

# ЗАМЕТКИ КУРСА «АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА II»

---

Семинарист: Сахаров А. В.

Восторженные слушатели: Хоружий К.  
Примаек Е.

От: 3 мая 2021 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Малые колебания консервативных систем.</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Вынужденные колебания и диссипативные системы</b>	<b>3</b>
2.1	Вынужденные колебания . . . . .	3
2.2	Диссипативные системы . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Элементы теории бифуркаций</b>	<b>5</b>
3.1	Двумерные динамические системы . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Метод усреднений и нормальные формы</b>	<b>5</b>
4.1	Метод усреднений . . . . .	5
4.2	Нормальная форма Коши . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Уравнение Гамильтона</b>	<b>6</b>
5.1	Немного геометрии . . . . .	7
5.2	Уравнения Гамильтона . . . . .	7
5.3	Уравнения Рауса . . . . .	8
5.4	Уравнения Уиттекера . . . . .	8
<b>6</b>	<b>Интегралы системы</b>	<b>8</b>
6.1	Интегральные инварианты . . . . .	9
6.2	Обратные теоремы теории интегральных инвариантов . . . . .	10
<b>7</b>	<b>Канонические преобразования</b>	<b>10</b>
7.1	Импульсы не нужны . . . . .	12
7.2	Симплектическая геометрия (симплектология) . . . . .	12
<b>8</b>	<b>Уравнения Гамильтона-Якоби</b>	<b>13</b>
8.1	Немного магии . . . . .	14
8.2	Каниническая теория возмущений (к T12) . . . . .	14
<b>9</b>	<b>Элементы теории возмущения гамильтоновых систем</b>	<b>14</b>
9.1	Немного о теории возмущений . . . . .	15
9.2	Многомерный случай . . . . .	16
<b>10</b>	<b>Хаос в гамильтоновых системах</b>	<b>17</b>
10.1	Сечение Пуанкаре при $n \geq 2$ . . . . .	17
10.2	Невозмущенное отображение Пуанкаре . . . . .	17
10.3	Возмущенное отображение Пуанкаре . . . . .	17
10.4	Размерность . . . . .	18
10.5	Итоги . . . . .	18

# 1 Малые колебания консервативных систем.

Запишем уравнения Лагранжа для консервативной голономной системе:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad q \in M^n; \quad q, \dot{q} \in TM^n.$$

Тогда можно сказать, что

$$L(q, \dot{q}, t): TM^n \times \mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{R}^1.$$

Параллельным переносом выберем  $q = 0$  – положение равновесия. Тогда считаем, что  $q(t), \dot{q}(t) \in \varepsilon$  – окрестности. В идеале мы хотим всё линейризовать, тогда

$$T = T_2 + T_1 + T_0 = T_2 = \frac{1}{2} \dot{q}^i \dot{q}^j A_{ij}(q) \approx \frac{1}{2} \dot{q}^T A(0) \dot{q} + \dots, \quad A(0) = \frac{\partial^2 T(0)}{\partial \dot{q}^T \partial \dot{q}}.$$

т. к. для консервативных систем  $T_1 = T_0 = 0$ .

Аналогично можем сделать для потенциальной энергии

$$\Pi = \Pi(0) + \frac{\partial \Pi(0)}{\partial q^T} q + \frac{1}{2} q^T \frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial q^T \partial q} q + \dots \approx \frac{1}{2} q^T C(0) q, \quad C(0) = \frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial q^T \partial q}.$$

Таким образом мы пришли к уравнениям вида

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A\ddot{q} + Cq = 0.}$$

Последнее уравнение называется *уравнением малых колебаний*. Важно, что  $A$  – положительно определена, в силу невырожденности уравнений на  $\dot{q}$  уравнений Лагранжа.

Из линейной алгебры понятно, что существуют координаты  $\theta \in M^n$ , а также невырожденная матрица перехода к новым координатам  $U: q = U\theta$ , и  $U^T A U = E$ ,  $U^T C U = \Lambda$  – диагональная матрица. Тогда верно, что

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T U^T A U \dot{\theta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i^2.$$

Аналогично для потенциальной энергии

$$\Pi = \frac{1}{2} q^T C q = \frac{1}{2} \theta^T U^T C U \theta = \frac{1}{2} \theta^T \Lambda \theta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i \theta_i^2.$$

Это ещё сильнее упрощает уравнения Лагранжа:

$$A\ddot{q} + Cq = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta}_i + \lambda_i \theta_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь  $\lambda_i$  – действительные диагональные элементы  $\Lambda$ . При различных  $\lambda$  получаем, что

$$\begin{aligned} \lambda_i > 0 & \Rightarrow \theta_i = c_i \sin(\sqrt{\lambda_i} t + \alpha_i); \\ \lambda_i = 0 & \Rightarrow \theta_i = c_i t + \alpha_i; \\ \lambda_i < 0 & \Rightarrow \theta_i = c_i \exp(\sqrt{-\lambda_i} t) + \alpha_i \exp(-\sqrt{-\lambda_i} t). \end{aligned}$$

где последние два – уже не колебаниям.

Возвращаясь к удобной форме, получаем, что

$$q = U\theta = \sum_{i=1}^n c_i u_i \sin(\sqrt{\lambda_i} t + \alpha_i),$$

где  $u_i$  – амплитудный вектор  $i$ -го главного колебания. Таким образом консервативная система движется по суперпозиции некоторых главных колебаний (гармонических осцилляций).

Иначе мы можем интерпретировать это так, что кинетическая энергия<sup>1</sup> образует некоторую метрику, а амплитудные вектора образуют некоторый ортонормированный базис.

$$U^T A U = E \quad \Rightarrow \quad u_i^T A u_j = \delta_{ij}$$

Получив матрицы  $A, C$  переходим к  $[C - \lambda A]u = 0$ , получая

$$|C - \lambda A| = 0,$$

что называют *вековым уравнением*, или *уравнением частот*. Из него получим  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , и уже перейдём к системе уравнений вида  $|C - \lambda_i A| u_i = 0$ .

<sup>1</sup>Переписать грамотнее.

## 2 Вынужденные колебания и диссипативные системы

### 2.1 Вынужденные колебания

Давайте испортим консервативность так, чтобы

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i(t).$$

Как выяснили ранее

$$q = U\theta, \quad U^T AU = E, U^T CU = \Lambda.$$

Посчитаем элементарную работу добавленной силы

$$\delta A = Q_i \delta q^i = \Theta^T \delta \theta = Q^T U \delta \theta,$$

тогда можно записать, что

$$\Theta = U^T Q, \quad Q = (U^T)^{-1} \Theta,$$

то есть *преобразование обобщенных сил*. То есть уравнение приходит к виду

$$A\ddot{q} + Cq = Q(t), \quad \text{бог с индексами} \quad \ddot{q}_i + \lambda_i \theta_i = \Theta_i(t).$$

Тогда ответ запишется в виде

$$q = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i \sin(\sqrt{\lambda_i} t + \alpha_i) + \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \theta_i^*(t),$$

где вторая сумма соответствует *вынужденным колебаниям*, а первая свободным гармоническим колебаниям.

