# Билеты курса «Гармонический анализ»

**Источник**: an_explanations.pdf
**Лектор**: Карасёв Р.Н.

**Восторженные читатели**: Хоружий Кирилл
Примак Евгений

**От**: *13 июня 2021 г.*

## Содержание

# 1 Приближение функций $\rightrightarrows$, в среднем и среднеквадратичном

## 1.1 Приближение функций кусочно-линейными и многочленами

*Носитель* функции – дополнение к объдинению всех открытых множеств, на которых функция равна нулю, иначе – замыкание множества точек, в которых функция не равна нулю. Получается носитель функции всегда замкнут и для функций на $\mathbb{R}^n$ компактнось носителя означает ограниченность.

**Lem 1.1.** *Для непрерывной с компактным носителем* $f(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *и* $t_n \to 0$ *при* $n \to \infty$*, последовательность* $f_n(x) = f(x + t_n) \rightrightarrows f$*.*

$\triangle$. Непрерывня функция с компактным носителем равномерно непрерывна, то есть

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathbb{R},\, \forall t,\ \ (|t| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x-t) - f(x)| < \varepsilon,)$$

что можно интепретировать как равномерной сходимости $f(x - t_n) \rightrightarrows f(x)$. $\square$

**Thr 1.2.** *Для* $|x| < 1$ *и* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

*с радиуом сходимости не менее* 1.

**Lem 1.3.** $f(x) = \sqrt{x}$ *можно равномерно приблизить многочленами на любом отрезке* $[0, a]$.

$\triangle$. Заменой переменной $x = a - y$ сведем вопрос к приближению функции

$$g(y) = \sqrt{a+\delta}\sqrt{1 - \frac{y}{a+\delta}},$$

который раскладывается по предыдущей лемме в степенной ряд при $|y| \leqslant a+\delta$, причём при $|y| \leqslant a$ ряд сходится равномерно, тогда $g(y)$ приближается многочленом на $[0, a]$, соответственно и $\sqrt{x}$ тоже. $\square$

**Lem 1.4.** $f(x) = |x|$ *можно равномерно приблизить многочленами на любом отрезке* $[-a, a]$.

$\triangle$. На отрезке $[0, a^2]$ приближаем $\sqrt{t}$ многочленом $|\sqrt{t} - P(t)| < \varepsilon$. Подставим $x = \sqrt{t}$, тогда на $x \in [0, a]$ верно $|x - P(x^2)| < \varepsilon$, что можно продолжить на $[-a, a]$, продолжая $x$ чётным образом как $|x|$: $\Big||x| - P(x^2)\Big| < \varepsilon$. $\square$

**Thr 1.5.** *Всякую непрерывную кусочно-линейную на отрезке* $[a, b]$ *функцию можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленом.*

$\triangle$. Если функция со скачком производной на $\Delta$, то $f(x) - \Delta/2|x - x_i|$ будет уже без скачка, тогда кусочно-линейная представится в виде

$$f(x) = \sum_i c_i |x - x_i| + ax + b,$$

где каждое слагаемой уже приближаемо. $\square$

Этого достаточно, чтобы приближать кусочно-линейные многочленами. Осталось понять, как приближать непрерывные на отрезке функции кусочно-линейными. Определим

$$\varphi_\delta(x) = \begin{cases} 0, & x < -\delta, \\ 1 - |x|/\delta, & |x| \leqslant \delta \\ 0, & x > \delta. \end{cases}$$

Такая функция кусочно линейная, непрерывная, и её носитель – $[-\delta, \delta]$.

**Lem 1.6.** *Для непрерывной* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$*:* $\sum\limits_{k=0}^{m} f(k/m)\varphi_{1/m}(x - k/m) \rightrightarrows f$*.*

$\triangle$. Воспользуемся разбиением единицы
$$\sum_{k=0}^{m}\varphi_{1/m}(x-k/m)=1.$$
Умножая это на $f(x)$ и вычитая $f_m(x)$, получаем
$$f(x)-f_m(x)=\sum_{k=0}^{m}\left(f(x)-f(k/m)\right)\varphi_{1/m}(x-k/m).$$
При фиксированном $x$ в правой части слагаемые ненулевые только при $|x-k/m|<1/m$. Тогда правую часть оценим через модуль непрерывности
$$\left|\sum_{k=0}^{m}\left(f(x)-f(k/m)\right)\varphi_{1/m}(x-k/m)\right|\leqslant\sum_{k=0}^{m}\omega_f(1/m)\varphi_{1/m}(x-k/m)=\omega_f(1/m),$$
который стремится к нулю при $m\to\infty$ по непрерывности $f$. Напомним, что
$$\omega_f(\delta)=\sup\left\{\rho(f(x)-f(y))\mid x,y\in M,\ \ \rho(x,y)<\delta.\right\}$$
$\square$

**Thr 1.7.** *Всякую* $f\colon[a_1,b_1]\times[a_n,b_n]\to\mathbb{R}$ *можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленом.*

$\triangle$. Сначала масштабируем параллелепипед в единичный куб. Потом равномерно приближаем непрерывную функцию комбинацией произведений кусочно-линейных функций отдельных переменных:
$$f\colon[0,1]^n\mapsto\mathbb{R},\qquad f_m(x)=\sum_{k_1,\ldots,k_n}f\left(\frac{k_1}{m},\ldots,\frac{k_n}{m}\right)\varphi_{1/m}\left(x_1-\frac{k_1}{m}\right)\ldots\varphi_{1/m}\left(x_n-\frac{k_n}{m}\right).$$
Потом их приближаем многочленами. $\square$

sw

## 1.2 Приближение $2\pi$-периодических функций тригонометрическими многочленами

**Thr 1.8** (теорема Вейерштрасса)**.** *Всякую непрерывную на* $[-\pi,\pi]$ *функцию* $2\pi$*-периодичную* $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, для которой* $f(-\pi)=f(\pi)$ *можно сколько угодно точно равномерно приблизить*
$$T(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)).$$

$\triangle$. Многочлен от тригонометрическего многочлена – всё ещё многочлен. Рассмотрим некотрую непрерывную $g(\cos x)$, которую можем приблизить на компакте $P(\cos x)$. В частности, можем приблизить $2\pi$-периодическую функцию
$$\psi_\delta(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_\delta(x-2\pi k),$$
так как она чётна и $2\pi$-периодична, а значит зависит от $\cos x$ непрерывно. Далее любую непрерывную $2\pi$-периодическую $f$ будем приближать суммами
$$f_m(x)=\sum_{k=0}^{m}f(2\pi k/m)\psi_{2\pi/m}(x-2\pi k/m),$$
аналогично раннее доказанной лемме. $\square$

## 1.3 * Алгебры непрерывных на компактах функций. Теорема Стоуна-Вейерштрасса

**Def 1.9.** Множество $\mathcal{A}\subseteq C(x)$ (– непрерывные на компакте функции) называется *алгеброй*, если она содержит константы ($\mathbb{R}\subseteq\mathcal{A}$) и топологически "замкнута"относительно операций $\cdot$ и $+$.

**Def 1.10.** *Алгебра разделяющая точки* — $\forall a,b\in\mathbb{R},\ x=y\in X,\ \exists f\in A$ такая что $f(x)=a$, а $f(y)=b$.

**Thr 1.11** (теорема Стоуна-Вейерштрасса)**.** *Пусть у нас зафиксирован компакт $K$ и дана алгебра непрерывных функций $\mathcal{A}$ на этом компакте, которая разделяет точки. Тогда любую непрерывную на $K$ функцию можно сколь угодно близко равномерно приблизить функциями из $\mathcal{A}$.*

## 1.4 Пространства $L_p$. Неравенства Гёльдера и Минковского.

**Def 1.12.** *Абсолютно интегрирумыми функциями* на измеримом $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называют $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ с конечным интегралом $\int_X |f(x)|\,dx$. *Расстоянием*[1] между функциями $f$ и $g$ будем считать $\int_X |f(x) - g(x)|\,dx$.

**Def 1.13.** *Нормой* в векторном пространстве $V$ над полем $\mathbb{F}$ называется функционал $p\colon V \mapsto \mathbb{R}_+$, обладающий своствами:

1. $p(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = 0_V$ – невырожденность нормы (в *полунорме* это неверно);
2. $\forall x,\, y \in V,\ \ p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ – неравенство треугольника;
3. $\forall \alpha \in \mathbb{F},\, \forall x \in V,\ \ p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

**Def 1.14.** Обозначим через $L_1(X)$ факторпространство линейного пространства абсолютно интегрируемых функций по его линейному подпространству почти всюду равных нулю функций. То есть функции на 0 расстоянии считаем равными. *Нормой* будем считать

$$\|f\|_1 = \int_X |f(x)|\,dx.$$

**Def 1.15.** Для измеримого по Лебегу $X \subset \mathbb{R}^n$ и числа $p \geqslant 1$ *факторпространство* измеримых по Лебегу функций на $X$ с конечной (полу)нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p\,dx\right)^{1/p},$$

по модулю функций равных нулю почти всюду, назовём $L_p(X)$.

Очень хорошим, симметричным, актуальным для описания квантовой механики оказывается $L_2$ пространство, на котором естественно вводить скалярное произведение, его порождающее.

