# Заметки курса по общей физики «Оптика»

---

**Авторы конспекта**: Хоружий К.
Примак Е.

**От**: *20 мая 2021 г.*

## Содержание

# 1 Элементы фурье-оптики

# 2 Кристаллооптика

## 2.1 Плоские волны в кристаллах

Поведение света всё также описывается уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{D}}, \qquad \operatorname{rot}E = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{H}},$$

однако усложняются материальные уравнения:

$$D^j = \varepsilon_i^j E^i,$$

где $\varepsilon_{ij}$ – *тензор диэлектрической проницаемости*, или *диэлектрический тензор.*

Рассмотрим плоские монохроматические волны вида

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})},$$

где $\boldsymbol{A} \in \{\boldsymbol{E},\, \boldsymbol{H},\, \boldsymbol{D}\}$. Понятно, что

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = -i\left[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}\right], \qquad \partial_t\boldsymbol{D} = -i\omega\boldsymbol{D}, \qquad \ldots$$

Подставив это в уравнения Максвелла, вводя верно волновой нормали $\boldsymbol{N} = \frac{v}{\omega}\boldsymbol{k}$, получаем

$$\boldsymbol{D} = -\frac{c}{v}\left[\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{H}\right], \qquad \boldsymbol{H} = \frac{c}{v}\left[\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{E}\right],$$

где $v$ – нормальная скорость волны.

Актуально, как никогда, значение вектора Пойтинга

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right].$$

**Lem 2.1.** *Вектор пойтинга* $\boldsymbol{S}$ *определяет направление световых лучей, то есть* $S \parallel \boldsymbol{u} = d_{\boldsymbol{k}}\omega$.

Стоит заметит, что в кристаллая $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{N}$ не совпадают по направлению. Однако, как видно из формул, плоские волны в кристалле поперечн в отношении векторов $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{H}$. Вектора $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{S}$ лежат в плоскости, перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{H}$.

Получается, что если $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$ не сонаправлены, то зная направление $\boldsymbol{E}$ мы знаем направление и $\boldsymbol{D}$, а тогда и $\boldsymbol{H}$, и $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{S}$ соответственно тоже. При $\boldsymbol{E} \parallel \boldsymbol{D}$ любая прямая $\perp\boldsymbol{E}$ может служить направлением магнитного поля. Подставляя $\boldsymbol{H}$ в $\boldsymbol{D}$ можем найти

$$\boldsymbol{D} = \frac{c^2}{v^2}\boldsymbol{E} - \frac{c^2}{v^2}\left(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{e}\right)\boldsymbol{N},$$

и, т.к. $(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{N}) = 0$, то скалярно умножая на $\boldsymbol{D}$ находим

$$v^2 = c^2\frac{(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})}{D^2}.$$

Таким образом вектор $\boldsymbol{E}$ в кристале является *главным.*

## 2.2 Оптически одноосные кристаллы

**Def 2.2.** *Оптически одноосными* называют кристаллы, свойства которых обладают симметрей вращения относительно некоторого направления, называемого *оптической осью кристалла.*

Разложим $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$ на составляющие параллельные оптической оси, и нормальный к ней, тогда

$$\boldsymbol{D}_\parallel = \varepsilon_\parallel\boldsymbol{E}_\parallel, \qquad \boldsymbol{D}_\perp = \varepsilon_\perp\boldsymbol{E}_\perp,$$

где $\varepsilon_\parallel$ и $\varepsilon_\perp$ – продольная и поперечные диэлектрические проницаемости кристалла. Плоскости, в которой лежат оптическая ось кристалла и нормаль $\boldsymbol{N}$, называется *главным сечением кристалла.*

**Def 2.3.** Если электрический вектор $\boldsymbol{D}$ перпендикулярен к главному сечению, то скорость волны не зависит от направдения её распространения, такая волна называется *обыкновенной.*

Тогда $\boldsymbol{D} \equiv \boldsymbol{D}_\perp$, тогда и $\boldsymbol{D} = \varepsilon_\perp\bar{E}$, соответственно

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_\perp\boldsymbol{E}, \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} D = H\frac{c}{v} \\ H = E\frac{c}{v} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad v = v_\perp \equiv v_\text{o} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_\perp}}.$$

**Def 2.4.** Если электрический вектор $\boldsymbol{D}$ лежит в главном сечении, то скорость волны зависит от направления распространенияЮ и такую волну называют *необыкновенной.*

Вектор $\boldsymbol{E}$ в таком случае также лежит в главном сечении, и $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_N + \boldsymbol{E}_D$. В таком случае, верно

$$\boldsymbol{H} = \frac{c}{v}\left[\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{E}_D\right], \qquad E_D = \frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}}{D} = \frac{E_\parallel D_\parallel + E_\perp D_\perp}{D} = \frac{1}{D}\left(\frac{D_\parallel^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{D_\perp^2}{\varepsilon_\perp}.\right)$$

Соответсвующие проекции можно заменить на $D\sin\alpha$, где $\alpha$ – угол между оптической осью и волновой нормалью. Вводя $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{N_\perp^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{N_\parallel^2}{\varepsilon_\perp}$ можем перейти к

$$E_D = D\left(\frac{\sin^2\alpha}{\varepsilon_\parallel} + \frac{\cos^2\alpha}{\varepsilon_\perp}\right) = \frac{D}{\varepsilon}, \qquad H = \frac{c}{v}E_D, \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = c\sqrt{\frac{N_\perp^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{N_\parallel^2}{\varepsilon_\perp}} \equiv v_\parallel.$$

Когда $N_\perp = 0$, то понятно, что $v = c/\sqrt{\varepsilon_\perp} = v_\perp = v_\text{o}$, – нет разницы между обыкновенной и необыкновенной. В случае $N_\parallel = 0$ верно, что $v = v_\text{e} \overset{\text{def}}{=} c/\sqrt{\varepsilon_\parallel}$.

Термин оптическая ось введен для обозначения прямой, вдоль которой обе волны распростаняются с одинаковыми скоростями, и таким прямых в общем случае, поэтому кристалл называется *оптически двуосным*. В рассмотренном частном случае оси совпали, и получился *оптически одноосный* кристалл.

**Lem 2.5.** *В общем случае волна, вступающая в кристалл изотропной среды, разделяется внутри кристалла на две линейно поляризованные волны: обыкновенную, вектор электрической индукции которой перпендикулярен к главному сечению, и необыкновенную с вектором электрической индукции, лежащим в главном сечении.*

**Про показатели преломления**. В кристаллая верны законы преломления для *волновых нормалей*: их направления подчиняются закону Снеллиуса

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi_\perp} = n_\perp, \qquad \frac{\sin\varphi}{\sin\psi_\parallel} = n_\parallel,$$

где $n_\perp$ и $n_\parallel$ – показатели прелоления обыкновенной и необыкноуенной волн, т.е.

$$n_\perp = \frac{c}{v_\perp} = n_\text{o}, \qquad n_\parallel = \frac{c}{v_\parallel} = \left(\frac{N_\perp^2}{\varepsilon_\parallel} + \frac{N_\parallel^2}{\varepsilon_\perp}\right)^{-1/2}.$$

Постоянная $n_\text{o}$ называется *обыкновенным показателем преломления*. Когда необыкновенная волна распространяется перпендикулярно к оптической оси $(N_\perp = 1)$,

$$n_\parallel = \sqrt{\varepsilon_\parallel} \overset{\text{def}}{=} n_\text{e}.$$

Величина $n_\text{e}$ – *необыкновенный показатель преломления кристалла.*

**Двойное лучепреломление**. При преломлении на первой поверхности пластинки волна внутри кристалла разделяется на обыкноыенную, и необыкновенную. Эти волны поляризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях и распространяются внутри пластинки в разных направлниях и с разными скоростями. Таким образом можно добиться пространственного разделения двух лучей.