Пусть так вышло, что

$$\begin{cases} \theta_i^* = b_i \sin(\Omega t) \\ \Theta_i(t) = a_i \sin(\Omega t) \end{cases} \Rightarrow b_i (\lambda_i - \Omega^2) = a_i, \quad \Rightarrow \theta_i^* = \frac{a_i}{\lambda_i - \Omega^2} \sin(\Omega t).$$

В случае же *резонанса* ищем решение в виде

$$\theta_i^*(t) = b_i t \cos(\Omega t), \quad \Rightarrow b_i = -\frac{a_i}{2\Omega}.$$

И здесь мы видим первые звоночки от Пуанкаре, о конце линейной теории.

#### Задача 1 (18.42)

Есть некоторая платформа, перемещающаяся по закону  $a \sin \omega t$ . На ней подвешены куча стержней, соединенных пружинами разной упругости, на разных высотах. Вопрос – на каких  $\omega$  возможен резонанс?

Перейдём в СО платформы, тогда возбуждающая сила – сила инерции, соответственно для всех стержней возбуждающая сила одинаковая

$$\mathbf{J}_i^e = -m\mathbf{w}_i^e = m\omega^2 a \sin(\omega t) \mathbf{e}.$$

Посчитаем обобщенные силы, как

$$Q_1^e = \dots = Q_n^e = \frac{\delta A_i}{\delta \varphi_i} = \frac{(\mathbf{J}_i^e \cdot \delta \mathbf{r}_i)}{\delta \varphi_i} = \frac{1}{2} m \omega^2 a l \sin(\omega t).$$

Получается, что мы посчитали столбец обобщенных сил

$$\mathbf{Q} = \frac{l}{2} [1, 1, \dots, 1]^T a \omega^2 m \sin(\omega t).$$

По крайней мере мы можем сказать, что у нас есть главная частота

$$\lambda_1 = \frac{3g}{2l}, \quad \mathbf{u}_1 = [1, 1, \dots, 1]^T.$$

Теперь выпишем матрицу кинетической энергии

$$A = \frac{ml^2}{6} E, \quad U^T AU = E, \quad \Rightarrow UU^T = E,$$

с точностью до множителя. Тогда  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  – ортогональный базис.

Теперь вспоминаем, что

$$\Theta = U^T Q = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \dots \\ \mathbf{u}_n^T \end{pmatrix} \mathbf{u}_1 \frac{1}{2} a \omega^2 l m \sin(\omega t) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \cdot \mathbf{u}_1 \\ \dots \\ \mathbf{u}_n^T \cdot \mathbf{u}_1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} a \omega^2 l m \sin(\omega t) = \begin{pmatrix} n \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_1 \frac{1}{2} a \omega^2 l m \sin(\omega t).$$

Ура, от сих приходим к приятным уравнениям Лагранжа

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_q + \lambda_1 \dot{\theta}_1 = na\omega^2 \frac{l}{2} \sin \omega t, \ddot{\theta}_2 + \lambda_2 \theta_2 \\ \dots \\ \ddot{\theta}_n + \lambda_n \theta_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{3g}{2l}}.$$

## 2.2 Диссипативные системы

И снова испортим консервативную систему до диссипативной,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + \tilde{Q}_i(\dot{q}) = Q_i(q, \dot{q}).$$

С кинетической всё как обычно, тогда

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T A \dot{\mathbf{q}}; \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(0) + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}^T} \mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{Q}(0)}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} \dot{\mathbf{q}} = -C\mathbf{q} - B\dot{\mathbf{q}}.$$

Где ввели матрицы вида

$$C = -\frac{\partial \mathbf{Q}(0)}{\partial \mathbf{q}^T}; \quad B = -\frac{\partial \mathbf{Q}(0)}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}.$$

В таком случае уравнение примет вид

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = 0, \quad (2.1)$$

получили *линеаризация уравнений Лагранжа I*. Но его сходу к каноническому виду не привести.

Вспомним, что энергия системы

$$E = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \mathbf{q} \cdot C \mathbf{q}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = A\ddot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = [A\ddot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q}] \cdot \dot{\mathbf{q}} = -B\dot{\mathbf{q}}^2 = N.$$

И пошла классификация: если  $N \equiv 0$ , то силы называем *гироскопическими*. Если  $N \leq 0$ , то силы *диссипативные*.

**Def 2.1.** Положение равновесия  $\mathbf{q}^*$  называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и

$$\exists \delta: \forall |\dot{\mathbf{q}}| < \delta, |\mathbf{q}| < \delta \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}}(t) = 0.$$

Возвращаясь к уравнению, вспомним что решение ищется в виде<sup>2</sup>

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^{2n} C_i \mathbf{u}_i \exp(\lambda_i t), \quad \Rightarrow \quad [A\lambda^2 + B\lambda + C] \mathbf{u} = 0, \quad \Rightarrow \quad \det [A\lambda^2 + B\lambda + C] = 0,$$

тогда мы находим  $2n$  решений  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ , и, соответственно,  $2n$  амплитудных векторов.

**Thr 2.2** (Достаточное условие асимптотической устойчивости). *Для того, чтобы решение  $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$  было асимптотически устойчиво достаточно, чтобы*

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, 2n\}.$$

*Если  $\exists \lambda_i: \operatorname{Re} \lambda_i > 0$ , тогда всё не так хорошо.*

Как узнать, что ..., для этого достаточно посмотреть на рыбу

$$a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + a_0 = 0,$$

и отрезем голову и хвост, получим матрицу

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & \dots & 0 \\ a_m & a_{m-2} & \dots & 0 \\ 0 & a_{m-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix},$$

так получили матрицу Гурвица.

**Thr 2.3** (Критерий Рауса-Гурвица). *Для того, чтобы  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  необходимо и достаточно, чтобы  $a_i > 0$ , и*

$$\Delta_1, \Delta_3, \dots, \Delta_{m-1} > 0.$$

*Есть другие формы.*

<sup>2</sup>В общем случае решение системы вообще сложнее (при кратных  $\lambda$ ), но качественно всё примерно в таком же духе, поэтому, ну, всё хорошо.

### 3 Элементы теории бифуркаций

#### Общий подход

Запишем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q,$$

где основная идея Гамильтонова формализма – всегда уравнения разрешимы относительно ускорений  $\ddot{q} = \ddot{q}(q, \dot{q})$ . Пусть  $x_1 = q_1$ ,  $x_2 = \dot{q}_1$ ,  $x_3 = q_2$ ,  $x_4 = \dot{q}_2$ , и т.д. Приведем уравнения к *нормальной форме Коши*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in M^{2n},$$

где  $M^{2n}$  – фазовое пространство, или пространство состояний.

Не умоляя общности будем просто рассматривать системы вида  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , считая, что  $\mathbf{x} \in M^n$ . Посмотрим на некоторую  $\mathbf{x}_0 \in M^n$ , – начальные условия. Продолжаем считать, что решение охалки диффузов единственно, тогда и через каждую точку конфигурационного многообразия проходит единственная траектория.

**Def 3.1.** Множество траекторий (интегральных кривых) образует *фазовый портрет*. *Бифуркация* – качественное изменение фазового портрета при плавном изменении параметров модели. *Бифуркационная диаграмма* отображает бифуркацию системы.

#### 3.1 Двумерные динамические системы

Посмотрим ещё на системы на  $\mathbb{R}^2$ .

