Задание по курсу «Дифференциальные уравнения II»

Автор: Шишкин П.Е.

От: *28 апреля 2021 г.*

Содержание

1 От авторов **2**
1.1 Шрифт для личных сообщений . . . 2
1.2 Благодарности . . . 2
1.3 Заходите в гости . . . 2

2 I. Первые интегралы и их использование для решений автономных систем **2**
2.1 С. §14: 12 . . . 2
2.2 Ф.: 1149 . . . 3
2.3 Т1 . . . 4
2.4 С. §16: 5 . . . 5
2.5 С. §16: 26 . . . 6

3 II. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка **6**
3.1 С. §17: 5 . . . 6
3.2 С. §17: 16 . . . 7
3.3 С. §17: 22 . . . 8
3.4 С. §17: 79 . . . 9
3.5 С. §17: 83 . . . 11
3.6 Т2 . . . 12

4 III. Вариационное исчисление **13**
4.1 С. §19: 21 . . . 13
4.2 С. §19: 45 . . . 13
4.3 С. §19: 72 . . . 14
4.4 С. §19: 105 . . . 15
4.5 Т3 . . . 15
4.6 С. §20.1: 9 . . . 16
4.7 С. §20.1: 12 . . . 17
4.8 Т4 . . . 18
4.9 С. §20.2: 5 . . . 19
4.10 С. §20.3: 2 . . . 20
4.11 С. §21: 1 . . . 20
4.12 Т5* . . . 21

1 От авторов

1.1 Шрифт для личных сообщений

Меня попросили писать текст не имеющий отношения к решению как-то выделенно, поэтому отныне текст, который я пишу просто от души и сердца, будет написан курсивным шрифтом цвета лягушки в обмороке (я серьёзно, такой цвет есть)

1.2 Благодарности

Я благодарен Илье Викторовичу, Биглову Камилю, Хоружему Кириллу, Примаку Евгению, Анастасии Громовой, Александру Двуреченскому, Мише Зотову, Андрею Привалову, Корогоду Дмитрию, Гаврилову Дмитрию и всей 926 группе за прямую или косвенную помощь в создании этого теханного решения (исправление опечаток, помощь в работе с техом и помощь в сохранении рассудка тоже за помощь считается). Было бы грубо не упомянуть тех кто постоянно говорил мне об опечатках и откровенных ошибках, тех с кем я сверял ответы, если видел полную жесть, тех кто помогал научиться техать быстро и не совсем уж плохо, тех кто помогал мне не бросить это дело, и естественно, моего любимого семинариста Илью Викторовича тоже надо упомянуть. Если я кого забыл, пишите, добавим :)

1.3 Заходите в гости

Заходите в гости, всегда всем рад :)

2 I. Первые интегралы и их использование для решений автономных систем

2.1 С. §14: 12

Исследовать при всех значениях вещественного параметра a поведение фазовых траекторий на всей фазовой плоскости для системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax(x^2 + y^2 - 2) \\ \dot{y} = -x + ay(x^2 + y^2 - 2) \end{cases} \tag{1}$$

Уравнение выглядит, как что-то в полярных координатам. Чтож, перейдём к ним

$$x = r\sin(\varphi) \qquad \dot{x} = r\cos(\varphi)\dot{\varphi} + \dot{r}\sin(\varphi)$$
$$y = r\cos(\varphi) \qquad \dot{y} = -r\sin(\varphi)\dot{\varphi} + \dot{r}\cos(\varphi)$$

Откуда:

$$\begin{cases} r\cos(\varphi)\dot{\varphi} + \dot{r}\sin(\varphi) = r\cos(\varphi) + ar\sin(\varphi)(r^2 - 2) \\ -r\sin(\varphi)\dot{\varphi} + \dot{r}\cos(\varphi) = -r\sin(\varphi) + ar\cos(\varphi)(r^2 - 2) \end{cases}$$

Откуда можно получить

$$\begin{cases} \dot{r} = ra(r^2 - 2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$$

Здесь уже очевидны 3 случая: 1)$a > 0$, 2)$a < 0$ 3) $a = 0$. 1) неустойчивый предельный цикл радиуса $\sqrt{2}$ 2) устойчивый предельный цикл радиуса $\sqrt{2}$ 3) центр. Разница при различных знакоопределённых параметрах будет в скорости "навивания"на предельный цикл, но характер движения будет схожий.
Кстати, $\dot{\varphi} = 1$ - это первый интеграл. В целом мы сказали при каких параметрах, что но можно это всё безобразие построить 1. *Чтобы было максимально красиво, построим фазовую диаграмму для r график в декартовых координатах и зависимость угла от радиуса. Кстати такая фигня с производной фи получилась из-за неклассической замены икса с синусом. Т.е. немного контринтуитивно что $\varphi = 1$ это цикл по часовой стрелке, но и замена $x = \sin(\varphi)$ это что-то безумное (я просто хотел кушать а не думать)*

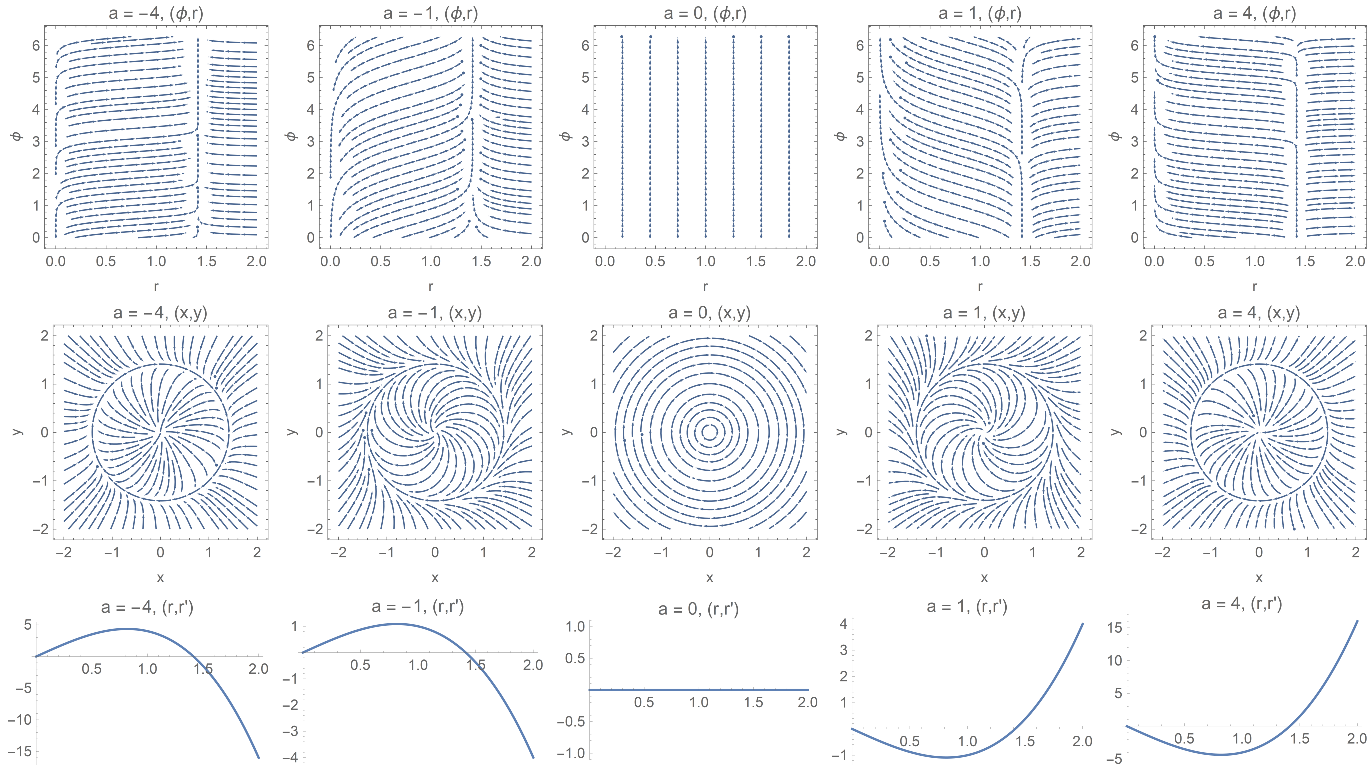

Рис. 1: Фазовые диаграммы 14.12 в различных координатах для различных параметров

2.2 Ф.: 1149

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = x + y + z \\ \dot{z} = x - y \end{cases} \tag{2}$$

