Домашнее задание №3 курса «Гармонический анализ»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *20 мая 2021 г.*

Содержание

1 Третье задание по математическому анализу

14.8(2)

Рассмотрим интеграл с подвижной особенностью. В частности есть $c(\alpha) \in [a,b]$:

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \left(\int_a^{c(\alpha)} + \int_{c(\alpha)}^b\right) f(x,\alpha)\,dx.$$

В частности опишем ситуации, когда функция неограничена на нижнем и верхнем пределе:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha_1(\varepsilon) \geqslant a\ \forall \xi_1 > \alpha_1(\varepsilon)\ \forall \varepsilon \in E\ \left|\int_{\xi_1}^{c(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично для нижнего предела

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha_2(\varepsilon) \leqslant b\ \forall \xi_2 > \alpha_2(\varepsilon)\ \forall \varepsilon \in E\ \left|\int_{c(\alpha)}^{\xi_2} f(x,\alpha)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если взять Δ большое правильным образом, то приходим к определению вида

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \Delta(\varepsilon) > 0\ \forall \delta_1 \in (0, \Delta(\varepsilon))\ \forall \delta_2 \in (0, \Delta(\varepsilon))\ \forall \alpha \in E\ \left|\int_{c(\alpha)-\delta_1}^{c(\alpha)+\delta_2} f(x,\alpha)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Теперь можем перейти к примеру:

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin(\alpha x)}{\sqrt{|x-\alpha|}}\,dx,$$

тогда, по определению,

$$\left|\int_{\alpha-\delta_1}^{\alpha+\delta_2} \frac{\sin(\alpha x)\,dx}{\sqrt{|x-\alpha|}}\right| \leqslant \int_{\alpha-\delta_1}^{\alpha+\delta_2} \frac{dx}{\sqrt{|x-\alpha|}} = \int_{\alpha-\delta_1}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{|x-\alpha|}} + \int_{\alpha}^{\alpha+\delta_2} \frac{dx}{\sqrt{|x-\alpha|}} = 2\sqrt{\delta_1} + 2\sqrt{\delta_2} < 4\Delta(\varepsilon),$$

в таком случае достаточно взять $\Delta(\varepsilon) = \varepsilon^2/16$.

1.1 Сходимость и полнота систем функций в пространствах C и L_p

Можно построить следующую систему вложений: топологические пространства $\supset$ метрические пространства $\supset$ нормированные пространства $\supset$ предгильбертовы пространства.

Def 1.1. *Банахово пространство* – полное нормированое пространство.

Def 1.2. *Гильбертово пространство* – банахово пространство, с нормой, порожденной положительно определенным скалярным произведением $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Def 1.3. *Гильбертово пространство* – ~~полное~~ нормированое пространство, с нормой, порожденной положительно определенным скалярным произведением $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Приведем некоторые примеры: пространство непрерывных функций $C[a,b]$ с нормой $\|\cdot\|_C = \|\cdot\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]}|x(t)|$. Пространство L_p. Пространство C_p, совпадающее с $C[a,b]$, но с нормой $\|\cdot\|_2$ – предгильбертово, кстати.

T1

Построим табличку сходимостей. Для начала вспомним, что если $\mu(A) < +\infty$ и $1 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant +\infty$, то

$$\|\cdot\|_{p_1} \leqslant C(\mu(A), p_1, p_2)\|\cdot\|_{p_2}, \qquad C(\ldots) = (\mu(A))^{\frac{p_2-p_1}{p_1p_2}}.$$

В частности, можно перейти к пределу, и обнаружить, что

$$\|\cdot\|_1 \leqslant C(\ldots)\|\cdot\|_\infty, \qquad \|\cdot\|_\infty = \lim_{p\to\infty}\|\cdot\|_p \equiv \|\cdot\|_C.$$

Таким образом из сходимости L_2 следует сходимость в L_1.

Ещё раз напишем, что значит сходимость по норме:

$$f_n \underset{L_p}{\to} f \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N_\varepsilon\ \|f_n - f\|_p < \varepsilon.$$

Тогда рассмотрим

$$\|f_n - f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\|f_n - f\| < \varepsilon, \qquad \square.$$

Теперь докажем $f_n \underset{C}{\to} f \;\Rightarrow\; f_n \underset{L_2}{\to} f$, где сходимость по C-норме:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N_\varepsilon\ \forall x \in A\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ну, действительно,

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_A |f_n - f|^2(x)\mu(\,dx) \leqslant \int_A \left\{\sup_{x\in A} |f_n - f|(x)\right\}^2 \mu(\,dx) = \left\{\sup_{x\in A} |f_n - f|(x)\right\}^2 \mu(A),$$

где множитель перед $\mu(A)$ стремится к 0 при $n \to \infty$, $\square$.

Также стоит вспомнить, что из равномерной сходимости следует поточечная сходимость. По определению, поточечная сходимость:

$$\forall x \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\xi, \varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ |f_n - f|(x) < \varepsilon.$$

Получается, что достаточно взять $N(x, \varepsilon) = N(\varepsilon)$ и получить искомое утверждение.

В качетсве контрпримера рассмотрим $f_n(x) = n \operatorname{arcctg}(n/x^2)$ с $A = [1,_\infty)$. По отрицанию условия Коши, если

$$\exists \varepsilon_0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant k\ \exists p \in \mathbb{N}\ \exists \tilde{x} \in A\colon\ |f_{n+p} - f_n|(\tilde{x}) \geqslant \varepsilon_0,$$

то последовательность f_n не явдяется равномерно сходящейся. Действительно, при $n = k$, $p = 2k - 2n$, $\tilde{x} = \sqrt{k} = \sqrt{n}$, верно, что

$$|f_{n+p} - f_n|(\tilde{x}) = n|2 \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1| \geqslant |2 \operatorname{arctg} 2 - \pi/4| = \varepsilon_0 > 0,$$

что говорит об отсутсвие равномерной сходимости. При этом $f_n \to x^2$ поточечно на $x \in E$.

Контрпримеры. Покажем, что $f_n \underset{L_1}{\to} f \not\Rightarrow f_n \underset{L_2}{\to} f$. Прямую мы умеем строить по двум точкам

$$\frac{f - f_0}{f_1 - f_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

Построим последовательность функций вида

$$\frac{f_n - c_n}{0 - c_n} = \frac{x - 0}{x_n - 0}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} c_n(1 - \frac{x}{x_n}), & x \in [0, x_n), \\ 0, & x \in [x_n, 1]. \end{cases}$$

Контропримеры строим на отрезке $[0, 1]$. Выберем последоательность сходящуюся к 0 в L_1 норме:

$$\|f_n - 0\|_1 = \int_0^{x_n} \left| c_n \left(1 - \tfrac{x}{x_n}\right)\right| \mu(\,dx) = \frac{1}{2} c_n x_n, \qquad \|f_n - 0\|_2^2 = \frac{1}{3} c_n^2 x_n, \qquad \Rightarrow \qquad \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} c_n \sqrt{x_n}.$$

Пусть $c_n x_n = \alpha_n$ – бесконечно малая последовательность. Выберем $x_n = 1/n$, тогда $c_n = n\alpha_n$.

Для $\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\alpha_n}{\sqrt{x_n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{n} \alpha_n$, что устремим к ∞, выбрав

$$\alpha_n = \frac{1}{n^{1/2 - \xi}}, \qquad \xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \qquad \square.$$

Эту историю можно обобщить до отсутсвия следствия в $\|f_n\|_p = c_n x_n^{1/p}(1 + p)^{-1/p}$. Тогда можем взять $\alpha_n = \left(n^{1 - 1/p - \xi}\right)^{-1}$, для $\xi \in (0, 1 - 1/p)$.

Теперь покажем, что $f_n \underset{L_2}{\to} f \not\Rightarrow f_n \underset{C}{\to} f$. Пусть $f_n \to 0$ в L_2 норме. Пусть

$$\|f_n - 0\|_2 = \|f_n\| = \frac{c_n}{\sqrt{3}} x_n = \alpha_n, \qquad x_n = \frac{1}{n}.$$

Пусть f_n вида

$$f_n(x) = \big\{ \sqrt{3}\alpha_n \sqrt{n}(1 - nx), \quad x \in [0, 1/n)0, \quad x \in (1/n, 1].$$

В таком случае

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n - 0|(x) = \sup_{x \in [0, 1/n]} |\sqrt{3}\alpha_n \sqrt{n}(1 - nx)| = \sqrt{3}\alpha_n \sqrt{n} \not\to 0, \qquad \alpha_n = \frac{1}{n^{1/2 - \xi}}, \qquad \xi \in [0, 1/2),$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь есть поточечная сходимость но нет сходимости в L_1. Построим пилу, вида

$$f_n(x) = \begin{cases} c_n \frac{x_{1,n} - x}{x_{1,n} - x_n}, & x \in (x_{1,n}, x_n], \\ c_n \frac{x_{2,n} - x}{x_{2,n} - x_n}, & x \in [x_n, x_{2,n}), \\ 0, & x \in [0, x_{1,n}] \cup [x_{2,n}, 1]. \end{cases}$$

В этой задаче достаточно считать $x_{1,n} = 1/(n + 1)$, а $x_{2,n} = 1/n$, тогда

$$\|f_n\|_1 = c_n \frac{x_{2,n} - x_{1,n}}{2} = \frac{c_n}{2} \frac{1}{(n + 1)n} \to \infty.$$

Чтобы это сделать, достаточно выбрать $c_n = n^{2+\xi}$. Однак поточечно такой зуб пилы сходится к 0. Действительно, при $x = 0$ $f_n(0) = 0$. Для остальных x можно показать, что по определению $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

T2

Приведем пример, когда последовательность функция (f_n) сходится в пространстве $L_1[a,b]$, но для любого $x \in [a,b]$ последовательность чисел $f_n(x)$ расходится.

