которых малы по сравнению с длиной волны.

Убывание интенсивности. Выделим цилиндр $\parallel OZ$ и рассмотрим баланс $I_0(z)-I_0(z+dz) = dI_0 = \mathcal{P}_1 N\,dz$, тогда

$$dI_0 = -\gamma I_0\,dz, \qquad \gamma = 24\pi^3\varepsilon_0^2\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\right)^2\frac{NV_1^2}{\lambda^4}, \quad \Rightarrow \quad I_0 = \mathrm{const}\cdot e^{-\gamma z},$$

где γ – *коэффициент рассеяния*.

Молекулярное рассеяние (рассеяние Рэлея). Стоит заметить, что в атмосфере рассеяние происходит не посторонними частицами, а самими *молекулами воздуха*. Такое рассеяние света называется *рэлеевским* или *молекулярным рассеянием*. На самом деле[5] молекулярное рассеяние вызывается тепловым флуктуациями показателя преломления, которые и делают среду оптически мутной.

Среда разбивается на $dV \ll \lambda^3$, при этом $N\,dV \gg 1$. Уравнения на $\boldsymbol{H}'$ и $\boldsymbol{E}'$ остаются верны, последовательными приближениями можем получить

$$\delta\boldsymbol{P} = \frac{\delta\varepsilon}{4\pi}\boldsymbol{E}_0, \qquad \boldsymbol{p} = \frac{\delta_i\varepsilon\cdot\delta_i V}{4\pi}\boldsymbol{E}_0.$$

Это выражение отличается от случая с «шариками» только коэффициентом, так что верно, что

$$I_i = \frac{\pi^2}{\lambda^4}\frac{1+\cos^2\theta}{2r^2}I_0(\delta_i V)^2\overline{(\delta_i\varepsilon)^2}.$$

Так, например, в случае идеального газа, верна формула

$$\varepsilon_i = 1 + 4\pi\beta\frac{N_i}{\delta_i V},$$

где β – поляризуемость молекулы, а N_i – число молекул в $\delta_i V$. Так как $\delta_i V$ фиксирован, то $\delta_i\delta\varepsilon_i = 4\pi\beta\delta N_i$, т.е. рассеяние вызывается *флуктуациями числа молекл* в $\delta_i V$.

Аккуратно работая с этими флуктуациями, можем получить *формулу Рэлея*:

$$I = \frac{2\pi^2}{\lambda^4}\frac{V}{N}(n-1)^2\frac{1+\cos^2\theta}{r^2}I_0,$$

что верно для изотропных молекул.

Для неидеальных газов и жидкостей можно получить формулу, вида

$$I = \frac{\pi^2}{\lambda^4}\frac{1+\cos^2\theta}{2r^2}VI_0\cdot\left(\rho\frac{d\varepsilon}{d\rho}\right)^2\frac{kT}{(-v\partial_v P)_T},$$

полученную Эйнштейном в 1910 г.

7 Нелинейная оптика

7.1 Явление Мандельштама-Бриллюэна

Рассмотрим случай слабой неоднородности для уравнений относительно $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{E}'$:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}' - \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}'}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\delta\boldsymbol{P}, \qquad \mathrm{div}(\varepsilon_0\boldsymbol{E}') = -4\pi\,\mathrm{div}(\delta\boldsymbol{P}),$$
$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}' - \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}'}{\partial t} = 0, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{H}' = 0,$$

где $\delta\boldsymbol{P} = \frac{\delta\varepsilon}{4\pi}\boldsymbol{E}_0$. Эти уравнения линейный и однородны как относительно полей, так и относительно $\delta\varepsilon$. Отсюда следует, что если представить $\delta\varepsilon$ в виде $\delta\varepsilon = \sum\delta_i\varepsilon$, то в линейном приближении можем рассеянное излучение может быть получено суперпозицией полей, рассейяных одной неоднородностью.

