

ЗАМЕТКИ КУРСА «ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

Источник: [an_explanations.pdf](#)
Лектор: Карасёв Р.Н.

Восторженные читатели: Хоружий Кирилл
Примаков Евгений

От: 27 февраля 2021 г.

Содержание

1	Приближение функций	2
1.3	Пространство интегрируемых функций	2
1.4	Приближение функций ступенчатыми и бесконечно гладкими	3
2	Ограниченная вариация, абсолютная непрерывность и осцилляция	3
2.5	Функции ограниченной вариации	3
2.6	Абсолютно непрерывные функции и обобщенная формула Ньютона-Лейбница	4
2.7	(до 2.9) Осцилляции и равномерные осцилляции	4
3	Ряд Фурье в пространстве L_2	5
4	Ряд Фурье и его сходимость	6

1 Приближение функций

1.3 Пространство интегрируемых функций

Неравенства Гёльдера и Минковского

Def 1.1. Абсолютно интегрируемыми функциями на измеримом $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называют $f: X \mapsto \mathbb{R}$ с конечным интегралом $\int_X |f(x)| dx$. Расстоянием¹ между функциями f и g будем считать $\int_X |f(x) - g(x)| dx$.

Def 1.2. Обозначим через $L_1(X)$ факторпространство линейного пространства абсолютно интегрируемых функций по его линейному подпространству почти всюду равных нулю функций. То есть функции на 0 расстоянии считаем равными. Нормой будем считать

$$\|f\|_1 = \int_X |f(x)| dx.$$

Def 1.3. Для измеримого по Лебегу $X \subset \mathbb{R}^n$ и числа $p \geq 1$ факторпространство измеримых по Лебегу функций на X с конечной (полу)нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p dx \right)^{1/p},$$

по модулю функций равных нулю почти всюду, назовём $L_p(X)$.

Очень хорошим, симметричным, актуальным для описания квантовой механики оказывается L_2 пространство, на котором естественно вводить скалярное произведение, его порождающее.

Def 1.4. В комплексном случае норма L_2 порождена скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \longrightarrow \quad \|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}.$$

Thr 1.5 (Неравенство Гёльдера). Возьмём $p, q > 1$ такие, что $1/p + 1/q = 1$. Пусть $f \in L_p(X)$ и $g \in L_q(X)$. Тогда

$$\int_X |fg| dx \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

△. Для доказательства достаточно проинтегрировать неравенство вида

$$|fg| \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}.$$

Осталось получить само неравенство. □

Con 1.6. Для измеримых функций и чисел $p, q > 0$, таких что $1/p + 1/q = 1$, имеет место формула

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \int_X fg dx \mid \|g\|_q \leq 1 \right\}. \quad (1.1)$$

△. По неравенству Гёльдера норма f не менее супремума правой части (?), более того равенство достигается при выборе

$$g(x) = \frac{\text{sign } f(x) |f(x)|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}}.$$

□

Def 1.7. Функция $f: V \mapsto \mathbb{R}$ на векторном пространстве называется выпуклой, если для любых $x, y \in V$ и любого $t \in (0, 1)$ имеет место неравенство

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Функция называется строго выпуклой, если неравенство строгое $\forall x \neq y$ и $t \in (0, 1)$.

Lem 1.8. Если в семействе функций $f_\alpha: V \mapsto \mathbb{R}$, $\alpha \in A$, все функции выпуклые, то

$$f(x) = \sup \{ f_\alpha(x) \mid \alpha \in A \}$$

тоже выпуклая².

Thr 1.9 (Неравенство Минковского). Для функций $f, g \in L_p$ при $p \geq 1$

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

¹В силу неравенства $|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ расстояние конечно.

²Если разрешить в определении выпуклости значение $+\infty$.

Полнота пространства интегрируемых функций

Далее в разделе всегда предполагается суммирование по k от 1 до ∞ . Глобально можно сказать, что в нормированном пространстве вопрос полноты сводится в вопросу сходимости рядов, у которых сходятся суммы норм.

Def 1.10. Назовём последовательность (f_n) *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon : \forall n, m \geq N_\varepsilon \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

Lem 1.11. Пусть у последовательности функций (u_k) из $L_p(X)$ сумма $\sum \|u_k\|_p$ оказалась конечной. Тогда $S(x) = \sum u_k(x)$ определена для почти всех x и $\|S\|_p \leq \sum \|u_k\|_p$.

Lem 1.12. Пусть у последовательности функций (u_k) из $L_p(X)$ сумма $\sum \|u_k\|_p$ оказалась конечной. Тогда $S(x) = \sum u_k(x)$ определена для почти всех x и $S = \sum u_k$ в смысле сходимости в пространстве $L_p(X)$.

