

# ЗАБАВНЫЕ ФАКТЫ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

---

Источник: Чернова Н.И., Теория вероятностей

Авторы заметок: Хоружий Кирилл  
Примаков Евгений

От: 1 апреля 2021 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Основные понятия теории вероятностей</b>	<b>2</b>
1.1	Элементы комбинаторики . . . . .	2
1.2	События и операции над ними . . . . .	2
1.3	Дискретное пространство элементарных исходов . . . . .	2
1.4	Дискретное пространство элементарных исходов . . . . .	3
1.5	Геометрическая вероятность . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Аксиоматика теории вероятностей</b>	<b>4</b>
2.1	Алгебра и $\sigma$ -алгебра событий . . . . .	4
2.2	Мера и вероятностная мера . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Условная вероятность и независимость</b>	<b>5</b>
3.1	Условная вероятность . . . . .	5
3.2	Независимость событий . . . . .	6
3.3	Формула полной вероятности . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Случайные величины и их распределения</b>	<b>6</b>
4.1	Случайные Величины . . . . .	6

# 1 Основные понятия теории вероятностей

## 1.1 Элементы комбинаторики

Для начала подружмся с комбинаторикой, взяв некоторую её проекцию на теорвер

**Thr 1.1.** Пусть множества  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  состоит из  $k$  элементов, а множество  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$  – из  $m$  элементов. Тогда можно образовать равно  $k \cdot m$  пар  $(a_i, b_j)$ .

**Thr 1.2.** Общее количество различных наборов при выборе  $k$  элементов из  $n$  **без** возвращения и **с** учётом порядка равняется

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

где  $A_n^k$  называется числом размещений из  $n$  элементов по  $k$  элементов.

**Thr 1.3.** Общее количество различных наборов при выборе  $k$  элементов из  $n$  **без** возвращения и **без** учета порядка равняется

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где число  $C_n^k$  называется числом сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  элементов.

**Thr 1.4.** Общее количество различных наборов при выборе  $k$  элементов из  $n$  **с** возвращением и **без** учёта порядка равняется

$$C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}.$$

## 1.2 События и операции над ними

**Def 1.5.** Пространством элементарных исходов называют множество  $\Omega$ , содержащее все возможные взаимоисключающие результаты данного случайного эксперимента. Элементы множества  $\Omega$  называются *элементарными исходами* и обозначаются  $\omega$ .

**Def 1.6.** Событиями называются подмножества  $\Omega$ . Говорят, что *произошло событие*  $A$ , если эксперимент завершился одним из элементарных исходов, входящих в множество  $A$ .

Вообще в силу таких определений события и множества оказываются очень похожими, так что определены операции *объединения*, *пересечения*, *дополнения*, а также взятия *противоположенного*  $\bar{A} = \Omega \setminus A$ . Также можно выделить достоверное событие  $\Omega$  и невозможное  $\emptyset$ .

События  $A$  и  $B$  называются *несовместными*, если они не могут произойти одновременно:  $A \cap B = \emptyset$ . События  $A_1, \dots, A_n$  называются *попарно несовместными*, если несовместны любые два из них:  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $\forall i \neq j$ . Говорят, что событие  $A$  *влечёт* событие  $B$  ( $A \subseteq B$ ), если  $A \Rightarrow B$ .

## 1.3 Дискретное пространство элементарных исходов

Пространство элементарных исходов назовём дискретным, если множество  $\Omega$  конечно или счётно:  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n, \dots\}$ .

**Def 1.7.** Сопоставим каждому элементарному исходу  $\omega_i$  число  $p_i \in [0, 1]$  так, чтобы  $\sum p_i = 1$ . Вероятностью события  $A$  называют число

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i,$$

где в случае  $A = \emptyset$  считаем  $P(A) = 0$ .

**Def 1.8** (Классическое определение вероятности). Говорят, что эксперимент описывается *классической вероятностной моделью*, если пространство его элементарных исходов состоит из конечного числа равновероятных исходов. Для любого события верно, что

$$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}. \quad (1.1)$$

Эту формулу называют *классическим определением вероятности*.