Рассмотрим случай, когда $\delta\varepsilon = a\exp(-i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})$, где a и $\boldsymbol{K}$ – постоянные. Представляя падающую волну, как плоскую

$$\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{A}e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}, \qquad \boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{B}e^{i(\omega t-\boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}.$$

Разобьеё среду плоскостями с расстоянием $\Lambda = \frac{2\pi}{K}$, тогда фазы вторичных источников будут одинаковы (рис. 8). Чтобы источники не гасили, а усиливали друг друга, необходимо выполнение *условия Брэгга-Вульфа*:

$$2\Lambda\sin(\theta/2) = m\lambda,$$

где θ – угол рассеяния, а m – порядок дифракционного спектра.

Покажем, что $m = 1$. Все плоские, отраженные различными слоями, сложатся в волну $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{A}'e^{i(\omega t0\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}')}$, где волновой вектор $\boldsymbol{k}'$ определяет направление распространения отраженных волн. С другой стороны, допол-

[5] 1908 г., М. Смолуховский.

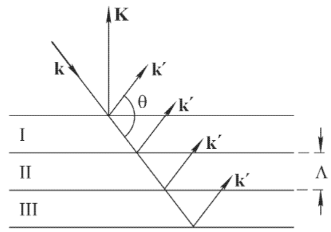


Рис. 8: Иллюстраия к явлению Мандельштама-Бриллюэна

нительная поляризация среды

$$\delta \boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{E}_0}{4\pi}\delta\varepsilon = \frac{a\boldsymbol{A}}{4\pi}e^{i[\omega t - (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{K})\boldsymbol{r}]}.$$

Подставляя эти выражения во второе уравнение и сравнивая показатели, получаем $\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k} = \boldsymbol{K}$, откуда

$$2\Lambda\sin(\theta/2) = \lambda,$$

таким образом на синусоидальной неоднородности диэлектрической проницаемости в линейном приближении получается дифракционный спектр *только первого порядка*.

Любую неоднродность в среде можно по Фурье представить в виде суперпозиции плоских синусоидальных неоднородностей различных направлений. Они рассеивают свет *незаивисимо* друг от друга, но при фиксированном направлении эффективны только неоднородности, волновой вектор $\boldsymbol{K}$ которых направлен по *биссектрисе угла, дополнительного к θ до π*.

Учтём $\delta\varepsilon \equiv \delta\varepsilon(t)$, считая $\varepsilon \equiv \varepsilon(\rho)$, запишем $\Delta\varepsilon = (d\varepsilon/d\rho)\Delta\rho$, где ρ – плотность. Всякая неоднородность плотности в среде – *источник звуковых волн*. Разложим $\Delta\rho$ в интеграл Фурье и возьмём только те гармоники, которые существенны для рассеяния волн в рассматриваемом направлении, $\boldsymbol{K}$ которых определен выше, которому соответсвует определенная Ω и направления распространения звуковой волны: $\upuparrows \boldsymbol{K}$ и $\downdownarrows \boldsymbol{K}$. Тогда $\delta\varepsilon$ представляется суммой

$$\delta\varepsilon = \delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2, \qquad \delta\varepsilon_1 = a_1 e^{i(\Omega t - \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})}, \qquad \delta\varepsilon_2 = a_2 e^{i(\Omega t + \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})}.$$

Им соответсвуют вектор дополнительной поляризации среды

$$\delta\boldsymbol{P}_1 = \frac{\boldsymbol{E}_0}{4\pi}\delta\varepsilon_1 = \frac{a_1\boldsymbol{A}}{4\pi}e^{i[(\omega+\Omega)t - (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{K})\cdot\boldsymbol{r}]},$$

$$\delta\boldsymbol{P}_2 = \frac{a_2\boldsymbol{A}}{4\pi}e^{i[(\omega-\Omega)t - (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{K})\cdot\boldsymbol{r}]}.$$

Таким образом рассеянное излучение будет происходить с частотами $\omega + \Omega$ и $\omega - \Omega$ (модуляция световой волны акустической волны). Это явление называется *тонкой структурой линий рэлевского рассеяния* или *рассеянием Мандельштама-Бриллюэна*. Смещение частоты $\Omega = Kv = (2\pi/\Lambda)v$, где v – скорость звука, а Λ – длина звукоыой волны. Итого, можем записать

$$\Omega = \frac{4\pi v}{\lambda}\sin\frac{\theta}{2} = 2\omega n\frac{v}{c}\sin\frac{\theta}{2},$$

где c – скорость света в вакууме, а n – показатель преломления среды.