**Def 1.16.** В комплексном случае норма $L_2$ порождена *скалярным произведением*

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx \qquad \longrightarrow \qquad \|f\|_2 = \sqrt{(f,f)}.$$

**Thr 1.17** (Неравенство Гёльдера)**.** *Возьмём $p,\, q > 1$ такие, что $1/p + 1/q = 1$. Пусть $f \in L_p(X)$ и $g \in L_q(X)$. Тогда*

$$\int_X |fg|\,dx \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

$\triangle$. Добьёмся (домножением на константу) ситуации с $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Тогда достаточно проинтегрировать неравенство вида

$$|fg| \leqslant \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}.$$

Неравенство же можем получить из выпуклости логарифма

$$\ln(\alpha a + \beta b) \geqslant \alpha \ln a + \beta \ln b, \quad \alpha + \beta = 1, \qquad \Rightarrow \Big/ \begin{matrix} \alpha = p^{-1} \\ \beta = q^{-1} \end{matrix} \Big/ \Rightarrow \qquad \ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right) \geqslant \frac{\ln a}{p} + \frac{\ln b}{q} = \ln(a^{1/p} b^{1/q}).$$

$\square$

**Con 1.18.** *Для измеримых функций и чисел $p,\, q > 0$, таких что $1/p + 1/q = 1$, имеет место формула*

$$\|f\|_p = \sup\left\{ \int_X fg\,dx \ \middle|\ \|g\|_q \leqslant 1 \right\}. \tag{1.1}$$

[1] В силу неравенства $|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|$ расстояние конечно.

△. По неравенству Гёльдера норма $f$ не менее супремума правой части, более того равенство достигается при выборе
$$g(x) = \frac{\operatorname{sign} f(x)|f(x)|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}}.$$
□

**Def 1.19.** Функция $f\colon V \mapsto \mathbb{R}$ на векторном пространство называется *выпуклой*, если для любых $x$, $y \in V$ и любого $t \in (0,1)$ имеет место неравенство
$$f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y).$$
Функция называется *строго выпуклой*, если неравенство строгое $\forall x \neq y$ и $t \in (0,1)$.

**Lem 1.20.** *Если в семействе функций $f_\alpha\colon V \mapsto \mathbb{R}$, $\alpha \in A$, все функции выпуклые, то*
$$f(x) = \sup\{f_\alpha(x) \mid \alpha \in A\}$$
*тоже выпуклая*[2]*.*

△. Выпуклость функции нескольких переменных означает выпуклость всех её ограничений на прямые, а значит достаточно доказать это для функции одной переменной, `что допускает графическое доказательство`. □

**Thr 1.21** (Неравенство Минковского)**.** *Для функций $f$, $g \in L_p$ при $p \geqslant 1$*
$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

△. В силу предыдущих двух утверждений норма $\|\cdot\|_p$ – выпуклая функция на $L_p$, тогда, в частности
$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \leqslant \frac{1}{2}\left(\|f\|_p + \|g\|_p\right), \quad \Rightarrow \quad \left\|\frac{f}{2} + \frac{g}{2}\right\|_p \leqslant \left\|\frac{f}{2}\right\|_p + \left\|\frac{g}{2}\right\|_p,$$
где последнее верно по 1-однородности нормы. □

## 1.5 Полнота пространства $L_p$

### Полнота пространства интегрируемых функций

Далее в разделе всегда предполагается суммирование по $k$ от 1 до $\infty$, если не сказано иного. Глобально можно сказать, что `в нормированном пространстве вопрос полноты сводится в вопросу сходимости рядов`, у которых сходятся суммы норм.

**Def 1.22.** Назовём последовательность $(f_n)$ *фундаментальной*, если
$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon\colon \forall n, m \geqslant N_\varepsilon \ \ \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

**Lem 1.23.** *Пусть у последовательности функций $(u_k)$ из $L_p(X)$ сумма $\Sigma = \sum \|u_k\|_p$ оказалась конечной. Тогда $S(x) = \sum u_k(x)$ определена для почти всех $x$ и $\|S\|_p \leqslant \sum \|u_k\|_p$.*

△. Определим возрастающую последовательность
$$\rho_N(x) = \left(\sum_{k=1}^N |u_k(x)|\right)^p, \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \int_X \rho_N(x) \leqslant \left(\sum_{k=1}^N \|u_k(x)\|\right)^p \leqslant \Sigma^p \quad \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad \rho(x) = \lim_{N\to\infty} \rho_N(x).$$
Первое следствие получается по неравенству Минковского, второе по теореме о монотонной сходимости функции: $\rho(x)$ почти всюду конечна и имеет конечный интеграл, что означает почти всюду абсолютную сходимость ряда $\sum u_k(x)$.

Функция $\sigma_N(x) = \left|\sum u_k(x)\right|^p$ сходится к $|S(x)|^p$ почти всюду и $\sigma_N(x) \leqslant \rho(x)$. По теореме об ограниченной сходимости
$$\left\|\sum u_k(x)\right\|_p^p \to \|S\|_p^p, \quad \Rightarrow \quad \|S\|_p \leqslant \sum \|u_k\|_p,$$
по предельному переходу в неравенстве Минковского. □

[2] Если разрешить в определении выпуклости значение $+\infty$.

**Lem 1.24.** *Пусть у последовательности функций $(u_k)$ из $L_p(x)$ сумма $\Sigma = \sum \|u_k\|_p$ оказалась конечной. Тогда $S(x) = \sum u_k(x)$ определена для почти всех $x$ и (что отличает эту лемму от предыдущей) $S = \sum u_k$ в смысле сходимости в пространстве $L_p(X)$.*

$\triangle$. По предыдущей лемме для остатка $r_N(x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k(x)$:

$$\|r_N\|_p \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \|u_k\|_p, \qquad \text{при} \quad N \to \infty,$$

что и означает сходимость в терминах $L_p$. $\square$

**Thr 1.25.** *Пространство $L_p(X)$ полно.*

$\triangle$. Рассмотрим фундаментальную последовательность $(f_k)$ в $L_p(x)$ для подпоследовательности которой докажем сходимость. Выберем её так, чтобы $\|f_k - f_l\|_p \leqslant 2^{-k-1}$ при всех $l > k$.

Пусть тогда $u_1 = f_1$, $u_k = f_k - f_{k-1}$, получается хотим доказать сходимость суммы телескопического ряда $\sum u_k$, для которых $\|u_k\|_p \leqslant 2^{-k}$. По предыдущей лемме ряд почти всюду сходится к $S \in L_p(X)$, а $(f_k)$ сходятся к $S$ по норме $L_p(X)$. $\square$

Так и сводится в $L_p$ вопрос полноты к вопросу сходимости рядов, со сходящейся суммой норм. Вообще сходимость в $L_p(X)$ может не означать поточечной сходимости ни в одной точке.

## 1.6 Приближение функций в $L_p$ ступенчатыми и бесконечно гладкими

**Def 1.26.** Назовём *элементарно ступенчатыми* функции с конечным числом ступенек, в основании которых лежат элементарные множества.

**Thr 1.27.** *Пусть функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R} \in L_p$ с конечным интегралом. Положим для $M > 0$*

$$f_M(x) = \begin{cases} M, & f(x) \geqslant M; \\ f(x), & |f(x)| \leqslant M; \\ -M, & f(x) \leqslant -M; \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{M \to +\infty} \|f_M\|_p = \|f\|_p.$$

**Thr 1.28.** *Пусть функция $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ и $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда $f$ можно сколь угодно близко приблизить в среднем элементарно ступенчатой функцией.*

**Thr 1.29.** *Можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить элементарно ступенчатой $\forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)$.*

$\triangle$. Интеграл разности $f - f_M$ можно оценить, как

$$\begin{aligned} &|f(x) - M|^p \leqslant |f(x)|^p - M^p, && f(x) > M; \\ &|f(x) + M|^p \leqslant |f(x)|^p - M^p, && f(x) < -M; \end{aligned}$$

что получается из выпуклости $|x|^p$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|f|^p - |f_M|^p)\, dx < \varepsilon^p, \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\mathbb{R}^n} |f - f_M|^p\, dx < \varepsilon^p.$$

Осталось перейти к ограниченной функции $g = f_M|_{[-a,a]^n}$. В силу непрерывности интеграла Лебега по множествам

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p\, dx = \lim_{a \to +\infty} \int_{[-a,a]^n} |g(x)|^p\, dx,$$

поэтому можем приблизить $f_M$ функцией $g$ с точностью $\varepsilon$ функцией $h \leqslant M$ с $\operatorname{supp} h = Q = [-a,a]^n$. Таким образом $h$ измерима по Лебегу, то есть $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Теперь возвращаемся к приближению функции из $L_1$ элементарно ступенчатой $s$ в норме $L_1$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h - s|\, dx < \varepsilon', \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\mathbb{R}^n} |h(x) - s(x)|^p\, dx \leqslant (2M)^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |h - s|\, dx < (2M)^{p-1}\varepsilon'.$$

Тогда можем добиться

$$\|f - s\|_p < \|f - g\|_p + \|g - h\|_p + \|h - s\|_p < 3\varepsilon,$$

при выборе $s = s(\varepsilon)$. $\square$

**Thr 1.30.** *Всякую $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить бесконечно дифференцируемой функцией с компактным носителем.*

$\triangle$. Вспомним хороший набор функций

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ e^{-1/x}, & x > 0. \end{cases} \qquad \varphi(x) = f(x+1)f(1-x), \qquad \varphi_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = A\varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_1}{\varepsilon}\right)\cdots\varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_n}{\varepsilon}\right),$$

где последняя нормирована быть с единичным интегралом и отлична от нуля только в $U_\varepsilon(0)$. Тогда можем построить

$$\psi(x) = B\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt, \qquad B\colon \begin{cases} \psi(x) \equiv 0, & x \leqslant 1; \\ \psi(x) \equiv 1, & x \geqslant 1; \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \psi_{\varepsilon,\delta}(x) = \psi\left(\frac{\delta + \varepsilon - 2|x|}{\varepsilon - \delta}\right),$$

где $\psi_{\varepsilon,\delta}$ отлична от нуля только в $U_\varepsilon(0)$ и тождественно равна 1 в $U_\delta(0)$.

