Заметки по практике «Квантовые вычисления на холодных атомах и ионах»

Авторы: Хоружий Кирилл

От: *25 апреля 2021 г.*

Содержание

1 Лазерное охлаждение

1.1 Холодные атомы

Цель охлаждения – фазовая плотность:

$$N = \int \frac{d^3x d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{N}{V} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mT}\right)^{3/2} e^{-p^2/2mT}.$$

На $\Delta p \cdot \Delta x$ приходится $2\pi\hbar$. Работаем в приближении классического Максвелловского газа.

Можем получить оценку для характерной фазовой плотности:

$$\rho \sim n \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mT}\right)^{3/2} = \frac{N}{V} \lambda_{\text{dB}}^3.$$

Начинаем охлаждать: $N(v) = v^2 e^{-mv^2/T}$ с максимум в $\sqrt{T/m}$. Охладить – сужение распределения по скоростям.

Домашнее задание:

1. Оцените фазовую плотность азота в атмосфере при нормальных условиях.
2. Оцените фазовую плотность атомов лития при температоре 100 мкК и межчастичном расстоянии 1 мкм.

Рассматриваем 2 типа охлаждения: резонансный свет, испарение. Так в 1981 году охладили до 1.5 К.

Так вот, охлаждать – замедлить движение. Если атом летит навстречу, то атом ловит фотон – из-за доплеровского эффекта. Частота лазера немного меньше резонансной.

Освещаем со всех трёх сторон – получаем трёхмерное охлаждение. Но начнём смотреть на цифры в одномерном случае:

$$ma = \hbar k \frac{\Gamma}{2},$$

где $1/\Gamma = 27$ нс, – обратное время жизни возбужденного состояния.

Домашнее задание:

1. Атом лития замедляется со скорости 500 м/с, рассчитать расстояние, на котором скорость падает до 0. Рассчитать ускорение, сравнить с g. Переход $2s \to 2p$.

Посмотрим на облачко атомов. Хочется подумать про магнито-оптическую ловушку (1987 г.). Усложним ситуацию до $m_j \in -1, 0, +1$. Атом может находиться на $2s$ и $2p$. В магнитном поле уровни раздвигаются: гап на $\mu_B B$.

Сделаем так, чтобы свет имел циркулярные поляризации. Подробное описание см. на слайде *магнито-оптическая ловушка.*

Какой предел охлаждения? Предел охлаждения из-за фотонной отдачи:

$$T_{\text{min}} = \frac{p_{\text{photon}}^2}{2m}, \quad p_{\text{photon}} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}.$$

Так находим $T_{\text{min}} = 4$ мкК для Li.

Есть также предел Летохова-Миногина-Павлова (1977):

$$T_{\text{min}} = \hbar\Gamma/2 = 150 \text{ мкК для Li},$$

что приводит к фазовой плотности порядка 0.01.

1.2 Ещё холоднее

Оптическая дипольня ловушка – частота лазера много меньше резонансной, также возьмём $P = 100$ Вт. В постоянном внешнем поле возникает дипольный момент $\boldsymbol{d} = |e|\boldsymbol{l}$, более того

$$V = -\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{\alpha}{2} \boldsymbol{E}^2,$$

что очень похоже на оптический пинцет. Так можем удержать.

Охлаждать же будем методом испарения. Сложности при охлаждении испарением: частота межатомных испарений и резонансное рассеяние. Частота $\nu = n\sigma v$.

Домашнее задание:

1. Оцените частоту классически столкновений атома лития с другими атомами при межчастичное расстояние 1 мкм, температура 100 мкК, – они ооочень редко сталкиваются.
2. ...

---

2 Квантовый компьютер на холодных кубитах

Есть 4 «blade» – создают ловушку Паули. Современная такая ловушка – кусок сапфира, в который вставляются титановые электроды, которые нужно выточить до 1 мкм, – в итоге ловушка портится, поэтому ловушка покрывается золотом.

Динамику иона в ловушке описывается уравнениями Матье.

Охлаждение возможно через правильно настроенные лазерные пучки.

Домашнее задание:

Оценить размер иона.

---

3 КвантМех в холодных ионах

Квантовомеханические системы описываются квантовомеханическим уравнением Шредингера вида

$$i\hbar\partial_t\Psi = \hat{H}\Psi,$$

где для N частиц $\Psi \equiv \Psi(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n, t)$. Гамильтониан же – набор частных производных вида

$$\hat{H} = -\sum \frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V(x_1, \ldots, x_n),$$

а потенциальная энергия –

$$V = \sum \frac{e^2}{|r_i - r_j|} + \sum V(r_i).$$

Важно понимать, что есть набор стационарных решений вида

$$\Psi = \exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right)\Psi_n(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N).$$

Переобозначим исходный гамильтониан за H_0, а добавку будем называть $\hat{V}$ вида

$$\hat{V} = -e\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{r}_1 + \ldots + \boldsymbol{r}_N) = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{d}.$$

Так вот, $H = \hat{H}_0 + \hat{V}$, допустим мы знаем, что

$$\hat{H}_0\Psi_n = E_n\Psi_n,$$

тогда

$$\Psi = \sum c_n(t)e^{-iE_n t}\Psi_n.$$

Подставляя это в уравнение Шредингера, получим

$$i\hbar\,\partial_t c_n = \sum_m e^{i(E_n - E_m)t}V_{nm}(t)c_m.$$

Светим лазером сейчас на частоте близкой к резонансной, поэтому предлагается оставить только резонансную пару c_0, c_1. Если ограничиться всего двумя членами, то

$$E(t) = E_0\cos\left((E_1 - E_0)t\right), \qquad i\partial_t\begin{pmatrix}c_0\\c_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & (Ed)^*\\Ed & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_0\\c_1\end{pmatrix},$$

которое уже решается. В результате находим осциллирующую резонансную пару

$$c_0(t) = c_0(0)\cos\left(\frac{|E_0 d|}{\hbar}\,t\right) + ie^{i\varphi}c_1(0)\sin\left(\frac{|E_0 d|}{\hbar}\,t\right).$$

Есть матрицы Паули

$$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}; \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}; \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix},$$

также вводится $\sigma_{+-} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$, тогда гамильтониан перепишется в виде
$$i\hbar\partial_t c = [(Ed)^*\sigma_- + (Ed)\sigma_+].$$

3.1 Начало движения ядра

Теперь ядро ($\boldsymbol{R}$) не неподвижно, но решать будем в предположение о факторизации системы
$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) = \tilde{\Psi}(\tilde{R}) \cdot \Psi(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N).$$
Внешний потенциал ловушки практически гармонический
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}}{2M} + \frac{m\omega^2 R^2}{2}.$$
Его можно с помощью повыщающих и понижающих операторов
$$a, a^+ = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}}x \pm i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m}}\hat{p}.$$
Тогда гамильтониан перепишется в виде
$$\hat{H} = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right).$$
Очень важно, что $[a, a^+] = 1$. Например, можно решить
$$a|0\rangle = 0, \quad \Rightarrow \quad H|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}|0\rangle,$$
где $|0\rangle \equiv \Psi_0 = \Psi(\boldsymbol{R})$. Найдём $\Psi_n = (a^+)^n|0\rangle$. Утверждается, что
$$H\Psi_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\Psi_n.$$
Это можно доказать. Так, например,
$$[a^+a, a] = a^+a\,a - aa^+a = -a, \qquad [a^+a,\, a^+] = a^+.$$
Теперь можем записать, что
$$\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_0\cos(\Omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}), \qquad \boldsymbol{R} = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}(a + a^+).$$
В предположении о малости $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}$, можем найти
$$\boldsymbol{E} \approx \frac{\boldsymbol{E}_0}{2}e^{-i\Omega t}(1 + ikR),$$
что запишем как соответствующий член в гамильтониан Лэмбэ-Дикке.
$$\hat{H} = H_0 + \frac{E_0}{2}\left(e^{-\Omega t}\left(1 + ik\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}(a + a^+)(\sigma_+ + \sigma_-)\right) + h.c.\right),$$
Выбрав свет в резонанс на один колебательный квант – мы запутываем ион с одной степенью свободы,
$$\Omega = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\hbar} \pm \omega_0.$$

3.2 Обработка квантовой информации на холодных ионах в ловушках

Def 3.1. *Кубит* – произвольная квантовая двухуровневая система.

Можно ввести *сферу Блоха* – описание состояния кубита, с $\alpha = \cos\theta/2$ и $\beta = e^{i\varphi}\sin(\theta/2)$.

Есть несколько моделей квантовых вычисленийЮ например, на гейтах (вентилях) – унитарные квантовые операторы. Любую однокубитную операцию можно представить, как вращение на сфере Блоха.

Так например можно реализовать гейты CNOT, SWAP, и т.д. Любой квантовый алгоритм представляется в виде (см. слайд 4.11). В конце всегда измеренеия.

Thr 3.2. *Набор квантовых операций должен состоять из произвольной однокубитной операции, и двухкубитного запутывающего гейта является универсальным.*

Con 3.3. *Набор операций, состоящий из произвольных вращений вокруг осей сферы Блоха, и двухкубитного запутывающего гейта является универсальным.*