

ЗАМЕТКИ КУРСА «СОВРЕМЕННАЯ ОПТИКА»

Лектор: Колдунов Л. М.

Восторженные слушатели: Хоружий К.
Примаек Е.

От: 30 июня 2021 г.

Содержание

1	Геометрическая оптика	2
1.1	Принцип Ферма	2
1.2	Матричная оптика	3
2	Оптика Гауссовых пучков	4
2.1	Физика пучков	4
2.2	Матричное описание	6
3	Интерференционные явления	6
3.1	Фурье-спектроскопия	7
3.2	Многолучевая интерференция	8
3.3	Интерферометр Фабри-Перо	8
3.4	Равноотстоящие частоты	9
4	Ширины и профили спектральных линий	9
4.1	Естественная ширина линии	9
4.2	Доплеровское уширение	10
4.3	Другие примеры	10
5	Скоростные уравнения	10
5.1	Межуровневые переходы фотонов	10
5.2	Скоростные уравнения	11
5.3	Внутريدоплеровская спектроскопия	11
5.4	Затухание интенсивности	12
5.5	Затемнение	12
6	Принцип работы лазера	13
6.1	Скоростные уравнения в лазере	13
6.2	Эталон фабри-перо как оптический элемент для селекции мод	13
6.3	Эффект Поккельса	14
6.4	Модуляция добротности	14
7	Оптика фотонных кристаллов	15
7.1	Модуляция добротности	15
7.2	Фотонные кристаллы	15

1 Геометрическая оптика

1.1 Принцип Ферма

Вспомним уравнения Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Путь напрямик. Подставляя $E = a(\mathbf{r})e^{i(\omega t - \mathbf{k}_0 \Phi(\mathbf{r}))}$ в уравнение Гельмгольца можем получить следующую систему:

$$\begin{aligned} (\operatorname{grad} \Phi)^2 &= n^2 + \frac{\Delta a}{k_0^2 a} \\ a \Delta \Phi + 2(\operatorname{grad} a)(\operatorname{grad} \Phi) &= 0 \end{aligned}$$

В котором хотим увидеть

$$\left| \frac{\Delta a}{k_0^2 a} \right| = \left| \frac{\Delta a}{a} \right| \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \ll n^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda |\partial_x a| \ll a, \\ \lambda |\partial_{xx}^2 a| \ll |\partial_x a|, \end{cases} \Rightarrow (\operatorname{grad} \Phi)^2 = n^2, \Leftrightarrow \operatorname{grad} \Phi = n \mathbf{s}.$$

Из второго уравнения можем получить независимость поведения лучей друг относительно друга.

В терминах 4-векторов. Давайте скажем, что наше скалярное поле это

$$f = ae^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \alpha)} = ae^{i\Phi}$$

, где Φ – Эйконал. Тогда $\operatorname{grad} \Phi = \mathbf{k}$, $\partial_t \Phi = -\omega$, и вполне естественно говорить про 4-вектор $k^i = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right)^T$, тогда $k_i x^i = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ и

$$k_i k^i = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0, \Rightarrow \partial_i \Phi \partial_i \Phi = 0.$$

Тогда пусть $\Phi = -\omega t + \Phi_0(x, y, z)$, соответственно $\partial^i \Phi = \left(\frac{\omega}{c}, \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{r}}\right)$, так приходим к

$$(\operatorname{grad} \Phi_0)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k_0^2, \quad c \rightarrow c/n \Rightarrow (\operatorname{grad} \Phi_0/k_0)^2 = n^2.$$

Принцип Ферма. Рассмотрим интеграл по замкнутому контуру

$$\oint \operatorname{grad} \Phi \cdot d\mathbf{l} = \oint n(\mathbf{s} \cdot d\mathbf{l}) = 0$$

Но это соответствует экстремальности $\int n d\mathbf{l}$, то есть

$$\delta \int n d\mathbf{l} = 0,$$

для прямого пути.

Чуть более явно можем выписать $\operatorname{grad} \Phi = n\mathbf{s}$, тогда $d\mathbf{l} \Phi = n$, и $\mathbf{s} = d\mathbf{l}\mathbf{r}$, тогда

$$\frac{d}{dl} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{dl} \right) = \frac{d}{dl} \operatorname{grad} \Phi = \operatorname{grad} n.$$

Координатная запись. Заметим, что $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$, тогда

$$\delta \int n \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx = 0,$$

что соответствует уравнению Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'_x} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad L = n \sqrt{1 + (y'_x)^2}, \quad n \equiv n(x, y).$$

Оптический элемент с переменным n . Рассмотрим, например $n^2 = n_0^2(1 - \alpha^2 y^2)$, рассмотрим параксиальное приближение и увидим

$$y''_{xx} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dy}, \Rightarrow y''_{xx} = -\alpha^2 y,$$

что показывает, что мы снова свели всё к гармоническому осциллятору.

1.2 Матричная оптика

Жизнь в параксиальном приближении позволяет жить в линейном мире, где особенно удобен аппарат линейных преобразований, который и предлагается построить.

Частные случаи. Пусть луч распространяется в однородной среде, под θ_1 распространяется, тогда $\theta_2 = \theta_1$. Что произошло с y ? Ну, $y_2 = y_1 + l\theta_1$, тогда

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_2\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\theta_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где соответствующую матрицу обозначим за T .

Матрица преломления на сферической поверхности P :

$$P(y, V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2-n_1}{R} & 1 \end{pmatrix}, \quad P(y, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2-n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где $(n_2 - n_1)/R$ называют *оптической силой*.

Была некоторая матрица преломления

$$P(y, V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2-n_1}{R} & 1 \end{pmatrix},$$

и матрица распространения

$$T = \begin{pmatrix} 1 & l/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В случае отражения видимо хочется заменить $n \rightarrow -n$. Знак θ определяется, как вниз, или вверх. Пусть теперь $n_1 = n$, $n_2 = -n$, тогда матрица отражения

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(-n - n)/r & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n/r & 1 \end{pmatrix}.$$

Так фокусное расстояние для сферического зеркала $R/2$, что логично. В случае же, если мы захотим следить за направлениями осей, то можно вернуться к переменным $\{z, \theta\}$.

Общий подход. Обратим внимание на порядок применения матриц:

$$\underbrace{M_3 M_2 M_1}_M \mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} \mathbf{b}.$$

Посмотрим на коэффициенты, приравнявая их к 0. Пусть

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix},$$

тогда $\theta_2 = cy_1$, тогда при $D = 0$, получается, что $ОП_1$ – фокальная плоскость (слева).

Пусть $B = 0$, тогда $y_2 = Ay_1$, тогда это изображение, и говорим, что эти *плоскости сопряженные*, а коэффициент A – *коэффициент поперечного увеличения*.

Пусть $C = 0$, тогда $\theta_2 = \theta_1 D$, что соответствует телескопической системой, а коэффициент D – *коэффициент углового увеличения*.

Теперь рассмотрим $A = 0$, получается, что это фокальная плоскость справа.