Осталось свёрткой приблизить каждую ступеньку на параллелепипедом $P$, точнее $\chi_P$ в норме $L_p$, тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\chi_P - g(x)\right|^p dx \leqslant \mu\left[U_\varepsilon(P)\right] - \mu P,$$

что стремится к нулю при $\varepsilon \to +0$. $\square$

*Доплнительно.* Также по теореме Стоуна-Вейерштрасса любую $f \in L_p(X)$ можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить ограниченным на $X$ многочленом, где $X$ – ограниченное измеримое в $\mathbb{R}^n$ множество.

Также для любой $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ можно показать непрерывность сдвига в $L_p$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|^p\,dx \to 0 \ \text{ при } \ |t| \to 0,$$

показав это для непрерывной функции с компактным носителем, а затем по неравенству Минковского, приближая $f$, доказать утверждение.

# 2 Ограниченная вариация, абсолютная непрерывность и осцилляция

## 2.7 Функции ограниченной вариации

**Def 2.1.** Функция $f$ на промежутке $I$ имеет *ограниченную вариацию*, если для любых $x_0 < x_1 < \ldots x_N \in I$ (в любом количестве)

$$|f(x_0) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \ldots + |f(x_{N-1}) - f(x_N)| \leqslant M,$$

для некоторой константы $M$. Наименьшую константу $M$ назовём *вариацией* функции $f$ равную $\|f\|_B$, что задаёт *полунорму*, вида

$$\|f\|_B = \sup\left\{|f(x_0) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \ldots + |f(x_{N-1}) - f(x_N)| \ \middle|\ N \in \mathbb{N}, a \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant b\right\}$$

Вообще это длина кривой в одномерном варианте, в частности кривая в $\mathbb{R}^n$ спрямляема только при конечной вариации каждой своей координаты. Важно что вариация функции аддитивна и выпукла, в смысле $\|f+g\|_B \leqslant \|f\|_B + \|g\|_B$.

**Lem 2.2.** *Функцию ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$ можно представить в виде суммы двух функций $f = u + d$, одна из которых возрастает, а другая убывает. При этом $\|f\|_B = \|u\|_B + \|d\|_B$ и если $f$ была непрерывной, то $u, d$ тоже будут непрерывны.*

$\triangle$. Определим *вариацию вверх* $u(x)$ как sup сумм положительных приращений и *вариацию вниз* $d(x)$ как inf сумм отрицательных приращений. Любой набор приращений даст $f(x)$ и его можно разбить на две части, одна из которых даст $u(x)$ а другая $d(x)$. Тогда

$$f(x) = u(x) + d(x), \qquad \left\|f|_{[a,x]}\right\| = u(x) - d(x),$$

при чём $u(x) \uparrow$ и $d(x) \downarrow$. Так как вариация монотонной функции – модуль её приращения, то $\|f\|_B = \|u\|_B + \|d\|_B$.

Покажем теперь, что $f \in C[a,b] \ \Rightarrow \ u, d \in C[a,b]$. Функции $u$ и $-d$ не убывают, покажем, что нет скачков. Их сумма $u(x) - d(x)$ равна $\left\|f|_{[a,x]}\right\|$ так что осталось показать, что у вариации нет скачков, что сводится к утверждению о непрерывности зависимости длины спрямляемой кривой от параметра. $\square$

Вспомним, что для монотонной $g$ и $f \in L_1$ верна следующая теорема о среднем:

**Thr 2.3** (Вторая теорема о среднем). *Если $f$ интегрируема по Лебегу с конечным интегралом, а $g$ монотонна и ограниченна на $[a,b]$, то при некотором $\nu \in [a,b]$*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a+0)\int_a^\nu f(x)\,dx + g(b-0)\int_\nu^b f(x)\,dx.$$

Таким образом приходим к утверждению о том, что `функции ограниченной вариации допускают оценку интеграла своего произведения с другой функцией`. В силу предыдущей леммы для любой функции ограниченной вариации $g$ из второй теоремы о среднем

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant (|g(a+0)| + \|g\|_B)\cdot \sup\left\{\left|\int_\nu^b f(x)\,dx\right| \text{ при } \nu \in [a,b]\right\}.$$

## 2.8 Абсолютно непрерывные функции, абсолютная непрерывность интеграла с переменных верхним пределом

Для формулы Ньютона-Лейбница условие липшицевости можно ослабить до следующего:
**Def 2.4.** Функция $F$ на промежутке $I$ *абсолютно непрерывна*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$, такое что $\forall\, x_1 \leqslant y_1 \leqslant x_2 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant x_N \leqslant y_N \in I$ из неравенства

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \ldots + |x_N - y_N| \leqslant \delta$$

следует, что

$$|F(x_1) - F(y_1)| + |F(x_2) - F(y_2)| + \ldots + |F(x_N) - F(y_N)| \leqslant \varepsilon.$$

Говоря неформально, сумма модулей приращений функции на системе непересекающихся отрезков должна стремиться к нулю при суммарной длине системы, стремящейся к нулю.

**Thr 2.5.** *Для некоторой $f \in L_1[a,b]$, всякая обобщенная первообразная $F$*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

*является абсолютно непрерывной и её производная почти всюду существует и совпадает с $f$.*

$\triangle$. В силу теоремы о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом, производная $F$ почти всюду равна $f$. Осталось показать абсолютную непрерывность $F$. Как и раньше, приблизим $f$ ограниченной $g \leqslant M$, так что $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Тогда при наборе отрезков $S$ длины $< \delta$

$$\int_S |g(x)|\,dx \leqslant M\delta, \qquad \int_S |f(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \Rightarrow \quad \int_S |f(x)|\,dx \leqslant M\delta + \varepsilon, \quad \Rightarrow \quad \int_S |f(x)|\,dx \leqslant 2\varepsilon,$$

что и означает сумма приращений $F$ на отрезках $S$ не более $2\varepsilon$ при $\mu[S] < \delta$. $\square$

## 2.9 Представление в виде суммы монотонных абсолютно непрерывных

**Lem 2.6.** *Абсолютно непрерывная на отрезке функция $f$ имеет на нём ограниченную вариацию. Также на отрезке существует разложение $f$ в сумму двух монотонных абсолютно непрерывных функций.*

$\triangle$. Для данной абсолютно непрерывной $f\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ рассмотрим $f = u + d$, также вспомним $u[x] + (-d[x]) = v(x) = \left\|f|_{[a,x]}\right\|_B$. Осталось показать абсолютную непрерывность $v(x)$.

От противного: $\exists \varepsilon > 0$ такое, что сумма приращений $v$ на некоторых отрезках не менее $\varepsilon$. По аддитивности вариации $v(y_i) - v(x_i) = \left\|f|_{[x_i,y_i]}\right\|_B$, тогда

$$\exists\ [x_{i1}, y_{i1}], \ldots, [x_{iN_i}, y_{iN_i}] \subset [x_i, y_i],\ :\ |f(x_i1) - f(y_{i1})| + \ldots + |f(x_{iN_i}) - f(y_{iN_i})| \geqslant \frac{v(y_i) - v(x_i)}{2}.$$

Суммируя такие неравенства по всем $i = 1, \ldots, N$ получаем, что сумма модулей приращений $f$ не менее $\varepsilon/2$, что противоречит абсолютной непрерывности $f$. $\square$

## 2.10 Обобщенная формула Ньютона-Лейбница

**Thr 2.7** (обобщенная формула Ньютона-Лейбница). *Абсолютно непрерывная функция $F\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ почти всюду имеет производную и является обобщенной первообразной своей производной с выполнением формулы Ньютона-Лейбница*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,dt.$$

Легко показать через... ух, ну по **лемме Безиковича**, посмотреть можно здесь.

## 2.11 Абсолютная непрерывность произведения абсолютно непрерывных и обобщенное интегрирование по частям

**Con 2.8** (Обобщенное интегрирование по частям). *Если $f \in L_1[a,b]$, а $g$ абсолютно непрерывна, то верна формула интегрирования по частям*

$$\int_a^b fg\,dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx,$$

*где $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.*

△. Производная $g'$ существует почти всюду, функция $F$ абсолютно непрерывна по раннее доказанной теореме, тогда $Fg$ тоже абсолютно непрерывна:

$$F(y)g(y) - F(x)g(x) = [F(y) - F(x)]\,g(y) + [g(y) - g(x)]\,F(x).$$

Тогда $(Fg)' = fg + Fg'$, к её приращению применима формула Ньютона-Лейбница, так и получаем интегрирование по частям. □

*Дополнительно.* Функция $f\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда она может быть сколь угодно близко в $B$-норме приближена кусочно-линейными функциями.

