Заметки курса «Гармонический анализ»

Источник: an_explanations.pdf
Лектор: Карасёв Р.Н.

Восторженные читатели: Хоружий Кирилл
Примак Евгений

От: *9 февраля 2021 г.*

Содержание

1 Приближение функций

1.3 Пространство интегрируемых функций

Неравенства Гёльдера и Минковского

Def 1.1. *Абсолютно интегрирумыми функциями* на измеримом $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называют $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ с конечным интегралом $\int_X |f(x)|\,dx$. *Расстоянием*[1] между функциями f и g будем считать $\int_X |f(x) - g(x)|\,dx$.

Def 1.2. Обозначим через $L_1(X)$ факторпространство линейного пространства абсолютно интегрируемых функций по его линейному подпространству почти всюду равных нулю функций. То есть функции на 0 расстоянии считаем равными. *Нормой* будем считать

$$\|f\|_1 = \int_X |f(x)|\,dx.$$

Def 1.3. Для измеримого по Лебегу $X \subset \mathbb{R}^n$ и числа $p \geqslant 1$ *факторпространство* измеримых по Лебегу функций на X с конечной (полу)нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p\,dx\right)^{1/p},$$

по модулю функций равных нулю почти всюду, назовём $L_p(X)$.

`Очень хорошим, симметричным, актуальным для описания квантовой механики оказывается` L_2 `пространство, на котором естественно вводить скалярное произведение, его порождающее.`

Def 1.4. В комплексном случае норма L_2 порождена *скалярным произведением*

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx \qquad \longrightarrow \qquad \|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}.$$

Thr 1.5 (Неравенство Гёльдера)**.** *Возьмём p, $q > 1$ такие, что $1/p + 1/q = 1$. Пусть $f \in L_p(X)$ и $g \in L_q(X)$. Тогда*

$$\int_X |fg|\,dx \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

$\triangle$. Для доказательства достаточно проинтегрировать неравенство вида

$$|fg| \leqslant \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}.$$

Осталось получить само неравенство. $\square$

Con 1.6. *Для измеримых функций и чисел p, $q > 0$, таких что $1/p + 1/q = 1$, имеет место формула*

$$\|f\|_p = \sup\left\{\int_X fg\,dx \;\middle|\; \|g\|_q \leqslant 1\right\}. \tag{1.1}$$

$\triangle$. По неравенству Гёльдера норма f не менее супремума правой части (?), более того равенство достигается при выборе

$$g(x) = \frac{\operatorname{sign} f(x)|f(x)|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}}.$$

$\square$

Def 1.7. Функция $f\colon V \mapsto \mathbb{R}$ на векторном пространство называется выпуклой, если для любых x, $y \in V$ и любого $t \in (0, 1)$ имеет место неравенство

$$f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y).$$

Функция называется *строго выпуклой*, если неравенство строгое $\forall x \neq y$ и $t \in (0, 1)$.

Lem 1.8. *Если в семействе функций $f_\alpha\colon V \mapsto \mathbb{R}$, $\alpha \in A$, все функции выпуклые, то*

$$f(x) = \sup\{f_\alpha(x) \mid \alpha \in A\}$$

тоже выпуклая[2].

Thr 1.9 (Неравенство Минковского)**.** *Для функций f, $g \in L_p$ при $p \geqslant 1$*

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

[1] В силу неравенства $|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|$ расстояние конечно.
[2] Если разрешить в определении выпуклости значение $+\infty$.

Полнота пространства интегрируемых функций

Далее в разделе всегда предполагается суммирование по k от 1 до ∞. Глобально можно сказать, что `в нормированном пространстве вопрос полноты сводится в вопросу сходимости рядов`, у которых сходятся суммы норм.