Довольно очевидно, что выделить 2 каких-то уравнения без третьей переменной тут не выйдет *(ну или я слишком слаб и не могу этого сделать)* поэтому воспользуемся правилом пропорции (чёрной магией):

$$A/B = C/D = E/F = k; \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0 \rightarrow \frac{\alpha A + \beta C + \gamma E}{\alpha B + \beta D + \gamma F} = k$$

Тогда можно записать учитывая $k = dt$:

$$\frac{\alpha dx + \beta dy + \gamma dz}{\alpha(y-x) + \beta(x+y+z) + \gamma(x-y)} = dt$$

Возьмём $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1$ тогда знаменатель обнулится, а значит и числитель должен быть ноль *(на самом деле можно было бы сформулировать этот шаг гораздо проще, просто вычитая первое и третье уравнения друг из друга, но 1) правило пропорции весьма полезная штуковина в этих задачах, так что чего бы не сформулировать его, 2) обожаю делить на 0 эхэхэхэхэ*

Итак, мы получаем что: $dx + dz = 0$ а значит мы нашли первый интеграл системы 2: $C_1 = x + z$. Подставим его во второе и первое уравнения 2 и получим

$$\frac{dy}{y+C_1} = \frac{dx}{y-x}$$
$$y'(y-x) = (y+C_1)$$
$$//y = x+t//$$

нормальная замена, не обижайте её, не будьте как Дима(

$$tt' = x + C_1$$
$$t^2 = x^2 + 2C_1x + C_2$$
$$C_2 = y^2 - 2xy + 2(x+z)x$$

Найдены 2 ПИ. Осталось проверить их на независимость.

$$\text{rg}\begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x} & \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_1}{\partial z} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x} & \frac{\partial C_2}{\partial y} & \frac{\partial C_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \text{rg}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2y+4x+2z & 2y-2x & 2x \end{vmatrix} = 2$$

тут хочется сказать 2 вещи: 1) интегралов целая куча зависимых, и то что мой C_2 не совпадает с ответом в задачнике, это ок, потому что они друг через друга выражаются 2) так-то очевидно что они независимы, всё-таки второй зависит от y а перавый - нет; но на письмаках требуют считать ранг, потому проверяю так

Ответ: $C_2 = y^2 - 2xy + 2(x+z)x$, $C_1 = \frac{11(x+y)}{09.2002}$

2.3 T1

Найти первые интегралы уравнений. Используя их, исследовать поведение траекторий на фазовой плоскости.
а) $\ddot{x} + \sin(x) = 0$
Сделаем замену $\dot{x} = y$ тогда:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin(x) \end{cases}$$

по правилу пропорции и обнуляя знаменатель:

$$\frac{\alpha dx + \beta dy}{\alpha y - \beta \sin(x)} = dt$$
$$//\beta = y, \alpha = \sin(x)//$$
$$-\cos(x) + \frac{y^2}{2} = C_1$$

Вторго первого интеграла тут не будет, иначе бы задача математического маятника решалась слишком легко. Зато у нас есть интеграл энергии. Из него можно немного подумать и получить различные ситуации: $C_1 = 0$, $C_1 > 0$, $C_1 < 0$.Подставив этот первый интеграл, можно сделать линеаризацию системы, получить что $(2\pi n, 0)$ - центры, $(\pi(2k-1), 0)$ - сёдла, и получить такое поведение: 2

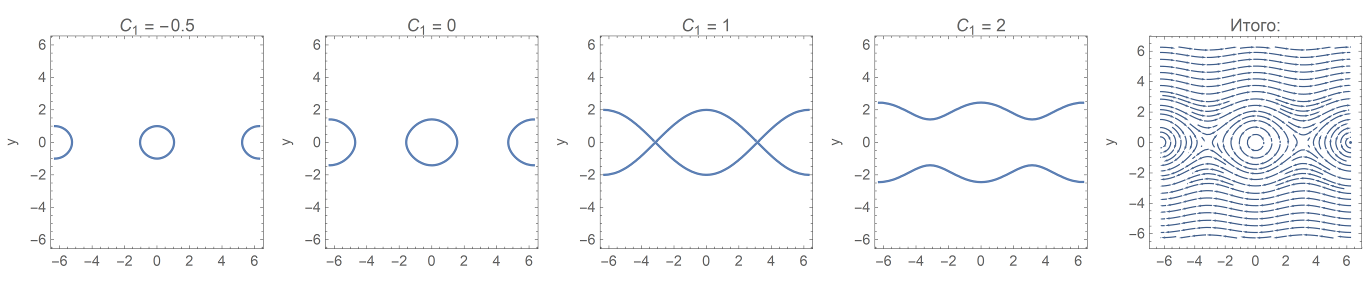

Рис. 2: T1(a)

б) $\ddot{x} - x + x^2 = 0$

Сделаем замену $\dot{x} = y$ тогда:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^2 \end{cases}$$

по правилу пропорции и обнуляя знаменатель:

$$\frac{\alpha dx + \beta dy}{\alpha y + \beta(x - x^2)} = dt$$

$$//\beta = y, \alpha = -(x - x^2)//$$

$$-3x^2 + 2x^3 + 3y^2 = C_1$$

Можно построить эту петельку: 3

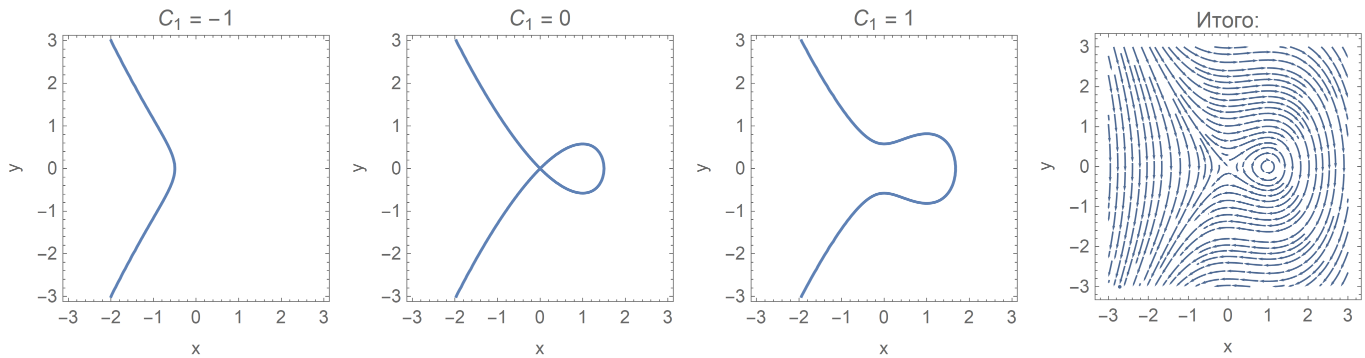

Рис. 3: Т1(б)

2.4 С. §16: 5

Найдя первый интеграл, решить систему в указанной области

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{x}{y}, \\ \dot{y} = \frac{y}{x}, (x > 0, y > 0). \end{cases} \tag{3}$$

