Задание по курсу «Дифференциальные уравнения II»

Автор: Шишкин П.Е.

От: *14 апреля 2021 г.*

Содержание

1 От авторов

1.1 Шрифт для личных сообщений

Меня попросили писать текст не имеющий отношения к решению как-то выделенно, поэтому отныне текст, который я пишу просто от души и сердца, будет написан курсивным шрифтом цвета лягушки в обмороке (я серьёзно, такой цвет есть)

1.2 Благодарности

*Я благодарен *список людей* за *причины* FIXME*

1.3 Заходите в гости

Заходите в гости, всегда всем рад :)

2 I. Первые интегралы и их использование для решений автономных систем

2.1 С. §14: 12

Исследовать при всех значениях вещественного параметра a поведение фазовых траекторий на всей фазовой плоскости для системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax(x^2 + y^2 - 2) \\ \dot{y} = -x + ay(x^2 + y^2 - 2) \end{cases} \tag{1}$$

Уравнение выглядит, как что-то в полярных координатам. Чтож, перейдём к ним

$$\begin{aligned} x &= r\sin(\varphi) & \dot{x} &= r\cos(\varphi)\dot{\varphi} + \dot{r}\sin(\varphi) \\ y &= r\cos(\varphi) & \dot{y} &= -r\sin(\varphi)\dot{\varphi} + \dot{r}\cos(\varphi) \end{aligned}$$

Откуда:

$$\begin{cases} r\cos(\varphi)\dot{\varphi} + \dot{r}\sin(\varphi) = r\cos(\varphi) + ar\sin(\varphi)(r^2 - 2) \\ -r\sin(\varphi)\dot{\varphi} + \dot{r}\cos(\varphi) = -r\sin(\varphi) + ar\cos(\varphi)(r^2 - 2) \end{cases}$$

Откуда можно получить

$$\begin{cases} \dot{r} = ra(r^2 - 2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$$

Здесь уже очевидны 3 случая: 1)$a > 0$, 2)$a < 0$ 3) $a = 0$. 1) неустойчивый предельный цикл радиуса $\sqrt{2}$ 2) устойчивый предельный цикл радиуса $\sqrt{2}$ 3) центр. Разница при различных знакоопределённых параметрах будет в скорости "навивания"на предельный цикл, но характер движения будет схожий.
Кстати, $\dot{\varphi} = 1$ - это первый интеграл. В целом мы сказали при каких параметрах, что но можно это всё безобразие построить 1. *Чтобы было максимально красиво, построим фазовую диаграмму для r график в декартовых координатах и зависимость угла от радиуса. Кстати такая фигня с производной фи получилась из-за неклассической замены икса с синусом. Т.е. немного контринтуитивно что $\varphi = 1$ это цикл по часовой стрелке, но и замена $x = \sin(\varphi)$ это что-то безумное (я просто хотел кушать а не думать)*