Периодические системы. Пусть есть некоторая периодическая система с матрицей $ABCD$, действующая на луч $\{y_0, V_0\}$

$$\begin{pmatrix} y_m \\ V_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} y_0 \\ V_0 \end{pmatrix}.$$

Хотелось бы понять на устойчивость такого действия системы на луч, для этого посмотрим на

$$\begin{pmatrix} y_{m+1} \\ V_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_m \\ V_m \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_{m+1} = Ay_m + BV_m \\ V_{m+1} = Cy_m + DV_m \end{cases} \Rightarrow V_m = \frac{y_{m+1} - Ay_m}{B},$$

теперь можем, забыв про V , говорить про y_m

$$\frac{y_{m+1} - Ay_{m+1}}{B} = Cy_m + \frac{D(y_{m+1} - Ay_m)}{B}, \quad \Rightarrow \quad y_{m+2} - Ay_{m+1} = BCy_m + D(y_{m+1} - Ay_m)$$

и, наконец,

$$y_{m+2} - (A + D)y_{m+1} + \overbrace{(AD - BC)}^1 y_m = 0,$$

которое решается также, как и диффур, подстановкой $y_m = y_0 h^m$, тогда

$$y_m = y_0 h^m, \quad \Rightarrow \quad h^2 - (A + D)h + 1 = 0,$$

считая $\text{tr } M = A + D \stackrel{\text{def}}{=} 2b$, находим, что

$$h^2 - 2bh + 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad h_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - 1}$$

что приводит нас к некоторому к следующей классификации

$|b| > 1$ – неустойчивый режим

$|b| = 1$ – граница

$|b| < 1$ – устойчивость

Рассмотрим $b < 1$ и для удобства положим $b = \cos \varphi$, тогда

$$h_{1,2} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi = e^{i\varphi}, \quad \Rightarrow \quad y_m = \alpha_1 e^{im\varphi} + \alpha_2 e^{-im\varphi} = \underline{y_{\max}} \sin(m\varphi + \underline{\varphi_0}),$$

где подчеркнутые параментры определяются начальными условиями.

Стоит заметить, что хотелось бы θ_m периодической.

Пример (Оптический резонатор)

Рассмотрим распространение света на расстояние L между двумя зеркалами кривизы R_1, R_2 , тогда b

$$b = 2 \left(\underbrace{1 + \frac{L}{R_1}}_{g_1} \right) \left(\underbrace{1 + \frac{L}{R_2}}_{g_2} \right) - 1,$$

и рассмотрим $0 \leq g_1 g_2 \leq 1$.

Первый случай (1) плоского резонатора находится на границе. Другой случай (2) это симметричный кофокальный резонатор, тогда $R_1 = -L$, и $R_2 = -L$. Возможен симметричный концентрический $R_1 = R_2 = -L/2$.

Пусть есть некоторая активная среда, процесс накачки.

2 Оптика Гауссовых пучков

2.1 Физика пучков

Оптика пучков. Вспомним волновое уравнение

$$\nabla^2 E - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0,$$

пусть $\varepsilon \neq 1$ и $\mu = 1$, считая волну монохроматической всегда можем получить уравнение Гельмгольца

$$E = f(r) \exp(-i\omega t), \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 f + \varepsilon k^2 f = 0,$$

где $k_0^2 = \omega^2/c^2$. Есть решение в виде плоской волны $f_0 e^{-k_0 \cdot r}$, решение в виде $Ar^{-1} e^{ik_0 \cdot r}$. Можно рассматривать также параболическое приближение.

Выберем некоторую ось z . Есть два места, где встречается r – в числителе и аргументе экспоненты. Известно, что $r^2 = \rho^2 + z^2$, тогда

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = z \left(1 + \frac{\rho^2}{z^2} \right)^{1/2} \approx z + \frac{\rho^2}{2z}.$$

Говоря об аргументе хочется, чтобы всё работало, для этого

$$\frac{2\pi}{\lambda} \left(z + \frac{\rho^2}{2z} + \dots \right) = \frac{2\pi}{\lambda} z + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\rho^2}{2z} + \dots, \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\rho^2}{2z} \ll \pi.$$

Так¹ и пришли к *параболическому приближению*, вида

$$f = \frac{A}{z} \exp \left(ikz + ik \frac{\rho^2}{2z} \right).$$

Параболическое приближение. Подробнее посмотрим на

$$f(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp(ikz).$$

Точнее нас интересует некоторая модуляция сигнала

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} \lambda \ll A &\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial z} \ll \frac{A}{\lambda} \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial z} \ll A \cdot k, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \cdot \lambda \ll \frac{\partial A}{\partial z} &\Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll \frac{\partial A}{\partial z} \cdot k. \end{aligned}$$

¹Видно, что входит n зон Френеля.

Считая $k^2 = \varepsilon\omega^2/c^2$, можем записать, что

$$\nabla^2 f + \frac{\varepsilon}{c^2} \omega^2 f = 0, \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 f + k^2 f = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial z} e^{ikz} + A i k e^{ikz}$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \nabla_{\perp}^2.$$

Для второй производной

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} e^{ikz} + 2 \frac{\partial A}{\partial z} i k e^{ikz} - A k^2 e^{ikz}.$$

Подставляя всё в уравнение находим, что

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial A}{\partial z} i k - A k^2 + \nabla_{\perp}^2 A + A k^2 = 0.$$

Вспоминая малость второй производной, получаем

$$\boxed{\nabla_{\perp}^2 A + 2 i k \frac{\partial A}{\partial z} = 0} \quad - \text{ параксиальное приближение уравнения Гельмгольца.} \quad (2.1)$$

Возможно, тут минус. На всякий случай хочется проверить, что параболическая волна это решение.

Однако, мы будем подробнее работать конкретно с решением

$$f(r) = \frac{A}{z} \exp\left(-ikz - ik \frac{\rho^2}{2z}\right), \quad \Rightarrow \quad f(r) = A(r) e^{-ikz}, \quad A(r) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A}{z} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2z}\right).$$

Здесь хочется сделать некоторый сдвиг

$$z \longrightarrow q(z) \stackrel{\text{def}}{=} z + iz_0,$$

где $z_0 = \text{const}$ (Рэлеевская длина), $q(z)$ – q -параметр. Тогда уравнение придет к виду

$$f(r) = \frac{A}{z + iz_0} \exp\left(-ikz - ik \frac{\rho^2}{2(z + iz_0)}\right).$$

Далее заметим, что

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z + iz_0} = \frac{z - iz_0}{z^2 + z_0^2}, \quad \Rightarrow \quad f(r) = A \left(\frac{z}{z^2 + z_0^2} - i \frac{z_0}{z^2 + z_0^2} \right) \exp\left(-ikz - ik \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{z}{z^2 + z_0^2} - i \frac{z_0}{z^2 + z_0^2} \right)\right).$$

Тогда получается

$$f(r) = A \left(\frac{z}{z^2 + z_0^2} - i \frac{z_0}{z^2 + z_0^2} \right) \exp\left(-\frac{k\rho^2}{2} \frac{z_0}{z^2 + z_0^2}\right) \exp\left(-ikz - ik \frac{\rho^2 z}{2(z^2 + z_0^2)}\right).$$

Внимательно оглядев выражение в экспоненте, понимаем что хочется переписать его в виде

$$-\frac{2\pi}{2} \frac{\rho^2 z_0}{\lambda(z^2 + z_0^2)} = -\frac{\rho^2}{\frac{\lambda}{z_0\pi}(z^2 + z_0^2)} = -\frac{\rho^2}{W^2(z)}, \quad W^2(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda}{z_0\pi}(z^2 + z_0^2). \quad (2.2)$$

Другим переобозначением будет

$$\frac{z}{z^2 + z_0^2} = \frac{1}{z \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right)}, \quad R(z) \stackrel{\text{def}}{=} z \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right). \quad (2.3)$$

Тогда исходное уравнение переписется в виде

$$f(r) = A \left(\frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi W^2(z)} \right) \exp\left(-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right) \exp\left(-ikz - ik \frac{\rho^2}{2R(z)}\right).$$

Приводя к удобной форме комплексную амплитуду, получим

$$f(r) = \frac{A}{iz_0} \frac{W_0}{W(z)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right) \exp\left(-ikz - ik \frac{\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z)\right), \quad \zeta \stackrel{\text{def}}{=} \arctan \frac{z}{z_0}, \quad W_0 \stackrel{\text{def}}{=} W(0). \quad (2.4)$$

Def 2.1. Интенсивность есть

$$I = \langle |\mathbf{S}| \rangle_t = \left\langle \frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon} E^2 \right\rangle = \frac{cn}{4\pi} \langle E^2 \rangle = \frac{cn}{8\pi} E_0^2, \quad [I] = \frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{см}^2} = \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2}.$$

Физический смысл введенных величин. Но далее $I \sim E_0^2$ превращается $I = E^2$. Вспоминая, что всё хорошо, и $I = EE^*$, находим:

$$I = A_0^2 \frac{W_0^2}{W^2(z)} \exp\left(-\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right), \quad (2.5)$$

и именно поэтому пучки называются Гауссовыми. Получается, что при увеличении z наш пучок размывается.