## 2.12 Теорема Римана об осцилляции и равномерной осцилляции

**Def 2.9.** Определим *коэффициент Фурье* (с точностью до умножения на константу)

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx.$$

**Thr 2.10.** *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то $|c_f(y)| \leqslant \|f\|_1$ и $c_f(y)$ непрерывно зависит от $y$.*

**Thr 2.11** (Теорема об ограниченной сходимости). *Пусть неотрицательная функция $g$ на измеримом $X$ имеет конечный интеграл. Пусть $f_k$ измеримы на $X$, $|f_k| \leqslant g$ для всех $k$ и $f_k \to f$ поточечно на $X$. Тогда $\lim_{k\to\infty} \int_X f_k\,dx = \int_X f\,dx$.*

△. По теореме об ограниченной сходимости разрешен предельный переход под знаком интеграла, значит $c_f(y)$ непрерывно зависит от $y$. Расписать бы это. □

**Thr 2.12** (Лемма Римана об осцилляции). *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то выражение*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx$$

*стремится к нулю при $y \to \infty$.*

△. У Кудрявцева математичненько всё расписано. Получим оценки на порядок убывания $c_f(y)$ при $y \to \infty$ считая $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывной и производные до $k$-й включительно $\in L_1(\mathbb{R})$, тогда интегрируя по частям (дифференцируя функцию) получим:

$$c[f](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d\left(\frac{e^{-ixy}}{-iy}\right) = f(x)\left(\frac{e^{-ixy}}{-iy}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\cdot\left(\frac{e^{-ixy}}{-iy}\right) dx =$$
$$= \frac{c[f'](y)}{iy} = \ldots = \frac{c[f^{(k)}](y)}{(iy)^k} = O\left(\frac{1}{y^k}\right), \qquad y \to \infty.$$

Тут мы воспользовались компактностью носителя функции и её производных.

Рассмотрим теперь $\forall f \in L_1(\mathbb{R})$. Найдём бесконечно гладкую $g$ с компактным носителем $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Тогда $\forall y \in \mathbb{R}$:

$$|c[f](y) - c[g](y)| = |c[f-g](y)| \leqslant \varepsilon.$$

При этом для $c[g](y) \to 0$ доказали (быстрее любой степени). Отсюда следует, что $\overline{\lim}|c[f](y)| < \varepsilon$, точнее равен нулю. □

**Thr 2.13** (Лемма о равномерной осцилляции)**.** *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то выражение*

$$c[f](y,\xi,\eta) = \int_{\xi}^{\eta} f(x) e^{-ixy}\, dx$$

*стремится к нулю при $y \to \infty$ равномерно по $\xi,\ \eta$.*

△. Разобьём $\mathbb{R}$ на коненое число промежутков числами $x_1 < \ldots < x_N$ так, чтобы на каждом промежутке $\int |f| < \varepsilon$. Для $\xi$ и $\eta$ найдём ближайшие $x_i$, $x_j$:

$$\left|\int_{\xi}^{\eta} f(x)e^{-ixy}\, dx\right| \leqslant \left|\int_{x_i}^{x_j} f(x)e^{-ixy}\, dx\right| + 2\varepsilon$$

и при достаточно большом $y$ по доказанному неравномерному варианту, применяемого к ограничению $f$ на $[x_i,\, x_j]$, интеграл в правой части $< \varepsilon'$, что и доказывает равномерную оценку. □

## 2.13 Порядок убывания коэффициентов Фурье абсолютно непрерывных функций

**Lem 2.14.** *Если производная $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и производные до $k$-й включительно*[3] *находятся в $L_1(\mathbb{R})$, то*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\, dx = o\left(\frac{1}{y^k}\right), \qquad y \to \infty.$$

△. Всё как раньше, но слагаемые вижа $f^{(l)}(x)e^{-ixy}|_{-\infty}^{+\infty}$ исчезают в силу конечности пределов $f^{(l)}$ на бесконечности. Так как $f^{(l+1)} \in L_1(\mathbb{R})$, то $f^{(l)}$ имеет конечные пределы в $-\infty$ и $+\infty$, которые должны быть равны нулю, так как $f^{(l)}$ конечного интеграла. □

## 2.14 Порядок убывания коэффициентов Фурье функций ограниченной вариации

**Thr 2.15.** *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, то выражение*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\, dx = O(1/y), \qquad y \to +\infty.$$

△. Получим оценку для интеграла по $[a,b]$. Можем представить $f = u+g$ в виде суммы монотонно возрастающей и убывающей. Тогда по второй теореме о среднем

$$c_{[a,b]}[f](y) = \int_a^b f(x)e^{-ixy}\, dx = u(a+0)\int_a^{\nu} e^{-ixy}\, dx + u(b-0)\int_{\nu}^{b} e^{-ixy}\, dx + g(a+0)\int_a^{\psi} e^{-ixy}\, dx + g(b-0)\int_{\psi}^{b} e^{-ixy}\, dx.$$

[3]Для $k$-й достаточно существования почти всюду.

Функция ограниченной вариации имеет пределы на бесконечности, а из интегрируемости следует их равенство нулю. Тогда значения $u(a+0)$, $u(b-a)$, $g(a+0)$, $g(b-0)$ оцениваются полной вариацией $\|f\|_B$, а интегралы оцениваются по модулю как $\frac{2}{|y|}$. $\square$

**Con 2.16.** *Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ имеет абсолютно непрерывную $(k-1)$-ую производную, производные до $k$-й включительно находятся в $L_1(\mathbb{R})$, а $f^{(k)}$ (возможно, после изменения на множестве меры нуль) имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, тогда*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx = O\left(\frac{1}{y^{k+1}}\right), \qquad y \to \infty.$$

$\triangle$. Можно получить интегрированием по частям, аналогично лемме 2.14, только используя предыдущую теорему. $\square$

**Периодические функции (не указано в билетах)**

**Def 2.17.** Для $2\pi$-*периодической функции* $f(x+2\pi) \equiv f(x)$ *коэффициенты Фурье* запишутся, как

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{(f, e^{inx})}{\|e^{inx}\|_2^2},$$

где последнее выражение понимается в смысле скалярного произведения и нормы в $L_2[-\pi,\pi]$.

Для таких функций сохраняются утверждения, доказанные выше.

**Thr 2.18.** *Пусть функция $f$ имеет период $2\pi$ и абсолютно непрерывную $(k-1)$-ую производную, причём $f^(k)$ (возможно, после изменения на множестве меры нуль) имеет ограниченную вариацию на $[-\pi,\pi]$, тогда*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \qquad n \to \infty.$$

$\triangle$. Здесь слагаемые $f(x)e^{-ixy}|_{-\pi}^{+\pi}$ обращаются в нуль в силу $2\pi$-периодичности, поэтому можем воспользоваться теоремой об ограниченной вариации. $\square$

**Lem 2.19.** *Если у $2\pi$-периодической функции ограниченной вариации есть ненулевое конечное число разрывов, и она кусочно абсолютно непрерывна, то оценка $O(1/n)$ для коэффициентов Фурье неулучшаема.*

**Thr 2.20.** *Пусть функция $f$ непрерывна и $2\pi$-периодическая, тогда для коэффициента Фурье имеется оценка*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)e^{inx}\,dx = O(\omega_f(\pi/n)),$$

*где $\omega_f$ – модуль непрерывности $f$.*

$\triangle$. Перейдём к переменной $x = x' + \pi/n$, тогда

$$c_n = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x'+\pi/n)e^{-inx'}\,dx', \qquad \Rightarrow \qquad |c_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{2}\left(f(x+\pi/n) - f(x)\right)e^{-inx}\,dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\omega_f(\pi/n).$$

Так и получаем не очень точную, но полезную оценку. $\square$

# 3 Ряд Фурье в пространстве $L_2$

## 3.15 Неравенство Коши-Буняковского

**Thr 3.1** (Неравенство Коши-Буняковского)**.** *Пусть функции* $f, g\colon X \mapsto \mathbb{R}$ *измеримы по Лебегу, а также* $|f|^2$, $|g|^2 \in L_1(X)$. *Тогда*

$$\left(\int_X f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_X |f(x)|^2\,dx\right)\cdot\left(\int_X |g(x)|^2\,dx\right).$$

$\triangle$. Домножая на константы добиваемся нормировки к 1 интегралов $|f|^2$ и $|g|^2$. Тогда

$$|fg| \leqslant \frac{|f|^2}{2} + \frac{|g|^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad \int_X |fg|\,dx \leqslant 1, \quad \Rightarrow \quad \left|\int_X fg\,dx\right| \leqslant 1.$$

$\square$

По теореме 1.30 любую $f \in L_2[-\pi,\pi]$ можно сколь угодно близко по норме приблизить бесконечно гладкой функцией с носителем строго в $(-\pi,\pi)$. Такая функция продолжается до бесконечно гладкой $2\pi$-периодической и по теореме 1.8 *равномерно* приближается тригонометрическим многочленом $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$.

Равномерное приближение является приближением по норме $L_2$, так как на отрезке $[-\pi,\pi]$ имеется неравенство $\|f\|_2 \leqslant \sqrt{2\pi}\|f\|_C$. В случае $L_2$ нормы определим коэффициенты, которыми собираемся приближать.

