

ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА II»

Авторы: Хоружий Кирилл

От: 26 февраля 2021 г.

Содержание

1	Первое задание по аналитической механике.	2
1.1	Малые колебания консервативных систем (✓)	2
1.2	Диссипативные системы и вынужденные колебания	4
1.3	Элементы теории бифуркаций в нелинейных системах	9
1.4	Метод усреднения и метод нормальных форм в теории нелинейных колебаний	12

1 Первое задание по аналитической механике.

1.1 Малые колебания консервативных систем (✓)

16.11

Введём ось OX координат вдоль туннеля, выбрав в качестве $x = 0$ положение равновесия. Тогда кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2.$$

Интегрируя силу, действующую на тело, находим потенциальную энергию

$$F_x = -\frac{GM(x)m}{r^2(x)} \cdot \frac{x}{r} = -G\kappa x, \quad \frac{G\kappa R^3}{R^2} = g, \quad \Rightarrow \quad \Pi = \int F dx = \frac{1}{2} \frac{g}{R} x^2.$$

Так удачно вышло, что T и Π – квадратичные формы. Запишем вековое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{g}{R}, \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

16.33

Выбрав оси, как показано на рисунке, получим систему с 2 степенями свободы. Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2).$$

Потенциальная энергия для трёх пружинок (сдвинутая так, чтобы положение равновесия был 0)

$$\Pi = \frac{c}{2} (x_2)^2 + \frac{c}{2} (x_1)^2 + \frac{2c}{2} (x_2 - x_1)^2.$$

И снова так вышло, что T и Π – квадратичные формы, так что

$$\det \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^j} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \det \left[c \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \lambda m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0, \quad \Rightarrow \quad (\lambda m)^2 + 9c^2 - 6\lambda mc - 4c^2 = 0.$$

Соответственно находим квадраты частот

$$\lambda^2 - 6\lambda \frac{c}{m} + 5 \frac{c^2}{m^2} = \left(\lambda_1 - \frac{c}{m} \right) \left(\lambda_2 - 5 \frac{c}{m} \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 : (-2c \quad 2c) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 & \Rightarrow \quad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \lambda_2 : (2c \quad 2c) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 & \Rightarrow \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Соответственно, уравнение движения будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin \left(\sqrt{\frac{c}{m}} t + \alpha_1 \right) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin \left(\sqrt{\frac{5c}{m}} t + \alpha_2 \right).$$

16.47

Запишем с учётом малости колебаний кинетическую энергию системы

$$T = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} (l \dot{\varphi}_2 + l \dot{\varphi}_1)^2.$$

И, опять же, с учетом малости, потенциальную

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{c}{2} ((l\varphi_1)^2 + (l\varphi_1 + l\varphi_2)^2) + mgl \cos \varphi_1 + mgl (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) = \\ &= \frac{c}{2} ((l\varphi_1)^2 + (l\varphi_1 + l\varphi_2)^2) + 2mgl \left(1 - \frac{\varphi_1^2}{2} \right) + mgl \left(1 - \frac{\varphi_2^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Как обычно, получив квадратичные формы (хотя бы в малом приближение) радуемся и переходим к поиску частот собственных колебаний

$$\det \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^j} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \det \left[\begin{pmatrix} 2cl^2 - 2mgl & cl^2 \\ cl^2 & cl^2 - mgl \end{pmatrix} - \lambda ml^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0.$$

Раскрыв, получаем уравнение вида

$$2[(cl^2 - ml^2\lambda] - mgl)^2 - [cl^2 - ml^2\lambda]^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{2}mgl}{\sqrt{2} \pm 1} = [cl^2 - ml^2\lambda], \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{c}{m} - 2\frac{g}{l} \mp \sqrt{2}\frac{g}{l}.$$

Теперь подставляем известные λ , и находим амплитудные векторы

$$\begin{aligned}\lambda_1 : (2 + 2\sqrt{2} \quad 2 + \sqrt{2}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 & \Rightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}; \\ \lambda_2 : (2 - 2\sqrt{2} \quad 2 - \sqrt{2}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 & \Rightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Это позволяет нам записать уравнение движения малых колебаний (при $c/m > (2 + \sqrt{2})g/l$)

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sin \left(\sqrt{\frac{c}{m} - (2 + \sqrt{2}) \frac{g}{l}} t + \alpha_1 \right) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \sin \left(\sqrt{\frac{c}{m} - (2 - \sqrt{2}) \frac{g}{l}} t + \alpha_2 \right).$$

16.64

Запишем кинетическую энергию системы

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{nm}{2} \dot{x}_2^2.$$

И, считая 0 в положении равновесия, потенциальную энергию системы, запасенную в сжатых пружинах

$$\Pi = \frac{c}{2} (x_2 - x_1)^2 + \frac{c}{2} (x_3 - x_2)^2.$$

В таком случае

$$\det \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^j} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \det \left[c \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0.$$