Тут стоит вспомнить три схемы из модели с урнами: схема выбора с возвращением и с учётом порядка ( $n^k$ ), выбора без возвращения и с учётом порядка ( $A_n^k$ ), а также выбора без возвращения и без учёта порядка ( $C_n^k$ ), описываются классической вероятностной моделью. А вот схема выбора с возвращением и без учёта порядка уже не описывается классической вероятностью.

### Пример с гипергеометрическим распределением

Из урны, в которой  $K$  белых и  $N - K$  чёрных шаров, наудачу и без возвращения вынимают  $n$  шаров, где  $n \leq N$ . Термин «наудачу» означает, что появление любого набора из  $n$  шаров равновозможно. Найти вероятность того, что будет выбрано  $k$  белых и  $n - k$  чёрных шаров.

Результат – набор из  $n$  шаров. Общее число  $\text{card } \Omega = C_N^n$ . Пусть  $A_k$  – событие, состоящее в том, что в наборе окажется  $k$  белых и  $n - k$  черных. Есть ровно  $C_K^k$  способов выбрать  $k$  белых шаров из  $K$ , и  $C_{N-K}^{n-k}$  способов выбрать  $n - k$  черных шаров из  $N - K$ . Тогда  $\text{card } A_k = C_K^k C_{N-K}^{n-k}$ ,

$$P(A_k) = \frac{\text{card } A_k}{\text{card } \Omega} = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Этот набор вероятностей называется *гипергеометрическим распределением* вероятностей.

## 1.4 Дискретное пространство элементарных исходов

Пространство элементарных исходов назовём дискретным, если множество  $\Omega$  конечно или счётно:  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n, \dots\}$ .

**Def 1.9.** Сопоставим каждому элементарному исходу  $\omega_i$  число  $p_i \in [0, 1]$  так, чтобы  $\sum p_i = 1$ . Вероятностью события  $A$  называют число

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i,$$

где в случае  $A = \emptyset$  считаем  $P(A) = 0$ .

**Def 1.10** (Классическое определение вероятности). Говорят, что эксперимент описывается *классической вероятностной моделью*, если пространство его элементарных исходов состоит из конечного числа равновозможных исходов. Для любого события верно, что

$$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}. \quad (1.2)$$

Эту формулу называют *классическим определением вероятности*.

Тут стоит вспомнить три схемы из модели с урнами: схема выбора с возвращением и с учётом порядка ( $n^k$ ), выбора без возвращения и с учётом порядка ( $A_n^k$ ), а также выбора без возвращения и без учёта порядка ( $C_n^k$ ), описываются классической вероятностной моделью. А вот схема выбора с возвращением и без учёта порядка уже не описывается классической вероятностью.

### Пример с гипергеометрическим распределением

Из урны, в которой  $K$  белых и  $N - K$  чёрных шаров, наудачу и без возвращения вынимают  $n$  шаров, где  $n \leq N$ . Термин «наудачу» означает, что появление любого набора из  $n$  шаров равновозможно. Найти вероятность того, что будет выбрано  $k$  белых и  $n - k$  чёрных шаров.

Результат – набор из  $n$  шаров. Общее число  $\text{card } \Omega = C_N^n$ . Пусть  $A_k$  – событие, состоящее в том, что в наборе окажется  $k$  белых и  $n - k$  черных. Есть ровно  $C_K^k$  способов выбрать  $k$  белых шаров из  $K$ , и  $C_{N-K}^{n-k}$  способов выбрать  $n - k$  черных шаров из  $N - K$ . Тогда  $\text{card } A_k = C_K^k C_{N-K}^{n-k}$ ,

$$P(A_k) = \frac{\text{card } A_k}{\text{card } \Omega} = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Этот набор вероятностей называется *гипергеометрическим распределением* вероятностей.

## 1.5 Геометрическая вероятность

**Def 1.11.** Пусть некоторая область  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  такая, что  $\mu(\Omega)$  конечна. Пусть эксперимент состоит из равновероятного выбора случайной точки в области  $\Omega$ . *Геометрическое определение вероятности:*

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Если для точки выполнены условия геометрического определения, то говорят, что точка *равномерно распределена* в  $\Omega$ .