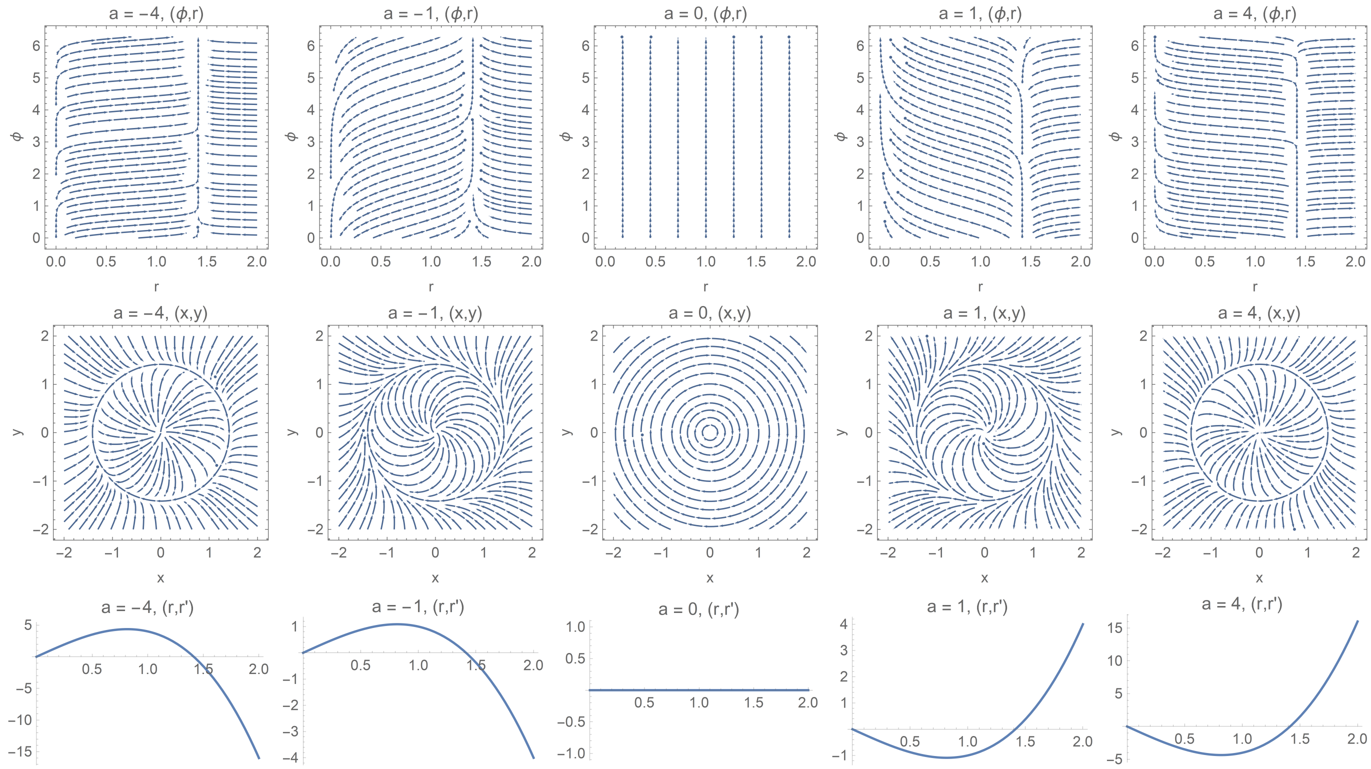

Рис. 1: Фазовые диаграммы 14.12 в различных координатах для различных параметров

2.2 Ф.: 1149

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = x + y + z \\ \dot{x} = x - y \end{cases} \tag{2}$$

Довольно очевидно, что выделить 2 каких-то уравнения без третьей переменной тут не выйдет *(ну или я слишком слаб и не могу этого сделать)* поэтому воспользуемся правилом пропорции (чёрной магией):

$$A/B = C/D = E/F = k; \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0 \to \frac{\alpha A + \beta C + \gamma E}{\alpha B + \beta D + \gamma F} = k$$

Тогда можно записать учитывая $k = dt$:

$$\frac{\alpha dx + \beta dy + \gamma dz}{\alpha(y - x) + \beta(x + y + z) + \gamma(x - y)} = dt$$

Возьмём $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1$ тогда знаменатель обнулится, а значит и числитель должен быть ноль *(на самом деле можно было бы сформулировать этот шаг гораздо проще, просто вычитая первое и третье уравнения друг из друга, но 1) правило пропорции весьма полезная штуковина в этих задачах, так что чего бы не сформулировать его, 2) обожаю делить на 0 эхэхэхэхэ*

Итак, мы получаем что: $dx + dz = 0$ а значит мы нашли первый интеграл системы 2: $C_1 = x + z$. Подставим его во второе и первое уравнения 2 и получим

$$\frac{dy}{y+C_1} = \frac{dx}{y-x}$$
$$y'(y-x) = (y+C_1)$$
$$//y = x+t//$$
$$tt' = x + C_1$$
$$t^2 = x^2 + 2C_1x + C_2$$
$$C_2 = y^2 - 2xy + 2(x+z)x$$

Найдены 2 ПИ. Осталось проверить их на независимость.

$$\operatorname{rg}\begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x} & \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_1}{\partial z} \\ \frac{\partial C_1}{\partial x} & \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_1}{\partial z} \end{vmatrix} = \operatorname{rg}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2y+4x+2z & 2y-2x & 2x \end{vmatrix} = 2$$

тут хочется сказать 2 вещи: 1) интегралов целая куча зависимых, и то что мой C_2 не совпадает с ответом в задачнике, это ок, потому что они друг через друга выражаются 2) так-то очевидно что они независимы, всё-таки второй зависит от y а перавый - нет; но на письмаках требуют считать ранг, потому проверяю так

Ответ: $C_2 = y^2 - 2xy + 2(x+z)x$, $C_1 = \frac{11(x+y)}{09.2002}$

2.3 T1

Найти первые интегралы уравнений. Используя их, исследовать поведение траекторий на фазовой плоскости.