**Поляризационные устройства**. Комбинация кристаллов – поляризационная призма[1] . Существуют *однолучевые* (на полном внутренне отражении) и *двулучевые*.

**Def 2.6.** Допустимая разность углов наклона между крайними лучами падающего на призму пучка называется *апертурой полной поляризации призмы*.

**Def 2.7.** *Дихроизм* – свойство кристаллов, состоящее в различном поглощении веществом света в зависимости от его поляризации. Всего различают: *линейный дихроизм* (при $\perp$ направлениях линейной поляризации); *эллиптический дихроизм* (различное поглощение для правой и левой эллиптической поляризации); *круговой дихроизм* (различные направления круговой поляризации, иначе – *эффект Коттона*).

**Анализ поляризованного света**. *Пластинка в четверть волны* $(\lambda/4)$, вносит дополнительную разность фаз в $\pi/2$ между проходящими через неё лучами, поляризованными во взаимно перпедикулярных плоскостях.

**Интерференция поляризованных лучей**.

**Волны в двуосных кристаллах**.

**Лучи и волновые нормали.**

## 2.3 Двойное преломление в электрическом и магнитном полях (эффект Керра)

*Электрический эффект Керра состоит в том, что многие изотропные тела при введении в постоянное электрическое поле становится оптически анизотропным.* В частности, ведут себч как одноосные двупреломляющие кристаллы, оптическая ось которых параллельна приложенному электрическому полю.

[1] Самая первая призма – *николь*, 1828 г.

Пусть внешнее поле $\boldsymbol{E}_0$ *однородно*. Понятно, что $n_e - n_o$ зависит от $\boldsymbol{E}_0$ в виде

$$n_e - n_o = qE_0^2,$$

для малых полей, где $q$ зависит только от вещества и от $\lambda$. В таком случае разность фаз между обыкновенной и необыкновенными лучами будет

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)l = 2\pi BlE^2,$$

где $l$ – толщина образца, а $B \equiv q/\lambda$ – *постоянная Керра*. **Явление Керра объясняется анизотропией самих молекул.**

Для эффекта Керра в газах, в случае полностью анизотропных молекул, можно показать, что при $\boldsymbol{E} \parallel \boldsymbol{E}_0$ показатель преломления будет *необыкновенным*, тогда

$$n = 1 + \frac{2\pi}{3}N\beta,$$

где $\beta$ – поляризуемость молекулы вдоль оси молекулы. Если же $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{E}_0$, то показатель преломления будет обыкновенным, и

$$n_o = 1 + 2\pi N\beta\langle\sin^{\vartheta}\rangle,$$

где $\vartheta$ – угол[2] между $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{s}$.

Забавный факт: из полученных соотноешний можем получить

$$\frac{n_e - n}{n_o - n} = -2,$$

что выполняется для большинства веществ.

Проводя некоторый аккуратны расчёт можем получить выражение для постоянной Керра:

$$n_e - n_o = \frac{n-1}{5}\frac{\beta}{kT}E_0^2.$$

## 2.4 Линейный электрооптический эффект Поккельса

Рассмотрим *ангармонический осциллятор* при наличии внешнего постоянного электрического поля $E_0$

$$\ddot{r} + 2\gamma\dot{r} + \omega_0^2 r + \beta r^2 = -\frac{e}{m}E_0,$$

где $\beta$ – постоянная. Считая $r = r_0 + q$ можем перейти к уравнению с новой частотой

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + (\omega_0^2 + 2\beta r_0)q = 0,$$

откужа видно изменение частоты колебания на

$$\Delta\omega_0^2 = -\frac{2e\beta}{m\omega_0^2}E_0^2.$$

Смещение собственных частот меняет кривую дисперсии, т.е. показатель преломления $n$ среды. В простейшем случае, когда $\omega_0$ одна (см. §84), изменение $n$ определяется выражением

$$\Delta n = \frac{\partial n}{\partial\omega_0^2}\Delta\omega_0^2 = -\frac{\partial n}{\partial\omega_0^2} - \frac{\partial n}{\partial\omega_0^2}\frac{2e\beta}{m\omega_0^2}E_0 = \frac{\partial n}{\partial\omega}\frac{e\beta}{m\omega\omega_0^2}E_0.$$

При фиксированном внешнем $\boldsymbol{E}_0$ величина $\Delta n$ зависит от направления распространения света. Это сказывается на двойном преломлении среды. *Изменеие двойного преломления вещества из-за смещения собственной частоты во внешнем электрическом поле называется электрооптическим эффектом Поккельса.*

В этом эффекте изменения пропорциональны первой степени $E_0$. *Эффект Поккельса может наблюдаться только в кристаллах, не обладающих центром симметрии.* Устройство, основанное на эффекте Поккельса, называют *ячейкой Поккельса*.

Она представляет собой кристалл, помещаемый между двумя скрещенными николями. Такое устройство действует так же, как и ячейка Керра. Николи не пропускают свет, когда нет внешнего электрического поля, но при наложении такого поля пропускание появляется. Необходимо, чтобы кристалл до наложения внешнего электрического поля не давал двойного преломления. Этого можно достигнуть, если взять оптически одноосный кристалл, вырезанный перпендикулярно к оптической оси, а свет направить вдоль этой оси. Внешнее поле Eq может быть направлено либо перпендикулярно (поперечный модулятор света), либо параллельно распространению света (продольный модулятор).

[2] Дописать.

## 2.5 Вращение плоскости поляризации

Если линейно поляризованный свет проходит через плоскопараллельный слой вещества, то в некоторых случаях плоскость поляризации света оказывается повернутой относительно своего исходного положения. Это явление называется *вращением плоскости поляризации* или оптической активностью. Если вещество не находится во внешнем магнитном поле, то оптическая активность и вращение плоскости поляризации называются *естестыенными*. В противоположнос случае говорят о *магнитном вращении плоскости поляризации*, или *эффекте Фарадея*.

Вращение против часовов – *положительное*, по часовой – *отрицательное*. Это свойство, как и в случе с шурупом, не зависит от того, в каком из двух прямо противоположных напралний распространяетя свет[3] .

В области прозрачности и малого поглощения эта история хорошо согласуется с опытом формула Друде

$$\xi = \alpha L, \qquad \alpha = \sum_i \frac{B_i}{\lambda^2 - \lambda_i^2},$$

где $B_i$ – постоянные, $\lambda_i$ – длины волн, соответсвующие собтсвенным чатсота рассматриваемого вещества.

По Френелю вращение плоскости поляризации – проявление *кругового двойного лучепрпеломления*. Две волны, которые могут распространятся в оптически активной среде с разными скоростями, поляризованы *по кругу*: по левому и по правому.