## 2 Аксиоматика теории вероятностей

### 2.1 Алгебра и $\sigma$ -алгебра событий

**Def 2.1.** Множество  $\mathcal{A}$ , элементами которого являются некоторые подмножества  $\Omega$  называют *алгеброй*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- A1)  $\Omega \in \mathcal{A}$  (алгебра содержит достоверные события);
- A2) если  $A \in \mathcal{A}$ , то  $\bar{A} \in \mathcal{A}$  (вместе с любым множеством алгебра содержит противоположное к нему);
- A3) если  $A \in \mathcal{A}$  и  $B \in \mathcal{A}$ , то  $A \cup B \in \mathcal{A}$  (вместе с любыми двумя множествами алгебра содержит их объединение).

Вообще из A1 и A2 следует, что  $\emptyset = \bar{\Omega} \in \mathcal{A}$ . Пункт A3 экстраполируется на любой конечный набор. Кстати, объединение можно заменить (в силу закона де Моргана) на пересечение:

$$xy \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \overline{xy} \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \bar{x} + \bar{y} \in \mathcal{A}.$$

**Thr 2.2** (закон де Моргана). Для множеств  $x, y$  верно, что

$$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}, \quad \overline{xy} = \bar{x} + \bar{y},$$

где  $xy = x \cap y$ ,  $x + y = x \cup y$ .

В случае счётного пространства элементарных исходов A3 алгебры оказывается недостаточно, так приходим к  $\sigma$ -алгебре:

**Def 2.3.** Множество  $\mathcal{F}$ , элементами которого являются некоторые подмножества  $\Omega$  называется  $\sigma$ -алгеброй, если выполнены следующие условия:

- S1)  $\Omega \in \mathcal{F}$  (алгебра содержит достоверные события);
- S2) если  $A \in \mathcal{F}$ , то  $\bar{A} \in \mathcal{F}$  (вместе с любым множеством алгебра содержит противоположное к нему);
- S3) если  $\{A_i\} \in \mathcal{F}$ , то  $\cup_i A_i \in \mathcal{F}$  (вместе с любым *счётным* набором событий  $\sigma$ -алгебра содержит их объединение).

**Def 2.4.** Минимальной  $\sigma$ -алгеброй, содержащей набор множеств  $\mathcal{U}$ , называется пересечение всех  $\sigma$ -алгебр, содержащих  $\mathcal{U}$ .

**Def 2.5.** Минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая множество  $\mathcal{U}$  всех интервалов на вещественной прямой называется *борелевской сигма-алгеброй* в  $\mathbb{R}$  и обозначается  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ .

Итак, оказался определен специальный класс  $\mathcal{F}$  подмножеств  $\Omega$ , названный  $\sigma$ -алгеброй событий. Применение счетного числа любых операций к множествам из  $\mathcal{F}$  снова дает множество из  $\mathcal{F}$ . *Событиями* будем называть только множества  $A \in \mathcal{F}$ .

### 2.2 Мера и вероятностная мера

**Def 2.6.** Пусть  $\Omega$  – некоторое непустое множество  $\mathcal{F}$  –  $\sigma$ -алгебра его подмножеств. Функция

$$\mu: \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R} \cap [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

называется *мерой* на  $(\Omega, \mathcal{F})$ , если она удовлетворяет условиям

- $\mu_1)$   $\mu(A) \geq 0$  для любого множества  $A \in \mathcal{F}$ ;
- $\mu_2)$   $\forall$  счетного  $\{A_i\} \in \mathcal{F}$  таких, что  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $\forall i \neq j$  мера их объединения равна сумме их мер:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Последнее свойство называют *счётной аддитивностью* или  $\sigma$ -аддитивностью меры.

**Thr 2.7** (свойство непрерывности меры). Пусть дана убывающая последовательность  $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$  множеств из  $\mathcal{F}$ , причем  $\mu(B_1) < \infty$ . Пусть  $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ . Тогда  $\mu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$ .

**Def 2.8.** Пусть  $\Omega$  – непустое множество,  $\mathcal{F}$  –  $\sigma$ -алгебра его подмножеств. Мера  $\mu: \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$  называется *нормированной*, если  $\mu(\Omega) = 1$ . Другое название нормированной меры – *вероятность*.