Поскольку $dx\frac{y}{x} + dy\frac{x}{y} = 0$:

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{dx}{x^2}$$

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + C_1$$

$$y = \frac{x}{C_1 x - 1}$$

Подставим y в первое уравнение 3:

$$\dot{x} = 1 - C_1 x$$

$$\frac{dx}{1 - C_1 x} = dt$$

$$x = \frac{C_2}{C_1} e^{-C_1 t} + \frac{1}{C_1}$$

Подставим x в y и получаем ответ:

Ответ: $x = \frac{C_2}{C_1} e^{-C_1 t} + \frac{1}{C_1}$, $y = \frac{e^{C_1 t}}{C_1 C_2} + \frac{1}{C_1}$ *ответ не сходится с ответом в учебнике в силу разных обозначений C_2. Так-то ответ мой правильный (ответ учебника я в вольфраме не проверял)*

2.5 С. §16: 26

Найдя два независимых первых интеграла системы, решить систему в указанной области.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = 2x^3 - xy - z, \\ \dot{z} = xz - 2x^4, (x > 0) \end{cases} \tag{4}$$

Хмм, кажется что первое уравнение системы интегрируется. Ну раз так, проинтегрируем: $x = \frac{1}{C_1 - t}$. Далее смотрим на оставшиеся 2 уравнения. Возьмём то в котором кроме x не более 1 другой переменной. Т.е. третье. Подставив x можем получить:

$$\dot{z} = \frac{z}{C_1 - t} - 2\frac{1}{(C_1 - t)^4}$$

$$//\tau = C_1 - t, \dot{z} = -\frac{dz}{d\tau} = -z'//$$

$$z' + \frac{z}{\tau} = 2\frac{1}{\tau^4}$$

$$\text{//О, это же уравнение Эйлера, его мы умеем решать заменой } \tau = e^T, z'_\tau = z'_T e^{-T}//$$

$$z' + z = 2e^{-3T}$$

$$\text{//находит общее, угадываем частное, благо тут оно очевидное и получаем ответ//}$$

$$z(T) = C_2 e^{-T} - e^{-3T} = z(\tau) = \frac{C_2}{\tau} - \frac{1}{\tau^3} = z(t) = \frac{C_2}{C_1 - t} - \frac{1}{(C_1 - t)^3}$$

Теперь подставим $x(t)$ и $z(t)$ во второе уравнение системы 4:

$$\dot{y} = \frac{3}{(C_1 - t)^3} - \frac{C_2}{(C_1 - t)} - \frac{y}{C_1 - t}$$

$$//C_1 - t = e^T, \dot{y} = y'_T e^{-T}//$$

$$-y' e^{-T} = 3e^{-3T} - C_2 e^{-T} - y e^{-T}$$

$$y' - y = C_2 - 3e^{-2T}$$

$$y(T) = C_3 e^T - C_2 + e^{-2T} = y(t) = C_3(C_1 - t) - C_2 + \frac{1}{(C_1 - t)^3}$$

И чтобы посмотреть на этот ужас скопанованно:
Ответ: $x(t) = \frac{1}{C_1 - t}$,
$y(t) = C_3(C_1 - t) - C_2 + \frac{1}{(C_1 - t)^3}$,
$z(t) = \frac{C_2}{C_1 - t} - \frac{1}{(C_1 - t)^3}$.
На самом деле надо ещё показать что первые интегралы C_1, C_2 независимы. Ну если очень хочется можно их выразить, явно посчитать ранг и т.д. Но я воспользуюсь следующим утверждением: поскольку система разрешима (мы смогли решить 2 уравнение) с использованием этих первых 2 интегралов, то они независимы. *Пока эти первые интегралы больше используются, как окнстанты. И мало смысла смотреть на них как-то иначе. В следующей части задания это будет не совсем так.*

3 II. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

3.1 С. §17: 5

Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши с указанным начальным условием

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z^2(x - 3y)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{x^2}{y} \text{ при } 3yz = 1 \tag{5}$$

Найдём характерестическую систему уравнения 5.

$$\begin{cases} \dot{x} = x, (1) \\ \dot{y} = y, (2) \\ \dot{z} = z^2(x-3y), (3) \end{cases}$$

Для решения надо найти 2 независимых первых интеграла. В данной задаче можно просто составить 2 линейные комбинации:

$$\begin{aligned} (1)\cdot y - (2)\cdot x &= 0 \\ y\cdot dx &= x\cdot dy \\ \frac{dx}{x} &= \frac{dy}{y} \\ \ln\frac{x}{y} &= C_1(x,y,z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1)\cdot z^2 - (2)\cdot 3z^2 - (3) &= 0 \\ z^2\cdot dx - 3z^2\cdot dy - dz &= 0 \\ dx - 3dy - \frac{dz}{z^2} &= 0 \\ x - 3y + \frac{1}{z} &= C_2(x,y,z) \end{aligned}$$

Вообще должно быть очевидно, что C_1 и C_2 независимы, потому что C_2 зависит от z а C_1 - нет. Но давайте проверим ранг. *просто это-то тут очевидно, а если наткнуться на задачу где не очевидно, а матаппарат не будет отработан будет печально*

$$\operatorname{rg}\begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x} & \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_1}{\partial z} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x} & \frac{\partial C_2}{\partial y} & \frac{\partial C_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \operatorname{rg}\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{1}{x} & 0 \\ 1 & -3 & -\frac{1}{z^2} \end{vmatrix} = 2$$

Значит решением 5 будет $F[U_1(x,y,z), U_2(x,y,z)]$ где F - любая непрерывно дифференцируемая функция, $U_1(x,y,z) = \frac{x}{y}, U_2(x,y,z) = x - 3y + \frac{1}{z}$. Здесь я выкинул логарифм, потому что если логарифм отношения первый интеграл, то и без логарифма первый интеграл. Вообще это надо было сделать раньше, но я сделал тут :)

Решим ЗК.

$$\begin{cases} u = \frac{x^2}{y} \\ 3yz = 1 \\ \frac{x}{y} = U_1 \\ x - 3y + \frac{1}{z} = U_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{x^2}{y} \\ 3yz = 1 \\ \frac{x}{y} = U_1 \\ x = U_2 \end{cases}$$

$$u = U_1U_2 = \frac{x}{y}(x - 3y + \frac{1}{z})$$

Ответ:

Общее решение 5: $F[U_1(x,y,z), U_2(x,y,z)]$ где F - любая непрерывно дифференцируемая функция, $U_1(x,y,z) = \frac{x}{y}, U_2(x,y,z) = x - 3y + \frac{1}{z}$.