**Def 3.2.** *Предельный цикл* – замкнутая периодическая траектория (ЗПТ) системы дифференциальных уравнений, изолированная от других ЗПТ. Также ЗПТ такая, что для всех траекторий из некоторой окрестности периодических траекторий стремится к ней при  $t \rightarrow +\infty$  (установившийся периодический цикл) **или** при  $t \rightarrow -\infty$  (неустановившийся предельный цикл).

Другими словами является аттрактором для некоторой своей окрестности.

## 4 Метод усреднений и нормальные формы

#### 4.1 Метод усреднений

Рассмотрим уравнение вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon h(x, \dot{x}) = 0.$$

Рассмотрим систему в терминах быстрого времени  $\tau = t$  и медленного  $T = \varepsilon t$ . В первом приближение получим, что

$$\begin{aligned} O(1): \quad & x_0 = r(T) \cos(\omega\tau + \varphi(T)) \\ O(\varepsilon): \quad & \partial_\tau^2 x_1 + \omega^2 x_1 = -2\partial_\tau \partial_T x_0 - h = +2\omega \partial_T (r \cos(\omega\tau + \varphi)) - h = \\ & = 2\omega(r' \sin(\omega\tau + \varphi)) + r\varphi' \cos(\omega\tau + \varphi) - h \end{aligned}$$

и далее будем считать, что  $\omega\tau + \varphi = \theta$ , и разложим  $h$  в ряд Фурье. Тогда

$$h = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta,$$

соответственно, дабы убить резонансные слагаемые,

$$\begin{aligned} 2\omega r' - b_1 = 0 \\ 2\omega r\varphi' - a_1 = 0. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega r' = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h \sin \theta d\theta = \langle h \sin \theta \rangle \\ \omega r\varphi' = \dots = \langle h \cos \theta \rangle \end{cases}$$

#### Осциллятор Ван дер Поля

Рассмотрим уравнения вида

$$\ddot{x} + x + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} = 0,$$

что соответствует рассмотренному случаю с  $\omega = 1$ , или  $(\tau + \varphi = \theta)$

$$\begin{aligned} h &= (r^2 \cos^2(\tau + \varphi) - 1)(-r \sin(\tau + \varphi)) = \\ &= r(\sin \theta - r^2 \cos^2 \theta \sin \theta), \end{aligned}$$

тогда

$$r' = r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta - r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) d\theta = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{r^2}{4}\right),$$

что соответствует возникновению предельного цикла радиуса 2.

## 4.2 Нормальная форма Коши

Продолжаем рассматривать

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = 0: \mathbf{f}(0) = 0,$$

также будем считать, что  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  – аналитическая функция, и разложим её в ряд. Уравнение вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}),$$

хотим свести к линейному виду. Сделаем следующую замену

$$\mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \Lambda \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}),$$

далее сделаем замену

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{y} + \mathbf{p}(\mathbf{y}),$$

где  $\mathbf{p}(\mathbf{y})$  – «вектор» из полиномов минимальной нелинейной степени.

Прямой подстановкой получаем, что

$$\dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}^T} \dot{\mathbf{y}} = \left(E + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}^T}\right) \dot{\mathbf{y}} = \Lambda \mathbf{y} + \Lambda \mathbf{p} + \mathbf{g}(\mathbf{y} + \mathbf{p}), \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{y}} = \left(E + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}^T}\right)^{-1} (\Lambda \mathbf{y} + \Lambda \mathbf{p} + \mathbf{g}(\mathbf{y} + \mathbf{p})),$$

а теперь разложим всё в ряд и оставим слагаемые степени не более  $\deg \mathbf{p} = k$ , тогда

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \left(E - \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}^T}\right) (\Lambda \mathbf{y} + \Lambda \mathbf{p} + \mathbf{g}^m(\mathbf{y})) + O(|\mathbf{y}|^{m+1}) = \\ &= \Lambda \mathbf{y} + \Lambda \mathbf{p} + \mathbf{g}^m(\mathbf{y}) - \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}^T} \Lambda \mathbf{y} + O(|\mathbf{y}|^{m+1}). \end{aligned}$$

Вспомним, что понятно как выглядит  $p_i$

$$p_i = \sum_{k_1, \dots, k_n} p_{k_1, \dots, k_n}^i y^{k_1} \dots y^{k_n}, \quad k_1 + \dots + k_n = m,$$

а также  $g_i^m$

$$g_i^m = \sum_{k_1, \dots, k_n} g_{k_1, \dots, k_n}^i y^{k_1} \dots y^{k_n},$$

работая с каждым мономом приходим к уравнениям

$$\lambda_i p_{k_1, \dots, k_n}^i - (k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 + \dots + k_n \lambda_n) p_{k_1, \dots, k_n}^i = -g_{k_1, \dots, k_n}^i, \quad \Rightarrow \quad p_{k_1, \dots, k_n}^i = \frac{-g_{k_1, \dots, k_n}^i}{\lambda_i - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\lambda})},$$

что приводит нас к следующей теореме.

**Thr 4.1** (Теорема Пуанкаре-Дюлака). *Можно всё убрать, кроме резонансных слагаемых.*

## 5 Уравнение Гамильтона

Запишем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad L = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - \Pi.$$

Пусть есть некоторый импульс

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = A \dot{q} + \dots, \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = A^{-1} + \dots, \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} (q, \dot{q}, t) \text{— лагранжевы переменные} \\ (q, p, t) \text{— гамильтоновы переменные} \end{array}$$

## 5.1 Немного геометрии

Было конфигурационное многообразие размерности  $n$ . Каждому состоянию соответствует точка на многообразии,  $\dot{q} \in T_q M$ . Собственно,  $p \in T_q^* M$  ( $TM$  – касательное расслоение) лежит в кокасательном пространстве ( $T^*M$  – кокасательное расслоение)(почему?). Тогда возьмем некоторый функционал

$$H(q, p, t): T^*M \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

Считая  $(q, t) = \text{const}$

$$dL = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot d\dot{q} = p \cdot d\dot{q}, \quad d(\dot{q}p) = p d\dot{q} + \dot{q} dp = dL + \dot{q} dp.$$

Тогда давайте всё сгруппируем

$$d(\dot{q}p - L) = \dot{q} dp = \frac{\partial H}{\partial p} dp.$$

То есть  $dL = p dq$ , а  $dH = \dot{q} dp$ .

**Def 5.1.** Определим гамильтониан, как

$$H(q, p, t) \stackrel{\text{def}}{=} p \cdot \dot{q}(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t).$$

## 5.2 Уравнения Гамильтона

Запишем дифференциал Гамильтониана

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \\ dH &= \dot{q} dp + p d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q} dq - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Во-первых отсюда следует, что

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (5.1)$$

Также имея право приравнивать коэффициенты

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}}. \quad (5.2)$$

Которые, о чудо, уже существуют в нормальной форме Коши.

## Замечания

### Консервативные системы

Для консервативной системы

$$L = T_2 - \Pi, \quad \Rightarrow \quad H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q} - T_2 + \Pi = T_2 + \Pi = E. \quad (5.3)$$

Вообще уравнения Гамильтона написал ещё Лагранж, а  $H$ , потому что Гюйгенс. А выше мы получили полную механическую энергию.