Покажем достаточность такого предположения:

$$\begin{aligned} E_x &= A\cos\xi\cos(\omega t - kz), \\ E_y &= A\sin\xi\cos(\omega y - kz), \end{aligned} \qquad \xi = -\alpha z, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} E_x &= \tfrac{A}{2}\cos(\omega t - kz + \alpha z) + \tfrac{A}{2}\cos(\omega t - kz - \alpha z), \\ E_y &= \tfrac{A}{2}\cos(\omega t - kz + \alpha z + \pi/2) + \tfrac{A}{2}\cos(\omega t - kz - \alpha z - \pi/2). \end{aligned}$$

Разложим полученную волну на две: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\text{п}} + \boldsymbol{E}_{\text{л}}$, где для $\boldsymbol{E}_{\text{п}}$ и $\boldsymbol{E}_{\text{л}}$ имеет смысл ввеси $k_{\text{п}} = k - \alpha$ и $k_{\text{л}} = k + \alpha$. Полученные волны соответствуют правой и левой круговой поляризации. Скорости этих волн определяются выражениями

$$v_{\text{п}} = \frac{\omega}{k-\alpha}, \qquad v_{\text{л}} = \frac{\omega}{k+\alpha},$$

и соответсвующие показатели преломления $n = c/v$.

Френель выдвинул гипотезу, что возможно независимое распространения поляризованных по кругу волн, с сохранением поляризации, которую подтвердил эксперементально. Тем самым задача объяснения вращения плоскости поляризации была сведена к задаче объяснения кругового двойного лучепреломления.

Поляризованные по кругу в противоположных направлениях волны в окрестности полос или линий поглощения могут отличаться не только скоростями распространения, но и коэффициентами поглощения. Тогда они выйдут с различными амплитудами. Если падающий свет был поляризован линейно, то выходящий будет поляризован эллиптически. Это явление называется круговым дихроизмом.

## 2.6 Магнитное вращение плоскости поляризации (эффект Фарадея)

Опыты Фарадея показали, что при наличии внешнего магнитного поля вдоль оптической оси системы, угол поворота зависит от длины пути $l$ и напряженноести внешнего поля $B$, как

$$\xi = RlB,$$

де $R$ – *постоянная Верде*, или *магнитная вращательная способность*.

При внесении в магнитное поле $\boldsymbol{B}$ у осцилляторов вещества появляются две новые резонансные частоты $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$, где $\Omega$ – ларморовская частота. Эти собственны частоты проявляеются не только в испускании (*прямой эффект Зеемана*), но и в поглощении света (*обратный эффект Зеемана*).

Нормальные волны, которые могут распространятся вдоль магнитного поля, поляризованы по кругу. Когда направления распространения света и магнитного поля совпадают, большей частоте $\omega_+ = \omega_0 + \Omega$ соответсвует вращение по, а меньшей $\omega_-$ – против часовой стрелки, если смотреть в направлении магнитного поля. Так как $\omega_+$ и $\omega_-$ различны, то происходит сдвиг фаз волн, а соответсвенно, и повород плоскости поляризации на гол

$$\xi = \frac{\omega l}{2c}(n_- - n_+) = \frac{\pi l}{\lambda}(n_- - n_+).$$

Если построить $n_- - n_+$, то можно увидеть, что, как и в случае ларморовского вращения $\Omega$, вращение плоскости поляризации определяется только направлением магнитного поля $\boldsymbol{B}$ и не зависят от направления распространения света. При изменение на противоположное направления распространеняи света не изменятся, в противоположность естественного вращения.

[3] Если свет заставить пройти туда и обратно через естественно-активное вещество, отразив его от зеркала, то плоскость поляризации возвратится к своему исходисходному направлению.

Вообще, в эффекте Фарадея, воспользовавшись формулой Зеемана можно получить *формулу Беккереля* для постоянной Верде:

$$R = -\frac{e}{2mc^2}\lambda\frac{dn}{d\lambda},$$

где $m$ – масса электрона, $e > 0$ – его абсолютный заряд.

Ещё можно было бы поговорить про *эффект Макалюзо и Корбино*, объясненный Фохтом, но оставим это на светлое будущее.

## 3 Рассеяние света

**Def 3.1.** *Оптически мутной* называют среду с $\langle n\rangle = \mathrm{const}$, но содержащую макроскопические неоднородности. В таких средах свет *рассеивается в стороны*, иначе это явление называют *эффектом Тиндаля*[4].

В неоднородной неподвижной изотропной среде распространение света описывается уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{E}) = 0,$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0,$$

где $\varepsilon \equiv \varepsilon(x, y, z)$. Выделим $\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon$, где $\varepsilon_0 = \mathrm{const}$.

Можем представить ЭМ поле в виде $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}'$, где $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H}_0$ удовлетворяют уравнениям Максвелла в однородной среде

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}_0 = \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}_0}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0) = 0,$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}_0}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{H}_0 = 0.$$

Принята номенклатура о том, что $\boldsymbol{A}_0$ – *падающая волна*, а $\boldsymbol{A}'$ – поле *рассеянного света*.

Вычитая последние две группы уравнений друг из друга, находим

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}' - \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}'}{\partial t} = \frac{\delta\varepsilon}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon_0\boldsymbol{E}') = -\operatorname{div}(\delta\varepsilon\,\boldsymbol{E}),$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}' - \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}'}{\partial t} = 0, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{H}' = 0.$$

И это очень похоже на уравнения Максвелла в однородной среде с $\varepsilon_0$, только первые два уравнения с *дополнительными источниками электромагнитных волн*. Введём

$$\delta\boldsymbol{P} = \frac{\delta\varepsilon}{4\pi}\boldsymbol{E},$$

тогда эти уравнения перейдут в

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}' - \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}'}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\delta\boldsymbol{P}, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon_0\boldsymbol{E}') = -4\pi\operatorname{div}(\delta\boldsymbol{P}).$$

Получается, в среде появляется дополнительная поляризация $\delta\boldsymbol{P} = \frac{\delta\varepsilon}{4\pi}\boldsymbol{E}$, так что каждый элемент объема $\delta V$ получает *дополнительный дипольный момент* $\delta V \cdot \delta\boldsymbol{P}$. Они излучают, как колеблющийся *диполь Герца*, это и есть свет, рассеянный элементом объема $\delta V$.

**Рассеяние на шариках (рассеяние Ми)**. Пусть неоднородность создаётся шариками, радиуса $a$, расстояние между которыми $\gg a$. Тогда поле $\boldsymbol{E}$ внутри шарика вычисляется в контектсе однородного $\boldsymbol{E}_0$. Из электростатики следует

$$\boldsymbol{E} = \frac{3}{\varepsilon/\varepsilon_0 + 2}\boldsymbol{E}_0 = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\boldsymbol{E}_0,$$

где $\varepsilon$ – диэлектрическая проницаемость шарика, $\varepsilon_0$ – окружающей среды. Тогда вектри шариков

$$\delta\boldsymbol{P} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{4\pi}\boldsymbol{E} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{4\pi}\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\boldsymbol{E}_0,$$

тогда дипольный момент шарика

$$\boldsymbol{p} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}(\varepsilon - \varepsilon_0)a^3\boldsymbol{E}_0.$$

**Поляризованный свет**. Разобраться с $\theta$ и $\vartheta$. Пусть падающая волна *поляризована линейно*. Тогда векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{E}$ всё время параллельны одному и тому же неизменному направлению. Электрическое поле диполя (в

[4] Теоретически обоснованным Рэлеем.