**Def 2.9.** Пусть  $\Omega$  – пространство элементарных исходов,  $\mathcal{F}$  –  $\sigma$ -алгебра его подмножеств (событий). *Вероятностью* или *вероятностной мерой* на  $(\Omega, \mathcal{F})$  называется функция

$$P: \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$$

обладающая свойствами

P1)  $P(A) \geq 0$  для любого события  $A \in \mathcal{F}$ ;

P2) для любого счётного набора *попарно несовместных* событий  $\{A_i\} \in \mathcal{F}$  имеет равенство

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k);$$

P3) вероятность достоверного события равна единице:  $P(\Omega) = 1$ .

Свойства (P1) – (P3) называют *аксиомами вероятности*.

**Def 2.10.** Тройка  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , в которой  $\Omega$  – пространство элементарных исходов,  $\mathcal{F}$  –  $\sigma$ -алгебра его подмножеств и  $P$  – вероятная мера на  $\mathcal{F}$ , называется *вероятностным пространством*.

Вообще, для вероятности верны следующие свойства

1.  $P(\emptyset) = 0$ .
2. Для любого конечного набора попарно несовместных событий  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  имеет место равенство  $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$ .
3.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .
4. Если  $A \subseteq B$ , то  $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ .
5.  $A \subseteq B$ , то  $P(A) \leq P(B)$ .
6.  $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$ .

И это всё, конечно, хорошо, но если мы хотим что-то посчитать, то

**Thr 2.11** (Формула включения-исключения). Для вероятности, в частности для двух событий, верно, что

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

и, обобщая, для объединения  $n$  множеств

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \sum_{i < j < m} P(A_i A_j A_m) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n).$$

## 3 Условная вероятность и независимость

### 3.1 Условная вероятность

**Def 3.1.** Условной вероятностью события  $A$  при условии, что произошло событие  $B$ , называется число

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

которое само собой определено только при  $P(B) > 0$ .

**Thr 3.2.** Если  $P(B) > 0$  и  $P(A) > 0$ , то

$$P(A \cap B) = P(B) P(A|B) = P(A) P(B|A).$$

**Thr 3.3.** Для любых событий  $A_1, \dots, A_n$  верно равенство:

$$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}),$$

если все участвующие в нём условные вероятности определены.

### 3.2 Независимость событий

**Def 3.4.** События  $A$  и  $B$  называются *независимыми*, если  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

Из этого определения вытекают следующие леммы.

**Lem 3.5.** Пусть  $P(B) > 0$ . Тогда события  $A$  и  $B$  независимы тогда и только, когда  $P(A|B) = P(A)$ .

**Lem 3.6.** Пусть  $A$  и  $B$  несовместны. Тогда независимыми они будут только в том случае, если  $P(A) = 0$  или  $P(B) = 0$ .

Другими словами несовместные события не могут быть независимыми. Зависимость между ними – просто причинно-следственная: если  $A \cap B = \emptyset$ , то  $A \subseteq \bar{B}$ , т.е. при выполнении  $A$  события  $B$  не происходит.

**Lem 3.7.** Если события  $A$  и  $B$  независимы, то независимы и события  $A$  и  $\bar{B}$ ,  $\bar{A}$  и  $B$ ,  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$ .

**Def 3.8.** События  $A_1, \dots, A_n$  называются *независимыми в совокупности*, если для любого  $1 \leq k \leq n$  и любого набора различных меж собой индексов  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  имеет место равенство

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}).$$

### 3.3 Формула полной вероятности

**Def 3.9.** Конечный или счётный набор попарно несовместных событий  $\{H_i\}$  таких, что  $P(H_i) > 0 \forall i$  и  $\cup_i H_i = \Omega$ , называется *полной группой событий* или разбиением пространства  $\Omega$ . Также события, образующие полную группу событий, часто называют *гипотезами*.

При подходящем выборе гипотез для любого события  $A$  могут быть сравнительно просто вычислены  $P(A|H_i)$  и, собственно,  $P(H_i)$ . Как посчитать вероятность события  $A$ ?

**Thr 3.10** (формула полной вероятности). Пусть дана полная группа событий  $\{H_i\}$ . Тогда вероятность любого события  $A$  может быть вычислена по формуле

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) \cdot P(A|H_i).$$

## 4 Случайные величины и их распределения

### 4.1 Случайные Величины