Иная трактовка дублета Мандельштама-Бриллюэна – *доплеровское изменение частоты света* при отражении от аккустической волны. Доплеровское изменение частоты определяется формулой

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{2v\sin\theta/2}{c/n},$$

что соответсвует предыдущему соотношению.

Забавный факт про жидкости: там в рассеянном свете есть несмещенная компонента, всё потому, что

$$\delta V = (\partial_P V)_S \delta P + (\partial_S V)_P \delta S,$$

то есть флуктуации объема обусловлены не только флуктуациями давления, но и флутуациями энтропии, второе и вызывает *несмещенную компоненту*.

Нелинейный эффект. Рассмотрим мощный световой импульс, генерирующем давление

$$\mathcal{P} = \frac{1}{8\pi}\left(\rho\frac{d\varepsilon}{d\rho}\right)E^2,$$

где $\rho d_\rho\varepsilon \sim 1$, соответсвенно $\mathcal{P}$ может достигать 10^5 атм, а тогда световые и оптические волны надо рассматривать *совместно*. Они описываются сложной охапкой нелинейный диффуров из электродинамики и акустики, что генерирует целый пучок разных эффектов, *вынужденное рассеяние рассеяние Мандельштама-Бриллюэна*.

Пусть,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_0 &= \boldsymbol{A}_0\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r}),\\
\boldsymbol{E}_1 &= \boldsymbol{A}_1\cos\left[(\omega+\Omega)t - \boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}\right],\\
\boldsymbol{E}_2 &= \boldsymbol{A}_2\cos\left[(\omega-\Omega)t - \boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}\right],\\
\boldsymbol{E}_3 &= \boldsymbol{A}_3\cos[\omega t - \boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}],
\end{aligned}$$

– напряженности электрического поля падающей и трех рассеянных волн Мандельштама-Бриллюэна. Последние три волны возникают при рассеянии на тепловых флуктуациях, интенсивности их малы, но давление определяется $(\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3)^2$. Однако возбуждение звуковых волн связано только с низкочастотными членами, с косинусами разностных аргументов, вспоминая $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}$, находим $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{A}_1\cos(\Omega t - \boldsymbol{K}\boldsymbol{r})$ – волнуЮ распространяющуюся с той же фазой и в том же направлении, что и первичная звуковая волна из-за тепловых флуктуаций. Так будет происходить *параметрическое усиление* акустической волны, и всех световых волн, на ней рассеянных. Это будет продолжаться до тех пор, пока интенсивность рассеянного света не станет сравнимой с интенсивностью падающего. Интересно, что *вынужденное рассеяние Мандельштама-Бриллюэна когерентно.*

7.2 Комбинационное рассеяние света (эффект Рамана)

Def 7.1. *Сателлит* – система линий измененной частоты в рассеянном свете, сопровождающих падающий свет.

Изменение длины волны оказывается значительно больше, чем при рассеянии Мандельштама. Это явление называется *комбинационным рассеянием света* или *эффектом Рамана.*

Экспериментальные ниблюдения. Далее будем считать, что частоты сетеллитов отличаются от возбуждающей линии на $\{\Delta\omega^j_{\text{комб}}\}$. При переходе от одной спектральной линии первичного пучка к другой $\{\Delta\omega^j_{\text{комб}}\}$ *сохраняется*, – она характерна для рассматриваемого вещества.