Решение ЗК 5: $u = U_1U_2 = \frac{x}{y}(x - 3y + \frac{1}{z})$

3.2 С. §17: 16

Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши с указанным начальным условием

$$(z - x + 3y)\frac{\partial u}{\partial x} + (z + x - 3y)\frac{\partial u}{\partial y} - 2z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{4y}{z} \text{ при } x = 3y\ . \tag{6}$$

Найдём характерестическую систему уравнения 6.

$$\begin{cases} \dot{x} = z - x + 3y, (1) \\ \dot{y} = z + x - 3y, (2) \\ \dot{z} = -2z, (3) \end{cases}$$

Тут линейная комбинация только одна (ну или я слаб) $(1) + (2) + (3) = 0 \Rightarrow dx + dy + dz = 0 \Rightarrow x + y + z = C_1$.
Подставим этот первый интеграл во вторые 2 уравнения:

$$\begin{cases} \dot{y} = C_1 - 4y \\ \dot{z} = -2z \end{cases}$$

//перемножая крест накрест получим//

$$-2z\dot{y} = \dot{z}(C_1 - 4y)$$

$$\frac{dz}{2z} = \frac{-dy}{C_1 - 4y}$$

$$C_2 = \frac{z^2}{C_1 - 4y} = \frac{z^2}{x + z - 3y}$$

Проверим независимость:

$$\mathrm{rg}\begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x} & \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_1}{\partial z} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x} & \frac{\partial C_2}{\partial y} & \frac{\partial C_2}{\partial z} \end{vmatrix} = ... = 2$$

Осталось только решить ЗК.

$$\begin{cases} u = \frac{4y}{z} \\ x = 3y \\ x + y + z = U_1 \\ \frac{z^2}{x+z-3y} = U_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{4y}{z} \\ x = 3y \\ 4y + z = U_1 \\ z = U_2 \end{cases}$$

$$u = U_1/U_2 - 1 = \frac{x}{y}(x - 3y + \frac{1}{z}) = \frac{(x+y+z)(x-3y+z)}{z^2} - 1$$

Ответ:
Общее решение 6: $F[U_1(x,y,z), U_2(x,y,z)]$ где F - любая непрерывно дифференцируемая функция, $U_1(x,y,z) = x + y + z, U_2(x,y,z) = \frac{z^2}{x+z-3y}$.
Решение ЗК 6: $u = u = U_1/U_2 - 1 = \frac{x}{y}(x - 3y + \frac{1}{z}) = \frac{(x+y+z)(x-3y+z)}{z^2} - 1$

3.3 С. §17: 22

Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши с указанным начальным условием

$$\left(2x^2z^2 + x\right)\frac{\partial u}{\partial x} - \left(4xyz^2 - y\right)\frac{\partial u}{\partial y} - \left(4xz^3 - z\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = yz^2 \text{ при } x = z \quad (7)$$

найдём характерестическую систему уравнения 7.

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(2x^2z^2 + x\right) \\ \dot{y} = -\left(4xyz^2 - y\right) \\ \dot{z} = -\left(4xz^3 - z\right) \end{cases}$$

Найдём первые интегралы: $z\dot{y} - y\dot{z} = 0 \Rightarrow z/y = C_1$
Со вторым интегралом немного больнее. Придётся вспомнить уравнения в полных дифференциалах. Второе и третье уже связаны первым интегралом, так что берём первое и 3 (как раз там нет y). Перемножим их

крест-накрест.

$$dx(4xz^3-z)+dz(2x^2z^2+x)=0$$

//как мы видим, это пока ещё не полный дифференциал. Попробуем домножить на$\mu(z)$оно зависит только от z!//

$$dx\,\underbrace{\mu(4xz^3-z)}_{=R}+dz\,\underbrace{\mu(2x^2z^2+x)}_{=S}=0\overset{?}{=}d(Q)$$

//чтобы левая часть была равна дифференциалу чего-то, должно выполняться$\dfrac{\partial R}{\partial z}=\dfrac{\partial S}{\partial x}$//

$$\mu_z'(4xz^3-z)+\mu(12xz^2-1)=\mu(4xz^2+1)$$

$$\mu_z'=-\mu\frac{2}{z}$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2dz}{z}$$

$$\mu=\frac{1}{z^2},$$

//Теперь можно подставить интегрирующий множитель, найти величину, полный дифференциал который ноль//

$$dx\,\underbrace{(4xz-1/z)}_{=R}+dz\,\underbrace{(2x^2+\frac{x}{z^2})}_{=S}=d(Q)=0$$

//Тут уже тривиально угадать функцию//

$$Q=2x^2z-\frac{x}{z}=\text{const}=C_2$$

Проверим независимость (C_1 зависит от z,y, C_2 зависит от z,x. Ну очевидно они независимы):

$$\operatorname{rg}\begin{vmatrix}\frac{\partial C_1}{\partial x} & \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_1}{\partial z}\\ \frac{\partial C_2}{\partial x} & \frac{\partial C_2}{\partial y} & \frac{\partial C_2}{\partial z}\end{vmatrix}=\text{очевидно...}=2$$

Осталось только решить ЗК.

$$\begin{cases}u=yz^2\\ x=z\\ U_1=z/y\\ U_2=2x^2z-\frac{x}{z}\end{cases}$$

$$\begin{cases}u=\frac{4y}{z}\\ x=z\\ U_1=z/y\\ U_2=2z^3-1\end{cases}$$

$$u=\frac{U_2+1}{2U_1}=\frac{y\left(z-x+2x^2z^2\right)}{2z^2}$$

Ответ:
Общее решение 7: $F[U_1(x,y,z),U_2(x,y,z)]$ где F - любая непрерывно дифференцируемая функция, $U_1(x,y,z)=z/y, U_2(x,y,z)=2x^2z-\frac{x}{z}$.
Решение ЗК 7: $u=\frac{y\left(z-x+2x^2z^2\right)}{2z^2}$

3.4 С. §17: 79

Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши с указанным начальным условием

$$2xy\frac{\partial u}{\partial x}+\left(1-y^2-2xz\right)\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial z}=0, u=\frac{1}{2}-y^2 \text{ при } y^2+xz=1 \tag{8}$$

найдём характерестическую систему уравнения 8.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = 1 - y^2 - 2xz \\ \dot{z} = -\frac{y}{x} \end{cases}$$

Найдём первые интегралы: Перемножим крест накрест 1 и 3 уравнения.

$$-dx\frac{y}{x} = 2dz \cdot xy$$

$$\frac{dx}{x^2} = -2dz$$

$$\frac{1}{x} - 2z = C_1$$

Второй, как и всегда, искать менее тривиально. Возьмём 1 и 2 уравнения и перемножим крест-накрест. Получится:

$$2xy \cdot dy = (1 - y^2 - 2xz)dx$$

$$2xyy' = (C_1 x - y^2)dx$$

$$y' + y\frac{1}{2x} = \frac{C_1}{2y}$$

//О, это же уравнение Бернулли. $t = y^2, t' = 2yy'$//

$$\frac{t'}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\frac{1}{2x} = \frac{C_1}{2\sqrt{t}}$$

$$t' + t\frac{1}{x} = C_1$$

$$t'x + t \cdot x' = C_1 x$$

$$(t \cdot x)' = C_1 x$$

$$tx = \frac{C_1 x^2}{2} + C_2$$

$$C_2 = xy^2 - \frac{C_1 x^2}{2} = x(y^2 + zx) - \frac{x}{2}$$

Проверим независимость: Один ПИ зависит от x другой нет, очевидно они независимы.

$$\operatorname{rg}\begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x} & \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_1}{\partial z} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x} & \frac{\partial C_2}{\partial y} & \frac{\partial C_2}{\partial z} \end{vmatrix} = ... = 2$$

Осталось только решить ЗК.

