

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ I КУРСА «ТЕОРИЯ ПОЛЯ»

Авторы: Ж_иК

От: 23 марта 2021 г.

Содержание

1 Общие сведения	2
2 Упражнения	2
У1	2
У2	2
У3	3
У4	3
3 Первое задание	4
Т1	4
Т2	4
Т3	5
Т4	6
Т5	6
Т6	7
Т7	8

1 Общие сведения

Для кинематики полезно было бы ввести следующие величины

$$\gamma(v) = \gamma_v = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad \beta(v) = \beta_v = \frac{v}{c}, \quad \Lambda(v, OX) = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\beta_v \gamma_v & 0 & 0 \\ -\beta_v \gamma_v & \gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где Λ – преобразование Лоренца, для которого, кстати, верно, что $\Lambda^{-1}(v) = \Lambda(-v)$.

Также преобразование Лоренца можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_v \gamma \\ -\beta_v \gamma & \mathbb{E} + \frac{\gamma_v - 1}{\beta_v^2} \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

что очень удобно и полезно.

Говоря о движении заряда в ЭМ-поле, хотелось бы получить уравнения движения. По принципу наименьшего действия

$$\delta S = \delta \int_a^b \left(-mc ds - \frac{e}{c} A_i dx^i \right) = 0, \quad ds = \sqrt{dx_i dx^i} \Rightarrow \delta S = - \int_a^b \left(mc \frac{dx_i d\delta x^i}{ds} + \frac{e}{c} A_i d\delta x^i + \frac{e}{c} \delta A_i dx^i \right) = 0,$$

где проинтегрировав по частям первые два слагаемые получаем

$$\int_a^b \left(mc du_i \delta x^i + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^i dx^k - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^i \delta x^k \right) = 0, \Rightarrow \int_a^b \left(mc \frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k \right) \delta x^i ds = 0$$

где $(\delta \dots)|_a^b = 0$ в силу варьирования при заданных пределах. Также сделаны замены $du_i \rightarrow (u_i)'_s ds$, $dx^i \rightarrow u^i ds$. А это уже победа, ведь в силу произвольности δx^i получаем

$$\frac{mc^2}{e} \frac{du_i}{ds} = F^{ik} u_k = F^{ik} g_{kj} u^j, \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

что позволяет всегда смотреть на движение заряда в постоянном ЭМ-поле, как на систему линейных дифференциальных уравнений, решать которую, по крайней мере относительно $s = ct$ решать мы умеем.

2 Упражнения

У1

Строчка с символами Кронекера:

$$\delta_\alpha^\alpha = 3, \quad \delta_\alpha^\beta \delta_\beta^\gamma = \delta_\alpha^\gamma, \quad \delta_\alpha^\beta \delta_\beta^\gamma \delta_\gamma^\alpha = \delta_\alpha^\alpha = 3.$$

По определению символа Леви-Чивиты, раскроем определитель:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma} &= \begin{vmatrix} \delta_\alpha^{\alpha'} & \delta_\alpha^{\beta'} & \delta_\alpha^\gamma \\ \delta_\beta^{\alpha'} & \delta_\beta^{\beta'} & \delta_\beta^\gamma \\ \delta_\gamma^{\alpha'} & \delta_\gamma^{\beta'} & \delta_\gamma^\gamma \end{vmatrix} = \delta_\alpha^{\alpha'} (\delta_\beta^{\beta'} \delta_\gamma^\gamma - \delta_\beta^\gamma \delta_\gamma^{\beta'}) - \delta_\alpha^{\beta'} (\delta_\beta^{\alpha'} \delta_\gamma^\gamma - \delta_\beta^\gamma \delta_\gamma^{\alpha'}) + \delta_\alpha^\gamma (\delta_\beta^{\alpha'} \delta_\gamma^{\beta'} - \delta_\beta^{\beta'} \delta_\gamma^{\alpha'}) = \\ &= \delta_\alpha^{\alpha'} (3\delta_\beta^{\beta'} - \delta_\beta^{\beta'}) - \delta_\alpha^{\beta'} (2\delta_\beta^{\alpha'}) + \delta_\alpha^{\beta'} \delta_\beta^{\alpha'} - \delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^{\beta'} \delta_\gamma^{\alpha'} = \boxed{\delta_\alpha^{\alpha'} \delta_\beta^{\beta'} - \delta_\alpha^{\beta'} \delta_\beta^{\alpha'}}. \end{aligned}$$

