Домашнее задание II курса «Теория поля»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *17 мая 2021 г.*

Содержание

1 Общие сведения II

Электростатика. Запишем действие взаимодействия S_{int}

$$S_{\text{int}} = -\frac{e}{c}\int d\tau\, u^\mu A_\mu,$$

учитывая $u^\mu = fx^\mu/d\tau$:

$$S_{\text{int}} = -\frac{1}{c}\int d^3V\,\rho\int d\tau\,\frac{dx^\mu}{d\tau}A_\mu = -\frac{1}{c}\int dt\, d^3V\,\rho\frac{dx^\mu}{dt}A_\mu,$$

что можем переписать в случае неподвижных зарядов ($\frac{dx^\mu}{dt} = (c,\ \vec{0})^{\mathrm{T}}$), как

$$S_{\text{int}} = -\int dt\int d^3V\cdot\rho\varphi(\boldsymbol{r}),\qquad\Rightarrow\qquad L_{\text{int}} = -\int d^3V\,\rho A_0(\boldsymbol{r}),\qquad\Rightarrow\qquad U = \int d^3r\,\rho(\boldsymbol{r})A_0(\boldsymbol{r}).$$

Thr 1.1 (Теорема Адемолло-Гатто)**.** *Если к исходному действию S_0, привлдящему к периодическому движению, и, следовательно, к адиабатическому инварианту $\mathcal{I}$, добавлено возмущение с малым параметром λ, так что полной действие $S = S_0 + \lambda\int V(q,\dot q)\,dt$, то инвариант, по-прежнему, сохарняется с точностью до членов второго порядка малости по λ: $\frac{d}{dt}\mathcal{I} = O(\lambda^2)$.*

Тензор энергии-импульса поля:

$$T_\mu^\nu = \frac{1}{4\pi c}F^{\nu\lambda}F_{\lambda\mu} + \frac{1}{16\pi c}F^2\delta_\mu^\nu,$$

где $F^2 = F_{ij}F^{ij}$. В частности, пространственная и временная компоненты

$$T_0^0 = \frac{1}{8\pi c}(\boldsymbol{H}^2 + \boldsymbol{E}^2),\qquad T_0^\alpha = \frac{1}{4\pi c}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right]^\alpha.$$

Баланс энергии можем записать в интегральном и в дифференциальном виде:

$$\frac{d}{dt}\left(W_{\text{ч}} + \int d^3r\, cT_0^0\right) + \int d^3r\ \operatorname{div}\boldsymbol{S} = 0,\qquad \boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right],\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} + \frac{d}{dt}cT_0^0 + \operatorname{div}\boldsymbol{S} = 0.$$

Аналогично, баланс импульса:

$$\frac{d}{dt}\left(p^\beta + \frac{1}{c^2}\int d^3r\, S^\beta\right) = \int d^3r\, c\nabla_\alpha T_\beta^\alpha,\qquad \frac{1}{c}\left(j_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}\right)^\beta + \frac{1}{c^2}\frac{dS^\beta}{dt} = c\nabla_\alpha T_\beta^\alpha.$$

2 Второе задание

T8

Заряд электрона распределен с плотностью

$$\rho(r) = \frac{e}{\pi a^3}\exp\left(-\frac{2r}{a}\right).$$

Найдём энергию взаимодействия электронного облака с ядром в случае ядра, как точечного заряда, и в случае ядра, как равномерно заряженного шара радиуса r_0. Точнее найдём значение следующего выражения:

$$S_{\text{int}} = -\frac{e}{c}\int d\tau\, u^\mu A_\mu,\qquad\Rightarrow\qquad U = \int d^3r\,\rho(\boldsymbol{r})A_0(\boldsymbol{r}).$$

Ядро, как точечный заряд. Вспоминая, что $\boldsymbol{E} = -\nabla A_0$ и $\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho_N$, тогда $\nabla(-\nabla A_0) = -\Delta A_0 = 4\pi\rho_N$, тогда плотность заряда ядра

$$\rho_N = -e\cdot\delta(\boldsymbol{r}).$$

Для электронного облака известно $\rho(\boldsymbol{r})$, тогда

$$-\Delta A_0 = -4\pi e\,\delta(\boldsymbol{r}),\qquad\Rightarrow\qquad A_0 = -\frac{e}{r},$$

и, соответсвенно,

$$U = \int d^3r\,\frac{e}{\pi a^3}e^{-2r/a}\cdot\left(-\frac{e}{r}\right) \overset{\text{sp. c.s.}}{=} -\frac{e^2}{\pi a^3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-1}^{+1}d\cos\theta\int_0^\infty r^2\,dr\frac{1}{r}e^{-2r/a},$$

упрощая выражение, переходим к интегралу вида

$$U = -\frac{e^2}{\pi a^3}\cdot 2\Pi\cdot 2\cdot\int_0^\infty dr\, re^{-2r/a} = -\frac{e^2}{a},$$

где интеграл мы взяли по частям:

$$\int_0^\infty dt\, t^n e^{-t} = e^{-t}t^n\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}n\, dt = \ldots = n!\, .$$

Ядро, как шар. Здесь стоит разделить пространство на две области:

$$A_0 = \begin{cases} -e/r, & r \geqslant r_0, \\ \dfrac{e}{2r_0^3}r^2 - \dfrac{3}{2}\dfrac{e}{r_0}, & r \leqslant r_0, \end{cases}$$

где A_0 для $r \leqslant r_0$ находится, как решение уравнения Пуассона ($\rho_N = \mathrm{const}$):

$$\int_0^{r_0} d^3r\ \rho_N = -e, \qquad \rho_N = -\frac{3}{4\pi}\frac{e}{r_0^3}, \qquad \Delta A_0 = -3\frac{e}{r_0^3}. \quad A_0(r_0) = -\frac{e}{r_0}.$$