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} - y^2 \\ y^2 + xz = 1 \\ U_1 = \frac{1}{x} - 2z \\ U_2 = x(y^2 + zx) - \frac{x}{2} \end{cases}$$

//я считаю, что это какая-то ужасная бяка, поэтому просто переберём варианты $U_1 \cdot U_2, U_1/U_2$ и т.д.//

$$u = U_1 \cdot U_2 = (2xz - 1)\left(y^2 - \frac{1}{2} + xz\right)$$

Ответ:
Общее решение 8: $F[U_1(x,y,z), U_2(x,y,z)]$ где F - любая непрерывно дифференцируемая функция, $U_1(x,y,z) = \frac{1}{x} - 2z, U_2(x,y,z) = x(y^2 + zx) - \frac{x}{2}$.
Решение ЗК 8: $u = U_1 \cdot U_2 = (2xz - 1)\left(y^2 - \frac{1}{2} + xz\right)$

3.5 С. §17: 83

Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши с указанным начальным условием

$$2xy\frac{\partial u}{\partial x} + \left(2x - y^2\right)\frac{\partial u}{\partial y} + y^3 z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = x^2z^2 \text{ при } y^2 = 2x \tag{9}$$

найдём характерестическую систему уравнения 9.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = 2x - y^2 \\ \dot{z} = y^3 z \end{cases}$$

Найдём первые интегралы: первые 2 уравнения крест-накрест

$$dx(2x - y^2) = dy(2xy)$$
$$dx(2x - y^2) + dy(-2xy) = 0$$
$$d(x^2 - xy^2) = 0$$
$$x^2 - xy^2 = C_1$$

первые интегралы всё более стрёмные. Даже самый первый становится какой-то жестью $y^2 = x - \frac{C_1}{x}$

Перемножим 1 и 3 крест-накрест:

$$dx(y^3z) = dz(2xy)$$
$$z' = \frac{y^2z}{2x}$$
$$\frac{dz}{z} = \frac{1}{2}(1 - \frac{C_1}{x^2})$$
$$\ln(z^2) = x + \frac{C_1}{x} + C_2$$
$$C_2 = \ln(z^2) - 2x + y^2.$$

Проверим независимость: как всегда очевидно независят, но проверить формально надо

$$\operatorname{rg}\begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x} & \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_1}{\partial z} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x} & \frac{\partial C_2}{\partial y} & \frac{\partial C_2}{\partial z} \end{vmatrix} = ... = 2$$

Осталось только решить ЗК.

$$\begin{cases} u = x^2z^2 \\ y^2 = 2x \\ U_1 = x^2 - xy^2 \\ U_2 = \ln(z^2) - 2x + y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = x^2z^2 \\ y^2 = 2x \\ U_1 = -x^2 \\ e^{U_2} = z^2 \end{cases}$$

$$u = -U_1e^{U_2} = (xy^2 - x^2)e^{\ln(z^2) - 2x + y^2} = z^2(xy^2 - x^2)e^{-2x+y^2}$$

Ответ:
Общее решение 9: $F[U_1(x,y,z), U_2(x,y,z)]$ где F - любая непрерывно дифференцируемая функция, $U_1(x,y,z) = x^2 - xy^2, U_2(x,y,z) = \ln(z^2) - 2x + y^2$.
Решение ЗК 9: $u = z^2(xy^2 - x^2)e^{-2x+y^2}$

3.6 Т2

В области $x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0$ найти все решения уравнения

$$\left(x^2 + y^2\right) \frac{\partial u}{\partial x} + 2xy \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{x^3 - xy^2}{z} \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{10}$$

и решить задачу Коши $u = z^2$ при $y^2 - x^2 = 1$

найдём характерестическую систему уравнения 10.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 \\ \dot{y} = 2xy \\ \dot{z} = \frac{x^3 - xy^2}{z} \end{cases}$$

Тут есть такой красивый первый интеграл! Он закомментирован но если кто хочет посмотреть на наркоманию, можно посмотреть исходный код Тут можно заметить линейную комбинацию: $xdx - ydy - zdz = 0 \Rightarrow C_1 = x^2 - y^2 - z^2$. Далее выражаем $y^2 = x^2 - z^2 - C_1$ и берём первое и третье уравнения.

$$dz(2x^2 - z^2 - C_1) - dx\left(xz + C_1 \frac{x}{z}\right) = 0$$

//Это почти уравнение в полных дифференциалах, надо всего-то домножить на $\dfrac{z}{(C_1 + z^2)^3}$//

$$dz \frac{2zx - z^3 - C_1 z}{(C_1 + z^2)^3} - dx \frac{x}{(C_1 + z^2)^2} = d(C_2) = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{2\left(C_1 + z^2\right)} - \frac{x^2}{2\left(C_1 + z^2\right)^2} = \frac{1}{2x^2 - 2y^2} - \frac{x^2}{2\left(x^2 - y^2\right)^2}$$

Проверим независимость: о чудо, снова один интеграл зависит от z, а другой нет. Так что снова всё ок, но проверить тем не менее необходимо...

$$\operatorname{rg}\begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x} & \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_1}{\partial z} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x} & \frac{\partial C_2}{\partial y} & \frac{\partial C_2}{\partial z} \end{vmatrix} = ... = 2$$

Осталось только решить ЗК.

$$\begin{cases} u = z^2 \\ y^2 - x^2 = 1 \\ U_1 = x^2 - y^2 - z^2 \\ U_2 = \frac{1}{2(C_1 + z^2)} - \frac{x^2}{2(C_1 + z^2)^2} = \frac{1}{2x^2 - 2y^2} - \frac{x^2}{2(x^2 - y^2)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = z^2 \\ y^2 - x^2 = 1 \\ U_1 = -z^2 - 1 \\ U_2 = -\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$u = -1 - U_1 = z^2 + y^2 - x^2 - 1$$

Ответ:
Общее решение 10: $F[U_1(x, y, z), U_2(x, y, z)]$ где F - любая непрерывно дифференцируемая функция, $U_1(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2, U_2(x, y, z) = \frac{1}{2x^2 - 2y^2} - \frac{x^2}{2(x^2 - y^2)^2}$.
Решение ЗК 10: $u = u = -1 - U_1 = z^2 + y^2 - x^2 - 1$ *Вот и всё с первыми интегралами. Сказал бы всё плохое что я про эти задачи думаю, но я думаю о них только положительно. Какие хорошие задачи*

4 III. Вариационное исчисление

4.1 С. §19: 21

Решить простейшую вариационную задачу:

$$J(y)=\int_1^e\left[\frac{1}{2}x\left(y'\right)^2+\frac{2yy'}{x}-\frac{y^2}{x^2}\right]dx, y(1)=1, y(e)=2 \tag{11}$$

какая простая задача, простейшая я бы сказал Найдём экстремали:

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}x\left(y'\right)^2+\frac{2yy'}{x}-\frac{y^2}{x^2}$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y'}=0$$
$$2\frac{y'}{x}-2\frac{y}{x^2}-\frac{d}{dx}\left(xy'+2\frac{y}{x}\right)$$
$$2\frac{y'}{x}-2\frac{y}{x^2}-y'-xy''-2\frac{y'}{x}+2\frac{y}{x^2}=0$$
$$y''+\frac{y'}{x}=0$$
$$y(x)=C_1\ln(x)+C_2$$
$$//y(1)=1, y(e)=2//$$
$$\begin{cases} y(1)=1=C_2+C_1\cdot 0\\ y(e)=2=C_2+C_1\cdot 1\end{cases}$$
$$\hat{y}=1+\ln(x)$$

Ура, найдена экстремаль. Надо посмотреть будет ли это экстремумом.

$$\Delta J=J(\hat{y}+h)-J(\hat{y})=\int_1^e\left(\frac{1}{2}xh'(x)^2+\frac{h'(x)(2h(x)+x+2\ln(x)+2)}{x}-\frac{h(x)(h(x)+2\ln(x))}{x^2}\right)dx$$
$$//\text{звуки испуга Паши Шишкина}//$$
$$\int_1^e\left(\frac{1}{2}xh'^2-\frac{h^2}{x^2}-h\frac{2\ln(x)}{x^2}\right)dx+\int_1^e\frac{d(h^2)}{x}+\int_1^e\left(\frac{2\ln(x)}{x}+1+\frac{2}{x}\right)d(h)$$
$$//\text{два последних интеграла по частям, с учётом граничных условий на } h(1)=h(e)=0//$$
$$\int_1^e\left(\frac{1}{2}xh'^2-\frac{h^2}{x^2}-h\frac{2\ln(x)}{x^2}\right)dx-\int_1^e\left(-\frac{h^2}{x^2}\right)dx-\int_1^e\left(-\frac{2\ln(x)}{x^2}\right)h\cdot dx$$
$$\int_1^e\frac{1}{2}xh'^2\cdot dx$$

Очевидно на $(1,e)$ данный интеграл принимает исключительно положительные значения $\Rightarrow \hat{y}-$ минимум.
Ответ:
$\hat{y}=1+\ln(x)$ - абсолютный минимум с вариацией $\Delta J=J(\hat{y}+h)-J(\hat{y})=\int_1^e\frac{1}{2}xh'^2\cdot dx$
а можно я не буду каждый раз решать это, а просто сошлюсь на файл математики, который сразу выдаёт ответ на задачу?