Если мы задумаемся, что есть $I_{\text{центр}}(z) \sim 1/z^2$.

Если нас интересует мощность, то

$$P = \int_0^\infty I(\rho) 2\pi \rho d\rho = \frac{1}{2} I_0 \pi W_0^2, \quad I_0 = A_0^2.$$

Если посчитать

$$\alpha = \frac{1}{P} \int_0^{\rho_0} I(\rho, z) 2\pi \rho d\rho = 1 - \exp\left(-\frac{2\rho_0^2}{W^2(z)}\right),$$

так, например, $\rho_0 = W(z)$ приводит к величине $\alpha \approx 0.86$, а при $\rho_0 = \frac{3}{2}W(z)$ получим $\alpha \approx 0.99$. Поэтому $W(r)$ называется *радиусом (диаметром) пучка*.

Вспомним зависимость радиуса пучка от z

$$W(z) = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi} \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)},$$

где в $W_0 = W(0) = \sqrt{\lambda z_0/\pi}$, а при больших z

$$\lim_{z \rightarrow \infty} W(z) \approx z \sqrt{\frac{\lambda}{\pi z_0}}, \quad \theta = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi z_0}} = \frac{W_0}{z_0} = \lambda \sqrt{\frac{1}{\lambda \pi z_0}} \approx \frac{\lambda}{W_0}.$$

Также можно указать $2z_0$ – *глубина резкости*.

Если взять гелий-неоновый лазер при длине волны $\lambda_0 = 633$ нм, получится из $2W_0 = 2$ см, то $2z_0 = 1$ км, а при $2W_0 = 200$ мкм будет $2z_0 = 1$ мм.

Тот момент, что фаза набегаает на π – эффект Гюйи. Говоря о волновом фронте,

$$k \left(z + \frac{\rho^2}{2R} \right) + \zeta(z) = 2\pi m, \quad \Rightarrow \quad z + \frac{\rho^2}{2R} = m\lambda + \frac{\zeta\lambda}{2\pi},$$

что приводит нас к тому, что $\rho^2/2R$ – *радиус кривизны*.

2.2 Матричное описание

Продолжаем работать в параксиальном приближение²: q -параметры падающего и прошедшего гауссовых пучков на входной и выходной плоскостях параксиальной оптической системы описываются *законом ABCD*:

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}.$$

Действительно, при прохождении через свободное пространство $q = z + iz_0$, с $A = 1$, $B = d$, $C = 0$, $D = 1$ (протяженность d), случится переход $q_2 = q_1 + d$.

Тонкий оптический элемент соответствует $A = 1$ и $B = 0$. В силу малости толщины элемента ширина пучка не меняется, так что $W_2 = W_1$. Также угол преобразуется, как

$$\theta_2 = Cy_1 + D\theta_1.$$

Приближая волны сферическими с радиусом R_1 и R_2 находим

$$\begin{aligned} \theta_1 &= y_1/R_1 \\ \theta_2 &= y_2/R_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R_2} = C + \frac{D}{R_1}.$$

Далее, заметим, что

$$D = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q_2} = C + \frac{D}{q_1}, \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{1 \cdot q_1 + 0}{Cq_1 + D},$$

так что *ABCD*-закон снова выполняется.

Можно показать, что применяя *ABCD* преобразование к каскаду элементов, преобразование останется верным. А тогда, приближая любую среду тонкими элементами и распространением в среде, мы видим общность *ABCD*-закона.

3 Интерференционные явления

На любом приемнике получаем

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt, \quad \tau \gg T.$$

²Вообще, зная в двух точках радиусы кривизны пучка можно определить положение пучка и глубину резкости (см. стр. 130).

На деле фиксируем

$$I = \langle |S| \rangle = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\varepsilon} \langle E^2 \rangle \sim \langle E^2 \rangle.$$

Не стоит забывать, что

$$I = |E^2| = \langle (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) \rangle_t.$$

Теперь, возвращаясь к интерференции,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{E}|^2 = |\mathbf{E}_1|^2 + |\mathbf{E}_2|^2 + (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^*) + (\mathbf{E}_1^*, \mathbf{E}_2).$$

Дальше вспоминаем про монохроматичность света

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}_{10} \exp(-i\omega_1 t + ik_1 l_1) \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}_{20} \exp(-i\omega_2 t + ik_2 l_2) \end{aligned}$$

что приводит к

$$\begin{aligned} I = |\mathbf{E}|^2 &= I_1 + I_2 + (\mathbf{E}_{10} \cdot \mathbf{E}_{20}) \cdot [\exp(i(\omega_2 - \omega_1)t + i(k_1 l_1 - k_2 l_2)) + \text{к.с.}] \\ &= I_1 + I_2 + (\mathbf{E}_{10} \cdot \mathbf{E}_{20}) \cos((\omega_2 - \omega_1)t + (k_1 l_1 - k_2 l_2)). \end{aligned}$$

Тогда для наблюдени интерференции хочется, чтобы

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_{10} \cdot \mathbf{E}_{20}) &\neq 0 \\ \varphi_1(t) - \varphi_2(t) &= \text{const} \\ \omega_1 &= \omega_2 \end{aligned}$$

Однако хочется рассмотреть ситуацию

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{10} &\parallel \mathbf{E}_{20} \\ \varphi_1(t) - \varphi_2(t) &= 0 \\ \omega_1 &\approx \omega_2 \end{aligned}$$

В таком случае уравнение примет вид

$$I = I_0 + I_0 + 2I_0 \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \text{const}) = 2I_0(1 + \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \text{const}))$$

Вообще этот метод называется **гетероденирование** света. Нелинейной частью схемы является сам факт детектирования интенсивности.