Def 1.10. Назовём последовательность (f_n) *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \colon \forall n, m \geqslant N_\varepsilon\ \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

Lem 1.11. *Пусть у последовательности функций (u_k) из $L_p(X)$ сумма $\sum \|u_k\|_p$ оказалась конечной. Тогда $S(x) = \sum u_k(x)$ определена для почти всех x и $\|S\|_p \leqslant \sum \|u_k\|_p$.*

Lem 1.12. *Пусть у последовательности функций (u_k) из $L_p(x)$ сумма $\sum \|u_k\|_p$ оказалась конечной. Тогда $S(x) = \sum u_k(x)$ определена для почти всех x и $S = \sum u_k$ в смысле сходимости в пространстве $L_p(X)$.*

Thr 1.13. *Пространство $L_p(X)$ полно.*

Вообще сходимость в $L_p(X)$ может не означать поточечной сходимости ни в одной точке.

1.4 Приближение функций ступенчатыми и бесконечно гладкими

Def 1.14. Назовём *элементарно ступенчатыми* функции с конечным числом ступенек, в основании которых лежат элементарные множества.

Thr 1.15. *Можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить элементарно ступенчатой $\forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)$.*

Thr 1.16. *Всякую $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить бесконечно дифференцируемой функцией с компактным носителем.*

Мне кажется, было бы полезно вернуться к разделу с приближением функций, и дописать в начало.

2 Ограниченная вариация, абсолютная непрерывность и осцилляция

2.5 Функции ограниченной вариации

Def 2.1. Функция f на промежутке I имеет *ограниченную вариацию*, если для любых $x_0 < x_1 < \ldots M x_N \in I$ (в любом количестве)

$$|f(x_0) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \ldots + |f(x_{N-1}) - f(x_N)| \leqslant M,$$

для некоторой константы M. Наименьшую константу M в этом неравенстве назовём *вариацией* функции f равную $\|f\|_B$, что задаёт *полунорму*, вида

$$\|f\|_B = \sup \left\{ |f(x_0) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \ldots + |f(x_{N-1}) - f(x_N)| \;\middle|\; N \in \mathbb{N}, a \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant b \right\}$$

Важно что вариация функции аддитивна и выпукла, в смысле $\|f + g\|_B \leqslant \|f\|_B + \|g\|_B$.

Lem 2.2. *Функцию ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$ можно представить в виде суммы двух функций $f = u + d$, одна из которых возрастает, а другая убывает. При этом $\|f\|_B = \|u\|_B + \|d\|_B$ и если f была непрерывной, то u, d тоже будут непрерывны.*

Thr 2.3 (Вторая теорема о среднем)**.** *Если f интегрируема по Лебегу с конечным интегралом, а g монотонна и ограниченна на $[a, b]$, то при некотором $\nu \in [a, b]$*

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = g(a+0) \int_a^\nu f(x)\, dx + g(b-0) \int_\nu^b f(x)\, dx.$$

Таким образом приходим к утверждению о том, что `функции ограниченной вариации допускают оценку интеграла своего произведения с другой функцией`

$$|\int_a^b f(x) g(x)\, dx| \leqslant (|g(a+0)| + \|g\|_B) \cdot \sup \left\{ \left| \int_\nu^b f(x)\, dx \right| \text{ при } \nu \in [a, b] \right\}.$$

2.6 Абсолютно непрерывные функции и обобщенная формула Ньютона-Лейбница

Для формулы Ньютона-Лейбница условие липшицевости можно ослабить до следующего:

Def 2.4. Функция F на промежутке I *абсолютно непрерывна* , если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$, такое что $\forall\, x_1 \leqslant y_1 \leqslant x_2 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant x_N \leqslant y_N \in I$ из неравенства

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \ldots + |x_N - y_N| \leqslant \delta$$

следует, что

$$|F(x_1) - F(y_1)| + |F(x_2) - F(y_2)| + \ldots + |F(x_N) - F(y_N)| \leqslant \varepsilon.$$

Говоря неформально, сумма модулей приращений функции на системе непересекающихся отрезков должна стремиться к нулю при суммарной длине системы, стремящейся к нулю.

Lem 2.5.

Thr 2.6. *Для некоторой $f \in L_1[a, b]$, всякая обобщенная первообразная F*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

является абсолютно непрерывной и её производная почти всюду существует и совпадает с f.

Lem 2.7. *Абсолютно непрерывная на отрезке функция f имеет на нём ограниченную вариацию. Также на отрезке существует разложение f в сумму двух монотонных абсолютно непрерывных функций.*

Thr 2.8. *Абсолютно непрерывная функция $F\colon [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ почти всюду имеет производную и является обобщенной первообразной своей производной с выполнением формулы Ньютона-Лейбница*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\, dt.$$

Легко показать через... ух, ну по **лемме Безиковича**, посмотреть можно здесь.

Con 2.9 (Обобщенное интегрирование по частям)**.** *Если $f \in L_1[a, b]$, а g абсолютно непрерывна, то верна формула интегрирования по частям*

$$\int_a^b fg\, dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\, dx,$$

где $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.

Lem 2.10. *Функция $f\colon [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда она может быть сколь угодно близко в B-норме приближена кусочно-линейными функциями.*

А дальше про борелевские меры на отрезках и интеграл Лебега–Стилтьеса.

2.7 (до 2.9) Осцилляции и равномерные осцилляции

Def 2.11. Определим *коэффициент Фурье* (с точностью до умножения на константу)

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx.$$

Thr 2.12. *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то $|c_f(y)| \leqslant \|f\|_1$ и $c_f(y)$ непрерывно зависит от y.*

Thr 2.13 (Лемма об осцилляции)**.** *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то выражение*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy}\, dx$$

стремится к нулю при $y \to \infty$.

Lem 2.14. *Еси производная $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и производные до k-й включительно*[3] *находятся в $L_1(\mathbb{R})$, то*

$$c_f(y) = o\left(\frac{1}{y^k}\right), \qquad t \to \infty.$$

[3] Для k-й достаточно существования почти всюду.

Thr 2.15. *Если $f \in L-1(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, то выражение*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx$$

оказывается $O(1/y)$ при $y \to \infty$.

Con 2.16. *Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ имеет абсолютно непрерывную $(k-1)$-ую производную, производные до k-й включительно находятся в $L_1(\mathbb{R})$, а $f^{(k)}$ (возможно, после изменения на множестве меры нуль) имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, тогда*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx = O\left(\frac{1}{y^{k+1}}\right), \qquad y \to \infty.$$

Thr 2.17 (Лемма о равномерной осцилляции)**.** *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то выражение*

$$c(y, \xi, \eta) = \int_{\xi}^{\eta} f(x)e^{-ixy}\,dx$$

стремится к нулю при $y \to \infty$ равномерно по ξ, η.

Периодические функции

Def 2.18. Для 2π-*периодической функции* $f(x+2\pi) \equiv f(x)$ *коэффициенты Фурье* запишутся, как

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{(f, e^{inx})}{\|e^{inx}\|_2^2},$$

где последнее выражение понимается в смысле скалярного произведения и нормы в $L_2[-\pi, \pi]$.

Thr 2.19. *Пусть функция f имеет период 2π и абсолютно непрерывную $(k-1)$-ую производную, причём $f^(k)$ (возможно, после изменения на множестве меры нуль) имеет ограниченную вариацию на $[-\pi, \pi]$, тогда*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \qquad n \to \infty.$$

Lem 2.20. *Усли у 2π-периодической функции ограниченной вариации есть ненулевое конечное число разрывов, и она кусочно абсолютно непрерывна, то оценка $O(1/n)$ для коэффициентов Фурье неулучшаема.*

Thr 2.21. *Пусть функция f непрерывна и 2π-периодическая, тогда для коэффициента Фурье имеется оценка*

$$c_n = O(\omega_f(\pi/n)),$$

где ω_f – модуль непрерывности f.

3 Ряд Фурье в пространстве L_2

Thr 3.1 (Теорема Вейерштрасса для тригонометрических многочленов)**.** *Всякую непрерывную на $[-\pi, \pi]$ функцию f, для которой $f(-\pi) = f(\pi)$, можно сколь угодно близко равномерно приблизить тригонометрическими многочленами вида*

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Thr 3.2 (Теорема Стоуна-Вейерштрасса)**.** *Пусть у нас зафиксирован компакт K и дана алгебра непрерывных функций $\mathcal{A}$ на этом компакте, которая разделяет точки, то есть для любых $x \neq y \in K$ найдётся $f \in \mathcal{A}$, такая что $f(x) \neq f(y)$. Тогда Всякую непрерывную на K функцию можно сколь угодно близко равномерно приблизить функциями из $\mathcal{A}$.*

Вспомнить про $\|f\|_C$. Равномерное приближение является приближением по норме L_2, так как на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеется неравенство $\|f\|_2 \leqslant \sqrt{2\pi}\|f\|_C$. В случае L_2 нормы определим коэффициенты, которыми собираемся приближать.

Thr 3.3 (Оптимальность коэффициентов Фурье)**.** *Для всякой $f \in L_2[-\pi, \pi]$ и данного числа n лучшее по норме L_2 приближение f тригонометрическим многочленом $\sum_{-n}^{+n} c_k e^{ikx}$ дают коэффициенты Фурье*

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,dx.$$

Lem 3.4 (неравенство Бесселя)**.** *Из доказательства предыдущей теоремы, можем получить, что*

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} c_k\varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2\|\varphi_k\|_2^2, \qquad \Rightarrow \qquad \|f\|_2^2 \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2\|\varphi_k\|_2^2, \quad \overset{\text{trig}}{\Rightarrow} \quad \|f\|_2^2 \geqslant 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.$$

Точно ли до n?

Lem 3.5 (Представление действительнозначной функции)**.** *Для действительнозначной функции представление в виде ряда Фурье перепишется в виде*

$$f = \sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx), \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx,$$

для $k \geqslant 1$. Неравенство Бесселя тогда запишется так:

$$\|f\|_2^2 \geqslant \frac{\pi}{2}|a_0|^2 + \pi\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

Thr 3.6 (Сходимость ряда Фурье в среднеквадратичном)**.** *Для вской комплекснозначной $f \in L_2[-\pi,\pi]$*

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

в смысле сходимости суммы в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$, а также выполняется равенство Парсеваля

$$\|f\|_2^2 = 2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Пока мы не доказали, что в полученную формулу можно подставить хоть одно конкретное значение x. Тот факт, что ряд Фурье функции из $L_2[-\pi,\pi]$ на самом деле сходится к этой функции почти всюду, был доказан Л. Карлесоном (1966), а до этого был известен как гипотеза Лузина.

4 Ряд Фурье и его сходимость

Def 4.1. Обозначим *частичную сумму* тригонометрического ряда Фурье для 2π-периодической функции f как

$$T_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}.$$

Lem 4.2. *Для n-й частичной суммы ряда Фурье 2π-периодической функции имеет место формула в виде свёртки*

$$T_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,dT,$$

с ядром Дирихле

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}.$$

Lem 4.3 (Равномерная ограниченность интегралов от ядра Дирихле)**.** *Существует такая константа C, что*

$$\left|\int_a^b D_n(t)\,dt\right| \leqslant C$$

для любых $a,b \in [-\pi,\pi]$, $n \in \mathbb{N}$.