Из сходимости в L_1 следует сходимость по мере, так что можем воспользоваться *примером Рисса*. Пусть $f_n \underset{L_2}{\to} f \equiv 0$. Рассмотрим конструкцию вида

$$\varphi_{m,k}(x) = \xi\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right](x), \qquad m \in \mathbb{N}_0,$$

где $k = 0, 1 \ldots, 2^m - 1$. Утверждается, что $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists! m, k\ :\ n = 2^m + k$. Таким нетривиальным образом мы (точнее Рисс) решили дробить ступеньку. Верно, что

$$\|f_n - 0\|_1 = \int_{k/2^m}^{(k+1)/2^m} \varphi_{m,k}(x)\,dx = \frac{1}{2^m} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Однако, для $\forall x \in [0,1]$ существует бесконечное число сленов последовательности равных 0 и 1. Таким образом поточечно последовательнсоть расходится.

T3

Докажем, что естественное отображение $C[a,b] \to L_1[a,b]$ не сюръективно, не забывая, что элементы L_1 – это не функции, а классы эквивалентности.

Достаточно выбрать функцию, вида

$$f(x) = \operatorname{sign} x,$$

которую *нельзя* изменить на множестве нулевой меры, чтобы сделать её непрерывной.

T4

Выясним полноты некоторых систем функций в пространстве $L_2[0, \pi/2]$. Начём с

$$\{f_n(x) = \sin[(2n-1)x]\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Def 1.4. Пусть X – нормированное пространство. Система $S = \{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ называется *полной*, если $\forall x \in X\ \forall\varepsilon > 0$ $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{A}$, а также $\exists f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n} \in S$ такие, что $\|x - (\alpha_1 f_{\alpha_1} + \ldots + \alpha_n f_{\alpha_n})\|_X < \varepsilon$.

Стоит подчеркнуть, что это не определение базиса, так как $\alpha \equiv \alpha(\varepsilon)$. Это определение слабее базиса, это – приближение.

Если мы возьмём $L_2[-\pi,\pi]$, и систему вида $\{1, \sin(nx), \cos(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$, то она будет полна, более того будет являеться базисом. В рамках задачи мы интересуемся промежутком $[0, \pi/2]$.

Более того, такая система полна в $\overset{\circ}{C}[-\pi,\pi]$, $(f(-\pi) = f(\pi))$, чем мы потом воспользуемся в T5.

В смысле L_2 мы можем приближать, игнорируя счётное число точек:

$$\|f - \tau_n\|_2^2 = \int_0^{\pi/2} |f - \tau_n|(x)\mu(\,dx).$$

Достраивая функцию специфичным образом на отрезок $[-\pi,\pi]$ (u, d, u, d), пользуемся знанием о полноте тригонометрической системы и приходим к полной системе.

Для понимания продолжения функции с отрезка $[0, \pi/2]$, на $[-\pi,\pi]$, достаточно построить функции, образующие системы (рис. 1). И, аналогично, для $k = 2$ (рис. 2).

T5

Аналогично T4, рассмотрим полноту систем некоторых функция в пространстве $C[0, \pi/2]$. В частности покажем, что $\exists \tilde{x} \in C[0, \pi/2]$ и $\exists \varepsilon_0\ \forall \tau_n$. Все синусы упираются в 0, выберем $\tilde{x}(t) = 1$, тогда

$$\|\tilde{x} - \tau_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,\pi/2]} |\tilde{x}(t) - \tau_n(t)| \geqslant |\tilde{x} - \tau_n| = |\tilde{x} - \tau_n|(0) = |1 - 0| = \varepsilon_0.$$

Получается, что ломаются все синусы и косинусы с «нечётными дугами» (достаточно взять $t = \frac{\pi}{2}$), что явно видно по построению.

Итого, единственная хорошая система, – $\cos(2k\,x)$.

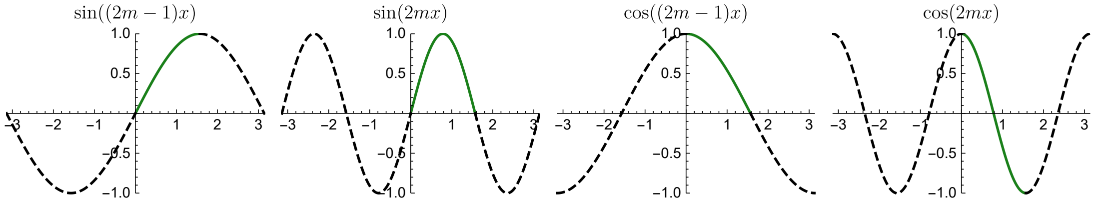

Рис. 1: Графики функция при $m = 1$ для Т4

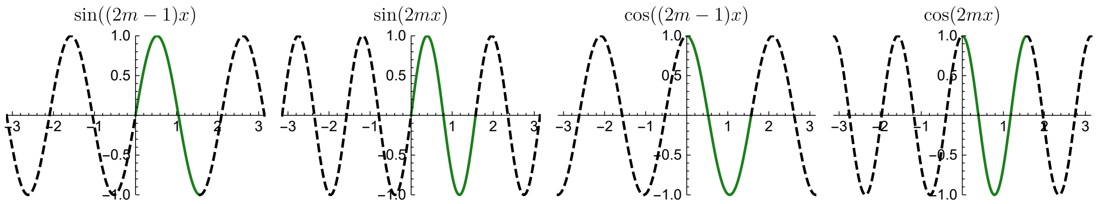

Рис. 2: Графики функция при $m = 2$ для Т4

Т6. Функции Эрмита

Приведем пример счетной системы фукций, полной в $L_2(\mathbb{R})$. В частности, воспользуемся функциями Эрмита:

$$\varphi_n(t) = c_n H_n(t) e^{-\frac{1}{2}t^2}, \qquad H_n(t) = e^{\frac{1}{2}t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

Утверждается, что это базис $L_2(\mathbb{R})$, докажем это.

Есть система функций

$$\mathcal{L} = \{\varphi_n(t)\} = \{\rho(t) e^{-\frac{1}{2}t^2},\ \rho \in \mathcal{P}\}.$$

Так как L_2 – гильбертово пространство, то достаточно проверить замкнутость системы, то есть показать, что $\mathcal{L}^\perp = \{0\}$. По определению:

$$f \in \mathcal{L}^\perp, \quad \Rightarrow \quad \int_\mathbb{R} f(t) t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим преобразование Фурье:

$$F\left[f(t)e^{-\frac{1}{2}t^2}\right](y) = \int_\mathbb{R} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} f(t) e^{-\frac{1}{2}t^2}, e^{-iyt} = \int_\mathbb{R} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} f(t) e^{-\frac{1}{2}t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iyt)^n}{n!} =$$

$$\overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iy)^n}{n!} \int_\mathbb{R} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} f(t) \underbrace{t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}}_{=0 \text{ по условию}} = 0,$$

таким образом мы выяснили, что Фурье функции $\equiv 0$.

Далее воспользуемся тем, что $f(t)e^{-\frac{1}{2}t^2} \in L_2(\mathbb{R})$, а значит работает равенство Парсеваля:

$$\int_\mathbb{R} \left| f(t) e^{-\frac{1}{2}t^2} \right|^2 \frac{dt}{2\pi} = \int_\mathbb{R} \left| F[\ldots](y) \right|^2 dy = 0, \quad \Rightarrow \quad f(t)e^{-\frac{1}{2}t^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad f(t) = 0,$$

по крайней мере кроме множества меры нуль. Таким образом функции эрмита составляют базис в L_2.

Т7

Возьмём функцию, которая лежит в L_2, но не лежит в $\mathring{C}[-\pi, \pi]$, например, ограничение $\operatorname{sign} x$. И рассмотрим подпространство $V \subset \mathring{C}[-\pi, \pi]$, заданное ортогональностью к ней, то есть заданное формулой

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\, dx = \int_0^\pi f(x)\, dx.$$

Это V есть замкнутое подпространство в $\mathring{C}[-\pi, \pi]$ и в нём можно выбрать какую-то полную систему, и даже её ортогонализовать. Если начать с тригонометрической системы, то косинусы и чётные синусы и так лежат в V, нечётные синусы надо будет подправить, скомбинировав их с $\sin x$, а потом ещё ортогонализовать (что может быть неприятно).

В итоге, система не может быть полна в $\overset{\circ}{C}[-\pi,\pi]$, так как её линейные комбинации не выходят за пределы V. А что касается замкнутости, то переходя в гильбертово L_2 видно, что ортогональное дополнение к замыканию образа V в гильбертовом пространстве одномерно и натянуто на этот вот $\operatorname{sign} x$, который разрывен и не лежит в образе $\overset{\circ}{C}[-\pi,\pi]$. Так что замкнутость в терминах $\overset{\circ}{C}[-\pi,\pi]$ есть.

1.2 Банаховы пространства и их двойственные

T8

Здесь, и далее $p(x) = \|x\|$, $q(x) = \|x\|'$. Нормы *эквивалентны*, если

$$\exists m, M \ : \ mp(x) \leqslant q(x) \leqslant Mp(x) \ \ \forall x.$$

Так вот, всегда есть $\{e_k\}_{k=1}^n$ базис Гамиля, такой что $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$, где естественно ввести норму вида

$$p(x) = \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

Пусть $q(x)$ – ещё одна норма на X, в качестве мажоранты выберем $M = \max\limits_{i=1,\ldots,n} q(e_i)$. Теперь можем оценить сумму сверху:

$$q(x) = q\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^n |x_k| q(e_k) \leqslant M \cdot p(x).$$

И оценить снизу:

$$|q(x) - q(y)| \leqslant q(x-y) \leqslant M \cdot p(x-y),$$

вообще это значит, что q – липшецев функционал, – непрерывный функционал на X с нормой p, а тогда и $q(x)$ непрерывный функционал X с нормой $p(x)$.

Lem 1.5. *Шары в пространстве компактны тогда, и только тогда, когда* $\dim X < +\infty$*.*

Рассмотрим сферу $S = \{x \in X \mid p(x) = 1\}$ – компакт. Но мы знаем, что непрерывный функционал на компакте достигает своего миниимума:

$$\min_{x\in S} q(x) = \min_{p(x)=1} q(x) = m > 0.$$

Тогда на сфере S верно, что $q(x) \geqslant m$. Тогда в X $q(x) \geqslant m \cdot p(x)$. Действительно,

$$q(tx) = |t| q(x), \quad p(tx) = |t|\, p(x), \qquad \Rightarrow \qquad q(tx) = \frac{p(tx)}{p(x)} q(x) \geqslant m\, p(tx).$$

Собственно, $mp(x) \leqslant q(x) \leqslant M \cdot p(x)$, $Q.E.D.$

T9. Пространство c

Пространство состоит из некоторых бесконечномерных «векторов» (последовательностей):

$$x = \big(x(1), x(2), \ldots, x(k), \ldots\big), \qquad \left|\lim_{k\to\infty} x(k)\right| < +\infty.$$

Норма определена, как

$$p(x) = \|x\|_c = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)| = \|x\|_\infty.$$

Докажем, что это пространство является банаховым, а именно полноту по $\|\cdot\|_\infty$ норме.

