Домашнее задание I курса «Теория поля»

Авторы: Ж$_{\text{И}}$К

От: *17 марта 2021 г.*

Содержание

1 Общие сведения

Для кинематики полезно было бы ввести следующие величины

$$\gamma(v) = \gamma_v = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \qquad \beta(v) = \beta_v = \frac{v}{c}, \qquad \Lambda(v, OX) = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\beta_v\gamma_v & 0 & 0 \\ -\beta_v\gamma_v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где Λ – преобразование Лоренца, для которого, кстати, верно, что $\Lambda^{-1}(v) = \Lambda(-v)$.

Также преобразование Лоренца можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \boldsymbol{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\boldsymbol{\beta}_v\gamma \\ -\boldsymbol{\beta}_v\gamma & \mathbb{E} + \frac{\gamma_v - 1}{\beta_v^2}\boldsymbol{\beta}\otimes\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

2 Упражнения

У1

Строчка с символами Кронекера:

$$\delta^\alpha_\alpha = 3, \qquad \delta^\beta_\alpha\delta^\gamma_\beta = \delta^\gamma_\alpha, \qquad \delta^\beta_\alpha\delta^\gamma_\beta\delta^\alpha_\gamma = \delta^\alpha_\alpha = 3.$$

По определению символа Леви-Чивиты, раскроем определитель:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma} = \begin{vmatrix} \delta^{\alpha'}_\alpha & \delta^{\beta'}_\alpha & \delta^\gamma_\alpha \\ \delta^{\alpha'}_\beta & \delta^{\beta'}_\beta & \delta^\gamma_\beta \\ \delta^{\alpha'}_\gamma & \delta^{\beta'}_\gamma & \delta^{\gamma'}_\gamma \end{vmatrix} = \delta^{\alpha'}_\alpha\left(\delta^{\beta'}_\beta\delta^\gamma_\gamma - \delta^\gamma_\beta\delta^{\beta'}_\gamma\right) - \delta^{\beta'}_\alpha\left(\delta^{\alpha'}_\beta\delta^\gamma_\gamma - \delta^\gamma_\beta\delta^{\alpha'}_\gamma\right) + \delta^\gamma_\alpha\left(\delta^{\alpha'}_\beta\delta^{\beta'}_\gamma - \delta^{\beta'}_\beta\delta^{\alpha'}_\gamma\right) =$$

$$= \delta^{\alpha'}_\alpha\left(3\delta^{\beta'}_\beta - \delta^{\beta'}_\beta\right) - \delta^{\beta'}_\alpha\left(2\delta^{\alpha'}_\beta\right) + \delta^{\beta'}_\alpha\delta^{\alpha'}_\beta - \delta^\gamma_\alpha\delta^{\beta'}_\beta\delta^{\alpha'}_\gamma = \boxed{\delta^{\alpha'}_\alpha\delta^{\beta'}_\beta - \delta^{\beta'}_\alpha\delta^{\alpha'}_\beta.}$$

Далее просто в последнем равенстве приравниваем в первом случае $\beta' = \beta$, а во втором ещё и $\alpha = \alpha'$, получая:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\alpha'\beta\gamma} = 3\delta^{\alpha'}_\alpha - \delta^{\alpha'}_\alpha = 2\delta^{\alpha'}_\alpha, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = 2\delta^\alpha_\alpha = 6.$$

У2

- $[\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]]^i = \varepsilon^i{}_{jk}a^j[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]^k = \varepsilon^i{}_{jk}a^j\varepsilon^k{}_{mn}b^mc^n = \left(\delta^i_m\delta_{jn} - \delta^i_n\delta_{jm}\right)a^jb^mc^n = a^jb^ic_j - c^ia^jb_j = b^i(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - c^i(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

- $([\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\cdot[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}]) = \varepsilon_{ijk}a^jb^k\varepsilon^i{}_{mn}c^md^n = (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})\,a^jb^kc^md^n = a^jb^kc_jd_k - a^jb^kc_kd_j =$
  $= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.