Раскрывая, приходим у уравнению на λ вида

$$\lambda_1 \left(\lambda_2 - \frac{c}{m} \right) \left(\lambda_3 - \frac{(2+n)c}{nm} \right) = 0.$$

Соответственно, амплитудные векторы находим, как

$$\begin{aligned}\lambda_1 : \begin{pmatrix} -c & 2c & -c \\ c & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 & \Rightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \lambda_2 : \begin{pmatrix} c & 2c - nc & c \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 & \Rightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \lambda_3 : \begin{pmatrix} c & nc & c \\ 0 & c & 2c/n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 & \Rightarrow \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} n \\ -2 \\ n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Что ж, уравнение движения малых колебаний запишется в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (C_1 t + \alpha_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin \left(\sqrt{\frac{c}{m}} t + \alpha_2 \right) + C_3 \begin{pmatrix} n \\ -2 \\ n \end{pmatrix} \sin \left(\sqrt{\frac{(n+2)c}{nm}} t + \alpha_3 \right).$$

16.107

Знаем, что кинетическая энергия и обобщенные силы для системы могут быть записаны в виде¹

$$T = \frac{1}{2} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad Q_i = b_{ik} \dot{q}_k,$$

где a_{ik} – положительно определенная квадратичная форма, а $b_{ik} = -b_{ki}$ – кососимметричная квадратичная форма.

Запишем уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad \Rightarrow \quad a_{ik} \ddot{q}_k = b_{i\alpha} \dot{q}_\alpha.$$

Осталось этот набор уравнений решить.

Воспользуемся алгоритмом приведения двух квадратичных форм к каноническому виду. Выберем в качестве скалярного произведения a_{ik} , в терминах a_{ik} выберем ортогональный базис так, чтобы a_{ik} было равно δ_{ik} .

¹С глубоким сожалением вынуждены оставить баланс индексов в рамках этой задачи. Немое суммирование подразумевается, при повторении индексов.

Повернём через u_{ik} базис, приведя b_{ik} к каноническому виду b_{jl}^* , указанному в условии с m блоков 2×2 .

$$\begin{cases} \delta_{ik} \ddot{q}_k = b_{i\alpha} \dot{q}_\alpha, \\ u_{kj} q_j^* = q_k \end{cases} \Rightarrow u_{li}^{-1} \cdot \left(\delta_{ik} u_{kj} q_j^* = b_{i\alpha} u_{\alpha\beta} q_\beta^* \right) \stackrel{\square i=1}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1^* \\ \ddot{q}_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1^* \\ \dot{q}_2^* \end{pmatrix}.$$

И таких систем с колебаниями у нас будет m штук

$$\begin{cases} \ddot{q}_1^* = -\nu \dot{q}_2^* \\ \ddot{q}_2^* = -\nu \dot{q}_1^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1^* = -\nu \dot{q}_2^* \\ \ddot{q}_2^* = -\nu \dot{q}_1^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_1^* = \frac{A}{\nu} \cos(\nu t + \alpha) + C_1 \\ \dot{q}_2^* = \frac{A}{\nu} \sin(\nu t + \alpha) + C_2. \end{cases}$$

Нули же в каноническом виде b_{ij} будут соответствовать трансляциям

$$q^* = At + B.$$

Собирая всё вместе, находим, что

$$q_\alpha = u_{\alpha i} q_i^*, \quad q_i^* = \begin{cases} (A_j / \nu_j) \cdot \cos(\nu_j t + \alpha_j) + B_{2j-1} & \text{при } i = 2j - 1 \leq 2m; \\ (A_j / \nu_j) \cdot \sin(\nu_j t + \alpha_j) + B_{2j} & \text{при } i = 2j \leq 2m; \\ (A_j) \cdot t + B_j & \text{при } i = j > 2m. \end{cases}$$

1.2 Диссипативные системы и вынужденные колебания

17.11 (a)

Известно, что система описывается, как

$$\begin{cases} \ddot{x} + \ddot{x} + x - \alpha y = 0 \\ \ddot{y} + \dot{y} - \beta x + y = 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad A = B = E, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда запишем уравнение на собственные числа

$$\det(A\lambda^2 + B\lambda + C) = \det \begin{vmatrix} \lambda^2 + \lambda + 1 & -\alpha \\ -\beta & \lambda^2 + \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0,$$

Раскрывая,

$$(\lambda^2 + \lambda + 1)^2 + \beta\alpha = (\lambda^2 + \lambda + 1 - i\gamma)(\lambda^2 + \lambda + 1 + i\gamma) = 0.$$

Получается, что

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{\pm 4i\gamma - 3} \right),$$

где введено обозначение $\gamma = \sqrt{\beta\alpha}$. По теореме об асимптотической устойчивости достаточно, чтобы $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, соответственно найдём все γ удовлетворяющие этому условию.

