

ТЕОРИЯ К КУРСУ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА II» ФОПФ

За авторством: Хоружего К.
Примака Е.

От: 11 февраля 2021 г.

Содержание

Малые колебания консервативной системы около положения равновесия	2
14.1 Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия	2
Устойчивость движения	2
15.1 Основные понятия и определения	2
15.2 Основные теоремы прямого метода Ляпунова	3
15.3 Устойчивость по первому приближению	4
15.4 Влияние диссипативных и гироскопических сил на устойчивость равновесия консервативной системы	5

Малые колебания консервативной системы около положения равновесия

14.1 Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия

Устойчивость равновесия

Thr 14.1 (Общее уравнение статики¹). Чтобы некоторое допускаемое идеальными удерживающими связями состояние равновесия системы было состоянием равновесия на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$, необходимо и достаточно, чтобы для любого момента времени из этого интервала элементарная работа активных сил на любом виртуальном перемещении равнялась нулю, т.е. чтобы выполнялось

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{F}_{\nu} \cdot \delta \mathbf{r}_{\nu} = 0 \quad (t_0 \leq t \leq t_1).$$

Если система является потенциальной, то уравнения примут вид

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} = 0.$$

Def 14.2. Положение равновесия $q = 0$ – устойчиво по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, такая что

$$\forall |q(t_0)| < \delta, |\dot{q}(t_0)| < \delta: |q(t)| < \varepsilon, |\dot{q}(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0. \quad (14.1)$$

Def 14.3. Положение равновесия $q = 0$ – неустойчиво по Ляпунову, если $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0$, такая что

$$\forall \delta > 0 \exists |q(t_0)| < \delta, |\dot{q}(t_0)| < \delta, t^*: |q(t^*)| > \varepsilon \text{ или } |\dot{q}(t^*)| > \varepsilon. \quad (14.2)$$

Теорема Лагранжа

Thr 14.4 (Теорема Лагранжа-Дирихле). Если в положении равновесия консервативной системы $\Pi(q)$ имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.

Lem 14.5. При наличии гироскопических и диссипативных сил положение равновесия сохранится.

Теоремы Ляпунова о неустойчивости положения равновесия консервативной системы

Thr 14.6 (Теорема Ляпунова о неустойчивости I). Если в положении равновесия $\Pi(q)$ не имеет минимума и это определяется по квадратичной форме её разложения в ряд (в окрестности положения равновесия), то это положение равновесия неустойчиво.

Thr 14.7 (Теорема Ляпунова о неустойчивости II). Если в положении равновесия $\Pi(q)$ имеет строгий максимум и это определяется по наименьшей степени её разложения в ряд (в окрестности положения равновесия), то это положение равновесия неустойчиво.

Устойчивость движения

15.1 Основные понятия и определения

Возмущенное движение

Пусть уравнение движение представлено в виде:

$$\frac{dy_i}{dt} Y_i(y_1, y_2, \dots, y_m, t) \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (15.3)$$

Рассмотрим частное движение — частное решение этой системы с начальными условиями

$$y_i^* = f_i(t)(i = 1, 2, \dots, m), \quad y_{i0} = f_i(t_0)(i = 1, 2, \dots, m). \quad (15.4)$$

Нас будут интересовать движения системы при отклонении от начальных условий y_{i0} от значений $f_i(t_0)$.

¹Если с необходимостью всё понятно, то достаточность может быть доказана через уравнения Аппеля (см. п. 158, Маркеев П. А.).

Def 15.8. Движение системы, описываемое (15.4) называется *невозмущенным* движением. Все другие движения механической системы при тех же силах, что и движение (15.4) — *возмущенные* движения.

Def 15.9. Возмущениями назовём разности вида:

$$x_i = y_i - f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (15.5)$$

Def 15.10. Теперь, произведя замену по формулам (15.5) в уравнениях (15.3) получим *дифференциальные уравнения возмущенного движения*:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_m, t) \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (15.6)$$

Уравнения (15.6) имеют частное решение $x_i \equiv 0$ отвечающее невозмущенному движению.

Def 15.11. Движение называется *установившимся*, если $X_i \neq g(t)$, в противном же случае — *неустановившимся*.