### Общность происходящего

Последовательный курс – некоторая история, должна быть приемственностью тем. В общем так мы и движемся в сторону большей абстракции. Но минус в том, что лагранжева механика и гамильтонова механика существуют сами по себе. Гамильтонова система это  $(M, \omega, H)$ , где  $M$  – конфигурационное  $2n$ -мерное многообразие,  $\omega$  – 2-форма, а  $H$  – гамильтониан, то есть функция гамильтоновых переменных.

### Задача 19.24

Есть некоторая сфера, у которой радиус – известная функция времени  $R(t)$  (реономная связь), есть сила тяжести  $g$ . В качестве координат выберем сферические  $\theta, \varphi$ .

$$r = (\dots) \quad \Rightarrow \quad T = \frac{m}{2}(R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{m}{2} \dot{R}^2.$$

Потенциальная энергия

$$\Pi = mgR \cos \theta.$$

Теперь

$$\begin{aligned} p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\theta} = mR^2 \dot{\theta}, & \Rightarrow & \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}, \\ p_\varphi &= mR^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta, & \Rightarrow & \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2 \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

Теперь

$$H = p \cdot q - L = p_\varphi \varphi + p_\theta \dot{\theta} - L = \frac{mR^2}{2} \left( p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right) - \frac{m}{2} \dot{R}^2(t) + mgR(t) \cos \theta.$$

Запишем теперь уравнения Гамильтона

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2 \sin^2 \theta},$$

что вполне логично, а также второй набор

$$\dot{p}_\theta = -mg\dot{R}$$

### 5.3 Уравнения Рауса

Идея в том, что можно делать преобразование только по некоторому набору переменных, что приводит нас к функции Рауса

$$R = \left( \sum_{i=k+1}^n p_i \hat{q}_i \right) - L(q, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{k+1}, \hat{q}_k, \dots, \hat{q}_n, t),$$

где шляпка соответствует выражению через  $q, p, t$ . Можно ещё здесь уравнения записать, см. билеты.

### 5.4 Уравнения Уиттекера

Хочется уменьшать порядок дифференциальных уравнений. Пусть  $H(q, p) \equiv h$ . Тогда у нас есть некоторая  $2n - 1$ -поверхность. Пусть

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} \neq 0, \quad \Rightarrow \quad p_1 = -K(q, p_2, \dots, p_n, h).$$

Получается, что траектории заполняют не всё пространство, а некоторое его подпространство. Количество уравнения можем сменить с  $2n$  до  $2n - 2$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial p_i} = 0.$$

Теперь выйдем уравнения Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, & \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{dq_i}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \bigg/ \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dq_1} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \bigg/ \frac{\partial H}{\partial p_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_i}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (5.4)$$

Красота и победа!)

## 6 Интегралы системы

Есть система Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{q} = \partial_p H \\ \dot{p} = -\partial_q H \end{cases}$$

и для них существуют первые интегралы –  $\varphi(q, p, t)$  – сохранение на любых траектория движения системы.

Как их получать? Во-первых, до тех пор, пока гамильтонин явно от времени не зависит – это первый интеграл:

$$\partial_t H = 0, \quad \Rightarrow \quad d_t H = 0.$$



Аналогично

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = 0, \quad \Rightarrow \quad p_i = \text{const.}$$

**Def 6.1.** Скобкой Пуассона для функции гамильтоновых переменных может быть определена, как

$$\{\varphi, \psi\} = \frac{\partial \varphi}{\partial q} \frac{\partial \psi}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial q}.$$

Что происходит и почему

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \{\varphi, H\} = 0,$$

соответственно скобки пуассона – вполне логичный критерий первого интеграла.

**Thr 6.2.** Если  $\varphi, \psi$  – первые интегралы, то  $\{\varphi, \psi\}$  – это первый интеграл или число.

Первые интегралы бывают зависимы, так для  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  можем составить

$$\text{rg} \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(q^i, p_j, t)} = m.$$

**Thr 6.3** (Теорема Э. Нетер). Пусть есть некоторое однопараметрическое семейство  $\tilde{q} = \tilde{q}(q, t, \alpha)$  и  $\tilde{t} = \tilde{t}(q, t, \alpha)$  где  $\alpha \in \mathbb{R}^1$  такое, что дифференцируемо,  $\alpha = 0 \sim$  тождественное преобразование, и

$$L\left(\tilde{q}, \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}}, \tilde{t}\right) d\tilde{t} = L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) dt.$$

Тогда в системе есть первый интеграл, который вычисляется так:

$$\varphi(q, p, t) = \tilde{p} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} - H \cdot \left(\frac{\partial \tilde{t}}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}.$$

Например,

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= q + \alpha, & \Rightarrow & \quad p_q = \text{const} \\ \tilde{t} &= t + \alpha, & \Rightarrow & \quad H = \text{const.} \end{aligned}$$

## Задача 1

Пусть есть некоторая точка в радиальном потенциальном поле. Лагранжиан

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - \Pi(r).$$

Тогда вполне логично рассмотреть  $\tilde{\varphi} = \varphi + \alpha$ , тогда

$$I = p_{\varphi} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi},$$

так что момент сохраняется. Вопрос: если есть первый интеграл, то существует ли симметрия для этого первого интеграла?

## 6.1 Интегральные инварианты

**Def 6.4.** Интегральный инвариант – интегральное выражение, от гамильтоновых переменных, сохраняющееся на некоторой области траектории прямых путей.

Скажем, что  $N$  – конфигурационное многообразие,  $(q, \dot{q}) \in TN$ , также введем  $\mathbf{x} = (q, p)^T$ , где

$$\mathbf{x} \in M^{2n} \equiv T^*N.$$

Продолжим итерации, перейдем к

$$(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \in TM^{4n}.$$

Теперь введем некоторый

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \equiv L(q, p, \dot{q}, \dot{p}, t) = p \cdot \dot{q} - H(q, p, t).$$

Также мы знаем, что

$$\delta \int L dt = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad \Rightarrow \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

что верно для задачи варьирования за закрепленными концами.

Тогда

$$\delta \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L dt = (p\delta q - H\delta t) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left[ \left( \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \cdot \delta q + \left( \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \cdot \delta p \right] dt.$$

Это приводит нас к **трубке прямых путей**. Вводим согласованные контуры по  $\alpha$ .

Вспоминаем, что

$$\int_{\alpha=0}^{\alpha=1} \delta S(\alpha) = S(1) - S(0) \equiv 0.$$

Тогда

$$\oint_{C_0} (p\delta q - H\delta t) - \oint_{C_1} (p\delta q - H\delta t) = 0,$$

что в силу произвольности выбранных контуров

$$J_{\Pi K} = \oint_C (p\delta q - H\delta t) = \text{const}$$

что приводит нас к *интегралу Пуанкаре-Картана*.

В изохронном случае

$$I_{\Pi} = \oint p\delta q = \text{const}$$

что приводит к универсальному интегральному инварианту Пуанкаре. Прикол в том, что он не особо зависит от  $H$ .