волновой зоне) определяется выражением

$$E_1 = \frac{\sin\theta}{c^2 r}\,[\ddot{p}]_{t-r/v} = -\frac{\omega^2\sin\theta}{c^2 r}[p]_{t-r/v},$$

где $v = c/\sqrt{\varepsilon}$, а $\theta$ – угол между осью диполя $\boldsymbol{p}$ и направлением рассеянного излучения. Получается, *рассеянный свет поляризован линейно*, причём электрический вектор лежит в плоскости, проходящей через ось диполя $\boldsymbol{p}$ и направление излучения.

Считая интенсивностью усредненный вектор Пойтинга

$$I_1 = \frac{\sin^2\theta}{4\pi\varepsilon_0 v^3 r^2}\overline{\ddot{p}^2} = \frac{\omega^4\sin^2\theta}{4\pi\varepsilon_0 v^3 r^2}\overline{p^2}, \qquad I_0 = \frac{c}{4\pi}\overline{E_0 H_0} = \frac{v}{4\pi}\varepsilon_0\overline{E_0^2}, \qquad \Rightarrow \qquad I_1 = 9\varepsilon_0^2\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\right)^2\frac{\pi^2 V_1^2}{\lambda^4}\frac{\sin^2\theta}{r^2}I_0,$$

где $V_1 = \frac{4}{3}\pi a^3$ – объем шарика. Интегрируя по сфере радиуса $r$ с элементом поверхности $2\pi r^2\sin\theta\,d\theta$, находим

$$\mathcal{P}_1 = 24\pi^3\varepsilon_0^2\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\right)\frac{V_1^2}{\lambda^4}I_0.$$

**Естественный свет**. Пусть теперь падающий свет *естественный*. Пусть рассеянный свет наблюдается в направлении $OA$ под углом $\theta$ к оси его распространения $Z$. Угол $\theta$ – *угол рассеяния* (рис. 1). Направим ось $X$

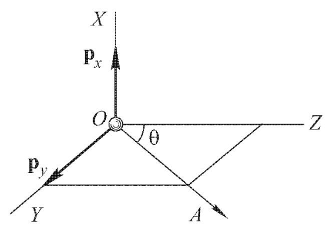


Рис. 1: Рассеяние естественного света

нормально к $OA$ и $OZ$, в силу $\boldsymbol{p}\parallel\boldsymbol{E}_0$ верно, что $\boldsymbol{p}\parallel XY$, тогда по найденному значению для $I_1$ с $\theta=\pi/2$ и $\theta=\pi/2-\vartheta$, можем найти интенсивности дипольных моментов $\boldsymbol{p}_x$ и $\boldsymbol{p}_y$. В силу ествественности падающего света, эти излучения *некогерентны*, точнее некогерентны интенсивности от $\boldsymbol{p}_x$ и $\boldsymbol{p}_y$:

$$I_{1,\boldsymbol{p}_x} = 9\varepsilon_0^2\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\right)^2\frac{\pi^2V_1^2}{\lambda^4}\frac{\sin^2\pi/2}{r^2}I_0, \qquad I_{1,\boldsymbol{p}_y} = 9\varepsilon_0^2\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\right)^2\frac{\pi^2V_1^2}{\lambda^4}\frac{\cos^2\vartheta}{r^2}I_0,$$

так что их можно просто сложить, тогда получим

$$I_1 = \frac{\omega^4}{4\pi\varepsilon_0 v^3 r^2}\left(\overline{p_x^2}+\overline{p_y^2}\cos^2\vartheta\right) = \frac{\omega^4}{4\pi\varepsilon_0 v^3 r^2}\frac{1+\cos^2\vartheta}{2}\overline{p^2} = 9\varepsilon_0^2\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\right)^2\frac{\pi^2V_1^2}{\lambda^4}\frac{1+\cos^2\theta}{2r^2}I_0,$$

где учтено $\overline{p_x^2} = \overline{p_y}^2 = \frac{1}{2}\overline{p^2}$. а формула для $\mathcal{P}_1$ останется без изменений.

**Частично поляризованный свет**. Полная линейная поляризация наблюдается только при $OA\perp$ направлению распространения падающего света, так как тогда $\boldsymbol{p}_y$ не даёт излучения.

Если же посчитать интенсивность $I$ света, рассеиваемого объемом $V$, содержащим много шариков $N_{\text{шар}}V$, то, складывая интенсивности и рассматривая $r^3\gg V$, найдём

$$I = 9\varepsilon_0^2\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\right)^2\pi^2\frac{V_1^2}{\lambda^4}\frac{1+\cos^2\theta}{2r^2}NVI_0.$$

Эта формула была получена Рэлеем, и по ней $I\sim\omega^{-4}$, что называют *законом Рэлея*, что справедливо для сред с частицами, размеры которых малы по сравнению с длиной волны.

**Убывание интенсивности**. Выделим цилиндр $\parallel OZ$ и рассмотрим баланс $I_0(z)-I_0(z+dz) = dI_0 = \mathcal{P}_1 N\,dz$, тогда

$$dI_0 = -\gamma I_0\,dz, \qquad \gamma = 24\pi^3\varepsilon_0^2\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\right)^2\frac{NV_1^2}{\lambda^4}, \qquad \Rightarrow \qquad I_0 = \text{const}\cdot e^{-\gamma z},$$

где $\gamma$ – *коэффициент рассеяния*.

**Молекулярное рассеяние (рассеяние Рэлея)**. Стоит заметить, что в атмосфере рассеяние происходит не посторонними частицами, а самими *молекулами воздуха*. Такое рассеяние света называется *рэлеевским* или *молекулярным рассеянием*. На самом деле[5] молекулярное рассеяние вызывается тепловым флуктуациями показателя преломления, которые и делают среду оптически мутной.

[5] 1908 г., М. Смолуховский.

Среда разбивается на $dV \ll \lambda^3$, при этом $N\,dV \gg 1$. Уравнения на $\boldsymbol{H}'$ и $\boldsymbol{E}'$ остаются верны, последовательными приближениями можем получить

$$\delta \boldsymbol{P} = \frac{\delta\varepsilon}{4\pi}\boldsymbol{E}_0, \qquad \boldsymbol{p} = \frac{\delta_i\varepsilon \cdot \delta_i V}{4\pi}\boldsymbol{E}_0.$$

Это выражение отличается от случая с «шариками» только коэффициентом, так что верно, что

$$I_i = \frac{\pi^2}{\lambda^4}\frac{1+\cos^2\theta}{2r^2}I_0(\delta_i V)^2\overline{(\delta_i\varepsilon)^2}.$$

Так, например, в случае идеального газа, верна формула

$$\varepsilon_i = 1 + 4\pi\beta\frac{N_i}{\delta_i V},$$

где $\beta$ – поляризуемость молекулы, а $N_i$ – число молекул в $\delta_i V$. Так как $\delta_i V$ фиксирован, то $\delta_i\delta\varepsilon_i = 4\pi\beta\delta N_i$, т.е. рассеяние вызывается *флуктуациями числа молекл* в $\delta_i V$.