Def 15.12 (Устойчивость по Ляпунову). Невозмущенное движение называется *устойчивым* по отношению к переменным y_i , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon): \forall$ возмущенных движений, для которых

$$|x_i(t_0)| < \delta, \quad \forall t > t_0 \quad \text{выполняется} \quad |x_i(t)| < \varepsilon. \quad (15.7)$$

Def 15.13 (Асимптотическая устойчивость). Невозмущенное движение называется *асимптотически устойчивым* по отношению к переменным y_i , если оно устойчиво и $\exists \delta$ — маленькие такие, что для возмущенных движений удовлетворяющим условиям (15.7) верно:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (15.8)$$

Функции Ляпунова

Для простоты будем изучать только установившиеся движения. В уравнениях возмущенного движения (15.6) функции X_i будем считать непрерывными в области

$$|x_i| < H (= \text{const}) \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (15.9)$$

и такими, что уравнения (15.6) при начальных значениях x_{i0} из области (15.9) допускают единственное решение.

Def 15.14 (Функция Ляпунова). В области $|x_i| < h$, где $h > 0$ — достаточно малое число, будем рассматривать функции *Ляпунова* $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$, предполагая их непрерывно дифференцируемыми, однозначными и обращающимися в нуль в начале координат $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$.

Def 15.15. Производной dV/dt функции V в силу уравнений возмущенного движения (15.6) называется:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i.$$

Таким образом производная от функции Ляпунова также $g(x_1, x_2, \dots, x_m)$, будет непрерывной в той же области и обращаться в нуль в начале координат.

Def 15.16. $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$ назовём *определенно-положительной* в области $|x_i| < h$, если всюду в этой области, кроме начал координат верно: $V > 0$. Аналогично с определенной отрицательно. В обоих случаях функция V называется *знакоопределенной*.

Def 15.17. Если в области $|x_i| < h$ функция V может принимать значения только одного знака, но может обращаться в нуль не только в начале координат, то она называется *знакопостоянной*.

Def 15.18. Наконец, если функция может принимать в области как значения большие нуля, так и меньшие, она называется *знакопеременной*.

15.2 Основные теоремы прямого метода Ляпунова

Здесь и далее для простоты рассматриваем установившееся движение.

Thr 15.19 (Теорема Ляпунова об устойчивости). Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует знакоопределенная функция V , производная которой \dot{V} в силу этих уравнений является знакопостоянной функцией противоположного знака с V , или тождественно равной нулю, то *невозмущенное движение устойчиво*.

Thr 15.20 (Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости). Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует знакоопределенная функция $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$, производная которой \dot{V} в силу этих уравнений есть знакоопределенная функция противоположного знака с V , то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Теоремы о неустойчивости

Def 15.21. Окрестностью положения равновесия, считая, что положение равновесия находится в точке $q^1 = \dots = q^n = 0$, назовём область такую, что

$$|q^i| < h, \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Def 15.22. Областью $V > 0$ назовём какую-либо область окрестности положения равновесия, в которой $V(x_1, x_2, \dots, x_m) > 0$. Поверхность $V = 0$ назовём границей области $V > 0$.

Thr 15.23 (Теорема Читаева о неустойчивости). Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция $V(x_1, \dots, x_m)$ такая, что в сколь угодно малой окрестности положения равновесия существует область $V > 0$ и во всех точках области $V > 0$ производная \dot{V} в силу уравнений принимает положительные значения, то невозмущенное движение неустойчиво.

Def 15.24. Функцию V , удовлетворяющую теореме Читаева о неустойчивости, называют функцией Читаева.

Thr 15.25 (I теорема Ляпунова о неустойчивости движения). Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция $V(x_1, \dots, x_m)$ такая, что ее производная \dot{V} в силу этих уравнений есть функция знакоопределенная, сама функция V не является знакопостоянной, противоположного с \dot{V} знака, то невозмущенное движение неустойчиво.

Thr 15.26 (II теорема Ляпунова о неустойчивости движения). Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция V такая, что её производная, в силу этих уравнений, в области положения равновесия может быть представлена в виде

$$\dot{V} = \varkappa V + W,$$

где \varkappa – положительная постоянная, а W или тождественно обращается в нуль, или представляет собой знакопостоянную функцию. Если W – знакопостоянная функция, а V не является знакопостоянной функцией: $WV < 0$, то невозмущенное движение неустойчиво (ну и если $w \equiv 0$).

15.3 Устойчивость по первому приближению

Постановка задачи

Запишем уравнения установившегося возмущенного движения в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{X}(\mathbf{x}). \quad (15.10)$$

Функции X_i будем считать аналитическими в окрестности начала координат, причем их разложения в ряды начинаются с членов не ниже второго порядка малости относительно x_1, x_2, \dots, x_m .