Пусть $\alpha \cdot \beta < 0$, тогда $\gamma = i\sqrt{|\alpha\beta|}$, или

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-1 \pm \sqrt{\mp 4\kappa - 3} \right), \quad \Rightarrow \quad |4\kappa - 3| < 1, \quad \Rightarrow \quad |\kappa| = |\alpha\beta| < 1,$$

где было введено обозначение $\kappa = |\alpha\beta|$.

При $\alpha \cdot \beta > 0$ верно, что $\gamma = \kappa^2$, тогда

$$\operatorname{Re} \sqrt{z} = \operatorname{Re} \left(\sqrt{|z|} \cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi k \right) \right) < 0, \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a^2 + b^2} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) < 1,$$

где комплексное число под корнем было представлено как $a + ib$. Тогда

$$\sqrt{9 + 4\kappa^2} - 3 < 2, \quad \Rightarrow \quad 9 + 16\kappa^2 < 5, \quad \Rightarrow \quad |\alpha\beta| < 1.$$

Получается достаточным условием асимптотической устойчивости является условие $|\alpha\beta| < 1$.

17.8

Ниже представлено решение прикольной задачи по линейной алгебре, и отсутствует доказательное решение. По-хорошему можно просто записать функцию Ляпунова, как в ответах, и всё. Диссипация не является полной в этой системе.

Для начала рассмотрим систему, в которой нижний грузик привязан к полу пружинкой жесткости $c_{n+1} = 0$, так матрица для потенциальной энергии станет немного симметричнее.

Выберем в качестве координат положения грузиков, где $q^i = 0$ соответствует положению равновесия i -го груза. Запишем потенциальную энергию системы

$$2\Pi = c_1 q_1^2 + c_2 (q_1 - q_2)^2 + \dots + c_n (q_n - q_{n-1})^2 + c_{n+1} q_{n+1}^2.$$

Тогда матрица потенциальной энергии C примет вид

$$C_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^j}, \quad \Rightarrow \quad C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & & \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 & \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & & \\ & 0 & & \ddots & -c_n \\ & & & -c_n & c_n + c_{n+1} \end{pmatrix}$$

Запишем уравнение Лагранжа второго рода, и рассмотрим систему в линейном приближении

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q_i, \quad \Rightarrow \quad A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = A\ddot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + C\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q} = -B\dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = -\beta \dot{q}_n^2.$$

Получается, что диссипация является полной, а значит имеет смысл вспомнить теорему о добавлении в систему диссипативных сил с полной диссипацией.

Thr 1.1 (Теорема Томсона-Тэта-Четаева). *Если в некотором изолированном положении равновесия потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией (и/или гироскопических) это положение равновесия становится асимптотически устойчивым.*

По теореме Лагранжа-Дирихле положение равновесия $\mathbf{q} = 0$ устойчиво, если в положение равновесия достигается локальный минимум потенциала Π . Получается остается показать, что матрица C положительно определена, или, по критерию Сильвестра, что все угловые миноры Δ_i матрицы C положительны.

Посчитав несколько миноров ручками, приходим к виду Δ_i , которое докажем по индукции.

$$\text{Предположение: } \Delta_n = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j$$

$$\text{База: } \Delta_2 = \det \begin{vmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{vmatrix} = c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_1 c_3 = \sum_{i=1}^{2+1} \frac{1}{c_i} \left(\prod_{j=1}^{2+1} c_j \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Переход: } \Delta_{n+1} &\stackrel{(I)}{=} (c_{n+1} + c_{n+1})\Delta_n - c_{n+1}^2 \Delta_{n-1} = \\ &= c_{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j + c_{n+2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j - c_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^n c_j = \\ &= c_{n+2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j + c_{n+1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j + \frac{1}{c_{n+1}} \prod_{j=1}^{n+1} c_j \right) - c_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^n c_j = \\ &\stackrel{(II)}{=} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+2} c_j + \frac{1}{c_{n+2}} \prod_{j=1}^{n+2} c_j = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+2} c_j, \quad \text{Q. E. D.} \end{aligned}$$

Действительно, первый переход (I) получается, раскрытием определителя Δ_{n+1} по нижней строчке. В переходе (II) были сделаны замены, вида

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j = c_{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^n c_j; \quad \prod_{j=1}^{n+1} c_j = \frac{1}{c_{n+2}} \prod_{j=1}^{n+2} c_j; \quad c_{n+2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+2} c_j.$$

Полученная формула для Δ_n ясно даёт понять, что $\Delta_i > 0$ для $i = 1, \dots, n$, что доказывает положительную определенность C , а значит и локальный минимум потенциала Π достигается в положение равновесия $\mathbf{q} = 0$.

