1 Банаховы пространства

Def 1.1. Векторное пространство E *нормировано*, если для всякого вектора $v \in E$ имеется неотрицательное исло $\|v\|$, удовлетворяющее свойствам:

1. $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$ (однородность при умножении на константу);
2. $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$ (неравенство треугольника);
3. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (невырожденность).

Например, шаром с центром c и с радиусом r в нормированном пространстве E называется множество
$$B_c(r) = \{x \in E \mid \|x - c\| \leqslant r\}.$$
Заметим, что норма полностью определяется единичным шаром с центром в нуле $B_0(1)$, а именно
$$\|x\| = \inf\{|1/t| \mid tx \in B_0(1)\}.$$

Thr 1.2 (Теорема Бэра для открытых множеств)**.** *Счётное семейство открытых всюду плотных подмножеств банахова пространства E имеет непустое пересечение.*

Con 1.3 (Теорема Бэра для замкнутых множеств)**.** *Если банахово пространство E покрыто счётным семейством замкнутых множеств, то одно из них имеет непустую внутренность.*

Thr 1.4 (Неподвижные точки сжимающих отображений)**.** *Пусть E – банахово пространство. Пусть $X \subset E$ – замкнутое подмножество и $f\colon X \mapsto X$ является сжимающим, то есть*
$$\exists C < 1 \;:\; \forall x, y \in X \;\; \|f(x) - f(y)\| \leqslant C\|x - y\|.$$
Тогда f имеет неподвижную точку $x \in X$, такую что $f(x) = x$.

2 Банаховы пространства и их двойственные

Def 2.1. *Банахово пространство* – полное нормированое пространство.

T8

Здесь, и далее $p(x) = \|x\|$, $q(x) = \|x\|'$. Нормы эквивалентны, если
$$\exists m, M \;:\; mp(x) \leqslant q(x) \leqslant Mp(x) \;\; \forall x.$$
Так вот, всегда есть $\{e_k\}_{k=1}^n$ базис Гамиля, такой то $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$, где естественно ввести норму вида
$$p(x) = \sum_{k=1}^n |x_k|.$$
Пусть $q(x)$ – ещё одна норма на X, в качестве мажоранты выберем $M = \max_{i=1,\ldots,n} q(e_i)$. Теперь можем оценить сумму сверху:
$$q(x) = q\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^n |x_k| q(e_k) \leqslant Mp(x).$$
И оценить снизу:
$$|q(x) - q(y)| \leqslant q(x - y) \leqslant Mp(x - y)$$
вообще q – липшецев функционал, – непрерывные функционал на X с нормой p.

Lem 2.2. *Шары в пространстве компактны тогда, и только тогда, когда* $\dim X < +\infty$.

Рассмотрим сферу $S = \{x \in X \mid p(x) = 1\}$ – компакт. Но мы знаем, что непрерывный функционал на компакте достигает своего миниимума:
$$\min_{x \in S} q(x) = m > 0.$$
На S $q(x) \geqslant m$. Тогда в X $q(x) \geqslant mp(x)$. Действительно,
$$q(tx) - |t| q(x), \quad p(tx) = |t|\, p(x), \qquad \Rightarrow \qquad q(tx) = \frac{p(tx)}{p(x)} q(x) \geqslant m\, p(tx).$$
Собственно, и $Q.E.D.$

T9. Пространство c

Есть некоторый бесконечномерный «вектор»

$$x = \big(x(1), x(2), \dots, x(k), \dots\big), \qquad \left|\lim_{k\to\infty} x(k)\right| < +\infty.$$

Норма определена, как

$$p(x) = \|x\|_c = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)| = \|x\|_\infty.$$

Рассмотрим последовательность x_n, где

$$x_n = (x_n(1), \dots, x_n(k), \dots).$$

Глобально хотим показать, что

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant N(\varepsilon) \;\; \forall l \in \mathbb{N} \quad \|x_{n+l} - x_n\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_{n+l}(k) - x_n(k)| < \varepsilon.$$

Попробуем через это продраться:

$$\forall k \in \mathbb{N} \;\; |x_{n+l}(k) - x_n(k)| < \varepsilon.$$

Здесь можем выделить $(x_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ – числовая фундаментальноая в $\mathbb{R}$. По критерию Коши:

$$\forall k\in\mathbb{N} \quad \lim_{n\to\infty} x_n(k) = y(k) \in \mathbb{R}.$$

Установили покомпонентую сходимость.