Далее просто в последнем равенстве приравниваем в первом случае $\beta' = \beta$, а во втором ещё и $\alpha = \alpha'$, получая:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\alpha'\beta\gamma} = 3\delta_\alpha^{\alpha'} - \delta_\alpha^{\alpha'} = 2\delta_\alpha^{\alpha'}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = 2\delta_\alpha^\alpha = 6.$$

У2

- $[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]]^i = \varepsilon^i_{jk} a^j [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]^k = \varepsilon^i_{jk} a^j \varepsilon^k_{mn} b^m c^n = (\delta_m^i \delta_{jn} - \delta_n^i \delta_{jm}) a^j b^m c^n = a^j b^i c_j - c^i a^j b_j = b^i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - c^i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$
- $([\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot [\mathbf{c} \times \mathbf{d}]) = \varepsilon_{ijk} a^j b^k \varepsilon^i_{mn} c^m d^n = (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) a^j b^k c^m d^n = a^j b^k c_j d_k - a^j b^k c_k d_j = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$

- Тут придется применить результаты первого примера этого упражнения:

$$\begin{aligned}
 ([\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot [[\mathbf{b} \times \mathbf{c}] \times [\mathbf{c} \times \mathbf{a}]]) &= (\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]) (\mathbf{b} \cdot [\mathbf{c} \times \mathbf{a}]) - (\mathbf{a} \cdot [\mathbf{c} \times \mathbf{a}]) (\mathbf{b} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]) = \\
 &= a^i \varepsilon_{ijk} b^j c^k \cdot b^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} c^\beta a^\gamma - a^i \varepsilon_{ijk} c^j a^k \cdot b^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} b^\beta c^\gamma = (a^i \varepsilon_{ijk} b^j c^k)^2 = (\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}])^2
 \end{aligned}$$

У3

Сразу оговорим, что все нечетные степени, ввиду инвариантности по перестановкам при усреднении дадут нуль.

Для четных же будем получать какие-то симметричные тензоры, которые могут быть выражены через всевозможные комбинации символов Кронекера. Так для два-тензора:

$$\langle n_\alpha n_\beta \rangle = z_{ab} = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta}.$$

В силу единичности n при свертке два-тензора из них должна получиться единица. Симметричный единичный два-тензор, инвариантный к поворотам это и есть Кроннекер на троих.

Для четырех же возьмём все возможные комбинации символов Кроннекера:

$$\langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu \rangle = \frac{1}{c} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\mu} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\gamma}).$$

Опять же нужно найти константу c , чтобы свертка четыре-тензора была единичной:

$$\delta^{\alpha\beta} \delta^{\gamma\mu} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\mu} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\gamma}) = 9 + \delta_\gamma^\beta \delta_\beta^\gamma + \delta_\mu^\beta \delta_\beta^\mu = 15. \quad \Rightarrow \quad \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu \rangle = \frac{1}{15} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\mu} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\gamma}).$$

У4

а)

- $(\text{rot rot } \mathbf{A})^i = \varepsilon^i_{jk} \nabla^j (\varepsilon^k_{\alpha\beta} \nabla^\alpha A^\beta) = (\delta_\alpha^i \delta_{j\beta} - \delta_\beta^i \delta_{j\alpha}) \nabla^j \nabla^\alpha A^\beta = \nabla^i (\nabla_j A^j) - \nabla_j \nabla^j A^i = (\text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A})^i.$
- $(\text{rot}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}])^i = \varepsilon^i_{jk} \nabla^j \varepsilon^k_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta = (\delta_\alpha^i \delta_{j\beta} - \delta_\beta^i \delta_{j\alpha}) (a^\alpha \nabla^j b^\beta + b^\beta \nabla^j a^\alpha) = a^i \nabla^j b_j - b^i \nabla^j a_j + b_j \nabla^j a^i - a^j \nabla^j b^i =$
 $= (\mathbf{a} \cdot \text{div } \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \text{div } \mathbf{a})^i + ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b})^i.$
- $(\text{rot } f \mathbf{A})^i = \varepsilon^i_{jk} \nabla^j f A^k = \varepsilon^i_{jk} (f \nabla^j A^k + A^k \nabla^j f) = f \varepsilon^i_{jk} \nabla^j A^k + \varepsilon^i_{jk} \nabla^j f = (f \text{rot } \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \text{grad } f)^i.$
- $\text{div } f \mathbf{A} = \nabla_i f A^i = A^i \nabla_i f + f \nabla_i A^i = (\mathbf{A} \cdot \text{grad } f) + f \text{div } \mathbf{A}.$
- $\text{div}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \nabla_i \varepsilon^i_{jk} a^j b^k = \varepsilon^i_{jk} (b^k \nabla_i a^j + a^j \nabla_i b^k) = \varepsilon^i_{jk} b^k \nabla_i a^j + \varepsilon^i_{jk} a^j \nabla_i b^k = b^k \varepsilon_k^i{}^j \nabla_i a^j - a^j \varepsilon_j^i{}^k \nabla_i b^k =$
 $= (\mathbf{b} \cdot \text{rot } \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{b}).$

$$[\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})]^i = \nabla^i a^j b_j = a^j \nabla^i b_j + b_j \nabla^i a^j$$