- Тут придется применить результаты первого примера этого урпажения:
  $$([\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\cdot[[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]\times[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}]]) = (\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}])\,(\boldsymbol{b}\cdot[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}]) - (\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}])\,(\boldsymbol{b}\cdot[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]) =$$
  $$= a^i\varepsilon_{ijk}b^jc^k\cdot b^\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}c^\beta a^\gamma - a^i\varepsilon_{ijk}c^ja^k\cdot b^\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}b^\beta c^\gamma = (a^i\varepsilon_{ijk}b^jc^k)^2 = (\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}])^2$$

У3

Сразу оговорим, что все нечетные степени, ввиду инвариантности по перестановкам при усреднении дадут нуль.

Для четных же будем получать какие-то симметричные тензоры, которые могут быть выражены через всевозможные комбинации символов Кронекера. Так для два-тензора:

$$< n_\alpha n_\beta >= z_{ab} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}.$$

В силу единичности n при свертке два-тензора из них должна получиться единица. Симметричный единичный два-тензор, инвариантный к поворотам это и есть Кроннекер на троих.

Для четырех же возьмём все возможные комбинации символов Кроннекера:

$$< n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu >= \frac{1}{c}\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\mu}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\mu}+\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\gamma}\right).$$

Опять же нужно найти константу c, чтобы свертка четыре-тензора была единичной:

$$\delta^{\alpha\beta}\delta^{\gamma\mu}\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\mu}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\mu}+\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\gamma}\right)=9+\delta^\beta_\gamma\delta^\gamma_\beta+\delta^\beta_\mu\delta^\mu_\beta=15. \qquad \Rightarrow \qquad < n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu >= \frac{1}{15}\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\mu}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\mu}+\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\gamma}\right).$$

У4

а)

- $(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A})^i=\varepsilon^i{}_{jk}\nabla^j(\varepsilon^k{}_{\alpha\beta}\nabla^\alpha A^\beta)=(\delta^i_\alpha\delta_{j\beta}-\delta^i_\beta\delta_{j\alpha})\nabla^j\nabla^\alpha A^\beta=\nabla^i(\nabla_jA^j)-\nabla_j\nabla^jA^i=\left(\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A}-\nabla^2\boldsymbol{A}\right)^i.$
- $(\operatorname{rot}[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}])^i=\varepsilon^i{}_{jk}\nabla^j\varepsilon^k{}_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta=(\delta^i_\alpha\delta_{j\beta}-\delta^i_\beta\delta_{j\alpha})(a^\alpha\nabla^jb^\beta+b^\beta\nabla^ja^\alpha)=a^i\nabla^jb_j-b^i\nabla^ja_j=(\boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a})^i.$
- $(\operatorname{rot}[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}])^i=\varepsilon^i{}_{jk}\nabla^jfA^k=\varepsilon^i{}_{jk}(f\nabla^jA^k+A^k\nabla^jf)=f\varepsilon^i{}_{jk}\nabla^jA^k+\varepsilon^i{}_{jk}\nabla^jf=(f\operatorname{rot}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\operatorname{grad}f)^i.$
- $\operatorname{div}f\boldsymbol{A}=\nabla_ifA^i=A^i\nabla_if+f\nabla_iA^i=(\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{grad}f)+f\operatorname{div}\boldsymbol{A}.$
- $\operatorname{div}[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]=\nabla_i\varepsilon^i{}_{jk}a^jb^k=\varepsilon^i{}_{jk}(b^k\nabla_ia^j+a^j\nabla_ib^k)=\varepsilon^i{}_{jk}b^k\nabla_ia^j+\varepsilon^i{}_{jk}a^j\nabla_ib^k=b^k\varepsilon_k{}^i{}_j\nabla_ia^j-a^j\varepsilon_j{}^i{}_k\nabla_ib^k=$
  $=(\boldsymbol{b}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{b}).$
- $[\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})]^i=\nabla^ia^jb_j=a^j\nabla^ib_j+b_j\nabla^ia^j$

  Рассмотрим такую штуку: $((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b})^j=a_i\nabla^ib^j$

  И такую: $(\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b}])^i=\varepsilon^i{}_{jk}a^j\varepsilon^k{}_{\alpha\beta}\nabla^\alpha b^\beta=(\delta^i_a\delta_{j\beta}-\delta^i_\beta\delta_{j\alpha})a^j\nabla^\alpha b^\beta=a^j\nabla^ib_j-a_j\nabla^jb^i$