Таким образом выполняются условия теоремы Лагранжа-Дирихле, как и условия теоремы Томсона-Тэта-Четаева, а значит положение равновесия $\mathbf{q} = 0$ является асимптотически устойчивым.

17.20

Запишем систему в матричном виде

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = 0,$$

и воспользуемся теоремой Ляпунова об асимптотической устойчивости. Действительно, существует функция, такая, что

$$V = E = T + \Pi = \frac{1}{2}a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + \frac{1}{2}c_{\alpha\beta}q^\alpha q^\beta > 0.$$

В силу уравнений движения

$$\frac{dE}{dt} = a_{ij}\ddot{q}^i\dot{q}^j + c_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha q^\beta = -b_\gamma(\dot{q}^\gamma) < 0,$$

из чего следует асимптотическая устойчивость системы.

17.28

Есть некоторая система такая, что

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = \alpha_1(x^2 - x^1), \\ \dot{x}^2 = \alpha_2(x^3 - x^2), \\ \dots \\ \dot{x}^n = \alpha_n(x^1 - x^n) \end{cases}$$

и снова найдём функцию Ляпунова, например, V вида

$$2V = \frac{1}{\alpha_1}(x_1 - a)^2 + \frac{1}{\alpha_2}(x_2 - a)^2 + \dots + \frac{1}{\alpha_n}(x_n - a)^2,$$

тогда, в силу уравнений системы,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\dot{x}_1}{\alpha_1}(x_1 - a) + \dots + \frac{\dot{x}_n}{\alpha_n}(x_n - a) = (x_1 - a)(x_2 - x_1) + \dots + (x_n - a)(x_1 - x_n) = \\ &= -\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} + x_n x_1 = -\frac{1}{2}(x_n^2 - 2x_n x_1 + x_1^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1})^2 < 0, \end{aligned}$$

аналогично №17.20, по теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости, положение равновесия системы асимптотически устойчиво.

18.17

Известно что на груз действуют две силы

$$F_1(t) = A_1 \sin \omega_1 t, \quad F_2(t) = A_2 \cos \omega_2 t,$$

и сопротивление среды $F = -\beta v$.

Запишем кинетическую и потенциальную энергию системы

$$T = \frac{m}{2}\dot{q}^2, \quad \Pi = \frac{c}{2}q^2.$$

Из уравнений Лагранжа второго рода находим

$$m\ddot{q} + \beta\dot{q} + cq = F_1 + F_2 = A \sin(\omega_1 t) + B \cos(\omega_2 t).$$

Для начала найдём собственные колебания системы

$$m\lambda^2 + \beta\lambda + c = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4mc}}{2m}.$$

Найдём теперь частные решения для вынужденных колебаний, в виде

$$q = \alpha_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \alpha_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2),$$

подставляя в уравнения движения получаем, что (рассмотрим ω_1 , для ω_2 рассуждения аналогичны)

$$\sin(\omega_1 t + \varphi_1)(x - m\omega_1^2) + \cos(\omega_1 t + \varphi_1)\omega_1\beta = \frac{A}{\alpha_1} \sin \omega_1 t, \quad \Rightarrow \quad \sin(\omega_1 t + \varphi_1 + \varkappa) = \frac{A}{\alpha_1} \frac{\sin \omega_1 t}{\sqrt{(c - m\omega_1^2)^2 + \beta^2\omega_1^2}},$$

где \varkappa такая, что

$$\cos \varkappa = \frac{c - m\omega_1^2}{\sqrt{(\omega_1\beta)^2 + (c - m\omega_1^2)^2}}.$$

Сравнивая выражения, находим константы

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\varkappa_1 \\ \varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \varkappa_2 \end{cases} \quad \alpha_i(\omega_i) = \frac{A_i}{\sqrt{(m\omega_i - c)^2 + \omega_i^2\beta^2}},$$

и подставляем в ответ

$$q = \alpha_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \alpha_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2).$$

18.31

И снова запишем кинетическую и потенциальную энергию системы, как

$$T = \frac{1}{2} J (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2), \quad \Pi = \frac{c}{2} \varphi_1^2 + \frac{c}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2.$$

Из уравнений Лагранжа второго рода перейдём к систем²

$$\begin{aligned} J\ddot{\varphi}_1 + c(2\varphi_1 - \varphi_2) &= M_0 \sin \omega t \\ J\ddot{\varphi}_2 + \beta\dot{\varphi}_2 + c(\varphi_2 - \varphi_1) &= 0. \end{aligned}$$

Искать собственные числа здесь оказалось плохой идеей, так что просто будем искать решение в виде

$$\varphi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}.$$

Для первого слагаемого

$$\begin{cases} -J\omega^2 a_1 + ca_1 - ca_2 = \mathcal{M} \\ -J\omega^2 a_2 + \beta i\omega a_2 + ca_2 - ca_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(c - J\omega^2) - ca_2 = \mathcal{M} \\ a_2(c - J\omega^2 + i\beta\omega) = ca_1 \end{cases}$$