4.2 С. §19: 45

Решить простейшую вариационную задачу:

$$J(y)=\int_0^1\left[\left(1+x^2\right)\left(y'\right)^2-4xy'+yy'\sin^2 x+\frac{1}{2}y^2\sin 2x\right]dx, y(0)=0, y(1)=\ln 2 \tag{12}$$

Найдём экстремаль:

$$\mathcal{L} = \left(x^2+1\right) y'(x)^2 - 4xy'(x) + y(x)\sin^2(x)y'(x) + \frac{1}{2}y(x)^2\sin(2x)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y'} = 0$$

$$\left(x^2+1\right) y''(x) + 2xy'(x) = 2$$

$$y(x) = \ln\left(x^2+1\right) + c_1\operatorname{arctg}(x) + c_2]$$

//подставляя граничные условия://

$$\hat{y} = \ln\left(x^2+1\right)$$

Проверим на наличие экстремума.

$$\Delta J = J(\hat{y}+h) - J(\hat{y})$$

$$\int_0^1 \left(h\left(\sin^2(x)h' + \frac{2x\sin^2(x)}{x^2+1} + \ln\left(x^2+1\right)\sin(2x)\right) + h'\left(\left(x^2+1\right)h' + \ln\left(x^2+1\right)\sin^2(x)\right) + h^2\sin(x)\cos(x)\right)dx$$

//какая жесть...//

$$\int_0^1 \left(h^2\sin(x)\cos(x) + h'^2(x^2+1) + h\left(\frac{2x\sin^2(x)}{x^2+1} + \ln\left(x^2+1\right)\sin(2x)\right)\right)dx +$$

$$+\int_0^1 \sin^2(x)d\left(h^2/2\right) + \int_0^1 \ln\left(x^2+1\right)\sin^2(x)d(h)$$

//2 последних по частям, на краях они обнулятся, а подынтегральные выражения сократятся//

$$\int_0^1 h'^2(x^2+1)dx$$

Итого, вариация определена положительно, значит экстремаль - абсолютный минимум.
Ответ:
$\hat{y} = \ln\left(x^2+1\right)$ абсолютный минимум с вариацией $\Delta J = J(\hat{y}+h) - J(\hat{y}) = \int_0^1 h'^2(x^2+1)dx$

4.3 С. §19: 72

Решить простейшую вариационную задачу:

$$J(y) = \int_1^4 \left[15\sqrt{x}y + 3x^2yy' - x^3\left(y'\right)^2\right]dx, y(1) = 1, y(4) = -3. \tag{13}$$

Для начала найдём экстремаль

$$\mathcal{L} = x^3\left(-y'(x)^2\right) + 3x^2y(x)y'(x) + 15\sqrt{x}y(x)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y'} = 0$$

$$6x^2y'(x) + 2x^3y''(x) + 15\sqrt{x} = 6xy(x)$$

$$y(x) = \frac{C_1}{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C_2x$$

//подставляя граничные условия://

$$\hat{y} = \frac{2 - x^{3/2}}{\sqrt{x}}$$

Проверим на наличие экстремума.

$$\Delta J = J(\hat{y}+h) - J(\hat{y}) = \int_1^4 \left(3h(x)\left(x^2h'(x) - x^2 + 4\sqrt{x}\right) - x^{3/2}h'(x)\left(x^{3/2}h'(x) + x^{3/2} - 8\right)\right)\,dx$$

$$\int_1^4 \left(3h\left(x^2+4\sqrt{x}\right) - h'^2x^3\right)dx + \int_1^4 3/2x^2d(h^2) + \int_1^4 -x^3 + 8x^{3/2}d(h)$$

//2 последних по частям, на краях они обнулятся, а подынтегральные выражения сократятся//

$$\int_1^4 \left(-x^3h'^2 - 3xh^2\right)dx$$

Итого, вариация определена отрицательно, значит экстремаль - абсолютный максимум.
Ответ:
$\hat{y} = \frac{2-x^{3/2}}{\sqrt{x}}$ абсолютный максимум с вариацией $\Delta J = J(\hat{y}+h) - J(\hat{y}) = \int_1^4 \left(-x^3h'^2 - 3xh^2\right)dx$

4.4 С. §19: 105

Показать, что допустимая экстремаль не дает экс- тремум функционала:

$$J(y) = \int_0^\pi \left[(y')^2 - \frac{25}{16}y^2 + 50xy\right]dx, y(0) = 0, y(\pi) = 16\pi \tag{14}$$

Для начала найдём экстремаль

$$\mathcal{L} = y'(x)^2 - \frac{1}{16}25y(x)^2 + 50xy(x)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y'} = 0$$

$$400x = 16y''(x) + 25y(x)$$

$$y(x) = 16x + C_1\cos\left(\frac{5x}{4}\right) + C_2\sin\left(\frac{5x}{4}\right)$$

//подставляя граничные условия://

$$\hat{y} = 16x$$

Покажем теперь что экстремум отсутствует

$$\Delta J = J(\hat{y}+h) - J(\hat{y}) = \int_0^\pi \left(h'(x)\left(h'(x)+32\right) - \frac{25h(x)^2}{16}\right)dx$$

//Здесь даже упрощать не надо ничего, просто возьмём 2 функции которые разный знак дадут//

$$h_1 = \sin(x) \Rightarrow \Delta J = \int_0^\pi \cos(x)(\cos(x)+32) - \frac{25\sin^2(x)}{16}dx = -\frac{1}{32}(9\pi)$$

$$h_2 = \sin(2x) \Rightarrow \Delta J = \int_0^\pi 64\cos(2x) + \frac{1}{32}(89\cos(4x)+39)dx = \frac{39\pi}{32}$$

Таким образом знаки приращения могут принимать как положительные так и отрицательные значения, а значит экстремаль ни минимум ни максимум.

4.5 Т3

Исследовать на экстремум функционал, определив знаки приращения

$$\int_1^2 \left(\frac{2yy'}{x} - 7\frac{y^2}{x^2} - (y')^2 - 12\frac{y}{x}\right)dx, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 1 \tag{15}$$

Как и ранее для начала найдём экстремаль

$$\mathcal{L} = -\frac{7y(x)^2}{x^2} + \frac{2y(x)y'(x)}{x} - y'(x)^2 - \frac{12y(x)}{x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = 0$$

$$xy''(x) = \frac{6y(x)}{x} + 6$$

$$y(x) = C_2 x^3 + \frac{C_1}{x^2} - x$$

//подставляя граничные условия://

$$\hat{y} = \frac{8x^5 - 31x^3 + 116}{31x^2}$$

Уже экстремаль тут как-то не очень выглядит, но дальше лучше. Посчитаем вариацию

$$\Delta J = J(\hat{y}+h) - J(\hat{y}) =$$

$$\int_1^2 -\frac{31x^4 h'(x)^2 + 2x\left(-31x^2 h(x) + 16x^5 - 348\right)h'(x) + h(x)\left(217x^2 h(x) + 64x^5 + 2088\right)}{31x^4}\,dx$$