Рассмотрим последовательность x_n, где

$$x_n = (x_n(1), \ldots, x_n(k), \ldots).$$

Глобально хотим показать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant N(\varepsilon) \ \ \forall l \in \mathbb{N} \quad \|x_{n+l} - x_n\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_{n+l}(k) - x_n(k)| < \varepsilon.$$

Попробуем через это продраться: из сходимости следует, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \ |x_{n+l}(k) - x_n(k)| < \varepsilon.$$

Здесь можем выделить $(x_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ – числовая фундаментальная в $\mathbb{R}$. По критерию Коши:

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \ \lim_{n\to\infty} x_n(k) = y(k) \in \mathbb{R},$$

уставнавливается покомпонентая сходимость. Теперь рассмотрим

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_n(k) - y(k)| = \|x_n - y\|_\infty < \varepsilon,$$

что автоматически означает, что $\exists y$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = y.$$

Следующий этап – показать, что

$$\exists \lim_{k\to\infty} y(k) \in \mathbb{R},$$

то есть показать полноту пространства:

$$\begin{aligned}
|y(k+q) - y(k)| &= |y(k+q) - x_n(k+q) + x_n(k+q) - x_n(k) + x_n(k) - x_n(k)| \\
&\leqslant |y(k+q) - x_n(k+q)| + |y(k) - x_n(k)| + |x_n(k+q) - x_n(k)| \\
&< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Таким образом мы доказали полноту пространства[1] .

T10. Критерий Йордана-фон Неймана

Хочется понять, можно ли ввести на пространстве $C[a,b]$ скалярное произведение так, что норма пространства будет получаться из этого скадяного произведения.

Thr 1.6 (критерий Йордана-фон Неймана)**.** *Норма $\|\circ\|_X$ порождается скалярным произведением тогда, и тоглько тогда, когда $\|\circ\|_X$ удовлетворяет правилу параллелограмма:*

$$\forall x, y \in X \quad \|x+y\|_X^2 + \|x-y\|_X^2 = 2\|x\|_X^2 + 2\|y\|_X^2.$$

Выберем $C[0,\pi/2]$, и $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$. Заметим, что

$$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1, \qquad \|x+y\|_\infty = \sqrt{2}, \qquad \|x-y\|_\infty = 1, \qquad 2+1 \neq 2+2,$$

таким образом пространство не гильбертово.

T11. Поиск функционала

Далее будем обозначать за $\mathcal{D}(A)$ область определения оператора A, и $\mathcal{R}(A)$ – область значений. Оператор действует $A\colon X \mapsto Y$, где X и Y – линейные нормированные пространства.

Def 1.7. Говорится, что линейный оператор $A\colon X \mapsto Y$ *непрерывен* а точка $x \in \mathcal{D}(A)$, если $\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}(A)$, сходящейся к x в X, $Ax_n \to Ax$ в Y. Оператор *глобально непрерывен*, если он непрерывен $\forall x \in \mathcal{D}(A)$.

Lem 1.8. *Для того, чтобы линейный оператор A был непрерывен на всей $\mathcal{D}(A)$, необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен в нуле.*

Def 1.9. Линейный оператор $A\colon X \mapsto Y$ называется *ограниченным*, если $\exists C > 0\colon \|Ax\|_Y \leqslant C \cdot \|x\|_X\ \forall x \in \mathcal{D}(A)$. Наименьшее из чисел C называется *нормой* оператора A и обозначается $\|A\|$.

Lem 1.10. *Для того, чтобы линейный оператор был ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы он переводил всякое ограниченное в X множество, в ограниченное в Y.*

Thr 1.11. *Оператор A непрерывен тогда, и только тогда, когда он ограничен.*

Thr 1.12 (о норме линейного оператора)**.** *Верно, что*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Найдём норму функционала

$$A\colon f \mapsto \sum_{k=0}^{N} (-1)^k f\left(\frac{k}{N}\right),$$

на пространстве $C[0,1]$.

Вообще нормированным пространством мы называем пару вида $(X, \|\circ\|_X)$. И пусть есть некоторый непрерывный ограниченный оператор из X в Y. Если $Y = \mathbb{C}(\mathbb{R})$,

$$A = F\colon X \to \mathbb{C}(\mathbb{R}),$$

[1] c_0, c_{00}, l_∞ – банаховы ли? (!): c_0 (сходящиеся к 0), c_{00} (финитные), l_∞ (ограниченные).

то A называют *функционалом*. Выберем в качетсве $X = C[0,1]$, а в качетсве $F\colon C[0,1] \mapsto \mathbb{C}(\mathbb{R})$. Функционал вида

$$F[f] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Что есть норма функционала? Норма функционала есть

$$\|F\| = \sup_{\|f\|_\infty \leqslant 1} |F[f]| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |F[f]| = \inf\{L > 0 \mid |F[f]| \leqslant L\|f\|_\infty\}, \qquad \forall f \in C[0,1].$$

`Глобально, это доказывается, например, в Константинове очень подробно.`

`Всегда легко сверху ограничить.` Тривиальный шаг:

$$|F[f]| = \left|\sum_{k=0}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = (n+1) \cdot \|f\|_\infty.$$

Продолжаем,

$$\frac{|F[f]|}{\|f\|_\infty} \leqslant n+1, \qquad \Rightarrow \qquad \|F\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |F[f]| \leqslant n+1.$$

Теперь выберем функцию $f_s(x) = f(k/n) = (-1)^k$. На ней мы действительно достигаем супремум, тогда

$$\|F\| = |F[f_s]| = n+1.$$

Таким образом нашли норму оператора.

В более общем случае можем показать, что

$$F[f] = \sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k), \qquad |F[f]| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |c_k| \cdot \|f\|_\infty, \qquad \Rightarrow \qquad \|F\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

Далее, определив схожим образом непрерывную функцию $\tilde{f}$, равную $\operatorname{sign} c_k$ в $t = t_k$ увидим, что $\|\tilde{f}\| = 1$,

$$\|F[\tilde{f}]\| \geqslant |F[\tilde{f}]| = \sum_{k=1}^{n} |c_k|,$$

таким образом решили чуть более общую задачу.

T12

Пусть функция g непрерывна на $[a,b]$. Найдём норму линейного отображения $M_g\colon L_2[a,b] \mapsto L_2[a,b]$, где $A_g(f) = [f]$ – мультипликативный оператор. Здесь $X = Y = L_2[a,b]$.

По опредению, норма оператора $\|A_g\| = \sup_{\|f\|_X = 1} \|A_g[f]\|_Y$. Аналогично, ищем ограничение сверху:

$$\|A_g[f]\|_2^2 = \|gf\|_2^2 = \int_{[a,b]} |gf|^2(x)\mu(\,dx) \leqslant \int_{[a,b]} \left\{\sup_{x\in[a,b]} |g(x)|\right\}^2 |f(x)|^2 \mu(\,dx).$$

Вынесенный супремум позволит записать:

$$\|A_g[f]\|_2^2 \leqslant \|g\|_\infty^2 \|f\|_2^2, \qquad \Rightarrow \qquad \|A_g\| = \sup_{\|f\|_2 = 1} \|A_g[f]\|_2 \leqslant \|g\|_\infty.$$

Далее покажем, что норма не достигается, но сколь угодно близко приближается.

Есть функция

$$\sup_{x\in[a,b]} |g(x)| = |g(c)|,$$

есть некоторая $f_\varepsilon \in L_2[a,b]$ вида

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_\varepsilon, & x \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon], \\ 0, & x \notin [c-\varepsilon, c+\varepsilon], \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \|f_\varepsilon\|_2^2 = \int_{[c-\varepsilon,c+\varepsilon]} \alpha_\varepsilon^2 \mu(dx) = \alpha_\varepsilon^2 \cdot 2\varepsilon = 1, \qquad \alpha_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}.$$

В таком случае рассмотрим

$$\|A_g[f_\varepsilon]\|_2^2 = \|gf_\varepsilon\|_2^2 = \alpha_\varepsilon^2 \int_{[c-\varepsilon,c+\varepsilon]} |g(x)|^2 \mu(dx) = \alpha_\varepsilon^2 \cdot 2\varepsilon |g(x_{c,\varepsilon})|^2 \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \|g\|_\infty^2,$$

в силу непрерывности g, по теореме о среднем.

Можно пойти другим путем, по определению:

$$\forall \varepsilon \in (0, \|g\|_\infty), \qquad \exists x_\varepsilon \subseteq [a,b]\ g(x) \geqslant \|g\|_\infty - \varepsilon,$$

почти всюду на X_ε. Выберем $h(x)$ вида

$$h(x) = \operatorname{sign} g(x)\ \chi_{X_\varepsilon}(x), \qquad \|h_\varepsilon\|_1 = \|h_\varepsilon\|_2 = \mu(X_\varepsilon),$$

тогда верно, что

$$\|A_g\| \geqslant \|A_g[h_\varepsilon]\|_1 \cdot \|h_\varepsilon\|_1 = \int_{[a,b]} |g(x)|\chi_{X_\varepsilon}(x)\mu(\,dx) \geqslant (\|g\|_\infty - \varepsilon)\,\chi\mu(X_\varepsilon), \qquad \Rightarrow \qquad \|A_g\| = \|g\|_\infty.$$

Аналогично в L_2:

$$\|A_g\|^2 \geqslant \||g|\chi_{X_\varepsilon}\|_2^2 \cdot \|h_\varepsilon\|_2^2 \geqslant \|g\|_\infty^2 \mu^2(X_\varepsilon),$$

что приводит такому же результату.