Для второго слагаемого

$$\begin{cases} -J\omega^2 b_1 + cb_1 - cb_2 = -\mathcal{M} \\ -J\omega^2 b_2 - \beta i\omega b_2 + cb_2 - cb_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{b_2}{c} (c - J\omega^2 - i\beta\omega) \\ b_2 \left(\frac{c - J\omega^2}{c} (c - J\omega^2 + i\beta\omega - c) \right) = -\mathcal{M} \end{cases},$$

где $\mathcal{M} = M_0/(2i)$. Также хочется ввести некоторые постоянные

$$\varkappa = \frac{c - J\omega^2}{c} (c - J\omega^2 + i\beta\omega) - c, \quad \xi = \frac{c - J\omega^2}{c} (c - J\omega^2 + i\beta\omega - c), \quad \eta =$$

тогда получим хорошие выражения для искоемых переменных

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\mathcal{M}}{\varkappa} \frac{c - J\omega^2 + i\beta\omega}{c} \\ a_2 = \frac{\mathcal{M}}{\varkappa} \end{cases}, \quad \begin{cases} b_1 = -\frac{\mu}{\xi} \frac{c - J\omega^2 - i\beta\omega}{c} \\ b_2 = -\frac{\mu}{\xi} \end{cases}.$$

Теперь их можно поставить в решение уравнения и получить ответ:

$$\varphi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}.$$

18.37

Момент инерции стержня $J = \frac{1}{3} ml^2$, тогда, считая отклонения малыми, кинетическую и потенциальную энергию системы можем записать, как

$$T = \frac{1}{2} J (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2), \quad \Pi = \frac{1}{2} c(\varphi a - \psi a)^2 + \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} + 1 - \frac{\psi^2}{2}\right) mg \frac{l}{2}.$$

Переходя в СО движущейся платформы, к системе добавляется инерциальная сила

$$M = \frac{mA}{2} \sin(\omega t) \omega^2 l,$$

действующая на центры масс стержней.

С помощью уравнений Лагранжа второго рода переходим к уравнениям вида

$$A\ddot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = M, \quad A = J \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a^2 c + mgl & -2ca^2 \\ -2ca^2 & 2a^2 c + mgl \end{pmatrix}$$

Из векового уравнения теперь можем найти собственные частоты системы, для получения однородного решения

$$\det(C - \lambda A) = 0, \Rightarrow \left(mg \frac{l}{2} - J\lambda \right) \left(a^2 c + mg \frac{l}{2} - J\lambda \right) = 0,$$

²Тут при решении была потеряна **двойка**, выделенная красным цветом, но перерешивать как-то грустно.

откуда легко находим λ

$$\lambda_1 = \frac{3}{2} \frac{g}{l}, \quad , \quad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l} + \frac{6ca^2}{ml^2}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

из которых уже можем составить ФСР.

Теперь перейдём к поиску частного решения³:

$$\varphi = \alpha \sin(\omega t), \psi = \beta \sin(\omega t), \quad \Rightarrow \quad -A\omega^2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{mA\omega^2 l}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

вводя матрицу

$$\Lambda = C - A\omega^2, \quad \Rightarrow \quad \Lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{mA\omega^2 l}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \frac{mA\omega^2 l}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Считая Λ^{-1} , находим частное решение и получаем ответ

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \frac{3A\omega^2}{3g - 2l\omega^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\omega t) + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{3}{2} \frac{g}{l}} t + \alpha_1\right) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{3}{2} \frac{g}{l} + \frac{6ca^2}{ml^2}} t + \alpha_2\right).$$

18.62

Известно, что кинетическая и потенциальная энергия системы могут быть записаны, как

$$T = \frac{1}{2} a_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k, \quad \Pi = \frac{1}{2} c_{ik} q^i q^k.$$

С помощью уравнений Лагранжа второго рода можем перейти к системе

$$A\ddot{\mathbf{q}} + C\dot{\mathbf{q}} = A\mathbf{u}_1 \gamma \sin(\omega t).$$

Так как A, C – (невырожденные) положительно-определенные симметричные квадратичные формы, то они во-первых обратимы, а во вторых коммутируют (т.к. одновременно приводятся к диагональному виду), а значит и $A^{-1}C$ симметрична, соответственно имеет ортогональный базис.

Собственно, известно, что

$$\begin{cases} \det(C - \lambda_i A) = 0 \\ (C - \lambda_i A)\mathbf{u}_i = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}C\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i.$$

Перейдём к базису из собственных векторов (и переменным θ), тогда уравнения примут вид

$$\ddot{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \gamma \sin(\omega t).$$

Так как резонанс возможен только на собственных частотах системы, и $\lambda_1 = \omega_1^2$, то единственная частота, на которой возможен резонанс равна ω_1 .