Каждому сателлиту с частотой $\omega - \Delta\omega_{\text{комб}}$, смещенной в красную сторону спектра, соответствует сателлит с частотой $\omega + \Delta\omega_{\text{комб}}$, смещенный в фиолетовую сторону. Первые называют *красными* или *стоксовыми*, вторые – *фиолетовыми* или *антистоксовыми.*

Интенсивности фиолетовых сателлитов значительно меньше интенсивностей, соответствующих им красных. Постоянные $\Delta\omega_{\text{комб}}$ совпадают с собственными частотами $\Omega_{\text{инфр}}$ инфракрасных колебаний.

Линии комбинационного рассеяния света более или менее *поляризованы.* Характер поляризации красных и фиолетовых сателлитов, соотвествующих $\Delta\omega_{\text{комб}}$, всегда одинаков и не зависит от частоты основной линии.

Теоретическое объяснение. В поле световой волны $\boldsymbol{E}$ электроны внутри молекулы приходят в колебания, и молекула приобретает индуцированный диполный момент $\boldsymbol{p} = \beta\boldsymbol{E}$. Вообще β – тензор, определяемый мгновенным положением атомыных ядер, но сами ядра совершают беспорядочное тепловое движение, $\Rightarrow \beta \neq \text{const}$, в частности представима наложением гармноических колебаний, частоты которых определяются собственными частотами инфракрасных колебаний молекулы, возникает *модуляция колебаний* индуцированных моментов $\boldsymbol{p}$.

Если внешнее поле $\boldsymbol{E}$ меняется с частотой ω, то в колебаниях дипольного момента $\boldsymbol{p}$ появляются частоты $\omega \pm \Omega_{\text{инфр}}$, такие же частоты появятся ив излучении дипольных моментов.

Математически, скажем что у молекула $f = 3s - 6$ степеней свободы на *внутреннее движение ядер молекул.* Выберем нормальные обобщенные координаты для описания q_j, и пусть $q_j = a_j\cos(\Omega_j t + \delta_j)$ с инфракрасной частотой Ω_j и хаотически меняющейся фазой δ_j. Пусть β для простоты скаляр:

$$\beta = \beta_0 + (\partial_{q_m}\beta)q^m = \beta_0 + \tfrac{1}{2}a_m(\partial_{q_m}\beta)\cdot\left(e^{i(\Omega_m t+\delta_m} + e^{-i(\Omega_m t+\delta_m}\right).$$

Наконец, подставляя $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t}$, находим

$$\boldsymbol{p} = \beta_0\boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t} + \tfrac{\boldsymbol{E}_0}{2}a_m(\partial_{q_m}\beta)\left(e^{i(\omega+\Omega_m)t+\delta_m} + e^{i(\omega-\Omega_m)t-\delta_m}\right),$$

откуда видно возникновение дуплетов в излучении, а также ясно, что волны, рассеиваемые отдельными молекулами, *некогерентны.*

Проявление квантмеха. До тех пора, пока атомы тяжелые, классическая теоря $\pm$ справляется. но только через кванты получается показать, что интенсивность красных сателлитов всегда больше интенсивности соответсвенных фиолетовых сателлитов.

Пропуская выкладки, можем получить, что для отношени интенсивностей верно, что

$$\frac{I_{\text{кр}}}{I_{\text{фиол}}} = \frac{N_n}{N_m}, \qquad \frac{N_n}{N_m} = \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m}{kT}\right) = \exp\left(\frac{\hbar|\Omega_{nm}|}{kT}\right), \quad \Rightarrow \quad \frac{I_{\text{кр}}}{I_{\text{фиол}}} = \exp\left(\frac{\hbar|\Omega_{nm}|}{kT}\right),$$

что вполне объясняет наблюдаемое соотношение.