T13

Сначала найдём норму оператора F, откуда уже получим значение нормы для J, где

$$F[f] = \int_a^b g(t)f(t)\,dt, \qquad J[f] = \int_a^b K(x,y)f(y)\,dy,$$

где $g \in C[a,b]$, а $F,\ J$ – линейные функционалы на $C[a,b]$.

Первая часть. Функционал F ограничен в силу

$$|F[f]| \leqslant \int_a^b |g(t)|f(t)|\,dt \leqslant \|f\|_\infty \cdot \int_a^b |g(t)|\,dt.$$

Далее выберем произвольное $\varepsilon > 0$. По *теореме Кантора* найдётся такое разбиение отрезка $[a,b]$ точками $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, что колебание $\omega_i(g)$ функции g на i-ом отрезке $\Delta_i = [t_{i-1}, t_i]$ удовлетворяет неравенствам

$$\omega_i(g) < \varepsilon, \qquad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Разобьём все Δ_i на две группы. В первую группу отнесем те отрезки, на которых g сохраняет знак. Пусть это будут отрезки $\Delta_1', \ldots, \Delta_r'$. Вторую группу $\Delta_1'', \ldots, \Delta_s''$ образуют отрезки, на которых g меняется знак. В каждом промежутке второго типа существует точка, в которой g обращается в нуль. Ввиду установленных неравенств там $|g(t)| < \varepsilon$.

На промежутках первого типа положим $\tilde{f}(t) = \operatorname{sign} g(t)$, в остальных точках $\tilde{f}(t)$ – линейная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству $|\tilde{f}| \leqslant 1$. Тогда $\|\tilde{f}\| = 1$, и

$$\|F\| = \sup_{\|f\|=1} |F[f]| \geqslant |F[\tilde{f}]| = \left| \int_a^b g(t)\tilde{f}(t)\,dt \right| = \left| \sum_{k=1}^r \int_{\Delta_k'} |g(t)|\,dt + \sum_{i=1}^s \int_{\Delta_i''} g(t)\tilde{f}(t)\,dt \right| \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^r \int_{\Delta_k'} |g(t)|\,dt - \sum_{i=1}^s \int_{\Delta_i''} = \int_a^b |g(t)|\,dt - 2\sum_{i=1}^s \int_{\Delta_i''} |g(t)|\,dt \geqslant \int_a^b |g(t)|\,dt - 2\varepsilon \cdot \mu[a,b],$$

что ввиду произвольности ε означает, что $\|F\| \geqslant \int_a^b |g(t)|\,dt$, что вместе со знанием супремума позволяет утверждать: $\|f\| = \int_a^b |g(t)|\,dt$.

Вторая часть. Переходим к поиску нормы J:

$$\|J[f]\| = \sup_{t\in[a,b]} \left| \int_a^b K(t,s)f(s)\,ds \right| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)| \cdot |f(s)|\,ds \leqslant \|f\| \cdot \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,ds,$$

таким образом, по определению

$$\|J\| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,ds \overset{\text{def}}{=} M.$$

Так как ядро K непрерывно, то непрерывен и интеграл $\int_a^b |K|\,ds$, поэтому $\exists t_0 \in [a,b]$ такой, что $M = \int_a^b |K(t_0,s)|\,ds$.

Как было показано в первой части, $q(x) = \int_a^b |K(t_0,s)|f(s)\,ds$ – линейный непрерывный функционал на $C[a,b]$ с нормой равной M. Таким образом, выбирая $\tilde{f}$ так, чтобы $\operatorname{sign} \tilde{f(s)} = \operatorname{sign} K(t_0,s)$ может утверждать, что супремум достигается, и

$$\|J\| = M = \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,ds.$$

Thr 1.13 (Теоремма Бэра для открытых множеств)**.** *Счётное семейство открытых всюду плотных подмножеств банахова пространства имеет непустое пересечение.*

Thr 1.14 (Теорема Бэра для замкнутых множеств)**.** *Если банахово пространство E покрыто счётным семейством замкнутых множеств, то одно из них имеет непустую внутренность.*

T14

Докажем, что алгебраический базис бесконечномерного банахова пространства не может быть счётным.

Вводился алгебраический базис Гамиля $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$, где $\forall x \in E$ представляется в виде $x\ \sum_{k=1}^n x_k e_{\alpha_k}$. Получается, что нужно показать, что в бесконечномерном банаховом пространстве такой базис не может быть счётным: докажем от противного.

Пусть $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, тогда пространство описывется, как

$$E_n = \left\{\sum_{k=1}^n x_k e_k \mid x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}\right\} = \langle E_1, \ldots, e_n\rangle, \quad \Rightarrow \quad E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

Но по теореме Бэра для замкнутых множеств E не может быть счётным объединением нигде не плотных множеств.

Точнее, это было бы возможно, только с случае непустой внутренности одного из пространств E_n, что невозможно.

T15

Приведем пример плотного в $X = C[a,b]$ банахова пространства, со счётным базисом.

По теореме Вейерштрассе система степеней A полна в $C[a,b]$, что равносильно тому, что линейная оболочка системы степеней A плотна на $C[a,b]$. Таким образом, A со счётным базисом, является ответом на задачу.

Def 1.15. Последовательность элементов $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется *базисом* в пространстве[2] X, если $\forall x \in X$ существует единственный набор $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ таких, что сумма вида (не конечная не при каком n)

$$x = \sum_{k=1}^\infty x_k e_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n x_k e_k, \quad \Leftrightarrow \quad \exists!\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}\ \forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}_0\ \forall n \geqslant N_\varepsilon\ \|x - \sum_{k=0}^n x_k e_k\|_X = \|x - S_n\| < \varepsilon.$$

Thr 1.16 (Теорема Банаха-Штейнгауза для линейных функционалов)**.** *Пусть семейство линейный функционалов $Y \subset E'$ ограничено в любой точке банахова пространства E, то есть для любого $x \in E$ множество чисел $\{\lambda(x) \mid \lambda \in Y\}$ ограничено. Тогда Y ограничено в смысле нормы в E'.*

T16

Thr 1.17 (Расходимость ряда Фурье в точке)**.** *Существует непрерывная 2π-периодическая функция, ряд Фурье которой расходится в точке 0.*

$\triangle$. На пространстве $\dot{C}[-\pi,\pi]$ непрерывных 2π -периодических функций с нормой $\|\cdot\|_C$ определим линейный функционал

$$\lambda_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t)\, dt,$$

это значение n-й частичной суммы ряда Фурье в точке 0, $T_n(f,0)$. Можно заметить по определению нормы, что его норма равна

$$\|\lambda_n\| = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt.$$

Оценим интеграл модуля ядра Дирихле стандартным способом:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(n+1/2)x|}{2\pi|\sin x/2|}\, dx \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(n+1/2)x|}{\pi|x|}\, dx = \int_{-\pi(1+1/2)}^{\pi(1+1/2)} \frac{|\sin u|}{\pi|u|}\, du \geqslant$$

$$\geqslant \int_{-\pi(1+1/2)}^{\pi(1+1/2)} \frac{\sin^2 u}{\pi|u|}\, du = \int_{-\pi(1+1/2)}^{\pi(1+1/2)} \frac{1-\cos 2u}{2\pi|u|}\, du \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos 2u}{2\pi|u|}\, du = +\infty, \qquad n \to \infty.$$

Получается, то нормы функционалов λ_n при $n \to \infty$ не являются ограниченными. Следовательно, по теореме Банаха-Штейгауза, примененной в обратную сторону, для некоторой функции $f \in \dot{C}[-\pi,\pi]$ значения $\lambda_n(f) = T_n(f,0)$ не будут ограничены, и, следоватеьно, расходятся при $n \to \infty$.

$\square$

[2] Если линейное нормированное пространство имеет не более, чем счётный базис, то оно сепарабельно. Однако существуют сепарабельные банаховы пространства без базиса.

T17

Для последовательностей

$$x = (x(1), \ldots, x(k), \ldots),$$

рассмотрим пространство вида

$$l_p = \{x \mid \|x\|_p \in \mathbb{R}\}, \qquad \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{1/p}.$$

Возьмём пространство l_p как множество, но добавим норму из пространства l_q, где $\infty > q > p$. Покажем, что в таком «дырявом» пространстве не выполняется теорема Бэра и принцип равномерной ограниченности.

Рассмотрим шар A_n вида

$$A_n = \{x \in l_p \mid \|x\|_p \leqslant n\}, \qquad l_p = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Докажем от противного, что A_n нигде не плотно.

Пусть существует такой $R > 0$ и $x_0 \in A_n \colon B_R(x_0) \subset \operatorname{cl} A_n = A_n$.

$$\forall x \in l_p \colon \quad \rho_q(x, x_0) < R, \quad \Rightarrow \quad x \in A_n \quad \Rightarrow \quad \|x\|_p \leqslant n.$$

Рассмотрим некоторую последовательность

$$z(k) = \frac{R}{2} \frac{1}{\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^{q/p}}} \frac{1}{k^{1/p}}.$$

Для начала,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (z(k))^q \right)^{1/q} = \|z\|_q = \frac{R}{2} < +\infty.$$

Далее, видим гармонический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z(k))^p = +\infty, \quad \Rightarrow \quad \exists N \colon \sum_{k=1}^{N} (z(k))^p > (2n)^p.$$

Теперь рассмотрим набор «частниных последовательностей»

$$y(k) = \big\{ z(k), \quad k \leqslant N, 0, \quad k > N.$$

Теперь рассмотрим последовательность $h(k) = (x_0 + y)(k)$, для которой верно, что

1. $\rho_q(h, x_0) = \|y\|_q \leqslant R/2$, откуда следует $\|h\|_p \leqslant n$.

2. $\|h\|_p \geqslant \|y\|_p - \|x_0\|_p > 2n - n = n$, а тогда $\|h\|_p > n$, таким образом пришли к противоречию.

Полное пространство нельзя представить, как объединение нигде не плотных множеств, получается l_p не полно. Осталось доказать, что A_n замкнуто.

