Домашнее задание I курса «Теория поля»

Авторы: $\text{Ж}_\text{И}\text{К}$

От: *23 марта 2021 г.*

Содержание

1 Упражнения

У1

Строчка с символами Кронекера:

$$\delta^{\alpha}_{\alpha} = 3, \qquad \delta^{\beta}_{\alpha}\delta^{\gamma}_{\beta} = \delta^{\gamma}_{\alpha}, \qquad \delta^{\beta}_{\alpha}\delta^{\gamma}_{\beta}\delta^{\alpha}_{\gamma} = \delta^{\alpha}_{\alpha} = 3.$$

По определению символа Леви-Чивиты, раскроем определитель:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma} = \begin{vmatrix} \delta^{\alpha'}_{\alpha} & \delta^{\beta'}_{\alpha} & \delta^{\gamma}_{\alpha} \\ \delta^{\alpha'}_{\beta} & \delta^{\beta'}_{\beta} & \delta^{\gamma}_{\beta} \\ \delta^{\alpha'}_{\gamma} & \delta^{\beta'}_{\gamma} & \delta^{\gamma`}_{\gamma} \end{vmatrix} = \delta^{\alpha'}_{\alpha}\left(\delta^{\beta'}_{\beta}\delta^{\gamma}_{\gamma} - \delta^{\gamma}_{\beta}\delta^{\beta'}_{\gamma}\right) - \delta^{\beta'}_{\alpha}\left(\delta^{\alpha'}_{\beta}\delta^{\gamma}_{\gamma} - \delta^{\gamma}_{\beta}\delta^{\alpha'}_{\gamma}\right) + \delta^{\gamma}_{\alpha}\left(\delta^{\alpha'}_{\beta}\delta^{\beta'}_{\gamma} - \delta^{\beta'}_{\beta}\delta^{\alpha'}_{\gamma}\right) =$$

$$= \delta^{\alpha'}_{\alpha}\left(3\delta^{\beta'}_{\beta} - \delta^{\beta'}_{\beta}\right) - \delta^{\beta'}_{\alpha}\left(2\delta^{\alpha'}_{\beta}\right) + \delta^{\beta'}_{\alpha}\delta^{\alpha'}_{\beta} - \delta^{\gamma}_{\alpha}\delta^{\beta'}_{\beta}\delta^{\alpha'}_{\gamma} = \boxed{\delta^{\alpha'}_{\alpha}\delta^{\beta'}_{\beta} - \delta^{\beta'}_{\alpha}\delta^{\alpha'}_{\beta}.}$$

Далее просто в последнем равенстве приравниваем в первом случае $\beta' = \beta$, а во втором ещё и $\alpha = \alpha'$, получая:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\alpha'\beta\gamma} = 3\delta^{\alpha'}_{\alpha} - \delta^{\alpha'}_{\alpha} = 2\delta^{\alpha'}_{\alpha}, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = 2\delta^{\alpha}_{\alpha} = 6.$$

У2

- $[\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]]^i = \varepsilon^i{}_{jk}a^j[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]^k = \varepsilon^i{}_{jk}a^j\varepsilon^k{}_{mn}b^m c^n = \left(\delta^i_m\delta_{jn} - \delta^i_n\delta_{jm}\right)a^j b^m c^n = a^j b^i c_j - c^i a^j b_j = b^i(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - c^i(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$

- $([\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\cdot[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}]) = \varepsilon_{ijk}a^j b^k\varepsilon^i{}_{mn}c^m d^n = (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})\,a^j b^k c^m d^n = a^j b^k c_j d_k - a^j b^k c_k d_j =$
  $= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}).$

- Тут придется применить результаты первого примера этого урпажения:

$$([\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\cdot[[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]\times[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}]]) = (\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}])\,(\boldsymbol{b}\cdot[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}]) - (\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}])\,(\boldsymbol{b}\cdot[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]) =$$
$$= a^i\varepsilon_{ijk}b^j c^k\cdot b^\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}c^\beta a^\gamma - a^i\varepsilon_{ijk}c^j a^k\cdot b^\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}b^\beta c^\gamma = (a^i\varepsilon_{ijk}b^j c^k)^2 = (\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}])^2$$

У3

Сразу оговорим, что все нечетные степени, ввиду инвариантности по перестановкам при усреднении дадут нуль.