## 3.16 Неравенство Бесселя и оптимальность коэффициентов Фурье

**Thr 3.2** (Оптимальность коэффициентов Фурье)**.** *Для всякой* $f \in L_2[-\pi,\pi]$ *и данного числа* $n$ *лучшее по норме* $L_2$ *приближение* $f$ *тригонометрическим многочленом* $\sum_{-n}^{+n} c_k e^{ikx}$ *дают коэффициенты Фурье*

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,dx.$$

$\triangle$. Воспользуемся скалярным произведением в $L_2$, занумеруем $e^{ikx}$ в некотором порядке $\varphi_1$, $\varphi_2$, ..., где далее будет важна лишь орогональность этих функций относительно введенного скалярного произведения. Пусть мы приближаем $\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k$ и оптимизируем $a_k$, тогда

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k\right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} \bar{a}_k(f,\varphi_k) - \sum_{k=1}^{N} a_k(\varphi_k, f) + \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2\|\varphi_k\|_2^2.$$

Далее, по определению коэффициентов Фурье в виде $(f,\varphi_k) = c_k\|\varphi\|_2^2$ находим

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k\right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N}\left(\bar{a}_k c_k + a_k\bar{c}_k - |a_k|^2\right)\|\varphi_k\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2\|\varphi_k\|_2^2 + \sum_{k=1}^{N} |c_k - a_k|^2\|\varphi_k\|_2^2,$$

откуда оптимально положить $a_k = c_k$. $\square$

**Lem 3.3** (неравенство Бесселя)**.** *Из доказательства предыдущей теоремы, можем получить, что*

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{N} c_k\varphi_k\right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2\|\varphi_k\|_2^2, \quad \Rightarrow \quad \|f\|_2^2 \geqslant \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2\|\varphi_k\|_2^2, \quad \overset{\text{trig}}{\Rightarrow} \quad \|f\|_2^2 \geqslant 2\pi\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.$$

**Lem 3.4** (Представление действительнозначной функции)**.** *Для действительнозначной функции представление в виде ряда Фурье перепишется в виде*

$$f = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx), \quad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx,$$

*для* $k \geqslant 1$. *Неравенство Бесселя тогда запишется так:*

$$\|f\|_2^2 \geqslant \frac{\pi}{2}|a_0|^2 + \pi\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

## 3.17 Полные системы в пространстве $L_2$

Пусть $\{\varphi_i\}$ – ортогональная система в $L_2$. Допустим $f = \sum_i c_i\varphi_i$, где коэффиценты $c_i$ могут быть найдены непосредственно:

$$c_i = \frac{(f,\,\varphi_i)}{(\varphi_i,\,\varphi_i)},$$

что упрощается в случае ортонормированной системы до $c_i = (f,\,\tilde{\varphi}_i)$. Числа $c_i$ и называются *коэффицентами Фурье элемента* $f$ в ортогональной системе $\varphi_i$.

В таких терминах можем определить и *ряд Фурье* элемента $f$ по ортогональной системе $\{\varphi_k\}$:

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f,\,\varphi_i)}{(\varphi_i,\,\varphi_i)}\varphi_k,$$

где если система $\varphi_k$ конечна, то ряд сводится к конечной сумме.

Так например можно выделить ортогональную систему $\{1, \cos kx, \sin kx;\ k \in \mathbb{N}\}$. Или, например, многочлены Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}\left(z^2-1\right)^n,$$

образующих ортогональную систему.

**Def 3.5.** Система $\{\varphi_\alpha; \alpha \in \mathcal{A}\}$ векторов нормированного пространства $X$ называется *полной по отношению к множеству* $E \subseteq X$ (полной в $E$), если любой вектор $x \in E$ можно сколь угодно точно в смысле нормы пространства $X$ приблизить конечными линейными комбинациями векторов системы. Другими словами $E \subset \bar{L}\{\varphi_\alpha\}$ – замыкание линейной оболочки векторов.

**Thr 3.6** (условие полноты ортогональной системы)**.** *Пусть $X$ – линейное пространство со скалярным произведением, а $\varphi_k$ – конечная или счётная система ортогональных векторов в $X$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *система $\{\varphi_k\}$ полна по отношению к множеству $E \subseteq X$;*
2. *для любого вектора в $f \in E \subset X$ имеет место разложение в ряд Фурье в смысле нормы;*
3. *для любого вектора $f \in E \subset X$ имеет место равенство Парсеваля $\|f\|^2 = \sum_k |(f,\varphi_k)|^2/(\varphi_k,\varphi_k)$.*

$\triangle$. Из (1) $\Rightarrow$ (2) в силу экстремального свойства коэффициентов Фурье. Из (2) в (3) по теореме Пифагора. Из (3) $\Rightarrow$ (1) т.к. ввиду леммы о перпендикуляре по теореме Пифагора ... по Зоричу можно дописать. $\square$

**Def 3.7.** Система элементов линейного нормированного простанства $X$ называется *базисом пространства* $X$, если любая конечная её подсистема состоит из линейно независимых векторов и любой вектор $x \in X$ может быть представлен в виде $f = \sum_k \alpha_k x_k$, где $\alpha_k$ – коэффициенты из поля констант пространства $X$, а сходимость понимается по норме пространства $X$.

Для доказательства неравенства Бесселя достаточно требовать ортогональность системы. В случае же равенства Парсеваля необходима *полнота* системы – возможность приблизить любую функцию $L_2$ линейной комбинацикй функций рассматриваемой системы сколь угодно точно.

## 3.18 Равенство Парсеваля для Фурье функций из $L_2[-\pi,\pi]$

**Thr 3.8** (Сходимость ряда Фурье в среднеквадратичном)**.** *Для вской комплекснозначной $f \in L_2[-\pi,\pi]$*

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)e^{ikx}\,dx$$

*в смысле сходимости суммы в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$, а также выполняется равенство Парсеваля*

$$\|f\|_2^2 = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2.$$

$\triangle$. Сначала функцию $f$ приближаем по $L_2$ норме тригонометрическим многочленом. Формула для квадрата точности приближения

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{N} c_k\varphi_k\right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2\pi\sum_{k=1}^{N}|c_k|^2 < \varepsilon,$$

откуда при $N \uparrow$ можем говорить про сходимость ряда Фурье по $L_2$ норме по определению. Также получаем в пределе в неравенстве Бесселя равенство Парсеваля. $\square$

Стоит заметить что в последней теореме использовали «симметричное» сумирование – *суммирование в смысле главного значения*:

$$v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Пока мы не доказали, что в полученную формулу можно подставить хоть одно конкретное значение $x$. Тот факт, что ряд Фурье функции из $L_2[-\pi,\pi]$ на самом деле сходится к этой функции почти всюду, был доказан Л. Карлесоном (1966), а до этого был известен как гипотеза Лузина.

# 4 Тригонометрический ряд Фурье и его сходимость

## 4.19 Интегральное представление частичных сумм ряда Фурье, ядро Дирихле

**Def 4.1.** Обозначим *частичную сумму* тригонометрического ряда Фурье для $2\pi$-периодической функции $f$ как

$$T_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}.$$

**Lem 4.2.** *Для $n$-й частичной суммы ряда Фурье $2\pi$-периодической функции имеет место формула в виде свёртки*

$$T_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\, dT,$$

*с ядром Дирихле*

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}.$$

$\triangle$. По определению:

$$T_n[f](x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi) e^{ikx-ik\xi}\, d\xi = \Big/ \xi = x+t \Big/ = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t) \left( \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt} \right) dt.$$

Теперь раскрываем геометрическую прогрессию:

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{-itk} = -\frac{e^{int}}{2\pi} \frac{e^{it} - e^{-2int}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{i(n+1/2)t} - e^{-i(n+1/2)t}}{2\pi\left(e^{it/2} - e^{-it/2}\right)} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}.$$

$\square$

**Lem 4.3** (Равномерная ограниченность интегралов от ядра Дирихле)**.** *Существует такая константа $C$, что*

$$\left| \int_a^b D_n(t)\, dt \right| \leqslant C$$

*для любых $a, b \in [-\pi,\pi]$, $n \in \mathbb{N}$.*

$\triangle$. Заметим, что $t/\sin(t/2)$ – положительная и ограниченная на $[-\pi,\pi]$ функция, тогда вынесем её из под знака интеграла:

$$\left| \int_a^b \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\, dt \right| \sim \left| \int_a^b \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{t}\, dt \right| \sim \left| \int_{a'}^{b'} \frac{\sin t}{t}\, dt \right|.$$

А оставшееся выражение принимает значения $\in [-1,1]$, так что имеет конечный интеграл на отрезке и ограничен на всей числовой прямой. $\square$

Также можем оценить интеграл от ядра Дирихле:

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt}, \quad \Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) = 1, \quad \Rightarrow \quad T_n[f](x) - f(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \left(f(x+t) - f(x)\right) D_n(t)\,dt,$$

что исследуется равномерным принципом локализации.