Так как садача симметрична относительно любых поворотов, то $A_0 \equiv A_0(r)$, тогда

$$\Delta A_0 = \frac{d^2 A_0}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dA_0}{dr}, \qquad \Rightarrow \qquad A_0'' + \frac{2A_0'}{r} = \frac{(rA_0)''}{r} = -3\frac{e}{r_0^3}.$$

Интегрируя, находим

$$rA_0 = -\frac{3e}{r_0^3}\left(\frac{1}{6}r^3 + c_1 r + c_2\right), \qquad \Rightarrow \qquad A_0(r) = -\frac{e}{2r_0^3}r^2 + \tilde{c}_1 + \frac{\tilde{c}_2}{r}.$$

Подставляя граничное условие, находим

$$\tilde{c}_1 = -\frac{3}{2}\frac{e}{r_0}, \qquad \Rightarrow \qquad A_0 = \frac{e}{2r_0^3}r^2 - \frac{3}{2}\frac{e}{r_0}.$$

Осталось посчитать интеграл вида

$$U = \int d^3r\ \rho A_0 \overset{sp.\,c.s.}{=} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \int_0^\infty r^2\, dr \cdot \rho A_0 = 4\pi I,$$

где I, соответсвенно, равен

$$I = \int_0^{r_0} r^2\, dr \cdot (A_0 - A_0^{\text{точ}} + A_0^{\text{точ}}) + \int_0^\infty r^2\, dr \rho A_0^{\text{точ}} = \int_0^\infty r^2\, dr \rho A_0^{\text{точ}} + \int_0^{r_0} r^2\, dr \rho\left(A_0 - A_0^{\text{точ}}\right).$$

Таким образом искомая энергия представилась, как $U = U_{\text{точ}} + \Delta U$, где ΔU – некоторая поправка, связанная с ненулевым размером ядра. Она равна

$$\Delta U = 4\pi \int_0^{r_0} r^2\, dr \rho \cdot (A_0 - A_0^{\text{точ}}) = \frac{4e^2}{a^3}\int_0^{r_0} dr e^{-2r/a}\left(\frac{e}{2r_0^3}r^4 - \frac{3}{2}\frac{e}{r_0}r^2 + er\right).$$

Если разложить экспоненту в ряд, то найдём, что $r_0/a \approx 10^{-5} \ll 1$, тогда получится интеграл вида

$$\Delta U = \frac{4e^2}{a^3}\left(\frac{e}{2r_0^3}\frac{1}{5}r_0^5 - \frac{3}{2}\frac{e}{r_0}\frac{1}{3}r_0^3 + e\frac{r_0^2}{2}\right) = \frac{4}{9}\left(\frac{e^2}{2a}\right)\left(\frac{r_0}{a}\right)^2 = \ldots$$

что соответствует поправке 10^{-10}. Досчитать и дописать.

T9

Потенциал диполя

$$\varphi = -\boldsymbol{d}\cdot\nabla\frac{1}{r} = \frac{\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Соответсвенно, поле диполя

$$E = -\operatorname{grad}\varphi = \frac{3(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{d}}{r^3},$$

в случае $r \neq 0$. Если же учесть такую возможность, то

$$\boldsymbol{E} = \frac{3(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{d}}{r^3} - \frac{4\pi}{3}\delta(\boldsymbol{r})\boldsymbol{d}.$$

Потенциальная энергия диполя:

$$U = \int d^3r\, \rho A_0 = -q\varphi(\boldsymbol{R}) + q\varphi(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{l}) = q(\boldsymbol{l}\cdot\nabla)\varphi = \boldsymbol{d}\cdot(\nabla\varphi) = -\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{E}_{\text{ext}}.$$

Подставляя $\boldsymbol{E}_{\text{ext}}$ находим

$$U = \frac{(\boldsymbol{d}_1\cdot\boldsymbol{d}_2) - 3(\boldsymbol{n}\cdot d_1)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{d}_2)}{r_{12}^3} + \frac{4\pi}{3}\delta(\boldsymbol{r}_{12})\,(\boldsymbol{d}_1\cdot\boldsymbol{d}_2),$$

где $\boldsymbol{r}_{12}$ – радиус вектор от первого диполя, ко второму.

T10

Нас просят найти диполный момент двух полусфер. Так как нас спросили только про дипольный момент, а про распределение зарядов не спросили, то мы последнее и не будем находить.

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')d^3\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \ldots = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi^{(l)}.$$

Известно что (ЛЛII §41 его лучше прочитать, потому как мне лень техать выражения для всех величин тут) :

$$\varphi^{(l)} = \sum_a e_a \sum_{m=-l}^{l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} D_l^{(m)} Y_{lm}(\theta,\varphi) \frac{r_a^l}{R_0^{l+1}}. \tag{2.1}$$

Любой скалярный потенциал мы всегда можем разложить по сферическим гармоникам:

$$\varphi(z) = \sum_{l,m} c_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi) R(z).$$

На сфере: $R = z$:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \Phi_0, & z>0 \\ -\Phi_0, & z<0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \int \varphi(r) Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sin\theta d\theta d\varphi = i\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\theta \varphi(r) \sin\theta d\theta\varphi =$$

$$= i\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left(-\int_0^{\pi/2} \Phi_0 \cos\theta d\cos\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \Phi_0 \cos\theta d\cos\theta \right) = 2\Phi_0\pi i \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left(-\frac{\cos^2\theta}{2}\bigg|_0^{\pi/2} + \frac{\cos^2\theta}{2}\bigg|_{\pi/2}^{\pi} \right).$$

Мы получили, что из (2.1) взяв как и в выводе формулы до $l=1$:

$$2\pi i \Phi_0 \sqrt{\frac{3}{4\pi}} = \frac{4\pi}{3}\frac{1}{r} D_l^m = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} i d_z \frac{1}{r} \qquad \Rightarrow \qquad d_z = r\frac{3\Phi_0}{2}.$$

Занятно, но решая ту же задачу на семинаре четвртой парой 08.04 мы получили ответ:

$$d_z = \frac{3}{2}R^2\Phi_0 \qquad \Leftarrow \qquad \varphi^{(l)} = \sum_a e_a \sum_{m=-l}^{l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} D_l^{(m)} Y_{lm}(\theta,\varphi) \frac{1}{R_0^{l+1}},$$

думается, что это из-за отличия в вот этой формуле (2.1). И вроде бы сейчас он правдивее и совпадает с ЛЛ2.