Теперь рассмотрим

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_n(k) - y(k)| = \|x_n - y\|_\infty < \varepsilon,$$

что автоматически означает, что $\exists y$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = y.$$

Следующий этап – показать, что

$$\exists \lim_{k\to\infty} y(k) \in \mathbb{R},$$

то есть показать полноту пространства:

$$\begin{aligned}
|y(k+q) - y(k)| &= |y(k+q) - x_n(k+q) + x_n(k+q) - x_n(k) + x_n(k) - x_n(k)| \\
&\leqslant |y(k+q) - x_n(k+q)| + |y(k) - x_n(k)| + |x_n(k+q) - x_n(k)| \\
&< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Таким образом мы доказали полноту пространства[1] .

T10. Критерий Йордана-фон Неймана

Def 2.3. Если норма в банаховом пространстве E порождается положительно определенным скалярным произведением

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)},$$

то E называется *гильбертовым пространством.*

Thr 2.4 (критерий Йордана-фон Неймана)**.** *Норма $\|\circ\|_X$ порождается скалярным произведением тогда, и тоглько тогда, когда $\|\circ\|_X$ удовлетворяет правилу параллелограмма:*

$$\forall x, y \in X \quad \|x+y\|_X^2 + \|x-y\|_X^2 = 2\|x\|_X^2 + 2\|y\|_X^2.$$

Выберем $C[0,\pi/2]$, и $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$. Заметим, что

$$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1, \qquad \|x+y\|_\infty = \sqrt{2}, \qquad \|x-y\|_\infty = 1.$$

Таким образом пространство не гильбертово.

T11. Поиск функционала

Найдём норму функционала

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k f\left(\frac{k}{N}\right).$$

[1] c_0, c_{00}, l_∞ – банаховы ли?

Вообще нормированным пространством мы называем пару вида $(X, \|\circ\|_X)$. И пусть есть некоторый непрерывный ограниченный оператор из X в Y. Если $Y = \mathbb{C}(\mathbb{R})$,

$$A = F\colon X \to \mathbb{C}(\mathbb{R}).$$

Выберем в качетсве $X = C[0,1]$, а в качетсве $F\colon C[0,1] \mapsto \mathbb{C}(\mathbb{R})$. Функционал вида

$$F[f] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Что есть норма функционала? Норма функционала есть

$$\begin{aligned} \|F\| &= \sup_{\|f\|_\infty \leqslant 1} |F[f]| \\ &= \sup_{\|f\|_\infty = 1} |F[f]| \\ &= \inf\{L > 0 \mid |F[f]| \leqslant L\|f\|_\infty\}, \qquad \forall f \in C[0,1]. \end{aligned}$$

`Глобально, это доказывается, например, в Константинове очень подробно.`

`Всегда легко сверху ограничить.` Тривиальный шаг:

$$|F[f]| = \left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \sup_{x \ in[0,1]} |f(x)| = (n+1) \cdot \|f\|_\infty.$$

Продолжаем,

$$\frac{|F[f]|}{\|f\|_\infty} \leqslant n+1, \qquad \Rightarrow \qquad \|F\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |F[f]| \leqslant n+1.$$

Теперь выберем функцию $f_s(x) = f(k/n) = (-1)^k$. На ней мы действительно достигаем супремум, тогда

$$\|F\| = |F[f_s]| = n+1.$$

T17

Для последовательностей

$$x = (x(1), \ldots, x(k), \ldots),$$

рассмотрим пространство вида

$$l_p = \{x \mid \|x\|_p \in \mathbb{R}\},$$

где

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p\right)^{1/p}.$$

Возьмём пространство l_p как множество, но добавим норму из пространства l_q, где $\infty > q > p$.