## 4.20 Принцип локализации для рядов Фурье и равномерный принцип локализации

**Thr 4.4** (принцип локализации)**.** *Если $f$ – $2\pi$-периодическая абсолютно интегрируемая функция, то существование и значение предела последовательности её частичных сум Фурье $T_n[f](x)$ в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ зависит только от существования и значения предела при $n \to \infty$ интеграла*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta D_n(t)\left(f(x_0+t) + f(x_0-t)\right)\,dt,$$

*иначе говоря сходимость ряда Фурье в точке $x_0$ определяется лишь поведением функции $f$ в любой сколь угодно малой окрестности $x_0$.*

$\triangle$. Во-первых, по чётности ядра Дирихле, можем записать

$$T_n[f](x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\left(f(x+t)+f(x-t)\right)\,dt = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^\delta + \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi\right) D_n(t)\left(f(x+t)+f(x-t)\right)\,dt.$$

Подробнее рассмотрим последнее слагаемое:

$$\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin(t/2)} \sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\right)\,dt = o(1), \qquad n \to \infty,$$

так как $\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin(t/2)}$ интегрируемое по интегрируемости $f$ и ограниченности $\frac{1}{\sin(t/2)}$. Оставшаяся велична стремится к 0 по лемме Римана об осцилляции. $\square$

**Thr 4.5** (Равномерный принцип локализации)**.** *Запищем для $\delta \in (0, \pi)$*

$$T_n(f,x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+t) - f(x)\right) D_n(t)\,dt = \int_{-\delta}^{\delta}\left(f(x+t) - f(x)\right) D_n(t)\,dt + \int_M (f(x+t)-f(x))D_n(t)\,dt,$$

*где $M = \{t \mid \delta \leqslant |t| \leqslant \pi\}$. Если $f \in L_1[-\pi,\pi]$, то*

$$\int_M \left(f(x+t)-f(x)\right) D_n(t)\,dt \ \to \ 0, \qquad n \to \infty.$$

*Если $f$ ограничена на отрезке $[a,b]$, то это выражение стремится к нулю равномерно по $x \in [a,b]$.*

$\triangle$. Делаем то же, что и раньше, но подводим всё к лемме о равномерной осцилляции:

$$\left|\int_a^b f(x+t)\sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\right)dt\right| \sim \left|\int_a^b f(x+t)e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}\,dt\right| = \left|\int_{x+a}^{x+b} f(\xi)e^{\left(i\left[n+\frac{1}{2}\right]\xi - i\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)}\,d\xi\right| = \left|\int_{x+a}^{x+b} f(\xi)e^{\left(i\left[n+\frac{1}{2}\right]\xi\right)}\,d\xi\right|,$$

где уже можем применить лемму о равномерной осцилляции в силу $f \in L_1$. $\square$

## 4.21 Признак Липшица равномерной сходимости ряда Фурье

**Def 4.6.** Функция $f$ называется гёльдеровой степени $\alpha > 0$, если для любых $x$, $y$ из области определения

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha$$

с некоторой константой $C$.

**Thr 4.7** (Признак Липшица сходимости ряда Фурье)**.** *Для абсолютно интегрируемой $2\pi$-периодической функции, которая является гёльдеровой с некоторыми $C$, $\alpha > 0$ на интервале $(A,B) \supset [a,b]$*

$$T_n(f,x) \to f(x)$$

*равномерно по $x \in [a,b]$ при $n \to \infty$.*

$\triangle$. Вспомним локальное представление $T_n[f](x) - f(x)$, как

$$\left|\int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t) - f(x))\, D_n(t)\, dt\right| \leqslant C \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|t|^\alpha}{2\pi} \frac{1}{|\sin t/2|}\, dt \leqslant \frac{C}{2} \int_{-\delta}^{\delta} |t|^{\alpha-1}\, dt \leqslant \frac{C}{\alpha}|\delta|^\alpha,$$

где мы воспользовались мыслью, что $\pi|\sin t/2| \geqslant t$ на $[-\pi, \pi]$. По произвольности $\delta$ и равномерного принципа локализации следует, что $T_n[f](x) - f(x)$ может быть равномерно сделано сколь угодно маленьким при некотором $\delta > 0$ и $n$. $\square$

## 4.22 Признак Дирихле равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье на отрезке

Стоит заметить, что верна следующая цепочка вложений:

$C^1[-\pi, \pi] \subseteq$ $L$-Lipshitz непрерывные $\subseteq AC[-\pi, \pi] \subseteq BV[-\pi, \pi] \subseteq$ дифференцируемые почти всюду,

где $BV$ – банахово несепарабельное пространство функций ограниченной вариации.

Так, например $x \sin(1/x)$ – непрерывная функция неограниченной вариации. Функция Кантора на $[0, 1]$ – функция ограниченной вариации, но не абсолютно непрерывная.

**Thr 4.8** (Признак Дирихле сходимости ряда Фурье). *Для абсолютно интегрируемой $2\pi$-периодической функции, которая является непрерывной с ограниченной вариацией на интервале $(A, B) \supset [a, b]$*

$$T_n(f, x) \to f(x)$$

*равномерно по $x \in [a, b]$ при $n \to \infty$.*

## 4.23 Признаки Липшица, Дирихле и Дини сходимости Фурье в точке

**Thr 4.9** (признак Дини). *Пусть $f$ – $2\pi$-периодиечкая $\in L_1[-\pi, \pi]$. Если $x$ – точка непрерывности или разрыва I рода и $\exists \delta \in (0, \pi)$ такое, что $\int_0^\delta |f_x^*(t)|/t\, dt$ сходится, то ряд Фурье $f$ сходится в $x$ к $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$.*

Выше использовалась функция $f_x^*(t) = f(x-t) + f(x+t) - f(x-0) - f(x+0)$. В случае, если точка была регулярной, то Фурье к ней и сходится. Аналогично можно сформулировать это утвержение, как

$$\int_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{f(x+t) - f(x)}{t}\right| dt \text{ сходится} \quad \Rightarrow \quad \text{ряд Фурье сходится к } f(x).$$

Признаке Дирихле и Липшица в точке являются локальными аналогами признаков на отрезке.

## 4.24 Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье

**Thr 4.10** (почленное интегрирование ряда Фурье). *Пусть $f \in L_1[-\pi, \pi]$ соответствует не обязательно сходящийся ряд Фурье, записанный в действительном виде как*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + B_n \sin nx).$$

*Тогда ряд Фурье можно почленно интегрировать, то есть выполняется формула*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{2} a_0 (b-a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n \sin nx}{n} - \frac{b_n \cos nx}{n}\right)\Bigg|_a^b.$$

**Thr 4.11** (почленное дифференцирование ряда Фурье). *Если $f(x)$ – абсолютно непрерывная $2\pi$-периодическая функция, то ряд Фурье производной $f'(x)$ получается при помощи формаьного почленного дифференцирования ряда Фурье функции $f(x)$:*

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n' \cos nx + b_n' \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \cos nx - n a_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)'.$$

### 4.25 Теорема Фейера

**Def 4.12.** Определим *ядро Фейера*

$$\Phi_n(t) = \frac{D_0(t) + D_1(t) + \ldots + D_n(t)}{n+1} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} \frac{n+1-|k|}{n+1} e^{ikx},$$

как усреднение ядер Дирихле. Соответствующая *сумма Фейера* будет соответствовать усреднением первых $n+1$ частичных сумм ряда Фурье,

$$S_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\xi)\Phi_n(\xi)\,d\xi = \frac{T_0(f,x) + \ldots + T_n(f,x)}{n+1}.$$

Записав

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} = \frac{1}{4\pi}\frac{\cos nt - \cos\left((n+1)t\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)},$$

и суммируя, получаем

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{4\pi}\frac{1-\cos\left((n+1)t\right)}{(n+1)\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{(n+1)\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

**Thr 4.13.** *Для непрерывной $2\pi$-периодической $f$*

$$S_n(f,x) \rightrightarrows f(x),$$

*то есть сходится равномерно.*

### 4.26 Представление котангенса и косеканса. Формула дополнения для бета-функции

**Lem 4.14.** *Разложим $\cos ax$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ при $a \notin \mathbb{Z}$ в ряд Фурье. Легко получить, что*

$$\operatorname{ctg} x = v.p. \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-\pi k}$$

$$\frac{1}{\sin x} = v.p. \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x-\pi k}$$

$$\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2k^2}\right).$$

**Lem 4.15.** *Формула дополнения для бета-функции про $p \in (0,1)$*

$$B(p,1-p) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{-p}\,dt = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

**Lem 4.16.** *Для $0 < |x| < \pi$ верно, что*

$$\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x = \sum_{n,k\geqslant 1} \frac{2x^{2k-1}}{\pi^{2k}n^{2k}},$$

*откуда можно получить значения сумм $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.*

## 5 Банаховы пространства

### 5.40 Нормированные векторные и банаховы пространства

**Def 5.1.** Векторное $E$ – **нормировано**, если $\forall v \in E$ имеется $||v||$ такое, что:

- Однородность: $||\alpha v|| = |\alpha|||v||$
- Неравенство треугольника: $||v+w|| \leqslant ||v|| + ||w||$
- Невырожденность: $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Можно эквивалентно определить норму единичным шаром с центром в $B_0(1)$:
$$||x|| = \inf\{|1/t| \mid tx \in B_0(1)\} \qquad \text{where } B_c(r) = \{x \in E \mid ||x - c|| \leqslant r\}.$$