³Так как по условию φ и ψ малые, то про резонанс говорить не приходится.

1.3 Элементы теории бифуркаций в нелинейных системах

T2

Рассмотрим уравнение вида

$$\dot{x} = (x - a)(x^2 - a),$$

найдем положения равновесия

$$\dot{x} = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = a \\ x = \pm\sqrt{a}, \quad a > 0 \end{cases}$$

Соответственно, при неположительных a существует единственное положение равновесия $x^* = a$, при поло-

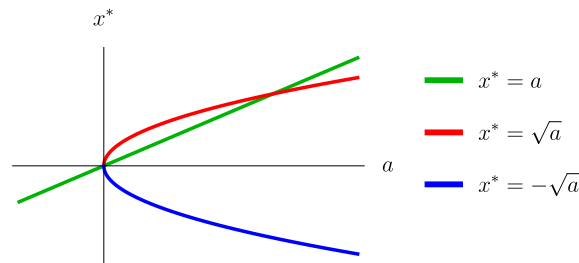


Рис. 1: Зависимость положения равновесия x^* от параметра a к №T2

жительных $a \neq 1$ существует три положения равновесия $x^* \in \{a, +\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$, и при $a = 1$ существует два положения равновесия $x^* \in \{+1, -1\}$. Соответствующие зависимости $\dot{x}(x, a)$ приведены на рисунке 2.

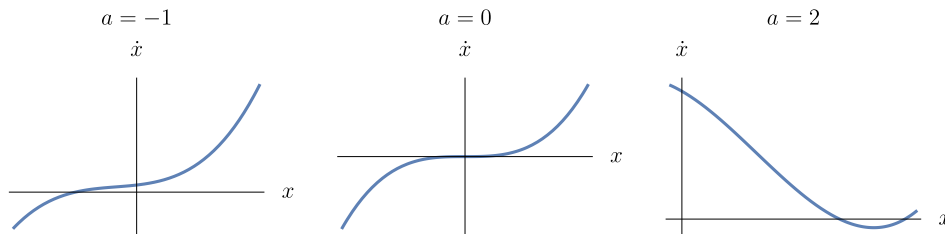


Рис. 2: Зависимость $\dot{x}(x)$ при различных a к №T2

T3

Исследуем систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = k \left(\frac{b}{a-x} - x \right) \end{cases}$$

Рассмотрим положение равновесия $\dot{x} = \dot{y} = 0$, при $x \neq a$

$$x^* = \frac{1}{2} \left(a \pm \sqrt{a^2 - 4b} \right),$$

что приводит нас к следующим случаям.

Пусть $a^2 = 4b$, тогда $x^* = a/2$, попробуем найти фазовый портрет по линейному приближению

$$\det(J - \lambda E) = \lambda^2 - k \left(\frac{b}{(a-x^*)^2} - 1 \right) = k \cdot 0 = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0,$$

следовательно линейным приближением здесь не воспользоваться.

При $a^2 > 4b$,

$$x^* = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} = \frac{a}{2} \pm \delta,$$

тогда

$$\lambda^2 = \frac{5}{4}(4b - a^2) \pm a\delta,$$

в случае $+a\delta \operatorname{Re} \lambda_{1,2} = 0$, следовательно это *центр*, при $-a\delta$ получается $\lambda^2 = 100b - 9a^2 > 64b > 0$, следовательно это *седло*.

При $a^2 < 4b$ не существует положения равновесия, что приводит нас к фазовым диаграммам аналогичным задаче Т4.

Т4

Запишем уравнения Бине для движения в метрике Шварцшильда:

$$u'' + u = \frac{a}{2c^2}v^2 + \frac{3}{2}au^2,$$

где $r^2\dot{\varphi} = c$, $u = 1/r$. Перейдём к системе

$$\begin{cases} u' = y \\ y' = \frac{3}{2}au^2 + \frac{a}{2c^2}v^2 - u \end{cases}$$

положение равновесия которой находится в точке

$$y^* = 0, \quad u^* = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 3\frac{v^2 a^2}{c^2}}}{3a}.$$

Зависимость $u^*(c)$ представлена на рисунке, соответственно положение равновесия существует только при $c \geq \sqrt{3}va$, при чём при равенстве оно единственно.