Рассмотрим шар A_n вида

$$A_n = \{x \in l_p \mid \|x\|_p \leqslant n\}, \qquad l_p = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Докажем от противного, что A_n нигде не плотно.

Пусть существует такой $R > 0$ и $x_0 \in A_n \colon B_R(x_0) \subset \operatorname{cl} A_n = A_n$.

$$\forall x \in l_p\colon \quad \rho_q(x, x_0) < R, \qquad \Rightarrow \qquad x \in A_n \qquad \Rightarrow \qquad \|x\|_p \leqslant n.$$

Рассмотрим некоторую последовательность

$$z(k) = \frac{R}{2} \frac{1}{\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^{q/p}}} \frac{1}{k^{1/p}}.$$

Для начала,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (z(k))^q\right)^{1/q} = \|z\|_q = \frac{R}{2} < +\infty.$$

Далее, видим гармонический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z(k))^p = +\infty, \qquad \Rightarrow \qquad \exists N\colon \sum_{k=1}^{N} (z(k))^p > (2n)^p.$$

Теперь рассмотрим набор «частниных последовательностей»

$$y(k) = \{z(k), \quad k \leqslant N, 0, \quad k > N.$$

Теперь рассмотрим последовательность $h(k) = (x_0 + y)(k)$, для которой верно, что

1. $\rho_q(h, x_0) = \|y\|_q \leqslant R/2$, откуда следует $\|h\|_p \leqslant n$.
2. $\|h\|_p \geqslant \|y\|_p - \|x_0\|_p > 2n - n = n$, а тогда $\|h\|_p > n$, таким образом пришли к противоречию.

Полное пространство нельзя представить, как объединение нигде не плотных множеств, получается l_p не полно. Осталось доказать, что A_n замкнуто.

Пусть t – точка прикосновения. Тогда $\forall\varepsilon > 0$ найдётся

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in A_n \colon \rho_q(t, x_\varepsilon) < \varepsilon, \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{N} |t(k) - x_\varepsilon(k)|^q < \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad |t(k) - x_\varepsilon(k)| < \varepsilon^{1/q},$$

получается это правда и для

$$\Rightarrow \quad \forall N \in \mathbb{N} \left(\sum_{k=1}^{N} |t(k)|^p\right)^{1/p} \leqslant t(k) - x_\varepsilon(k) + x_\varepsilon(k) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} |t(k) - x_\varepsilon(k)|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{N} |x_\varepsilon(k)|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(N\varepsilon^{p/q}\right)^{1/p} + n,$$

что стремится к n при $\varepsilon \to 0$. Таким образом $\|t\|_p \leqslant n$.

И, наконец, докажем, что не выполняеся принцип равномерной ограниченности. Рассмотрим функционалы

$$F_n[x] = \sum_{k=1}^{n} x(k).$$

Верно, что

$$\forall x \in l_1 \quad |F_n[x]| \leqslant \|x\|_1.$$

По норме $\|\circ\|_2$ верно, что (x, e_n), где $e_n = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

T18

Lem 2.5 (Лемма Рисса или лемма о перпендикуляре)**.** *Если X_0 – замкнутое линейное подпространство в нормированом пространстве X, $X_0 \neq X$, тогда*

$$\forall\varepsilon > 0, \ \exists x_\varepsilon \in X \colon \|x_\varepsilon\| = 1, \qquad \|x_\varepsilon - y\| \geqslant 1 - \varepsilon \quad \forall y \in X_0.$$

$\triangle$. Найдётся $z \in X \backslash X_0$, положим $\delta = \inf\{\|z - u\| \mid y \in X_0\} > 0$. Тогда выберем

$$\varepsilon_0 > 0 \colon \frac{\delta}{\delta + \varepsilon_0} > 1 - \varepsilon,$$

выберем $y_0 \in X_0$ такой, что $\|z - y_0\| < \delta + \varepsilon_0$.