Пусть t – точка прикосновения. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ найдётся

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in A_n \colon \rho_q(t, x_\varepsilon) < \varepsilon, \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{N} |t(k) - x_\varepsilon(k)|^q < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |t(k) - x_\varepsilon(k)| < \varepsilon^{1/q},$$

получается это правда и для

$$\Rightarrow \quad \forall N \in \mathbb{N} \left(\sum_{k=1}^{N} |t(k)|^p \right)^{1/p} \leqslant t(k) - x_\varepsilon(k) + x_\varepsilon(k) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} |t(k) - x_\varepsilon(k)|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{N} |x_\varepsilon(k)|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(N \varepsilon^{p/q} \right)^{1/p} + n,$$

что стремится к n при $\varepsilon \to 0$. Таким образом $\|t\|_p \leqslant n$.

И, наконец, докажем, что не выполняеся принцип равномерной ограниченности. Рассмотрим функционалы

$$F_n[x] = \sum_{k=1}^{n} x(k).$$

Верно, что

$$\forall x \in l_1 \quad |F_n[x]| \leqslant \|x\|_1.$$

По норме $\| \circ \|_2$ верно, что эти функционалы можно переписать в виде скалярного произведения (x, e_n), где

$e_n = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$:

$$F_n[x] = (x, e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{(k)}(e_n)_{(k)} = \sum_{k=1}^{n} x(k),$$

что является проявлением одной из теорем Рисса. Положив $x = e_n$ видим, что норма достигается и $\|F_n\| = n \to \infty$ при $n \to \infty$. Таким образом мы показали, что на таком пространстве не работает принцип равномерной сходимости.

T18

Докажем, что в бесконечномерном банаховом пространстве E единичный шар не является компактным.

Lem 1.18 (Лемма Рисса или лемма о перпендикуляре)**.** *Если X_0 – замкнутое линейное подпространство в нормированом пространстве X, $X_0 \neq X$, тогда*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists x_\varepsilon \in X \colon \|x_\varepsilon\| = 1, \qquad \|x_\varepsilon - y\| \geqslant 1 - \varepsilon \ \ \forall y \in X_0.$$

$\triangle$. Найдётся $z \in X \backslash X_0$, положим $\delta = \inf\{\|z - u\| \mid y \in X_0\} > 0$. Тогда выберем

$$\varepsilon_0 > 0 \colon \frac{\delta}{\delta + \varepsilon_0} > 1 - \varepsilon,$$

выберем $y_0 \in X_0$ такой, что $\|z - y_0\| < \delta + \varepsilon_0$.

Далее, считая

$$x_\varepsilon = \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|}, \quad \forall y \in X_0.$$

Теперь оценим

$$\|x_\varepsilon - y\| = \frac{1}{\|z - y_0\|}\|z - y_0 - \|z - y_0\|y\| \geqslant \frac{\delta}{\delta + \varepsilon_0} > 1 - \varepsilon.$$

Заметим, что

$$v = y_0 + \|z - y_0\|y \in X_0, \qquad \Rightarrow \qquad \|z - v\| \geqslant \delta.$$

$\square$

Con 1.19. *В $\forall X$ (бесконеномерном, нормированном пространстве) $\exists (x_n) \colon \|x_n\| = 1$ и $\|x_n - x_k\| \geqslant 1$, $n \neq k$. Как следставие все шары $R > 0$ в X некомпактны.*

$\triangle$. Всякое бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку. Последовательность x_n строится по индукции с помошью леммы Рисса.

$\square$

Thr 1.20 (Теорема Хана-Банаха)**.** *Пусть E – банахово пространтво, $F \subset E$ – его линейное подпространство. Тогда всякий ограниченный линейный функционал $\lambda \in \mathbb{F}'$ продолжается до линейногофункционала на всём E без увеличения его нормы.*

Con 1.21. *Для всякого банахова пространства E и его ненулевого элемента $x \in E$ найдётся $\lambda \in E'$, такой что $\|\lambda\| = 1$ и $\lambda[x] = \|x\|$.*

Con 1.22. *Естественное отображение банахова пространства в двойственное к его двойственному (второе двойственное)*

$$E \mapsto E'', \qquad x \mapsto (\lambda \mapsto \lambda(x))$$

является вложением, сохраняющим норму.

Thr 1.23 (Теорема Радона-Никодима в $\mathbb{R}^n$)**.** *Пусть неотрицательная конечная борелевская мера μ на $\mathbb{R}^n$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Тогда у меры ν есть плотность, то есть борелевская $f \geqslant 0$, такая что для всякого борелевского X $\nu(X) = \int_X f(x)\,dx$.*

T19

Выведем из теоремы Хана-Банаха, что всякое конечномерное подпространство V в банаховом постранстве E имеет замкнутое дополнение $W \subseteq E$, такое что $E = V \oplus W$.

Thr 1.24. *Для всякого ненулевого элемента x нормированного пространства X найдётся такой функционал l, что $\|l\| = 1$ и $l[f] = \|f\|$.*

$\triangle$. На одномерном пространствеЮ порожденном xЮ положим $l_0(tx) = t\|x\|$. Тогда $l_0(x) = \|x\|$ и $\|l_0\| = 1$. Остается продолжить l на x с сохранением нормы. $\square$

Из этой теоремы можно получить, что в случае бесконечномерного пространства X для всякого n найдутся такие векторы $x_1, \ldots, x_n \in X$ и функционалы $l_1, \ldots, l_n \in X^*$, что $l_i(x_j) = \delta_{ij}$. В частности поэтому, сопряженное пространство тоже бесконечномерно.

Соп 1.25. *Пусть X_0 – конечномерное подпростанство нормированного пространства X. Тогда X_0 топологически дополняемо в X, т.е. существует такое замкнутое линейное подпространство X_1, что X является прямой алгебраической суммой X_0 и X_1, а естественные алгебраические проекции P_0 и P_1 на X_0 и X_1 непрерыны.*

$\triangle$. *Можно* найти базис $x_1, \ldots, x_n$ пространства X_0 и элементы $l_i \in X^*$ с $l_i(x_j) = \delta_{ij}$. Положим

$$X_1 \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} l_i, \qquad P_0[x] \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} l_i(x)x_i, \qquad P_1[x] \overset{\text{def}}{=} x - P_0x.$$

Для всякого j имеем $P_0[x_j] - l_j(x_j)x_j = x_j$. В таком контексте становится понятно, что $P_0|_{X_1} = 0$, и $X_0 \cap X_1 = \{0\}$, $X = X_) \oplus X_1$, ибо $x - P_0x \in X_1$ ввиду равенств $l_j(x - P_0x) = l_j(x) - l_j(x)l_j(x_j) = 0$. Непрерывность P_0 и P_1 понятна из опредления, более того сопадают с алгебраическими проектированиями на X_0 и X_1. $\square$

T20

Приведем пример замкнутого в топологии нормы множества $X \subset E'$ (двойственное к некоторому банахову пространству), которое не замкнутое в его *-слабой топологии.

Ответ – *сфера*, докажем это. Покажем, что для $X \subset E'$ $\operatorname{cl} X = X$ и $w. \operatorname{cl} X \neq X$. Что есть сфера? Сфера есть

$$S = \{f \in E' \mid \|f\| = 1\}, \qquad \operatorname{cl} S = S, \qquad w. \operatorname{cl} S = \bar{B}, \qquad \bar{B} = \{F \in E' \mid \|f\| \leqslant 1\}.$$

Введём дополнение $S_C \overset{\text{def}}{=} E \backslash S$, и покажем, что оно открыто.

Выберем $g \in S_c$ с $\|g\| < 1$ и $\varepsilon = 1 - \|g\| > 0$. Пусть $h \in B_\varepsilon(g)$, более того

$$\|h\| = \|g + h - g\| \leqslant \|g\| + \|h - g\| < 1, \qquad \Rightarrow \qquad B_\varepsilon(g) \subseteq S_c.$$

Далее, пусть $g \in S_c$ и $\|g\| > 1$, тогда $\varepsilon = \|g\| - 1 > 0$. Выберем $h \in B_\varepsilon(g)$, тогда

$$\|g\| = \|h + g - h\| \leqslant \|h\| + \|g - h\|, \qquad \Rightarrow \qquad \|h\| \geqslant \|g\| - (\|g\| - 1) = 1,$$

получается $\|h\| > 1$ и $B_\varepsilon(g) \subseteq S_c$. Таким образом S_c открыто, S замкнуто.

Докажем теперь, что $w, \operatorname{cl} S = \bar{B}$. Во-первых $\forall g_0 \notin B$ верно, что

$$\|g_0\| > 1, \qquad \exists x_0 \in E,\ \exists \varepsilon_0 > 0\ \forall g \in U_{x_0, g_0, \varepsilon_0} \quad \|g\| > 1, \qquad \Rightarrow \qquad w. \operatorname{cl} S \subseteq B.$$

В чатсности, покажем, что

$$\|g\| \geqslant |g[x_0]| = |g[x_0] - g_0[x_0] + g_0[x_0]| \geqslant |g_0[x_0]| - |g[x_0] - g_0[x_0]|,$$

что уже можно сделать строго больше:

$$\|g\| > |g_0[x_0]| - \varepsilon_0 = 1,$$

где $\varepsilon_0 = |g_0[x_0]| - 1$.

Пусть теперь $\forall$ фиксированного $g_0 \in \bar{B}$ с $\|g_0\| < 1$. Тогда

$$\exists U(g_0)\colon g_0 \in \bigcap_{k=1}^{N} U_{x_k, g_k, \varepsilon_k} \subset U(g_0).$$

Утверждается, что существует ненулевой g такой, что $\forall t \in \mathbb{R}$ с $g_0 + tg \in U(g_0)$.

Осталось построить цилиндрическое множество по которому «прогуляемся» до нужной нам области. Пусть

$$\varphi(t) = \|g_0 + tg\| \in C(\mathbb{R}), \qquad |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leqslant |t_1 - t_2| \cdot \|g\|.$$

Понятно, что $\varphi(0) = \|g_0\| < 1$. Тогда $\varphi(t) \geqslant |t| \cdot \|g\| - \|g\|_0 \to \infty$ при $t \to \infty$. По теореме о промежуточных значениях непрерывной функции

$$\exists t_0 \in \mathbb{R}\colon \varphi(t_0) = 1, \qquad \Rightarrow \qquad g_0 + t_0 g \in S.$$

Получается, что взяв точку из шара, и взяв её слабую окрестность, мы находим непустое пересечение этой окрестности со сферой. Из этого следует, что $g_0 \in w. \operatorname{cl} S$, а тогда и $\bar{B} \subseteq w. \operatorname{cl} S$, которое содержится в замкнутом шаре. Вывод: $\bar{B} = w. \operatorname{cl} S$.