3.1 Фурье-спектроскопия

Пример из общей физики. Рассмотрим интерферометр Майкельсона. Движущееся зеркало испытывает доплеровский сдвиг при отражении:

$$\Delta\omega = \omega - \omega' = \frac{v}{c}\omega.$$

Считая рахность фаз равной $\delta = (2\pi/\lambda)\Delta s$. Далее считаем

$$\bar{I} \sim (1 + e^{i\delta})(1 + e^{-i\delta}) \sim \frac{1}{2} \bar{I}_0 (1 + \cos \delta).$$

Куда уже подставляем $\Delta s = \Delta s_0 + 2vt$, считая $\Delta s_0 = 0$:

$$I = 2I_0(1 + \cos(k\Delta)) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{\omega}{c}vt\right) \right), \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega = \omega \frac{v}{c}.$$

Не монохроматическая волна Пусть есть некоторый сигнал с шириной линии δk , средней K_0 и

$$I = J_0 \delta K.$$

Выделим конкретную ширину dk и $J_0 dk$, тогда

$$dI = 2J_0 dk(1 + \cos(k\Delta)),$$

как в предыдущем примере. Приходим к интегралу

$$I = \int_{k_0 - \delta k/2}^{k_0 + \delta k/2} 2J_0(1 + \cos(k\Delta)) dk = 2I_0 \left(1 + \cos(k\Delta) \operatorname{sinc}\left(\frac{\delta k \Delta}{2}\right) \right)$$

где мы складываем интенсивности в силу приличности размерном ширины δk . При этом *видность*

$$V = \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\delta k \Delta}{2}\right) \right|$$

Фурье спектрометр. Это как интерферометр Майкельсона, только двигается одно из зеркал. Интенсивность источника

$$I(\Delta) = 2 \int_0^\infty J(k)(1 + \cos k\Delta) dk = 2 \int_0^\infty J(k) dk + 2 \int_0^\infty J(k) \cos(k\Delta) dk,$$

где первый интеграл равен $I(0)/2$, тогда

$$I(\Delta) - \frac{I(0)}{2} = 2 \int_0^\infty J(k) \cos(k\Delta) dk.$$

То есть мы измерили в нуле, где-то далеко, делаем *обратное преобразование Фурье* и находим $J(k)$.

3.2 Многолучевая интерференция

Прошедшая волна. Рассмотрим интерференцию на пластинке с показателем преломления n , толщиной d . Пусть свет монохроматичен, пусть интенсивность света I_0 .

Обозначим через R коэффициент отражения света от границы раздела пластинки с воздухом. При отсутствии поглощения $(1 - R)$ проходит через границу, если среды по обе стороны одинаковы, то и R будут одинаковы. Тогда интенсивности прошедших пучков будут

$$I_{1'} = (1 - R)^2, \quad I_{2'} = R^2(1 - R)^2 I_0, \quad I_{3'} = R^4(1 - R)^2 I_0, \quad \dots$$

а соответствующие вещественные амплитуды

$$a_{1'} = (1 - R)a_0, \quad a_{2'} = R(1 - R)a_0, \quad a_{3'} = R^2(1 - R)a_0, \dots$$

Амплитуда прошедшей волны представится убывающей геометрической прогрессией

$$a_d = a_0(1 - R) [1 + Re^{-i\Phi} + R^2e^{-2i\Phi} + \dots], \quad \Phi = k\Delta = \frac{4\pi}{\lambda} nd \cos \psi, \quad \Rightarrow \quad a_d = \frac{1 - R}{1 - Re^{-i\Phi}} a_0.$$

где Φ – разность фаз между соседними пучками. Интенсивность прошедшей волны

$$I_d = \frac{(1 - R)^2}{|1 - Re^{-i\Phi}|^2} a_0^2 = \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2(\Phi/2)} I_0,$$

что позволяет сделать некоторые выводы.

Отраженная волна. Аналогичный расчёт приведет к

$$\begin{aligned} I_1 &= RI_0, & I_2 &= R(1 - R)^2 I_0, & I_3 &= R^3(1 - R)^2 I_0, & \dots, \\ a_1 &= \sqrt{R}a_0, & a_2 &= -\sqrt{R}(1 - R)a_0, & a_3 &= -\sqrt{R}R(1 - R)a_0, & \dots, \end{aligned}$$

где знак в a – следствие появления $\lambda/2$. Результирующая амплитуда будет иметь вид

$$a_r = \sqrt{R}a_0 - \sqrt{R}(1 - R)a_0e^{-i\Phi} [1 + Re^{-i\Phi} + R^2e^{-2i\Phi} + \dots], \quad \Rightarrow \quad I_r = \frac{4R \sin^2(\Phi/2)}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2(\Phi/2)} I_0,$$

где всё также $\Phi = k\Delta = \frac{4\pi}{\lambda} nd \cos \psi$.

При $R \ll 1$ увидим случай двулучевой интерференции, при $R \approx 1$ уже интереснее (рис. 1). В окрестности

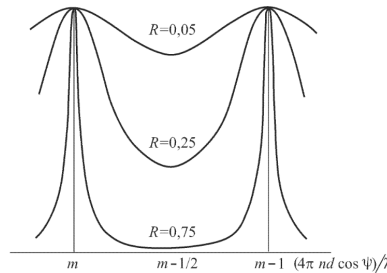


Рис. 1: Пики для пластинки

максимума m -го порядка $\Phi = \pi m + \varphi$, тогда ввиду малости φ можем написать

$$I_d = \frac{I_{\max}}{1 + R\varphi^2/(1 - R^2)}, \quad \frac{R\varphi^2}{(1 - R)^2} = 1 \text{ при } I_d = 1/2 I_{\max}, \quad \Rightarrow \quad \Delta\Phi = 2\varphi = 2 \frac{1 - R}{\sqrt{R}}.$$

3.3 Интерферометр Фабри-Перо

Рассмотрим пластинку с показателем n на которую падает плоский фронт.

$$E_{\text{out}} = E_0\tau^2 + E_0\tau^2 r^2 e^{ik\Delta} + E_0\tau^2 r^4 e^{2ik\Delta} + \dots$$

Аккуратно считаем разность хода

$$n(AB + BC) - CD = 2nh \cos \theta'.$$

Собираем всё вместе, и находим

$$E_{\text{out}} = E_0 \tau^2 (1 + r^2 e^{ik\Delta} + r^4 e^{2ik\Delta}) = \frac{E_0 \tau^2}{1 - r^2 e^{ik\Delta}}.$$

Теперь найдем интенсивность

$$I = EE^* = \frac{E_0^2 \tau^4}{(10r^2 e^{ik\delta})(1 - r^2 e^{-ik\delta})} = \frac{E_0^2 \tau^4}{1 + r^4 - 2r^2 \cos(k\Delta)}, \quad \Rightarrow \quad I_{\text{max}} = E_0^2 \frac{\tau^4}{(1 - r^2)^2}$$

вообще там τ_1 и τ_2 , но всё хорошо, более того $1 - r^2 \neq \tau^2$, но приходим к $I_{\text{max}} = E_0^2$ при $k\Delta = 2\pi m$.

$$\Delta_m = \frac{2\pi m}{k} = m\lambda.$$

Стандартное значение $r = 0.04$.

3.4 Равноотстоящие частоты

Пусть есть некоторый набор частот

$$\nu_m = \nu_0 + m\Delta\nu, \quad m \in [-l, l], \quad 2l + 1 \text{ частота всего.}$$

Эквидистантный (периодический) набор частот приведет к

$$E(t) = \sum_{m=-l}^l E_0 \exp(2\pi i(\nu_0 + m\Delta\nu)t) = E_0 e^{i2\pi\nu_0 t} \sum_{m=-l}^l \exp(2\pi i\Delta\nu t m) = E_0 e^{\varphi} \left(\frac{1 - \exp(2\pi i\Delta\nu t N)}{1 - \exp(2\pi i\Delta\nu t)} \right),$$

где $\varphi = i2\pi\nu_0 t$ но не совсем. Вспоминаем, что

$$\frac{1 - e^{i\varphi}}{1 - e^{i\psi}} = \dots$$

получаем, что

$$E(t) = E_0 e^{i\varphi} \frac{\sin(\pi\Delta\nu N t)}{\sin(\pi\Delta\nu t)} \quad \Rightarrow \quad I(t) = E_0^2 \frac{\sin^2(\pi\Delta\nu N t)}{\sin^2(\pi\Delta\nu t)}.$$

Максимумы соответствуют $\pi\Delta_m = \pi m$, или $t_m = m/(\Delta\nu)$. Также можем получить, что характерная величина $\Delta t = 1/(\Delta\nu N)$

4 Ширины и профили спектральных линий

4.1 Естественная ширина линии

Это скорее чисто квантовое явление, поэтому давайте сейчас немного помашем руками, пусть атом это осциллятор

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

что приводит к известному решению

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \left(\cos(\omega t) + \frac{\gamma}{2\omega} \sin(\omega t) \right) \approx x_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

Далее, пусть есть преобразование Фурье

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt = \int \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) \Big/ = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x_0 e^{-\gamma t} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x_0 e^{-\gamma t} e^{i(\omega_0 + \omega)t} dt = \\ &= \frac{x_0}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-\gamma t + i(\omega_0 - \omega)t}}{i(\omega_0 - \omega) - \gamma} + \frac{e^{-\gamma t + i(\omega_0 + \omega)t}}{-(\omega_0 + \omega) - \gamma} \right] \Big|_0^{+\infty} \approx -\frac{x_0}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i(\omega_0 - \omega) - \gamma}, \end{aligned}$$

где вторым слагаемым можно пренебречь, в силу ...

$$I = AA^* = \frac{x_0^2}{8\pi} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2},$$

что дает кривую Лоренцова профиля.