Аккуратно работая с этими флуктуациями, можем получить *формулу Рэлея*:

$$I = \frac{2\pi^2}{\lambda^4}\frac{V}{N}(n-1)^2\frac{1+\cos^2\theta}{r^2}I_0,$$

что верно для изотропных молекул.

Для неидеальных газов и жидкостей можно получить формулу, вида

$$I = \frac{\pi^2}{\lambda^4}\frac{1+\cos^2\theta}{2r^2}VI_0 \cdot \left(\rho\frac{d\varepsilon}{d\rho}\right)^2\frac{kT}{(-v\partial_v P)_T},$$

полученную Эйнштейном в 1910 г.

# 4 Нелинейная оптика

## 4.1 Явление Мандельштама-Бриллюэна

Рассмотрим случай слабой неоднородности для уравнений относительно $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{E}'$:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}' - \frac{\varepsilon_0}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}'}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\delta\boldsymbol{P}, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon_0\boldsymbol{E}') = -4\pi\operatorname{div}(\delta\boldsymbol{P}),$$
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}' - \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}'}{\partial t} = 0, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{H}' = 0,$$

где $\delta\boldsymbol{P} = \frac{\delta\varepsilon}{4\pi}\boldsymbol{E}_0$. Эти уравнения линейный и однородны как относительно полей, так и относительно $\delta\varepsilon$. Отсюда следует, что если представить $\delta\varepsilon$ в виде $\delta\varepsilon = \sum\delta_i\varepsilon$, то в линейном приближении можем рассеянное излучение может быть получено суперпозицией полей, рассейяных одной неоднородностью.

Рассмотрим случай, когда $\delta\varepsilon = a\exp\left(-i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}\right)$, где $a$ и $\boldsymbol{K}$ – постоянные. Представляя падающую волну, как плоскую

$$\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{A}e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}, \qquad \boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{B}e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}.$$

Разобьеё среду плоскостями с расстоянием $\Lambda = \frac{2\pi}{K}$, тогда фазы вторичных источников будут одинаковы (рис. 2). Чтобы источники не гасили, а усиливали друг друга, необходимо выполнение *условия Брэгга-Вульфа*:

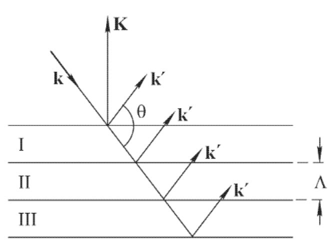


Рис. 2: Иллюстраия к явлению Мандельштама-Бриллюэна

$$2\Lambda\sin(\theta/2) = m\lambda,$$

где $\theta$ – угол рассеяния, а $m$ – порядок дифракционного спектра.

Покажем, что $m = 1$. Все плоские, отраженные различными слоями, сложатся в волну $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{A}'e^{i(\omega t 0\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}')}$, где волновой вектор $\boldsymbol{k}'$ определяет направление распространения отраженных волн. С другой стороны, дополнительная поляризация среды

$$\delta\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{E}_0}{4\pi}\delta\varepsilon = \frac{a\boldsymbol{A}}{4\pi}e^{i[\omega t-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{K})\boldsymbol{r}]}.$$

Подставляя эти выражения во второе уравнение и сравнивая показатели, получаем $\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k} = \boldsymbol{K}$, откуда

$$2\Lambda\sin(\theta/2) = \lambda,$$

таким образом на синусоидальной неоднородности диэлектрической проницаемости в линейном приближении получается дифракционный спектр *только первого порядка.*

Любую неоднродность в среде можно по Фурье представить в виде суперпозиции плоских синусоидальных неоднородностей различных направлений. Они рассеивают свет *незаивисимо* друг от друга, но при фиксированном направлении эффективны только неоднородности, волновой вектор $\boldsymbol{K}$ которых направлен по *биссектрисе угла, дополнительного к $\theta$ до $\pi$.*

Учтём $\delta\varepsilon \equiv \delta\varepsilon(t)$, считая $\varepsilon \equiv \varepsilon(\rho)$, запишем $\Delta\varepsilon = (d\varepsilon/d\rho)\Delta\rho$, где $\rho$ – плотность. Всякая неоднородность плотности в среде – *источник звуковых волн.* Разложим $\Delta\rho$ в интеграл Фурье и возьмём только те гармоники, которые существенны для рассеяния волн в рассматриваемом направлении, $\boldsymbol{K}$ которых определен выше, которому соответсвует определенная $\Omega$ и направления распространения звуковой волны: $\upuparrows \boldsymbol{K}$ и $\downdownarrows \boldsymbol{K}$. Тогда $\delta\varepsilon$ представляется суммой

$$\delta\varepsilon = \delta\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2, \qquad \delta\varepsilon_1 = a_1 e^{i(\Omega t-\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})}, \qquad \delta\varepsilon_2 = a_2 e^{i(\Omega t+\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r})}.$$

Им соответсвуют вектор дополнительной поляризации среды

$$\delta\boldsymbol{P}_1 = \frac{\boldsymbol{E}_0}{4\pi}\delta\varepsilon_1 = \frac{a_1\boldsymbol{A}}{4\pi}e^{i[(\omega+\Omega)t-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{K})\cdot\boldsymbol{r}]},$$
$$\delta\boldsymbol{P}_2 = \frac{a_2\boldsymbol{A}}{4\pi}e^{i[(\omega-\Omega)t-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{K})\cdot\boldsymbol{r}]}.$$

Таким образом рассеянное излучение будет происходить с частотами $\omega+\Omega$ и $\omega-\Omega$ (модуляция световой волны акустической волны). Это явление называется *тонкой структурой линий рэлевского рассеяния* или *рассеянием Мандельштама-Бриллюэна.* Смещение частоты $\Omega = Kv = (2\pi/\Lambda)v$, где $v$ – скорость звука, а $\Lambda$ – длина звукоыой волны. Итого, можем записать

$$\Omega = \frac{4\pi v}{\lambda}\sin\frac{\theta}{2} = 2\omega n\frac{v}{c}\sin\frac{\theta}{2},$$

где $c$ – скорость света в вакууме, а $n$ – показатель преломления среды.

Иная трактовка дублета Мандельштама-Бриллюэна – *доплеровское изменение частоты света* при отражении от аккустической волны. Доплеровское изменение частоты определяется формулой

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{2v\sin\theta/2}{c/n},$$

что соответсвует предыдущему соотношению.