T21

Докажем, что $*$-слабой топологии E' компактность некоторого множества влечет его замкнутость.

Lem 1.26. *Слабая топология хаусдорфова.*

Пусть K – компакт в ХТП X. Пусть $x \in X \backslash K$. Для $\forall y \in K$ $\exists U_y$, V_y (открытые) такие, что $U_y \cap V_y = \varnothing$, где $x \in U_y$ и $y \in V_y$.

Рассмотрим систему $S = \{V_y \mid y \in K\}$ – открытое покрытие компакта K. Также $S_0 = \{V_y \mid y \in F\}$, F – конечное подмножество K (т.к. K – компакт).

Рассмотрим множество $U = \cap_{y \in F} U_y$ – открытая окрестность точки x. Утверждается, что $U \cap K = \varnothing$. Перебирая все точки $x \in K$ получаем доказательство исходного утверждения.

T22

Хочется найти такое топологическое пространство, в котором есть компактные, но не замкнутые подмножества. В качестве такого ~~хаусдорфова~~ топологического пространства можем выбрать $X = \{a, b\}$, базой топологии $\tau = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$.

Пример выглядит искуственным, но, на мой взгляд, большинство примеров нехаумдорфовых пространств выглядят очень искуственно.

1.3 Распредления (обобщенные функции)

Работать будем с $\mathcal{D}(X) \overset{\text{def}}{=} C_0^\infty(X)$, $X \subseteq \mathbb{R}$. Функция называется *финитной*, если $\operatorname{supp}\varphi = K \subset X$,

$$\operatorname{supp}\varphi \overset{\text{def}}{=} \bar{Y}, \qquad Y = \{x \in X \mid \varphi(x) \neq 0\}.$$

Далее будем считать $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \equiv \mathcal{D}$.

Вспомним, что $\varphi_n \overset{\mathcal{D}'}{\to} \varphi$ означает $\exists [a,b] \supset \operatorname{supp}\varphi_n$ и $\operatorname{supp}\varphi$, а также $\varphi_n^{(k)} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi^{(k)}$, и тогда пишут, что $\lim_{n\to\infty} \varphi_n \overset{\mathcal{D}}{=} \varphi$.

Хочется определить пространство линейный непрерывных функционалов. Далее, договоримся обозначать $f(\varphi) \equiv f[\varphi] \overset{\text{def}}{=} \langle f \,|\, \varphi \rangle$.

Def 1.27. Функционал $f \colon \mathcal{D} \mapsto \mathbb{C}(\mathbb{R})$ *непрерывен* в $\mathcal{D}'$, если

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n \overset{\mathcal{D}}{=} \varphi, \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \langle f \,|\, \varphi_n \rangle = \langle f \,|\, \varphi \rangle.$$

Def 1.28. Всякий линейный функционал из $\mathcal{D}'$ называют *обобщенной функцией* на $\mathcal{D}$.

Каждая локально-интегрируемая функция порождает некоторую обобщенную, их назовём *регулярными*. Если не существует такой локально-интегрируемой функции в D для функционала из $\mathcal{D}'$, то это *сингулярная обобщенная функция*. Стоит заметить, что регулярные обобщенные функции плотны в $\mathcal{D}'$, а их пополнением являются сингулярные.

Например, $\delta(x)$ можно представить как предел РОФ, где под пределом имеется ввиду

$$f_n \overset{\mathcal{D}'}{\to} f \qquad (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}',\ f \sin \mathcal{D}', \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \lim_{n\to\infty} \langle f_n \,|\, \varphi \rangle = \langle f \,|\, \varphi \rangle,$$

в частности тогда пишут

$$\lim_{n\to\infty} f_n \overset{\mathcal{D}'}{=} f \qquad \Leftrightarrow \qquad *w.\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

T23

Найдём пределы последовательностей регулярныъ элементов пространства $\mathcal{D}'$, при

$$\lim_{n\to\infty} \langle \cos(nx) \,|\, \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(nx)\varphi(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{inx} \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} \hat{\varphi}(n) = \langle 0 \,|\, \varphi \rangle \overset{\mathcal{D}'}{=} 0.$$

По той же причине

$$*w.\lim_{n\to\infty} n\sin(nx) - 0.$$

Найдём некоторые пределы в терминах обобщенных функций. В частности,

$$*w\lim_{a\to+0} \frac{a}{\pi(a^2+x^2)} = *w\lim_{\mathcal{B}_a} \frac{a}{\pi(a^2+x^2)},$$

где $\mathcal{B}_a$ – база, состощяя из всех последовательностей, стремящихся к 0. В частности, при $a = 1/n$, перейдём к T24(a). Прямым вычислением, находим

$$\left\langle \frac{a}{\pi(a^2+x^2)} \,\middle|\, \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\varphi(x)}{\pi(a^2+x^2)}\,dx = \left(\lim_{\Lambda_+\to+\infty} \int_0^{\Lambda_+} + \lim_{\Lambda_+\to-\infty} \int_{\Lambda_-}^0 \right) \frac{a\varphi(x)}{\pi(a^2+x^2)}\,dx,$$

что интегрируя по частям можем свести к $\operatorname{arctg} x$:

$$\frac{1}{\pi} \lim_{\Lambda_+\to+\infty} \left\{ \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\varphi(x)\Big|_0^{\Lambda_+} - \int_0^{\Lambda_+} \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)\varphi'(x)\,dx \right\} + \frac{1}{\pi} \lim_{\Lambda_-\to-\infty} \left\{ \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\varphi(x)\Big|_{\Lambda_-}^0 - \int_{\Lambda_-}^0 \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)\varphi'(x)\,dx \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\varphi(x)\Big|_0^\infty + \frac{1}{2}\varphi(x)\Big|_{-\infty}^0 = \varphi(0) = \langle \delta(x)\,|\,\varphi\rangle,$$

таким образом мы нашли, что

$$\left\langle \frac{a}{\pi(a^2+x^2)} \,\middle|\, \varphi \right\rangle = \langle \delta(x)\,|\,\varphi\rangle.$$

Второй пункт сводится к интегрированию

$$\frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{1}{t}\sin\frac{t}{a}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{x/a} \frac{d\sin y}{dy}\,dy = \frac{1}{\pi}\operatorname{Si}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Вспоминая, что

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{Si}(+\infty) = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{\pi}\operatorname{Si}(-\infty) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right), \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x} \overset{\mathcal{D}'}{=} \delta(x).$$

T25

Теперь найдём предел вида

$$*w.\lim_{n\to\infty}\frac{n^3x}{(1+n^2x^2)^2} = *w.\lim_{a\to+0}\frac{xa}{(x^2+a^2)^2} = F,$$

для этого

$$\left\langle \frac{xa}{(x^2+a^2)^2} \,\middle|\, \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xa}{(x^2+a^2)^2}\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{a}{x^2+a^2}\right)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a\varphi'(x)}{x^2+a^2}\,dx \underset{a\to+0}{\to} \frac{\pi}{2}\varphi'(0),$$

что, учитывая предыдущую задачу, позволяет записать

$$\frac{\pi}{2}\langle \delta(x)\,|\,\varphi'\rangle = \left\langle \left(-\frac{\pi}{2}\right)\delta'(x) \,\middle|\, \varphi \right\rangle, \qquad \Rightarrow \qquad w.\lim_{a\to+0}\frac{xa}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{\pi}{2}\delta'(x),$$

T26

Алгоритмично, обработаем выражение

$$\langle d\,|\,\varphi\rangle = \langle g\cdot\delta\,|\,\varphi\rangle = \langle \delta\,|\,g\cdot\varphi\rangle = g(0)\varphi(0) = \langle g(0_\delta)\,|\,\varphi\rangle,$$

так приходим к упрощенному выражению вида

$$g(x)\delta(x) \overset{\mathcal{D}'}{=} g(0)\delta(x).$$

Во втором пункте $f = g\delta'$, упростим выражение

$$\begin{aligned}\langle f\,|\,\varphi\rangle = \langle g\delta'\,|\,\varphi\rangle = \langle \delta'\,|\,g\varphi\rangle = -\langle \delta\,|\,(g\varphi)'\rangle = -\langle \delta\,|\,g'\varphi + g\varphi'\rangle = \\ = -g'(0)\varphi(0) - g(0)\varphi'(0) = -g'(0)\langle\delta\,|\,\varphi\rangle - g(0)\langle\delta\,|\,\varphi'\rangle = \langle g(0)\delta' - g'(0)\delta\,|\,\rangle,\end{aligned}$$

таким образом приходим к равенству в $\mathcal{D}'$:

$$g(x)\delta'(x) \overset{\mathcal{D}'}{=} -g'(0)\delta(x) + g(0)\delta'(x).$$

T27

Lem 1.29. *В $\mathcal{D}'$ верно, что*

$$(g\cdot f)^{(m)} = \sum_{k=0}^m C_m^k g^{(k)} f^{(m-k)}.$$

Найдём производные отдельных «строительных блоков»:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad \tilde{H}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Докажем, что

$$\operatorname{sign} x = 2\tilde{H}(x) - 1, \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sign}'(x) = 2\tilde{H}'(x) = 2\delta(x).$$

Первый шаг, по определению,

$$\big\langle \operatorname{sign}'(x) \,\big|\, \varphi \big\rangle = -\langle \operatorname{sign} x \,|\, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign} x \varphi'(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\, dx - \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = 2\varphi(0) = \langle 2\delta(x) \,|\, \varphi \rangle.$$

Теперь покажем, что

$$|x|' = (x \operatorname{sign} x)' = \operatorname{sign} x + x \operatorname{sign}' x = \operatorname{sign} x + x 2\delta(x) = \operatorname{sign} x.$$

Также можем найти вторую производную

$$|x|'' = \operatorname{sign}'(x) = 2\delta(x).$$

Пункт а. Теперь легко посчитать, что

$$(g(x) \operatorname{sign} x)' = g'(x) \operatorname{sign} x + g(x) \operatorname{sign}'(x) = g'(x) \operatorname{sign} x + 2g(0)\delta(x),$$