Thr 1.13. Пространство $L_p(X)$ полно.

Вообще сходимость в $L_p(X)$ может не означать поточечной сходимости ни в одной точке.

1.4 Приближение функций ступенчатыми и бесконечно гладкими

Def 1.14. Назовём *элементарно ступенчатыми* функции с конечным числом ступенек, в основании которых лежат элементарные множества.

Thr 1.15. Можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить элементарно ступенчатой $\forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)$.

Thr 1.16. Всякую $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить бесконечно дифференцируемой функцией с компактным носителем.

Мне кажется, было бы полезно вернуться к разделу с приближением функций, и дописать в начало.

2 Ограниченная вариация, абсолютная непрерывность и осцилляция

2.5 Функции ограниченной вариации

Def 2.1. Функция f на промежутке I имеет *ограниченную вариацию*, если для любых $x_0 < x_1 < \dots < x_N \in I$ (в любом количестве)

$$|f(x_0) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \dots + |f(x_{N-1}) - f(x_N)| \leq M,$$

для некоторой константы M . Наименьшую константу M в этом неравенстве назовём *вариацией* функции f равную $\|f\|_B$, что задаёт *полунорму*, вида

$$\|f\|_B = \sup \left\{ |f(x_0) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \dots + |f(x_{N-1}) - f(x_N)| \mid N \in \mathbb{N}, a \leq x_1 \leq \dots \leq x_N \leq b \right\}$$

Важно что вариация функции аддитивна и выпукла, в смысле $\|f + g\|_B \leq \|f\|_B + \|g\|_B$.

Lem 2.2. Функцию ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$ можно представить в виде суммы двух функций $f = u + d$, одна из которых возрастает, а другая убывает. При этом $\|f\|_B = \|u\|_B + \|d\|_B$ и если f была непрерывной, то u, d тоже будут непрерывны.

Thr 2.3 (Вторая теорема о среднем). Если f интегрируема по Лебегу с конечным интегралом, а g монотонна и ограничена на $[a, b]$, то при некотором $\nu \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a+0) \int_a^\nu f(x) dx + g(b-0) \int_\nu^b f(x) dx.$$

Таким образом приходим к утверждению о том, что функции ограниченной вариации допускают оценку интеграла своего произведения с другой функцией

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq (|g(a+0)| + \|g\|_B) \cdot \sup \left\{ \left| \int_\nu^b f(x) dx \right| \mid \nu \in [a, b] \right\}.$$

2.6 Абсолютно непрерывные функции и обобщенная формула Ньютона-Лейбница

Для формулы Ньютона-Лейбница условие липшицевости можно ослабить до следующего:

Def 2.4. Функция F на промежутке I абсолютно непрерывна, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$, такое что $\forall x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq \dots \leq x_N \leq y_N \in I$ из неравенства

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_N - y_N| \leq \delta$$

следует, что

$$|F(x_1) - F(y_1)| + |F(x_2) - F(y_2)| + \dots + |F(x_N) - F(y_N)| \leq \varepsilon.$$

Говоря неформально, сумма модулей приращений функции на системе непересекающихся отрезков должна стремиться к нулю при суммарной длине системы, стремящейся к нулю.

Lem 2.5.

Thr 2.6. Для некоторой $f \in L_1[a, b]$, всякая обобщенная первообразная F

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

является абсолютно непрерывной и её производная почти всюду существует и совпадает с f .

Lem 2.7. Абсолютно непрерывная на отрезке функция f имеет на нём ограниченную вариацию. Также на отрезке существует разложение f в сумму двух монотонных абсолютно непрерывных функций.

Thr 2.8. Абсолютно непрерывная функция $F: [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ почти всюду имеет производную и является обобщенной первообразной своей производной с выполнением формулы Ньютона-Лейбница

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t) dt.$$

Легко показать через...ух, ну по лемме **Безиковича**, посмотреть можно [здесь](#).

Con 2.9 (Обобщенное интегрирование по частям). Если $f \in L_1[a, b]$, а g абсолютно непрерывна, то верна формула интегрирования по частям

$$\int_a^b fg dx = F(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) dx,$$

где $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Lem 2.10. Функция $f: [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда она может быть сколь угодно близко в B -норме приближена кусочно-линейными функциями.

А дальше про борелевские меры на отрезках и интеграл Лебега-Стилтьеса.

2.7 (до 2.9) Осцилляции и равномерные осцилляции

Def 2.11. Определим коэффициент Фурье (с точностью до умножения на константу)

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy} dx.$$

Thr 2.12. Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то $|c_f(y)| \leq \|f\|_1$ и $c_f(y)$ непрерывно зависит от y .

Thr 2.13 (Лемма об осцилляции). Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то выражение

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy} dx$$

стремится к нулю при $y \rightarrow \infty$.