T11

Задача аксиально симметрична относительно оси Oz, дан потенциал:

$$v(r,0) - v_0 \left(1 - \frac{r^2 - a^2}{r\sqrt{r^2+a^2}}\right), \; r > a.$$

Хочется узнать $v(r,\theta)-?$ при условии, что $r \gg a$.

Соотвественно раскладываем в ряд, раз $r \gg a$, и получаем:

$$v(z,0) = v_0 \left(1 - \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)\left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right)^{-1/2}\right) \simeq v_0 \left(1 - \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right)\left(1 + \frac{a^2}{2z^2}\right)\right) = v_0 \left(\frac{3a^2}{2z^2} - \frac{a^4}{2z^4}\right).$$

С другой стороны по теории должно было бы получиться разложение вида

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} d^3r' = \frac{Q}{r} + \frac{\boldsymbol{dr}}{r^3} + \frac{r_\alpha r_\beta D_{\alpha\beta}}{2r^5} + \frac{O_{\alpha\beta\gamma} r_\alpha r_\beta r_\gamma}{6r^7} + \ldots$$

. Сравнивая степени в разложении получаем:

$$Q = 0, \qquad D_{zz} = 0, \qquad d_z = \frac{3a^2}{2}v_0, \qquad 0_{zzz} = -3a^4 v_0.$$

Теперь применим аксиальную симметрию: $\boldsymbol{d} = \int \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} d^3\boldsymbol{r}$. В дипольном моменте компоненты $d_x = d_y = 0$, что мы получаем так же как в упражнении про усреднение $\rho(x,y) = \rho(-x,-y)$.

Далее $D_{\alpha\alpha} = 0$, значит $D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0$ то есть $D_{xx} = -D_{yy}$, но в силу аксиальной симметрии такое возможно лишь если $D_{xx} = D_{yy} = 0$.

Наконец $O_{\alpha\alpha\beta} = 0$. То есть $O_{xxz} + O_{yyz} + O_{zzz} = 0$, тогда получаем:

$$O_{xxz} = O_{yyz} = -\frac{O_{zzz}}{2} = \frac{3a^4}{2}v_0$$

$$O_{xzx} = O_{yzy} = O_{zxx} = O_{zyy} = \frac{3a^4}{2}v_0$$

Вариант со всеми разными: $O_{xyz} = \int \rho(x,y,z)(15xyz)d^3r = 0$, так как $\rho(x) = \rho(-x)$. И поэтому же $O_{xxx} = O_{yyy} = 0$.

И не взятые ещё:

$$O_{zzx} = O_{zzy} = O_{xzz} = O_{yzz} = O_{zxz} = O_{zyz} = 0.$$

$$O_{xxy} = O_{yyx} = O_{xyx} = O_{yxy} = O_{yxx} = O_{xyy} = 0.$$

Теперь давайте, как нас просят в задаче, подставим $z = r\cos\theta$:

$$v_0(r,\theta) = \frac{3a^2v_0}{2}\frac{\cos\theta}{r^2} + \left(-\frac{a^4v_0}{2r^4}\cos^3\theta + \frac{3O_{xxz}xxz}{6r^7} + \frac{3O_{yyz}yyz}{6r^7}\right) = \frac{3a^2v_0}{2}\frac{\cos^2\theta}{r^2} + \frac{\left(\frac{3}{4}\cos\theta\sin^2\theta - \frac{1}{2}\cos^3\theta\right)}{r^4}a^4v_0.$$

/так как по сферической замене: $xxz = r^3\cos\theta\sin^2\theta\cos^2\varphi$, $yyz = r^3\cos\theta\sin^2\theta\sin^2\varphi$/

x T12

T13

Известен дипольный момент земли $\boldsymbol{\mu} = 8.1{\cdot}10^{25}$ гаусс·см^3. Найдём в полярных координатах линии магнитного диполя, и определим, как меняется поле вдоль силовой линии.

Уравнение силовых линий магнитного поля. Поле от магнитного диполя $\boldsymbol{H}$ можем записать, как

$$\boldsymbol{H} = \frac{3\left(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\mu}}{r^3}, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

Считая, что $\boldsymbol{\mu} = \mu\boldsymbol{o}$, и выбирая $Oz \parallel \boldsymbol{o}$, можем записать

$$\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{e}_r = \mu_r, \qquad \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{e}_\theta = \mu_\theta, \qquad \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi = \mu_\varphi.$$

Также верно, что $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r = \boldsymbol{e}_r$. Можем вычислить все проекции

$$\mu_r = \mu(\boldsymbol{o}\cdot\boldsymbol{e}_r) = \mu(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_r) = \mu\cos\theta, \qquad \mu_\theta = -\mu\sin\theta, \qquad \mu_\varphi = 0.$$

Так приходим к записи для векторов в сферических координатах

$$\boldsymbol{\mu} = \mu\left(\cos\theta,\, -\sin\theta,\, 0\right)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{n} = (1,\, 0,\, 0)^{\mathrm{T}}.$$

Тогда магнитное поле

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{r^3}\mu\begin{pmatrix}3\cos\theta - \cos\theta\\ -(-\sin\theta)\\ 0\end{pmatrix} = \frac{\mu}{r^3}\begin{pmatrix}2\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}, \qquad d\boldsymbol{l} = \begin{pmatrix}dr\\ r\ \theta\\ r\sin\theta\, d\varphi\end{pmatrix}, \qquad \frac{H_r}{dl_r} = \frac{H_\theta}{dl\theta}.$$

Раскрывая последнее уравнение находим

$$\frac{dr}{r} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}d\theta = 2\frac{d\sin\theta}{\sin\theta}, \qquad \Rightarrow \qquad \ln r = 2\ln\sin\theta + \mathrm{const}, \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{r(\theta) = r_0\sin^2\theta}, \qquad r_0 = r\left(\theta = \pi/2\right).$$

Можно построить такой бублик (симметричный относительно оси z, или относительно поворота φ), см. рис. 1.

