Заметки курса «Современная оптика»

Лектор: Колдунов Л. М.

Восторженные слушатели: Хоружий К.
Примак Е.

От: *15 февраля 2021 г.*

Содержание

1 Геометрическая оптика

1.1 Волновое уравнение

В общем оптика устроена как-то так: ГО ⊂ ВО ⊂ ЭО ⊂ КО. Вспомним уравнения Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \dfrac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} \boldsymbol{B} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0$$

Будем считать, что нет свободных токов и зарядов. Как вариант, можно найти решение в виде

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp\left(i\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right).$$

Важно, что верны формально замены

$$\frac{\partial}{\partial t} \to i\omega, \qquad \begin{cases} \partial_x \to -ik_x, \\ \partial_y \to -ik_y, \\ \partial_z \to -ik_z, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \nabla \to -i\boldsymbol{k}, \qquad \nabla^2 \to -k^2.$$

Приходим к уравнению вида

$$-k^2\boldsymbol{E} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\omega^2\boldsymbol{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}, \quad \to \quad \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{n}.$$

Можем посмотреть на $\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = \text{const}$. Тогда

$$\omega\, dt - k\, dz = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

1.2 Уравнения эйконала

1. Свет распространяется в виде лучей.
2. Среда характеризуется показателем преломления n, более того[1] $c_{\text{ср}} = c/n$.
3. $\int n\, dl \to \min$ (принцип Ферма).

Def 1.1. *Оптический путь* можем определить, как

$$S = \int_A^B n(\boldsymbol{r})\, dl.$$

Посмотрим на уравнение

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad E(\boldsymbol{r},t) = a(\boldsymbol{r})\exp\left(ik_0\Phi(\boldsymbol{r}) - i\omega t\right),$$

где $\Phi(\boldsymbol{r})$ называем *эйконалом*, а a - амплитуда.

Тогда формально получаем следующее:

$$\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega, \ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \to -\omega^2, \qquad \frac{\partial}{\partial x}E = a'_x\exp(\ldots) + a(\boldsymbol{r})ik_0\,\Phi'_x\exp(\ldots),$$

И для второй производной

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = a''_{xx}\exp(\ldots) + 2ik_0 a'_x\Phi'_x\exp(\ldots) + ik_0 a\Phi''_{xx}\exp(\ldots) - a(\boldsymbol{r})k_0^2|\Phi'_x|^2\exp(\ldots).$$

Таким образом нашли ΔE

$$\nabla^2 E = \nabla^2 a\exp(\ldots) - a(\boldsymbol{r})k_0^2|\operatorname{grad}\Phi|^2\exp(\ldots) + i\left(2k_0(\operatorname{grad} a, \operatorname{grad}\Phi) + k_0 a\nabla^2\Phi\right)\exp(\ldots).$$

Внимательно посмотрели на волновое уравнение, решили сгруппировать вещественную часть и мнимую

$$\nabla^2 a\exp(\ldots) - a(\boldsymbol{r})k_0^2|\operatorname{grad}\Phi|^2\exp(\ldots) + \frac{\omega^2}{c^2}n^2 a\exp(\ldots) = 0, \quad \Rightarrow \quad |\operatorname{grad}\Phi|^2 = \underbrace{\frac{1}{al_0^2}\nabla^2 a}_{\text{изм. ампл.}} + n^2.$$

[1] Будем считать, что лучу нужно проходить больший оптический путь.

Ну, будем считать, что (настоящая область применимости волновой оптики)

$$\left|\lambda\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right| \ll \left|\frac{\partial a}{\partial x}\right|, \quad \Leftrightarrow \quad \left|\lambda\frac{\partial a}{\partial x}\right| \ll a, \qquad \lambda \to 0.$$

И приходим к *уравнению Эйконала*

$$\boxed{|\operatorname{grad}\Phi| = n.} \tag{1.1}$$

Ещё раз вспомним, что волновой фронт имеет вид

$$\omega t - k_0\Phi = \text{const}.$$

Запишем, что (живём вдоль $\boldsymbol{S}$)

$$\operatorname{grad}\Phi = n\boldsymbol{S}, \qquad \|\boldsymbol{S}\| = 1, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial S} = n.$$

Тогда

$$\omega\, dt - k_0\, d\Phi = 0, \quad \Rightarrow \quad \omega\, dt = k_0\, d\Phi = k_0\frac{\partial\Phi}{\partial S}\, dS = k_0 n\, dS.$$

1.3 Принцип Ферма

Пусть Φ – однозначно задан, тогда

$$\operatorname{grad}\Phi = n\boldsymbol{S}, \quad \Rightarrow \quad \oint n\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{l} = 0, \quad \Rightarrow \quad \int_{ACB} n\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{ADB} n\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{l}.$$

Но $\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{l} = S\,dl = dl$ на ACB. Тогда

$$\int_{ACB} n\, dl = \int_{ADB} n\boldsymbol{S}\cdot d\boldsymbol{l} \leqslant \int_{ADB} n\, dl.$$

Что доказывает принцип Ферма.