**Def 5.2.** Полное нормированное пространство называется **банаховым**.

## 5.41 Теорема Бэра в банаховом пространстве

**Thr 5.3.** *Счетное $U_k$ – открытых всюду плотных подмножеств банахова $E$ имеет $\bigcap_k U_k \neq \varnothing$.*

**Con 5.4.** *Если банахово $E$ покрыто счетным $(Z_k)$ замкнутых множеств, то $\exists m$: $intZ_m \neq \varnothing$.*

**Thr 5.5** (Неподвижные точки сжимающих отображений)**.** *Для банахово $E$ замкнутого $X \subset E$ отображение $f\colon X \to X$ – **сжимающее**, то есть*
$$\exists C < 1\colon \forall x, y \in X \, ||f(x) - f(y)|| \leqslant C||x - y||.$$
*Имеет неподвижную точку $x \in X$ такую, что $f(x) = x$.*

## 5.42 Двойственное к банахову пространство

**Def 5.6.** Для нормированного $E$ введм двойственное $E'$ – линейных оторажений $\lambda\colon E \to \mathcal{R}](\mathcal{C})$. Норма:
$$||\lambda|| = \sup\{|\lambda(x)| \mid ||x|| \leqslant 1\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x \in E \, |\lambda(x)| \leqslant ||\lambda|| \cdot ||x||.$$

**Lem 5.7.** *Линейный функционал $\lambda \in E'$ непрерывен **тогда и только тогда**, когда $||\lambda|| \leqslant +\infty$.*

**Thr 5.8.** *Двойственное $E'$к нормированному $E$ – полно по своей норме.*

## 5.43 Теорема Банаха-Штейнгауза

Пусть семейство $Y \subset E'$ $\forall x \in E$ $\{\lambda(x) \mid `; \in Y\}$ – ограничено. **Тогда** $Y$ ограничено в смысле нормы $E'$.

## 5.44 Расходимость рядов Фурье

**Thr 5.9.** *Существует $2\pi$-периодическая функция, ряд Фурье которой расходится в точке 0.*

## 5.46 Непрерывне линейные отображения

**Def 5.10.** **Норма** линейного $A\colon E \to F$ между банаховыми — $||A|| = \sup\{||A(x)|| \mid x \in E, ||x|| \leqslant 1\}$.

Можно сформулировать утверждения:
$$\forall x \in E, \, ||Ax|| \leqslant ||A|| \cdot ||x||$$
и для $f\colon E \to F$ и $g\colon F \to G$ верно:
$$||g \circ f|| \leqslant ||g|| \cdot ||f||.$$
Ядро отображения между банаховыми это просто $\ker A = \{x \in E \mid Ax = 0\}$.

## 5.47 Факторпространство банахового пространства

**Def 5.11.** Если $G \subset E$ – замкнутое неполное подпространство $E$, то на факторпрострнастве $E/G$ **норма**:
$$||x + G|| = \inf\{||x + y|| \mid y \in G\} = \inf\{||x - y|| \mid y \in G\} = \operatorname{dist}(x, G) = \operatorname{dist}(0, x + G).$$

**Lem 5.12.** *Определенная выше $|| \cdot ||\colon E/G \to \mathcal{R}$ для замкнутого $G \subset E$ в банаховом $E$ явялется нормой.*

**Lem 5.13.** *Естественная проекция $\pi\colon E \to E/G$ для замкнутого $G \in E$ имеет единичную норму.*

**Lem 5.14.** *Факторпространство $E/G$ банохова пространства по замкнутому подпространству полно.*

### 5.48 Изоморфизм непрерывных линейных отображений

**Lem 5.15.** *Если отображение банаховых $A\colon E \to F$ непрерывно, то соответствующее $\bar{A}\colon E/\ker A \to F$ тоже непрерывно и $||\bar{A}|| = ||A||$.*

**Def 5.16.** Линейное отображене банаховых $A\colon E \to F$ — **изоморфизм**, если $A$ непрерывно и $\boldsymbol{A}$ тоже непрерывно.

**Def 5.17.** Если линейное непрерывное из банаховых $A\colon E \to F$ имеет замкнутый $\operatorname{Im} A(E)$, то оно порождает изоморфизм $E/\ker A \to A(E)$.

### 5.49 Эпсилон-сети, предкомпактность и вполне ограниченность

**Def 5.18.** Для топологического пространства $M$, его $X \subseteq M$ — **предкомпактным**, если $\overline{X}$ – компактно.

**Def 5.19.** $X \subseteq M$ называется **вполне ограниченным**, если $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \subseteq X$ – конечная $\varepsilon$-сеть. (равносильно и утверждение с $N \subset X$) Или $\forall \varepsilon > 0$, $X$ покрывается конченым набором шаров с центрами в $X$ и радиусами $\varepsilon$.

**Thr 5.20.** *Для полного метрического пространства $M$, его $X \subseteq M$ – компактно $\Longleftrightarrow$ $X$ – вполне ограничено.*

### 5.50 Теорема Арцела-Асколи

**Def 5.21.** Множество функций $X \subset C(K)$(над метрическим компактом) **равностепенно непрерывно** , если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\colon \forall f \in X\, \forall x, y \in K,\ \rho(x, y) < \delta \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Если все функции ещё и $L$-липшецивы, то $|f(x) - f(y)| = L\rho(x, y)$.

**Def 5.22.** **Модуль непрерывности** липшецивых функций:

$$\omega_X(\delta) = \sup\left\{|f(x) - f(y)| \mid f \in X,\ \rho(x, y) < \delta\right\}.$$

И тогда, $X$ – равностепенно непрерывно $\Longleftrightarrow$ $\omega_X(\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$.

**Thr 5.23** (Арцела-Асколи)**.** *Множество $X \subset C(K)$ предкомпактно $\Longleftrightarrow$ $X$ равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно.*

## 6 Гильбертовы пространства

### 6.51 Гильбертово пространство

**Def 6.1.** Если норма в банаховом $E$ порождается +определённым $||x|| = \sqrt{(x, x)}$, то $E$ — **гильбертово**.

**Thr 6.2** (Неравнество Коши-Буняковского)**.** $|(x, y)| \leqslant ||x|| \cdot ||y||$

$$(ax + by, ax + by) \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad |a|^2||x||^2 + a\bar{b}(x, y) + b\bar{a}\overline{(x, y)} + |b|^2||y||^2 \geqslant 0$$

**Thr 6.3.** *Вещественное банахаво $E$ – гильбертово* ***тогда и только тогда****, когда $\forall x, y \in E$:*

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$

### 6.52 Полнота и замкнутость ортонормированной системы в гильбертовом пр-ве

**Def 6.4.** Последовательность векторов $(\varphi_k)$ — **полная система векторов** в банаховом $E$, если $\overline{\langle \varphi_k \rangle} = E$. Другими словами $\forall x \in E$ и $\forall > 0$ найдется конечная $a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n$ такая, что $||x - a_1\varphi_1 - \cdots - a_n\varphi_n|| < \varepsilon$.

**Def 6.5.** $(\varphi_k)$ — **замкнутая система векторов** в гильбертовом $H$, если в $\forall x \in H\colon (x, \varphi_k) = 0$, $\forall k$.

**Thr 6.6.** *$\forall \varphi_k$ – ортогональной в гильбертовом $H$ эквивалентны утверждения:*

- *полнота системы;*
- *замкнутость системы;*
- *сходимость ряда Фурье $\forall x \in H$ по системе $(\varphi_k)$ к $x$;*
- *равенство Парсеваля для коэффициентов Фурье $\forall x \in H$ по данной системе.*

### 6.53 Изометрии гильбертовых пространств

**Def 6.7.** Линейное $A\colon E \to F$ — **изометрия**, если оно биективно и сохраняет норму: $||A|| = ||A^{-1}|| = 1$.

**Lem 6.8.** *Изометрия гильбертовых пространств сохраняет скалярное произведение.*

**Thr 6.9** (Рисса-Фишера). *$\forall H$, в котором $\exists$ счетная полная система элементов, изометрична $\mathcal{C}^n(\mathcal{R}^n)$ или комплексному(действительному) варианту бесконечномерного пространства последовательностей $l_2 = L_2(\mathcal{N})$.*

### 6.54 Метрическая проекция и двойственное к гильбертову пр-во

**Thr 6.10.** *$V \subset H$ – замкнутое линейное подпространство (афинное) гильбертова. $\forall x \in H\, \exists! P_V(x) \in V$ ближайший к $x$ то есть $||x - P_V(x)|| = dist(x, V)$.*

**Thr 6.11.** *Если $V \subset H$ – замкнутое линейное подпространство, то **метрическая проекция** $P_V : H \to V$ линейна, $||P_V|| = 1$ при $V \neq 0$ и имеет место ортогональное разложение в прямую сумму замкнутых подпространств $H = V \oplus \ker P_V$.*

### 6.55 Двойственное к гильбертову пространству

**Thr 6.12.** *$\forall y \in H\colon \lambda_y(x) = (x, y)$. Тогда $\lambda_y \in H'$, $||\lambda_y|| = ||y||$ и все элементы двойственного пространства $H'$ имеют такой вид.*

## 7 Обобщенные функции

### 7.63 Пространство $\mathcal{E}$ и топология в нём

Будем рассматривать функции на действительной прямой, чтобы не отвелкаться на технические тонкости. И так

**Def 7.1.** $\mathcal{E}(\mathcal{R}) = C^\infty(\mathcal{R})$. Топологию в таком пространстве зададим полунормами:
$$||f||_{K,k} = \sup\{|f^{(k)}| \mid x \in K\},$$
где $K \subset \mathcal{R}$ – компакты и $k \in \mathcal{Z}_+$. Ну то есть имеем семейство открытых:
$$U_{K,k,\varepsilon}(f_0) = \{f \mid ||f - f_0||_{K,k} < \varepsilon\}.$$