Вынужденное комбинационное рассеяние. В мощных импульсах лазерного излучения наблюдается явление, называемое *вынужденным комбинационным рассеянием света*, которое возникает из-за обратного воздействия световой волны на молекулы среды. Точнее на молекулу действует сила $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{E}$, индуцированные $\boldsymbol{p} \sim \boldsymbol{E}$, так что $F \sim E^2$. Поле $\boldsymbol{E}$ складывается из $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{E}'$, где $\boldsymbol{E}'$ слабое, но усиливается.

Среди слагающих сил $\big([\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}']\cdot\nabla\big)\,(\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}')$ присутствуют члены с произведением полей $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{E}'$, частоты которых совпадают с соответствующими часотами инфракрасных колебаний молекулы, они вызывают *резонансное усиление* соответствующих линий комбинационного рассеяния. Вынужденные колебания ядер молекул происходят в фазе с падащей волной, а потому вынужденноме комбинационное рассеяние когерентно с падающей волной.

7.3 Нелинейная поляризацим среды

При распространении света в среде нелинейные явления в оптике связаны прежде всего с *нелинейной зависимостью* вектора поляризации среды $\boldsymbol{P}$ от напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ световой волны. Если поле $\boldsymbol{E}$ ещё не «очень сильное», то вектор $\boldsymbol{P}$ можно разложить во степеням $\boldsymbol{E}$:

$$P_j = \alpha_{jk}E_k + \alpha_{jkl}E_kE_l + \alpha_{jklm}E_kE_lE_m + \ldots,$$

где α_{jk} – *линейная поляризуемость среды*, а тензоры высших порядков называют соответственно квадратичной, кубичной, и т.д. *поляризуемостями.* Поле $\boldsymbol{E}$ предполагаем монохроматичным, среду однороднойЮ немагнитной, без дисперсии, а α – функции частот ω. Для изотропной среды все тензоры α вырождаются в скаляры.

В средах, в которых все точки яввяются центрами симметрии, квадратичный член равен нулю. Однако, можем рассмотреть *качественно* процессы, полагая

$$\boldsymbol{P} = \alpha\boldsymbol{E} + \alpha_2 E\boldsymbol{E} + \alpha_3 E^2\boldsymbol{E} + \ldots,$$

где мы принимаем ущербность такого приближения, но зато можем сделать несколько правильных шагов. Разобьем поляризацию, а также индукцию, на линейную и нелиненую: $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_{\mathrm{l}} + \boldsymbol{P}_{\mathrm{nl}}$, где нелинейная часть $\boldsymbol{P}_{\mathrm{nl}} = \alpha_2 E\boldsymbol{E} + \alpha_3 E^2\boldsymbol{E} + \ldots$, а линейная $\boldsymbol{P}_{\mathrm{l}} = \alpha\boldsymbol{E}$. Тогда и $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}$ предсавится, как $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{l}=\mathrm{E}} + 4\pi\boldsymbol{P}_{\mathrm{l}}$ и нелинейная $\boldsymbol{D}_{\mathrm{nl}} = 4\pi\boldsymbol{P}_{\mathrm{nl}}$. Линейная часть $\boldsymbol{D}_{\mathrm{l}} = \varepsilon\boldsymbol{E}$, где ε – диэлектрическая проницаемость. Теперь можем записать уравнения Максвелла в виде

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}, & \qquad & & \operatorname{rot}\boldsymbol{H} &= \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial\boldsymbol{P}_{\mathrm{nl}}}{\partial t},\\
\operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial c}, & & \Rightarrow & \operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t},\\
\operatorname{div}\boldsymbol{D} &= 0, & & & \operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{E}) &= -4\pi\operatorname{div}\boldsymbol{P}_{\mathrm{nl}},\\
\operatorname{div}\boldsymbol{H} &= 0, & & & \operatorname{div}\boldsymbol{H} &= 0.
\end{aligned}$$

Система решается *методом последовательных приближений.* В нулевом приближение $\boldsymbol{P}_{\mathrm{nl}} = 0$, получаются уравнения *линейной электродинамики.* В качестве нулевого приближения рассмотрим

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{A}\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}),$$

где $\boldsymbol{k}^2 = \varepsilon\omega^2/c^2$. Для нахождения первого приближения вместо $\boldsymbol{E}$ подставим $\boldsymbol{E}_0$, после чего снова получим линейные уравнения, но неоднородные. Правые части могут восприниматься как если бы каждый dV переизлучал волны аки *диполь Герца* с моментом $\boldsymbol{P}_{\mathrm{nl}}\,dV$. Такими итерациями может найти сколь угодно приближений.