## Пример

Пусть  $L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - q^2)$ , и в качестве  $C_0$  выберем  $q = \cos \alpha$  и  $\dot{q} = \sin \alpha$ , при  $t \equiv 0$ . Хотелось найти вид трубки прямых путей и посчитать интегральный инвариант:

$$\begin{cases} q = A \cos(t + \alpha) \\ p = \dot{q} = -A \sin(t + \alpha) \end{cases}$$

Тогда

$$q^2 + p^2 = A^2,$$

что соответствует окружности, или, в случае с движением по времени, цилиндру. Интеграл Пуанкаре тогда

$$I_{\Pi} = \oint p\delta q = \int_0^{2\pi} p \frac{\partial q}{\partial \alpha} \delta \alpha = \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha \stackrel{!}{=} A^2 \pi.$$

то есть пока  $n = 1$  интеграл Пуанкаре – это просто фазовый объем, который для всех гамильтоновых систем сохраняется.

## 6.2 Обратные теоремы теории интегральных инвариантов

Пока что мы сформулировали, что если система Гамильтонова, то у нее сохраняется интегральный инвариант Пуанкаре и интегральный инвариант Пуанкаре Картана.

Но верно и обратно, если  $\forall \bar{c}$

$$I_{\Pi} = \oint p\delta q = \text{const}, \quad \Rightarrow \quad \exists H(q, p, t).$$

Если же сохраняются для некоторой  $F$  интеграл  $I_{\Pi K}$ , то  $H = F(q, p, t) + f(t)$ .

## 7 Канонические преобразования

**Thr 7.1** (Теорема Ли Хуа-Сжуна). *Был некоторый интегральный инвариант Пуанкаре, так вот, утверждается, что*

$$J = \oint A(q, p, t) \cdot \delta q + B(q, p, t) \cdot \delta p = \text{const} \cdot J_{\Pi},$$

*только вот интегральный инвариант Пуанкаре существует для трубки прямых путей, а сейчас мы обобщаем это на отношения для разных трубок.*

Говоря о некоторых следствиях

$$\oint q \delta p = c \oint p \delta q, \quad \Rightarrow \quad \oint \underbrace{(q \delta p - c p \delta q)}_{\delta \Phi} = 0.$$

Раньше были уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad \bigg/ \tilde{q} = \tilde{q}(q, t) \bigg/ \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}} = 0.$$

Но, скорости не преобразуются.

Чуть прикольнее в уравнениях Якоби

$$\begin{cases} \tilde{q} = \tilde{q}(q, p, t) \\ \tilde{p} = \tilde{p}(q, p, t) \end{cases} \quad \left| \frac{\partial(\tilde{q}, \tilde{p})}{\partial(q, p)} \right| \neq 0. \quad (7.1)$$

что приводит к ситуации

$$\begin{cases} \dot{q} = \partial_p H \\ \dot{p} = -\partial_q H \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{q}} = \tilde{Q}(\tilde{q}, \tilde{p}, t) \\ \dot{\tilde{p}} = \tilde{P}(\tilde{q}, \tilde{p}, t) \end{cases}$$

**Def 7.2.** Преобразование (7.1) называется каноническим, если оно переводит любую гамильтонову систему в гамильтонову.

Из вариационных принципов умеем получать уравнения Лагранжа, да и уравнения Гамильтона тоже

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (p \cdot \dot{q} - H) dt = 0.$$

Как раньше выбираем  $\dot{x} = [q, p]^T$ , что приведет к  $2n$  переменным.

Но и в новых переменных хочется видеть что-то похожее,

$$\delta \int (\tilde{p} \cdot \dot{\tilde{q}} - \tilde{H}) dt = 0,$$

что приводит нас к мысли о том, что

$$\tilde{p} \cdot \dot{\tilde{q}} - \tilde{H} = c(p \cdot \dot{q} - H) - \frac{d\tilde{F}}{dt}(q, p, t).$$

домножая, получаем

$$\tilde{p} \cdot d\tilde{q} - \tilde{H} dt = c p dq - H dt - dF,$$

тогда

$$d\tilde{q} = \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} dt + \delta^t \tilde{q}, \quad dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \delta^t F.$$

так приходим к уравнению

$$\tilde{p} \cdot \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} dt + \tilde{p} \cdot \partial^t \tilde{q} - \tilde{H} dt = c p \cdot dq - c H dt - \frac{\partial F}{\partial t} dt - \delta^t F,$$

что приводит к уравнению

$$\boxed{\tilde{p} \cdot \delta^t \tilde{q} - c p dq = -\delta^t F}, \quad \text{— критерий канонического преобразования,} \quad (7.2)$$

где  $c$  – *валентность*, соответствующая теореме Ли Хуа-Сжуна, а  $F$  – производящая функция.

**Thr 7.3** (критерий каноничности преобразования). Если существует  $c$  и  $F$  такие, что выполняется (7.2), то преобразование  $(p, q) \mapsto (\tilde{p}, \tilde{q})$  канонично.

Бонусом находим новый Гамильтониан, приравнявая коэффициенты при  $dt$ .

$$\tilde{H} = cH + \frac{\partial F}{\partial t} + \tilde{p} \cdot \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t}.$$

## Решим Задачу

Возьмем такое преобразование

$$\begin{cases} \tilde{q} = p \operatorname{tg} t \\ \tilde{p} = q \operatorname{ctg} t \end{cases}, \quad H = \frac{qp}{\sin t \cos t}.$$

тогда

$$\tilde{p} \delta^t \tilde{q} = q \operatorname{ctg} t \operatorname{tg} t \delta^t p = q \delta^t p = \delta^t (qp) - p \delta q, \quad \Rightarrow \quad \tilde{p} \cdot \delta^t \tilde{q} - (-1)p \delta q = -\delta(-qp).$$

Теперь можем найти новый гамильтониан

$$\tilde{H} = (-1) \frac{pq}{\sin t \cos t} + 0 + \frac{q \operatorname{ctg}(t) p}{\cos^2 t} = 0,$$

что очень здорово, ведь в новых переменных  $\dot{\tilde{q}} = 0$ ,  $\dot{\tilde{p}} = 0$ , что позволило найти первые интегралы системы, а также движение

$$\begin{cases} q = \beta \operatorname{tg} t, \\ p = \alpha \operatorname{ctg} t. \end{cases}$$

## 7.1 Импульсы не нужны

Вообще, пусть нам хочется в  $(q, \tilde{q})$  описание

$$\left| \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \right| \neq 0, \quad \Rightarrow \quad (q, p) \rightarrow (q, \tilde{q}).$$

Отличная идея! Теперь  $F \rightarrow S(q, \tilde{q}, t)$  – производящая функция. К слову, такие преобразования называются *свободными*. Кусок вывода сразу можем выкинуть и перейти к

$$\tilde{p} \cdot d\tilde{q} - \tilde{H} dt = cp \cdot dq - cH dt - dS,$$

что дает возможность сразу работать с независимыми дифференциалами

$$\begin{cases} \tilde{p} = -\partial_{\tilde{q}} S \\ p = c^{-1} \partial_q S \end{cases} \quad \text{— критерий каноничности в } (q, \tilde{q}) \text{ описание.}$$

Ещё и гамильтониан, как раньше, находим

$$\tilde{H} = cH + \partial_t S.$$

## Задача 2

Есть преобразование

$$\begin{cases} q = \sqrt{2\tilde{p}} \cos \tilde{q} \\ p = \sqrt{2\tilde{p}} \sin \tilde{q} \end{cases}, \quad H = \frac{q^2 + p^2}{2}.$$

Теперь

$$p = q \operatorname{tg} \tilde{q}, \quad \tilde{p} = \frac{q^2}{2 \cos^2 \tilde{q}},$$

и теперь, интегрируя,

$$\begin{cases} \frac{q^2}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 \tilde{q}) = -\partial_{\tilde{q}} S, \\ q \operatorname{tg} \tilde{q} = c^{-1} \partial_q S, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad S = - \left( \frac{q^2}{2} \operatorname{tg} \tilde{q} \right), \quad c = -1.$$

И новый гамильтониан

$$\tilde{H} = -H = -\tilde{p}.$$

Заметим, что тут уже не восстановить Лагранжиан, – преобразования Лежандра вырожденно. И уравнения движения

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{2\alpha} \cos(-t + \beta) \\ p &= \sqrt{2\alpha} \sin(-t + \beta). \end{aligned}$$

## 7.2 Симплектическая геометрия (симплектология)

Гамильтонова система – набор  $(M, \omega, H)$ , где  $\dim M = 2n$  – конфигурационное многообразие,  $H$  – гамильтониан,  $\omega$  – симплектическая 2-форма.