где равенства подразумеваются в пространстве $\mathcal{D}'$. Для второй производной, находим

$$\begin{aligned}(g(x) \operatorname{sign} x)'' &= g'' \operatorname{sign} x + 2g'(x) \operatorname{sign}' x + g(x) \operatorname{sign}''(x) = g''(x) \operatorname{sign} x + 4g'(0)\delta(x) + 2g(x)\delta'(x) = \\ &= g''(x) \operatorname{sign} x + 4g'(0)\delta(x) + 2\left(-g'(0)\delta(x) + g(0)\delta'(x)\right) = g''(x) \operatorname{sign} x + 2g'(0)\delta(x) + 2g(0)\delta'(x).\end{aligned}$$

Пункт б. Сразу подставим значение $g(x) = (x+1)e^{|x|}$:

$$\begin{aligned} g' &= e^{|x|}\left(1 + (x+1)\operatorname{sign} x\right), \\ g'' &= e^{|x|}\left(1 + \operatorname{sign} x + 2\delta(x)(x+1) + \operatorname{sign} x + x + 1\right) = 2e^{|x|}\left(1 + x/2 + \operatorname{sign} x + \delta(x)\right). \end{aligned}$$

T28

Докажем, что слабая сходимость $\delta_{x_n} \to \delta_{x_0}$ эквивалентна обычной сходимости $x_n \to x_0$. Другими словами есть набор $f_n(x) = \delta(x - x_n)$ которые в пределе сходится к $f(x) = \delta(x - x_0)$.

По определению,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \lim_{n\to\infty} \langle \delta(x - x_n) \,|\, \varphi \rangle = \langle \delta(x - x_0) \,|\, \varphi \rangle.$$

В силу непрерывности функций в $\mathcal{D}$:

$$\forall \varphi \in D \quad \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) \varphi(x_0).$$

Наконец, это можно переписать в виде

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varphi, \varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N(\varphi.\varepsilon) \quad |\varphi(x_n) - \varphi(x_0)| < \varepsilon.$$

Это было дано. Хочется показать, что из этого следует $x_n \to x_0$, или

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \qquad \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad |x_n - x_0| < \varepsilon.$$

Докажем от противного, пусть $x_n \to x_1 \neq x_0$. Тогда пусть $\varkappa = |x_1 - x_0|/3$, выберем функцию $\varphi = \chi_{X_0}(x) + -\chi_{X_1}(x)$, где $X_0 = [x_0 - \varkappa, x_0 + \varkappa]$, $X_1 = [x_1 - \varkappa, x_1 + \varkappa]$. В таком случае, в пределе, $\langle f_n(x) \,|\, \varphi \rangle = -1$, при этом по условию $\langle f(x) \,|\, \varphi \rangle = 1$, что приводит нас к противоречию.

Пример (K3, 21.75)

Найдём

$$I = \langle (\ln x)' \mid \varphi \rangle = -\langle \ln |x| \mid \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \ln |x| \varphi'(x)\, dx = \langle \text{smth} \mid \varphi \rangle,$$

однако просто вернуть производную на лоагрифм будет нехорошо. Запишем это так:

$$I = -\lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int_{\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\right) \ln |x| \varphi'(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \left[\ln \varepsilon \cdot (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))\right] + \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx.$$

Здесь заметим, что
$$\ln\varepsilon\cdot(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))=2\varepsilon\ln\varepsilon\cdot\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)}{2\varepsilon}=0\cdot\varphi'(0)=0,$$
тогда
$$I=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx,$$
но $1/x$ – не является локально интегрируемой в 0 функцией. Итого
$$I=\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx=\left\langle\mathcal{P}\frac{1}{x}\middle|\varphi\right\rangle.$$
Другими словами мы установили, что
$$(\ln|x|)'\overset{D'}{=}\mathcal{P}\frac{1}{x},\ \Leftrightarrow\ (\ln|x|)'\overset{*w.}{=}\mathcal{P}\frac{1}{x},\ \Leftrightarrow\ \left\langle(\ln|x|)'\right|=\left\langle\mathcal{P}\frac{1}{x}\right|.$$

Пример (К3, 21.84)

Уместен вопрос: когда верно, что
$$\langle\lambda_f'\mid\varphi\rangle=\langle\lambda_{f'}\mid\varphi\rangle.$$
Далее пусть $\frac{d}{dx}$ – классическая производная, f' – производная обобщенной функции, тогда наш вопрос будет выглядеть, как
$$\langle f'\mid\varphi\rangle=\left\langle\frac{df}{dx}\ \middle|\ \varphi\right\rangle+\sum_{k=1}^{n}\Delta f(x_k)\langle\delta(x-x_k)\mid\ldots\rangle,$$
где x_k – точки разрыва классической функции f, а
$$\Delta f(x_k)=f(x_k+0)-f(x_k-0)\in\mathbb{R}.$$
В частности рассмотрим случай с $x_k=0$. Тогда
$$\langle f'\mid\varphi\rangle=-\langle f\,|\,\varphi'\rangle=-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi'(x)\,dx,$$
что удобно расписать в виде
$$-\left(\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\infty}\right)f(x)\varphi'(x)=-f(x)\varphi(x)\Big|_{+0}^{+\infty}-f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{-0}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{df(x)}{dx}\varphi(x)\,dx=\Delta f(0)\langle\delta(x)\,|\,\varphi\rangle+\left\langle\frac{df}{dx}\ \middle|\ \varphi\right\rangle.$$

Т29 и Т30

Сначала доакажем, что всякое распределение $\lambda\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ имеет первообразную, то есть такую $\mu\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, что $\mu'=\lambda$ в смысле дифференцирования обобщенных функций. Потом докажем, что любые две первообразные одного и того же распределения отличаются на константу.

Lem 1.30. *Пусть $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и так оказалось, что $f'=0$, тогда f имеет вид $\langle f|\varphi\rangle=c\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx$.*

$\triangle$. Утверждается, что $c=\langle f\,|\,\varphi_0\rangle$ годится, где
$$\varphi_0\in\mathcal{D}(\mathbb{R}):\ \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_0(x)\,dx=1.$$
Итак, любую функцию $\varphi\in\mathcal{D}$ можно представить в виде
$$\varphi=-\theta\cdot\varphi_0+\theta\cdot\varphi_0,\qquad\theta=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx.$$
Зададим функцию от вида
$$\psi(x)=\int_{\infty}^{x}(\varphi(t)-\theta\varphi_0(t))\ dt\quad\in\mathcal{D}(\mathbb{R}).$$
Собирая всё вместе находим
$$\psi'=\varphi-\theta\cdot\varphi_0,\qquad\Rightarrow\qquad\langle f\,|\,\varphi\rangle=\langle f\,|\,\psi'+\theta\varphi_0\rangle=\langle f\,|\,\psi'\rangle+\theta\langle f\,|\,\varphi_0\rangle,$$
где $-\langle f'\,|\,\psi\rangle=0$ по условию. Также $\langle f\,|\,\varphi_0\rangle=c$, тогда верно, что
$$\psi'=c\cdot\theta=c\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx,\qquad\text{Q. E. D.}$$

$\square$

Thr 1.31. *Для всякой обобщенной функции f из $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ существует $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ такая, что $g' \overset{\mathcal{D}'}{=} f$. Для всякой другой $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ верно, что если $h' \overset{\mathcal{D}'}{=} f$, то $g - h \overset{\mathcal{D}'}{=} c$.*

$\triangle$. Точно также берем некоторую φ, ψ. Положим, по определению, что

$$\langle g \,|\, \varphi\rangle \overset{\text{def}}{=} -\langle f \,|\, \Psi\rangle,$$

для которого хотелось бы показать линейность и непрерывность.

Для этого рассмотрим

$$\langle g \,|\, \varphi_1 + \varphi_2\rangle = -\langle f \,|\, \psi_1 + \psi_2\rangle = -\left\langle f \,\middle|\, \int_{-\infty}^{x} (\varphi_1 + \varphi_2 - (\theta_1 + \theta_2)\varphi_0)\, dt \right\rangle = -\langle f \,|\, \psi_1\rangle - \langle f \,|\, \psi_2\rangle.$$

Осталось показать непрерывность, точнее показать, что линейной отображение $\varphi \to \psi$ непрерывно на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Рассмотрим в частности $\varphi_k \overset{\mathcal{D}'}{\to} 0$, для них $\theta_k \to 0$ при $k \to \infty$. Построим теперь $\varphi_k - \theta_k\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и имеют нулевые интегралы. Более того

$$\hat{l}(\varphi_k) = \psi_k = \int_{-\infty}^{x} (\varphi_k(t) - \theta_k\varphi_0(t))\; dt \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Итого $\psi_k \to 0$ при $k \to \infty$, что и завершает доказательство непрерывности.

$\square$

T31

Thr 1.32. *Для $\forall$ СОФ $g \in \mathcal{D}'$, с носителем в открытом шаре, существует такая РОФ f и $k \in \mathbb{N}$, что $f^{(k)} = g$.*

Def 1.33. *Носитель обобщенной функции* $\operatorname{supp} f$ – дополнение к объединению всех открытых множеств U, на которых f равна нулю. Обобщённая функция f равна нулю на U, если $\langle f \,|\, \varphi\rangle = 0$ для всех φ таких, что $\operatorname{supp}\varphi$ содержится в U.

Примером такой функции (которая не является m-й производной РОФ), носитель которой не помещается в открытый шар, может служить распределение вида

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{(k)}(x - k).$$

Докажем от противного, пусть $g^{(m)} = f$ и g – РОФ.

Ну, по определению,

$$\langle (-1)^m g^{(m)} \,|\, \varphi\rangle = (-1)^m \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(x-k)(-1)^k = (-1)^m \sum_{n=N}^{N} \varphi^{(k)}(x-k)(-1)^k.$$

Распишем чуть подробнее свёртку с g:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi^{(m)}(x)\, dx = (-1)^m \sum_{k=0}^{N} \varphi^{(k)}(k)(-1)^k.$$

Теперь выберем φ, такую, что это ступенька гаусс вокруг $x = m$, тогда

$$I = (-1)^m(-1)^m\varphi^{(m)}(m) = \langle \delta(x-m) \,|\, \varphi^{(m)}\rangle,$$

таким образом пришли к противоречию.

