Теория к курсу «Аналитическая механика II» ФОПФ

За авторством: Хоружего К.
Примака Е.

От: *10 февраля 2021 г.*

Содержание

Устойчивость движения

15.1 Основные понятия и определения

Возмущенное движение

Пусть уравнение движение представлено в виде:

$$\frac{dy_i}{dt}Y_i(y_1, y_2, \ldots, y_m, t)\ (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{15.1}$$

Рассмотрим частное движение — частное решение этой системы с начальными условиями

$$y_i^* = f_i(t)(i = 1, 2, \ldots, m), \quad y_{i0} = f_i(t_0)(i = 1, 2, \ldots, m). \tag{15.2}$$

Нас будут интересовать движения системы при отклонении от начальных условий y_{i0} от значений $f_i(t_0)$.

Def 15.1. Движение системы, описываемое (15.2) называется *невозмущенным* движением. Все другие движения механической системы при тех же силах, что и движение (15.2) — *возмущенные* движения.

Def 15.2. *Возмущениями* назовём разности вида:

$$x_i = y_i - f_i(t)\ (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{15.3}$$

Def 15.3. Теперь, произведя замену по формулам (15.3) в уравнениях (15.1) получим *дифференциальные уравнения возмущенного движения*:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)\ (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{15.4}$$

Уравнения (15.4) имеют частное решение $x_i \equiv$ отвечающее невозмущенному движению.

Def 15.4. Движение называется *установившимся*, если $X_i \neq g(t)$, в противном же случае — *неустановившимся*.

Def 15.5 (Устойчивость по Ляпунову)**.** Невозмущенное движение называется *устойчивым* по отношению к переменным y_i, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)\colon \forall$ возмущенных движений, для которых

$$|x_i(t_0)| < \delta, \ \forall t > t_0 \ \text{ выполняется } \ |x_i(t)| < \varepsilon. \tag{15.5}$$

Def 15.6 (Асимптотическая устойчивость)**.** Невозмущенное движение называется *асимптотически устойчивым* по отношению к переменным y_i, если оно устойчиво и $\exists \delta$ – маленькие такие, что для возмущенных движений удовлетворяющим условиям (15.5) верно:

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = 0\ (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{15.6}$$

Функции Ляпунова

Для простоты будем изучать толко установившиеся движения. В уравнениях возмущенного движения (15.4) функции X_i будем считать непрерывными в области

$$|x_i| < H(= \text{const})\ (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{15.7}$$

и такими, что уравнения (15.4) при начальных значениях x_{i0} из области (15.7) допускают единственное решение.

Def 15.7 (Функция Ляпунова)**.** В области $|x_i| < h$, где $h > 0$ — достаточно малое число, будем рассматривать функции *Ляпунова* $V(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, предполагая их непрерывно дифференцируемыми, однозначными и обращающимися в нуль в начале координат $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$.

Def 15.8. *Производной* dV/dt функции V в силу уравнений возмущенного движения (15.4) называется:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial x^i} X_i.$$

Таким образом производная от функции Ляпунова также $g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, будет непрерывной в той же облачи и обращаться в нуль в начале координат.

Def 15.9. $V(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ назовём *определенно-положительной* в области $|x_i| < h$, если всюду в этой облачи, кроме начал координат верно: $V > 0$. Аналогично с определенной отрицательно. В обоих случаях функция V называется *знакоопределенной.*

Def 15.10. Если в области $x_i < h$ функция V может принимать значения только одного знака, но может обращаться в нуль не толко в начале координат, то она называется *знакопостоянной.*

Def 15.11. Наконец, если функция может принимать в области как значения большие нуля, так и меньшие, она называется *знакопеременной.*

15.3 Усточивость по первому приближению

Постановка задачи

Запишем уравнения установившегося возмещенного движения в виде

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}). \tag{15.8}$$

Функции X_i будем считать аналитическими в окрестности начала координат, причем их разложения в ряды начинаются с членов не ниже второго порядка малости относительно $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Вопрос об устойчивости движения очень часто исследуется при помощи уравнений первого приближения:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}, \tag{15.9}$$

которые получаются из полных уравнений возмущенного движения (15.8) при отбрасывании в последних нелинейных относительно $x_1, x_2, \ldots, x_m$ членов.

Можно составить характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0, \tag{15.10}$$

которое в общем виде даст решение $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{m} c_j \boldsymbol{j}_j e^{\lambda_j t}$.

Однако как правило уравнения возмущенного движения нелинейны. Поэтому возникает задача об определении условий, при которых выводы об устойчивости, полученные из анализа уравнений первого приближения (15.9), справедливы и для полных уравнений возмущенного движения (15.8) при любых нелинейных членах X_i. Эта задача была полностью решена Ляпуновым.

Устойчивость по первому приближению

Thr 15.12. *Если $\forall \lambda_i$ уравнения (15.10): $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво независимо от нелинейных членов в (15.8).*

Если же $\exists \lambda_i :\ \operatorname{Re}\lambda_i > 0$, то возмущенное движение неустойчиво — тоже независимо от нелинейных членов в (15.8).

Если же $\exists \lambda_i :\ \operatorname{Re}\lambda_i = 0$, то подбирая нелинейные члены можно показать, что положение как устойчиво, так и неустойчиво.

((Когда-нибудь здесь появится доказательство))

Критерий Рауса-Гурвица

Запишем уравнение (15.10) в виде

$$a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\lambda + a_m = 0. \tag{15.11}$$

Коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_m$ этого уравнения — вещественные числа. Без ограничения общности $a_0 > 0$.

По теореме Виета имеем:

$$\begin{gathered}
\frac{a_1}{a_0} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m), \\
\frac{a_2}{a_0} = \lambda_1\lambda_2 + \ldots + \lambda_{m-1}\lambda_m, \\
\vdots \\
\frac{a_m}{a_0} = (-1)^m \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m.
\end{gathered}$$

Таким образом для отрицательности всех вещественных частей корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ необходимо чтобы все его коэффициенты были положительны.

Однако такого утверждения не достаточно. Необходимое и достаточное условие дается критерием Рауса-Гурвица.

Def 15.13. Назовем *матрицей Гурвица*:

$$\begin{pmatrix}
a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\
a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\
0 & a_1 & a_3 & \ldots & 0 \\
0 & a_0 & a_2 & \ldots & 0 \\
\vdots & & & \ddots & \\
 & & & & a_m
\end{pmatrix}$$

Рекомендуем читателям самостоятельно разобраться в правилах её построения (мнемонических и нет).

Рассмотрим главные миноры матрицы Гурвица (*определители Гурвица*):

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix},\ \ldots\ \Delta_m = a_m \Delta_{m-1}.$$

Thr 15.14 (Критерий Рауса-Гурвица)**.** *Для того, чтобы все корни уравнения* (15.11) *с вещественными коэффициентами и положительным старшим* a_0 *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:*

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots\ \Delta_m > 0. \tag{15.12}$$

Если же хотя бы одно из неравенств имеет противоположный смысл, то уравнение (15.11) *имеет корни, вещественные части которых положительны.*