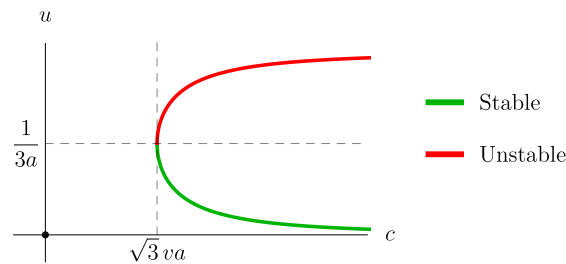


Рис. 3: Бифуркационная диаграмма стационарных точек уравнения Бине к №Т4

Посмотрим на устойчивость положения равновесия

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3au - 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = 3au - 1 = \pm \sqrt{1 - 3\frac{v^2 a^2}{c^2}},$$

получается плюсу соответствует седл, а минусу центр. Соответствующие фазовые портреты представлены на рисунке, при $a, v = 1$.

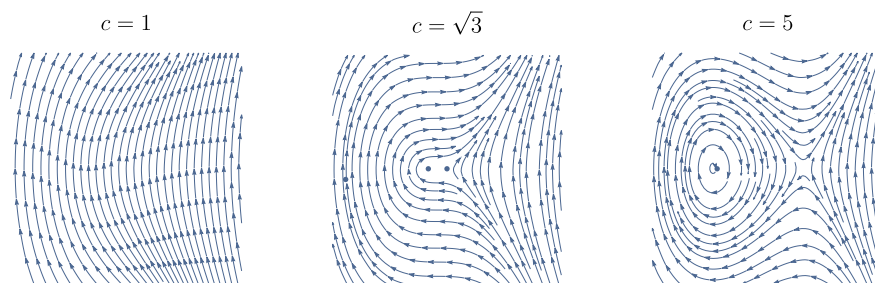


Рис. 4: Фазовый портрет системы №Т4 (бифуркация при плавном изменении c)

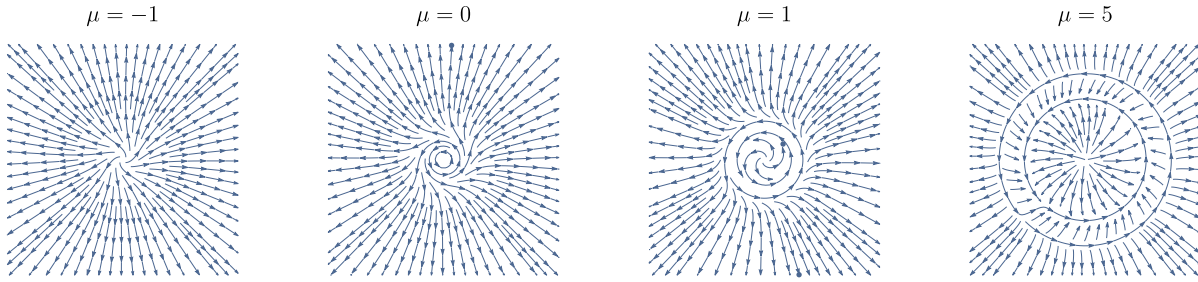


Рис. 5: Фазовый портрет системы №Т5 (бифуркация при плавном изменении μ)

Т5

Покажем существование предельного цикла, и нарисуем фазовые портреты для системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(\mu - x^2 - y^2)(\mu - 2x^2 - 2y^2) \\ \dot{y} &= x + y(\mu - x^2 - y^2)(\mu - 2x^2 - 2y^2)\end{aligned}$$

при различных параметрах μ .

Перейдём к полярным координатам

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi = r((2r^4 - 3r^2\mu + \mu^2) \cos \varphi - \sin \varphi) \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi = r((2r^4 - 3r^2\mu + \mu^2) \sin \varphi + \cos \varphi) \end{cases}.$$

Рассмотрим $\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi = \dot{r}$, и $\dot{y} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi = r \dot{\varphi}$:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(2r^4 - 3r^2\mu + \mu^2) \\ r \dot{\varphi} = r \end{cases} \Rightarrow \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{dr}{d\varphi} = r(2r^4 - 3r^2\mu + \mu^2).$$

Судя по виду уравнений можно предположить, что при некоторых μ производная $dr/d\varphi = 0$ (более аккуратные рассуждения будут проведены в задаче Т6), тогда

$$(2r^4 - 3r^2\mu + \mu^2) = 2\left(r^2 - \frac{\mu}{2}\right)(r^2 - \mu) = 2(r^2 - r_1^2)(r^2 - r_2^2) = 0,$$

где $r_1^2 = \mu/2$ и $r_2^2 = \mu$. Соответственно при $\mu > 0$ существует периодическая траектория при $r \in \{r_1, r_2\}$. Из вида производной \dot{r} знаем, что

$$\text{sign } \dot{r} = \begin{cases} 1, & r \in (0, r_1) \cup (r_2, +\infty) \\ -1, & r \in (-r_1, r_2) \end{cases}$$

Следовательно траектория $\dot{\varphi} = 1$, $r = r_2$ является неустойчивой, а $\dot{\varphi} = 1$, $r = r_1$ устойчива, а соответственно и является предельным циклом.