**Thr 7.4** (Теорема Дарбу). *Всегда локально есть такие переменные, что 2-форма принимает канонический вид*

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

К слову,  $H: M \times \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}$ . Также точка  $x \in M$  такая, что

$$\xi \in T_x M, \quad \omega_\xi(\dots) = \omega(\dots, \xi) \in T_x^* M,$$

что позволяет задать отображение

$$\omega: T_x M \rightarrow T_x^* M.$$

Если сделаем для всех  $x \in M$ , то

$$\omega: TM \mapsto T^* M.$$

Аналогично можем построить

$$J: T^* M \mapsto TM.$$

Таким образом, считая  $dH$  1-формой,

$$J(dH) \in TM, \quad - \quad \text{гамильтоново векторное поле},$$

что позволяет прийти к

$$\dot{x} = J(dH)(x), \quad J = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{bmatrix}.$$

Как мы до такой жизни дошли? Было же трёхмерное пространство, время, которое на часах смотрим, наблюдаемые переменные, но как только мы захотели обобщить, выработать общий метод, пришлось прийти к  $n$ -мерному конфигурационному многообразию, -- деятельности воспаленного мозга.

## 8 Уравнения Гамильтона-Якоби

Были разные критерии каноничности, главное, чтобы Якобиан был невырожденный. В общем план такой, если мы научимся приводить все гамильтонианы к 0 – было бы здорово.

$$\tilde{H} = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\tilde{q}} = 0 \\ \dot{\tilde{p}} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \tilde{p} = \alpha \\ \tilde{p} = -\beta \end{cases}$$

Осталось найти хорошую  $S$ , которую можем найти из уравнения

$$H(q, p, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t}(q, \alpha, t) = 0,$$

только  $p$  здесь явно не в тему ( $p = \partial_q S$ ), так что, считая далее  $S = cS$ , перейдём к уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0, \quad (8.1)$$

что называем *уравнением Гамильтона-Якоби*.

Из плюсов: решаем это уравнение – находим уравнение движения. Минусы: это нелинейное уравнение в частных производных.

**Def 8.1.** Функция  $S(q, \alpha, t)$  называется *полным интегралом* уравнения Гамильтона-Якоби, если она является решением и

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial q^T \partial \alpha} \right| \neq 0.$$

Так вот, полный алгоритм: находим Гамильтониан, переходим к уравнению Гамильтона-Якоби, из него вытаскиваем производящую функцию, приводящую к нулевому решению, и, обратными заменами, находим уравнения движения

$$\begin{cases} p = \partial_q S(q, \alpha, t) \\ \beta = \partial_\alpha S(q, \alpha, t) \end{cases}.$$

Единственная  $\pm$  алгоритмичная надежда – метод разделения переменных. Давайте попробуем найти полный интеграл в виде

$$S = S_0(t, \alpha) + S_1(q_1, \alpha) + \dots + S_n(q_n, \alpha).$$

### Задача

Посмотрим на некоторую точку  $m$  в потенциале

$$\Pi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{a} = \text{const.}$$

Вообще для уравнения Гамильтона-Якоби крайне важно хорошим образом выбрать координаты, выражающим геометрию задачи.

Далее для простоты будем считать  $\mathbf{a} \parallel Oz$ , введем сферические координаты  $(r, \theta, \varphi)$ .

$$T = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2(\theta) \dot{\varphi}^2 \right), \quad \Pi = \frac{a \cos \theta}{r^2}.$$

Арнольд пишет, что хрен там вы докажете, что полного интеграла там нет.

## 8.1 Немного магии

Посмотрим на полную производную полного интеграла системы

$$\frac{dS}{dt}(q, \alpha, t) = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q} \cdot \dot{q} = p \cdot \dot{q} - H = L(q, \dot{q}, t), \quad \Rightarrow \quad S = \int L dt. \quad (8.2)$$

Теорема не единственная теория, возможно и не самая верная, но красота в глазах смотрящего, так вот, уравнения Гамильтона-Якоби – наиболее близкое к квантмеху уравнение, а-ля квазиклассическое приближение. Выглядит эта конструкция так:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H} \Psi,$$

где  $\Psi$  – волновая функция, а  $\Psi^2$  – плотность вероятности нахождения где-нибудь.

Рассмотрим Гамильтониан вида

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Pi(x, t) \right] \Psi.$$

Понятно, что где-нибудь частица да находится. Вообще, давайте считать, что

$$\Psi \sim \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right), \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial t} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{i}{\hbar} \left[ \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right).$$

Подставляя это в уравнение Шредингера находим, что

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \Pi$$

что, если отбросить мнимую часть, перейдет в

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \Pi(x, t) = 0.$$

## 8.2 Каниническая теория возмущений (к T12)

Давайте перейдем к  $(q, \tilde{p})$  – описане. Вообще критерий тогда получится вида

$$S(q, \tilde{p}, t) \rightarrow \begin{cases} \tilde{q} = \partial_{\tilde{p}} S \\ p = c^{-1} \partial_q S \end{cases} \Rightarrow \tilde{H} = cH + \frac{\partial S}{\partial t}.$$

Ещё раз используем идею о том, чтобы что-то испортить

$$H = H_0 + \varepsilon H, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Посмотрим на производящую функцию вида

$$S = S_0 = q\tilde{p}, \quad \begin{cases} \tilde{q} = q, \\ p = \tilde{p} \end{cases}$$

которая переведет гамильтониан в себя. Но нам нужно немного систему возмутить, соответственно выберем

$$S = q\tilde{p} + \varepsilon S_1, \quad \begin{cases} \tilde{q} = q + \varepsilon \partial_{\tilde{p}} S_1, \\ p = \tilde{p} + \varepsilon \partial_q S_1. \end{cases}$$

Так мы, подбирая  $S_1$ , сделаем для  $H_1$  хорошую долгую жизнь

$$\tilde{H} = H_0 + O(\varepsilon^2).$$

## 9 Элементы теории возмущения гамильтоновых систем

Частенько непонятно, как перейти к переменным действие-угол  $(I, \varphi)$ , когда есть некоторые  $(p, q)$ . Иногда нам везёт, переменные разделяются, тогда

$$H \equiv H(F_1(q_1, p_1), \dots, F_n(q_n, p_n)), \quad \Rightarrow \quad S = -ht + \sum_k S_k(q_k, \alpha_k), \quad \Rightarrow \quad p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k(q_k, \alpha)$$

более того

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_k} p_k(q_k, \alpha) dq_k, \quad \varphi_k \bmod 2\pi,$$

где  $k = 1, \dots, n$ , а  $C_k$  –  $k$ -й цикл на торе. Пуанкаре пишет, что системы бывают более интегрируемые и менее интегрируемые.