Если говорить про жизнь, то ширина на полувысоте $\in [10^7, 10^9]$ Гц.

4.2 Доплеровское уширение

В зависимости от взаимного движения излучения от атома и приемника будет фиксироваться частота

$$\omega = \omega_0(1 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$$

Если аккуратно взять максвелловское распределение $f(v_x)$, то само собой максимум в $v_x = 0$, и максимум $J(\omega)$ будет в ω_0 , а сама кривая – перекочевавший из $f(v_x)$ гауссов колокольчик.

Если говорить точнее, то

$$v_0^2 = \frac{2kT}{m}, \quad dN = N \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_0)^2 c^2}{\omega_0^2 v_0^2}\right) \frac{c}{\omega_0} d\omega,$$

где, переходя к числам будем наблюдать толщину $\in [10^0, 10^9]$ Гц. При небольших температурах функция $J(\nu)$ может быть аппроксимирована

$$\bar{g}(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_D} \exp\left(-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{2\sigma_D^2}\right), \quad \sigma_D = \nu_0 \frac{\sigma_v}{c} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{kT}{M}}.$$

4.3 Другие примеры

Есть столкновительное уширение, глобально потенциальная энергия зависит от расстояния между атомами, тогда начинает фаза, или частота зависит от времени. В результате снова возникает Лоренцев контур, но с шириной $\Delta\nu = f_{\text{ст}}/\pi$, где $f_{\text{ст}}$ – частота столкновений в секунду. Лоренцева функция формы линии с учётом вкладов конечного времени жизни и столкновений имеет полную ширину, как сумму отдельных ширин линий:

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + 2f_{\text{ст}} \right)$$

Есть ещё времяпролетное уширение, частица пролетает конечный пучок, тогда интегрировать нужно не от 0 до ∞ , а от 0 до T , с чем тоже как-то борются.

Глобально можно их резделить на два типа: однородное и неоднородное. Например, естественная ширина линии однородна, а доплеровское неоднородно.

Для неоднородного уширения можно определить среднюю функцию формы линии $\bar{g}(\nu) = \langle g_\beta(\nu) \rangle$. Например, при доплеровском уширении роль параметра β играет скорость атома v и $\bar{g}(n) = \langle g_v(\nu) \rangle$. Тогда функция формы линии равна

$$\bar{g}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\nu - \nu_0 \frac{v}{c}\right) p(v) dv.$$

5 Скоростные уравнения

5.1 Межуровневые переходы фотонов

Что умеет электрон? Когда в него влетает фотон электрон умеет поглощать фотон, с некоторой вероятностью, характеризовать этот процесс будем некоторым сечением поглощения σ , – поглощение, *индуцированное* фотоном.

Аналогично для *вынужденного излучения* есть некоторая σ , которая такая же как и для поглощения. А ещё, что здорово, излученные фотоны практически идентичны.

Также есть спонтанное излучение куда-то с $h\nu$. А ещё есть безизлучательное излучение, когда энергия уходит в тепло. Всё происходит с какой-то вероятностью, за некоторое свойственное характерное время τ .

Сечение перехода $\sigma(\nu)$ характеризует взаимодействие атома с излучением. Площадь под графиком

$$S = \int_0^\infty \sigma(\nu) d\nu,$$

называется *силой перехода* или *силой осциллятора*. Функция $g(\nu) = \sigma(\nu)/S$ характеризует относительную величину взаимодействия с фотонами различных частот.

Функция $g(\nu)$ центрирована на резонансе ν_0 , где $\sigma(\nu_0)$ – максимум, таким образом ширина $g(\nu)$ – ширина линии перехода.

Коэффициенты Эйнштейна. Для начала заметим, что в монохроматическом случае

$$W_i = \varphi\sigma(\nu),$$

где φ – поток фотонов через единичную площадь, $\sigma(\nu)$ – эффективная площадь поперечного сечения атома, а $W_i = \varphi\sigma(\nu)$ – часть фотонного потока «захваченного» атомом с целью поглощения или вынужденного излучения.

В монохроматическом случае можем получить аналогичную формулу, вида

$$W_i = \frac{\lambda^3}{8\pi h t_{\text{сп}}} \rho(\nu_0),$$

где $\lambda = c/\nu_0$ и $\rho(\nu_0)$ – спектральная плотность света на резонансной частоте.

Удобно ввести *коэффициенты Эйнштейна*, как

$$P_{\text{сп}} = \mathbb{A}; \quad W_i = \mathbb{B}\rho(\nu_0);$$

где, выражая через время спонтанного перехода,

$$\mathbb{A} = \frac{1}{t_{\text{сп}}}; \quad \mathbb{B} = \frac{\lambda^3}{8\pi h} \frac{1}{t_{\text{сп}}},$$

где отношение \mathbb{A} к \mathbb{B} – результат микроскопических вероятностных законов.

Итого, атомный переход описывается резонансной частотой $\nu_0 = (E_2 - E_1)/h$, спонтанным временем жизни $t_{\text{сп}}$ и функцией формы линии $g(\nu)$ с шириной $\Delta\nu$, также удобно ввести среднее сечение перехода:

$$\bar{\sigma}(\nu) = \frac{\lambda^2}{8\pi} \frac{1}{t_{\text{сп}}} g(\nu).$$

5.2 Скоростные уравнения

Скоростные (кинематические) уравнения:

$$\dot{n}_2 = -\frac{n_2}{\tau_B} - \frac{n_2}{\tau_C} - \dots,$$

что соответствует $n_2 = n_{20} \exp(-t/\langle\tau\rangle_{\text{harm}})$.