//оно кажется страшным, но это просто из-за цифорок, так-то функция вполе//

$$\int_1^2 \left(-h'^2 - \frac{7}{x^2}h^2\right)dx - \int_1^2 \left(\frac{64}{31}x + \frac{2088}{31x^4}\right)h\cdot dx + \int_1^2 \frac{1}{x}d(h^2) - \int_1^2 \left(\frac{32}{31}x^2 - \frac{696}{31x^3}\right)d(h)$$

//2 последних по частям, на краях они обнулятся, а подынтегральные выражения сократятся//

$$\int_1^2 \left(-h'^2 - \frac{6}{x^2}h^2\right)dx$$

Итого, вариация определена отрицательно, значит экстремаль - абсолютный максимум.
Ответ:
$\hat{y} = \frac{8x^5-31x^3+116}{31x^2}$ абсолютный максимум с вариацией $\Delta J = J(\hat{y}+h) - J(\hat{y}) = \int_1^2 \left(-h'^2 - \frac{6}{x^2}h^2\right)dx$ *На самом деле здесь проще и оптимальнее не подставлять сразу значение экстремали, а работать с y, в некоторый момент вылезать будет появляться уравнение Эйлера-Лагранжа, которое можно приравнять к 0. А вот так сразу подставлять $\hat{y}$ довольно неприятно. Но всё реально, просто чиселки не оч красивые*

4.6 С. §20.1: 9

Решить задачу со свободным концом

$$J(y) = \int_1^3 \left[8yy'\ln x - x\left(y'\right)^2 + 6xy'\right]dx, y(3) = 15. \tag{16}$$

Вообще всё то же самое, но теория говорит нам что $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = 0|_{x=1}$ на свободном конце. И решение Задачи Коши при подставлении гран условий чутка дольше. *Тех сошёл с ума, несите новый. Там нет белого текста*

$$\mathcal{L} = -xy'(x)^2 + 6xy'(x) + 8y(x)\ln(x)y'(x)$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = 0$$
$$2y'(x) + 2xy''(x) - \frac{8y(x)}{x} - 6 = 0$$
$$y = C_2x^2 + \frac{C_1}{x^2} - x$$
//Найдём граничные условия//
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = 0|_{x=1}$$
$$-2xy'(x) + 8y(x)\ln(x) + 6x = 0|_{x=1}$$
$$0 = (6 - 2y'(1))$$
$$y'(1) = 3$$
//Решая ЗК находим константы C_1, C_2//
$$\hat{y} = 2x^2 - x$$

Осталось проверить знак приращений.

$$\Delta J = J(\hat{y}+h) - J(\hat{y}) = \int_1^3 \left(xh'(x)\left(-h'(x) - 8x + 8(2x-1)\ln(x) + 8\right) + 8h(x)\ln(x)\left(h'(x) + 4x - 1\right)\right) dx$$
$$\int_1^3 -xh'^2 x dx + \int_1^3 8h\ln(x)\,(4x-1)\,dx + \int_1^3 x\left(8 + 8\ln(x)(2x-1) - 8x\right) d(h) + \int_1^3 4\ln(x) d(h^2)$$
//все с h под дифференциалом по частям, на краях как всегда обнуляется, а под интегралами вся жесть уходит//
$$\int_1^3 \left(-xh'^2 - \frac{4}{x}h^2\right) dx$$
Приращение строго отрицательно, значит экстремаль - абсолютный максимум.
Отвееееет:
$\hat{y} = 2x^2 - x + \frac{21890375612389670586790}{8976345801976345} \cdot 0$ абсолютный максимум с вариацией $\Delta J = J(\hat{y}+h) - J(\hat{y}) = \int_1^3 \left(-xh'^2 - \frac{4}{x}h^2\right) dx$
раз тех сошёл с ума, то и мне можно

4.7 С. §20.1: 12

Решить задачу без ограничений
$$J(y) = \int_1^e \left[x\,(y')^2 + \frac{y^2}{x} + \frac{2y\ln x}{x}\right] dx \tag{17}$$

Тут то же самое, просто производная ноль на 2 краях. *Не, а серьёзно, что происходит, что это за пустота? Я в недоумении. Неужели gather настолько слаб, что не умеет переходить на новую страницу? Или слаб я и не понимаю ничего?*

$$\mathcal{L} = xy'(x)^2 + \frac{y(x)^2}{x} + \frac{2y(x)\ln(x)}{x}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = 0$$
$$-2y'(x) - 2xy''(x) + \frac{2y(x)}{x} + \frac{2\ln(x)}{x} = 0$$
$$y = -\ln(x) + \frac{C_1}{x} + C_2 x$$
//Найдём граничные условия//
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = 0|_{x=1;e}$$
$$-2xy'(x) + 8y(x)\ln(x) + 6x = 0|_{x=1;e}$$
$$2xy'(x) = 0$$
$$y'(1) = 0$$
$$y'(e) = 0$$
//Решая ЗК находим константы C_1, C_2//
$$\hat{y} = -\frac{e - x^2}{ex + x} - \ln(x)$$

Это не самая приятная Экстремаль. Поэтому не будем её подставлять и попадать в ловушку Т3. Запишем так:

$$\Delta J = J(\hat{y} + h) - J(\hat{y}) = \int_1^e \frac{x^2 h'(x)\left(h'(x) + 2y'(x)\right) + 2h(x)(y(x) + \ln(x)) + h(x)^2}{x}\, d$$
$$\int_1^e \left(h'^2 x + 2h\frac{y + \ln(x)}{x} + \frac{h^2}{x}\right) dx + \int_1^e (2xy')\, d(h)$$
//берём по частям второй интеграл//
$$\int_1^e \left(h'^2 x + 2h\frac{y + \ln(x)}{x} + \frac{h^2}{x}\right) dx - \int_1^e (2y' + 2xy'')\, h \cdot dx$$
$$\int_1^e \left(h'^2 x + \frac{h^2}{x}\right) dx + \int_1^e \underbrace{\left(-2y'(x) - 2xy''(x) + \frac{2y(x)}{x} + \frac{2\ln(x)}{x}\right)}_{\text{=0 просто потому что мне так захотелось :)}} h \cdot dx$$
$$\Delta J = \int_1^e \left(h'^2 x + \frac{h^2}{x}\right) dx$$

Минимум, получается.
Ответ:
$\hat{y} = -\frac{e-x^2}{ex+x} - \ln(x)$ абсолютный минимум с вариацией $\Delta J = J(\hat{y} + h) - J(\hat{y}) = \int_1^e \left(h'^2 x + \frac{h^2}{x}\right) dx$ *Там кстати есть белый текст в задаче, можно найти*

4.8 Т4

Исследовать на экстремум функционал, определить знаки приращения

$$\int_1^2 \left(2y + yy' + x\left(y'\right)^2\right) dx, \quad y(1) = 1. \tag{18}$$

Я уже боюсь Т-шек, вот уверен сейчас что-то настолько же пугающее, как стол моего соседа по общаге будет Найдём экстремали:

$$\mathcal{L} = xy'(x)^2 + y(x)y'(x) + 2y(x)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = 0$$

$$-2y'(x) - 2xy''(x) + 2 = 0$$

$$x + C_1 \ln(x) + C_2$$

//Найдём граничные условия//

$$4y'(2) + y(2) = 0$$

//Решая ЗК находим константы C_1, C_2//

$$\hat{y} = x - \frac{6\ln(x)}{2 + \ln(2)}$$

Ну оно конечно не совсем пугающее, но деление на логарифм 2. Зачем? За что? Кто придумывал эти числа? И да, я скорее всего не ошибся, потому что проверяю себя в Вольфраме :) Но всё равно никто же сюда списывать не приходит, все будут проверять сами и проверят написанное Определим знаки приращений:

$$\Delta J = J(\hat{y} + h) - J(\hat{y}) = \int_1^2 \left(h(x)\left(h'(x) + y'(x) + 2\right) + h'(x)\left(x\left(h'(x) + 2y'(x)\right) + y(x)\right)\right) dx$$

$$\int_1^2 \left(h(y' + 2) + h'^2 x\right) dx + \int_1^2 1/2 d(h^2) + \int_1^2 (2xy' + xy) d(h)$$