1.4 Преобразование Фурье обобщенных функций

Для преобразования Фурье над пространством обобщенных функций медленного роста S – пространства Шварца, верны следующие утверждения:

$$\langle F[f] \,|\, \varphi\rangle = \langle f \,|\, F[\varphi]\rangle, \quad \langle F^{-1}[f] \,|\, \varphi\rangle = \langle f \,|\, F^{-1}[\varphi]\rangle, \quad F[f^{(n)}] = (ix)^n F[f], \quad F^{(n)}[f] = (-i)^n F[x^n f].$$

Верно, что $\mathcal{D} \subset S$. Также важно держать в голове, что

$$F[1] = \sqrt{2\pi}\delta.$$

T32

Найдём преобразование Фурье в S' некоторых функций.

Синус. Найдём преобразование Фурье вида
$$\left\langle F^{-1}[\delta(x-x_0)] \,\middle|\, \varphi\right\rangle = \left\langle \delta(x-x_0) \,\middle|\, F^{-1}[\varphi]\right\rangle = F^{-1}[\varphi](x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}\varphi(t)e^{ix_0t} =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t)\varphi(t) = \left\langle \frac{e^{ix_0t}}{\sqrt{2\pi}} \,\middle|\, \varphi\right\rangle, \quad \Rightarrow \quad F^{-1}[\delta(x-x_0)](t) = \frac{e^{ix_0t}}{\sqrt{2\pi}}.$$
Отсюда следует, что
$$\left\langle F[e^{ix_0t}] \,\middle|\, \varphi\right\rangle = \left\langle F\left[\sqrt{2\pi}F^{-1}[\delta(x-x_0)]\right] \,\middle|\, \varphi\right\rangle,$$
тогда можем перегрупировать, и найти
$$\left\langle F[e^{ix_0t}] \,\middle|\, \varphi\right\rangle = \langle \sqrt{2\pi}\delta(x-x_0) \,|\, \varphi\rangle.$$
Нас, правда, интересует Фурье от синуса
$$\langle F[\sin(x_0t)] \,|\, \varphi\rangle = \left\langle F\left[\frac{e^{ix_0t}-e^{-ix_0t}}{2i}\right] \,\middle|\, \varphi\right\rangle = \left\langle \sqrt{\frac{\pi}{2}}i\left(\delta(x+x_0)-\delta(x-x_0)\right) \,\middle|\, \varphi\right\rangle.$$
Тогда $\mathcal{D}'$ справедливо равенство вида
$$F[\sin(x_0t)] \overset{\mathcal{D}'}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2}}i\big(\delta(x+x_0)-\delta(x-x_0)\big).$$

Дельта-функция. Пользуясь формулой n-й производной
$$\left\langle F[\delta^{(n)}(x)] \,\middle|\, \varphi\right\rangle = \left\langle \delta^{(n)}(x) \,\middle|\, F[\varphi]\right\rangle = (-1)^nF^{(n)}[\varphi](0) = \frac{(-1)^n}{i^n}F[x^n\varphi](0) = \left\langle \frac{(-1)^n}{i^n}\delta(x) \,\middle|\, F[x^n\varphi]\right\rangle =$$
$$= i^n\left\langle F[\delta(x)] \,\middle|\, x^n\varphi\right\rangle = \langle (ix)^nF[\delta(x)] \,|\, \varphi\rangle = \left\langle \frac{(ix)^n}{\sqrt{2\pi}} \,\middle|\, \varphi\right\rangle,$$
таким образом пришли к равенству вида
$$F[\delta^{(n)}(x)] \overset{\mathcal{D}'}{=} \frac{(ix)^n}{\sqrt{2\pi}}.$$

Фунция Хевисайда. Для начала найдём преобразование Фурье функции $\theta(x)e^{-tx}$ при $t>0$
$$F[\theta(x)e^{-tx}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-x(t+iy)}\,dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}(y-it)}.$$
Покажем теперь, что в S'
$$\lim_{t\to+0}\theta(x)e^{-tx} = \theta(x).$$
Действительно, для каждой функции $\varphi\in S$ и любого числа A имеем
$$|\langle\theta(x)\,|\,\varphi(x)\rangle - \langle\theta(x)e^{-tx}\,|\,\varphi(x)\rangle| = \left|\int_0^{\infty}(1-e^{-tx})\varphi(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_0^{A}(1-e^{-tx})\varphi(x)\,dx\right| + \left|\int_A^{\infty}(1-e^{-tx})\varphi(x)\,dx\right|.$$
Теперь зафиксируем $\sigma\in S$ и какое-либо число $\varepsilon>0$. В силу абсолютной интегрируемости φ, существует $A>0$ такео, что $\int_A^{+\infty} < \varepsilon/2$, тогда
$$\left|\int_A^{\infty}(1-e^{-tx})\varphi(x)\,dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
Выберем теперь $t_0>0$ так, чтобы при $0<t<t_0$ было справедливо неравенство
$$(1-e^{-tA})\int_0^{A}|\varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \Rightarrow \quad |\langle\theta(x)\,|\,\varphi(x)\rangle - \langle\theta(x)e^{-tx}\,|\,\varphi(x)\rangle| < \varepsilon.$$
Таким образом утверждение про $\lim_{t\to+0}\theta(x)e^{-tx} = \theta(x)$ верно.

В силу непрерывности преобразования Фурье
$$\lim_{t\to+0}F\left[\theta(x)e^{-tx}\right] = F[\theta(x)], \quad \Rightarrow \quad F[\theta(x)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{t\to+0}\frac{i}{y-it},$$
причём мы сразу утверждаем, что S' предел существует, и, кстати, обозначается за $\frac{i}{y-i0}$. Тогда
$$F[\theta(x)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{i}{y-i0}.$$

T33

Докажем, что если $f\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ и преобразование Фурье $F[f]\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, то $f\equiv 0$.

По Зоричу, если есть некоторое преобраование сигнала

$$\hat{f}(\omega) \equiv F[f](\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\pi}{a}k\right) \exp\left(-i\frac{\pi k}{a}\omega\right),$$

где $\hat{F}(\omega) = 0$ за пределами $|\omega| > a$, то мы приходим ряду с некоторыми отсчётными значениями. Но, так как $f \in \mathcal{D}$, то можем записать тригонометрический полином вида

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} \sum_{k=-N}^{N} f\left(\frac{\pi}{a}k\right) \exp\left(-i\frac{\pi k}{a}\omega\right) = 0,$$

ведь у конечного полинома не может быть континуально нулей.

Теорема Котельникова

Рассмотрим получаемый сигнал $f(t)$ с финитным спектром, отличный от нуля только для $\omega < a > 0$. Итак, $\hat{f}(\omega) \equiv 0$ при $|\omega| > a$, поэтому представление

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

для функции с финитным спектром сводится к интегралу лишь по промежутку $[-a, a]$. На этом отрезке функцию $\hat{f}(\omega)$ разложим в ряд Фурье

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(\hat{f}) \exp\left(i\frac{\pi\omega}{a}k\right),$$

по полной и ортогональной система на этом отрезке. Для коэффициентов этого ряда можем получить простое выражение вида

$$c_k(\hat{f}) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \hat{f}(\omega) \exp\left(i\frac{\pi\omega}{a}k\right)\, d\omega = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} f\left(-\frac{\pi}{a}k\right).$$

Собирая всё вместе находим, что

$$f(t) = \frac{1}{2a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{a}k\right) \int_{-a}^{a} \exp\left(i\omega\left(t - \frac{\pi}{a}k\right)\right)\, d\omega.$$

Вычисляя эти интегралы и приходим к *формуле Котельникова*:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{a}k\right) \frac{\sin a\left(t - \frac{\pi}{a}k\right)}{a\left(t - \frac{\pi}{a}k\right)}.$$

Таким образом, для восстановления сообщения, опиописываемого функцией с финитным спектром, сосредоточенным в полосе частот $|\omega| < a$ достаточно передать по каналу связи лишь значения $f(k\Delta)$ (называемые *отсчетными* значениями) данной функции через равные промежутки времени $\Delta = \pi/a$.

Т34

Докажем, что преобразование Фурье в S' переводит распределение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{2\pi n} \quad \mapsto \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n.$$

Thr 1.34 (Формула Пуассона)**.** *Так называется следующее соотношение:*

$$\sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n).$$

$\triangle$. Формула получается при $x = 0$ из равенства вида

$$\sqrt{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n) e^{inx},$$

которое мы и докажем.

Поскольку φ, $\hat{\varphi} \in S$, ряды сходятся абсолютно и равномерно по x на $\mathbb{R}$. Также чтоит заметить, что

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n)$$

бесконечно гладкая и 2π-периодическая. Пусть $\{\hat{c}_k(f)\}$ – её коэффициенты Фурье по ортонормированной системе $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx},\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$. Тогда

$$\hat{c}_k(f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f(x)e^{ikx}\,dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{2\pi n}^{2p(n+1)}\varphi(x)e^{ikx}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{ikx}\,dx\stackrel{\text{def}}{=}\hat{\varphi}(k).$$

Но ряд фурье f сходится к ней в любой точке $x\in\mathbb{R}$, значит в любой точке $x\in\mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(x+2\pi n)=f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{c}_n(f)\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(n)e^{ikx}, \text{Q. E. D.}$$

□

Тогда в пределах задания можем переписать это в терминах обобщенных функций

$$\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle\delta(x-2\pi n)\,|\,\varphi\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle\delta(x-n)\,|\,F[\varphi]\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle F[\delta(x-n)]\,|\,\varphi\rangle.$$

Тогда приходим к выражению вида

$$F\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-2\pi n).$$

Вообще $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)=G$ называют *решеткой Дирака.*

Утверждается, что G_N сходится в S' к G $\forall\varphi$. В частности,

$$\lim_{N\to\infty}\langle G_N(x)\,|\,\varphi\rangle=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\varphi(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(n)=\left\langle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n)\,\middle|\,\varphi\right\rangle,$$

так что ряд дейтсвительно сходится и всё хорошо.