Рассмотрим такую штуку: $((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b})^j = a_i \nabla^i b^j$

$$\text{И такую: } (\mathbf{a} \times [\nabla \times \mathbf{b}])^i = \varepsilon^i_{jk} a^j \varepsilon^k_{\alpha\beta} \nabla^\alpha b^\beta = (\delta_\alpha^i \delta_{j\beta} - \delta_\beta^i \delta_{j\alpha}) a^j \nabla^\alpha b^\beta = a^j \nabla^i b_j - a_j \nabla^j b^i$$

Из этих штук и можем составить начальную:

$$[\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})]^i = \nabla^i a^j b_j = a^j \nabla^i b_j + b_j \nabla^i a^j = [\mathbf{a} \times [\nabla \times \mathbf{b}]]^i + [\mathbf{b} \times [\nabla \times \mathbf{a}]]^i + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a}.$$

б)

- $\text{rot}[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] = 2\boldsymbol{\omega}.$
- $\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r} = a^i \nabla_i \mathbf{r}^j = a^i \delta_i^j = \mathbf{a}$

в)

- $\text{grad } r = \nabla^i \sqrt{r^j r_j} = \frac{1}{2} \frac{\nabla^i r^j r_j}{\sqrt{r^j r_j}} = \frac{r^j \delta_j^i}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$
- $\text{div } \mathbf{r} = \nabla_\alpha r^\alpha = \delta_\alpha^\alpha = 3.$
- $(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r} = a^i \nabla_i \mathbf{r}^j = \mathbf{a}.$
- $\text{grad } f(r) = \nabla^i f(r) = f'_r \nabla^i \sqrt{r^j r_j} = f'_r \frac{\mathbf{r}}{r}.$

- $\text{rot } \mathbf{a}(r) = \varepsilon^i_{jk} \nu^j a^k(r) = \varepsilon^i_{jk} (a^k)'_r \frac{\nabla^j r}{r} = \frac{1}{r} [\mathbf{a}'_r \times \mathbf{r}]$.
- $\text{div } \mathbf{a}(r) = \nabla^i a_i(r) = (a_i)'_r \nabla^i r = \frac{1}{r} (\mathbf{a}'_r \cdot \mathbf{r})$.

У5

Суть в том, чтобы скалярно домножая на константу, получать интегралы от форм, которые можно позже преобразовать по формуле Стокса.

- $\mathbf{c} \cdot \int_V \nabla f d^3 r = \int_V \text{div}(\mathbf{c}f) = \oint_{\partial V} \omega_{\mathbf{c}f}^2 = \oint_{\partial V} \mathbf{c}f \cdot d\mathbf{S}$.
- $\mathbf{c} \cdot \int_V \text{rot } \mathbf{A} d^3 r = \int_V \nabla \cdot [\mathbf{A} \times \mathbf{c}] d^3 r = \int_V \text{div}[\mathbf{A} \times \mathbf{c}] d^3 r = \oint_S [\mathbf{A} \times \mathbf{c}] \cdot \mathbf{S} = \oint_S \mathbf{c} \cdot [d\mathbf{S} \times \mathbf{A}] = -\oint_S \mathbf{c} [A \times d\mathbf{S}]$.
- $\mathbf{c} \cdot \int_S [\nabla f \times d\mathbf{S}] = \int_S d\mathbf{S} \cdot [\mathbf{c} \times \nabla f] = -\int_S d\mathbf{S} \cdot \text{rot } \mathbf{c}f = -\oint \mathbf{c}f \cdot d\mathbf{l}$.
- $\oint_S [\nabla \times \mathbf{A}] d\mathbf{S} = \int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$, т.к. $\Gamma = \emptyset$.