1.4 Траектория луча (?)

Для луча верно, что

$$n\boldsymbol{S} = \operatorname{grad}\Phi, \qquad |d\boldsymbol{r}| = dl, \qquad \boldsymbol{S} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dl}.$$

В таком случае верно, что

$$n\frac{d\boldsymbol{r}}{dl} = \operatorname{grad}\Phi, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dl}(n\frac{d\boldsymbol{r}}{dl}) = \frac{d}{dl}\operatorname{grad}\Phi = \operatorname{grad}\frac{d\Phi}{dl} = \operatorname{grad} n.$$

Получили *уравнение траектории луча*

$$\boxed{\frac{d}{dl}\left(n\frac{d\boldsymbol{r}}{dl}\right) = \operatorname{grad} n}. \tag{1.2}$$

Например, в однородной среде

$$n = \text{const}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dl^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}l + \boldsymbol{b}.$$

Можно сделать ещё так (найти кривизну траектории?)

$$\boldsymbol{S}\frac{dn}{dl} + n\frac{d\boldsymbol{S}}{dl} = \nabla n, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{S}}{dl} = \frac{1}{n}\left(\nabla n - \boldsymbol{S}\frac{dn}{dl}\right).$$

Получаем (вспомнив трёхгранник Френе)

$$\frac{\boldsymbol{N}}{R} = \frac{1}{n}\left(\nabla n - \boldsymbol{S}\frac{dn}{dl}\right), \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{N^2}{R} = \frac{(\boldsymbol{N}\cdot\nabla n)}{n},$$

или

$$(\boldsymbol{N}\cdot\nabla n) > 0, \quad \Rightarrow \quad \text{луч поворачивает в} \uparrow n. \tag{1.3}$$

1.5 Уравнение луча в параксиальном приближение

Пусть есть некоторая $n(y)$. Пусть луч движется $\theta(y)$, рассмотрим ситуацию преломления, тогда

$$n(y)\cos\theta(y) = n(y+dy)\cos\theta(y+dy), \quad \Rightarrow \quad \left(n(y) + \frac{dn}{dy}\Delta y\right)(\cos\theta(y) - \sin\theta(y)).$$

Раскрыв скобки, получим

$$n(y)\cos\theta(y) = n(y)\cos\theta(y) + \frac{dn}{dy}\cos\theta(y)\Delta y - n(y)\sin\theta(y)\frac{d\theta}{dy}\Delta y.$$

Запишем чуть аккуратнее:

$$\frac{dn}{dy}\cos\theta(y) = n(y)\sin\theta(y)\frac{d\theta}{dy},$$

Считая, что $\sin\theta(y) \approx \theta(y) = dy/dx$, тогда

$$\frac{1}{n}\frac{dn}{dy} = \operatorname{tg}\theta\frac{d\theta}{dy} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad \Rightarrow \qquad y''_{xx} = \frac{1}{n}\frac{dn}{dy}. \tag{1.4}$$

1.6 Пример слоистой среды

Рассмотрим вещество с коммерческим названием SELFOC и переменным показателем преломления вида

$$n^2 = n_0^2(1-\alpha^2y^2)$$

Считая $\alpha y \ll 1$, подставляя в уравнение луча находим, что

$$y''_{xx} = \frac{1}{n_0(1-\alpha^2y^2)^{1/2}}\frac{dn}{dy} = \frac{-n_0\alpha^2 y}{n_0} = -\alpha^2 y,$$

и мы снова всё свели к гармоническому осциллятору.

Нужно ещё разобрать мнимую часть, в которой сидит факт об отсутствии взаимодействия лучей.

2 Матричная оптика

Будем рассматривать оптически центрированные системы, введем нормально к OX ось OY. Всё у нас аксиально симметрично, тогда луч можно характеризовать

$$\{y_1, \theta_1\} \to \{y_1, n_1\theta_1\},$$

где принято обозначение $n\theta \overset{\text{def}}{=} V$.

Вообще после прохождения оптической системы можем записать, что происходит некоторое линейное преобразование

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_1\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\theta_1 \end{pmatrix}.$$

Матрица перемещения

Пусть луч распространяется в однородной среде, под θ_1 распространяется, тогда $\theta_2 = \theta_1$. Что произошло с y? Ну, $y_2 = y_1 + l\theta_1$, тогда

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ n_2\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1\theta_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ n_1 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где соответствующую матрицу обозначим за T.