Вообще среда диспергирует. Формально всё будет работать если взять эту охапку диффуров и решать её оидельно для слагаемых с частотой ω, частотой 2ω, и т.д., подставляя везде свои ε. По идее это работает.

7.4 Первое приближение. Генерация вторых гармоник.

В нулевом приближении можем найти нелинейную добавку

$$P_{\mathrm{nl}} = \alpha_2 E_0^2 = \frac{\alpha_2 A^2}{2} + \frac{\alpha_2 A^2}{2}\cos\left[2(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\right].$$

Как ни странно – это вполне адекватный результат, первое слагаемое называют *оптическим детектированием*, илиоптическим выпрямлением, – возникновением в нелинейной среде постоянной электрической поляризации при прохождении мощной световой волны.

Второе слагаемое гармонически меняется во времени. Оно вызывает *генерацию второй гармоники в нелинейной среде*, т.е. волны с частотой $\omega_2 = 2\omega$. Найдём поле этой гармоники:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\boldsymbol{H} &= \frac{\varepsilon[2\omega]}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + i\omega\frac{4\pi\alpha_2}{c}A\boldsymbol{A}e^{2(i\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})},\\
\operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}, & \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{E} = A_1 e^{2i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}, \qquad \boldsymbol{H} = B_1 e^{2i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})},\\
\operatorname{div}\boldsymbol{E} &= \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0,
\end{aligned}$$

что соответсвует частному решению от вынужденных колебаний. Из второго уравнения следует, что $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{H}$, также верно, что $(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}_1) = (\boldsymbol{k}\cdot\bar{B}_1) = 0$, т.е плоская волна поперечна относительно $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Учитывая, что $k^2c^2 = \omega^2\varepsilon[\omega]$ можем получить:

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{2\pi\alpha_2}{\varepsilon[\omega]-\varepsilon[2\omega]}A\boldsymbol{A}.$$

Если же к частном решению, добавим общее, то увидем, что можем подобрать такую его амплитуду, чтобы интенсивность второй гармоники в начале координат обращалась в нуль:

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{2\pi\alpha_2}{\varepsilon[\omega]-\varepsilon[2\omega]}A\boldsymbol{A}\left(\cos[2(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]-\cos[2\omega t-\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}]\right),$$

где $k_2^2 = \omega_2^2\varepsilon[2\omega]/c^2$. Возводя в квадрат и усредняя можем найти интенсивность

$$I_1 \sim \frac{\alpha_2^2\omega^2x^2I^2}{n^2c^2}\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2, \qquad \beta = \frac{(2\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{r}}{2} = \frac{(2k-k_2)x}{2},$$

где x – пройденное расстояние. Тут принебрегли различием $n[\omega]$ и $n[2\omega]$.

Таким образом с возрастанием x возрастает интенсивность второй гармоники, когда $\beta\in[0,\pi/2]\cup[\pi,3\pi/2]$, и т.д. В этих случаях *энергия переходит от исходной волны ко второй гармоники*. На других интервалах энергия возвращается от второй, к первой. Условие $\beta=\pi/2$ определяет расстояние, до которого происходит перекачка энергии. Это расстояние называется *когерентной длиной*, для которого верно, что

$$L_{\text{coh}} = \frac{\lambda}{4|n[\omega]-n[2\omega]|},$$

где λ – длина исходной волны.