//берём по частям всё что не радует сердце и душу//

$$\int_1^2 \left(xh'^2\right) dx + \int_1^2 \underbrace{(-2y'(x) - 2xy''(x) + 2)}_{=0} h \cdot dx + h^2(2)/2$$

$$\Delta J = \int_1^2 \left(xh'^2\right) dx + h^2(2)/2$$

Ответ:
$\hat{y} = x - \frac{6\ln(x)}{2+\ln(2)}$ абсолютный минимум с вариацией $\Delta J = J(\hat{y} + h) - J(\hat{y}) = \int_1^2 \left(xh'^2\right) dx + h^2(2)/2$

4.9 С. §20.2: 5

Найти допустимые экстремали

$$J(y_1, y_2) = \int_0^\pi \left[(y_1')^2 + (y_2')^2 - 2y_1y_2\right] dx, y_1(0) = 1, y_2(0) = -1, y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}, y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{\frac{\pi}{2}}. \quad (19)$$

Практически то же самое, только теперь у нас система 2 уравнений Лагранжа второго рода.

$$\mathcal{L} = y_1'^2 + y_2'^2 - 2y_1y_2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1'} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_2'} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1'' + y_2 = 0 \\ y_2'' + y_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(x) = \frac{1}{2}((C_1 + C_3)\cos(x) + (C_1 - C_3)\cosh(x) + (C_2 + C_4)\sin(x) + (C_2 - C_4)\sinh(x)) \\ y_2(x) = \frac{1}{2}((C_1 + C_3)\cos(x) + (C_3 - C_1)\cosh(x) + (C_2 + C_4)\sin(x) + (C_4 - C_2)\sinh(x)) \end{cases}$$

//И подставляя граничные условия получаем://

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = e^x \\ \hat{y}_2 = -e^x \end{cases}$$

Ну да, можно было бы угадать сразу. Ну экстремали мы нашли. Проверять дают они экстремум или нет нас не просили, мы и не будем.
Ответ:
Допустимые экстремали: $\hat{y}_1 = e^x, \hat{y}_2 = -e^x$

4.10 С. §20.3: 2

Исследовать функционал на экстремум, если:

$$J(y) = \int_0^1 \left[2e^x y - (y'')^2\right] dx, y(0) = y'(0) = 1, y(1) = e, y'(1) = 2e \tag{20}$$

Всё то же самое, только уравнение Лагранжа 2 рода становится уравнением Эйлера-Пуассона.

$$\mathcal{L} = 2e^x y - (y'')^2$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y''} = 0$$
$$2e^x - \frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 0$$
$$y^{(4)} = e^x$$
$$y = C_4x^3 + C_3x^2 + C_2x + C_1 + e^x$$
$$//\text{из условия} y(0) = y'(0) = 1 \text{получаем}//$$
$$C_1 = C_2 = 0$$
$$y = C_4x^3 + C_3x^2 + e^x$$
$$//\text{из условия} y(1) = e, y'(1) = 2e \text{ получаем}//$$
$$C_4 = e$$
$$C_3 = -e$$
$$\hat{y} = ex^3 - ex^2 + e^x$$

Это печально, но Экстремум просят проверить

$$\Delta J = J(\hat{y} + h) - J(\hat{y}) = \int_0^1 (2e^x h - 2\hat{y}''h'' - h''^2)dx$$
$$//\text{в задачах со второй производной не только h на концах должен обнуляться, но и } h'//$$
$$//\text{Интегрируем вторую производную h дважды по частям}//$$
$$\int_0^1 \left(-h''^2 + 2e^x h - 2hy^{(4)}\right) dx = \int_0^1 \left(-h''^2\right) dx \le 0$$

Итого - экстремаль - абсолютный максимум.
Ответ:
$\hat{y} = ex^3 - ex^2 + e^x$ абсолютный максимум с вариацией $\Delta J = J(\hat{y} + h) - J(\hat{y}) = \int_0^1 \left(-h''^2\right) dx \le 0$

4.11 С. §21: 1

Решить изопериметрическую задачу

$$J(y) = \int_0^\pi (y')^2 dx, y(0) = 0, y(\pi) = \pi, \int_0^\pi y \sin x dx = 0 \tag{21}$$

В электронной версии учебника тут опечатка и в ограничении интеграл единичка. Но там ответ с условием не сходится, так что берём нолик из конспектов Ильи Викторовича Найдём допустимые экстремали:

$$\mathcal{L} = (y')^2 + \lambda \cdot y \sin{(x)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = 0$$

$$y'' = \lambda \sin{(x)}/2$$

$$y = y(x) = C_2 x + C_1 - \frac{1}{2}\lambda \sin(x)$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ y(\pi) = \pi \Rightarrow C_2 = 1 \\ \int_0^\pi y \sin x dx = 0 \Rightarrow \lambda = 4 \end{cases}$$

$$\hat{y} = x - 2\sin{(x)}$$

Проверим знаки приращений.

$$\Delta J = J(\hat{y}+h) - J(\hat{y}) = \int_0^\pi (2\hat{y}'h' + h'^2)dx = \int_0^\pi (h'^2)dx - \lambda \int_0^\pi h \sin{(x)} dx = \int_0^\pi (h'^2)dx$$

Итого экстремаль - абсолютный минимум.
Ответ:
$\hat{y} = x - 2\sin{(x)}$ абсолютный минимум с вариацией $\Delta J = J(\hat{y}+h) - J(\hat{y}) = \int_0^\pi (h'^2)dx \geq 0$

4.12 T5*

Среди всех кривых на цилиндре $x^2 + y^2 = 1$, соединяющих точки $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 1)$ найти кривую наименьшей длины (геодезическую кривую).

Как же хочется записать метрический тензор для полярных координат, приравнять $w_\varphi = 0, w_z = 0$ и сразу получить ответ, но мы тут аналмехом не испорчены, не будем Если вы знаете, как получается метрический тензор в полярных координатах, сюда не надо смотреть, будет больно. Идите сразу к 22 Это только если вдруг кто-то не знает как это делают в приличном обществе.

$$\begin{cases} x = \cos{(\varphi)}, dx = -\sin{(\varphi)} d(\varphi) \\ y = \sin{(\varphi)}, dy = \cos{(\varphi)} d(\varphi) \\ ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \end{cases}$$

$$ds^2 = d(\varphi)^2 + dz^2$$

Теперь можно переформулировать задачу, как:
Найти максимум

$$\int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 + 1} \right) d(\varphi), z(0) = 0, z(\pi/2) = 1. \tag{22}$$

Такое уже мы нарешались. Найдём экстремали.

$$\mathcal{L} = \sqrt{z'^2 + 1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} = 0$$

$$\frac{z''}{((z')^2 + 1)^{3/2}} = 0$$

$$z'' = 0$$

$$z = C_1 + C_2 \varphi$$

$$\hat{z} = \varphi \frac{2}{\pi}$$

Проверять что это минимум нет необходимости, ведь существует Теорема Хопфа — Ринова, уже доказанная в прошлом семестре курса Математического Анализа.
Ответ:
в циллиндрических координатах уравнением геодезической будет $\hat{z} = \varphi\frac{2}{\pi}$

Прочитайте, пожалуйста, благодарности. Люди про которых я писал там заслуживают минутки внимания