Пусть $F = I/(h\nu)$ – плотность потока фотонов, тогда

$$\dot{n}_1 = -F\sigma n_1, \quad \Rightarrow \quad n_1(t) = n_1(0) \exp(-F\sigma t),$$

и, соответственно, при различных случаях

$$\dot{n}_1 = -F\sigma n_1 + F\sigma n_2 + \frac{n_2}{\tau_B}.$$

В отсутствие усиливаемого излучения. Пусть R_2 – скорость возрастания плотностей зачленности уровня 2, R_1 – скорость с которой с первого уровня уходят электроны, тогда под действием накачки:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{n}_2 = R_2 - n_2/\tau_2 \dot{n} &= -R_1 - n_1/\tau_1 + n_2/\tau_{21}, \\ \Rightarrow \quad n_0 = \lim n_2 - n_1 &= R_2\tau_2 \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_{21}}\right) + R_1\tau_1. \end{aligned} \right.$$

Например, при $R_1 = 0$ и R_2 реализуется возбуждением из основного состояния $E = 0$ на уровень 2 фотонами частоты E_2/h поглощаемых с вероятностью W . Пусть также $\tau_2 \approx t_{\text{сп}}$ и $\tau_1 \ll t_{\text{сп}}$, так что в стационарном состоянии $n_1 \approx 0$ и $n_0 \approx R_2 t_{\text{сп}}$. Тогда разность заселенности

$$n_0 \approx (n_1 + n_2 + n_3) \frac{t_{\text{сп}} W}{1 + 2t_{\text{сп}} W}.$$

В случае присутствия усиливаемого излучения. Здесь скоростные уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dn_2}{dt} &= R_2 - \frac{n_2}{\tau_2} - n_2 W_i + n_1 W_i, \\ \frac{dn_1}{dt} &= -R_1 - \frac{N_1}{\tau_1} + \frac{N_2}{\tau_{21}} + N_2 W_i - N_1 W_i. \end{aligned}$$

где $W_i = \varphi\sigma(\nu)$. В стационарном режиме можем получить

$$N = \frac{N_0}{1 + \tau_s W_i}, \quad \tau_s = t_2 + \tau_1 \left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_{21}}\right).$$

В случае $\tau_s W_i \ll 1$ (*приближение слабого сигнала*) можем считать $N \approx N_0$, но при росте W_i можно заметить, что $N \rightarrow 0$ независимо от знака N_0 . Величина τ_s – время насыщения.

5.3 Внутридоплеровская спектроскопия

Постановка задачи: есть куча бегающих атомов, несколько уровней энергии. Вообще можем следить за излучением, можем за поглощением. Из-за уширения разные линии уровня могут слиться в одну. Хотелось бы этого избежать.

Пусть $n_1 + n_2 = N$. Можем записать некоторое уравнение баланса $n_2 = N - n_1$

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = -n_1\sigma F + n_2\sigma F + n_2/\tau_B, \\ \dot{n}_2 = +n_1\sigma F - n_2\sigma F - n_2/\tau_B, \end{cases} \Rightarrow \dot{n}_1 + n_1(2\sigma F + \tau_B^{-1}) = N\sigma F + \frac{N}{\tau_B}, \Rightarrow n_1 = N \frac{\sigma F + \tau_B^{-1}}{2\sigma F + \tau_B^{-1}} = N \frac{F + \frac{1}{\sigma\tau_B}}{2F + \frac{1}{\sigma\tau_B}},$$

что соответствует $\dot{n}_1 = \dot{n}_2 = 0$.

Если посмотреть на $n_1(F)$ и $n_2(F)$, то они стремятся к $N/2$, при $F \rightarrow +\infty$. А вообще, считая $F_s^{-1} = \sigma\tau_B$, можем записать

$$n_1(F) = N \frac{F + F_s}{2F + F_s}.$$

Введя $\alpha = n_1\sigma - n_2\sigma$ – коэффициент поглощения. В термодинамике была $n\sigma\lambda$ обратно пропорционально длине свободного пробега

$$dF = -(n_1\sigma - n_2\sigma)F dz, \quad \Rightarrow \quad dF = -n_1\sigma F dz + n_2\sigma F dz.$$

Получается, что α стремится к 0 во времени.

Таким образом, если ооочень сильно светить на вещество, то можно его пробить при большой интенсивности.

При равенстве частоты лазера и частоты атома возникнет провал Лэмба. В какой-то момент научились менять частоту лазера, и научились так измерять ω_0 . Если частот будет две, то также можем зафиксировать два провала Лэмба.

5.4 Затухание интенсивности

Вспомним кинематическое уравнение:

$$\dot{n}_2 = -An_2 = -\frac{n_2}{\tau_B}, \quad \dot{n}_2 = -\frac{\tau_B}{\tau_{сп}}$$

где τ_B – характерное время безизлучательного перехода, $\tau_{сп}$ – спонтанного перехода. Также есть поглощение:

$$\dot{n}_1 = -\sigma F n_1,$$

и вынужденное излучение

$$\dot{n}_2 = -\sigma F n_2.$$

Вообще $A, B, \sigma F$ – коэффициенты Эйнштейна.

Вспомним про «просветление», запишем набор кинематических уравнений

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = -n_1\sigma F + n_2\sigma F + n_2/\tau \\ N = n_1 + n_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \dot{n}_1 = \dot{n}_2 = 0, \quad - \text{ стационарное приближение.}$$

решая эту систему находим, что

$$n_1(F) = N \frac{F\sigma\tau + 1}{1 + 2F\sigma\tau}, \quad n_2(F) = N \frac{F\sigma\tau}{1 + 2F\sigma\tau}.$$

Также, вспоминая про поглощение, понимая как происходит поглощение фотонов,

$$dF = D(\sigma n_2 - \sigma n_1) dz,$$

где $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sigma n_1 - \sigma n_2 = \sigma N$, так приходим к стандартному закону

$$dF = -F\alpha dz, \quad \Rightarrow \quad F = F_0 \exp(-\alpha h),$$

где h – толщина образца. И вообще можно найти $\alpha(F)$, который просто монотонно убывает.

5.5 Затемнение

Добавим к системе третий уровень. Договоримся, что электроны умеют переходить с 1 на 2 уровень, то на самом деле он запрыгивает чуть выше второго, и сваливается, но не с частотой $h\nu$, поэтому вынужденного излучения тут не будет.

Также за τ_2 происходит излучение с 3 на 2 не с $h\nu$. Итого остаются процессы с $\sigma_2, \sigma_1, \tau_1$ и τ_2 . На практике $\tau_2 \ll \tau_1$, примерно как 1 пс \ll 1 нс.

Запишем кинематические уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{n}_1 &= -n_1\varphi_1 F + \frac{n_2}{\tau_1}, \\ \dot{n}_2 &= n_1\sigma_1 F - n_2\sigma_2 F - \frac{n_2}{\tau_1} + \frac{n_3}{\tau_2}, \end{aligned}$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = N,$$

где мы сразу перейдём к стационарному приближению $\dot{n}_1 = \dot{n}_2 = \dot{n}_3 = 0$. Считая

$$\frac{1}{\sigma_1\tau_1} = F_1, \quad \frac{1}{\sigma_2\tau_2} = F_2, \quad n_2 = n_1 \frac{F}{F_1}, \quad n_3 = n_1 \frac{F^2}{F_1 F_2}$$

и, наконец, получаем

$$n_1 = N \left(1 + \frac{F}{F_1} + \frac{F^2}{F_1 F_2} \right)^{-1}. \quad (5.1)$$

Что с n_1 – она затухает, также n_2 слегка растёт, а потом затухает, а n_3 выходит на N . Если внимательно посмотреть на $\alpha(F) = \sigma_1 n_1 \pm \sigma_2 n_2$,

$$\frac{dF}{dz} = -\alpha F.$$

Так как τ_2 мааленький, то n_3 растёт оочень медленно. Для α получается немонотонная зависимость. На деле n_3 всегда ноль, т.к. $F \ll \sqrt{F_1 F_2}$. В итоге n_2 идёт к N , n_1 к 0.

Так вот, $\alpha = \sigma(n_1 - n_2)$. Также $dF = -\alpha F dz$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{if } n_1 > n_2, & \Rightarrow \alpha > 0, \quad \frac{dF}{dz} < 0, \\ \text{if } n_1 < n_2, & \Rightarrow \alpha < 0, \quad \frac{dF}{dz} > 0. \end{aligned}$$

Если $n_2 > n_1$, то переходим к ситуации с инверсией населенности.