Lem 2.14. Если производная $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и производные до k -й включительно³ находятся в $L_1(\mathbb{R})$, то

$$c_f(y) = o\left(\frac{1}{y^k}\right), \quad y \rightarrow \infty.$$

³Для k -й достаточно существования почти всюду.

Thr 2.15. Если $f \in L - 1(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на \mathbb{R} , то выражение

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

оказывается $O(1/y)$ при $y \rightarrow \infty$.

Con 2.16. Пусть функция $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ имеет абсолютно непрерывную $(k-1)$ -ую производную, производные до k -й включительно находятся в $L_1(\mathbb{R})$, а $f^{(k)}$ (возможно, после изменения на множестве меры нуль) имеет ограниченную вариацию на \mathbb{R} , тогда

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx = O\left(\frac{1}{y^{k+1}}\right), \quad y \rightarrow \infty.$$

Thr 2.17 (Лемма о равномерной осцилляции). Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то выражение

$$c(y, \xi, \eta) = \int_{\xi}^{\eta} f(x) e^{-ixy} dx$$

стремится к нулю при $y \rightarrow \infty$ равномерно по ξ, η .

Периодические функции

Def 2.18. Для 2π -периодической функции $f(x+2\pi) \equiv f(x)$ коэффициенты Фурье запишутся, как

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{(f, e^{inx})}{\|e^{inx}\|_2^2},$$

где последнее выражение понимается в смысле скалярного произведения и нормы в $L_2[-\pi, \pi]$.

Thr 2.19. Пусть функция f имеет период 2π и абсолютно непрерывную $(k-1)$ -ую производную, причём $f^{(k)}$ (возможно, после изменения на множестве меры нуль) имеет ограниченную вариацию на $[-\pi, \pi]$, тогда

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Lem 2.20. Если у 2π -периодической функции ограниченной вариации есть ненулевое конечное число разрывов, и она кусочно абсолютно непрерывна, то оценка $O(1/n)$ для коэффициентов Фурье неумлучшаема.

Thr 2.21. Пусть функция f непрерывна и 2π -периодическая, тогда для коэффициента Фурье имеется оценка

$$c_n = O(\omega_f(\pi/n)),$$

где ω_f – модуль непрерывности f .

3 Ряд Фурье в пространстве L_2

Thr 3.1 (Теорема Вейерштрасса для тригонометрических многочленов). Всякую непрерывную на $[-\pi, \pi]$ функцию f , для которой $f(-\pi) = f(\pi)$, можно сколь угодно близко равномерно приблизить тригонометрическими многочленами вида

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Thr 3.2 (Теорема Стоуна-Вейерштрасса). Пусть у нас зафиксирован компакт K и дана алгебра непрерывных функций \mathcal{A} на этом компакте, которая разделяет точки, то есть для любых $x \neq y \in K$ найдётся $f \in \mathcal{A}$, такая что $f(x) \neq f(y)$. Тогда Всякую непрерывную на K функцию можно сколь угодно близко равномерно приблизить функциями из \mathcal{A} .

Вспомнить про $\|f\|_C$. Равномерное приближение является приближением по норме L_2 , так как на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеется неравенство $\|f\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_C$. В случае L_2 нормы определим коэффициенты, которыми собираемся приближать.

Thr 3.3 (Оптимальность коэффициентов Фурье). Для всякой $f \in L_2[-\pi, \pi]$ и данного числа n лучшее по норме L_2 приближение f тригонометрическим многочленом $\sum_{-n}^{+n} c_k e^{ikx}$ дают коэффициенты Фурье

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx.$$

Lem 3.4 (неравенство Бесселя). Из доказательства предыдущей теоремы, можем получить, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^N |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2, \quad \Rightarrow \quad \|f\|_2^2 \geq \sum_{k=1}^N |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2, \quad \stackrel{\text{trig}}{\Rightarrow} \quad \|f\|_2^2 \geq 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2.$$

Точно ли до n ?

Lem 3.5 (Представление действительнзначной функции). Для действительнзначной функции представление в виде ряда Фурье переписывается в виде

$$f = \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx,$$

для $k \geq 1$. Неравенство Бесселя тогда запишется так:

$$\|f\|_2^2 \geq \frac{\pi}{2} |a_0|^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

Thr 3.6 (Сходимость ряда Фурье в среднеквадратичном). Для всякой комплекснзначной $f \in L_2[-\pi, \pi]$

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$$

в смысле сходимости суммы в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$, а также выполняется равенство Парсеваля

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Пока мы не доказали, что в полученную формулу можно подставить хоть одно конкретное значение x . Тот факт, что ряд Фурье функции из $L_2[-\pi, \pi]$ на самом деле сходится к этой функции почти всюду, был доказан Л. Карлесоном (1966), а до этого был известен как гипотеза Лузина.