Когда $n[\omega] = n[2\omega]$ верно, что $2\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_2$, тогда и L_{coh} обращается в бесконечность. Это условие – *фазовый синхронизм*.

Ещё в 1962 году было эксперментально продемонстрирована возможность осуществить фазовый синхронизм на частотах ω и 2ω между обыкновенной и необыкновенной волной в некоторых кристаллах.

Аналогичное явление – *генерация волн с суммарной и разностной частотами*. Если на нелинейную среду направить два можных пучка света с различными частотами ω_1 и ω_2, то из неё будет выходить свет с частотами $\{\omega_1,\,\omega_2,\,2\omega_1,\,2\omega_2,\,\omega_1{+}\omega_2,\,\omega_1{-}\omega_2\}$. Так можно получить излучение в инфракрасной и ультрафиолетовой области, например, ≈ 80 нм.

7.5 Второе приближение. Самофокусировка.

Для нахождения *второго приближения* воспользуемся

$$\boldsymbol{P}_{\text{нл}} = \alpha_2(E_0+E_1)(\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_1)+\alpha_3E_0^2\boldsymbol{E}_0,$$

однако учитывая только изотропные среды переходим к $\alpha_2 = 0$, а тогда

$$\boldsymbol{P}_{\text{nl}} = \frac{3\alpha_3A^2}{4}\boldsymbol{A}\cos\left[\omega t-\boldsymbol{kr}\right]+\frac{\alpha_3A^2}{4}\boldsymbol{A}\cos[3\left(\omega t-\boldsymbol{kr}\right)],$$

где второе слагаемое соответствует генерации тритьей гармоники.

Интересно взглянуть на первое слагаемое: множитель $\boldsymbol{A}\cos[\omega t-\boldsymbol{kr}]$ – исходная падающая волна $\boldsymbol{E}_0$, которую можно заменить на $\boldsymbol{E}$, тогда

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}-\frac{1}{c}\left[\varepsilon(\omega)+3\pi\alpha_3(\omega)A^2\right]\partial_t\boldsymbol{E}=0, \qquad \Rightarrow \qquad n = n_0+n_2A^2,$$

где учет рассматриваемого слагаемого эквивалентен изменению $\varepsilon(\omega)$ среды.

Вообще есть другие причины такого поведения: свет вообще давит на среду, греет среду, что приводит к изменению плотности и показателя преломления среды. В жидкостях это может быть высокочастотный эффект Керра, но во всех этих случаях $\Delta n\sim A^2$. К слову, n_2 бывает >0 и <0.

Так приходим к прохождению пучка через оптических неоднородную среду, в которой луч загибается в сторону большего показателя преломления. С этим связано явление *самофокусировки* ($n_2>0$) и дефокусировки ($n_2<0$).

Рассмотрим плоскопараллельный пучок лучей кругового сечения, диаметра D. Показатель преломления в пространстве с пучком $n = n_0+n_2A^2$, пусть $n_2>0$. Из-за дифракции пучок расширяется, однако все направления луче сосредоточатся в пределах конса с углом при вершине $2\vartheta_{\text{диф}}$, где $\vartheta_{\text{диф}} = 1.22\lambda/(Dn_0)$. Предельный угол скольжения ϑ_0 определяется соотношением

$$\cos\vartheta_0 = \frac{n_0}{n_0+n_2A^2}, \qquad \Rightarrow \qquad \vartheta_0^2\approx 2A^2\frac{n_2}{n_0}.$$

Еслм $\vartheta_{\text{диф}} > \vartheta_0$ то пучок будет расширяться. При $\vartheta_{\text{диф}} > \vartheta_0$ пучок начнём сжиматься в тонкий шнур, – *самофокусировка.*

При $\vartheta_{\text{диф}} - \vartheta_0$ имеет место *самоканализация*, для которой можем найти необходимую мощность пучка

$$P = \frac{cn_0 A^2}{8\pi}\frac{\pi D^2}{4} = \frac{cn_0 D^2}{32}A^2, \qquad \Rightarrow \qquad P_{\text{порог}} \approx c\frac{(0.61\,\lambda)^2}{16 n_2}.$$