3 Первое задание

T1

Для начала запишем преобразование Лоренца для системы K' :

$$t' = \gamma_{v_x} \left(t - \beta_x \frac{x}{c} \right), \quad x' = \gamma_{v_x} (x - v_x t), \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Аналогично перейдём к системе K'' , выразив компоненты через их представление в системе K'

$$t'' = \gamma_{v'_y} \left(t' - \beta_{v'_y} \frac{y'}{c} \right), \quad x'' = x', \quad y'' = \gamma_{v'_y} (y' - v'_y t'), \quad z'' = z'.$$

Центр системы K'' неподвижен в координатах системы K'' , соответственно

$$x'' = y'' = z'' = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{K''} = v_x t \\ y_{K''} = \gamma_{v_x}^{-1} v'_y t \end{cases},$$

что соответствует $(x, y)[t]$ для координат центра системы K'' в системе K .

Теперь найдём движение центра системы K в системе K'' , подставив значения $x = y = 0$,

$$x''_K = -\gamma_{v_x} v_x t, \quad y''_K = -\gamma_{v'_y} \gamma_{v_x} v'_y t, \quad t''_K = -\gamma_{v'_y} \gamma_{v_x} t.$$

Можно заметить, что

$$\gamma_{v'_y} \gamma_{v_x} \approx \gamma \left(\sqrt{v_x^2 + v_y'^2} \right) = \gamma_v, \quad \beta_{v_x}, \beta_{v'_y} \ll 1.$$

Теперь нас интересует направление прямой $\parallel \mathbf{v}$ — движения K'' в системе K :

$$\text{tg } \varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\dot{y}_{K''}}{\dot{x}_{K''}} = \gamma_{v_x}^{-1} \frac{v'_y}{v_x}.$$

Угол же между осью x'' и движением центра системы K может быть найден, как

$$\text{tg}(\theta + \varphi) = \frac{dy''_K}{dt''} \bigg/ \frac{dx''_K}{dt''} = \gamma_{v'_y} \frac{v'_y}{v_x} = \gamma_{v_x} \gamma_{v'_y} \text{tg } \varphi \approx \gamma_v \text{tg } \varphi.$$

С другой стороны, раскрывая тангенс суммы, находим

$$\text{tg } \theta + \text{tg } \varphi = \gamma_v \text{tg } \varphi (1 - \text{tg } \varphi \text{tg } \theta), \quad \Rightarrow \quad \text{tg } \theta = \frac{(\gamma_v - 1) \text{tg } \varphi}{1 + \gamma_v \text{tg}^2 \varphi}.$$

T2

Аппроксимируем движение ИСО в моменты времени t и $t + dt$ сопутствующими ИСО K' и K'' . Пусть K — лабораторная система отсчета, K' — сопутствующая ИСО $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{v}(t)$, а K'' — сопутствующая ИСО движущаяся относительно K со скоростью $\mathbf{v}(t + dt) = \mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Далее для удобства будем считать, что K'' движется относительно K' со скоростью $d\mathbf{v}'$.

Проверим, что последовательное применение $\Lambda(d\mathbf{v}') \cdot \Lambda(\mathbf{v})$ эквивалентно $R(\varphi) \cdot \Lambda(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$, где $R(\varphi)$ — вращение в $\{xyz\}$. Для этого просто найдём

$$R(\varphi) = \Lambda(d\mathbf{v}') \cdot \Lambda(\mathbf{v}) \cdot \Lambda(\mathbf{v} + d\mathbf{v})^{-1}.$$

Пусть ось $x \parallel \mathbf{v}$, ось y выберем так, чтобы $d\mathbf{v} \in \{Oxy\}$. Теперь, согласно (1.2), считая $|\mathbf{v}| = \beta_1$, $d\mathbf{v}' = (\beta'_x, \beta'_y)^T$ можем записать (пренебрегая слагаемыми β'_x, β'_y второй и выше степени):

$$\Lambda(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 & 0 & 0 \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(d\mathbf{v}') = \begin{bmatrix} 1 & -\beta'_x & -\beta'_y & 0 \\ -\beta'_x & 1 & 0 & 0 \\ -\beta'_y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь можем выразить $d\mathbf{v}'$ через $d\mathbf{v}$, считая \mathbf{r}_f центром системы K''

$$\mathbf{r}'_f = \Lambda(d\mathbf{v}') \cdot \Lambda(\mathbf{v})\mathbf{r}_f = (ct', 0, 0, 0)^T \Rightarrow \beta(\mathbf{v} + d\mathbf{v})_x = \frac{\beta_1 + \beta'_x}{1 + \beta_1\beta'_x}, \quad \beta(\mathbf{v} + d\mathbf{v})_y = \frac{\gamma_{\beta_1}\beta_y}{1 + \beta_1\beta_x}.$$

где скорость находим аналогично первому номеру. Тут стоит заметить, что скоростью β_x можно было бы пренебречь в сравнении с β_1 , так как скорее всего первый порядок малость β_x не войдёт в ответ, однако хотелось бы в этом убедиться.