  Из этих штук и можем составить начальную:

  $$[\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})]^i=\nabla^ia^jb_j=a^j\nabla^ib_j+b_j\nabla^ia^j=[\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{b}]]^i+[\boldsymbol{b}\times[\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{a}]]+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{a}.$$

б)

- $\operatorname{rot}[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}]=3\boldsymbol{\omega}.$
- $grad(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{r}=/a^i\nabla_ir^j=\ \ a^i\delta^j_i/=\boldsymbol{a}$

в)

- $\operatorname{grad}r=/\nabla^i\sqrt{r^jr_j}=\frac{1}{2}\frac{\nabla^ir^jr_j}{\sqrt{r^\gamma r_\gamma}}=\frac{r^j\delta^i_j}{r}/=\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$
- $\operatorname{div}\boldsymbol{r}=\nabla_\alpha r^\alpha=\delta^\alpha_\alpha=3.$
- $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{r}=/a^i\nabla_ir^j/=\boldsymbol{a}.$
- $\operatorname{grad}f(r)=/\nabla^if(r)=f'_r\nabla^i\sqrt{r^jr_j}/=f'_r\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$
- $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(r)=/\varepsilon^i{}_{jk}\nu^ja^k(r)=\varepsilon^i{}_{jk}(a^k)'_r\frac{\nabla^jr}{r^j/r}/=\frac{1}{r}[\boldsymbol{a}'_r\times\boldsymbol{r}].$
- $\operatorname{div}\boldsymbol{a}(r)=/\nabla^ia_i(r)=(a_i)'_r\nabla^ir/=\frac{1}{r}(\boldsymbol{a}'_r\cdot\boldsymbol{r}).$

3 Первое задание

Т1

Для начала запишем преобразование Лоренца для системы K':

$$t'=\gamma_{v_x}\left(t-\beta_x\frac{x}{c}\right),\qquad x'=\gamma_{v_x}(x-v_xt),\qquad y'=y,\qquad z'=z.$$

Аналогично перейдём к системе K'', выразив компоненты через их представление в системе K'

$$t''=\gamma_{v'_y}\left(t'-\beta_{v'_y}\frac{y'}{c}\right),\qquad x''=x',\qquad y''=\gamma_{v'_y}(y'-v'_yt),\qquad z''=z'.$$

Центр системы K'' неподвижен в координатах системы K'', соответственно

$$x'' = y'' = z'' = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{K''} = v_x t \\ y_{K''} = \gamma_{v_x}^{-1} v'_y t \end{cases},$$

что соответствет $(x, y)[t]$ для координат центра системы K'' в системе K.

Теперь найдём движение центра системы K в системе K'', подставив значения $x = y = 0$,

$$x''_K = -\gamma_{v_x} v_x t, \qquad y''_K = -\gamma_{v'_y} \gamma_{v_x} v'_y t, \qquad t''_K = -\gamma_{v'_y} \gamma_{v_x} t.$$

Можно заметить, что

$$\gamma_{v'_y} \gamma_{v_x} \approx \gamma\left(\sqrt{v_x^2 + v_y'^2}\right) = \gamma_v, \qquad \beta_{v_x}, \beta_{v'_y} \ll 1.$$

Теперь нас интересует направление прямой $\parallel \boldsymbol{v}$ – движения K'' в системе K:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\dot{y}_{K''}}{\dot{x}_{K''}} = \gamma_{v_x}^{-1} \frac{v'_y}{v_x}.$$

Угол же между осью x'' и движением центра системы K может быть найден, как

$$\operatorname{tg}(\theta + \varphi) = \frac{dy''_K}{dt''} \Big/ \frac{dx''_K}{dt''} = \gamma_{v'_y} \frac{v'_y}{v_x} = \gamma_{v_x} \gamma_{v'_y} \operatorname{tg} \varphi \approx \gamma_v \operatorname{tg} \varphi.$$

С другой стороны, раскрывая тангенс суммы, находим

$$\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \varphi = \gamma_v \operatorname{tg} \varphi (1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \theta), \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{(\gamma_v - 1) \operatorname{tg} \varphi}{1 + \gamma_v \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

T2

Аппроксимируем движение нИСО в моменты времени t и $t + dt$ сопутствующими ИСО K' и K''. Пусть K – лабороторная система отсчета, K' – сопутствующая ИСО $\boldsymbol{v} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{v}(t)$, а K'' – сопутствующая ИСО движущаяся относительно K со скоростью $\boldsymbol{v}(t + dt) = \boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$. Далее для удобства будем считать, что K'' движется относительно K' со скоростью $d\boldsymbol{v}'$.