**Thr 7.2.** *Пространство $\mathcal{E}$ – полно.*

### 7.64 Связь непрерывности и ограниченности

**Thr 7.3.** $\forall$ *непрерывного линейного* $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathcal{R})\ \exists C > 0,\ k \in \mathcal{Z}_+,\ K = [-m, m]$ :
$$|\lambda(\varphi)| \leqslant C max\{||\varphi||_{K,l} \mid 0 \leqslant l \leqslant k\} = C \sup\{|\varphi^{(l)}(x)| \mid x \in [-m, m], 0 \leqslant l \leqslant k\}.$$

## 7.65 Описание через интегрирование производных по отрезку

**Thr 7.4.** *$\forall\lambda \in \mathcal{E}'(\mathcal{R})$ задаётся интегрированием проихводных $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ по борелевским мерам со знаком конечной вариации на некотором отрезке:*

$$\lambda(\varphi) = \int_{-m}^{m} \varphi d\mu_0 + \int_{-m}^{m} \varphi' d\mu_1 + \dots + \int_{-m}^{m} \varphi^{(k)} d\mu_k.$$

## 7.66 Прстранство $\mathcal{D}$ и сходимость в нём

В основном, когда речь заходит про обобщенные функции имеется в виду именно пространство $D'$

**Def 7.5.** $(\varphi_k) \subset \mathcal{D}(\mathcal{R})$ сходится к $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{R})$, если $\text{supp}\varphi_k \in [-m, m]$ и $\forall l \in \mathcal{Z}^+$ равномерно $\varphi_k^(l) \overset{[-m,m]}{\rightrightarrows} \varphi_0^{(l)}$.

С помощью сходимости в $\mathcal{D}$ определим непрерывные линейные функционалы из которых получим $\mathcal{D}'(\mathcal{R})$. И если не оговорено обратного, именно его мы будем называть **пространством обобщенных функций**

## 7.67 Пространство обобщённых функций. Регулярные и нерегулярные

**Def 7.6.** $\forall$ локально $\mathrm{L}_1 \ni f\colon \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ задаёт $\lambda_f \in \mathcal{D}'(\mathcal{R})$ **регулярные функции**:

$$\lambda_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

**Lem 7.7.** *Локально интегрируемые $f$ и $g$ задаются $\lambda_f = \lambda_g \in \mathcal{D}'(\mathcal{R})$ **тогда и только тогда**, когда они отличаются на множестве меры нуль.*

Помимо регулярных в пространстве $\mathcal{D}'$ лежат ещё нерегулярные. Давайте посмотрим на самую популярную из них.

**Def 7.8.** **Дельта-функция** или функция Дирака

$$\lambda_\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \qquad \delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

Также можно говорить о смещенной дельтта-функции:

$$\lambda_\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)dx = \varphi(a)$$

## 7.68 Топология и сходимость в D'

**Def 7.9.** В $\mathcal{D}'(\mathcal{R})$ используется $\star$-слабая топология соответствующая поточечной сходимости. Предбаза топологии:

$$U_{\varphi,a,b} = \{\lambda \in \mathcal{D}'(\mathcal{R}) \mid a < \lambda(\varphi) < \beta\},$$

для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{R})$, $a < b \in \mathcal{R}$. Сходимость в $\mathcal{D}'(\mathcal{R}) : \lambda_n \to \lambda_0$ будем понимать в смысле $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{R}) : \lambda_n(\varphi) \to \lambda_0(\varphi)$.

**Thr 7.10.** *Пусть $(f_k)$ локально интегрируемых: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 1$. Пусть $\exists C > 0\colon |\int_a^b f_n(x)dx| < C$ при этом $C$ не зависит $a, b, n$. Пусть ещё $\forall\delta > 0$ (внимание, это не дельта-функция):*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{+\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\delta} = 0.$$

***Тогда*** *$\lambda_{f_n} \to \delta_0$ в смысле $\mathcal{D}'(\mathcal{R})$*

**Suj 7.11.** *Получаем свойство интергала Дирихле: $\frac{\sin\lambda x}{\pi x} \to \delta_0$ при $\lambda \to \infty$ в смысле сходимости в $\mathcal{D}'(\mathcal{R})$.*

## 7.69 Дифференцирование обобщенных функций

Общая идея выведения действия какой-либо операции на обобщенные функции – проделать её с регулярной, а затем обобщить и на нерегулярные. Будем теперь писать действия обобщенной функции как: $\lambda_f(\varphi) = \langle \lambda_f, \varphi \rangle$.
**Def 7.12.** Производная от обобщенной функции: $\langle \lambda', \varphi \rangle = -\langle \lambda, \varphi' \rangle$.

Здесь это вынесено определением, но несложно показать интегрируя по частям функцию с компактным носителем:

$$\langle \lambda'_f, \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

Таким образом получили линейный непрерывный функционал.

Можно сформулировать утверждения вытекающие из определения производной:

1. $\forall f \in \mathcal{D}'$ имеет производные всех порядков;
2. Если $(f_k) \to f$ для обобщенных. То и $f'_k \to f'$. И так далее;

**Lem 7.13.** *Всякий сходящийся ряд из обобщенных функций можно дифференцировать почленно любое количество раз.*

И для примера рассмотрим тоже популярную функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ x > 0 \\ 0, \ x \leqslant 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \langle \lambda_f, \varphi \rangle = \int_0^\infty \varphi(x)dx$$

Это **Функция Хевисайда** она обладает хайповым свойством – её производная это дельта-функция:

$$\langle \lambda'_f, \varphi \rangle = -\langle \lambda_f, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0).$$

Покажем ещё непрерывность в смысле топологии по конспекту Романа Николаевича:

$$\lambda' \in U_{\varphi,a,b} \quad \Leftrightarrow \quad a < \lambda'(\varphi) < b \quad \Leftrightarrow \quad a < -\lambda(\varphi') < b \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in U_{-\varphi',a,b}.$$

## 7.70 Умножение на бесконечно гладкую функцию

**Def 7.14.** Умножение $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathcal{R})$ на $f \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ определим как:

$$\langle \lambda f, \varphi \rangle = \langle \lambda, f\varphi \rangle.$$

При чём у нас есть правило Лейбница

$$(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$$

**Lem 7.15.** *Определение умножения $\lambda f$ корректно, то есть $\lambda f \in \mathcal{D}'(\mathcal{R})$.*

**Lem 7.16.** *Произведение $\lambda f$ непрерывно зависит от $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathcal{R})$.*

## 7.71 Носитель распределения из пространства обобщённых функций

Будем говорить, что для открытого $U \subset \mathcal{R}$ обобщенная функция $\lambda\big|_U = 0$, если $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{R})\colon \lambda(\varphi) = 0$
**Lem 7.17.** *Пусть для $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathcal{R})$ $\exists$ открытые $\{U_\alpha\}\colon \forall \alpha \, \lambda\big|_{U_\alpha} = 0$.* ***Тогда*** *для $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ окажется $\lambda\big|_U = 0$.*

**Def 7.18.** Для $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathcal{R})$ положим $Z_\lambda = \bigcup \{U \mid \lambda\big|_U = 0\}$. Введём **носитель** $\lambda$ как $\operatorname{supp}\lambda = \mathcal{R} \setminus Z_\lambda$.

И ещё пара интересных свойств:

**Lem 7.19.** *$\forall \lambda \in \mathcal{D}'(\mathcal{R})$ с компактным носителем можно однозначно сопоставить элемент $\mathcal{E}'(\mathcal{R})$ с помощью умножения $\lambda$ на функцию с компактным носителем равную единице в окрестности $\operatorname{supp}\lambda$.*

**Thr 7.20.** *$\forall \lambda \in \mathcal{D}'(\mathcal{R})$ с компактным носителем является производной некоторого порядка от некоторой регулярной обобщённой функции.*

## 7.72 Преобразование Фурье для обобщённый функций

Тут нам уже потрубется пространство $\mathcal{S}(\mathcal{R})$. Так как
**Def 7.21.** Преобразование Фурье непрерывно переводит $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ в $\mathcal{S}(\mathcal{R})$.

**Def 7.22.** $\mathcal{S}(\mathcal{R})$ – **пространство бесконечно дифференцируемых функций** $f\colon \mathcal{R} \to \mathcal{C}$, у которрой конечны все полунормы $(k, n \geqslant 0)$

$$||f||_{n,k} = \sup\{x^n f^{(k)}(x) \mid x \in \mathcal{R}\}.$$

Соответсвенно можем определить преобразование Фурье:

$$\langle F[\lambda], \varphi \rangle = \langle \lambda, F[\varphi] \rangle.$$

Наверное тут хочется посмотреть на хороший пример: обозначим $F[\delta] = \hat{\delta}$, тогда

$$(\hat{\delta}, \varphi) = (\delta, \hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy} dx \Big|_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \varphi \right)$$

Ого, мы полчуили, что $F[\delta] = 1/\sqrt{2\pi}$, а для обратного тогда $F^{-1}[1] = \sqrt{2\pi}\delta$. И подобным же образом получается и прямое преобразование фурье для единицы, что ранее не в обобщенных нам было не доступно.