Расстояние от края среды, на которой фокусируются крайние лучи пучка, легко оуенить:

$$f_{\text{эф}} = \frac{D}{2\vartheta_{\text{диф}}} \approx \frac{n_0 D^2}{2.44\,\lambda},$$

что называют *эффективным фокусным расстоянием для крайних лучей пучка.*

8 Световоды

8.1 Введение

Def 8.1. *Оптический волновод* – диэлектрическая структура, по которой может распространяться электромагнитная энергия в видимой и инфракрасной областях спектра.

Можно выделить ступенчатый и градиентный профиль волновода (рис. 9). Обычно покрытие оказывается

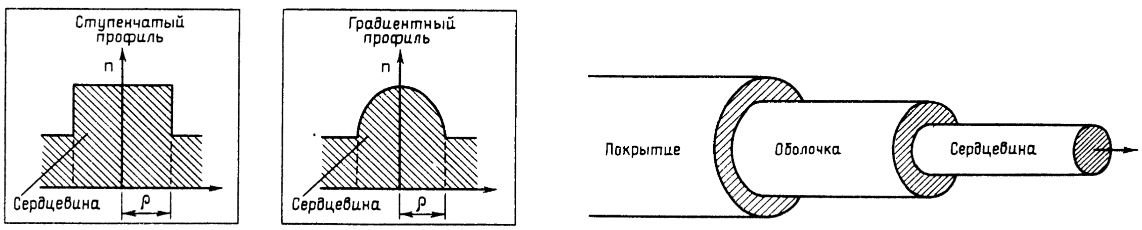


Рис. 9: Профиль показателя преломления для типичных оптических волокон.

полностью изолировано от сердцевины, так что его влиянем можно пренебречь.

Многомодовые и одномодовые волноводы. Оптические волноводы можно условно разделить на две группы – *многомодовые* (большая сердцевина) и *одномодовые* (маленькая сердцевина). Для многомодовых световодов справедлво условие

$$\frac{2\pi\rho}{\lambda}\sqrt{n_{\text{co}}^2 - n_{\text{cl}}^2} \gg 1,$$

где ρ – характерный размер сердцевины, λ – длина волны света в свободном пространстве, n_{co} – максимальное значение показателя преломления сердцевины, а n_{cl} – показатель преломления оболочки.

Лучевой подход. Показатель преломления обычно слабо меняется на масштабах λ (по крайней мере для многомодовых), таким образом адекватно описывать происходящее в терминах лучей. В таком[6] случае *пренебрегается всеми волновыми эффектами.*

Важно, что в линиях связи большой протяженности случается уширение распространяющихся импульсов. В случе идеальных многомодовых волоконных световодов уширение вполне описывается геом-оптикой.

8.2 Направляемые лучи в планарных волноводах

Классический многомодовый волновод характеризуется значениями n_{cl} и n_{co}, а также толщиной сердцевины 2ρ, что вместе с длиной волны может быть собрано в один безразмерный параметр

$$V = \frac{2\pi}{\lambda}\rho\sqrt{n_{\text{co}}^2 - n_{\text{cl}}^2},$$

собственно лучевой подход применим только при $V \gg 1$.

В случае ступенчатого профиля всегда можем описать $n(x)$ как

$$n(x) = \begin{cases} n_{\text{co}}, & -\rho < x < \rho; \\ n_{\text{cl}}, & \qquad |x| \geqslant \rho, \end{cases}$$

[6] Альтернативный подход к описанию распространения света в многомодовых волноводах – коротковолновое приближение для ЭМ волн.

что может упроситить работу с построением лучей. Одна и наиболее важных задач – определение условий, при которых луч является *направляемым*, т.е. распространяется вдоль непоглащающего волновода без потерь мощности.