Забавный факт про жидкости: там в рассеянном свете есть несмещенная компонента, всё потому, что

$$\delta V = (\partial_P V)_S\delta P + (\partial_S V)_P\delta S,$$

то есть флуктуации объема обусловлены не только флуктуациями давления, но и флутуациями энтропии, второе и вызывает *несмещенную компоненту.*

**Нелинейный эффект**. Рассмотрим мощный световой импульс, генерирующем давление

$$\mathcal{P} = \frac{1}{8\pi}\left(\rho\frac{d\varepsilon}{d\rho}\right)E^2,$$

где $\rho d_\rho\varepsilon \sim 1$, соответсвенно $\mathcal{P}$ может достигать $10^5$ атм, а тогда световые и оптические волны надо рассматривать *совместно.* Они описываются сложной охапкой нелинейный диффуров из электродинамики и акустики, что генерирует целый пучок разных эффектов, *вынужденное рассеяние рассеяние Мандельштама-Бриллюэна.*

Пусть,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_0 &= \boldsymbol{A}_0\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r}),\\
\boldsymbol{E}_1 &= \boldsymbol{A}_1\cos\left[(\omega+\Omega)t - \boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}\right],\\
\boldsymbol{E}_2 &= \boldsymbol{A}_2\cos\left[(\omega-\Omega)t - \boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}\right],\\
\boldsymbol{E}_3 &= \boldsymbol{A}_3\cos[\omega t - \boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}],
\end{aligned}$$

– напряженности электрического поля падающей и трех рассеянных волн Мандельштама-Бриллюэна. Последние три волны возникают при рассеянии на тепловых флуктуациях, интенсивности их малы, но давление определяется $(\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3)^2$. Однако возбуждение звуковых волн связано только с низкочастотными членами, с косинусами разностных аргументов, вспоминая $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}$, находим $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{A}_1\cos(\Omega t - \boldsymbol{K}\boldsymbol{r})$ – волнуЮ распространяющуюся с той же фазой и в том же направлении, что и первичная звуковая волна из-за тепловых флуктуаций. Так будет происходить *параметрическое усиление* акустической волны, и всех световых волн, на ней рассеянных. Это будет продолжаться до тех пор, пока интенсивность рассеянного света не станет сравнимой с интенсивностью падающего. Интересно, что *вынужденное рассеяние Мандельштама-Бриллюэна когерентно.*

## 4.2 Комбинационное рассеяние света (эффект Рамана)

**Def 4.1.** *Сателлит* – система линий измененной частоты в рассеянном свете, сопровождающих падающий свет.

Изменение длины волны оказывается значительно больше, чем при рассеянии Мандельштама. Это явление называется *комбинационным рассеянием света* или *эффектом Рамана.*

**Экспериментальные ниблюдения**. Далее будем считать, что частоты сетеллитов отличаются от возбуждающей линии на $\{\Delta\omega^j_{\text{комб}}\}$. При переходе от одной спектральной линии первичного пучка к другой $\{\Delta\omega^j_{\text{комб}}\}$ *сохраняется*, – она характерна для рассматриваемого вещества.

Каждому сателлиту с частотой $\omega - \Delta\omega_{\text{комб}}$, смещенной в красную сторону спектра, соответствует сателлит с частотой $\omega + \Delta\omega_{\text{комб}}$, смещенный в фиолетовую сторону. Первые называют *красными* или *стоксовыми*, вторые – *фиолетовыми* или *антистоксовыми.*

Интенсивности фиолетовых сателлитов значительно меньше интенсивностей, соответствующих им красных. Постоянные $\Delta\omega_{\text{комб}}$ совпадают с собственными частотами $\Omega_{\text{инфр}}$ инфракрасных колебаний.

Линии комбинационного рассеяния света более или менее *поляризованы.* Характер поляризации красных и фиолетовых сателлитов, соотвествующих $\Delta\omega_{\text{комб}}$, всегда одинаков и не зависит от частоты основной линии.

**Теоретическое объяснение**. В поле световой волны $\boldsymbol{E}$ электроны внутри молекулы приходят в колебания, и молекула приобретает индуцированный дипольный момент $\boldsymbol{p} = \beta\boldsymbol{E}$. Вообще $\beta$ – тензор, определяемый мгновенным положением атомыня ядер, но сами ядра совершают беспорядочное тепловое движение, $\Rightarrow \beta \neq \text{const}$, в частности представима наложением гармноических колебаний, частоты которых определяются собственными частотами инфракрасных колебаний молекулы, возникает *модуляция колебаний* индуцированных моментов $\boldsymbol{p}$.

Если внешнее поле $\boldsymbol{E}$ меняется с частотой $\omega$, то в колебаниях дипольного момента $\boldsymbol{p}$ появляются частоты $\omega \pm \Omega_{\text{инфр}}$, такие же частоты появятся ив излучении дипольных моментов.

Математически, скажем что у молекула $f = 3s - 6$ степеней свободы на *внутреннее движение ядер молекул.* Выберем нормальные обобщенные координаты для описания $q_j$, и пусть $q_j = a_j \cos(\Omega_j t + \delta_j)$ с инфракрасной частотой $\Omega_j$ и хаотически меняющейся фазой $\delta_j$. Пусть $\beta$ для простоты скаляр:

$$\beta = \beta_0 + (\partial_{q_m}\beta)q^m = \beta_0 + \tfrac{1}{2}a_m(\partial_{q_m}\beta)\cdot\left(e^{i(\Omega_m t+\delta_m} + e^{-i(\Omega_m t+\delta_m}\right).$$

Наконец, подставляя $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t}$, находим

$$\boldsymbol{p} = \beta_0\boldsymbol{E}_0 e^{i\omega t} + \tfrac{\boldsymbol{E}_0}{2}a_m(\partial_{q_m}\beta)\left(e^{i(\omega+\Omega_m)t+\delta_m} + e^{i(\omega-\Omega_m)t-\delta_m}\right),$$

откуда видно возникновение дуплетов в излучении, а также ясно, что волны, рассеиваемые отдельными молекулами, *некогерентны.*

**Проявление квантмеха**. До тех пора, пока атомы тяжелые, классическая теория $\pm$ справляется. но только через кванты получается показать, что интенсивность красных сателлитов всегда больше интенсивности соответсвенных фиолетовых сателлитов.

Пропуская выкладки, можем получить, что для отношени интенсивностей верно, что

$$\frac{I_{\text{кр}}}{I_{\text{фиол}}} = \frac{N_n}{N_m}, \qquad \frac{N_n}{N_m} = \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m}{kT}\right) = \exp\left(\frac{\hbar|\Omega_{nm}|}{kT}\right), \quad \Rightarrow \quad \frac{I_{\text{кр}}}{I_{\text{фиол}}} = \exp\left(\frac{\hbar|\Omega_{nm}|}{kT}\right),$$

что вполне объясняет наблюдаемое соотношение.

**Вынужденное комбинационное рассеяние**. В мощных импульсах лазерного излучения наблюдается явление, называемое *вынужденным комбинационным рассеянием света*, которое возникает из-за обратного воздействия световой волны на молекулы среды. Точнее на молекулу действует сила $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{E}$, индуцированные $\boldsymbol{p} \sim \boldsymbol{E}$, так что $F \sim E^2$. Поле $\boldsymbol{E}$ складывается из $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{E}'$, где $\boldsymbol{E}'$ слабое, но усиливается.

Среди слагающих сил $\big([\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}']\cdot\nabla\big)\,(\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}')$ присутствуют члены с произведением полей $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{E}'$, частоты которых совпадают с соответствующими чаcотами инфракрасных колебаний молекулы, они вызывают *резонансное усиление* соответствующих линий комбинационного рассеяния. Вынужденные колебания ядер молекул происходят в фазе с падащей волной, а потому вынужденноме комбинационное рассеяние когерентно с падающей волной.