Зная $d\mathbf{v}$ можем найти $d\mathbf{v}'$:

$$\beta'_x = \gamma_{\beta_1}^2 \beta_x, \quad \beta'_y = \gamma \beta_y.$$

Но это на потом.

Через \mathbf{v} , $d\mathbf{v}'$ теперь можем найти $\Lambda(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$, и посчитать обратную матрицу:

$$\Lambda^{-1}(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \gamma_{\beta_1}(\beta_1\beta_x + 1) & \gamma_{\beta_1}(\beta_1 + \beta_x) & \beta_y & 0 \\ \gamma_{\beta_1}(\beta_1 + \beta_x) & \gamma_{\beta_1}(\beta_1\beta_x + 1) & \frac{\beta_1\beta_y}{\gamma_{\beta_1}^{-1} + 1} & 0 \\ \beta_y & \frac{\beta_1\beta_y}{\gamma_{\beta_1}^{-1} + 1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Наконец можем посчитать матрицу поворота, которая в первом приближении действительно не содержит β_x :

$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\beta_1\beta'_y}{\sqrt{1-\beta_1^2}+1} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1\beta'_y}{\sqrt{1-\beta_1^2}+1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

что действительно соответствует повороту в плоскости $\{xy\}$ вокруг оси z с углом φ равным

$$\varphi = -\frac{\beta_y\beta_1}{\gamma_{\beta_1}^{-2} + \gamma_{\beta_1}^{-1}} = -\frac{\gamma_{\beta_1}^2}{\gamma_{\beta_1} + 1} \beta_1\beta_y,$$

где φ малый, в силу малости β_y . Так вот, в результате поворота координатных осей меняются и любые векторы, неподвижные в неИСО, то есть искомая угловая скорость

$$\omega_z = -\frac{\gamma_{\beta_1}^2}{\gamma_{\beta_1} + 1} \beta_1(\beta_y/\Delta t), \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = -\frac{\gamma_{\beta_1}^2}{\gamma_{\beta_1} + 1} [\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] = \frac{\gamma_{\beta_1}^2}{\gamma_{\beta_1} + 1} [\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \boldsymbol{\beta}],$$

что и требовалось доказать.

ТЗ

Посмотрим на сопутствующую вращающемуся интерферометру в точке рассматриваемого луча. Для луча можем записать волновой вектор, как

$$\bar{k}'_{\pm} = \left(\frac{\omega}{c}, \pm n \frac{\omega}{c}, 0, 0 \right),$$

где знак выбирается в соответствии с направлением обхода. Считая, что ось Ox направлена вдоль вращения интерферометра в рассматриваемой точке

$$ck_{\pm} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \pm n\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega\gamma(1 \pm n\beta) \\ \omega\gamma(n \pm \beta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$ck_{x,\pm} = \omega\gamma(n \pm \beta).$$

Можно заметить, что у света также зависит частота от направления движения, судя по формуле выше, но в силу малости скорости вращения, это приведет только к очень медленной осцилляции в интерференции

$$I_{\text{инт}} = I_1 + I_2 + \langle (\mathbf{E}_{10} \cdot \mathbf{E}_{20}) \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \dots) \rangle,$$

так что по идее этим эффектом можно пренебречь.

В силу различности k_+ и k_- можем найти разность хода

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = 2\pi R \frac{\gamma\omega\beta}{c},$$

считая данной угловую скорость вращения интерферометра Ω приходим к выражению вида

$$\Delta\varphi = \frac{2\gamma}{c^2} \omega \Omega \pi R^2 \stackrel{\gamma \sim 1}{\approx} \frac{2\pi}{c^2} \omega \Omega R^2,$$

где $\gamma \approx 1$ для корректности результата, так как при расчете не учитывалось изменение метрики для неИСО.

T4

Теперь рассмотрим реакцию превращения электрона и позитрона в мюон и антимюон:

$$e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-.$$

Хотелось бы зная энергию сталкивающихся частиц найти эффективную массу системы $((\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2)$ и энергии μ^\pm .