Вопрос об устойчивости движения очень часто исследуется при помощи уравнений первого приближения:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}, \quad (15.11)$$

которые получаются из полных уравнений возмущенного движения (15.10) при отбрасывании в последних нелинейных относительно x_1, x_2, \dots, x_m членов.

Можно составить характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (15.12)$$

которое в общем виде даст решение $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^m c_j \mathbf{j}_j e^{\lambda_j t}$.

Однако как правило уравнения возмущенного движения нелинейны. Поэтому возникает задача об определении условий, при которых выводы об устойчивости, полученные из анализа уравнений первого приближения (15.11), справедливы и для полных уравнений возмущенного движения (15.10) при любых нелинейных членах X_i . Эта задача была полностью решена Ляпуновым.

Устойчивость по первому приближению

Thr 15.27. Если $\forall \lambda_i$ уравнения (15.12): $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво независимо от нелинейных членов в (15.10).

Если же $\exists \lambda_i : \operatorname{Re} \lambda_i > 0$, то возмущенное движение неустойчиво — тоже независимо от нелинейных членов в (15.10).

Если же $\exists \lambda_i : \operatorname{Re} \lambda_i = 0$, то подбирая нелинейные члены можно показать, что положение как устойчиво, так и неустойчиво.

((Когда-нибудь здесь появится доказательство))

Критерий Рауса-Гурвица

Запишем уравнение (15.12) в виде

$$a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m = 0. \quad (15.13)$$

Коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_m этого уравнения — вещественные числа. Без ограничения общности $a_0 > 0$.

По теореме Виета имеем:

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_0} &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m), \\ \frac{a_2}{a_0} &= \lambda_1 \lambda_2 + \dots + \lambda_{m-1} \lambda_m, \\ &\vdots \\ \frac{a_m}{a_0} &= (-1)^m \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m. \end{aligned}$$

Таким образом для отрицательности всех вещественных частей корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ необходимо чтобы все его коэффициенты были положительны.

Однако такого утверждения не достаточно. Необходимое и достаточное условие дается критерием Рауса-Гурвица.

Def 15.28. Назовем матрицей Гурвица:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & a_m \end{pmatrix}$$

Рекомендуем читателям самостоятельно разобраться в правилах её построения (мнемонических и нет).

Рассмотрим главные миноры матрицы Гурвица (определители Гурвица):

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots \quad \Delta_m = a_m \Delta_{m-1}.$$

Thr 15.29 (Критерий Рауса-Гурвица). Для того, чтобы все корни уравнения (15.13) с вещественными коэффициентами и положительным старшим a_0 имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots \quad \Delta_m > 0. \quad (15.14)$$

Если же хотя бы одно из неравенств имеет противоположный смысл, то уравнение (15.13) имеет корни, вещественные части которых положительны.

15.4 Влияние диссипативных и гироскопических сил на устойчивость равновесия консервативной системы

Влияние гироскопических сил и диссипативных сил с полной диссипацией на устойчивое положение равновесия голономной системы

Thr 15.30 (Теорема Томсона-Тэта-Четаева). Если в некотором изолированном положении равновесия потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то при добавлении гироскопических и диссипативных

сил с полной диссипацией это положение равновесия становится асимптотически устойчивым.

Влияние гироскопических и диссипативных сил на неустойчивое равновесие

Разложим до квадратичных членов кинетическую и потенциальную энергию системы, и приведем к каноническому виду

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i \theta_i^2.$$

Если Π положительно определена, то все величины λ_i положительны, и положение устойчиво. Если же присутствуют отрицательные λ_i , то положение равновесия неустойчиво (по теореме о неустойчивости по первому приближению).

Def 15.31. Величины λ_i Пуанкаре предложил называть коэффициентами устойчивости. Число отрицательных коэффициентов устойчивости называется степенью неустойчивости.

Thr 15.32. Если среди коэффициентов устойчивости хотя бы один является отрицательным, то изолированное положение равновесия не может быть стабилизировано диссипативными силами с полной диссипацией.

Thr 15.33. Если степень неустойчивости изолированного положения равновесия консервативной системы нечетна, то стабилизация его добавлением гироскопических сил невозможна. Если степень неустойчивости четна, то гироскопическая стабилизация возможна.

Thr 15.34. Если изолированное положение равновесия консервативной системы имеет отличную от нуля степень неустойчивости, то оно остается неустойчивым при добавлении гироскопических сил и диссипативных сил с полной диссипацией.

Def 15.35. Устойчивость, существующую при одних потенциальных силах, называют вековой, а устойчивость, полученную с помощью гироскопических сил, – временной.