Для четных же будем получать какие-то симметричные тензоры, которые могут быть выражены через всевозможные комбинации символов Кронекера. Так для два-тензора:

$$< n_\alpha n_\beta >= z_{ab} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}.$$

В силу единичности n при свертке два-тензора из них должна получиться единица. Симметричный единичный два-тензор, инвариантный к поворотам это и есть Кроннекер на троих.

Для четырех же возьмём все возможные комбинации символов Кроннекера:

$$< n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu >= \frac{1}{c}\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\mu} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\gamma}\right).$$

Опять же нужно найти константу c, чтобы свертка четыре-тензора была единичной:

$$\delta^{\alpha\beta}\delta^{\gamma\mu}\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\mu} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\gamma}\right) = 9 + \delta^{\beta}_{\gamma}\delta^{\gamma}_{\beta} + \delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\mu}_{\beta} = 15. \quad \Rightarrow \quad < n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu >= \frac{1}{15}\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\mu} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\gamma}\right).$$

У4

а)

- $(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A})^i = \varepsilon^i{}_{jk}\nabla^j(\varepsilon^k{}_{\alpha\beta}\nabla^\alpha A^\beta) = (\delta^i_\alpha\delta_{j\beta} - \delta^i_\beta\delta_{j\alpha})\nabla^j\nabla^\alpha A^\beta = \nabla^i(\nabla_j A^j) - \nabla_j\nabla^j A^i = \left(\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \nabla^2\boldsymbol{A}\right)^i.$

- $(\operatorname{rot}[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}])^i = \varepsilon^i{}_{jk}\nabla^j\varepsilon^k{}_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta = (\delta^i_\alpha\delta_{j\beta} - \delta^i_\beta\delta_{j\alpha})(a^\alpha\nabla^j b^\beta + b^\beta\nabla^j a^\alpha) = a^i\nabla^j b_j - b^i\nabla^j a_j + b_j\nabla^j a^i - a^j\nabla^j b^i =$
  $= (\boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a})^i + ((\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b})^i..$

- $(\operatorname{rot}f\boldsymbol{A})^i = \varepsilon^i{}_{jk}\nabla^j fA^k = \varepsilon^i{}_{jk}(f\nabla^j A^k + A^k\nabla^j f) = f\varepsilon^i{}_{jk}\nabla^j A^k + \varepsilon^i{}_{jk}\nabla^j f = (f\operatorname{rot}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times\operatorname{grad}f)^i.$

- $\operatorname{div} f\boldsymbol{A} = \nabla_i f A^i = A^i \nabla_i f + f \nabla_i A^i = (\boldsymbol{A}\cdot \operatorname{grad} f) + f \operatorname{div} \boldsymbol{A}$.
- $\operatorname{div}[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}] = \nabla_i \varepsilon^i{}_{jk} a^j b^k = \varepsilon^i{}_{jk}(b^k\nabla_i a^j + a^j \nabla_i b^k) = \varepsilon^i{}_{jk} b^k \nabla_i a^j + \varepsilon^i{}_{jk} a^j \nabla_i b^k = b^k \varepsilon_k{}^i{}_j \nabla_i a^j - a^j \varepsilon_j{}^i{}_k \nabla_i b^k =$
$= (\boldsymbol{b}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{b})$.
- $[\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})]^i = \nabla^i a^j b_j = a^j \nabla^i b_j + b_j \nabla^i a^j$
Рассмотрим такую штуку: $((\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b})^j = a_i \nabla^i b^j$
И такую: $(\boldsymbol{a}\times[\nabla\times\boldsymbol{b}])^i = \varepsilon^i{}_{jk} a^j \varepsilon^k{}_{\alpha\beta}\nabla^\alpha b^\beta = (\delta^i_a \delta_{j\beta} - \delta^i_\beta \delta_{j\alpha}) a^j \nabla^\alpha b^\beta = a^j \nabla^i b_j - a_j \nabla^j b^i$
Из этих штук и можем составить начальную:
$$[\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})]^i = \nabla^i a^j b_j = a^j \nabla^i b_j + b_j \nabla^i a^j = [\boldsymbol{a}\times[\nabla\times\boldsymbol{b}]]^i + [\boldsymbol{b}\times[\nabla\times\boldsymbol{a}]] + (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}.$$

б)