Проверим, что последовательное применеие $\Lambda(d\boldsymbol{v}') \cdot \Lambda(\boldsymbol{v})$ эквивалентно $R(\varphi) \cdot \Lambda(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v})$, где $R(\varphi)$ – вращение в $\{xyz\}$. Для этого просто найдём

$$R(\varphi) = \Lambda(d\boldsymbol{v}') \cdot \Lambda(\boldsymbol{v}) \cdot \Lambda(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v})^{-1}.$$

Пусть ось $x \parallel \boldsymbol{v}$, ось y выберем так, чтобы $d\boldsymbol{v} \in \{Oxy\}$. Теперь, согласно (1.1), считая $|\boldsymbol{v}| = \beta_1$, $d\boldsymbol{v}' = (\beta'_x,\ \beta'_y)^{\mathrm{T}}$ можем записать (пренебрегая слагаемыми β'_x, β'_y второй и выше степени):

$$\Lambda(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 & 0 & 0 \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(d\boldsymbol{v}') = \begin{bmatrix} 1 & -\beta'_x & -\beta'_y & 0 \\ -\beta'_x & 1 & 0 & 0 \\ -\beta'_y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь можем выразить $d\boldsymbol{v}'$ через $d\boldsymbol{v}$, считая $\boldsymbol{r}_{\mathrm{f}}$ центром системы K''

$$\boldsymbol{r}'_f = \Lambda(d\boldsymbol{v}') \cdot \Lambda(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{r}_f = (ct',\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad \beta(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v})_x = \frac{\beta_1 + \beta'_x}{1 + \beta_1 \beta'_x}, \quad \beta(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v})_y = \frac{\gamma_{\beta_1} \beta_y}{1 + \beta_1 \beta_x}.$$

где скорость находим аналогично первому номеру. Тут стоит заметить, что скоростью β_x можно было бы пренебречь в сравнении с β_1, так как скорее всего первый порядок малось β_x не войдёт в ответ, однако хотелось бы в этом убедиться.

Зная $d\boldsymbol{v}$ можем найти $d\boldsymbol{v}'$:

$$\beta'_x = \gamma_{\beta_1}^2 \beta_x, \qquad \beta'_y = \gamma \beta_y.$$

Но это на потом.

Через $\boldsymbol{v}$, $d\boldsymbol{v}'$ теперь можем найти $\Lambda(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v})$, и посчитать обратную матрицу:

$$\Lambda^{-1}(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} \gamma_{\beta_1}(\beta_1\beta_x + 1) & \gamma_{\beta_1}(\beta_1 + \beta_x) & \beta_y & 0 \\ \gamma_{\beta_1}(\beta_1 + \beta_x) & \gamma_{\beta_1}(\beta_1\beta_x + 1) & \frac{\beta_1 \beta_y}{\gamma_{\beta_1}^{-1} + 1} & 0 \\ \beta_y & \frac{\beta_1 \beta_y}{\gamma_{\beta_1}^{-1} + 1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Наконец можем посчитать матрицу поворота, которая в первом приближении действительно не содержит β_x:

$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\beta_1\beta_y'}{\sqrt{1-\beta_1^2}+1} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1\beta_y'}{\sqrt{1-\beta_1^2}+1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

что дейстительно соответствует повороту в плоскости $\{xy\}$ вокруг оси z с углом φ равным

$$\varphi = -\frac{\beta_y\beta_1}{\gamma_{\beta_1}^{-2} + \gamma_{\beta_1}^{-1}} = -\frac{\gamma_{\beta_1}^2}{\gamma_{\beta_1}+1}\beta_1\beta_y,$$

где φ малый, в силу малости β_y. Так вот, в результате поворота координатных осей меняются и любые векторы, неподвижные в неИСО, то есть искомая угловая скорость

$$\omega_z = -\frac{\gamma_{\beta_1}^2}{\gamma_{\beta_1}+1}\beta_1(\beta_y/\Delta t), \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = -\frac{\gamma_{\beta_1}^2}{\gamma_{\beta_1}+1}\left[\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right] = \frac{\gamma_{\beta_1}^2}{\gamma_{\beta_1}+1}\left[\dot{\boldsymbol{\beta}}\times\boldsymbol{\beta}\right],$$

что и требовалось доказать.