При отрицательных μ существует единственное положение равновесия в $x = y = 0$, являющееся устойчивым фокусом (см. вид \dot{r}), а при $\mu > 0$ становится неустойчивым фокусом. Таким образом приходим к фазовым портретам изображенным на рисунке 5.

Т6

Рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \mu x - xy^2, \\ \dot{y} &= \mu y + x - y^3.\end{aligned}$$

Аналогично Т5 перейдём к полярным координатам, и выразим $\dot{\varphi}$ и \dot{r} , так вышло, что и здесь всё хорошо, и

$$\begin{cases} r \dot{\varphi} = r \\ \dot{r} = r\mu - r^3 \sin^2(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{dr}{d\varphi} = r(\mu - r^2 \sin^2 \varphi).$$

Найдём значения $r = r_*$, где \dot{r} меняет знак

$$r_*^2 = \mu \sin^{-2} \varphi,$$

что возможно только при $\mu > 0$. Аналогично предыдущей задаче рассмотрим $\text{sign } \dot{r}$, и получим

$$\text{sign } \dot{r} = \begin{cases} 1 & r < r_* \\ -1 & r > r_* \end{cases}$$

Подробнее рассмотрим положение равновесия $x = y = 0$, которое в силу постоянства $\dot{\varphi}$ единственное. В линейном приближении,

$$J = \begin{pmatrix} \dot{x}'_x & \dot{x}'_y \\ \dot{y}'_x & \dot{y}'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu - y^2 & -1 - 2xy \\ 1 & \mu - 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\det(J - \lambda E) = (\mu - \lambda)^2 + 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \mu \pm i.$$

Тогда при $\mu < 0$, по теореме Ляпунова об устойчивости в линейном приближении, $x = y = 0$ – устойчивый фокус, при $\mu = 0$ верно, что $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$, следовательно это центр, а при $\mu > 0$ фокус становится неустойчивым. Это позволяет прийти к фазовым портретам при различных значениях μ , изображенным на рисунке 6.

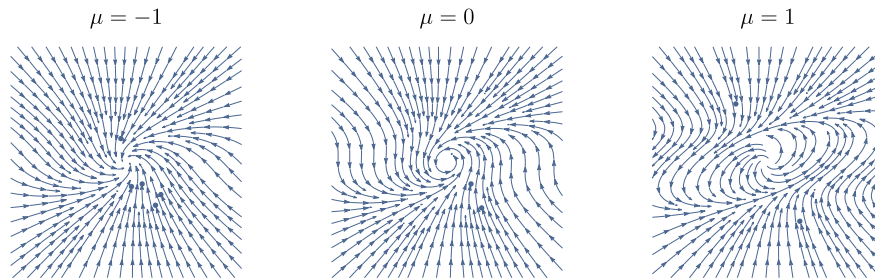


Рис. 6: Бифуркация Пуанкаре-Андронova-Хопфа к №Т6

1.4 Метод усреднения и метод нормальных форм в теории нелинейных колебаний

Исследуем параметрический резонанс в уравнении Матё

$$\ddot{x} + (a + \varepsilon \cos t)x = 0,$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$. Будем считать $a = 1 + c\varepsilon^2$, и рассматривать задачу относительно медленного времени $\tau = t$ и быстрого времени $T = \varepsilon^2 t$. Пусть также $a = 1 + c\varepsilon^2$, где $c = (1)$. Величинами порядка $o(\varepsilon^2)$ пренебрежем.

Для начала перепишем дифференцирование по времени в терминах T, τ :

$$\begin{aligned} d_t &= \partial_\tau + \varepsilon^2 \partial_T, \\ d_{t,t}^2 &= \partial_{\tau,\tau}^2 + 2\varepsilon^2 \partial_\tau \partial_T, \end{aligned}$$

где слагаемым $\varepsilon^4 \partial_{T,T}^2$ пренебрегли.

Для поиска решения воспользуемся естественным анзацем, вида

$$x = x_0(\tau, T) + \varepsilon x_1(\tau, T) + \varepsilon^2 x_2(\tau, T),$$

тогда, после подстановки в уравнение Матё и группировки по степеням⁴ ε , получим набор условий. При ε^0

$$\varepsilon^0: \quad \ddot{x}_0(\tau, T) + x_0(\tau, T) = 0,$$

следовательно

$$x_0 = A(T)e^{i\tau} + B(T)e^{-i\tau}.$$

При ε^1 , подставляя значение x_0 находим, что

$$\varepsilon^1: \quad \ddot{x}_1(\tau, T) + x_1(\tau, T) = -\frac{1}{2} (A + B + Ae^{2i\tau} + Be^{-2i\tau}),$$

решая это дифференциальное уравнение относительно $x_1(\tau, T)$ находим, что

$$x_1(\tau, T) =$$

⁴Коэффициент при каждой степени должен быть нулевым.