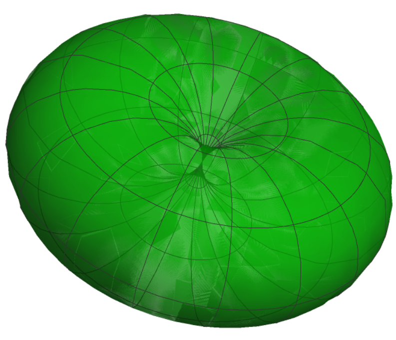

Рис. 1: Поверхность, образованная силовыми линиями в задаче 13.

Кривизна силовой линии магнитного поля. Определим $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{H}/H$, для него верно

$$\dot{\boldsymbol{H}} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{h}\,dt) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r})\right) = \frac{\boldsymbol{h}}{\rho}\cdot\boldsymbol{h}^2.$$

Расписывая дифференцирование, находим

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{h}\,dt) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}) = h^\alpha\,dt\partial_\alpha\boldsymbol{h}, \qquad \Rightarrow \qquad (\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{n}}{\rho}.$$

Подробнее рассмотрим диффернцирование по направлению
$$\boldsymbol{h}\cdot\nabla = h_r\partial_r + h_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta + h_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi.$$
Магнитное поле, соответсвенно, равно
$$\boldsymbol{H}^2 = \left(\frac{\mu}{r^3}\right)^2\cdot(3\cos^2\theta+1), \qquad \Rightarrow \qquad h_r = \frac{2\cos\theta}{\sqrt{3\cos^2\theta+1}}, \qquad h_\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+2}}.$$
Наконец, можем подтсавить их в $(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{h} = \left(h_r\partial_r + h_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta\right)\boldsymbol{h} = \boldsymbol{n}/\rho$. Так, например, на экваторе $\theta=\pi/2$, $h_r=0$, $h_\theta=1$:
$$\left(\frac{1}{r}\partial_\theta\right)\boldsymbol{h} = \frac{1}{r}\partial_\theta\left(h_r\boldsymbol{e}_r + h_\theta\boldsymbol{e}_\theta\right)\Big|_{\theta=\pi/2} = \frac{1}{r}\left(\partial_\theta h_r\boldsymbol{e}_r + h_r\partial_\theta\boldsymbol{e}_r + \partial_\theta h_\theta\boldsymbol{e}_\theta + h_\theta\partial_\theta\boldsymbol{e}_\theta\right).$$
В частности, слагаемые равны
$$\partial_\theta h_r\big|_{\theta=\pi/2} = -2, \qquad \partial_\theta h_\theta\big|_{\theta=\pi/2} = 0.$$
В результате получаем
$$(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{h}\Big|_{\theta=\pi/2} = -\frac{3}{r}\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{n}}{\rho}, \qquad \Rightarrow \qquad \rho_{\text{экв}} = \frac{r}{3}.$$

Движение частицы. Для начала вспомним, что поле называется слабонеоднородным, если
$$r_\perp = p_\perp\frac{c}{|e|H_0} \ll \rho.$$
Движение же можно разделить на движение по спирали вокруг силовой линии и двиение вдоль силовой линии.

Вспомним, про существование адиабатического инварианта, вида
$$\frac{p_\perp^2}{H} = \text{const}, \qquad \boldsymbol{p}^2 = p_\perp^2 + p_\parallel^2.$$
Таким образом при движении $H\uparrow$ меняется и $p_\perp\uparrow$, таким образом $p_\parallel = 0$ в некотороый момент, а потом и меняет знак.

Также происходит дрейф по бинормали, обеспечивающий радиационные пояса Земли.

Ну, действительно, общее уравнение движения можем записать в виде
$$m\gamma\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{e}{c}\left[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right].$$
Можно воспринимать происходящее как движение в постоянном магнитном поле, с поправкой к Лагранжиану $L_{\text{маг}} = \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{H}$, тогда добавочная сила
$$\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{H}), \qquad \Rightarrow \qquad F = (\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla)\boldsymbol{H} + \boldsymbol{\mu}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{H},$$
где учтено, что $\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{E} = 0$. Итого, уравнение движения
$$m\gamma\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H} + (\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla)\boldsymbol{H}.$$
Можно показать, что $\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_\perp$ мало, и перейти к уравнению
$$\frac{d\boldsymbol{v}_\parallel}{dt} = \omega_L\boldsymbol{v}_\perp\times\boldsymbol{H} + \frac{1}{mg}\left(\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{H},$$
которое почленно распишем. В частности,
$$(\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla)\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{h}_\mu\cdot(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)H - H_\mu(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{h}.$$
Другое слагаемое, соответсвенно
$$\frac{d\boldsymbol{v}_\parallel}{dt} = \dot{v}_\parallel\boldsymbol{h} + v_\parallel^2(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{h}.$$
Переписывая уравнения в ОНБ $(\boldsymbol{h},\,\boldsymbol{n})$, где бинормаль определим, как $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{h}\times\boldsymbol{n}$.

Домножая одно из уравнений на $\boldsymbol{h}$, переходим к выражению для $\boldsymbol{v}_\perp$
$$\boldsymbol{v}_\perp = \frac{1}{\rho\omega L}\left(v_\parallel^2 + \frac{u_\perp^2}{2}\right)\cdot\boldsymbol{b}.$$

Проеция на $\boldsymbol{h}$ может быть найдена через скалярное домножение:
$$\dot{v}_\parallel = -\frac{\mu h^2}{m\gamma}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)H = -\frac{u_\perp^2}{2H}(\boldsymbol{h}\nabla)H.$$
Также можем учесть, что магнитное поле не совершает работы, тогда $u_\perp + v_\parallel^2 = \text{const}$ тогда
$$v_\parallel(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)H = \dot{H}, \qquad \dot{v}_\parallel \sim -(\boldsymbol{h}\nabla)H,$$

где мы знаем, что $u_\perp^2/H = \text{const}$. Таким образом возможны колебания $v_\parallel$ вокруг положения 0, что и называется «магнитным зеркалом».

Зная $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_\perp + \boldsymbol{v}_\parallel$ можем определить, где возникает магнитное зеркало.

T14

Запишем выражение для магнитного дипольного момента:

$$\boldsymbol{\mu} = g\frac{e}{2mc\gamma}[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}].$$

Обозначив момент количества движения как $\boldsymbol{l} = [\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}]$ получим поправку в гамильтониан от взаимодействие вида:

$$H_{int} = -\frac{eg}{2mc\gamma}(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{H}) = -\frac{eg}{2mc\gamma}l_\alpha H^\alpha.$$

И так у нас есть величина, которая вообще есть функция $F(q,p,t)$, то есть

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F,H\}.$$

Тогда с таким великим механическим знанием пойдём посмотрим на наш момент импульса:

$$\frac{dl_i}{dt} = 0 + \frac{\partial l_i}{\partial r^\alpha}\left(-\frac{eg}{2mc\gamma}H^\beta\frac{\partial l_\beta}{\partial p_\alpha}\right) - \frac{\partial l_i}{\partial p_\alpha}\left(-\frac{eg}{2mc\gamma}H^\beta\frac{\partial l_\beta}{\partial r^\alpha}\right) = -\frac{eg}{2mc\gamma}H^\beta\{l_i,l_\beta\}$$

Давайте отдельно посмотрим на скобку Пуассона для таких вот векторных произведений, как моменты импульса мюона:

$$\{l_i,l_\beta\} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}\{r^jp^k, r^\alpha p^\gamma\} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}(\delta^{j\gamma}p^kr^\alpha - \delta^{\alpha k}p^\gamma r^j) = \varepsilon_i{}^\gamma{}_k\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}p^kr^\alpha - \varepsilon_{ij}{}^\alpha\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}p^\gamma r^j =$$

$$= (\delta_{i\beta}\delta_{j\gamma} - \delta_{i\gamma}\delta_{j\beta})p^\gamma r^j - (\delta_{i\beta}\delta_{k\alpha} - \delta_{i\alpha}\delta_{k\beta})p^kp^\alpha = \delta_{i\beta}p_jr^j - p_ir_\beta - \delta_{i\beta}p_\alpha r^\alpha + p_\beta r_i = p_\beta r_i - p_ir_\beta = \varepsilon_{i\beta}{}^\gamma\varepsilon_{\gamma mn}r^mp^n = \varepsilon_{i\beta}{}^\gamma l_\gamma.$$

Тогда получаем:

$$\frac{dl_i}{dt} = -\frac{eg}{2mc\gamma}\varepsilon_{i\beta}{}^\gamma l_\gamma H^\beta \qquad\Rightarrow\qquad \frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \frac{eg}{2mc\gamma}[\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{H}].$$

Тогда для производной по времени от магнитного дипольного момента имеем:

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \frac{eg}{2mc\gamma}[\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{H}] = \frac{g}{2}[\boldsymbol{\omega}_L\times\boldsymbol{\mu}],$$

где $\boldsymbol{\omega}_L = -\frac{e\boldsymbol{H}}{mc\gamma}$ – Ларморовская частота.

Знаем теперь гиромагнитное соотношение для дипольного момента, и тогда в первом приближении в постоянном магнитном поле:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{ge}{2mc}\boldsymbol{s} \qquad\Rightarrow\qquad \dot{\boldsymbol{s}}^{(1)} = \frac{g}{2}\gamma[\boldsymbol{\omega}_L\times\boldsymbol{s}].$$

Во втором же приближении получим прецессию Томаса, с которой мы уже работали в Задаче 2.

$$\dot{\boldsymbol{s}}^{(2)} = \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)c^2}[\dot{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{v}] = \boldsymbol{\omega}_{th}\times\boldsymbol{s}.$$

Теперь свяжем Ларморовскую частоту с Томасоновской, зная, что

$$m\gamma\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}] \qquad\Rightarrow\qquad \dot{\boldsymbol{v}} = [\boldsymbol{\omega}_L\times\boldsymbol{v}]$$

Тогда выражение для прецессии Томаса:

$$\boldsymbol{\omega}_{th} = \frac{\gamma^2}{\gamma+1}c^2[\boldsymbol{\omega}_L\times\boldsymbol{v}]\times\boldsymbol{v} = -\frac{\gamma^2v^2}{(\gamma+1)c^2} = -(\gamma-1)\boldsymbol{\omega}_L.$$

Таким образом для изменения спина получаем:

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \left(\frac{g}{2}\gamma - (\gamma-1)\right)\boldsymbol{\omega}_L\times\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\omega}_L\times\boldsymbol{s} + \gamma\left(\frac{g}{2}-1\right)\boldsymbol{\omega}_L\times\boldsymbol{s}.$$

Таким образом за один оборот спин отклонится на

$$\Delta\varphi = \left(\frac{g}{2} - 1\gamma\right)\cdot 2\pi = \alpha\gamma.$$

И как нетрудно показать,

$$P = mc\sqrt{\gamma^2-1} \qquad\Rightarrow\qquad \gamma = \sqrt{\left(\frac{P}{mc}\right)^2 + 1}$$

Тогда получаем ответ:

$$\Delta\varphi = \alpha\sqrt{\left(\frac{P}{mc}\right)^2 + 1} \simeq 0.07.$$

T15

Пусть есть плоскость Oxz, и диполь направлен под углом θ_d к оси Oz. Воспользуемся методом изображений и зеркально под проводящей плоскостью Oxyрасположим второй диполь, заменяющий её.

$$\boldsymbol{d}_1 = d(\boldsymbol{e}_z\cos\theta_d + \boldsymbol{e}\sin\theta_d), \qquad \boldsymbol{d}_2 = d(\boldsymbol{e}_z\cos\theta_d - \boldsymbol{e}_x\sin\theta_d).$$

Здесь введены единичные векторы, и также ещё введём на будущее $\boldsymbol{r}$ вектор на точку наблюдения из середины координат, $\boldsymbol{n}$ – единичный по этому направлению.

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r} - L\boldsymbol{e}_z, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r} + L\boldsymbol{e}_z.$$

Тут $2L$ – расстояние между диполями, будем работать в приближении $r \gg L$. Тогда примерно $\boldsymbol{r}_1 \parallel \boldsymbol{r}_2 \parallel \boldsymbol{n}$. И соответственно $r = (\boldsymbol{rn})$, а остальные:

$$r_1 = (\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n}) = r - L(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n}), \qquad r_2 = (\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{n}) = r + L(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n}).$$

И для $d_{1,2}(t - \frac{r_{1,2}}{c})$

$$\boldsymbol{d}_1 = d(\boldsymbol{e}_z\cos\theta_d + \boldsymbol{e}\sin\theta_d)\cos(\omega t - kr_1), \qquad \boldsymbol{d}_2 = d(\boldsymbol{e}_z\cos\theta_d - \boldsymbol{e}_x\sin\theta_d)\cos(\omega t - kr_2),$$

колеблеющегося гармонически (по условию):

$$\boldsymbol{H} = \frac{[\ddot{\boldsymbol{d}}_1 \times \boldsymbol{n}]}{c^2 r_1} + \frac{\ddot{\boldsymbol{d}}_2 \times \boldsymbol{n}}{c^2 r_2} = \frac{-\omega^2 d}{c^2 r}\Big(([\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n}]\cos\theta_d + [\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{n}]\sin\theta_d)\cos(\omega t - \frac{\omega}{c}r_1) + ([\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n}]\cos\theta_d + [\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{n}]\sin\theta_d)\cos(\omega t - \frac{\omega}{c}r$$

Очень хочется упростить:

$$\cos(\omega t - kr_1) = \cos(\omega t - kr + kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n})) = \cos(\omega t - kr)cos(kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n})) - \sin(\omega t - kr)\sin(kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n})).$$

$$\cos(\omega t - kr_2) = \cos(\omega t - kr - kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n})) = \cos(\omega t - kr)cos(kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n})) + \sin(\omega t - kr)\sin(kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n})).$$

Тогда возвращаемся к выражению для H:

$$\boldsymbol{H} = \frac{-2\omega^2 d}{c^2 r}\left([\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n}]\cos\theta_d\cos(\omega t - kr)\cos(kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n})) - [\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{n}]\sin\theta_d\sin(\omega t - kr)\sin(kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n}))\right).$$

T16

Значит есть разноименные заряды, один будем характеризовать индексами "1 а другой "2". Будем работать в системе центра инерции:

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2},\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \quad \rightsquigarrow \quad \boldsymbol{R}_{\text{центра инерции}} = 0.$$

Тогда не сложно вычислить:

$$\boldsymbol{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2(1 + \frac{m_2}{m_1}),\ \boldsymbol{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r}.$$

Ну и как мы показывали для излучения диполя: $I = 2|\ddot{\boldsymbol{d}}|^2/(3c^3)$. В нашем случае:

$$\boldsymbol{d} = e_1\boldsymbol{r}_1 + e_2\boldsymbol{r}_2 = \left(\frac{e_2 m_1 - e_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)\boldsymbol{r} = q\boldsymbol{r} \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{2q^2\ddot{\boldsymbol{r}}^2}{3c^3}.$$

Введем $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Посмотрим на энергию, излучаемую за один период:

$$\delta\varepsilon = I \cdot T_{\text{период}} = I\frac{2\pi r}{v}.$$

Будем работать в предположении, что $\delta\varepsilon \ll \varepsilon$. Воспользуемся теоремой Вириала:

$$2\langle T\rangle = n\langle u\rangle,\ T = \frac{\mu v^2}{2},\ \mu v^2 = -\frac{e_1 e_2}{r} \quad \rightsquigarrow \quad u = \frac{e_1 e_2}{r}.$$

Таким образом $v = \sqrt{|e_1 e_2|/\mu^2}$, тогда опять к энергии:

$$\delta\varepsilon = \frac{2q^2\ddot{r}^2}{3c^3}\frac{\pi r^{3/2}\mu^{1/2}}{|e_1 e_2|^{1/2}} = \frac{2q^2}{3c^3}\frac{|e_1 e_2|^{3/2}}{\mu^{3/2} r^{5/2}}\pi = \frac{|e_1 e_2}{2r}\frac{4\pi q^2}{3|e_1 e_2|}\underbrace{\frac{|e_1 e_2|^{3/2}}{c^3\mu^{3/2} r^{3/2}}}_{(v/c)^3} = \varepsilon\left(\frac{v}{c}\right)^3\frac{4\pi q^2}{3|e_1 e_2|} \ll \varepsilon.$$

Теперь на интересует $r(t)$. Знаем, что $\varepsilon = \frac{e_1 e_2}{2r}$.

$$I = -\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{d\varepsilon}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{e_1 e_2}{2r^2}\dot{r} = \frac{2q^2\ddot{r}^2}{3c^3},$$

подставляем сюда Кулона $\mu\ddot{r} = \frac{e_1 e_2}{r^2}$, а он выполняется, так как за один оборот не очень много энергии теряется:

$$\frac{e_1 e_2}{2r^2}\dot{r} = \frac{2q^2(e_1e_2)^2}{3c^3\mu^2 r^4} \qquad \rightsquigarrow \qquad r^2\dot{r} = \frac{4q^2(e_1 e_2}{3c^3\mu^2} = \frac{1}{3}\frac{dr^3}{dt}.$$

Не сложно тогда получается:

$$r = \left(r_0^3 + \frac{4\theta^2(e_1e_2)}{c^3\mu^2}t\right)^{1/3}, \qquad t_{\text{пад}} = \frac{r_0^3\mu^2c^3}{4q^2(e_1e_2)}.$$

Для атома время падения электрона на него $t \sim 10^{-8}$ секунды, и действительно в классической теории поля атомы с электронами стабильно существовать не могут.

T17

Два заряда у нас сталкиваются, излучают и летят обратно, нас интересует процесс излучения. Будем считать, что $v \ll c$. Воспользуемся выведенной формулой $I = 2|\ddot{\boldsymbol{d}}|^2/3(c^3)$. И всё так же живём в системе центра инерции, как в прошлой задаче.

$$\boldsymbol{d} = e_1\boldsymbol{r}_1 + e_2\boldsymbol{r}_2 = \left(\frac{e_2m_1 - e_1m_2}{m_1+m_2}\right)\boldsymbol{r} = q\boldsymbol{r}.$$

Давайте рассмотрим случай, когда $e_2m_1 \neq e_1m_2$. Тогда у нас не появляется лишних нулей, $I = \frac{2q^2\ddot{\boldsymbol{r}}^2}{ec^3}$. И, собственно, для энергии имеем:

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} I(t)dt = \frac{2q^2}{3c^3}\int_{-\infty}^{\infty}\ddot{r}^2 dt = \frac{2q^2}{3c^3}\int_{v_{-\infty}}^{v_\infty}\ddot{r}d\dot{r}$$

Опять, работая с предположением: $\varepsilon_{\text{изл}} \ll \varepsilon_{\text{полная}}$, воспользуемся законом кулона. Ещё нам, для выражения скорости понадобится закон сохранения энергии:

$$\frac{\mu v_\infty^2}{2} = \frac{\mu v^2}{2} + \frac{e_1e_2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(e_1e_2)^2}{r^2} = \frac{\mu^2}{4}(v_\infty^2 - v^2)^2,$$

что при подстановке в закон Кулона:

$$\ddot{r} = \frac{e_1e_2}{\mu r^2} = \frac{(e_1e_2)^2}{r^2}\frac{1}{\mu(e_1e_2)} = \frac{\mu}{4(e_1e_2)}(v_\infty^2 - v^2)^2.$$

Теперь мы готовы взять наш интеграл:

$$\varepsilon = \frac{q^2\mu}{6c^3(e_1e_2)}\int_{-v_\infty}^{v_\infty}(v_\infty^2 - v^2)dv = \frac{\mu q^2}{6c^3(e_1e_2)}\left(v_\infty^4 v - \frac{2v^3}{3}v_\infty^2 + \frac{v^5}{5}\right)\Bigg|_{-v_\infty}^{v_\infty} = \frac{8\mu q^2}{45c^3(e_1e_2)}v_\infty^5 = \left(\frac{\mu v_\infty^2}{2}\right)\left(\frac{v_\infty}{c}\right)^3\frac{16q^2}{45(e_1e_2)} \ll \frac{\mu v_\infty^2}{2}.$$

Так и показали, что $\varepsilon \ll \varepsilon_{\text{полн}}$.

T18

У нас есть некий электрон летящий по окружности. Магнитное поле пусть направлено $\boldsymbol{H} = (0,0,H)$. И у нас релетявистсктй случай $v \to c$.

Пренебрегаем излучением:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}].$$

Изменение энергии при $E = 0$ будет:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = e\boldsymbol{v}\boldsymbol{E} = 0.$$

То есть константа, а значит:

$$\varepsilon = \gamma mc^2 = \text{const} \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = \text{const}.$$

Тогда далее жить намного удобнее, найдем радиус орбиты:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \gamma m\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}].$$

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \frac{e}{mc\gamma}[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{H}], \quad \boldsymbol{v}_0 = \frac{e}{mc\gamma}[\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{H}] \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{v} = \frac{e}{\gamma mc}[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{H}]$$

Тогда имеем радиус и циклотронную частоту:

$$R = \frac{\gamma m c}{eH} v, \qquad \Omega = \frac{eH}{\gamma m c}.$$

Далее достаточно большой блок теории – нужны запаздывающие потенциалы, но мы будем пытаться обойтись без них, введем на веру *потенциалы Лиенара-Вихерта*:

$$\varphi = \frac{e}{R\left(1 - \frac{\boldsymbol{n}\boldsymbol{v}}{c}\right)}, \qquad \boldsymbol{A} = \frac{e\boldsymbol{v}}{R\left(1 - \frac{\boldsymbol{n}\boldsymbol{v}}{c}\right)}.$$

Переходим в мгновенную систему отсчета K':

$$\boldsymbol{v}' = (0,0,0);\ \boldsymbol{v}(0,v,0);\ \boldsymbol{H}(0,0,H);\ \boldsymbol{E} = (0,0,0).$$

Тогда, зная как преобразуются компоненты поля:

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel} = 0,\ H'_{\parallel} = H_{\parallel} = 0.$$

$$\boldsymbol{E}'_{\perp} = \gamma = \left(\boldsymbol{E}_{\perp} - \frac{1}{c}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}]\right), \qquad \boldsymbol{H}'_{\perp} = \gamma = \left(\boldsymbol{H}_{\perp} - \frac{1}{c}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}]\right).$$

Таким образом получаем:

$$\boldsymbol{H}' = (0,0,\gamma H),\ \boldsymbol{E}' = (-\beta\gamma H, 0, 0).$$

Тогда в новой системе отсчета движение описывается как:

$$\frac{dp'}{dt'} = e\boldsymbol{E}' + \underbrace{\frac{e}{c}[\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{H}']}_{0} = \underbrace{\dot{\gamma}' m \boldsymbol{v}'}_{0} + \gamma' m \dot{\boldsymbol{v}}' \qquad \Rightarrow \qquad m\dot{\boldsymbol{v}}' = e\boldsymbol{E}'.$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}' = -\frac{e\beta\gamma H}{m}\boldsymbol{e}_x \qquad \ddot{\boldsymbol{d}}' = e\ddot{\boldsymbol{r}}' = -\frac{e^2\beta\gamma H}{m}\boldsymbol{e}_x.$$

Тогда интенсивность излучения:

$$I' = \frac{2|\ddot{\boldsymbol{d}}'|^2}{3c^3} = \frac{2e^4\beta^2\gamma^2 H^2}{3m^2c^3}.$$

Но в то же время $I' = -d\varepsilon'/dt'$ и $I = -d\varepsilon/dt$. счастью наше преобразование нам даёт, что $x' = y' = z' = 0$, и главное – $t = \gamma t'$. И большая удача, что преобразование четыре импульса системы тоже даёт нам $p'_x = p'_y = p'_z = 0$, и самое главное – $\varepsilon = \gamma\varepsilon'$. Тогда и $I = I'$, по замечанию выше.

x T19

T20

Имеем что? $\boldsymbol{E}_0 \parallel \boldsymbol{e}_x$ и $\boldsymbol{H}_0 \parallel \boldsymbol{e}_y$. Запишем вектор Пойтинга для такой рассейянной волны:

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}|H|^2\boldsymbol{n} = \frac{c}{4\pi}|\boldsymbol{E}|^2\boldsymbol{n}.$$

Вдали от источника, как мы обсуждали выполняется $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{H}$ и равны по модулю.

Для интенсивности имеем

$$dI = \boldsymbol{n}\boldsymbol{S}r^2 d\Omega = S_0 d\sigma,$$

где ввели дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma$, а $S_0 = \frac{c}{4\pi}|\boldsymbol{E}_0|^2$.

Внутри идеально проводящего шара $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{0}$. Рассмотрим конкретно электрическое поле в центре шара с плотностью заряда $\rho(\theta,\phi)$, взяв закон Кулона:

$$\boldsymbol{E}_0\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) + \int \frac{\rho(\theta,\varphi)(-\boldsymbol{r})}{r^3} dS = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{E}_0\cos(\omega t) - \frac{1}{r^3}\underbrace{\int \rho(\theta,\varphi)\boldsymbol{r}\, dS}_{\boldsymbol{d}} = 0.$$

Соответственно получаем: $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{E}_0 r^3 \cos(\omega t)$.

Теперь берем Био-Савара

$$\boldsymbol{H}_0\cos(\omega t) + \int \frac{[\boldsymbol{J} \times (-\boldsymbol{r})]}{cr^3} dS = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{H}_0\cos(\omega t) + \frac{2}{r^3}\int \frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{J}}{2c} dS = 0.$$

И аналогично $\boldsymbol{\mu} = -\frac{\boldsymbol{H}_0 r^3}{2}\cos(\omega t)$.

В волновой (зоне) будет верно, что

$$\boldsymbol{H}_d = \frac{\ddot{\boldsymbol{d}} \times \boldsymbol{n}}{c^2 r}, \qquad \boldsymbol{H}_\mu = \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{\mu}}) - \ddot{\boldsymbol{\mu}}}{c^2 r}.$$

Таким образом вектор Пойтинга:

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}|\boldsymbol{H}_d + \boldsymbol{H}_\mu|^2\boldsymbol{n} = \frac{c}{4\pi c^4 r^2}\big(|[\ddot{\boldsymbol{d}} \times \boldsymbol{n}]|^2 + (\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{\mu}})^2 + |\ddot{\boldsymbol{\mu}}|^2 + 2([\ddot{\boldsymbol{d}} \times \boldsymbol{n}]\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{\mu}}) - 2(\ddot{\boldsymbol{\mu}}\cdot[\ddot{\boldsymbol{d}} \times \boldsymbol{n}]) - 2(\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{\mu}})^2\big)\boldsymbol{n}.$$

Будем разбираться по очереди: $[\ddot{\boldsymbol{d}} \times \boldsymbol{n}]\cdot\boldsymbol{n} = 0$. Далее:

$$[\ddot{\boldsymbol{d}} \times \boldsymbol{n}]_\alpha[\ddot{\boldsymbol{d}} \times \boldsymbol{n}]^\alpha = |\ddot{\boldsymbol{d}}|^2 - (\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{d}})^2.$$

Теперь вроде как немного упростилось:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{4\pi c^3 r^2}\big(|[\ddot{\boldsymbol{d}} \times \boldsymbol{n}]|^2 - (\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{\mu}})^2 + |\ddot{\boldsymbol{\mu}}|^2 - (\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{\mu}})^2 - 2(\ddot{\boldsymbol{\mu}}\cdot[\ddot{\boldsymbol{d}} \times \boldsymbol{n}])\big)\boldsymbol{n}.$$

И теперь по формулам выше найдём сечение:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\omega^4 r^6}{c^4}\cos^2(\omega t)\big(|\boldsymbol{e}_x|^2 - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_x)^2 + \frac{1}{4}|\boldsymbol{e}_y|^2 - \frac{1}{4}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_y)^2 - (\boldsymbol{e}_y[\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{n}])\big)d\Omega = \\ &= \frac{\omega^4 r^6}{2c^4}\left(\frac{5}{4} - \sin^2\theta\cos^2\varphi - \frac{1}{4}\sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos\theta\right)d\Omega. \end{aligned}$$

А теперь, как нас просят задаче, мы это возьмём и проинтегрируем!

$$\sigma = 2\pi\frac{\omega^4 r^6}{2c^4}\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\right) = \frac{5\pi}{3}\frac{\omega^4}{2c^4}r^6.$$