Далее, считая

$$x_\varepsilon = \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|}, \quad \forall y \in X_0.$$

Теперь оценим

$$\|x_\varepsilon - y\| = \frac{1}{\|z - y_0\|} \|z - y_0 - \|z - y_0\| y\| \geqslant \frac{\delta}{\delta + \varepsilon_0} > 1 - \varepsilon.$$

Заметим, что

$$v = y_0 + \|z - y_0\| y \in X_0, \qquad \Rightarrow \qquad \|z - v\| \geqslant \delta.$$

□

Con 2.6. *В $\forall X$ (бесконеномерном, нормированном пространстве) $\exists (x_n) \colon \|x_n\| = 1$ и $\|x_n - x_k\| \geqslant 1$, $n \neq k$.*

Как следствие все шары $R > 0$ в X некомпактны.

Всякое бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку.

T19

Thr 2.7. *Пусть E – банахово пространство, $F \subset E$ – его линейное подпространство. Тогда всякий ограниченный линейный функционал $\lambda \in F'$ продолжается до линейного функционала на всём E без увеличения его нормы.*

Предел по базе – предел по фильтру. Для любых двух множеств из фильтра

2.1 Производные обобщенных функций

21.75

Найдём

$$I = \langle (\ln x)' \mid \varphi \rangle = -\langle \ln |x| \mid \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \ln |x| \varphi'(x)\, dx = \langle \text{smth} \mid \varphi \rangle,$$

однако просто вернуть производную на лоагрифм будет нехорошо. Запишем это так:

$$I = -\lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_{\infty}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \right) \ln |x| \varphi'(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to +0} [\ln \varepsilon \cdot (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))] + \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx.$$

Здесь заметим, что

$$\ln \varepsilon \cdot (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) = 2\varepsilon \ln \varepsilon \cdot \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)}{2\varepsilon} = 0\varphi'(0) = 0,$$

тогда

$$I = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx,$$

но $1/x$ – не является локально интегрируемой в 0 функцией. Итого

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x} \middle| \varphi \right\rangle.$$

Другими словами мы установили, что

$$(\ln |x|)' \overset{\mathcal{D}'}{=} \mathcal{P}\frac{1}{x}, \;\Leftrightarrow\; (\ln |x|)' \overset{*w.}{=} \mathcal{P}\frac{1}{x}, \;\Leftrightarrow\; \langle (\ln |x|)' | = \left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x} \right|.$$

21.84

Уместен вопрос: когда верно, что

$$\langle \lambda'_f \mid \varphi \rangle = \langle \lambda_{f'} \mid \varphi \rangle.$$

Далее пусть $\frac{d}{dx}$ – классическая производная, f' – производная обобщенной функции, тогда наш вопрос будет выглядеть, как

$$\langle f' \mid \varphi \rangle = \left\langle \frac{df}{dx} \;\middle|\; \varphi \right\rangle + \sum_{k=1}^{n} \Delta f(x_k) \langle \delta(x - x_k) \mid \ldots \rangle,$$

где x_k – точки разрыва классической функции f, а

$$\Delta f(x_k) = f(x_k + 0) - f(x_k - 0) \in \mathbb{R}.$$

В частоности рассмотрим случай с $x_k = 0$. Тогда

$$\langle f' \mid \varphi \rangle = -\langle f \,|\, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\, dx,$$

что удобно расписать в виде

$$-\left(\int_{\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty} \right) f(x)\varphi'(x) = -f(x)\varphi(x)\Big|_{+0}^{+\infty} - f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{-0} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(x)}{dx}\varphi(x)\, dx = \Delta f(0) \langle \delta(x) \,|\, \varphi \rangle + \left\langle \frac{df}{dx} \;\middle|\; \varphi \right\rangle.$$

Домашнее задание:

Найти $(\ln x_+)'$ и $\frac{1}{x + i \cdot 0}$, где

$$\ln x_+ = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \qquad \left\langle \frac{1}{x \pm i \cdot 0} \;\middle|\; \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon}\, dx, \;\Rightarrow\; \frac{1}{x \pm i \cdot 0} \overset{\mathcal{D}'}{=} \mp i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

T29, T30

Следующее утверждение – страница 472, Богачев-Смолянов.

