1 Банаховы пространства

Def 1.1. Векторное пространство E *нормировано*, если для всякого вектора $v \in E$ имеется неотрицательное исло $\|v\|$, удовлетворяющее свойствам:

1. $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$ (однородность при умножении на константу);
2. $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$ (неравенство треугольника);
3. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (невырожденность).

Например, шаром с центром c и с радиусом r в нормированном пространстве E называется множество

$$B_c(r) = \{x \in E \mid \|x - c\| \leqslant r\}.$$

Заметим, что норма полностью определяется единичным шаром с центром в нуле $B_0(1)$, а именно

$$\|x\| = \inf\{|1/t| \mid tx \in B_0(1)\}.$$

Thr 1.2 (Теорема Бэра для открытых множеств)**.** *Счётное семейство открытых всюду плотных подмножеств банахова пространства E имеет непустое пересечение.*

Con 1.3 (Теорема Бэра для замкнутых множеств)**.** *Если банахово пространство E покрыто счётным семейством замкнутых множеств, то одно из них имеет непустую внутренность.*

Thr 1.4 (Неподвижные точки сжимающих отображений)**.** *Пусть E – банахово пространство. Пусть $X \subset E$ – замкнутое подмножество и $f\colon X \mapsto X$ является сжимающим, то есть*

$$\exists C < 1 \ : \ \forall x, y \in X \ \|f(x) - f(y)\| \leqslant C\|x - y\|.$$

Тогда f имеет неподвижную точку $x \in X$, такую что $f(x) = x$.

2 Банаховы пространства и их двойственные

Def 2.1. *Банахово пространство* – полное нормированое пространство.

T8

Здесь, и далее $p(x) = \|x\|$, $q(x) = \|x\|'$. Нормы эквивалентны, если

$$\exists m, M \ : \ mp(x) \leqslant q(x) \leqslant Mp(x) \ \ \forall x.$$

Так вот, всегда есть $\{e_k\}_{k=1}^n$ базис Гамиля, такой то $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$, где естественно ввести норму вида

$$p(x) = \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

Пусть $q(x)$ – ещё одна норма на X, в качестве мажоранты выберем $M = \max_{i=1,\ldots,n} q(e_i)$. Теперь можем оценить сумму сверху:

$$q(x) = q\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^n |x_k| q(e_k) \leqslant Mp(x).$$

И оценить снизу:

$$|q(x) - q(y)| \leqslant q(x - y) \leqslant Mp(x - y)$$

вообще q – липшецев функционал, – непрерывные функционал на X с нормой p.

Lem 2.2. *Шары в пространстве компактны тогда, и только тогда, когда* $\dim X < +\infty$.

Рассмотрим сферу $S = \{x \in X \mid p(x) = 1\}$ – компакт. Но мы знаем, что непрерывный функционал на компакте достигает своего миниимума:

$$\min_{x \in S} q(x) = m > 0.$$

На S $q(x) \geqslant m$. Тогда в X $q(x) \geqslant mp(x)$. Действительно,

$$q(tx) - |t|q(x), \quad p(tx) = |t|\, p(x), \qquad \Rightarrow \qquad q(tx) = \frac{p(tx)}{p(x)} q(x) \geqslant m\, p(tx).$$

Собственно, и $Q.E.D.$

T9. Пространство c

Есть некоторый бесконечномерный «вектор»

$$x = \big(x(1), x(2), \dots, x(k), \dots\big), \qquad \left|\lim_{k\to\infty} x(k)\right| < +\infty.$$

Норма определена, как

$$p(x) = \|x\|_c = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)| = \|x\|_\infty.$$

Рассмотрим последовательность x_n, где

$$x_n = (x_n(1), \dots, x_n(k), \dots).$$

Глобально хотим показать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant N(\varepsilon) \;\; \forall l \in \mathbb{N} \quad \|x_{n+l} - x_n\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_{n+l}(k) - x_n(k)| < \varepsilon.$$

Попробуем через это продраться:

$$\forall k \in \mathbb{N} \;\; |x_{n+l}(k) - x_n(k)| < \varepsilon.$$

Здесь можем выделить $(x_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ – числовая фундаментальноая в $\mathbb{R}$. По критерию Коши:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{n\to\infty} x_n(k) = y(k) \in \mathbb{R}.$$

Установили покомпонентую сходимость.