Матрица преломления на сферической поверхности

Есть некоторая ось OX, будем считать радиус кривизны положительным, если он идёт направо. Смотреть рис. O2.1. Верно, что

$$n_1\beta_1 = n_2\beta_2, \qquad \beta_1 = \theta_1 + \alpha, \qquad \beta_2 = \theta_2 + \alpha.$$

Тогда,

$$\alpha = \frac{y_1}{R}, \quad \Rightarrow \quad n_2\theta_2 = n_1\theta_1 + (n_1 - n_2)\frac{y_1}{R}, \quad \Leftrightarrow \quad V_2 = V_1 + \frac{n_1 - n_2}{R} y_1.$$

Теперь можем записать матрицу преломления P

$$P(y, V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_2 - n_1}{R} & 1 \end{pmatrix}, \qquad P(y, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где $(n_2 - n_1)/R$ называют *оптической силой.*

Общий подход

Пусть есть схема рис. 02.2, тогда

$$\underbrace{M_3 M_2 M_1}_{M} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}, \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{a} = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1} \boldsymbol{b}.$$

Посмотрим на коэффициенты, приравнивая их к 0. Пусть

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix},$$

тогда $\theta_2 = cy_1$, тогда при $D = 0$, получается, что $О\Pi_1$ – фокальная плоскость (слева).

Пусть $B = 0$, тогда $y_2 = Ay_1$, тогда это изображение, и говорим, что эти *плоскости сопряженные*, а коэффициент A – *коэффициент поперечного увеличения.*

Пусть $C = 0$, тогда $\theta_2 = \theta_1 D$, что соответствует телескопической системой, а коэффициент D – *коэффициент углового увеличения.*

Теперь рассмотрим $A = 0$, получается, что это фокальная плоскость справа.

Задачи

Пример №0

Рассмотрим преломление на первой границе, где

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-n}{nR_1} & 1/n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-1}{R_2} + \frac{1-n}{R_1} & 1 \end{pmatrix},$$

получается оптическая сила системы получилась равной

$$(n-1)\left(-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right),$$

согласно определению.

Найдём теперь после линзы изображение объекта (рис. O2.4)

$$\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1/F & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{b}{F} & b\\ -\frac{1}{F} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-b/F & a(1-b/F)+b\\ -1/F & -a/F+1\end{pmatrix}.$$

Для сопряженности плоскостей необходимо и достаточно, чтобы $B=0$, то есть

$$a+b-\frac{ab}{F}=0,\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}.$$

Тогда увеличение можно увидеть в $A=1-b/F$.

Пример №2

Показатель преломления $n=1.56$, высота стрелки $h=2$ мм, в переменных (y,V) запишем (см. рис. 02.5)

$$\begin{pmatrix}1 & x/n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -0.56/2.8 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 15\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{x}{7.8} & 15-\frac{x}{0.78}\\ -0.2 & -2\end{pmatrix},$$

требуя сопряженности плоскостей

$$15-\frac{x}{0.78}=0,\quad\Rightarrow\quad x=11.7\text{ см.}$$

Коэффициент увеличения а-ля $1/D$, то есть равен $-1/2$.

Пример №4

Параллельный пучок света проходит через шарик радиуса $R=1$ см, с показателем преломления $n=1.4$. С шариком $n=2$ луч собирается на полюсе шарика. В общем случае

$$\left(\begin{array}{cc}1 & F\\ 0 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}1 & 0\\ \frac{-(1-n)}{-R} & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}1 & \frac{2R}{n}\\ 0 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}1 & 0\\ -\frac{n-1}{R} & 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}-\frac{2F(n-1)+(n-2)R}{nR} & \frac{F(-n)+2F+2R}{n}\\ \frac{2-2n}{nR} & \frac{2}{n}-1\end{array}\right),$$

тогда

$$-2F(n-1)=R(n-2).$$

Пример №11

См. рис. O2.5. Пусть оптические силы P_1 и P_2, а расстояние l, тогда

$$\left(\begin{array}{cc}1 & 0\\ -\frac{1}{F_2} & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}1 & l\\ 0 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}1 & 0\\ -\frac{1}{F_1} & 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}1-\frac{l}{F_1} & l\\ -\frac{F_1+F_2-l}{F_1F_2} & 1-\frac{l}{F_2}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}1-P_1 & l\\ P_1+P_2-P_1P_2l & 1-P_2\end{array}\right).$$

Давайте считать $1/F=(n-1)G$. Хочется избавиться от зависимости от n. Тогда

$$l=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n-1)G_1}+\frac{1}{(n-1)G_2}\right)=\frac{F_1+F_2}{2}.$$

Дальше хочется поговорить про отражения, про периодические системы, волноводы, резонаторы, лазеры.