Lem 2.8. *Пусть $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и так оказалось, что $f' = 0$, тогда f имеет вид $\langle f | \varphi \rangle = c \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx$.*

$\triangle$. Утверждается, что $c = \langle f \,|\, \varphi_0 \rangle$ годится, где

$$\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}): \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x)\, dx = 1.$$

Итак, любую функцию $\varphi \in \mathcal{D}$ можно представить в виде

$$\varphi = -\theta \cdot \varphi_0 + \theta \cdot \varphi_0, \qquad \theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx.$$

Зададим функцию от вида

$$\psi(x) = \int_{\infty}^{x} (\varphi(t) - \theta\varphi_0(t))\ dt \quad \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Собирая всё вместе находим

$$\psi' = \varphi - \theta \cdot \varphi_0, \qquad \Rightarrow \qquad \langle f \,|\, \varphi \rangle = \langle f \,|\, \psi' + \theta\varphi_0 \rangle = \langle f \,|\, \psi' \rangle + \theta \langle f \,|\, \varphi_0 \rangle,$$

где $-\langle f' \,|\, \psi \rangle = 0$ по условию. Также $\langle f \,|\, \varphi_0 \rangle = c$, тогда верно, что

$$\psi' = c \cdot \theta = c \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx, \qquad \text{Q. E. D.}$$

$\square$

Thr 2.9. *Для всякой обобщенной функции f из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ существует $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ такая, что $g' \overset{D'}{=} f$. Для всякой другой $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ верно, что если $h' \overset{\mathcal{D}'}{=} f$, то $g - h \overset{\mathcal{D}'}{=} c$.*

$\triangle$. Точно также берем некоторую φ, ψ. Положим, по определению, что

$$\langle g \,|\, \varphi \rangle \overset{\text{def}}{=} -\langle f \,|\, \Psi \rangle,$$

для которого хотелось бы показать линейность и непрерывность.

Для этого рассмотрим

$$\langle g \,|\, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = -\langle f \,|\, \psi_1 + \psi_2 \rangle = -\left\langle f \,\middle|\, \int_{-\infty}^{x} (\varphi_1 + \varphi_2 - (\theta_1 + \theta_2)\varphi_0)\, dt \right\rangle = -\langle f \,|\, \psi_1 \rangle - \langle f \,|\, \psi_2 \rangle.$$

Осталось показать непрерывность, точнее показать, что линейной отображение $\varphi \to \psi$ непрерывно на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

...

$\square$

2.2 Преобразование Фурье обобщенных функций

Найдём фурье преобразование n-й производной дельта-функции

$$I = \langle F[\delta^{(n)}(x)] \,|\, \varphi \rangle = \langle \delta^{(n)}(x) \,|\, F[\varphi] \rangle = (-1)^n F^{(n)}[\varphi][0] = \frac{(-1)^n}{i^n} F[x^n \varphi](0),$$

тогда

$$I == \frac{(-1)^n}{i^n} \langle \delta(x) \,|\, F[x^n \varphi] \rangle = i^n \langle F[\delta(x) \ | \ x^n \varphi] \rangle, \qquad \Rightarrow \qquad F\left[\delta^{(n)}(x)\right] \overset{\mathcal{D}'}{=} \frac{(ix)^n}{\sqrt{2\pi}}.$$

Физический подход:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} e^{-ixt} \frac{d^n}{dt^n} \delta(t) = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \delta(t) \frac{d^n}{dt^n} e^{-ixt} = (ix)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \delta(t) e^{-ixt} = (ix)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Для третьего примера – Кудрявцев, учебник, том 3, страница 297 по файлу

T33

Thr 2.10. *Пусть $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и оказалось, что $F[f] \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Тогда $f \equiv 0$.*