Для 4-импульса $p^i = (\mathcal{E}/c, \mathbf{p})$, для которого верно

$$c^2(2m_\mu)^2 \leq (p_1^i + p_2^i)^2 = \bar{p}_1^2 + \bar{p}_2^2 + 2\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2 = c^2 2m_e^2 + 2(\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 / c^2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2).$$

что приводит нас к неравенству

$$c^2(2m_\mu^2 - m_e^2) \leq \frac{1}{c^2} \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2.$$

При равных энергия $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$ и $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ верно, что

$$\mathbf{p}_1^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - m_e^2 c^2,$$

тогда

$$c^2(2m_\mu^2 - m_e^2) \leq \frac{1}{c^2} \mathcal{E}^2 + \mathbf{p}_1^2 = \frac{2}{c^2} \mathcal{E}^2 - m_e^2 c^2,$$

таким образом

$$\mathcal{E} \geq m_\mu c^2, \quad T_{\text{порог}} = (m_\mu - m_e) c^2.$$

При налете на неподвижную частицу $\mathcal{E}_2 = m_e c$ и $\mathbf{p}_2 = 0$, тогда

$$(2m_\mu^2 - m_e^2) c^2 \leq \mathcal{E}_1 m_e, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_1 \geq \left(2 \frac{m_\mu^2}{m_e} - m_e \right) c^2.$$

Соответственно для пороговой энергии верно

$$T_{\text{порог}} = \frac{2c^2}{m_e} (m_\mu^2 - m_e^2).$$

T5

Имеем две частицы, 4-импульсы которых в начальный момент:

$$p_\gamma^i = \begin{pmatrix} \varepsilon_\gamma \\ \mathbf{p}_\gamma \end{pmatrix}, \quad |p_\gamma^i| \approx \varepsilon_\gamma. \quad p_e^i = \begin{pmatrix} \varepsilon_e \\ \mathbf{p}_e \end{pmatrix}, \quad |p_e^i| = \beta_e \varepsilon_e.$$

Перейдём в систему центра инерции двух частиц. Пусть пусть движется со скоростью β , тогда матрица преобразования для такой пересадки и аберация угла будут

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \cos \theta \beta}.$$

Запишем закон сохранения импульса до и после столкновения, штрихами пометим величины после столкновения.

$$p_\gamma^i + p_e^i = p_\gamma'^i + p_e'^i \quad \Rightarrow \quad (p_e^i)^2 = (p_\gamma^i + p_e^i - p_\gamma'^i)^2 = p_\gamma^2 + p_e^2 + p_\gamma'^2 + 2p_e p_\gamma - 2p_e p_\gamma' - 2p_\gamma p_\gamma',$$

пренебрегая квадратом импульса фотонов получаем

$$m_e^2 = m_e^2 + 2p_e p_\gamma - 2p_e p'_\gamma - 2p_\gamma p'_\gamma \Rightarrow p_e p_\gamma - p_e p'_\gamma - p_\gamma p'_\gamma = 0.$$

Перемножим компоненты 4-импульсов:

$$\varepsilon_e \varepsilon_\gamma - \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_\gamma - \varepsilon_e \varepsilon'_\gamma + \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}'_\gamma - \varepsilon_\gamma \varepsilon'_\gamma + \mathbf{p}_\gamma \cdot \mathbf{p}'_\gamma = 0.$$

Пусть частицы разлетелись под углом θ :

$$\varepsilon_e \varepsilon_\gamma + \varepsilon_e \varepsilon_\gamma \beta_e - \varepsilon_e \varepsilon'_\gamma + \beta_e \varepsilon_e \varepsilon'_\gamma \cos \theta - \varepsilon_\gamma \varepsilon'_\gamma + \varepsilon_\gamma \varepsilon'_\gamma \cos(\pi - \theta) = 0.$$

Откуда не сложно выразить энергию фотона после столкновения, заметим, что по условию задачи: $\varepsilon_\gamma / \varepsilon_e = 10^{-11}$, такими членами будем пренебрегать:

$$\varepsilon'_\gamma = \frac{\varepsilon_e \varepsilon_\gamma (1 + \beta_e)}{\varepsilon_e (1 - \beta_e \cos \theta) + \varepsilon_\gamma (1 + \cos \theta)} = \frac{\varepsilon_\gamma (1 + \beta_e)}{1 - \beta_e \cos \theta + \frac{\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_e} (1 + \cos \theta)} \approx \frac{\varepsilon_\gamma (1 + \beta_e)}{1 - \beta_e \cos \theta}.$$

Имея формулу плюс-минус общую не сложно ответить на вопрос про рассеяние назад:

$$\varepsilon'_\gamma (\cos \theta = -1) \approx \varepsilon_\gamma = 2 \text{ эВ}.$$

в то время, как вперед пролетает:

$$\varepsilon'_\gamma (\cos \theta = 1) \approx \frac{\varepsilon_\gamma \varepsilon_e^2}{m_e^2} \approx 320 \text{ ГэВ}.$$