- $\operatorname{rot}[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}] = 2\boldsymbol{\omega}$.
- $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r} = /a^i \nabla_i r^j = \quad a^i \delta^j_i / = \boldsymbol{a}$

в)

- $\operatorname{grad} r = /\nabla^i \sqrt{r^j r_j} = \frac{1}{2}\frac{\nabla^i r^j r_j}{\sqrt{r^\gamma r_\gamma}} = \frac{r^j \delta^i_j}{r} / = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$.
- $\operatorname{div}\boldsymbol{r} = \nabla_\alpha r^\alpha = \delta^\alpha_\alpha = 3$.
- $(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r} = /a^i \nabla_i r^j / = \boldsymbol{a}$.
- $\operatorname{grad} f(r) = /\nabla^i f(r) = f'_r \nabla^i \sqrt{r^j r_j} / = f'_r \frac{\boldsymbol{r}}{r}$.
- $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(r) = /\varepsilon^i{}_{jk}\nu^j a^k(r) = \varepsilon^i{}_{jk}(a^k)'_r \frac{\nabla^j r}{r^j/r} / = \frac{1}{r}[\boldsymbol{a}'_r \times \boldsymbol{r}]$.
- $\operatorname{div}\boldsymbol{a}(r) = /\nabla^i a_i(r) = (a_i)'_r \nabla^i r / = \frac{1}{r}(\boldsymbol{a}'_r\cdot\boldsymbol{r})$.

У5

Суть в том, чтобы скалярно домножая на константу, получать интегралы от форм, которые можно позже преобразовать по формуле Стокса.

- $\boldsymbol{c}\cdot\int_V \nabla f d^3 r = \int_V \operatorname{div}(\boldsymbol{c}f) = \oint_{\partial V}\omega^2_{\boldsymbol{c}f} = \oint_{\partial V}\boldsymbol{c}f\cdot d\boldsymbol{S}$.
- $\boldsymbol{c}\cdot\int_V \operatorname{rot}\boldsymbol{A} d^3 r = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{c}]d^3 r = \int_V \operatorname{div}[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{c}]d^3 r = \oint_S [\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{c}]\cdot\boldsymbol{S} = \oint_S \boldsymbol{c}\cdot[d\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{A}] = -\oint_S \boldsymbol{c}[A\times d\boldsymbol{S}]$.
- $\boldsymbol{c}\cdot\int_S [\nabla f\times d\boldsymbol{S}] = \int_S d\boldsymbol{S}\cdot[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{\nabla} f] = -\int_S d\boldsymbol{S}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{c}f = -\oint \boldsymbol{c}f\cdot d\boldsymbol{l}$.
- $\oint_S [\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}]d\boldsymbol{S} = \int_\Gamma \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = 0$, т.к. $\Gamma = \varnothing$.

2 Первое задание

Т1

Для начала запишем преобразование Лоренца для системы K':
$$t' = \gamma_{v_x}\left(t - \beta_x \frac{x}{c}\right), \qquad x' = \gamma_{v_x}(x - v_x t), \qquad y' = y, \qquad z' = z.$$
Аналогично перейдём к системе K'', выразив компоненты через их представление в системе K'
$$t'' = \gamma_{v'_y}\left(t' - \beta_{v'_y}\frac{y'}{c}\right), \qquad x'' = x', \qquad y'' = \gamma_{v'_y}(y' - v'_y t), \qquad z'' = z'.$$
Центр системы K'' неподвижен в координатах системы K'', соответственно
$$x'' = y'' = z'' = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{K''} = v_x t \\ y_{K''} = \gamma^{-1}_{v_x} v'_y t \end{cases},$$
что соответствет $(x,y)[t]$ для координат центра системы K'' в системе K.