Теперь рассмотрим

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_n(k) - y(k)| = \|x_n - y\|_\infty < \varepsilon,$$

что автоматически означает, что $\exists y$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = y.$$

Следующий этап – показать, что

$$\exists \lim_{k\to\infty} y(k) \in \mathbb{R},$$

то есть показать полноту пространства:

$$\begin{aligned} |y(k+q) - y(k)| &= |y(k+q) - x_n(k+q) + x_n(k+q) - x_n(k) + x_n(k) - x_n(k)| \\ &\leqslant |y(k+q) - x_n(k+q)| + |y(k) - x_n(k)| + |x_n(k+q) - x_n(k)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом мы доказали полноту пространства[1] .

T10. Критерий Йордана-фон Неймана

Def 2.3. Если норма в банаховом пространстве E порождается положительно определенным скалярным произведением

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)},$$

то E называется *гильбертовым пространством.*

Thr 2.4 (критерий Йордана-фон Неймана)**.** *Норма $\|\circ\|_X$ порождается скалярным произведением тогда, и тоглько тогда, когда $\|\circ\|_X$ удовлетворяет правилу параллелограмма:*

$$\forall x, y \in X \quad \|x+y\|_X^2 + \|x-y\|_X^2 = 2\|x\|_X^2 + 2\|y\|_X^2.$$

Выберем $C[0,\pi/2]$, и $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$. Заметим, что

$$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1, \qquad \|x+y\|_\infty = \sqrt{2}, \qquad \|x-y\|_\infty = 1.$$

Таким образом пространство не гильбертово.

T11. Поиск функционала

Найдём норму функционала

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k f\left(\frac{k}{N}\right).$$

[1] c_0, c_{00}, l_∞ – банаховы ли?

Вообще нормированным пространством мы называем пару вида $(X, \|\circ\|_X)$. И пусть есть некоторый непрерывный ограниченный оператор из X в Y. Если $Y = \mathbb{C}(\mathbb{R})$,

$$A = F\colon X \to \mathbb{C}(\mathbb{R}).$$

Выберем в качетсве $X = C[0,1]$, а в качетсве $F\colon C[0,1] \mapsto \mathbb{C}(\mathbb{R})$. Функционал вида

$$F[f] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Что есть норма функционала? Норма функционала есть

$$\begin{aligned} \|F\| &= \sup_{\|f\|_\infty \leqslant 1} |F[f]| \\ &= \sup_{\|f\|_\infty = 1} |F[f]| \\ &= \inf\{L > 0 \mid |F[f]| \leqslant L\|f\|_\infty\}, \quad \forall f \in C[0,1]. \end{aligned}$$

`Глобально, это доказывается, например, в Константинове очень подробно.`

`Всегда легко сверху ограничить.` Тривиальный шаг:

$$|F[f]| = \left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \sup_{x \quad in[0,1]} |f(x)| = (n+1)\cdot\|f\|_\infty.$$

Продолжаем,

$$\frac{|F[f]|}{\|f\|_\infty} \leqslant n+1, \quad \Rightarrow \quad \|F\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |F[f]| \leqslant n+1.$$

Теперь выберем функцию $f_s(x) = f(k/n) = (-1)^k$. На ней мы действительно достигаем супремум, тогда

$$\|F\| = |F[f_s]| = n+1.$$

T17

Для последовательностей

$$x = (x(1), \ldots, x(k), \ldots),$$

рассмотрим пространство вида

$$l_p = \{x \mid \|x\|_p \in \mathbb{R}\},$$

где

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p\right)^{1/p}.$$

Возьмём пространство l_p как множество, но добавим норму из пространства l_q, где $\infty > q > p$.

Рассмотрим шар A_n вида

$$A_n = \{x \in l_p \mid \|x\|_p \leqslant n\}, \quad l_p = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Докажем от противного, что A_n нигде не плотно.