Т6

Пион распадается на нейтрино и мюон: $\pi \rightarrow \mu + \nu$. Будем работать в система центра инерции.

$$p_{0\mu}^i = p_{0\mu}^i + p_{0\nu}^i \Rightarrow (p_{0\mu}^i)^2 = (p_{0\pi}^i - p_{0\nu}^i)^2 \Rightarrow m_\mu^2 c^2 = c^2 (m_\pi^2 + m_\nu^2) - 2p_{0\pi}^i p_{0\nu}^i = c^2 m_\pi^2 - 2m_\pi \varepsilon_{0\nu}.$$

Откуда получаем

$$\varepsilon_{0\nu} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c^2 = \frac{140^2 - 105^2}{2 \cdot 140} \cdot 1^2 = 31 \text{ МэВ}.$$

Переходя в лабораторную систему отсчёта:

$$\varepsilon_\nu = \gamma(v) \varepsilon_{0\nu} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta_0 \right).$$

Подставляя углы θ_0 найдём минимальную и максимальную энергии:

$$\varepsilon_{\min}^\nu = \varepsilon_{0\nu} \gamma(v) \left(1 - \frac{v}{c} \right) \approx 0.4 \text{ МэВ}, \quad \varepsilon_{\max}^\nu = \varepsilon_{0\nu} \gamma(v) \left(1 + \frac{v}{c} \right) \approx 2666 \text{ МэВ}.$$

Для определения среднего значения сначала нужно задаться вопросом распределения по углу отклонения, пока в системе покоя π :

$$\varepsilon_\nu = \gamma(v) \varepsilon_{0\nu} \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta_0 \right) \xrightarrow{d} d\varepsilon = \frac{v}{c} \gamma \varepsilon_0 d \cos \theta_0.$$

Из всех частиц N_0 в телесном угле $d\Omega_0$ заключено:

$$\frac{dN}{N_0} = \frac{d\Omega_0}{4\pi} = \frac{1}{2} (d \cos \theta) \frac{d\varphi}{2\pi} \Rightarrow \frac{dN}{N_0} = \frac{1}{4\pi} \frac{c d\varepsilon}{v \gamma \varepsilon_0} (2\pi) = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}.$$

Но это всё было в системе центра инерции, нужно перейти в лабораторную, а тогда произойдёт абберация:

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta'}.$$

Таким образом

$$\frac{dN}{d \cos \theta} = \left(\frac{dN}{d \cos \theta'} \right) \frac{d \cos \theta'}{d \cos \theta} = \left(\frac{dN}{d \cos \theta'} \right) \frac{1 - \beta^2}{(\beta \cos \theta - 1)^2},$$

где $dN/d \cos \theta'$ — распределение по углу в системе центра инерции, которое в силу изотропности пространства постоянно. Так как в правой части отсутствует энергия, то распределение энергии по углу — постоянно, тогда

$$\langle \varepsilon^\nu \rangle = 1333 \text{ МэВ}.$$

Т7

Выберем оси z по \mathbf{H} , ось y так, чтобы в $\mathbf{E} \in \text{Oyz}$. Тогда тензор электромагнитного поля запишется:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -E \sin \theta & -E \cos \theta \\ 0 & 0 & -H & 0 \\ E \sin \theta & H & 0 & 0 \\ E \cos \theta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

с учетом $\theta = \pi/2$, $E = \alpha H$, $mc^2/e = K$, вспомнив (1.3), запишем уравнение движения

$$\frac{mc^2}{e} \frac{du^i}{ds} = F^{ik} u_k = F^{ij} g_{jk} u^k, \quad \Rightarrow \quad K \frac{d\bar{u}}{ds} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha H & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 \\ \alpha H & -H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{u},$$

где $\bar{u} = (u_0, u_x, u_y, u_z) = \bar{p}/mc$. Линейные дифференциальные уравнения мы решать вроде умеем, так что находим собственные числа, как

$$\det(F^{ik} g_{kj} - \lambda \mathbb{E}_j^i) = \lambda^2(\lambda^2 - H^2(\alpha^2 - 1)) = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= 0, \\ \lambda_{3,4} &= \pm H \sqrt{\alpha^2 - 1}. \end{aligned}$$