Теперь устроим её. Пусть со второго на третий уровень происходит очень быстрое сваливание (третий ниже второго). Снова запишем кинематические уравнения

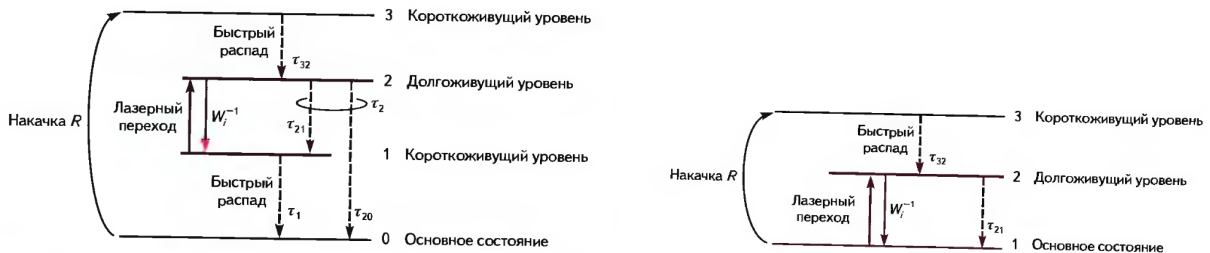
$$\begin{aligned} n_1 + n_3 &= N \\ \dot{n}_1 &= -n_1 W + \frac{n_3}{\tau} + n_3 \sigma F = 0. \end{aligned}$$

Но такие схемы уже редки, чаще сейчас используют четырех уровневые системы.

6 Принцип работы лазера

6.1 Скоростные уравнения в лазере

Четырёхуровневая схема. Есть уровни 1, 4, 3, 2 – $E_{14} \gg kT$. Также $\tau_{23} = 10$ пс. Также с $\tau_{41} = 10$ пс. Итого очень легко добиться инверсии населенности между третьим и четвертым уровнем. Накачка происходит с первого на второй уровень.



Лазер. Есть некоторая среда, есть накачка, с помощью которой происходит переброс с 1 на 4 уровень. Пока что это только усилитель. Теперь добавим зеркало 100% слева и 50% справа.

И тут на сцену выходит произвольное излучение. Как только один полетит в удачном направлении, захватит с собой остальных – лавина, успех.

Моды в лазере. Обычно разность частот между двумя последовательными модами $\delta\nu = c/2L$. Например, при $L = 1$ м, $\Delta\nu = 150$ МГц.

6.2 Эталон фабри-перо как оптический элемент для селекции мод

Как известно, максимум пропускания эталона Фабри-Перо:

$$\nu_n = \frac{nc_0}{2n_r L_1 \cos \theta'},$$

где n – целое число, n_r – показатель преломления, $L_1 \ll L$ – его длина. И если теперь разность частот $\Delta\nu = c/2L$ окажется больше или равной $\Delta\nu_c/2$ – ширины пика пропускания эталона, то эталон отсекает моду в центре линии от её соседей.

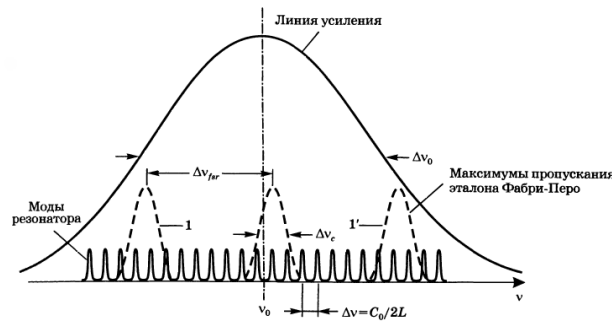


Рис. 2: Селекция продольных мод с помощью эталона Фабри-Перо, работающего на пропускание

6.3 Эффект Поккельса

Рассмотрим *ангармонический осциллятор* при наличии внешнего постоянного электрического поля E_0

$$\ddot{r} + 2\gamma\dot{r} + \omega_0^2 r + \beta r^2 = -\frac{e}{m} E_0,$$

где β – постоянная. Считая $r = r_0 + q$ можем перейти к уравнению с новой частотой

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + (\omega_0^2 + 2\beta r_0)q = 0,$$

откуда видно изменение частоты колебания на

$$\Delta\omega_0^2 = -\frac{2e\beta}{m\omega_0^2} E_0^2.$$

Смещение собственных частот меняет кривую дисперсии, т.е. показатель преломления n среды. В простейшем случае, когда ω_0 одна (см. §84), изменение n определяется выражением

$$\Delta n = \frac{\partial n}{\partial \omega_0^2} \Delta\omega_0^2 = -\frac{\partial n}{\partial \omega_0^2} - \frac{\partial n}{\partial \omega_0^2} \frac{2e\beta}{m\omega_0^2} E_0 = \frac{\partial n}{\partial \omega} \frac{e\beta}{m\omega\omega_0^2} E_0.$$

При фиксированном внешнем E_0 величина Δn зависит от направления распространения света. Это сказывается на двойном преломлении среды. *Изменение двойного преломления вещества из-за смещения собственной частоты во внешнем электрическом поле называется электрооптическим эффектом Поккельса.*

В этом эффекте изменения пропорциональны первой степени E_0 . *Эффект Поккельса может наблюдаться только в кристаллах, не обладающих центром симметрии.* Устройство, основанное на эффекте Поккельса, называют *ячейкой Поккельса*.

Она представляет собой кристалл, помещаемый между двумя скрещенными николями. Такое устройство действует так же, как и ячейка Керра. Николи не пропускают свет, когда нет внешнего электрического поля, но при наложении такого поля пропускание появляется. Необходимо, чтобы кристалл до наложения внешнего электрического поля не давал двойного преломления. Этого можно достигнуть, если взять оптически одноосный кристалл, вырезанный перпендикулярно к оптической оси, а свет направить вдоль этой оси. Внешнее поле может быть направлено либо перпендикулярно (поперечный модулятор света), либо параллельно распространению света (продольный модулятор).

6.4 Модуляция добротности

Пройдя поляризатор свет поляризуется, а обе компонент испытывают различные фазовые набег, что приводит к сдвигу фаз:

$$\Delta\varphi = k\Delta n L',$$

где $k = 2\pi/\lambda$, $\Delta n = n_x - n_y$, а L' – длина кристалла. При $\Delta\varphi = \pi/2$ волна становится поляризована по кругу. Отражаясь от зеркала и повторно проходя ячейку Поккельса свет становится линейно поляризованным и максимум E_x соответствует минимуму E_y . Данное состояние соответствует закрытому затвору.

Открывается затвор снятием напряжения смещения в ячейке Поккельса – при этом исчезает двулучепреломление и входящий свет проходит без изменения его поляризации.

Ячейка Поккельса – пассивный модулятор добротности.

7 Оптика фотонных кристаллов

7.1 Модуляция добротности

Есть *активная* и *пассивная* модуляция добротности.

Рассмотрим синхронизацию мод. Имея одинаковые фазы на всех модах из фабри перо можно получать мощные короткие импульсы. Если добавить в лазер амплитудный модулятор

$$A = A_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega t,$$

то это приведет, при $\Omega = \omega$ (активная самосинхронизация), и в конечном итоге получить пики со временем порядка пикисекунд.

Пассивная самосинхронизация мод возможна с помощью *красителя* – двухуровневой системой. Характерное время отдельного выброса $\tau \sim 1/\Delta\nu$. Один из механизмов – пусть у красителя τ очень мало (время релаксации), но и I_{sat} также очень мало (возможно при эффективном сечении $I \sim 1/\sigma\tau$ достаточно большим).