### Задача

Пусть у нас  $n = 2 > 1$ . Системы из двух грузиков на пружинке в коробке

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{c}{2}(x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2).$$

Хочется перейти к переменным действие угол. Давайте вспомним про переход к главным координатам, где

$$L = \frac{\dot{\theta}_1^2 - \lambda_1 \theta_1^2}{2} + \frac{\dot{\theta}_2^2 - \lambda_2 \theta_2^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad H = \frac{p_1^2 + \omega_1^2 \theta_1^2}{2} + \frac{p_2^2 + \omega_2^2 \theta_2^2}{2},$$

получается система разделилась на два первых интеграла  $F_1$  и  $F_2$ , тогда

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_1} p_1(\theta_1, F_1) d\theta_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi F_1}{\omega_1} = \frac{F_1}{\omega_1},$$

где в конце мы просто вспомнили площадь эллипса, тогда

$$\tilde{H} = I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2 = h.$$

Приходим к вырожденной (в некотором смысле) системе

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \omega_1, & \dot{\varphi}_2 &= \omega_2, \\ \dot{I}_1 &= 0, & \dot{I}_2 &= 0. \end{aligned}$$

## 9.1 Немного о теории возмущений

Пусть мы немного возмущаем хорошую систему, рассмотрим случай  $n = 1$ . Возмущение – переход к  $n = 1.5$  (ну, типа, ...)

$$H \rightarrow H(q, p, \lambda(\varepsilon t)), \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Выберем  $\tau = \varepsilon t$ , например, маятник – который медленно тянут за ниточку.

**Def 9.1.** Функция  $I(q, p, \lambda)$  – называется *адиабатическим инвариантом* системы, если

$$\forall \varkappa > 0, \exists \varepsilon_0(\varkappa): \forall \varepsilon < \varepsilon_0 \left| I(q(t), p(t), \lambda(\varepsilon t)) - I(q(0), p(0), \lambda(0)) \right| < \varkappa, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Делаем всё как раньше, рассмотрим производящую функцию

$$S(q, I, \lambda), \quad p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad \varphi = \frac{\partial S}{\partial I}, \quad \Rightarrow \quad q \equiv q(\varphi, I, \lambda).$$

Итого, находим

$$\hat{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = H + \varepsilon \lambda'_\tau \frac{\partial S}{\partial \lambda} = H_0 + \varepsilon H_1.$$

Теперь можем уравнения Гамильтона и записать

$$\dot{I} = -\varepsilon \lambda'_\tau \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial S}{\partial \lambda} \right) = -\varepsilon \frac{\partial H - 1}{\partial \varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H_0}{\partial \lambda} + \varepsilon \lambda'_\tau \frac{\partial}{\partial I} \left( \frac{\partial S}{\partial \lambda} \right) = \frac{\partial H_0}{\partial I} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I},$$

где  $\dot{I}$  – медленная переменная,  $\dot{\varphi}$  – быстрая переменная.

Вообще  $H_1$  –  $2\pi$ -периодическая функция от  $\varphi$ , будем считать, что в случае, если

$$\langle \dot{I} \rangle_\varphi = 0,$$

то у усредненной системы есть интеграл движения. Вообще на  $t \in [0, 1/\varepsilon]$ , верно, что  $\text{err } I < \text{const} \cdot \varepsilon$ .

### Задача

Есть некоторая точка массы  $m$ , стенка удаляется как  $l(\varepsilon t)$  – адиабатически ( $v \gg \dot{l}$ ) медленно расширяется.

Найдём переменную действия

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dx = \frac{mvl}{\pi},$$

что и является адиабатическим инвариантом.

## 9.2 Многомерный случай

В случае  $n > 1$  перейдём от  $(I, \varphi)$  к  $(J, \psi)$  (так, чтобы  $H_0(I) \rightarrow H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi, \varepsilon) = \hat{H}(J)$ ) преобразованием вида

$$S(\varphi, J) = \varphi J + \varepsilon S_1(\varphi, J) + \varepsilon^2 S_2(\varphi, J) + \dots$$

Тогда, из критерия каноничности,

$$I = J + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + \dots, \quad \psi = \varphi + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial J} + \dots,$$

тогда

$$\hat{H} = H_0 \left( J + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + \dots \right) + \varepsilon H_1 \left( J + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + \dots \right) + \dots = \hat{H}_0(J) + \varepsilon \hat{H}_1(J) + \dots,$$

так приходим к системе

$$\begin{aligned} O(1): \hat{H}_0(J) &= H_0(J = I), \\ O(\varepsilon): \hat{H}_1(J) &= \frac{\partial H_0}{\partial J} \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + H_1(J, \varphi, 0), \\ O(\varepsilon^2): &\dots \end{aligned}$$

что перепишется в виде

$$\hat{H}_1(J) = \omega_0(J) \cdot \frac{\partial S}{\partial \varphi} + H_1(J, \varphi, 0),$$

раскладывая в ряд Фурье находим, что

$$H_1 = \sum_k H_{1k} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \varphi)); \quad S_1 = \sum_k S_{1k} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \hat{\varphi})),$$

что приводит к

$$(\omega_0 \cdot \mathbf{k}) S_{1k} = H_{1k}, \quad \Rightarrow \quad S_1 = \sum \frac{H_{1k}}{(\omega_0 \cdot \mathbf{k})} \exp(i(\mathbf{k} \cdot \varphi)),$$

а это явно демонстрирует *проблему малых знаменателей*.

Пуанкаре показал, что такие ряды всегда<sup>3</sup> расходятся и умер в 1912 году. В механике наступил пост-модерн – народ пришел к тому что всё неинтегрируется – беда.

Но в 1954 году Колмогоров написал статейку на 4 странице, его студент Арнольд, в 1963 году её доказал<sup>4</sup> страниц на 60. Независимо этим занимался Мозер, который пришел к похожим заключениям, но с другой стороны.

Идея в том, чтобы строить сверхсходящиеся ряды  $\varepsilon^{2^n}$ , которые очень быстро убывают. Также сразу забываем на рациональные  $\omega$ , более того важна степень иррациональности числа: когда  $\omega$  сильно иррациональное – есть надежда на успех.

**Def 9.2.** Для того, чтобы КАМ-теория работала нужно, чтобы система была *невыврождена*:

$$\left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j} \right| \neq 0, \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{\partial \omega_i}{\partial I_j} \right| \neq 0.$$

Это всё потому что нам хочется, чтобы мера резонансных торов была бы равна 0.

**Def 9.3.** Говорят, что *торы иррациональны*, если  $(n = 2)$

$$\frac{\omega_1(I_1, I_2)}{\omega_2(I_1, I_2)} \neq \frac{n}{m}$$

что соответствует плотной<sup>5</sup> намотке тора.