Пусть существует такой $R > 0$ и $x_0 \in A_n\colon B_R(x_0) \subset \operatorname{cl} A_n = A_n$.

$$\forall x \in l_p\colon \quad \rho_q(x, x_0) < R, \quad \Rightarrow \quad x \in A_n \quad \Rightarrow \quad \|x\|_p \leqslant n.$$

Рассмотрим некоторую последовательность

$$z(k) = \frac{R}{2} \frac{1}{\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^{q/p}}} \frac{1}{k^{1/p}}.$$

Для начала,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (z(k))^q\right)^{1/q} = \|z\|_q = \frac{R}{2} < +\infty.$$

Далее, видим гармонический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z(k))^p = +\infty, \quad \Rightarrow \quad \exists N\colon \sum_{k=1}^{N} (z(k))^p > (2n)^p.$$

Теперь рассмотрим набор «частниных последовательностей»

$$y(k) = \{z(k), \quad k \leqslant N, 0, \quad k > N.$$

Теперь рассмотрим последовательность $h(k) = (x_0 + y)(k)$, для которой верно, что

1. $\rho_q(h, x_0) = \|y\|_q \leqslant R/2$, откуда следует $\|h\|_p \leqslant n$.
2. $\|h\|_p \geqslant \|y\|_p - \|x_0\|_p > 2n - n = n$, а тогда $\|h\|_p > n$, таким образом пришли к противоречию.

Полное пространство нельзя представить, как объединение нигде не плотных множеств, получается l_p не полно. Осталось доказать, что A_n замкнуто.

Пусть t – точка прикосновения. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ найдётся

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in A_n \colon \rho_q(t, x_\varepsilon) < \varepsilon, \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{N} |t(k) - x_\varepsilon(k)|^q < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |t(k) - x_\varepsilon(k)| < \varepsilon^{1/q},$$

получается это правда и для

$$\Rightarrow \quad \forall N \in \mathbb{N} \left(\sum_{k=1}^{N} |t(k)|^p \right)^{1/p} \leqslant t(k) - x_\varepsilon(k) + x_\varepsilon(k) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} |t(k) - x_\varepsilon(k)|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{N} |x_\varepsilon(k)|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(N\varepsilon^{p/q} \right)^{1/p} + n,$$

что стремится к n при $\varepsilon \to 0$. Таким образом $\|t\|_p \leqslant n$.

И, наконец, докажем, что не выполняеся принцип равномерной ограниченности. Рассмотрим функционалы

$$F_n[x] = \sum_{k=1}^{n} x(k).$$

Верно, что

$$\forall x \in l_1 \quad |F_n[x]| \leqslant \|x\|_1.$$

По норме $\|\circ\|_2$ верно, что (x, e_n), где $e_n = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

T18

Lem 2.5 (Лемма Рисса или лемма о перпендикуляре)**.** *Если X_0 – замкнутое линейное подпространство в нормированом пространстве X, $X_0 \neq X$, тогда*

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists x_\varepsilon \in X \colon \|x_\varepsilon\| = 1, \quad \|x_\varepsilon - y\| \geqslant 1 - \varepsilon \quad \forall y \in X_0.$$

$\triangle$. Найдётся $z \in X \backslash X_0$, положим $\delta = \inf\{\|z - u\| \mid y \in X_0\} > 0$. Тогда выберем

$$\varepsilon_0 > 0 \colon \frac{\delta}{\delta + \varepsilon_0} > 1 - \varepsilon,$$

выберем $y_0 \in X_0$ такой, что $\|z - y_0\| < \delta + \varepsilon_0$.

Далее, считая

$$x_\varepsilon = \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|}, \quad \forall y \in X_0.$$

Теперь оценим

$$\|x_\varepsilon - y\| = \frac{1}{\|z - y_0\|} \|z - y_0 - \|z - y_0\| y\| \geqslant \frac{\delta}{\delta + \varepsilon_0} > 1 - \varepsilon.$$

Заметим, что

$$v = y_0 + \|z - y_0\| y \in X_0, \quad \Rightarrow \quad \|z - v\| \geqslant \delta.$$

$\square$

Con 2.6. *В $\forall X$ (бесконеномерном, нормированном пространстве) $\exists (x_n) \colon \|x_n\| = 1$ и $\|x_n - x_k\| \geqslant 1$, $n \neq k$.*

Как следставие все шары $R > 0$ в X некомпактны.

Всякое бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку.

T19

Thr 2.7. *Пусть E – банахово пространство, $F \subset E$ – его линейное подпространство. Тогда всякий ограниченный линейный функционал $\lambda \in F'$ продолжается до линейного функционала на всём E без увеличения его нормы.*