Теперь найдём движение центра системы K в системе K'', подставив значения $x = y = 0$,
$$x''_K = -\gamma_{v_x} v_x t, \qquad y''_K = -\gamma_{v'_y}\gamma_{v_x} v'_y t, \qquad t''_K = -\gamma_{v'_y}\gamma_{v_x} t.$$

Можно заметить, что

$$\gamma_{v'_y}\gamma_{v_x} \approx \gamma\left(\sqrt{v_x^2 + v_y'^2}\right) = \gamma_v, \qquad \beta_{v_x}, \beta_{v'_y} \ll 1.$$

Теперь нас интересует направление прямой $\parallel \boldsymbol{v}$ – движения K'' в системе K:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\dot{y}_{K''}}{\dot{x}_{K''}} = \gamma_{v_x}^{-1}\frac{v'_y}{v_x}.$$

Угол же между осью x'' и движением центра системы K может быть найден, как

$$\operatorname{tg}(\theta+\varphi) = \frac{dy''_K}{dt''}\Bigg/\frac{dx''_K}{dt''} = \gamma_{v'_y}\frac{v'_y}{v_x} = \gamma_{v_x}\gamma_{v'_y}\operatorname{tg}\varphi \approx \gamma_v\operatorname{tg}\varphi.$$

С другой стороны, раскрывая тангенс суммы, находим

$$\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\varphi = \gamma_v\operatorname{tg}\varphi(1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\theta), \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{(\gamma_v - 1)\operatorname{tg}\varphi}{1+\gamma_v\operatorname{tg}^2\varphi}.$$

T2

Аппроксимируем движение нИСО в моменты времени t и $t+dt$ сопутствующими ИСО K' и K''. Пусть K – лабороторная система отсчета, K' – сопутствующая ИСО $\boldsymbol{v} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{v}(t)$, а K'' – сопутствующая ИСО движущаяся относительно K со скоростью $\boldsymbol{v}(t+\,dt) = \boldsymbol{v} +\, d\boldsymbol{v}$. Далее для удобства будем считать, что K'' движется относительно K' со скоростью $d\boldsymbol{v}'$.

Проверим, что последовательное применеие $\Lambda(d\boldsymbol{v}')\cdot\Lambda(\boldsymbol{v})$ эквивалентно $R(\varphi)\cdot\Lambda(\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v})$, где $R(\varphi)$ – вращение в $\{xyz\}$. Для этого просто найдём

$$R(\varphi) = \Lambda(d\boldsymbol{v}')\cdot\Lambda(\boldsymbol{v})\cdot\Lambda(\boldsymbol{v}+\,d\boldsymbol{v})^{-1}.$$

Пусть ось $x \parallel \boldsymbol{v}$, ось y выберем так, чтобы $d\boldsymbol{v} \in \{Oxy\}$. Теперь, согласно (**??**), считая $|\boldsymbol{v}| = \beta_1$, $d\boldsymbol{v}' = (\beta'_x,\, \beta'_y)^{\mathrm{T}}$ можем записать (пренебрегая слагаемыми β'_x, β'_y второй и выше степени):

$$\Lambda(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 & 0 & 0 \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda(d\boldsymbol{v}') = \begin{bmatrix} 1 & -\beta'_x & -\beta'_y & 0 \\ -\beta'_x & 1 & 0 & 0 \\ -\beta'_y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь можем выразить $d\boldsymbol{v}'$ через $d\boldsymbol{v}$, считая $\boldsymbol{r}_{\mathrm{f}}$ центром системы K''

$$\boldsymbol{r}'_f = \Lambda(d\boldsymbol{v}')\cdot\Lambda(\boldsymbol{v})\boldsymbol{r}_f = (ct',\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}} \qquad \Rightarrow \qquad \beta(\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v})_x = \frac{\beta_1+\beta'_x}{1+\beta_1\beta'_x}, \qquad \beta(\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v})_y = \frac{\gamma_{\beta_1}\beta_y}{1+\beta_1\beta_x}.$$

где скорость находим аналогично первому номеру. Тут стоит заметить, что скоростью β_x можно было бы пренебречь в сравнении с β_1, так как скорее всего первый порядок малость β_x не войдёт в ответ, однако хотелось бы в этом убедиться.

Зная $d\boldsymbol{v}$ можем найти $d\boldsymbol{v}'$:

$$\beta'_x = \gamma_{\beta_1}^2\beta_x, \qquad \beta'_y = \gamma\beta_y.$$

Но это на потом.