**Def 9.4.** Система называется *изоэнергетически невырожденной*, если

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial \mathbf{I}^T \partial \mathbf{I}} & \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} \neq 0, \quad \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial \mathbf{I}^T} & \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega}^T & 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

<sup>3</sup>У Бродского было стихотворение «Конец прекрасной эпохи».

<sup>4</sup>Арнольд, Нейштат, Табор.

<sup>5</sup>Кстати, здесь начинает цвести эргодическая теория.



## 10 Хаос в гамильтоновых системах

Будем считать  $\varphi_1(0) = 0$ ,  $\varphi_2(0) = 0$ , а также

$$H = I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + \varepsilon(I_1 + \sum_{k_1, k_2} a_k \sin(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2)).$$

Тогда можем посчитать  $\dot{\varphi}_1 = \omega_1 + \varepsilon$ ,  $\varphi_2 = \omega_2$ . Также  $I_i$  такие, что

$$\dot{I}_i - \varepsilon \sum_{k_1, k_2} a_k k_i \cos(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2) = -\varepsilon \sum_{k_1, k_2} a_k k_i \cos(k_1(\omega_1 + \varepsilon) + k_2\omega_2)$$

Воот, невырожденно, но если  $\omega_1/\omega_2 + \varepsilon/\omega_2$  – рационально, то существуют  $k_1, k_2$  такие, что  $I_i \sim -\varepsilon a_k k_i t$ .

### 10.1 Сечение Пуанкаре при $n \geq 2$

Пусть  $n = 2$ , на  $M^4$ ,  $H(I_1, I_2) = h$ , также  $I_1, I_2 = \text{const}$ . Тогда можем рассмотреть

$$I_2 = I_2(h, I_1), \quad \dot{\varphi}_1 = \omega_1(h_1, I_1), \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2(h_1, I_1).$$

Так свели всё к  $M^3 = \{(I, \varphi) \mid H = h\}$ , более того, взяв  $t_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$  – период  $\varphi_2$ , перейдём к

$$\varphi_1(kt_2) = \varphi_1(0) + \frac{\omega_1}{\omega_2} 2\pi k,$$

получается, что каждый раз проходя  $\varphi_2$  по периоду, мы получаем набор точек. Ура, перешли к двумерному дискретному отображению.

Полезно посмотреть на  $\alpha(I_1) = \omega_1/\omega_2$  – *число вращений*. Если  $\alpha$  – рационально, то наблюдаем конечный набор точек. Если  $\alpha$  иррационально, то увидим несчётный набор точек.

### 10.2 Невозмущенное отображение Пуанкаре

**Def 10.1.** *Невозмущенное отображение Пуанкаре*<sup>6</sup> :

$$\Pi_0: \begin{cases} \varphi' = \varphi + 2\pi\alpha(I), \\ I' = I, \end{cases} \quad \frac{d\alpha}{dI} > 0, \quad - \text{ условие невырожденности.}$$

Также возьмём три тора  $T^-, T, T^+$  такие, что

$$\alpha(T^-) < \alpha(T) = \frac{n}{m} < \alpha(T^+).$$

Совершив конечное число отображений Пуанкаре увидим, что на  $T$  траектория замкнется. Тогда логично рассмотреть

$$\Pi_0^m \left( \begin{bmatrix} \varphi \\ I \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \varphi + 2\pi \frac{n}{m} m \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ I \end{bmatrix}$$

Вообще торы инварианты, после отображения Пуанкаре внешний тор закрутится против часовой, а внутренних – по часовой.

### 10.3 Возмущенное отображение Пуанкаре

**Def 10.2.** *Возмущенное отображение Пуанкаре*<sup>7</sup> :

$$\Pi_\varepsilon: \begin{cases} \varphi' = \varphi + 2\pi\alpha(I) + \varepsilon f(\varphi, I), \\ I' = I + \varepsilon g(\varphi, I), \end{cases} \quad \frac{d\alpha}{dI} > 0, \quad - \text{ условие невырожденности.}$$

Согласно КАМ-теории  $T^- \rightarrow T_\varepsilon^-, T^+ \rightarrow T_\varepsilon^+$ , более того они должны получиться инвариантны:

$$\Pi_\varepsilon(T_\varepsilon^+) = T_\varepsilon^+, \quad v(T_\varepsilon^-) = T_\varepsilon^-.$$

Вообще претендуем ещё на то что, не только торы не разрушатся, но и вращение будет в тех же направлениях.

Если сами резонансы разрушились, то, ну, бывает, но они всё ещё зажаты нерезонансными торами. Резонансному тору резко поплохело, образуется что-то вроде стохастического слоя.

Также всё существует, возможно единственная, точка на сечение, между внешним и внутренним тором, такая, что  $\varphi_1 = \varphi$ . Получается, можно выделить множество

$$C = \{(I, \varphi) \in \text{Сечение Пуанкаре} : \varphi' = \varphi\}.$$

Для него, однако, неверно, что  $\Pi_\varepsilon^m(C) = C'$ . Более того,  $C'$  и  $C$  пересекаются, пересекаются чётное число раз.

<sup>6</sup>Вообще  $\Pi_0$  – сохраняет площадь, то есть  $\partial(\varphi', I')/\partial(\varphi, I) = 1$ .

<sup>7</sup>Аналогично  $\Pi_\varepsilon$  – сохраняет площадь, то есть  $\partial(\varphi', I')/\partial(\varphi, I) = 1$ .

**Thr 10.3** (Последняя теорема Пуанкаре или теорема Пуанкаре-Биркгофа). *Если есть некоторое преобразование, которой совершает автоморфизм кольца, то существует как минимум две неподвижные точки. Вообще  $C \cap C' = 2kt$ .*

Пуанкаре действительно прислал эту теорему, бездоказательно, всё как обычно, и умер..

Есть неподвижные точки, это либо седло, либо центр. И вот в окрестностях центров возникают новые торы, фрактально самовоспроизводящиеся.

Давайте ещё скажем, что

$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{n}{m} \right| \geq \frac{C(\varepsilon)}{m^\gamma}, \quad \gamma > 2, \quad C(\varepsilon) \rightarrow_{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Тогда

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

называется диофантов вектор частот. Торы с таким отношением частот выживают, а другие разрушаются.

Если это всё просуммировать

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C(\varepsilon)}{m^\gamma} = C(\varepsilon) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\gamma-1}} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Так получается континуальное множество нулевой меры.

## 10.4 Размерность

Можем взять сетку, покрыть её 2d-объект, тогда

$$N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Аналогично для куба<sup>8</sup>  $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-3}$ , для прямой  $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-1}$ , так можем прийти к

$$N(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon^D}, \quad \ln N = -D \ln \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

**Def 10.4.** *Размерностью* множества будем считать

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \right).$$

## 10.5 Итоги

То есть что такое интегрируемость? Это про то что мы можем разделить переменные, можем систему представить как набор независимых маятников.

Да, стоит сказать, что у Гамильтоновых систем аттракторов быть не может, а вот у диссипативных систем возникают странные аттракторы и т.д.

МатАн немного плохо начинает работать на фракталах и пространствах дробной размерности. МатАна больше нет. Остался ТеорВер, Статистика, DataScience. Таков мир за пределами интегрируемости.

<sup>8</sup>Так для канторовой лестницы размерность  $D = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ .