

# ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ №3 КУРСА «ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

---

**Автор:** Хоружий Кирилл

**От:** 13 мая 2021 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Третье задание по математическому анализу</b>	<b>2</b>
1.1	Сходимость и полнота систем функций в пространствах $C$ и $L_p$	2
1.2	Банаховы пространства и их двойственные	6
1.3	Распределения (обобщенные функции)	14
1.4	Преобразование Фурье обобщенных функций	18

# 1 Третье задание по математическому анализу

## 14.8(2)

Рассмотрим интеграл с подвижной особенностью. В частности есть  $c(\alpha) \in [a, b]$ :

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx = \left( \int_a^{c(\alpha)} + \int_{c(\alpha)}^b \right) f(x, \alpha) dx.$$

В частности опишем ситуации, когда функция неограничена на нижнем и верхнем пределе:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha_1(\varepsilon) \geq a \forall \xi_1 > \alpha_1(\varepsilon) \forall \varepsilon \in E \left| \int_{\xi_1}^{c(\alpha)} f(x, \alpha) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично для нижнего предела

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha_2(\varepsilon) \leq b \forall \xi_2 > \alpha_2(\varepsilon) \forall \varepsilon \in E \left| \int_{c(\alpha)}^{\xi_2} f(x, \alpha) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если взять  $\Delta$  большим правильным образом, то приходим к определению вида

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta(\varepsilon) > 0 \forall \delta_1 \in (0, \Delta(\varepsilon)) \forall \delta_2 \in (0, \Delta(\varepsilon)) \forall \alpha \in E \left| \int_{c(\alpha)-\delta_1}^{c(\alpha)+\delta_2} f(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon.$$

Теперь можем перейти к примеру:

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin(\alpha x)}{\sqrt{|x - \alpha|}} dx,$$

тогда, по определению,

$$\left| \int_{\alpha-\delta_1}^{\alpha+\delta_2} \frac{\sin(\alpha x)}{\sqrt{|x - \alpha|}} dx \right| \leq \int_{\alpha-\delta_1}^{\alpha+\delta_2} \frac{dx}{\sqrt{|x - \alpha|}} = \int_{\alpha-\delta_1}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{|x - \alpha|}} + \int_{\alpha}^{\alpha+\delta_2} \frac{dx}{\sqrt{|x - \alpha|}} = 2\sqrt{\delta_1} + 2\sqrt{\delta_2} < 4\Delta(\varepsilon),$$

в таком случае достаточно взять  $\Delta(\varepsilon) = \varepsilon^2/16$ .

## 1.1 Сходимость и полнота систем функций в пространствах $C$ и $L_p$

Можно построить следующую систему вложений: топологические пространства  $\supset$  метрические пространства  $\supset$  нормированные пространства  $\supset$  предгильбертовы пространства.

**Def 1.1.** *Банахово пространство* – полное нормированное пространство.

**Def 1.2.** *Гильбертово пространство* – банахово пространство, с нормой, порожденной положительно определенным скалярным произведением  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ .

**Def 1.3.** *Гильбертово пространство* – ~~норм~~ нормированное пространство, с нормой, порожденной положительно определенным скалярным произведением  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ .

Приведем некоторые примеры: пространство непрерывных функций  $C[a, b]$  с нормой  $\|\cdot\|_C = \|\cdot\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |x(t)|$ . Пространство  $L_p$ . Пространство  $C_p$ , совпадающее с  $C[a, b]$ , но с нормой  $\|\cdot\|_2$  – предгильбертово, кстати.

### T1

Построим табличку сходимостей. Для начала вспомним, что если  $\mu(A) < +\infty$  и  $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$ , то

$$\|\cdot\|_{p_1} \leq C(\mu(A), p_1, p_2) \|\cdot\|_{p_2}, \quad C(\dots) = (\mu(A))^{\frac{p_2-p_1}{p_1 p_2}}.$$

В частности, можно перейти к пределу, и обнаружить, что

$$\|\cdot\|_1 \leq C(\dots) \|\cdot\|_\infty, \quad \|\cdot\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\cdot\|_p \equiv \|\cdot\|_C.$$

Таким образом из сходимости  $L_2$  следует сходимость в  $L_1$ .

Ещё раз напишем, что значит сходимость по норме:

$$f_n \xrightarrow{L_p} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon \|f_n - f\|_p < \varepsilon.$$

Тогда рассмотрим

$$\|f_n - f\|_1 \leq \sqrt{b-a} \|f_n - f\| < \varepsilon, \quad \square.$$

Теперь докажем  $f_n \xrightarrow{C} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{L_2} f$ , где сходимость по  $C$ -норме:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N_\varepsilon \forall x \in A |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ну, действительно,

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_A |f_n - f|^2(x) \mu(dx) \leq \int_A \left\{ \sup_{x \in A} |f_n - f|(x) \right\}^2 \mu(dx) = \left\{ \sup_{x \in A} |f_n - f|(x) \right\}^2 \mu(A),$$

где множитель перед  $\mu(A)$  стремится к 0 при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\square$ .

Также стоит вспомнить, что из равномерной сходимости следует поточечная сходимость. По определению, поточечная сходимость:

$$\forall x \in A \forall \varepsilon > 0 \exists N(\xi, \varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq N |f_n - f|(x) < \varepsilon.$$

Получается, что достаточно взять  $N(x, \varepsilon) = N(\varepsilon)$  и получить искомое утверждение.

В качестве контрпримера рассмотрим  $f_n(x) = n \arctg(n/x^2)$  с  $A = [1, \infty)$ . По отрицанию условия Коши, если

$$\exists \varepsilon_0 \forall k \in \mathbb{N} \exists n \geq k \exists p \in \mathbb{N} \exists \tilde{x} \in A: |f_{n+p} - f_n|(\tilde{x}) \geq \varepsilon_0,$$

то последовательность  $f_n$  не является равномерно сходящейся. Действительно, при  $n = k, p = 2k - 2n, \tilde{x} = \sqrt{k} = \sqrt{n}$ , верно, что

$$|f_{n+p} - f_n|(\tilde{x}) = n |2 \arctg 2 - \arctg 1| \geq |2 \arctg 2 - \pi/4| = \varepsilon_0 > 0,$$

что говорит об отсутствии равномерной сходимости. При этом  $f_n \rightarrow x^2$  поточечно на  $x \in E$ .

**Контрпримеры.** Покажем, что  $f_n \xrightarrow{L_1} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{L_2} f$ . Прямую мы умеем строить по двум точкам

$$\frac{f - f_0}{f_1 - f_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

Построим последовательность функций вида

$$\frac{f_n - c_n}{0 - c_n} = \frac{x - 0}{x_n - 0}, \quad f_n(x) = \begin{cases} c_n(1 - \frac{x}{x_n}), & x \in [0, x_n], \\ 0, & x \in [x_n, 1]. \end{cases}$$

Контрпримеры строим на отрезке  $[0, 1]$ . Выберем последовательность сходящуюся к 0 в  $L_1$  норме:

$$\|f_n - 0\|_1 = \int_0^{x_n} \left| c_n \left( 1 - \frac{x}{x_n} \right) \right| \mu(dx) = \frac{1}{2} c_n x_n, \quad \|f_n - 0\|_2^2 = \frac{1}{3} c_n^2 x_n, \quad \Rightarrow \quad \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} c_n \sqrt{x_n}.$$

Пусть  $c_n x_n = \alpha_n$  — бесконечно малая последовательность. Выберем  $x_n = 1/n$ , тогда  $c_n = n \alpha_n$ .

Для  $\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\alpha_n}{\sqrt{x_n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{n} \alpha_n$ , что устремим к  $\infty$ , выбрав

$$\alpha_n = \frac{1}{n^{1/2-\xi}}, \quad \xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \square.$$

Эту историю можно обобщить до отсутствия следствия в  $\|f_n\|_p = c_n x_n^{1/p} (1+p)^{-1/p}$ . Тогда можем взять  $\alpha_n = (n^{1-1/p-\xi})^{-1}$ , для  $\xi \in (0, 1-1/p)$ .

Теперь покажем, что  $f_n \xrightarrow{L_2} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{C} f$ . Пусть  $f_n \rightarrow 0$  в  $L_2$  норме. Пусть

$$\|f_n - 0\|_2 = \|f_n\| = \frac{c_n}{\sqrt{3}} x_n = \alpha_n, \quad x_n = \frac{1}{n}.$$

Пусть  $f_n$  вида

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{3} \alpha_n \sqrt{n} (1 - nx), & x \in [0, 1/n], \\ 0, & x \in (1/n, 1]. \end{cases}$$

В таком случае

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n - 0|(x) = \sup_{x \in [0, 1/n]} |\sqrt{3} \alpha_n \sqrt{n} (1 - nx)| = \sqrt{3} \alpha_n \sqrt{n} \neq 0, \quad \alpha_n = \frac{1}{n^{1/2-\xi}}, \quad \xi \in [0, 1/2),$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь есть поточечная сходимость но нет сходимости в  $L_1$ . Построим пилу, вида

$$f_n(x) = \begin{cases} c_n \frac{x_{1,n} - x}{x_{1,n} - x_n}, & x \in (x_{1,n}, x_n], \\ c_n \frac{x_{2,n} - x}{x_{2,n} - x_n}, & x \in [x_n, x_{2,n}), \\ 0, & x \in [0, x_{1,n}] \cup [x_{2,n}, 1]. \end{cases}$$

В этой задаче достаточно считать  $x_{1,n} = 1/(n+1)$ , а  $x_{2,n} = 1/n$ , тогда

$$\|f_n\|_1 = c_n \frac{x_{2,n} - x_{1,n}}{2} = \frac{c_n}{2} \frac{1}{(n+1)n} \rightarrow \infty.$$

Чтобы это сделать, достаточно выбрать  $c_n = n^{2+\xi}$ . Однако поточечно такой зуб пилы сходится к 0. Действительно, при  $x = 0$   $f_n(0) = 0$ . Для остальных  $x$  можно показать, что по определению  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ .

## Т2

Приведем пример, когда последовательность функция  $(f_n)$  сходится в пространстве  $L_1[a, b]$ , но для любого  $x \in [a, b]$  последовательность чисел  $f_n(x)$  расходится.

Из сходимости в  $L_1$  следует сходимость по мере, так что можем воспользоваться *примером Рисса*. Пусть  $f_n \xrightarrow{L_2} f \equiv 0$ . Рассмотрим конструкцию вида

$$\varphi_{m,k}(x) = \xi \left[ \frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m} \right] (x), \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

где  $k = 0, 1, \dots, 2^m - 1$ . Утверждается, что  $\forall n \in \mathbb{N} \exists! m, k : n = 2^m + k$ . Таким нетривиальным образом мы (точнее Рисс) решили дробить ступеньку. Верно, что

$$\|f_n - 0\|_1 = \int_{k/2^m}^{(k+1)/2^m} \varphi_{m,k}(x) dx = \frac{1}{2^m} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Однако, для  $\forall x \in [0, 1]$  существует бесконечное число сленов последовательности равных 0 и 1. Таким образом поточечно последовательность расходится.

## Т3

Докажем, что естественное отображение  $C[a, b] \rightarrow L_1[a, b]$  не сюръективно, не забывая, что элементы  $L_1$  — это не функции, а классы эквивалентности.

Достаточно выбрать функцию, вида

$$f(x) = \text{sign } x,$$

которую *нельзя* изменить на множестве нулевой меры, чтобы сделать её непрерывной.

## Т4

Выясним полноты некоторых систем функций в пространстве  $L_2[0, \pi/2]$ . Начём с

$$\{f_n(x) = \sin[(2n-1)x]\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

**Def 1.4.** Пусть  $X$  — нормированное пространство. Система  $S = \{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  называется *полной*, если  $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{A}$ , а также  $\exists f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_n} \in S$  такие, что  $\|x - (\alpha_1 f_{\alpha_1} + \dots + \alpha_n f_{\alpha_n})\|_X < \varepsilon$ .

Стоит подчеркнуть, что это не определение базиса, так как  $\alpha \equiv \alpha(\varepsilon)$ . Это определение слабее базиса, это — приближение.

Если мы возьмём  $L_2[-\pi, \pi]$ , и систему вида  $\{1, \sin(nx), \cos(nx)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , то она будет полна, более того будет являться базисом. В рамках задачи мы интересуемся промежутком  $[0, \pi/2]$ .

Более того, такая система полна в  $\dot{C}[-\pi, \pi]$ , ( $f(-\pi) = f(\pi)$ ), чем мы потом воспользуемся в Т5.

В смысле  $L_2$  мы можем приближать, игнорируя счётное число точек:

$$\|f - \tau_n\|_2^2 = \int_0^{\pi/2} |f - \tau_n|(x) \mu(dx).$$

Достраивая функцию специфичным образом на отрезок  $[-\pi, \pi]$  (и, d, и, d), пользуемся знанием о полноте тригонометрической системы и приходим к полной системе.

Для понимания продолжения функции с отрезка  $[0, \pi/2]$ , на  $[-\pi, \pi]$ , достаточно построить функции, образующие системы (рис. 1). И, аналогично, для  $k = 2$  (рис. 2).

## Т5

Аналогично Т4, рассмотрим полноту систем некоторых функция в пространстве  $C[0, \pi/2]$ . В частности покажем, что  $\exists \tilde{x} \in C[0, \pi/2]$  и  $\exists \varepsilon_0 \forall \tau_n$ . Все синусы упираются в 0, выберем  $\tilde{x}(t) = 1$ , тогда

$$\|\tilde{x} - \tau_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, \pi/2]} |\tilde{x}(t) - \tau_n(t)| \geq |\tilde{x} - \tau_n| = |\tilde{x} - \tau_n|(0) = |1 - 0| = \varepsilon_0.$$

Получается, что ломаются все синусы и косинусы с «нечётными дугами» (достаточно взять  $t = \frac{\pi}{2}$ ), что явно видно по построению.

Итого, единственная хорошая система,  $-\cos(2kx)$ .

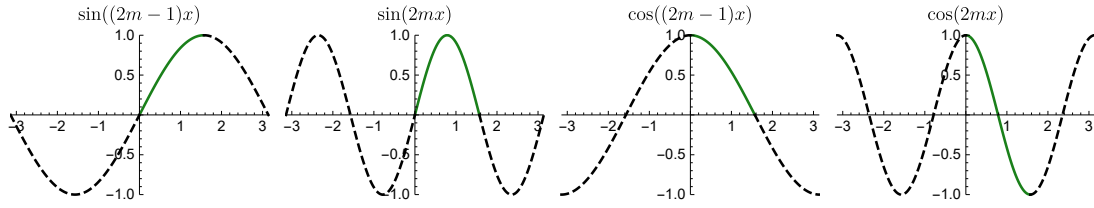


Рис. 1: Графики функция при  $m = 1$  для T4

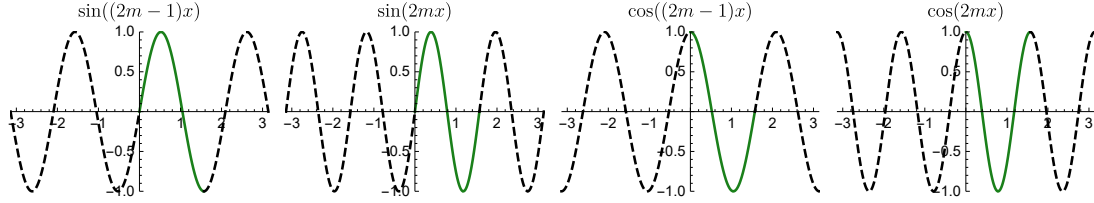


Рис. 2: Графики функция при  $m = 2$  для T4

## T6. Функции Эрмита

Приведем пример счетной системы функций, полной в  $L_2(\mathbb{R})$ . В частности, воспользуемся функциями Эрмита:

$$\varphi_n(t) = c_n H_n(t) e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad H_n(t) = e^{\frac{1}{2}t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

Утверждается, что это базис  $L_2(\mathbb{R})$ , докажем это.

Есть система функций

$$\mathcal{L} = \{\varphi_n(t)\} = \{\rho(t) e^{-\frac{1}{2}t^2}, \rho \in \mathcal{P}\}.$$

Так как  $L_2$  – гильбертово пространство, то достаточно проверить замкнутость системы, то есть показать, что  $\mathcal{L}^\perp = \{0\}$ . По определению:

$$f \in \mathcal{L}^\perp, \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} f(t) t^n e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} F \left[ f(t) e^{-\frac{1}{2}t^2} \right] (y) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} f(t) e^{-\frac{1}{2}t^2} e^{-iyt} = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} f(t) e^{-\frac{1}{2}t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iyt)^n}{n!} = \\ &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iy)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} f(t) \underbrace{t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}}_{=0 \text{ по условию}} = 0, \end{aligned}$$

таким образом мы выяснили, что Фурье функции  $\equiv 0$ .

Далее воспользуемся тем, что  $f(t) e^{-\frac{1}{2}t^2} \in L_2(\mathbb{R})$ , а значит работает равенство Парсеваля:

$$\int_{\mathbb{R}} \left| f(t) e^{-\frac{1}{2}t^2} \right|^2 \frac{dt}{2\pi} = \int_{\mathbb{R}} |F[\dots](y)|^2 dy = 0, \quad \Rightarrow \quad f(t) e^{-\frac{1}{2}t^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad f(t) = 0,$$

по крайней мере кроме множества меры нуль. Таким образом функции эрмита составляют базис в  $L_2$ .

## T7

Возьмём функцию, которая лежит в  $L_2$ , но не лежит в  $\mathring{C}[-\pi, \pi]$ , например, ограничение  $\text{sign } x$ . И рассмотрим подпространство  $V \subset \mathring{C}[-\pi, \pi]$ , заданное ортогональностью к ней, то есть заданное формулой

$$\int_{-\pi}^0 f(x) dx = \int_0^{\pi} f(x) dx.$$

Это  $V$  есть замкнутое подпространство в  $\mathring{C}[-\pi, \pi]$  и в нём можно выбрать какую-то полную систему, и даже её ортогонализировать. Если начать с тригонометрической системы, то косинусы и чётные синусы и так лежат в  $V$ , нечётные синусы надо будет подправить, скомбинировав их с  $\sin x$ , а потом ещё ортогонализировать (что может быть неприятно).

В итоге, система не может быть полна в  $\mathring{C}[-\pi, \pi]$ , так как её линейные комбинации не выходят за пределы  $V$ . А что касается замкнутости, то переходя в гильбертово  $L_2$  видно, что ортогональное дополнение к замыканию образа  $V$  в гильбертовом пространстве одномерно и натянуто на этот вот  $\text{sign } x$ , который разрывен и не лежит в образе  $\mathring{C}[-\pi, \pi]$ . Так что замкнутость в терминах  $\mathring{C}[-\pi, \pi]$  есть.

## 1.2 Банаховы пространства и их двойственные

### Т8

Здесь, и далее  $p(x) = \|x\|$ ,  $q(x) = \|x\|'$ . Нормы эквивалентны, если

$$\exists m, M : mp(x) \leq q(x) \leq Mp(x) \quad \forall x.$$

Так вот, всегда есть  $\{e_k\}_{k=1}^n$  базис Гамиля, такой что  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ , где естественно ввести норму вида

$$p(x) = \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

Пусть  $q(x)$  – ещё одна норма на  $X$ , в качестве мажоранты выберем  $M = \max_{i=1, \dots, n} q(e_i)$ . Теперь можем оценить сумму сверху:

$$q(x) = q\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) \leq \sum_{k=1}^n |x_k| q(e_k) \leq M \cdot p(x).$$

И оценить снизу:

$$|q(x) - q(y)| \leq q(x - y) \leq M \cdot p(x - y),$$

вообще это значит, что  $q$  – липшецев функционал, – непрерывный функционал на  $X$  с нормой  $p$ , а тогда и  $q(x)$  непрерывный функционал  $X$  с нормой  $p(x)$ .

**Lem 1.5.** Шары в пространстве компактны тогда, и только тогда, когда  $\dim X < +\infty$ .

Рассмотрим сферу  $S = \{x \in X \mid p(x) = 1\}$  – компакт. Но мы знаем, что непрерывный функционал на компакте достигает своего минимума:

$$\min_{x \in S} q(x) = \min_{p(x)=1} q(x) = m > 0.$$

Тогда на сфере  $S$  верно, что  $q(x) \geq m$ . Тогда в  $X$   $q(x) \geq m \cdot p(x)$ . Действительно,

$$q(tx) = |t|q(x), \quad p(tx) = |t|p(x), \quad \Rightarrow \quad q(tx) = \frac{p(tx)}{p(x)} q(x) \geq m p(tx).$$

Собственно,  $mp(x) \leq q(x) \leq M \cdot p(x)$ , Q. E. D.

### Т9. Пространство $c$

Пространство состоит из некоторых бесконечномерных «векторов» (последовательностей):

$$x = (x(1), x(2), \dots, x(k), \dots), \quad \left| \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) \right| < +\infty.$$

Норма определена, как

$$p(x) = \|x\|_c = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x(k)| = \|x\|_\infty.$$

Докажем, что это пространство является банаховым, а именно полноту по  $\|\cdot\|_\infty$  норме.

Рассмотрим последовательность  $x_n$ , где

$$x_n = (x_n(1), \dots, x_n(k), \dots).$$

Глобально хотим показать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \forall l \in \mathbb{N} \quad \|x_{n+l} - x_n\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_{n+l}(k) - x_n(k)| < \varepsilon.$$

Попробуем через это продаться: из сходимости следует, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad |x_{n+l}(k) - x_n(k)| < \varepsilon.$$

Здесь можем выделить  $(x_n(k))_{n \in \mathbb{N}}$  – числовая фундаментальная в  $\mathbb{R}$ . По критерию Коши:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(k) = y(k) \in \mathbb{R},$$

устанавливается покомпонентная сходимость. Теперь рассмотрим

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |x_n(k) - y(k)| = \|x_n - y\|_\infty < \varepsilon,$$

что автоматически означает, что  $\exists y$  такой, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y.$$

Следующий этап – показать, что

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) \in \mathbb{R},$$

то есть показать полноту пространства:

$$\begin{aligned} |y(k+q) - y(k)| &= |y(k+q) - x_n(k+q) + x_n(k+q) - x_n(k) + x_n(k) - x_n(k)| \\ &\leq |y(k+q) - x_n(k+q)| + |y(k) - x_n(k)| + |x_n(k+q) - x_n(k)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом мы доказали полноту пространства<sup>1</sup>.

## Т10. Критерий Йордана-фон Неймана

Хочется понять, можно ли ввести на пространстве  $C[a, b]$  скалярное произведение так, что норма пространства будет получаться из этого скалярного произведения.

**Thr 1.6** (критерий Йордана-фон Неймана). *Норма  $\|\cdot\|_X$  порождается скалярным произведением тогда, и только тогда, когда  $\|\cdot\|_X$  удовлетворяет правилу параллелограмма:*

$$\forall x, y \in X \quad \|x + y\|_X^2 + \|x - y\|_X^2 = 2\|x\|_X^2 + 2\|y\|_X^2.$$

Выберем  $C[0, \pi/2]$ , и  $x(t) = \cos t$ ,  $y(t) = \sin t$ . Заметим, что

$$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1, \quad \|x + y\|_\infty = \sqrt{2}, \quad \|x - y\|_\infty = 1, \quad 2 + 1 \neq 2 + 2,$$

таким образом пространство не гильбертово.

## Т11. Поиск функционала

Далее будем обозначать за  $\mathcal{D}(A)$  область определения оператора  $A$ , и  $\mathcal{R}(A)$  – область значений. Оператор действует  $A: X \mapsto Y$ , где  $X$  и  $Y$  – линейные нормированные пространства.

**Def 1.7.** Говорится, что линейный оператор  $A: X \mapsto Y$  *непрерывен* в точке  $x \in \mathcal{D}(A)$ , если  $\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}(A)$ , сходящейся к  $x$  в  $X$ ,  $Ax_n \rightarrow Ax$  в  $Y$ . Оператор *глобально непрерывен*, если он непрерывен  $\forall x \in \mathcal{D}(A)$ .

**Lem 1.8.** *Для того, чтобы линейный оператор  $A$  был непрерывен на всей  $\mathcal{D}(A)$ , необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен в нуле.*

**Def 1.9.** Линейный оператор  $A: X \mapsto Y$  называется *ограниченным*, если  $\exists C > 0: \|Ax\|_Y \leq C \cdot \|x\|_X \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$ . Наименьшее из чисел  $C$  называется *нормой* оператора  $A$  и обозначается  $\|A\|$ .

**Lem 1.10.** *Для того, чтобы линейный оператор был ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы он переводил всякое ограниченное в  $X$  множество, в ограниченное в  $Y$ .*

**Thr 1.11.** *Оператор  $A$  непрерывен тогда, и только тогда, когда он ограничен.*

**Thr 1.12** (о норме линейного оператора). *Верно, что*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Найдём норму функционала

$$A: f \mapsto \sum_{k=0}^N (-1)^k f\left(\frac{k}{N}\right),$$

на пространстве  $C[0, 1]$ .

Вообще нормированным пространством мы называем пару вида  $(X, \|\cdot\|_X)$ . И пусть есть некоторый непрерывный ограниченный оператор из  $X$  в  $Y$ . Если  $Y = \mathbb{C}(\mathbb{R})$ ,

$$A = F: X \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R}),$$

<sup>1</sup>  $c_0, c_{00}, l_\infty$  – банаховы ли?  $\textcircled{!}$ :  $c_0$  (сходящиеся к 0),  $c_{00}$  (финитные),  $l_\infty$  (ограниченные).

то  $A$  называют *функционалом*. Выберем в качестве  $X = C[0, 1]$ , а в качестве  $F: C[0, 1] \mapsto \mathbb{C}(\mathbb{R})$ . Функционал вида

$$F[f] = \sum_{k=0}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Что есть норма функционала? Норма функционала есть

$$\|F\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |F[f]| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |F[f]| = \inf\{L > 0 \mid |F[f]| \leq L\|f\|_\infty\}, \quad \forall f \in C[0, 1].$$

Глобально, это доказывается, например, в Константинове очень подробно.

Всегда легко сверху ограничить. Тривиальный шаг:

$$|F[f]| = \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=0}^n \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = (n+1) \cdot \|f\|_\infty.$$

Продолжаем,

$$\frac{|F[f]|}{\|f\|_\infty} \leq n+1, \quad \Rightarrow \quad \|F\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |F[f]| \leq n+1.$$

Теперь выберем функцию  $f_s(x) = f(k/n) = (-1)^k$ . На ней мы действительно достигаем супремума, тогда

$$\|F\| = |F[f_s]| = n+1.$$

Таким образом нашли норму оператора.

В более общем случае можем показать, что

$$F[f] = \sum_{k=1}^n c_k x(t_k), \quad |F[f]| \leq \sum_{k=1}^n |c_k| \cdot \|f\|_\infty, \quad \Rightarrow \quad \|F\| \leq \sum_{k=1}^n |c_k|.$$

Далее, определив схожим образом непрерывную функцию  $\tilde{f}$ , равную  $\text{sign } c_k$  в  $t = t_k$  увидим, что  $\|\tilde{f}\| = 1$ ,

$$\|F[\tilde{f}]\| \geq |F[\tilde{f}]| = \sum_{k=1}^n |c_k|,$$

таким образом решили чуть более общую задачу.

## T12

Пусть функция  $g$  непрерывна на  $[a, b]$ . Найдём норму линейного отображения  $M_g: L_2[a, b] \mapsto L_2[a, b]$ , где  $A_g(f) = [f] - \text{мультипликативный оператор}$ . Здесь  $X = Y = L_2[a, b]$ .

По определению, норма оператора  $\|A_g\| = \sup_{\|f\|_X = 1} \|A_g[f]\|_Y$ . Аналогично, ищем ограничение сверху:

$$\|A_g[f]\|_2^2 = \|gf\|_2^2 = \int_{[a, b]} |gf|^2(x) \mu(dx) \leq \int_{[a, b]} \left\{ \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| \right\}^2 |f(x)|^2 \mu(dx).$$

Вынесенный супремум позволит записать:

$$\|A_g[f]\|_2^2 \leq \|g\|_\infty^2 \|f\|_2^2, \quad \Rightarrow \quad \|A_g\| = \sup_{\|f\|_2 = 1} \|A_g[f]\|_2 \leq \|g\|_\infty.$$

Далее покажем, что норма не достигается, но сколь угодно близко приближается.

Есть функция

$$\sup_{x \in [a, b]} |g(x)| = |g(c)|,$$

есть некоторая  $f_\varepsilon \in L_2[a, b]$  вида

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_\varepsilon, & x \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon], \\ 0, & x \notin [c - \varepsilon, c + \varepsilon], \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \|f_\varepsilon\|_2^2 = \int_{[c - \varepsilon, c + \varepsilon]} \alpha_\varepsilon^2 \mu(dx) = \alpha_\varepsilon^2 \cdot 2\varepsilon = 1, \quad \alpha_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}.$$

В таком случае рассмотрим

$$\|A_g[f_\varepsilon]\|_2^2 = \|gf_\varepsilon\|_2^2 = \alpha_\varepsilon^2 \int_{[c - \varepsilon, c + \varepsilon]} |g(x)|^2 \mu(dx) = \alpha_\varepsilon^2 \cdot 2\varepsilon |g(x_{c, \varepsilon})|^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \|g\|_\infty^2,$$

в силу непрерывности  $g$ , по теореме о среднем.

Можно пойти другим путем, по определению:

$$\forall \varepsilon \in (0, \|g\|_\infty), \quad \exists x_\varepsilon \subseteq [a, b] \quad g(x) \geq \|g\|_\infty - \varepsilon,$$



почти всюду на  $X_\varepsilon$ . Выберем  $h(x)$  вида

$$h(x) = \text{sign } g(x) \chi_{X_\varepsilon}(x), \quad \|h_\varepsilon\|_1 = \|h_\varepsilon\|_2 = \mu(X_\varepsilon),$$

тогда верно, что

$$\|A_g\| \geq \|A_g[h_\varepsilon]\|_1 \cdot \|h_\varepsilon\|_1 = \int_{[a,b]} |g(x)| \chi_{X_\varepsilon}(x) \mu(dx) \geq (\|g\|_\infty - \varepsilon) \chi \mu(X_\varepsilon), \quad \Rightarrow \quad \|A_g\| = \|g\|_\infty.$$

Аналогично в  $L_2$ :

$$\|A_g\|^2 \geq \|g\| \chi_{X_\varepsilon}\|_2^2 \cdot \|h_\varepsilon\|_2^2 \geq \|g\|_\infty^2 \mu^2(X_\varepsilon),$$

что приводит к такому же результату.

### Т13

Сначала найдём норму оператора  $F$ , откуда уже получим значение нормы для  $J$ , где

$$F[f] = \int_a^b g(t)f(t) dt, \quad J[f] = \int_a^b K(x,y)f(y) dy,$$

где  $g \in C[a, b]$ , а  $F, J$  – линейные функционалы на  $C[a, b]$ .

**Первая часть.** Функционал  $F$  ограничен в силу

$$|F[f]| \leq \int_a^b |g(t)| |f(t)| dt \leq \|f\|_\infty \cdot \int_a^b |g(t)| dt.$$

Далее выберем произвольное  $\varepsilon > 0$ . По *теореме Кантора* найдётся такое разбиение отрезка  $[a, b]$  точками  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , что колебание  $\omega_i(g)$  функции  $g$  на  $i$ -ом отрезке  $\Delta_i = [t_{i-1}, t_i]$  удовлетворяет неравенствам

$$\omega_i(g) < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Разобьём все  $\Delta_i$  на две группы. В первую группу отнесем те отрезки, на которых  $g$  сохраняет знак. Пусть это будут отрезки  $\Delta'_1, \dots, \Delta'_r$ . Вторую группу  $\Delta''_1, \dots, \Delta''_s$  образуют отрезки, на которых  $g$  меняется знак. В каждом промежутке второго типа существует точка, в которой  $g$  обращается в нуль. Ввиду установленных неравенств там  $|g(t)| < \varepsilon$ .

На промежутках первого типа положим  $\tilde{f}(t) = \text{sign } g(t)$ , в остальных точках  $\tilde{f}(t)$  – линейная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству  $|\tilde{f}| \leq 1$ . Тогда  $\|\tilde{f}\| = 1$ , и

$$\begin{aligned} \|F\| &= \sup_{\|f\|=1} |F[f]| \geq |F[\tilde{f}]| = \left| \int_a^b g(t) \tilde{f}(t) dt \right| = \left| \sum_{k=1}^r \int_{\Delta'_k} g(t) dt + \sum_{i=1}^s \int_{\Delta''_i} g(t) \tilde{f}(t) dt \right| \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^r \int_{\Delta'_k} |g(t)| dt - \sum_{i=1}^s \int_{\Delta''_i} |g(t)| dt = \int_a^b |g(t)| dt - 2 \sum_{i=1}^s \int_{\Delta''_i} |g(t)| dt \geq \int_a^b |g(t)| dt - 2\varepsilon \cdot \mu[a, b], \end{aligned}$$

что ввиду произвольности  $\varepsilon$  означает, что  $\|F\| \geq \int_a^b |g(t)| dt$ , что вместе со знанием супремума позволяет утверждать:  $\|f\| = \int_a^b |g(t)| dt$ .

**Вторая часть.** Переходим к поиску нормы  $J$ :

$$\|J[f]\| = \sup_{t \in [a, b]} \left| \int_a^b K(t, s) f(s) ds \right| \leq \sup_{t \in [a, b]} \int_a^b |K(t, s)| \cdot |f(s)| ds \leq \|f\| \cdot \sup_{t \in [a, b]} \int_a^b |K(t, s)| ds,$$

таким образом, по определению

$$\|J\| \leq \sup_{t \in [a, b]} \int_a^b |K(t, s)| ds \stackrel{\text{def}}{=} M.$$

Так как ядро  $K$  непрерывно, то непрерывен и интеграл  $\int_a^b |K| ds$ , поэтому  $\exists t_0 \in [a, b]$  такой, что  $M = \int_a^b |K(t_0, s)| ds$ .

Как было показано в первой части,  $q(x) = \int_a^b |K(t_0, s)| f(s) ds$  – линейный непрерывный функционал на  $C[a, b]$  с нормой равной  $M$ . Таким образом, выбирая  $\tilde{f}$  так, чтобы  $\text{sign } \tilde{f}(s) = \text{sign } K(t_0, s)$  может утверждать, что супремум достигается, и

$$\|J\| = M = \sup_{t \in [a, b]} \int_a^b |K(t, s)| ds.$$

**Thr 1.13** (Теорема Бэра для открытых множеств). *Счётное семейство открытых всюду плотных подмножеств банахова пространства имеет непустое пересечение.*

**Thr 1.14** (Теорема Бэра для замкнутых множеств). *Если банахово пространство  $E$  покрыто счётным семейством замкнутых множеств, то одно из них имеет непустую внутренность.*

#### T14

Докажем, что алгебраический базис бесконечномерного банахова пространства не может быть счётным.

Вводился алгебраический базис Гамиля  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , где  $\forall x \in E$  представляется в виде  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_{\alpha_k}$ . Получается, что нужно показать, что в бесконечномерном банаховом пространстве такой базис не может быть счётным: докажем от противного.

Пусть  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , тогда пространство описывается, как

$$E_n = \left\{ \sum_{k=1}^n x_k e_k \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\} = \langle e_1, \dots, e_n \rangle, \quad \Rightarrow \quad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

Но по теореме Бэра для замкнутых множеств  $E$  не может быть счётным объединением нигде не плотных множеств.

Точнее, это было бы возможно, только с случае непустой внутренней одного из пространств  $E_n$ , что невозможно.

#### T15

Приведем пример плотного в  $X = C[a, b]$  банахова пространства, со счётным базисом.

По теореме Вейерштрассе система степеней  $A$  полна в  $C[a, b]$ , что равносильно тому, что линейная оболочка системы степеней  $A$  плотна на  $C[a, b]$ . Таким образом,  $A$  со счётным базисом, является ответом на задачу.

**Def 1.15.** Последовательность элементов  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  называется *базисом* в пространстве<sup>2</sup>  $X$ , если  $\forall x \in X$  существует единственный набор  $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$  таких, что сумма вида (не конечная не при каком  $n$ )

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k e_k, \quad \Leftrightarrow \quad \exists! \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}_0} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}_0 \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \|x - \sum_{k=0}^n x_k e_k\|_X = \|x - S_n\| < \varepsilon.$$

**Thr 1.16** (Теорема Банаха-Штейнгауза для линейных функционалов). *Пусть семейство линейных функционалов  $Y \subset E'$  ограничено в любой точке банахова пространства  $E$ , то есть для любого  $x \in E$  множество чисел  $\{\lambda(x) \mid \lambda \in Y\}$  ограничено. Тогда  $Y$  ограничено в смысле нормы в  $E'$ .*

#### T16

**Thr 1.17** (Расходимость ряда Фурье в точке). *Существует непрерывная  $2\pi$ -периодическая функция, ряд Фурье которой расходится в точке 0.*

$\Delta$ . На пространстве  $\dot{C}[-\pi, \pi]$  непрерывных  $2\pi$ -периодических функций с нормой  $\|\cdot\|_C$  определим линейный функционал

$$\lambda_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt,$$

это значение  $n$ -й частичной суммы ряда Фурье в точке 0,  $T_n(f, 0)$ . Можно заметить по определению нормы, что его норма равна

$$\|\lambda_n\| = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt.$$

Оценим интеграл модуля ядра Дирихле стандартным способом:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(n+1/2)x|}{2\pi|\sin x/2|} dx \geq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(n+1/2)x|}{\pi|x|} dx = \int_{-\pi(1+1/2)}^{\pi(1+1/2)} \frac{|\sin u|}{\pi|u|} du \geq \\ &\geq \int_{-\pi(1+1/2)}^{\pi(1+1/2)} \frac{\sin^2 u}{\pi|u|} du = \int_{-\pi(1+1/2)}^{\pi(1+1/2)} \frac{1 - \cos 2u}{2\pi|u|} du \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos 2u}{2\pi|u|} du = +\infty, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Получается, то нормы функционалов  $\lambda_n$  при  $n \rightarrow \infty$  не являются ограниченными. Следовательно, по теореме Банаха-Штейнгауза, примененной в обратную сторону, для некоторой функции  $f \in \dot{C}[-\pi, \pi]$  значения  $\lambda_n(f) = T_n(f, 0)$  не будут ограничены, и, следовательно, расходятся при  $n \rightarrow \infty$ . □

<sup>2</sup>Если линейное нормированное пространство имеет не более, чем счётный базис, то оно сепарабельно. Однако существуют сепарабельные банаховы пространства без базиса.

# Т17

Для последовательностей

$$x = (x(1), \dots, x(k), \dots),$$

рассмотрим пространство вида

$$l_p = \{x \mid \|x\|_p \in \mathbb{R}\}, \quad \|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{1/p}.$$

Возьмём пространство  $l_p$  как множество, но добавим норму из пространства  $l_q$ , где  $\infty > q > p$ . Покажем, что в таком «дырявом» пространстве не выполняется теорема Бэра и принцип равномерной ограниченности.

Рассмотрим шар  $A_n$  вида

$$A_n = \{x \in l_p \mid \|x\|_p \leq n\}, \quad l_p = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Докажем от противного, что  $A_n$  нигде не плотно.

Пусть существует такой  $R > 0$  и  $x_0 \in A_n$ :  $B_R(x_0) \subset \text{cl } A_n = A_n$ .

$$\forall x \in l_p: \quad \rho_q(x, x_0) < R, \quad \Rightarrow \quad x \in A_n \quad \Rightarrow \quad \|x\|_p \leq n.$$

Рассмотрим некоторую последовательность

$$z(k) = \frac{R}{2} \frac{1}{\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^{q/p}}} \frac{1}{k^{1/p}}.$$

Для начала,

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} (z(k))^q \right)^{1/q} = \|z\|_q = \frac{R}{2} < +\infty.$$

Далее, видим гармонический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z(k))^p = +\infty, \quad \Rightarrow \quad \exists N: \sum_{k=1}^N (z(k))^p > (2n)^p.$$

Теперь рассмотрим набор «частичных последовательностей»

$$y(k) = \begin{cases} z(k), & k \leq N, \\ 0, & k > N. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим последовательность  $h(k) = (x_0 + y)(k)$ , для которой верно, что

1.  $\rho_q(h, x_0) = \|y\|_q \leq R/2$ , откуда следует  $\|h\|_p \leq n$ .
2.  $\|h\|_p \geq \|y\|_p - \|x_0\|_p > 2n - n = n$ , а тогда  $\|h\|_p > n$ , таким образом пришли к противоречию.

Полное пространство нельзя представить, как объединение нигде не плотных множеств, получается  $l_p$  не полно. Осталось доказать, что  $A_n$  замкнуто.

Пусть  $t$  – точка прикосновения. Тогда  $\forall \varepsilon > 0$  найдётся

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in A_n: \rho_q(t, x_\varepsilon) < \varepsilon, \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^N |t(k) - x_\varepsilon(k)|^q < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |t(k) - x_\varepsilon(k)| < \varepsilon^{1/q},$$

получается это правда и для

$$\Leftrightarrow \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \left( \sum_{k=1}^N |t(k)|^p \right)^{1/p} \leq t(k) - x_\varepsilon(k) + x_\varepsilon(k) \leq \left( \sum_{k=1}^N |t(k) - x_\varepsilon(k)|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^N |x_\varepsilon(k)|^p \right)^{1/p} \leq (N\varepsilon^{p/q})^{1/p} + n,$$

что стремится к  $n$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Таким образом  $\|t\|_p \leq n$ .

И, наконец, докажем, что не выполняется принцип равномерной ограниченности. Рассмотрим функционалы

$$F_n[x] = \sum_{k=1}^n x(k).$$

Верно, что

$$\forall x \in l_1 \quad |F_n[x]| \leq \|x\|_1.$$

По норме  $\|\cdot\|_2$  верно, что эти функционалы можно переписать в виде скалярного произведения  $(x, e_n)$ , где

$e_n = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0, \dots)$ :

$$F_n[x] = (x, e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{(k)}(e_n)_{(k)} = \sum_{k=1}^n x(k),$$

что является проявлением одной из теорем Рисса. Положив  $x = e_n$  видим, что норма достигается и  $\|F_n\| = n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Таким образом мы показали, что на таком пространстве не работает принцип равномерной сходимости.

## T18

Докажем, что в бесконечномерном банаховом пространстве  $E$  единичный шар не является компактным.

**Lem 1.18** (Лемма Рисса или лемма о перпендикуляре). *Если  $X_0$  – замкнутое линейное подпространство в нормированном пространстве  $X$ ,  $X_0 \neq X$ , тогда*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X: \|x_\varepsilon\| = 1, \quad \|x_\varepsilon - y\| \geq 1 - \varepsilon \quad \forall y \in X_0.$$

$\Delta$ . Найдётся  $z \in X \setminus X_0$ , положим  $\delta = \inf\{\|z - u\| \mid u \in X_0\} > 0$ . Тогда выберем

$$\varepsilon_0 > 0: \frac{\delta}{\delta + \varepsilon_0} > 1 - \varepsilon,$$

выберем  $y_0 \in X_0$  такой, что  $\|z - y_0\| < \delta + \varepsilon_0$ .

Далее, считая

$$x_\varepsilon = \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|}, \quad \forall y \in X_0.$$

Теперь оценим

$$\|x_\varepsilon - y\| = \frac{1}{\|z - y_0\|} \|z - y_0 - \|z - y_0\|y\| \geq \frac{\delta}{\delta + \varepsilon_0} > 1 - \varepsilon.$$

Заметим, что

$$v = y_0 + \|z - y_0\|y \in X_0, \quad \Rightarrow \quad \|z - v\| \geq \delta.$$

□

**Con 1.19.** В  $\forall X$  (бесконечномерном, нормированном пространстве)  $\exists (x_n): \|x_n\| = 1$  и  $\|x_n - x_k\| \geq 1, n \neq k$ . Как следствие все шары  $R > 0$  в  $X$  некомпактны.

$\Delta$ . Всякое бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку. Последовательность  $x_n$  строится по индукции с помощью леммы Рисса.

□

**Thr 1.20** (Теорема Хана-Банаха). Пусть  $E$  – банахово пространство,  $F \subset E$  – его линейное подпространство. Тогда всякий ограниченный линейный функционал  $\lambda \in F'$  продолжается до линейного функционала на всём  $E$  без увеличения его нормы.

**Con 1.21.** Для всякого банахова пространства  $E$  и его ненулевого элемента  $x \in E$  найдётся  $\lambda \in E'$ , такой что  $\|\lambda\| = 1$  и  $\lambda[x] = \|x\|$ .

**Con 1.22.** Естественное отображение банахова пространства в двойственное к его двойственному (второе двойственное)

$$E \mapsto E'', \quad x \mapsto (\lambda \mapsto \lambda(x))$$

является вложением, сохраняющим норму.

**Thr 1.23** (Теорема Радона-Никодима в  $\mathbb{R}^n$ ). Пусть неотрицательная конечная борелевская мера  $\mu$  на  $\mathbb{R}^n$  абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Тогда у меры  $\nu$  есть плотность, то есть борелевская  $f \geq 0$ , такая что для всякого борелевского  $X$   $\nu(X) = \int_X f(x) dx$ .

## T19

Выведем из теоремы Хана-Банаха, что всякое конечномерное подпространство  $V$  в банаховом пространстве  $E$  имеет замкнутое дополнение  $W \subseteq E$ , такое что  $E = V \oplus W$ .

**Thr 1.24.** Для всякого ненулевого элемента  $x$  нормированного пространства  $X$  найдётся такой функционал  $l$ , что  $\|l\| = 1$  и  $l[f] = \|f\|$ .

$\Delta$ . На одномерном пространстве  $Y$  порожденном  $x \in Y$  положим  $l_0(tx) = t\|x\|$ . Тогда  $l_0(x) = \|x\|$  и  $\|l_0\| = 1$ . Остается продолжить  $l$  на  $x$  с сохранением нормы.  $\square$

Из этой теоремы можно получить, что в случае бесконечномерного пространства  $X$  для всякого  $n$  найдутся такие векторы  $x_1, \dots, x_n \in X$  и функционалы  $l_1, \dots, l_n \in X^*$ , что  $l_i(x_j) = \delta_{ij}$ . В частности поэтому, сопряженное пространство тоже бесконечномерно.

**Сон 1.25.** Пусть  $X_0$  – конечномерное подпространство нормированного пространства  $X$ . Тогда  $X_0$  топологически дополняемо в  $X$ , т.е. существует такое замкнутое линейное подпространство  $X_1$ , что  $X$  является прямой алгебраической суммой  $X_0$  и  $X_1$ , а естественные алгебраические проекции  $P_0$  и  $P_1$  на  $X_0$  и  $X_1$  непрерывны.

$\Delta$ . Можно найти базис  $x_1, \dots, x_n$  пространства  $X_0$  и элементы  $l_i \in X^*$  с  $l_i(x_j) = \delta_{ij}$ . Положим

$$X_1 \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{i=1}^n \text{Ker } l_i, \quad P_0[x] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n l_i(x)x_i, \quad P_1[x] \stackrel{\text{def}}{=} x - P_0x.$$

Для всякого  $j$  имеем  $P_0[x_j] - l_j(x_j)x_j = x_j$ . В таком контексте становится понятно, что  $P_0|_{X_1} = 0$ , и  $X_0 \cap X_1 = \{0\}$ ,  $X = X_0 \oplus X_1$ , ибо  $x - P_0x \in X_1$  ввиду равенств  $l_j(x - P_0x) = l_j(x) - l_j(x)l_j(x_j) = 0$ . Непрерывность  $P_0$  и  $P_1$  понятна из определения, более того совпадают с алгебраическими проектированиями на  $X_0$  и  $X_1$ .  $\square$

## T20

Приведем пример замкнутого в топологии нормы множества  $X \subset E'$  (двойственное к некоторому банахову пространству), которое не замкнутое в его  $*$ -слабой топологии.

Ответ – сфера, докажем это. Покажем, что для  $X \subset E'$   $\text{cl } X = X$  и  $w.\text{cl } X \neq X$ . Что есть сфера? Сфера есть

$$S = \{f \in E' \mid \|f\| = 1\}, \quad \text{cl } S = S, \quad w.\text{cl } S = \bar{B}, \quad \bar{B} = \{f \in E' \mid \|f\| \leq 1\}.$$

Введём дополнение  $S_c \stackrel{\text{def}}{=} E' \setminus S$ , и покажем, что оно открыто.

Выберем  $g \in S_c$  с  $\|g\| < 1$  и  $\varepsilon = 1 - \|g\| > 0$ . Пусть  $h \in B_\varepsilon(g)$ , более того

$$\|h\| = \|g + h - g\| \leq \|g\| + \|h - g\| < 1, \quad \Rightarrow \quad B_\varepsilon(g) \subseteq S_c.$$

Далее, пусть  $g \in S_c$  и  $\|g\| > 1$ , тогда  $\varepsilon = \|g\| - 1 > 0$ . Выберем  $h \in B_\varepsilon(g)$ , тогда

$$\|g\| = \|h + g - h\| \leq \|h\| + \|g - h\|, \quad \Rightarrow \quad \|h\| \geq \|g\| - (\|g\| - 1) = 1,$$

получается  $\|h\| > 1$  и  $B_\varepsilon(g) \subseteq S_c$ . Таким образом  $S_c$  открыто,  $S$  замкнуто.

Докажем теперь, что  $w.\text{cl } S = \bar{B}$ . Во-первых  $\forall g_0 \notin B$  верно, что

$$\|g_0\| > 1, \quad \exists x_0 \in E, \exists \varepsilon_0 > 0 \forall g \in U_{x_0, g_0, \varepsilon_0} \quad \|g\| > 1, \quad \Rightarrow \quad w.\text{cl } S \subseteq B.$$

В частности, покажем, что

$$\|g\| \geq |g[x_0]| = |g[x_0] - g_0[x_0] + g_0[x_0]| \geq |g_0[x_0]| - |g[x_0] - g_0[x_0]|,$$

что уже можно сделать строго больше:

$$\|g\| > |g_0[x_0]| - \varepsilon_0 = 1,$$

где  $\varepsilon_0 = |g_0[x_0]| - 1$ .

Пусть теперь  $\forall$  фиксированного  $g_0 \in \bar{B}$  с  $\|g_0\| < 1$ . Тогда

$$\exists U(g_0): g_0 \in \bigcap_{k=1}^N U_{x_k, g_k, \varepsilon_k} \subset U(g_0).$$

Утверждается, что существует ненулевой  $g$  такой, что  $\forall t \in \mathbb{R}$  с  $g_0 + tg \in U(g_0)$ .

Осталось построить цилиндрическое множество по которому «прогуляемся» до нужной нам области. Пусть

$$\varphi(t) = \|g_0 + tg\| \in C(\mathbb{R}), \quad |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq |t_1 - t_2| \cdot \|g\|.$$

Понятно, что  $\varphi(0) = \|g_0\| < 1$ . Тогда  $\varphi(t) \geq |t| \cdot \|g\| - \|g_0\| \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . По теореме о промежуточных значениях непрерывной функции

$$\exists t_0 \in \mathbb{R}: \varphi(t_0) = 1, \quad \Rightarrow \quad g_0 + t_0g \in S.$$

Получается, что взяв точку из шара, и взяв её слабую окрестность, мы находим непустое пересечение этой окрестности со сферой. Из этого следует, что  $g_0 \in w.\text{cl } S$ , а тогда и  $\bar{B} \subseteq w.\text{cl } S$ , которое содержится в замкнутом шаре. Вывод:  $\bar{B} = w.\text{cl } S$ .

## T21

Докажем, что  $*$ -слабой топологии  $E'$  компактность некоторого множества влечет его замкнутость.

**Lem 1.26.** *Слабая топология хаусдорфова.*

Пусть  $K$  – компакт в ХТП  $X$ . Пусть  $x \in X \setminus K$ . Для  $\forall y \in K \exists U_y, V_y$  (открытые) такие, что  $U_y \cap V_y = \emptyset$ , где  $x \in U_y$  и  $y \in V_y$ .

Рассмотрим систему  $S = \{V_y \mid y \in K\}$  – открытое покрытие компакта  $K$ . Также  $S_0 = \{V_y \mid y \in F\}$ ,  $F$  – конечное подмножество  $K$  (т.к.  $K$  – компакт).

Рассмотрим множество  $U = \bigcap_{y \in F} U_y$  – открытая окрестность точки  $x$ . Утверждается, что  $U \cap K = \emptyset$ . Перебирая все точки  $x \in K$  получаем доказательство исходного утверждения.

## T22

Хочется найти такое топологическое пространство, в котором есть компактные, но не замкнутые подмножества. В качестве такого ~~хаусдорфова~~ топологического пространства можем выбрать  $X = \{a, b\}$ , базой топологии  $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ .

Пример выглядит искусственным, но, на мой взгляд, большинство примеров нехаусдорфовых пространств выглядят очень искусственно.

## 1.3 Распределения (обобщенные функции)

Работать будем с  $\mathcal{D}(X) \stackrel{\text{def}}{=} C_0^\infty(X)$ ,  $X \subseteq \mathbb{R}$ . Функция называется *финитной*, если  $\text{supp } \varphi = K \subset X$ ,

$$\text{supp } \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \bar{Y}, \quad Y = \{x \in X \mid \varphi(x) \neq 0\}.$$

Далее будем считать  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \equiv \mathcal{D}$ .

Вспомним, что  $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \varphi$  означает  $\exists [a, b] \supset \text{supp } \varphi_n$  и  $\text{supp } \varphi$ , а также  $\varphi_n^{(k)} \xrightarrow{[a, b]} \varphi^{(k)}$ , и тогда пишут, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} \varphi$ .

Хочется определить пространство линейных непрерывных функционалов. Далее, договоримся обозначать  $f(\varphi) \equiv f[\varphi] \stackrel{\text{def}}{=} \langle f \mid \varphi \rangle$ .

**Def 1.27.** Функционал  $f: \mathcal{D} \mapsto \mathbb{C}(\mathbb{R})$  *непрерывен* в  $\mathcal{D}'$ , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} \varphi, \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f \mid \varphi_n \rangle = \langle f \mid \varphi \rangle.$$

**Def 1.28.** Всякий линейный функционал из  $\mathcal{D}'$  называют *обобщенной функцией* на  $\mathcal{D}$ .

Каждая локально-интегрируемая функция порождает некоторую обобщенную, их назовём *регулярными*. Если не существует такой локально-интегрируемой функции в  $\mathcal{D}$  для функционала из  $\mathcal{D}'$ , то это *сингулярная обобщенная функция*. Стоит заметить, что регулярные обобщенные функции плотны в  $\mathcal{D}'$ , а их пополнением являются сингулярные.

Например,  $\delta(x)$  можно представить как предел РОФ, где под пределом имеется ввиду

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} f \quad (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}', \quad f \in \mathcal{D}', \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n \mid \varphi \rangle = \langle f \mid \varphi \rangle,$$

в частности тогда пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \stackrel{\mathcal{D}'}{=} f \quad \Leftrightarrow \quad *w. \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f.$$

## T23

Найдём пределы последовательностей регулярных элементов пространства  $\mathcal{D}'$ , при

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \cos(nx) \mid \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(nx) \varphi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{inx} \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Re } \hat{\varphi}(n) = \langle 0 \mid \varphi \rangle \stackrel{\mathcal{D}'}{=} 0.$$

По той же причине

$$*w. \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(nx) = 0.$$

Найдём некоторые пределы в терминах обобщенных функций. В частности,

$$*w \lim_{a \rightarrow +0} \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} = *w \lim_{B_a} \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)},$$

где  $\mathcal{B}_a$  – база, состоящая из всех последовательностей, стремящихся к 0. В частности, при  $a = 1/n$ , перейдём к T24(a). Прямым вычислением, находим

$$\left\langle \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} \middle| \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\varphi(x)}{\pi(a^2 + x^2)} dx = \left( \lim_{\Lambda_+ \rightarrow +\infty} \int_0^{\Lambda_+} + \lim_{\Lambda_- \rightarrow -\infty} \int_{\Lambda_-}^0 \right) \frac{a\varphi(x)}{\pi(a^2 + x^2)} dx,$$

что интегрируя по частям можем свести к  $\arctg x$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \lim_{\Lambda_+ \rightarrow +\infty} \left\{ \arctg \frac{x}{a} \varphi(x) \middle|_0^{\Lambda_+} - \int_0^{\Lambda_+} \left( \arctg \frac{x}{a} \right) \varphi'(x) dx \right\} + \frac{1}{\pi} \lim_{\Lambda_- \rightarrow -\infty} \left\{ \arctg \frac{x}{a} \varphi(x) \middle|_{\Lambda_-}^0 - \int_{\Lambda_-}^0 \left( \arctg \frac{x}{a} \right) \varphi'(x) dx \right\} = \\ = -\frac{1}{2} \varphi(x) \middle|_0^{\infty} + \frac{1}{2} \varphi(x) \middle|_{-\infty}^0 = \varphi(0) = \langle \delta(x) | \varphi \rangle, \end{aligned}$$

таким образом мы нашли, что

$$\left\langle \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} \middle| \varphi \right\rangle = \langle \delta(x) | \varphi \rangle.$$

Второй пункт сводится к интегрированию

$$\frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{1}{t} \sin \frac{t}{a} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{x/a} \frac{d \sin y}{dy} dy = \frac{1}{\pi} \text{Si} \left( \frac{x}{a} \right).$$

Вспоминая, что

$$\frac{1}{\pi} \text{Si}(+\infty) = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\pi} \text{Si}(-\infty) = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{\pi}{2} \right), \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x} \stackrel{\mathcal{D}'}{=} \delta(x).$$

## T25

Теперь найдём предел вида

$$*w. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 x}{(1 + n^2 x^2)^2} = *w. \lim_{a \rightarrow +0} \frac{xa}{(x^2 + a^2)^2} = F,$$

для этого

$$\left\langle \frac{xa}{(x^2 + a^2)^2} \middle| \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xa}{(x^2 + a^2)^2} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -\frac{1}{2} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{a}{x^2 + a^2} \right) \varphi(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\varphi'(x)}{x^2 + a^2} dx \xrightarrow{a \rightarrow +0} \frac{\pi}{2} \varphi'(0),$$

что, учитывая предыдущую задачу, позволяет записать

$$\frac{\pi}{2} \langle \delta(x) | \varphi' \rangle = \left\langle \left( -\frac{\pi}{2} \right) \delta'(x) \middle| \varphi \right\rangle, \quad \Rightarrow \quad w. \lim_{a \rightarrow +0} \frac{xa}{(x^2 + a^2)^2} = -\frac{\pi}{2} \delta'(x),$$

## T26

Алгоритмично, обработаем выражение

$$\langle d | \varphi \rangle = \langle g \cdot \delta | \varphi \rangle = \langle \delta | g \cdot \varphi \rangle = g(0)\varphi(0) = \langle g(0)\delta | \varphi \rangle,$$

так приходим к упрощенному выражению вида

$$g(x)\delta(x) \stackrel{\mathcal{D}'}{=} g(0)\delta(x).$$

Во втором пункте  $f = g\delta'$ , упростим выражение

$$\begin{aligned} \langle f | \varphi \rangle &= \langle g\delta' | \varphi \rangle = \langle \delta' | g\varphi \rangle = -\langle \delta | (g\varphi)' \rangle = -\langle \delta | g'\varphi + g\varphi' \rangle = \\ &= -g'(0)\varphi(0) - g(0)\varphi'(0) = -g'(0)\langle \delta | \varphi \rangle - g(0)\langle \delta | \varphi' \rangle = \langle g(0)\delta' - g'(0)\delta | \varphi \rangle, \end{aligned}$$

таким образом приходим к равенству в  $\mathcal{D}'$ :

$$g(x)\delta'(x) \stackrel{\mathcal{D}'}{=} -g'(0)\delta(x) + g(0)\delta'(x).$$

## T27

**Lem 1.29.** В  $\mathcal{D}'$  верно, что

$$(g \cdot f)^{(m)} = \sum_{k=0}^m C_m^k g^{(k)} f^{(m-k)}.$$

Найдём производные отдельных «строительных блоков»:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \tilde{H}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Докажем, что

$$\text{sign } x = 2\tilde{H}(x) - 1, \quad \Rightarrow \quad \text{sign}'(x) = 2\tilde{H}'(x) = 2\delta(x).$$

Первый шаг, по определению,

$$\langle \text{sign}'(x) | \varphi \rangle = -\langle \text{sign } x | \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sign } x \varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^0 \varphi'(x) dx - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = 2\varphi(0) = \langle 2\delta(x) | \varphi \rangle.$$

Теперь покажем, что

$$|x|' = (x \text{sign } x)' = \text{sign } x + x \text{sign}'(x) = \text{sign } x + x 2\delta(x) = \text{sign } x.$$

Также можем найти вторую производную

$$|x|'' = \text{sign}'(x) = 2\delta(x).$$

**Пункт а.** Теперь легко посчитать, что

$$(g(x) \text{sign } x)' = g'(x) \text{sign } x + g(x) \text{sign}'(x) = g'(x) \text{sign } x + 2g(0)\delta(x),$$

где равенства подразумеваются в пространстве  $\mathcal{D}'$ . Для второй производной, находим

$$\begin{aligned} (g(x) \text{sign } x)'' &= g'' \text{sign } x + 2g'(x) \text{sign}'(x) + g(x) \text{sign}''(x) = g''(x) \text{sign } x + 4g'(0)\delta(x) + 2g(0)\delta'(x) = \\ &= g''(x) \text{sign } x + 4g'(0)\delta(x) + 2(-g'(0)\delta(x) + g(0)\delta'(x)) = g''(x) \text{sign } x + 2g'(0)\delta(x) + 2g(0)\delta'(x). \end{aligned}$$

**Пункт б.** Сразу подставим значение  $g(x) = (x+1)e^{|x|}$ :

$$g' = e^{|x|} (1 + (x+1) \text{sign } x),$$

$$g'' = e^{|x|} (1 + \text{sign } x + 2\delta(x)(x+1) + \text{sign } x + x + 1) = 2e^{|x|} (1 + x/2 + \text{sign } x + \delta(x)).$$

## T28

Докажем, что слабая сходимост  $\delta_{x_n} \rightarrow \delta_{x_0}$  эквивалентна обычной сходимости  $x_n \rightarrow x_0$ . Другими словами есть набор  $f_n(x) = \delta(x - x_n)$  которые в пределе сходятся к  $f(x) = \delta(x - x_0)$ .

По определению,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \delta(x - x_n) | \varphi \rangle = \langle \delta(x - x_0) | \varphi \rangle.$$

В силу непрерывности функций в  $\mathcal{D}$ :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) \varphi(x_0).$$

Наконец, это можно переписать в виде

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varphi, \varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N(\varphi, \varepsilon) \quad |\varphi(x_n) - \varphi(x_0)| < \varepsilon.$$

Это было дано. Хочется показать, что из этого следует  $x_n \rightarrow x_0$ , или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad |x_n - x_0| < \varepsilon.$$

Докажем от противного, пусть  $x_n \rightarrow x_1 \neq x_0$ . Тогда пусть  $\varkappa = |x_1 - x_0|/3$ , выберем функцию  $\varphi = \chi_{X_0}(x) + -\chi_{X_1}(x)$ , где  $X_0 = [x_0 - \varkappa, x_0 + \varkappa]$ ,  $X_1 = [x_1 - \varkappa, x_1 + \varkappa]$ . В таком случае, в пределе,  $\langle f_n(x) | \varphi \rangle = -1$ , при этом по условию  $\langle f(x) | \varphi \rangle = 1$ , что приводит нас к противоречию.

## Пример (КЗ, 21.75)

Найдём

$$I = \langle (\ln x)' | \varphi \rangle = -\langle \ln |x| | \varphi \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \ln |x| \varphi'(x) dx = \langle \text{smth} | \varphi \rangle,$$

однако просто вернуть производную на логарифм будет нехорошо. Запишем это так:

$$I = -\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \right) \ln |x| \varphi'(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [\ln \varepsilon \cdot (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))] + \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$



Здесь заметим, что

$$\ln \varepsilon \cdot (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) = 2\varepsilon \ln \varepsilon \cdot \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)}{2\varepsilon} = 0 \cdot \varphi'(0) = 0,$$

тогда

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx,$$

но  $1/x$  – не является локально интегрируемой в 0 функцией. Итого

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \left\langle \mathcal{P} \frac{1}{x} \middle| \varphi \right\rangle.$$

Другими словами мы установили, что

$$(\ln |x|)' \stackrel{D'}{=} \mathcal{P} \frac{1}{x}, \Leftrightarrow (\ln |x|)' \stackrel{*w.}{=} \mathcal{P} \frac{1}{x}, \Leftrightarrow \langle (\ln |x|)' | \varphi \rangle = \left\langle \mathcal{P} \frac{1}{x} \middle| \varphi \right\rangle.$$

### Пример (КЗ, 21.84)

Уместен вопрос: когда верно, что

$$\langle \lambda'_f | \varphi \rangle = \langle \lambda_{f'} | \varphi \rangle.$$

Далее пусть  $\frac{d}{dx}$  – классическая производная,  $f'$  – производная обобщенной функции, тогда наш вопрос будет выглядеть, как

$$\langle f' | \varphi \rangle = \left\langle \frac{df}{dx} \middle| \varphi \right\rangle + \sum_{k=1}^n \Delta f(x_k) \langle \delta(x - x_k) | \dots \rangle,$$

где  $x_k$  – точки разрыва классической функции  $f$ , а

$$\Delta f(x_k) = f(x_k + 0) - f(x_k - 0) \in \mathbb{R}.$$

В частности рассмотрим случай с  $x_k = 0$ . Тогда

$$\langle f' | \varphi \rangle = -\langle f | \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx,$$

что удобно расписать в виде

$$-\left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty}\right) f(x) \varphi'(x) = -f(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - f(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{-0} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df(x)}{dx} \varphi(x) dx = \Delta f(0) \langle \delta(x) | \varphi \rangle + \left\langle \frac{df}{dx} \middle| \varphi \right\rangle.$$

### Т29 и Т30

Сначала докажем, что всякое распределение  $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  имеет первообразную, то есть такую  $\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , что  $\mu' = \lambda$  в смысле дифференцирования обобщенных функций. Потом докажем, что любые две первообразные одного и того же распределения отличаются на константу.

**Лем 1.30.** Пусть  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  и так оказалось, что  $f' = 0$ , тогда  $f$  имеет вид  $\langle f | \varphi \rangle = c \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$ .

△. Утверждается, что  $c = \langle f | \varphi_0 \rangle$  годится, где

$$\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x) dx = 1.$$

Итак, любую функцию  $\varphi \in \mathcal{D}$  можно представить в виде

$$\varphi = -\theta \cdot \varphi_0 + \theta \cdot \varphi_0, \quad \theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

Зададим функцию от вида

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^x (\varphi(t) - \theta \varphi_0(t)) dt \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Собирая всё вместе находим

$$\psi' = \varphi - \theta \cdot \varphi_0, \quad \Rightarrow \quad \langle f | \varphi \rangle = \langle f | \psi' + \theta \varphi_0 \rangle = \langle f | \psi' \rangle + \theta \langle f | \varphi_0 \rangle,$$

где  $-\langle f' | \psi \rangle = 0$  по условию. Также  $\langle f | \varphi_0 \rangle = c$ , тогда верно, что

$$\psi' = c \cdot \theta = c \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx, \quad \text{Q. E. D.}$$

□

**Thr 1.31.** Для всякой обобщенной функции  $f$  из  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  существует  $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  такая, что  $g' \stackrel{\mathcal{D}'}{=} f$ . Для всякой другой  $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  верно, что если  $h' \stackrel{\mathcal{D}'}{=} f$ , то  $g - h \stackrel{\mathcal{D}'}{=} c$ .

$\triangle$ . Точно также берем некоторую  $\varphi, \psi$ . Положим, по определению, что

$$\langle g | \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} -\langle f | \Psi \rangle,$$

для которого хотелось бы показать линейность и непрерывность.

Для этого рассмотрим

$$\langle g | \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = -\langle f | \psi_1 + \psi_2 \rangle = -\left\langle f \left| \int_{-\infty}^x (\varphi_1 + \varphi_2 - (\theta_1 + \theta_2)\varphi_0) dt \right. \right\rangle = -\langle f | \psi_1 \rangle - \langle f | \psi_2 \rangle.$$

Осталось показать непрерывность, точнее показать, что линейной отображение  $\varphi \rightarrow \psi$  непрерывно на  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ .

Рассмотрим в частности  $\varphi_k \stackrel{\mathcal{D}'}{\rightarrow} 0$ , для них  $\theta_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Построим теперь  $\varphi_k - \theta_k \varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  и имеют нулевые интегралы. Более того

$$\hat{l}(\varphi_k) = \psi_k = \int_{-\infty}^x (\varphi_k(t) - \theta_k \varphi_0(t)) dt \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Итого  $\psi_k \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , что и завершает доказательство непрерывности. □

### Т31

**Thr 1.32.** Для  $\forall$  СОФ  $g \in \mathcal{D}'$ , с носителем в открытом шаре, существует такая РОФ  $f$  и  $k \in \mathbb{N}$ , что  $f^{(k)} = g$ .

**Def 1.33.** Носитель обобщенной функции  $\text{supp } f$  – дополнение к объединению всех открытых множеств  $U$ , на которых  $f$  равна нулю. Обобщенная функция  $f$  равна нулю на  $U$ , если  $\langle f | \varphi \rangle = 0$  для всех  $\varphi$  таких, что  $\text{supp } \varphi$  содержится в  $U$ .

Примером такой функции (которая не является  $m$ -й производной РОФ), носитель которой не помещается в открытый шар, может служить распределение вида

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{(k)}(x - k).$$

Докажем от противного, пусть  $g^{(m)} = f$  и  $g$  – РОФ.

Ну, по определению,

$$\langle (-1)^m g^{(m)} | \varphi \rangle = (-1)^m \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(x - k)(-1)^k = (-1)^m \sum_{n=N}^N \varphi^{(k)}(x - k)(-1)^k.$$

Распишем чуть подробнее свёртку с  $g$ :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \varphi^{(m)}(x) dx = (-1)^m \sum_{k=0}^N \varphi^{(k)}(k)(-1)^k.$$

Теперь выберем  $\varphi$ , такую, что это ступенька гаусс вокруг  $x = m$ , тогда

$$I = (-1)^m (-1)^m \varphi^{(m)}(m) = \langle \delta(x - m) | \varphi^{(m)} \rangle,$$

таким образом пришли к противоречию.

## 1.4 Преобразование Фурье обобщенных функций

Для преобразования Фурье над пространством обобщенных функций медленного роста  $S$  – пространства Шварца, верны следующие утверждения:

$$\langle F[f] | \varphi \rangle = \langle f | F[\varphi] \rangle, \quad \langle F^{-1}[f] | \varphi \rangle = \langle f | F^{-1}[\varphi] \rangle, \quad F[f^{(n)}] = (ix)^n F[f], \quad F^{(n)}[f] = (-i)^n F[x^n f].$$

Верно, что  $\mathcal{D} \subset S$ . Также важно держать в голове, что

$$F[1] = \sqrt{2\pi}\delta.$$

### Т32

Найдём преобразование Фурье в  $S'$  некоторых функций.

**Синус.** Найдём преобразование Фурье вида

$$\begin{aligned}\langle F^{-1}[\delta(x - x_0)] | \varphi \rangle &= \langle \delta(x - x_0) | F^{-1}[\varphi] \rangle = F^{-1}[\varphi](x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \varphi(t) e^{ix_0 t} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) \varphi(t) = \left\langle \frac{e^{ix_0 t}}{\sqrt{2\pi}} \middle| \varphi \right\rangle, \quad \Rightarrow \quad F^{-1}[\delta(x - x_0)](t) = \frac{e^{ix_0 t}}{\sqrt{2\pi}}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\langle F[e^{ix_0 t}] | \varphi \rangle = \langle F[\sqrt{2\pi} F^{-1}[\delta(x - x_0)]] | \varphi \rangle,$$

тогда можем перегруппировать, и найти

$$\langle F[e^{ix_0 t}] | \varphi \rangle = \langle \sqrt{2\pi} \delta(x - x_0) | \varphi \rangle.$$

Нас, правда, интересует Фурье от синуса

$$\langle F[\sin(x_0 t)] | \varphi \rangle = \left\langle F \left[ \frac{e^{ix_0 t} - e^{-ix_0 t}}{2i} \right] \middle| \varphi \right\rangle = \left\langle \sqrt{\frac{\pi}{2}} i (\delta(x + x_0) - \delta(x - x_0)) \middle| \varphi \right\rangle.$$

Тогда  $\mathcal{D}'$  справедливо равенство вида

$$F[\sin(x_0 t)] \stackrel{\mathcal{D}'}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2}} i (\delta(x + x_0) - \delta(x - x_0)).$$

**Дельта-функция.** Пользуясь формулой  $n$ -й производной

$$\begin{aligned}\langle F[\delta^{(n)}(x)] | \varphi \rangle &= \langle \delta^{(n)}(x) | F[\varphi] \rangle = (-1)^n F^{(n)}[\varphi](0) = \frac{(-1)^n}{i^n} F[x^n \varphi](0) = \left\langle \frac{(-1)^n}{i^n} \delta(x) \middle| F[x^n \varphi] \right\rangle = \\ &= i^n \langle F[\delta(x)] | x^n \varphi \rangle = \langle (ix)^n F[\delta(x)] | \varphi \rangle = \left\langle \frac{(ix)^n}{\sqrt{2\pi}} \middle| \varphi \right\rangle,\end{aligned}$$

таким образом пришли к равенству вида

$$F[\delta^{(n)}(x)] \stackrel{\mathcal{D}'}{=} \frac{(ix)^n}{\sqrt{2\pi}}.$$

**Функция Хевисайда.** Для начала найдём преобразование Фурье функции  $\theta(x)e^{-tx}$  при  $t > 0$

$$F[\theta(x)e^{-tx}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-x(t+iy)} dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}(y - it)}.$$

Покажем теперь, что в  $S'$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \theta(x)e^{-tx} = \theta(x).$$

Действительно, для каждой функции  $\varphi \in S$  и любого числа  $A$  имеем

$$|\langle \theta(x) | \varphi(x) \rangle - \langle \theta(x)e^{-tx} | \varphi(x) \rangle| = \left| \int_0^\infty (1 - e^{-tx}) \varphi(x) dx \right| \leq \left| \int_0^A (1 - e^{-tx}) \varphi(x) dx \right| + \left| \int_A^\infty (1 - e^{-tx}) \varphi(x) dx \right|.$$

Теперь зафиксируем  $\sigma \in S$  и какое-либо число  $\varepsilon > 0$ . В силу абсолютной интегрируемости  $\varphi$ , существует  $A > 0$  такое, что  $\int_A^{+\infty} < \varepsilon/2$ , тогда

$$\left| \int_A^\infty (1 - e^{-tx}) \varphi(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем теперь  $t_0 > 0$  так, чтобы при  $0 < t < t_0$  было справедливо неравенство

$$(1 - e^{-tA}) \int_0^A |\varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \Rightarrow \quad |\langle \theta(x) | \varphi(x) \rangle - \langle \theta(x)e^{-tx} | \varphi(x) \rangle| < \varepsilon.$$

Таким образом утверждение про  $\lim_{t \rightarrow +0} \theta(x)e^{-tx} = \theta(x)$  верно.

В силу непрерывности преобразования Фурье

$$\lim_{t \rightarrow +0} F[\theta(x)e^{-tx}] = F[\theta(x)], \quad \Rightarrow \quad F[\theta(x)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{i}{y - it},$$

причём мы сразу утверждаем, что  $S'$  предел существует, и, кстати, обозначается за  $\frac{i}{y - i0}$ . Тогда

$$F[\theta(x)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{y - i0}.$$

### Т33

Докажем, что если  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  и преобразование Фурье  $F[f] \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , то  $f \equiv 0$ .

По Зоричу, если есть некоторое преобразование сигнала

$$\hat{f}(\omega) \equiv F[f](\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\pi k}{a}\right) \exp\left(-i\frac{\pi k}{a}\omega\right),$$

где  $\hat{f}(\omega) = 0$  за пределами  $|\omega| > a$ , то мы приходим ряду с некоторыми отсчётными значениями. Но, так как  $f \in \mathcal{D}$ , то можем записать тригонометрический полином вида

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} \sum_{k=-N}^N f\left(\frac{\pi k}{a}\right) \exp\left(-i\frac{\pi k}{a}\omega\right) = 0,$$

ведь у конечного полинома не может быть континуально нулей.

### Теорема Котельникова

Рассмотрим получаемый сигнал  $f(t)$  с финитным спектром, отличный от нуля только для  $\omega < a > 0$ . Итак,  $\hat{f}(\omega) \equiv 0$  при  $|\omega| > a$ , поэтому представление

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

для функции с финитным спектром сводится к интегралу лишь по промежутку  $[-a, a]$ . На этом отрезке функцию  $\hat{f}(\omega)$  разложим в ряд Фурье

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\hat{f}) \exp\left(i\frac{\pi\omega}{a}k\right),$$

по полной и ортогональной система на этом отрезке. Для коэффициентов этого ряда можем получить простое выражение вида

$$c_k(\hat{f}) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \hat{f}(\omega) \exp\left(i\frac{\pi\omega}{a}k\right) d\omega = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} f\left(-\frac{\pi}{a}k\right).$$

Собирая всё вместе находим, что

$$f(t) = \frac{1}{2a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi k}{a}\right) \int_{-a}^a \exp\left(i\omega\left(t - \frac{\pi k}{a}\right)\right) d\omega.$$

Вычисляя эти интегралы и приходим к формуле Котельникова:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi k}{a}\right) \frac{\sin a\left(t - \frac{\pi k}{a}\right)}{a\left(t - \frac{\pi k}{a}\right)}.$$

Таким образом, для восстановления сообщения, опиописываемого функцией с финитным спектром, сосредоточенным в полосе частот  $|\omega| < a$  достаточно передать по каналу связи лишь значения  $f(k\Delta)$  (называемые *отсчётными* значениями) данной функции через равные промежутки времени  $\Delta = \pi/a$ .

### Т34

Докажем, что преобразование Фурье в  $S'$  переводит распределение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{2\pi n} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n.$$

**Thr 1.34** (Формула Пуассона). *Так называется следующее соотношение:*

$$\sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n).$$

$\Delta$ . Формула получается при  $x = 0$  из равенства вида

$$\sqrt{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n) e^{inx},$$

которое мы и докажем.

Поскольку  $\varphi, \hat{\varphi} \in S$ , ряды сходятся абсолютно и равномерно по  $x$  на  $\mathbb{R}$ . Также чтоит заметить, что

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n)$$

бесконечно гладкая и  $2\pi$ -периодическая. Пусть  $\{\hat{c}_k(f)\}$  – её коэффициенты Фурье по ортонормированной системе  $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ . Тогда

$$\hat{c}_k(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)e^{ikx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \varphi(x)e^{ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{ikx} dx \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\varphi}(k).$$

Но ряд фурье  $f$  сходится к ней в любой точке  $x \in \mathbb{R}$ , значит в любой точке  $x \in \mathbb{R}$  справедливо соотношение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n) = f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_n(f) \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n) e^{ikx}, \text{ Q. E. D.}$$

□

Тогда в пределах задания можем переписать это в терминах обобщенных функций

$$\sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \delta(x - 2\pi n) | \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \delta(x - n) | F[\varphi] \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle F[\delta(x - n)] | \varphi \rangle.$$

Тогда приходим к выражению вида

$$F \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n).$$

Вообще  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) = G$  называют *решеткой Дирака*.

Утверждается, что  $G_N$  сходится в  $S'$  к  $G \forall \varphi$ . В частности,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle G_N(x) | \varphi \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) \middle| \varphi \right\rangle,$$

так что ряд действительно сходится и всё хорошо.