Через $\boldsymbol{v},\ d\boldsymbol{v}'$ теперь можем найти $\Lambda(\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v})$, и посчитать обратную матрицу:

$$\Lambda^{-1}(\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} \gamma_{\beta_1}(\beta_1\beta_x+1) & \gamma_{\beta_1}(\beta_1+\beta_x) & \beta_y & 0 \\ \gamma_{\beta_1}(\beta_1+\beta_x) & \gamma_{\beta_1}(\beta_1\beta_x+1) & \frac{\beta_1\beta_y}{\gamma_{\beta_1}^{-1}+1} & 0 \\ \beta_y & \frac{\beta_1\beta_y}{\gamma_{\beta_1}^{-1}+1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Наконец можем посчитать матрицу поворота, которая в первом приближении действительно не содержит β_x:

$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\beta_1\beta'_y}{\sqrt{1-\beta_1^2}+1} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1\beta'_y}{\sqrt{1-\beta_1^2}+1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

что дейстительно соответствует повороту в плоскости $\{xy\}$ вокруг оси z с углом φ равным

$$\varphi = -\frac{\beta_y\beta_1}{\gamma_{\beta_1}^{-2}+\gamma_{\beta_1}^{-1}} = -\frac{\gamma_{\beta_1}^2}{\gamma_{\beta_1}+1}\beta_1\beta_y,$$

где φ малый, в силу малости β_y. Так вот, в результате поворота координатных осей меняются и любые векторы, неподвижные в неИСО, то есть искомая угловая скорость

$$\omega_z = -\frac{\gamma_{\beta_1}^2}{\gamma_{\beta_1}+1}\beta_1(\beta_y/\Delta t), \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = -\frac{\gamma_{\beta_1}^2}{\gamma_{\beta_1}+1}\left[\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right] = \frac{\gamma_{\beta_1}^2}{\gamma_{\beta_1}+1}\left[\dot{\boldsymbol{\beta}}\times\boldsymbol{\beta}\right],$$

что и требовалось доказать.

T3

Посмотрим на сопутствующую вращающемуся интерферометру в точке рассматриваемого луча. Для луча можем записать волновой вектор, как

$$\bar{k}'_{\pm} = \left(\frac{\omega}{c},\ \pm n\frac{\omega}{c},\ 0,\ 0\right),$$

где знак выбирается в соответсвии с направлением обхода. Считая, что ось Ox направлена вдоль вращения интерферометра в рассматриваемой точке

$$ck_{\pm} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \pm n\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega\gamma(1+\pm n\beta) \\ \omega\gamma(n\pm\beta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$ck_{x,\pm} = \omega\gamma(n\pm\beta).$$

Можно заметить, что у света также зависит частота от направления двиения, судя по формуле выше, но в силу малости скорости вращения, это приведет только к оооочень медленной осцилляции в интерференции

$$I_{\text{инт}} = I_1 + I_2 + \langle(\boldsymbol{E}_{10}\cdot\boldsymbol{E}_{20})\cos\left((\omega_2-\omega_1)t+\ldots\right)\rangle,$$

так что по идее этим эффектом можно принебречь.

В силу различности k_+ и k_- можем найти разность хода

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = 2\pi R\frac{\gamma\omega\beta}{c},$$

считая данной угловую скорость вращения интерферометра Ω приходим к выражению вида

$$\Delta\varphi = \frac{2\gamma}{c^2}\omega\Omega\pi R^2 \overset{\gamma\sim 1}{\approx} \frac{2\pi}{c^2}\omega\Omega R^2,$$

где $\gamma\approx 1$ для корректности результата, так как при расчете не учитывалось изменение метрики для неИСО.

T4

Теперь рассмотрим реакцию превращения электрона и позитрона в мюон и антимюон:

$$e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-.$$

Хотелось бы зная энергию стакивающихся частиц найти эффективную массу системы ($(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2)^2$) и энергии $\mu^{\pm}$.

Для 4-импульса $p^i = (\mathscr{E}/c, \boldsymbol{p})$, для которого верно

$$c^2(2m_\mu)^2 \leqslant (p_1^i + p_2^i)^2 = \bar{p}_1^2 + \bar{p}_2^2 + 2\bar{p}_1\cdot\bar{p}_2 = c^2 2m_e^2 + 2\left(\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2/c^2 - \boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2\right).$$

что приводит нас к неравенству

$$c^2(2m_\mu^2 - m_e^2) \leqslant \frac{1}{c^2}\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 - \boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2.$$

При равных энергия $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}$ и $\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2$ верно, что

$$\boldsymbol{p}_1^2 = \frac{\mathscr{E}^2}{c^2} - m^2c^2,$$

тогда

$$c^2(2m_\mu^2 - m_e^2) \leqslant \frac{1}{c^2}\mathscr{E}^2 + \boldsymbol{p}_1^2 = \frac{2}{c^2}\mathscr{E}^2 - m_e^2c^2,$$

таким образом

$$\mathscr{E} \geqslant m_\mu c^2, \qquad T_{\text{порог}} = (m_\mu - m_e)c^2.$$

При налете на неподвижную частицу $\mathscr{E}_2 = m_e c$ и $\boldsymbol{p}_2 = 0$, тогда

$$(2m_\mu^2 - m_e^2)c^2 \leqslant \mathscr{E}_1 m_e, \quad \Rightarrow \quad \mathscr{E}_1 \geqslant \left(2\frac{m_\mu^2}{m_e} - m_e\right)c^2.$$

Соответсвенно для пороговой энергии верно

$$T_{\text{порог}} = \frac{2c^2}{m_e}\left(m_\mu^2 - m_e^2\right).$$

T5

Имеем две частицы, 4-импульсы которых в начальный момент:

$$p_\gamma^i = \begin{pmatrix}\varepsilon_\gamma \\ \boldsymbol{p}_\gamma\end{pmatrix}, \quad |p_\gamma^i| \approx \varepsilon_\gamma. \qquad p_e^i = \begin{pmatrix}\varepsilon_e \\ \boldsymbol{p}_e\end{pmatrix}, \quad |p_e^i| = \beta_e\varepsilon_e.$$

Перейдём в систему центра инерции двух частиц. Пусть пусть движется со скоростью β, тогда матрица преобразования для такой пересадки и аберация угла будут

$$\begin{pmatrix}\gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \cos\theta\beta}.$$

Запишем закон сохранения импульса до и после столкновения, штрихами пометим величины после столкновения.

$$p_\gamma^i + p_e^i = p_\gamma'^i + p_e'^i \quad \Rightarrow \quad (p_e'^i)^2 = (p_\gamma^i + p_e^i - p_\gamma'^i)^2 = p_\gamma^2 + p_e^2 + p_\gamma'^2 + 2p_ep_\gamma - 2p_ep_\gamma' - 2p_\gamma p_\gamma',$$

пренебрегая квадратом импульса фотонов получаем

$$m_e^2 = m_e^2 + 2p_ep_\gamma - 2p_ep_\gamma' - 2p_\gamma p_\gamma' \quad \Rightarrow \quad p_ep_\gamma - p_ep_\gamma' - p_\gamma p_\gamma' = 0.$$

Перемножим компоненты 4-импульсов:

$$\varepsilon_e\varepsilon_\gamma - \boldsymbol{p}_e \cdot \boldsymbol{p}_\gamma - \varepsilon_e\varepsilon_\gamma' + \boldsymbol{p}_e \cdot \boldsymbol{p}_\gamma' - \varepsilon_\gamma\varepsilon_\gamma' + \boldsymbol{p}_\gamma \cdot \boldsymbol{p}_\gamma' = 0.$$

Пусть частицы разлетелись под углом θ:

$$\varepsilon_e\varepsilon_\gamma + \varepsilon_e\varepsilon_\gamma\beta_e - \varepsilon_e\varepsilon_\gamma' + \beta_e\varepsilon_e\varepsilon_\gamma'\cos\theta - \varepsilon_\gamma\varepsilon_\gamma' + \varepsilon_\gamma\varepsilon_\gamma'\cos(\pi - \theta) = 0.$$

Откуда не сложно выразить энергию фотона после столкновения, заметим, что по условию задачи: $\varepsilon_\gamma/\varepsilon_e = 10^{-11}$, такими членами будем пренебрегать:

$$\varepsilon_\gamma' = \frac{\varepsilon_e\varepsilon_\gamma(1+\beta_e)}{\varepsilon_e(1-\beta_e\cos\theta) + \varepsilon_\gamma(1+\cos\theta)} = \frac{\varepsilon_\gamma(1+\beta_e)}{1 - \beta\cos\theta + \frac{\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_e}(1+\cos\theta)} \approx \frac{\varepsilon_\gamma(1+\beta_e)}{1-\beta_e\cos\theta}.$$

Имея формулу плюс-минус общую не сложно ответить на вопрос про рассеяние назад:

$$\varepsilon_\gamma'(\cos\theta = -1) \approx \varepsilon_\gamma = 2\ \text{эВ}.$$

в то время, как вперед пролетает:

$$\varepsilon_\gamma'(\cos\theta = 1) \approx \frac{\varepsilon_\gamma\varepsilon_e^2}{m_e^2} \approx 320\ \text{ГэВ}.$$

T6

Пион распадается на нейтрино и мюон: $\pi \to \mu + \nu$. Будем работать в система центра инерции.

$$p_{0\mu}^i = p_{0\mu}^i + p_{0\nu}^i \quad \Rightarrow \quad (p_{0\mu}^i)^2 = (p_{0\pi}^i - p_{0\nu}^i)^2 \quad \Rightarrow \quad m_\mu^2c^2 = c^2(m_\pi^2 + m_\nu^2) - 2p_{0\pi}^ip_{i0\nu} = c^2m_\pi^2 - 2m_\pi\varepsilon_{0\nu}.$$

Откуда получаем

$$\varepsilon_{o\nu} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}c^2 = \frac{140^2 - 105^2}{2 \cdot 140} \cdot 1^2 = 31\ \text{МэВ}.$$

Переходя в лабораторную систему отсчёта:

$$\varepsilon_\nu = \gamma(v)\varepsilon_{0\nu}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_0\right).$$

Подставляя углы θ_0 найдём минимальную и максимальную энергии:

$$\varepsilon_{\min}^\nu = \varepsilon_{0\nu}\gamma(v)\left(1 - \frac{v}{c}\right) \approx 0.4\ \text{МэВ}, \qquad \varepsilon_{\max}^\nu = \varepsilon_{0\nu}\gamma(v)\left(1 + \frac{v}{c}\right) \approx 2666\ \text{МэВ}.$$

Для определения среднего значения сначала нужно задаться вопросом распределения по углу отклонения, пока в системе покоя π:

$$\varepsilon_\nu = \gamma(v)\varepsilon_{0\nu}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_0\right) \quad \overset{d}{\Rightarrow} \quad d\varepsilon = \frac{v}{c}\gamma\varepsilon_0\, d\cos\theta_0.$$

Из всех частиц N_0 в телесном угле $d\Omega_0$ заключено:
$$\frac{dN}{N_0}=\frac{d\Omega_0}{4\pi}=\frac{1}{2}(d\cos\theta)\frac{d\varphi}{2\pi}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{dN}{N_0}=\frac{1}{4\pi}\frac{c\,d\varepsilon}{v\gamma\varepsilon_0}(2\pi)=\frac{d\varepsilon}{\varepsilon_{\max}-\varepsilon_{\min}}.$$

Но это всё было в системе центра инерции, нужно перейти в лабораторную, а тогда произойдёт аберрация:
$$\cos\theta=\frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta}.$$

Таким образом
$$\frac{dN}{d\cos\theta}=\left(\frac{dN}{d\cos\theta'}\right)\frac{d\cos\theta'}{d\cos\theta}=\left(\frac{dN}{d\cos\theta'}\right)\frac{1-\beta^2}{(\beta\cos\theta-1)^2},$$
где $dN/d\cos\theta'$ — распределение по углу в системе центра инерции, которое в силу изотропности пространства постоянно. Так как в правой части отсутствует энергия, то распределение энергии по углу – постоянно, тогда
$$\langle\varepsilon^\nu\rangle=1333\ \text{МэВ}.$$

T7

Начнём с небольшого вступления. Выберем оси z по $\boldsymbol{H}$, ось y так, чтобы в $\boldsymbol{E}\in$ Oyz. Тогда тензор электромагнитного поля запишется:
$$F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&0&-E\sin\theta&-E\cos\theta\\0&0&-H&0\\E\sin\theta&H&0&0\\E\cos\theta&0&0&0\end{pmatrix},$$
с учетом $\theta=\pi/2$, $E=\alpha H$, $mc^2/e=K$, запишем уравнение движения
$$\frac{mc^2}{e}\frac{du^i}{ds}=F^{ik}u_k=F^{ij}g_{jk}u^k,\qquad\Rightarrow\qquad K\frac{d\bar{u}}{ds}=\begin{pmatrix}0&0&\alpha H&0\\0&0&H&0\\\alpha H&-H&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\bar{u},$$
где $\bar{u}=(u_0,\,u_x,\,u_y,\,u_z)=\bar{p}/mc$. Линейные дифференциальные уравнения мы решать вроде умеем, так что находм собственные числа, как
$$\det(F^{ik}g_{kj}-\lambda\mathbb{E}^i_j)=\lambda^2(\lambda^2-H^2(\alpha^2-1))=0,\qquad\Rightarrow\qquad\begin{aligned}&\lambda_{1,2}=0,\\&\lambda_{3,4}=\pm H\sqrt{\alpha^2-1}.\end{aligned}$$

И, соответственно, собственные векторы ($\alpha\neq1$):
$$(\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3,\bar{v}_4)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\\frac{1}{\alpha}&1&0&0\\-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}&-\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}&1&0\\\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}&\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}&1&0\end{pmatrix}.$$

Осталось подставить начальные условия
$$\bar{u}(s=0)=(\mathscr{E}_0/c,p_{0x},p_{0y},p_{0z})^{\mathrm{T}}/mc,$$
находим уравнения относительно $\bar{u}$ для трёх случаев. При $\alpha\in(0,1)$:
$$u_x(s)=-\frac{(\alpha p_0-p_{0x})\cos\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}eHs}{c^2m}\right)}{(1-\alpha^2)\,cm}-\frac{(\alpha^2-1)\,p_{0y}\sin\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}eHs}{c^2m}\right)}{(1-\alpha^2)^{3/2}\,cm}-\frac{\alpha(\alpha p_{0x}-p_0)}{(1-\alpha^2)\,cm},$$
$$u_y(s)=\frac{(\alpha p_0-p_{0x})\sin\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}eHs}{c^2m}\right)}{\sqrt{1-\alpha^2}cm}+\frac{p_{0y}\cos\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}eHs}{c^2m}\right)}{cm}.$$

При $\alpha>1$:
$$u_x(s)=\frac{(\alpha p_0-p_{0x})\cosh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1}eHs}{c^2m}\right)}{(\alpha^2-1)\,cm}+\frac{p_{0y}\sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1}eHs}{c^2m}\right)}{\sqrt{\alpha^2-1}cm}+\frac{\alpha(\alpha p_{0x}-p_0)}{(\alpha^2-1)\,cm},$$
$$u_y(s)=\frac{(\alpha p_0-p_{0x})\sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1}eHs}{c^2m}\right)}{\sqrt{\alpha^2-1}cm}+\frac{p_{0y}\cosh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1}eHs}{c^2m}\right)}{cm}.$$

И при $\alpha = 1$:

$$u_0(s) = \frac{e^2H^2s^2(p_0 - p_{0x})}{2c^5m^3} + \frac{eHp_{0y}s}{c^3m^2} + \frac{p_0}{cm}$$
$$u_x(s) = \frac{e^2H^2s^2(p_0 - p_{0x})}{2c^5m^3} + \frac{eHp_{0y}s}{c^3m^2} + \frac{p_{0x}}{cm},$$
$$u_y(s) = \frac{eHs(p_0 - p_{0x})}{c^3m^2} + \frac{p_{0y}}{cm}.$$

и по оси z движение с $u_z = p_{0z}/mc = \text{const}$, а $s = c\tau$.

При пристальном взгляде на u_0 и u_x

$$u_0 - u_x = \frac{p_0 - p_{0x}}{cm} = \frac{\mathscr{E}_0 - cp_{0x}}{mc^2} = \text{const}.$$

Для скорости по оси x получили компоненту, независящую от времени $(E > H)$ — это скорость дрейфа:

$$v_{\text{др}} = u_x^{\neq f(s)}c = c\frac{\alpha(\alpha p_{0x} - p_0)}{(\alpha^2 - 1)\,cm} = \Big/ \begin{matrix} p_0 \approx mc \\ \alpha \ll 1. \end{matrix} \Big/ = c\alpha = c\frac{E}{H},$$

что соответствует нерелятивистскому случаю.

Для случая $H > E$:

$$v_{\text{др}} = u_x^{\neq f(s)}c = c\frac{\alpha(\alpha p_{0x} - p_0)}{(\alpha^2 - 1)\,cm} = \Big/ \begin{matrix} p_0 \approx mc \\ \alpha \gg 1. \end{matrix} \Big/ = \frac{p_0}{cm}\frac{c}{\alpha} = -\frac{c}{\alpha} = -c\frac{H}{E},$$

что уже очень похоже на правду.