Thr 4.4 (Равномерный принцип локализации)**.** *Запищем для $\delta \in (0,\pi)$*

$$T_n(f,x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x+t) - f(x)\right)D_n(t)\,dt = \int_{-\delta}^{\delta}\left(f(x+t) - f(x)\right)D_n(t)\,dt + \int_M (f(x+t) - f(x))D_n(t)\,dt,$$

где $M = \{t \mid \delta \leqslant |t| \leqslant \pi\}$. Если $f \in L_1[-\pi,\pi]$, то

$$\int_M \left(f(x+t) - f(x)\right)D_n(t)\,dt \;\to\; 0, \qquad n\to\infty.$$

Если f ограничена на отрезке $[a,b]$, то это выражение стремится к нулю равномерно по $x \in [a,b]$.

Def 4.5. Функция f называется гёльдеровой степени $\alpha > 0$, если для любых x, y из области определения

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^{\alpha}$$

с некоторой константой C.

Thr 4.6 (Признак Липшица сходимости ряда Фурье)**.** *Для абсолютно интегрируемой 2π-периодической функции, которая является гёльдеровой с некоторыми C, $\alpha > 0$ на интервале $(A, B) \supset [a, b]$*

$$T_n(f, x) \to f(x)$$

равномерно $x \in [a, b]$ при $n \to \infty$.

Thr 4.7 (Признак Дирихле сходимости ряда Фурье)**.** *Для абсолютно интегрируемой 2π-периодической функции, которая является непрерывной с ограниченной вариацией на интервале $(A, B) \supset [a, b]$*

$$T_n(f, x) \to f(x)$$

равномерно по $x \in [a, b]$ при $n \to \infty$.

Далее несколько лемм, сформулированных в виде задач, а именно признак Дирихле сходимости ряда Фурье в точке, признак Липшица сходимости ряда Фурье в точке, признак Дини сходимости ряда Фурье в точке. Ага, это 13 тема. А потом будут темы 14 - 17.

Интегрирование ряда Фурье

Thr 4.8 (Почленное интегрирование ряда Фурье)**.** *Пусть $f \in L_1[-\pi, \pi]$ соответствует не обязательно сходящийся ряд Фурье, записанный в действительном виде как*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + B_n \sin nx).$$

Тогда ряд Фурье можно почленно интегрировать, то есть выполняется формула

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{2}a_0(b - a) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n \sin nx}{n} - \frac{b_n \cos nx}{n}\right)\Bigg|_a^b.$$

Lem 4.9. *Разложим $\cos ax$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ при $a \notin \mathbb{Z}$ в ряд Фурье. Легко получить, что*

$$\operatorname{ctg} x = v.p. \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - \pi k}$$

$$\frac{1}{\sin x} = v.p. \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x - \pi k}$$

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right).$$

Lem 4.10. *Формула дополнения для бета-функции про $p \in (0, 1)$*

$$B(p, 1 - p) = \int_0^1 t^{p-1}(1 - t)^{-p}\, dt = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

Lem 4.11. *Для $0 < |x| < \pi$ верно, что*

$$\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x = \sum_{n,k \geqslant 1} \frac{2x^{2k-1}}{\pi^{2k} n^{2k}},$$

откуда можно получить значения сумм $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Суммирование тригонометрических рядов по Фейеру

Def 4.12. Определим *ядро Фейера*

$$\Phi_n(t) = \frac{D_0(t) + D_1(t) + \ldots + D_n(t)}{n + 1} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} \frac{n + 1 - |k|}{n + 1} e^{ikx},$$

как усреднение ядер Дирихле. Соответствующая *сумма Фейера* будет соответствовать усреднением первых $n+1$ частичных сумм ряда Фурье,

$$S_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \xi)\Phi_n(\xi)\, d\xi = \frac{T_0(f, x) + \ldots + T_n(f, x)}{n + 1}.$$

Записав

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} = \frac{1}{4\pi} \frac{\cos nt - \cos\left((n+1)t\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)},$$

и суммируя, получаем

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{4\pi} \frac{1-\cos\left((n+1)t\right)}{(n+1)\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{(n+1)\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

Thr 4.13. *Для непрерывной 2π-периодической f*

$$S_n(f,x) \rightrightarrows f(x),$$

то есть сходится равномерно.