Задание по курсу «Аналитическая механика II»

Авторы: Хоружий Кирилл

От: *11 февраля 2021 г.*

Содержание

1 Первое задание по аналитической механике.

1.1 Малые колебания консервативных систем (✓)

16.11

Введём ось OX координат вдоль туннеля, выбрав в качестве $x = 0$ положение равновесия. Тогда кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

Интегрируя силу, действующую на тело, находим потенциальную энергию

$$F_x = -\frac{GM(x)m}{r^2(x)} \cdot \frac{x}{r} = -G\kappa x, \qquad \frac{G\kappa R^3}{R^2} = g, \quad \Rightarrow \quad \Pi = \int F\,dx = \frac{1}{2}\frac{g}{R}x.$$

Так удачно вышло, что T и Π – квадратичные формы. Запишем вековое уравнение:

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2} - \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{g}{R}, \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

16.33

Выбрав оси, как показано на рисунке, получим систему с 2 степенями свободы. Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right).$$

Потенциальная энергия для трёх пружинок (сдвинутая так, чтобы положение равновесия был 0)

$$\Pi = \frac{c}{2}(x_2)^2 + \frac{c}{2}(x_1)^2 + \frac{2c}{2}\left(x_2 - x_1\right)^2.$$

И снова так вышло, что T и Π – квадратичные формы, так что

$$\det\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^i \partial q^j} - \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \det\left[c\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix} - \lambda m\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right] = 0, \quad \Rightarrow \quad (\lambda m)^2 + 9c^2 - 6\lambda mc - 4c^2 = 0.$$

Соответственно находим квадраты частот

$$\lambda^2 - 6\lambda\frac{c}{m} + 5\frac{c^2}{m^2} = \left(\lambda_1 - \frac{c}{m}\right)\left(\lambda_2 - 5\frac{c}{m}\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 : \begin{pmatrix}-2c & 2c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = 0 & \Rightarrow \ \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}; \\ \lambda_1 : \begin{pmatrix}2c & 2c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = 0 & \Rightarrow \ \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}. \end{cases}$$

Соответственно, уравнение движения будет иметь вид

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\,t + \alpha_1\right) + C_2\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\sin\left(\sqrt{\frac{5c}{m}}\,t + \alpha_2\right).$$

16.47

Запишем с учётом малости колебаний кинетическую энергию системы

$$T = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}\left(l\dot{\varphi}_2 + l\dot{\varphi}_1\right)^2.$$

И, опять же, с учетом малости, потенциальную

$$\Pi = \frac{c}{2}\left((l\varphi_1)^2 + (l\varphi_1 + l\varphi_2)^2\right) + mgl\cos\varphi_1 + mgl(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) =$$
$$= \frac{c}{2}\left((l\varphi_1)^2 + (l\varphi_1 + l\varphi_2)^2\right) + 2mgl\left(1 - \frac{\varphi_1^2}{2}\right) + mgl\left(1 - \frac{\varphi_2^2}{2}\right).$$

Как обычно, получив квадратичные формы (хотя бы в малом приближение) радуемся и переходим к поиску частот собственных колебаний

$$\det\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^i \partial q^j} - \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \det\left[\begin{pmatrix}2cl^2 - 2mgl & cl^2\\ cl^2 & cl^2 - mgl\end{pmatrix} - \lambda ml^2\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right] = 0.$$

Раскрыв, получаем уравнение вида

$$2([cl^2 - ml^2\lambda] - mgl)^2 - [cl^2 - ml^2\lambda]^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{2}mgl}{\sqrt{2} \pm 1} = [cl^2 - ml^2\lambda], \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{c}{m} - 2\frac{g}{l} \mp \sqrt{2}\frac{g}{l}.$$

Теперь подставляем известные λ, и находим амплитудные векторы

$$\lambda_1 : \quad \begin{pmatrix} 2+2\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 : \quad \begin{pmatrix} 2-2\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Это позволяет нам записать уравнение движения малых колебаний (при $c/m > (2+\sqrt{2})g/l$)

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m} - \left(2+\sqrt{2}\right)\frac{g}{l}}\, t + \alpha_1\right) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m} - \left(2-\sqrt{2}\right)\frac{g}{l}}\, t + \alpha_2\right).$$

16.64

Запишем кинетическую энергию системы

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2\right) + \frac{nm}{2}\dot{x}_2^2.$$

И, считая 0 в положении равновесия, потенциальную энергию системы, запасенную в сжатых пружинах

$$\Pi = \frac{c}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{c}{2}(x_3 - x_2)^2.$$

В таком случае

$$\det\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^j} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \det\left[c\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0.$$

Раскрывая, приходим у уравнению на λ вида

$$\lambda_1 \left(\lambda_2 - \frac{c}{m}\right)\left(\lambda_3 - \frac{(2+n)c}{nm}\right) = 0.$$

Соответственно, амплитудные векторы находим, как

$$\lambda_1 : \quad \begin{pmatrix} -c & 2c & -c \\ c & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 : \quad \begin{pmatrix} c & 2c - nc & c \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_3 : \quad \begin{pmatrix} c & nc & c \\ 0 & c & 2c/n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} n \\ -2 \\ n \end{pmatrix}.$$

Что ж, уравнение движения малых колебаний запишется в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (C_1 t + \alpha_1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m}}\, t + \alpha_2\right) + C_3 \begin{pmatrix} n \\ -2 \\ n \end{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{(n+2)c}{nm}}\, t + \alpha_3\right).$$

16.107

Знаем, что кинетическая энергия и обобщенные силы для системы могут быть записаны в виде[1]

$$T = \frac{1}{2} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \qquad Q_i = b_{ik} \dot{q}_k,$$

где a_{ik} – положительно определенная квадратичная форма, а $b_{ik} = -b_{ki}$ – кососимметричная квадратичная форма.

Запишем уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \qquad \Rightarrow \qquad a_{ik}\ddot{q}_k = b_{i\alpha}\dot{q}_\alpha.$$

Осталось этот набор уравнений решить.

Воспользуемся алгоритмом приведения двух квадратичных форм к каноническому виду. Выберем в качестве скалярного произведения a_{ik}, в терминах a_{ik} выберем ортогональный базис так, чтобы a_{ik} было равно δ_{ik}.

[1] С глубоким сожалением вынуждены оставить баланс индексов в рамках этой задачи. Немое суммирование подразумевается, при повторение индексов.

Повернём через u_{ik} базис, приведя b_{ik} к каноническому виду b^*_{jl}, указанному в условии с m блоков 2×2.

$$\begin{cases} \delta_{ik}\ddot{q}_k = b_{i\alpha}\dot{q}_\alpha, \\ u_{kj}q^*_j = q_k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u^{-1}_{li} \cdot \left(\delta_{ik}u_{kj}q^*_j = b_{i\alpha}u_{\alpha\beta}q^*_\beta\right) \quad \overset{\sqsupset\, i=1}{\Rightarrow} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}^*_1 \\ \ddot{q}^*_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}^*_1 \\ \dot{q}^*_2 \end{pmatrix}.$$

И таких систем с колебаниями у нас будет m штук

$$\begin{cases} \ddot{q}^*_1 = -\nu\dot{q}^*_2 \\ \ddot{q}^*_2 = -\nu\dot{q}^*_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dddot{q}^*_1 = -\nu\ddot{q}^*_2 \\ \dddot{q}^*_2 = -\nu\ddot{q}^*_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} q^*_1 = \dfrac{A}{\nu}\cos(\nu t + \alpha) + C_1 \\ q^*_2 = \dfrac{A}{\nu}\sin(\nu t + \alpha) + C_2. \end{cases}$$

Нули же в каноническом виде b_{ij} будут соответствовать трансляциям

$$q^* = At + B.$$

Собирая всё вместе, находим, что

$$q_\alpha = u_{\alpha i}q^*_i, \qquad q^*_i = \begin{cases} (A_j/\nu_j)\cdot\cos(\nu_j t + \alpha_j) + B_{2j-1} & \text{при } i = 2j-1 \leqslant 2m; \\ (A_j/\nu_j)\cdot\sin(\nu_j t + \alpha_j) + B_{2j} & \text{при } i = 2j \leqslant 2m; \\ (A_j)\cdot t + B_j & \text{при } i = j > 2m. \end{cases}$$

1.2 Диссипативные системы и вынужденные колебания

17.8 (✓)

Для начала рассмотрим систему, в которой нижний грузик привязан к полу пружинкой жесткости $c_{n+1} = 0$, так матрица для потенциальной энергии станет немного симметричнее.

Выберем в качестве координат положения грузиков, где $q^i = 0$ соответствует положению равновесия i-го груза. Запишем потенциальную энергию системы

$$2\Pi = c_1 q_1^2 + c_2(q_1 - q_2)^2 + \ldots + c_n(q_n - q_n - 1)^2 + c_{n+1}q_{n+1}^2.$$

Тогда матрица потенциальной энергии C примет вид

$$C_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^i \partial q^j}, \qquad \Rightarrow \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & & \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 & \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & & \\ & 0 & & \ddots & -c_n \\ & & & -c_n & c_n + c_{n+1} \end{pmatrix}$$

Запишем уравнение Лагранжа второго рода, и рассмотрим систему в линейном приближении

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q_i, \quad \Rightarrow \quad A\ddot{\boldsymbol{q}} + B\dot{\boldsymbol{q}} + C\boldsymbol{q} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = A\ddot{\boldsymbol{q}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + C\dot{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{q} = -B\dot{\boldsymbol{q}} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} = -\beta \dot{q}_n^2.$$

Получается, что диссипация является полной, а значит имеет смысл вспомнить теорему о добавлении в систему диссипативных сил с полной диссипацией.

Thr 1.1 (Теорема Томсона-Тэта-Четаева)**.** *Если в некотором изолированном положении равновесия потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией (и/или гироскопических) это положение равновесия становится асимптотически устойчивым.*

По теореме Лагранжа-Дирихле положение равновесия $\boldsymbol{q} = 0$ устойчиво, если в положение равновесия достигается локальный минимум потенциала Π. Получается остается показать, что матрица C положительно определена, или, по критерию Сильвестра, что все угловые миноры Δ_i матрицы C положительны.

Посчитав несколько миноров ручками, приходим к виду Δ_i, которое докажем по индукции.

$$\text{Предположение:} \quad \Delta_n = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j$$

$$\text{База:} \quad \Delta_2 = \det \begin{Vmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{Vmatrix} = c_1c_2 + c_2c_3 + c_1c_3 = \sum_{i=1}^{2+1} \frac{1}{c_i} \left(\prod_{j=1}^{2+1} c_j \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Переход:} \quad \Delta_{n+1} &\overset{\text{(I)}}{=} (c_{n+1} + c_{n+1})\Delta_n - c_{n+1}^2 \Delta_{n-1} = \\ &= c_{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j + c_{n+2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j - c_{n+1}^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n} c_j = \\ &= c_{n+2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j + c_{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j + \frac{1}{c_{n+1}} \prod_{j=1}^{n+1} c_j \right) - c_{n+1}^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n} c_j = \\ &\overset{\text{(II)}}{=} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+2} c_j + \frac{1}{c_{n+2}} \prod_{j=1}^{n+2} c_j = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+2} c_j, \qquad \text{Q. E. D.} \end{aligned}$$

Действительно, первый переход (I) получается, раскрытием определителя Δ_{n+1} по нижней строчке. В переходе (II) были сделаны замены, вида

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} c_j = c_{n+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n} c_j; \qquad \prod_{j=1}^{n+1} c_j = \frac{1}{c_{n+2}} \prod_{j=1}^{n+2} c_j; \qquad c_{n+2} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{c_i} \prod_{j=1}^{n+2} c_j.$$

Полученная формула для Δ_n ясно даёт понять, что $\Delta_i > 0$ для $i = 1, \ldots, n$, что доказывает положительную определенность C, а значит и локальный минимум потенциала Π достигается в положение равновесия $\boldsymbol{q} = 0$.

Таким образом выполняются условия теоремы Лагранжа-Дирихле, как и условия теоремы Томсона-Тэта-Четаева, а значит положение равновесия $\boldsymbol{q} = 0$ является асимптотически устойчивым.