4 Ряд Фурье и его сходимость

Def 4.1. Обозначим *частичную сумму* тригонометрического ряда Фурье для 2π -периодической функции f как

$$T_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}.$$

Lem 4.2. Для n -й частичной суммы ряда Фурье 2π -периодической функции имеет место формула в виде свёртки

$$T_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) \, dt,$$

с ядром Дирихле

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}.$$

Lem 4.3 (Равномерная ограниченность интегралов от ядра Дирихле). Существует такая константа C , что

$$\left| \int_a^b D_n(t) \, dt \right| \leq C$$

для любых $a, b \in [-\pi, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$.

Thr 4.4 (Равномерный принцип локализации). Запишем для $\delta \in (0, \pi)$

$$T_n(f, x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) D_n(t) \, dt = \int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t) - f(x)) D_n(t) \, dt + \int_M (f(x+t) - f(x)) D_n(t) \, dt,$$

где $M = \{t \mid \delta \leq |t| \leq \pi\}$. Если $f \in L_1[-\pi, \pi]$, то

$$\int_M (f(x+t) - f(x)) D_n(t) \, dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Если f ограничена на отрезке $[a, b]$, то это выражение стремится к нулю равномерно по $x \in [a, b]$.

Def 4.5. Функция f называется гёльдеровой степени $\alpha > 0$, если для любых x, y из области определения

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

с некоторой константой C .

Thr 4.6 (Признак Липшица сходимости ряда Фурье). Для абсолютно интегрируемой 2π -периодической функции, которая является гёльдеровой с некоторыми $C, \alpha > 0$ на интервале $(A, B) \supset [a, b]$

$$T_n(f, x) \rightarrow f(x)$$

равномерно $x \in [a, b]$ при $n \rightarrow \infty$.

Thr 4.7 (Признак Дирихле сходимости ряда Фурье). Для абсолютно интегрируемой 2π -периодической функции, которая является непрерывной с ограниченной вариацией на интервале $(A, B) \supset [a, b]$

$$T_n(f, x) \rightarrow f(x)$$

равномерно по $x \in [a, b]$ при $n \rightarrow \infty$.

Далее несколько лемм, сформулированных в виде задач, а именно признак Дирихле сходимости ряда Фурье в точке, признак Липшица сходимости ряда Фурье в точке, признак Дини сходимости ряда Фурье в точке. Ага, это 13 тема. А потом будут темы 14 - 17.

Интегрирование ряда Фурье

Thr 4.8 (Почленное интегрирование ряда Фурье). Пусть $f \in L_1[-\pi, \pi]$ соответствует не обязательно сходящийся ряд Фурье, записанный в действительном виде как

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + B_n \sin nx).$$

Тогда ряд Фурье можно почленно интегрировать, то есть выполняется формула

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2} a_0 (b - a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n \sin nx}{n} - \frac{b_n \cos nx}{n} \right) \Big|_a^b.$$

Lem 4.9. Разложим $\cos ax$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ при $a \notin \mathbb{Z}$ в ряд Фурье. Легко получить, что

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} x &= v.p. \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - \pi k} \\ \frac{1}{\sin x} &= v.p. \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x - \pi k} \\ \sin x &= x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2} \right). \end{aligned}$$

Lem 4.10. Формула дополнения для бета-функции про $p \in (0, 1)$

$$B(p, 1 - p) = \int_0^1 t^{p-1} (1 - t)^{-p} dt = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

Lem 4.11. Для $0 < |x| < \pi$ верно, что

$$\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x = \sum_{n, k \geq 1} \frac{2x^{2k-1}}{\pi^{2k} n^{2k}},$$

откуда можно получить значения сумм $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Суммирование тригонометрических рядов по Фейеру

Def 4.12. Определим ядро Фейера

$$\Phi_n(t) = \frac{D_0(t) + D_1(t) + \dots + D_n(t)}{n+1} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \frac{n+1-|k|}{n+1} e^{ikx},$$

как усреднение ядер Дирихле. Соответствующая сумма Фейера будет соответствовать усреднением первых $n+1$ частичных сумм ряда Фурье,

$$S_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \xi) \Phi_n(\xi) d\xi = \frac{T_0(f, x) + \dots + T_n(f, x)}{n+1}.$$

Записав

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} = \frac{1}{4\pi} \frac{\cos nt - \cos\left((n+1)t\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)},$$

и суммируя, получаем

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - \cos\left((n+1)t\right)}{(n+1)\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{(n+1)\sin^2\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

Thr 4.13. Для непрерывной 2π -периодической f

$$S_n(f, x) \Rightarrow f(x),$$

то есть сходится равномерно.

$$f: X \rightarrow Y$$