## 4.3 Нелинейная поляризацим среды

При распространении света в среде нелинейные явления в оптике связаны прежде всего с *нелинейной зависимостью* вектора поляризации среды $\boldsymbol{P}$ от напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ световой волны. Если поле

$\boldsymbol{E}$ ещё не «очень сильное», то вектор $\boldsymbol{P}$ можно разложить во степеням $\boldsymbol{E}$:

$$P_j = \alpha_{jk}E_k + \alpha_{jkl}E_kE_l + \alpha_{jklm}E_kE_lE_m + \ldots,$$

где $\alpha_{jk}$ – *линейная поляризуемость среды*, а тензоры высших порядков называют соответственно квадратичной, кубичной, и т.д. *поляризуемостями.* Поле $\boldsymbol{E}$ предполагаем монохроматичным, среду однороднойЮ немагнитной, без дисперсии, а $\alpha$ – функции частот $\omega$. Для изотропной среды все тензоры $\alpha$ вырождаются в скаляры.

В средах, в которых все точки явяются центрами симметрии, квадратичный член равен нулю. Однако, можем рассмотреть *качественно* процессы, полагая

$$\boldsymbol{P} = \alpha\boldsymbol{E} + \alpha_2 E\boldsymbol{E} + \alpha_3 E^2\boldsymbol{E} + \ldots,$$

где мы принимаем ущербность такого приближения, но зато можем сделать несколько правильных шагов. Разобьем поляризацию, а также индукцию, на линейную и нелиненую: $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_\mathrm{l} + \boldsymbol{P}_\mathrm{nl}$, где нелинейная часть $\boldsymbol{P}_\mathrm{nl} = \alpha_2 E\boldsymbol{E} + \alpha_3 E^2\boldsymbol{E} + \ldots$, а линейная $\boldsymbol{P}_\mathrm{l} = \alpha\boldsymbol{E}$. Тогда и $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}$ предсавится, как $\boldsymbol{D}_{l=\mathrm{E}} + 4\pi\boldsymbol{P}_\mathrm{l}$ и нелинейная $\boldsymbol{D}_\mathrm{nl} = 4\pi\boldsymbol{P}_\mathrm{nl}$. Линейная часть $\boldsymbol{D}_\mathrm{l} = \varepsilon\boldsymbol{E}$, где $\varepsilon$ – диэлектрическая проницаемость. Теперь можем записать уравнения Максвелла в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial c}, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{D} &= 0, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{H} &= 0, \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \operatorname{rot}\boldsymbol{H} &= \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial\boldsymbol{P}_\mathrm{nl}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{E}) &= -4\pi\operatorname{div}\boldsymbol{P}_\mathrm{nl}, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{H} &= 0. \end{aligned}$$

Система решается *методом последовательных приближений.* В нулевом приближение $\boldsymbol{P}_\mathrm{nl} = 0$, получаются уравнения *линейной электродинамики.* В качестве нулевого приближения рассмотрим

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{A}\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}),$$

где $\boldsymbol{k}^2 = \varepsilon\omega^2/c^2$. Для нахождения первого приближения вместо $\boldsymbol{E}$ подставим $\boldsymbol{E}_0$, после чего снова получим линейные уравнения, но неоднородные. Правые части могут восприниматься как если бы каждый $dV$ переизлучал волны аки *диполь Герца* с моментом $\boldsymbol{P}_\mathrm{nl}\,dV$. Такими итерациями может найти сколь угодно приближений.

Вообще среда диспергирует. Формально всё будет работать если взять эту охапку диффуров и решать её оидельно для слагаемых с частотой $\omega$, частотой $2\omega$, и т.д., подставляя везде свои $\varepsilon$. По идее это работает.

## 4.4 Первое приближение. Генерация вторых гармоник.

В нулевом приближении можем найти нелинейную добавку

$$P_\mathrm{nl} = \alpha_2 E_0^2 = \frac{\alpha_2 A^2}{2} + \frac{\alpha_2 A^2}{2}\cos\left[2(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\right].$$

Как ни странно – это вполне адекватный результат, первое слагаемое называют *оптическим детектированием*, илиоптическим выпрямлением, – возникновением в нелинейной среде постоянной электрической поляризации при прохождении мощной световой волны.

Второе слагаемое гармонически меняется во времени. Оно вызывает *генерацию второй гармоники в нелинейной среде*, т.е. волны с частотой $\omega_2 = 2\omega$. Найдём поле этой гармоники:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\boldsymbol{H} &= \frac{\varepsilon[2\omega]}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + i\omega\frac{4\pi\alpha_2}{c}A\boldsymbol{A}e^{2(i\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}, \\ \operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{E} &= \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0, \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{E} = A_1 e^{2i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}, \qquad \boldsymbol{H} = B_1 e^{2i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})},$$

что соответсвует частному решению от вынужденных колебаний. Из второго уравнения следует, что $\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{H}$, также верно, что $(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}_1) = (\boldsymbol{k}\cdot\bar{B}_1) = 0$, т.е плоская волна поперечна относительно $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Учитывая, что $k^2c^2 = \omega^2\varepsilon[\omega]$ можем получить:

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{2\pi\alpha_2}{\varepsilon[\omega] - \varepsilon[2\omega]}A\boldsymbol{A}.$$

Если же к частном решению, добавим общее, то увидем, что можем подобрать такую его амплитуду, чтобы интенсивность второй гармоники в начале координат обращалась в нуль:

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{2\pi\alpha_2}{\varepsilon[\omega] - \varepsilon[2\omega]}A\boldsymbol{A}\left(\cos[2(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})] - \cos[2\omega t - \boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}]\right),$$

где $k_2^2 = \omega_2^2 \varepsilon[2\omega]/c^2$. Возводя в квадрат и усредняя можем найти интенсивность

$$I_1 \sim \frac{\alpha_2^2 \omega^2 x^2 I^2}{n^2 c^2} \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2, \qquad \beta = \frac{(2\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_2)\cdot \boldsymbol{r}}{2} = \frac{(2k - k_2)x}{2},$$

где $x$ – пройденное расстояние. Тут принебрегли различием $n[\omega]$ и $n[2\omega]$.

Таким образом с возрастанием $x$ возрастает интенсивность второй гармоники, когда $\beta \in [0, \pi/2] \cup [\pi, 3\pi/2]$, и т.д. В этих сдучаях *энергия переходит от исходной волны ко второй гармоники.* На других интервалах энергия возвращается от второй, к первой. Условие $\beta = \pi/2$ определяет расстояние, до которого происходит перекачка энергии. Это расстояние называется *когерентной длиной*, для которого верно, что

$$L_{\text{coh}} = \frac{\lambda}{4|n[\omega] - n[2\omega]|},$$

где $\lambda$ – длина исходной волны.

Когда $n[\omega] = n[2\omega]$ верно, что $2\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_2$, тогда и $L_{\text{coh}}$ обращается в бесконечность. Это условие – *фазовый синхронизм.*

Ещё в 1962 году было эксперментально продемонстрирована возможность осуществить фазовый синхронизм на частотах $\omega$ и $2\omega$ между обыкновенной и необыкновенной волной в некоторых кристаллах.

Аналогичное явление – *генерация волн с суммарной и разностной частотами.* Если на нелинейную среду направить два можных пучка света с различными частотами $\omega_1$ и $\omega_2$, то из неё будет выходить свет с частотами $\{\omega_1, \omega_2, 2\omega_1, 2\omega_2, \omega_1{+}\omega_2, \omega_1{-}\omega_2\}$. Так можно получить излучение в инфракрасной и ультрафиолетовой области, например, $\approx 80$ нм.