7.2 Фотонные кристаллы

Фотонные кристаллы – бываем $\{1, 2, 3\}$ -мерные. Например в одномерном случае можно воспринимать это как набор пластинок толщины h_i и коэффициентом преломления n_i .

Построим теорию матриц для фотонных кристаллов. Есть два типа матриц: M -типа и S -типа. Пусть в матрицу M -типа связывается u_2 и u_1 :

$$\begin{pmatrix} u_2^+ \\ u_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^+ \\ u_1^- \end{pmatrix}.$$

Приятный момент в том, что $M = M_6 M_5 \dots M_1$.

Другой тип – *матрица рассеяния* или S -матрица, которая связывает -типа связывается u_2 и u_1 :

$$\begin{pmatrix} u_1^- \\ u_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{12} & r_{21} \\ r_{12} & t_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^+ \\ u_2^- \end{pmatrix}.$$

Но их перемножить не получится.

Хотелось бы понять переход от M матриц, к S матрицам и назад. Рубрика «занимательная арифметика»:

$$\frac{\det M}{D} = \frac{AD - BC}{D} = t_{12}, \dots, \text{ ну, СЛУ, ..}$$

В общем получается связь вида

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{1}{t_{21}} \begin{pmatrix} t_{12}t_{21} & r_2 \\ -r_1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

И, аналогично,

$$S = \begin{pmatrix} t_{12} & r_2 \\ r_1 & t_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} AD - BC & B \\ -C & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

Пример №1: однородная среда

Так в однородной среде с n_0 , h и для волны $E = E_0 \exp(i\omega t - ikz)$ верно, что

$$u_1^- = u_2^- e^{-i\varphi}, \quad \Rightarrow \quad S = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix},$$

откуда уже можем найти M -матрицу

$$M = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

Пример №2: системы без потерь

Рассмотрим системы без потерь

$$|u_1^+|^2 + |u_2^-|^2 = |u_1^-|^2 + |u_2^+|^2.$$

Если система без потерь, то $|t|^2 + |r|^2 = 1$, также $|t_{12}| = |t_{21}| = |t|$ и то же для r . Также верно, что

$$\frac{t_{12}}{t_{21}^*} = -\frac{r_1}{r_2^*}.$$

В случае, если мы говорим про взаимные системы, то

$$t_{12} = t_{21} = t, \quad r_{21} = r_{12} = r.$$

Также для S матриц можем так получить условия

$$A = D^*, \quad B = C^*, \quad |A|^2 - |B|^2 = 1.$$

Так S и M матрицы запишутся в виде

$$S = \begin{pmatrix} t & r \\ r & t \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 1/t^* & r/t \\ r^*/t & 1/t \end{pmatrix}.$$

Пример №3: граница

Рассмотрим падение на границу

$$S = \begin{pmatrix} \frac{2n_1}{n_1+n_2} & \frac{n_2-n_1}{n_1+n_2} \\ \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2} & \frac{2n_2}{n_1+n_2} \end{pmatrix}$$

по Френелю. Забавно выглядит M -матрица:

$$M = \frac{1}{2n_2} \begin{pmatrix} n_2 + n_1 & n_2 - n_1 \\ n_2 - n_1 & n_2 + n_1 \end{pmatrix}.$$

Если добавим распространение в среде, перемножим, а также добавим второе преломление, то получим

$$M = \frac{1}{2n_2} \begin{pmatrix} n_2 + n_1 & n_2 - n_1 \\ n_2 - n_1 & n_2 + n_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix} \cdots = \frac{1}{4n_1n_2} \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix}.$$

Так находим, что

$$t = \frac{AD - BC}{D} = e^{-i\varphi_1 - i\varphi_2} \frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2 - (n)}$$

Есть некоторая решётка с периодом a , на которую светят волной с углом падения θ . Найдём разность хода $\Delta = CA + DC - BD = 2a \cos \theta = m\lambda$, тогда у коэффициента R и T будет зависимость от θ и λ .

Суммируя интенсивности можем получить

$$I_{\text{out}} = I_0 \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\varphi/2}, \quad 2ka \cos \theta = \pi m, \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \frac{\pi m}{2ka} = \frac{m\lambda}{2a}, \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos \left(\frac{m\lambda}{2a} \right).$$

Аналогично можем переписать в терминах матриц, и, по индукции, получить выражение вида

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1/t^* & r/t \\ r^*/t^* & 1/t \end{pmatrix}, \quad M = M_0^N, \quad \det M_0 = 1, \quad M_0^N = \Psi_N M_0 - \Psi_{N-1} \hat{E}, \quad \Psi_N = \frac{\sin N\Phi}{\sin \Phi}, \quad \cos \Phi = \text{Re} \left(\frac{1}{t} \right).$$

Так мы приходим к

$$M = \begin{pmatrix} 1/t_N^* & r_N/t_N \\ r_N^*/t_N^* & 1/t_N \end{pmatrix}, \quad \frac{\sin N\Phi}{\sin \Phi} \begin{pmatrix} 1/t^* & r/t \\ r^*/t^* & 1/t \end{pmatrix} - \frac{\sin(N-1)\Phi}{\sin \Phi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итого, из предельно простых рассуждений, находим

$$\begin{cases} 1/t_N^* = \Psi_N/t^* - \Psi_{N-1} \\ r_N/t_N = \Psi_N r/t \end{cases}$$

вводя $T_N = t_N^* t_N$ переходим к

$$\frac{R_N}{T_N} = |\Psi_N|^2 \cdot \frac{R}{T}, \quad R_N = 1 - T_N \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - T_N}{T_N} = |\Psi_N|^2 \cdot \frac{1 - T}{T},$$

итого, финальная формула (почти)

$$\frac{1}{T_N} = |\Psi_N|^2 \frac{1 - T}{T} + 1, \quad \Rightarrow \quad T_N = T \frac{1}{|\Psi_N|^2(1 - T) + T}, \quad R_N = \frac{|\Psi_N|^2(1 - T)}{|\Psi_N|^2(1 - T) + T}.$$

Предельные случаи.

Случай 1. Считая $R \ll 1$, и $\Psi_N^2 R \ll 1$, тогда и $R_N \approx \Psi_N^2 R$.

Случай 2, режим частичного отражения. Рассматривается случай вида $|\text{Re } 1/t| < 1$, тогда $\Phi = \arccos(\text{Re } 1/t)$. Можем тогда получить, что $R_{N \max}$ будет вида

$$R_{N \max} = \frac{N^2(1 - T)}{N^2(1 - T) + T}, \quad \Psi_N = N.$$

И может быть минимум

$$R_N = 0, \quad \begin{cases} \sin N\Phi = 0, \\ \sin \Phi \neq 0 \end{cases}$$

Случай 3, режим полного отражения. Рассмотрим $\text{Re } 1/t > 1$, тогда $\cos \Phi > 1$, тогда

$$\cos(\Phi_R + i\Phi_I) = \cos \Phi_R \cos(i\Phi_I) - \sin \Phi_R \sin(i\Phi_I) = \cos \Phi_R \text{ch } \Phi_I - i \sin \Phi_R \text{sh } \Phi_I = \text{Re} \left(\frac{1}{t} \right)$$

тогда $\sin \Phi_R \text{sh } \Phi_I = 0$, иначе $\Phi_r = \pi m$, итого находим

$$\text{ch } \Phi_I = |\text{Re } 1/t|.$$

Приходим к значению

$$\Psi_N = (-1)^N \frac{\sin i\Phi_I N}{\sin i\Phi_I}, \quad \Rightarrow \quad R_N = \left| \frac{\text{sh}^2 \Phi_I N}{\text{sh}^2 \Phi_I} \right| (1 - T).$$