И, соответственно, собственные векторы ($\alpha \neq 1$):

$$(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} & -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} & 1 & 0 \\ \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} & \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Осталось подставить начальные условия

$$\bar{u}(s=0) = (\mathcal{E}_0/c, p_{0x}, p_{0y}, p_{0z})^T / mc,$$

находим уравнения относительно \bar{u} для трёх случаев. При $\alpha \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} u_x(s) &= -\frac{(\alpha p_0 - p_{0x}) \cos\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2} e H s}{c^2 m}\right)}{(1-\alpha^2) cm} - \frac{(\alpha^2 - 1) p_{0y} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2} e H s}{c^2 m}\right)}{(1-\alpha^2)^{3/2} cm} - \frac{\alpha(\alpha p_{0x} - p_0)}{(1-\alpha^2) cm}, \\ u_y(s) &= \frac{(\alpha p_0 - p_{0x}) \sin\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2} e H s}{c^2 m}\right)}{\sqrt{1-\alpha^2} cm} + \frac{p_{0y} \cos\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2} e H s}{c^2 m}\right)}{cm}. \end{aligned}$$

При $\alpha > 1$:

$$\begin{aligned} u_x(s) &= \frac{(\alpha p_0 - p_{0x}) \cosh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1} e H s}{c^2 m}\right)}{(\alpha^2 - 1) cm} + \frac{p_{0y} \sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1} e H s}{c^2 m}\right)}{\sqrt{\alpha^2 - 1} cm} + \frac{\alpha(\alpha p_{0x} - p_0)}{(\alpha^2 - 1) cm}, \\ u_y(s) &= \frac{(\alpha p_0 - p_{0x}) \sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1} e H s}{c^2 m}\right)}{\sqrt{\alpha^2 - 1} cm} + \frac{p_{0y} \cosh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1} e H s}{c^2 m}\right)}{cm}. \end{aligned}$$

И при $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned} u_0(s) &= \frac{e^2 H^2 s^2 (p_0 - p_{0x})}{2c^5 m^3} + \frac{e H p_{0y} s}{c^3 m^2} + \frac{p_0}{cm} \\ u_x(s) &= \frac{e^2 H^2 s^2 (p_0 - p_{0x})}{2c^5 m^3} + \frac{e H p_{0y} s}{c^3 m^2} + \frac{p_{0x}}{cm}, \\ u_y(s) &= \frac{e H s (p_0 - p_{0x})}{c^3 m^2} + \frac{p_{0y}}{cm}. \end{aligned}$$

и по оси z движение с $u_z = p_{0z}/mc = \text{const}$, а $s = c\tau$.

При пристальном взгляде на u_0 и u_x

$$u_0 - u_x = \frac{p_0 - p_{0x}}{cm} = \frac{\mathcal{E}_0 - c p_{0x}}{mc^2} = \text{const}.$$

Для скорости по оси x получили компоненту, независящую от времени ($E < H$) — это скорость дрейфа:

$$v_{\text{др}} = u_x^{\neq f(s)} c = c \frac{\alpha(\alpha p_{0x} - p_0)}{(\alpha^2 - 1) cm} = \left/ \frac{p_0 \approx mc}{\alpha \ll 1} \right/ = c\alpha = c \frac{E}{H},$$

что соответствует нерелятивистскому случаю.

Для случая $H < E$:

$$v_{\text{др}} = u_x^{\neq f(s)} c = c \frac{\alpha(\alpha p_{0x} - p_0)}{(\alpha^2 - 1)cm} = \left/ \frac{p_0 \approx mc}{\alpha \gg 1} \right/ = \frac{p_0}{cm} \frac{c}{\alpha} = -\frac{c}{\alpha} = -c \frac{H}{E},$$

что уже очень похоже на правду.

Тут стоит заметить, что решение получено в параметризации собственным временем системы, что, конечно, дает представление о геометрии происходящего, но, возможно, не всегда информативно. Решение в параметризации временем лабораторной системы отсчета можно посмотреть [здесь](#).

Видеть три случая с движением по спирали и по.. чему-то вроде цепной линии тоже вполне логично: в зависимости от значения α можно пересечь в систему ($\alpha > 1$), где $H' = 0$, и увидеть движение по \sim цепной, а при $\alpha < 1$ перейти к системе с $E' = 0$ и движением по окружности, движущейся относительно лабораторной с дрейфовой скоростью.

Также замечу, что $\text{sign } \alpha$ – инвариант, в силу существующих инвариантов поля (свертов тензора ЭМ-поля)

$$F_{ik} F^{ik} = H^2 - E^2 = H^2(1 - \alpha^2) = \text{inv}, \quad \epsilon^{iklm} F_{ik} F_{lm} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = \text{inv},$$

что и является основой для вышеприведенных рассуждений.