## 4.5 x Второе приближение. Самофокусировка.

Для нахождения *второго приближения* воспользуемся

$$\boldsymbol{P}_{\text{нл}} = \alpha_2(E_0 + E_1)(\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_1) + \alpha_3 E_0^2 \boldsymbol{E}_0,$$

однако учитывая только изотропные среды переходим к $\alpha_2 = 0$, а тогда

$$\boldsymbol{P}_{\text{nl}} = \frac{3\alpha_3 A^2}{4} \boldsymbol{A} \cos\left[\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r}\right] + \frac{\alpha_3 A^2}{4} \boldsymbol{A} \cos[3\left(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r}\right)],$$

где второе слагаемое соответствует генерации тритьей гармоники.

Интересно взглянуть на первое слагаемое: множитель $\boldsymbol{A}\cos[\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r}]$ – исходная падающая волна $\boldsymbol{E}_0$, которую можно заменить на $\boldsymbol{E}$, тогда

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\left[\varepsilon(\omega) + 3\pi\alpha_3(\omega)A^2\right]\partial_t \boldsymbol{E} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad n = n_0 + n_2 A^2,$$

где учет рассматриваемого слагаемого эквивалентен изменению $\varepsilon(\omega)$ среды.

Вообще есть другие причины такого поведения: свет вообще давит на среду, греет среду, что приводит к изменению плотности и показателя преломления среды. В жидкостях это может быть высокочастотный эффект Керра, но во всех этих случаях $\Delta n \sim A^2$. К слову, $n_2$ бывает $> 0$ и $< 0$.

Так приходим к прохождению пучка через оптических неоднородную среду, в которой луч загибается в сторону большего показателя преломления. С этим связано явление *самофокусировки* ($n_2 > 0$) и дефокусировки ($n_2 < 0$).

Рассмотрим плоскопараллельный пучок лучей кругового сечения, диаметра $D$. Показатель преломления в пространстве с пучком $n = n_0 + n_2 A^2$, пусть $n_2 > 0$. Из-за дифракции пучок расширяется, однако все направления луче сосредоточатся в пределах конса с углом при вершине $2\vartheta_{\text{диф}}$, где $\vartheta_{\text{диф}} = 1.22\lambda/(Dn_0)$. Предельный угол скольжения $\vartheta_0$ определяется соотношением

$$\cos\vartheta_0 = \frac{n_0}{n_0 + n_2 A^2}, \qquad \Rightarrow \qquad \vartheta_0^2 \approx 2A^2 \frac{n_2}{n_0}.$$

Еслм $\vartheta_{\text{диф}} > \vartheta_0$ то пучок будет расширяться. При $\vartheta_{\text{диф}} > \vartheta_0$ пучок начнём сжиматься в тонкий шнур, – *самофокусировка.*

При $\vartheta_{\text{диф}} - \vartheta_0$ имеет место *самоканализация*, для которой можем найти необходимую мощность пучка

$$P = \frac{cn_0 A^2}{8\pi}\frac{\pi D^2}{4} = \frac{cn_0 D^2}{32} A^2, \qquad \Rightarrow \qquad P_{\text{порог}} \approx c\frac{(0.61\,\lambda)^2}{16 n_2}.$$

Расстояние от края среды, на которой фокусируются крайние лучи пучка, легко оуенить:

$$f_{\text{эф}} = \frac{D}{2\vartheta_{\text{диф}}} \approx \frac{n_0 D^2}{2.44\,\lambda},$$

что называют *эффективным фокусным расстоянием для крайних лучей пучка.*

# 5 Световоды

## 5.1 Введение

**Def 5.1.** *Оптический волновод* – диэлектрическая структура, по которой может распространяться электромагнитная энергия в видимой и инфракрасной областях спектра.

Можно выделить ступенчатый и градиентный профиль волновода (рис. 3). Обычно покрытие оказывается

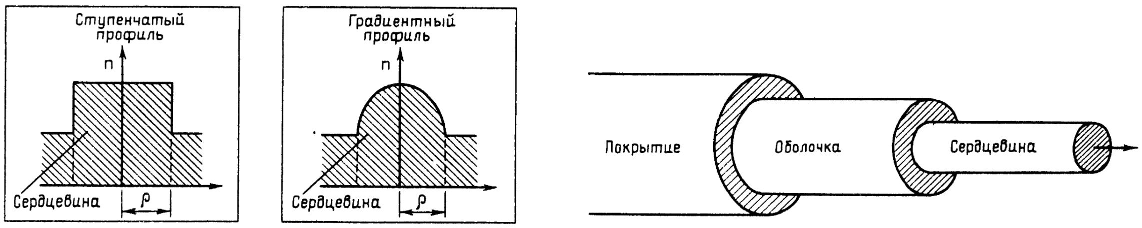


Рис. 3: Профиль показателя преломления для типичных оптических волокон.

полностью изолировано от сердцевины, так что его влиянем можно пренебречь.

**Многомодовые и одномодовые волноводы**. Оптические волноводы можно условно разделить на две группы – *многомодовые* (большая сердцевина) и *одномодовые* (маленькая сердцевина). Для многомодовых световодов справедлво условие

$$\frac{2\pi\rho}{\lambda}\sqrt{n_{\text{co}}^2 - n_{\text{cl}}^2} \gg 1,$$

где $\rho$ – характерный размер сердцевины, $\lambda$ – длина волны света в свободном пространстве, $n_{\text{co}}$ – максимальное значение показателя преломления сердцевины, а $n_{\text{cl}}$ – показатель преломления оболочки.

**Лучевой подход**. Показатель преломления обычно слабо меняется на масштабах $\lambda$ (по крайней мере для многомодовых), таким образом адекватно описывать происходящее в терминах лучей. В таком[6] случае *пренебрегается всеми волновыми эффектами.*

Важно, что в линиях связи большой протяженности случается уширение распространяющихся импульсов. В случе идеальных многомодовых волоконных световодов уширение вполне описывается геом-оптикой.

## 5.2 Направляемые лучи в планарных волноводах

Классический многомодовый волновод характеризуется значениями $n_{\text{cl}}$ и $n_{\text{co}}$, а также толщиной сердцевины $2\rho$, что вместе с длиной волны может быть собрано в один безразмерный параметр

$$V = \frac{2\pi}{\lambda}\rho\sqrt{n_{\text{co}}^2 - n_{\text{cl}}^2},$$

собственно лучевой подход применим только при $V \gg 1$.

В случае ступенчатого профиля всегда можем описать $n(x)$ как

$$n(x) = \begin{cases} n_{\text{co}}, & -\rho < x < \rho; \\ n_{\text{cl}}, & \quad |x| \geqslant \rho, \end{cases}$$

что может упроситить работу с построением лучей. Одна и наиболее важных задач – определение условий, при которых луч является *направляемым*, т.е. распространяется вдоль непоглащающего волновода без потерь мощности.

## 5.3 Типы волн

В общем случае в волоконном световоде могут существовать три типа волн: *направляемые*, *вытекающие* и *излучаемые.*

см. страницу 37.

## 5.4 Рэлеевское рассеяние

см. страницу 100-104

[6]Альтернативный подход к описанию распространения света в многомодовых волноводах – коротковолновое приближение для ЭМ волн.

## 5.5 Изгибы

см 153 - 156

## 5.6 Дисперсия

Можно посмотреть здесь.
Вообще на странице 186. Нулевая на с. 297.