T3

Посмотрим на сопутствующую вращающемуся интерферометру в точке рассматриваемого луча. Для луча можем записать волновой вектор, как

$$\bar{k}_\pm' = \left(\frac{\omega}{c},\ \pm n\frac{\omega}{c},\ 0,\ 0\right),$$

где знак выбирается в соответсвии с направлением обхода. Считая, что ось Ox направлена вдоль вращения интерферометра в рассматриваемой точке

$$ck_\pm = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \omega \\ \pm n\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega\gamma(1+\pm n\beta) \\ \omega\gamma(n\pm\beta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$ck_{x,\pm} = \omega\gamma(n\pm\beta).$$

Можно заметить, что у света также зависит частота от направления двиения, судя по формуле выше, но в силу малости скорости вращения, это приведет только к оооочень медленной осцилляции в интерференции

$$I_{\text{инт}} = I_1 + I_2 + \langle(\boldsymbol{E}_{10}\cdot\boldsymbol{E}_{20})\cos\left((\omega_2-\omega_1)t+\ldots\right)\rangle,$$

так что по идее этим эффектом можно принебречь.

В силу различности k_+ и k_- можем найти разность хода

$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = 2\pi R\frac{\gamma\omega\beta}{c},$$

считая данной угловую скорость вращения интерферометра Ω приходим к выражению вида

$$\Delta\varphi = \frac{2\gamma}{c^2}\omega\Omega\pi R^2 \overset{\gamma\sim1}{\approx} \frac{2\pi}{c^2}\omega\Omega R^2,$$

где $\gamma\approx1$ для корректности результата, так как при расчете не учитывалось изменение метрики для неИСО.

T4

Теперь рассмотрим реакцию превращения электрона и позитрона в мюон и антимюон:

$$e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-.$$

Хотелось бы зная энергию стакивающихся частиц найти эффективную массу системы и энергии $\mu^\pm$.

Для 4-импульса $p^i = (\mathscr{E}/c, \boldsymbol{p})$, для которого верно

$$c^2(2m_\mu)^2 \leqslant (p_1^i + p_2^i)^2 = \bar{p}_1^2 + \bar{p}_2^2 + 2\bar{p}_1\cdot\bar{p}_2 = c^2 2m_e^2 + 2\left(\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2/c^2 - \boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2\right).$$

что приводит нас к неравенству

$$c^2(2m_\mu^2 - m_e^2) \leqslant \frac{1}{c^2}\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 - \boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2.$$

При равных энергия $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}$ и $\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2$ верно, что

$$\boldsymbol{p}_1^2 = \frac{\mathscr{E}^2}{c^2} - m^2c^2,$$

тогда

$$c^2(2m_\mu^2 - m_e^2) \leqslant \frac{1}{c^2}\mathscr{E}^2 + \boldsymbol{p}_1^2 = \frac{2}{c^2}\mathscr{E}^2 - m_e^2c^2,$$

таким образом

$$\mathscr{E} \geqslant m_\mu c^2, \qquad T_{\text{порог}} = (m_\mu - m_e)c^2,$$

а эффективной массе системы соответствует ...

При налете на неподвижную частицу $\mathscr{E}_2 = m_e c$ и $\boldsymbol{p}_2 = 0$, тогда

$$(2m_\mu^2 - m_e^2)c^2 \leqslant \mathscr{E}_1 m_e, \qquad \Rightarrow \qquad \mathscr{E}_1 \geqslant \left(2\frac{m_\mu^2}{m_e} - m_e\right)c^2.$$

Соответсвенно для пороговой энергии верно

$$T_{\text{порог}} = \frac{2c^2}{m_e}\left(m_\mu^2 - m_e^2\right),$$

а эффективной массе значение ...