а) $\ddot{x} + \sin(x) = 0$

Сделаем замену $\dot{x} = y$ тогда:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin(x) \end{cases}$$

по правилу пропорции и обнуляя знаменатель:

$$\frac{\alpha dx + \beta dy}{\alpha y - \beta \sin(x)} = dt$$
$$//\beta = y, \alpha = \sin(x)//$$
$$-\cos(x) + \frac{y^2}{2} = C_1$$

Второго первого интеграла тут не будет, иначе бы задача математического маятника решалась слишком легко. Зато у нас есть интеграл энергии. Из него можно немного подумать и получить различные ситуации: $C_1 = 0$, $C_1 > 0$, $C_1 < 0$.Подставив этот первый игнтеграл, можно сделать линеаризацию системы, получить что $(2\pi n, 0)$ - центры, $(\pi(2k-1), 0)$ - сёдла, и получить такое поведение: 2

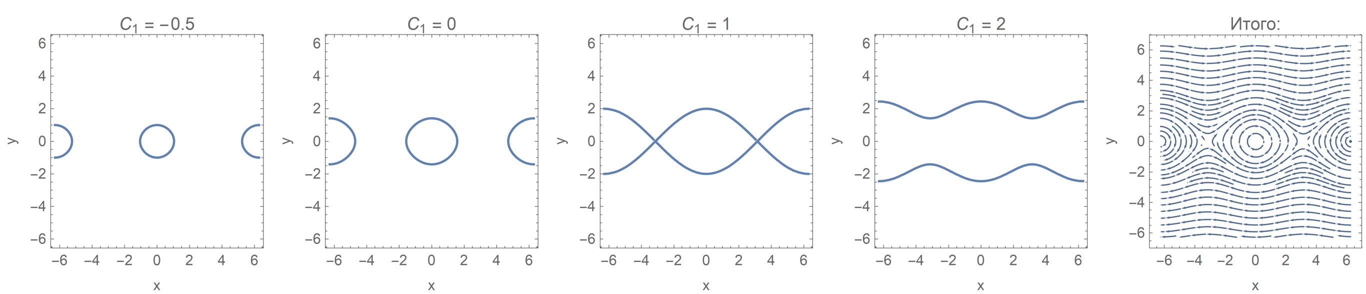

Рис. 2: T1(a)

б) $\ddot{x} - x + x^2 = 0$

Сделаем замену $\dot{x} = y$ тогда:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^2 \end{cases}$$

по правилу пропорции и обнуляя знаменатель:

$$\frac{\alpha dx + \beta dy}{\alpha y + \beta(x - x^2)} = dt$$
$$//\beta = y, \alpha = -(x - x^2)//$$
$$-3x^2 + 2x^3 + 3y^2 = C_1$$

Можно построить эту петельку: 3

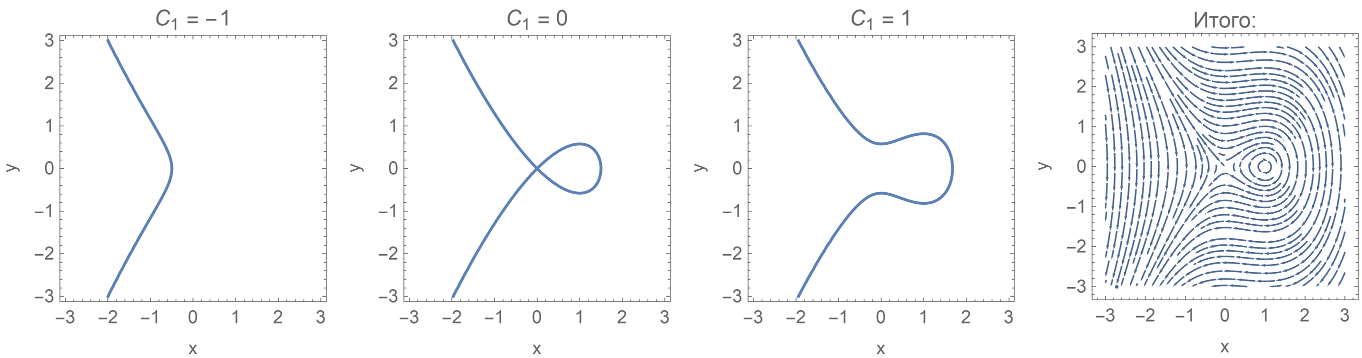

Рис. 3: Т1(б)

2.4 С. §16: 5

Найдя первый интеграл, решить систему в указанной области

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{x}{y}, \\ \dot{y} = \frac{y}{x}, (x > 0, y > 0). \end{cases} \tag{3}$$

Поскольку $dx\frac{y}{x} + dy\frac{x}{y} = 0$:

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{dx}{x^2}$$
$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + C_1$$
$$y = \frac{x}{C_1 x - 1}$$

Подставим y в первое уравнение 3:

$$\dot{x} = 1 - C_1 x$$
$$\frac{dx}{1 - C_1 x} = dt$$
$$x = \frac{C_2}{C_1} e^{-C_1 t} + \frac{1}{C_1}$$

Подставим x в y и получаем ответ:
Ответ: $x = \frac{C_2}{C_1} e^{-C_1 t} + \frac{1}{C_1}$, $y = \frac{e^{C_1 t}}{C_1 C_2} + \frac{1}{C_1}$ *ответ не сходится с ответом в учебнике в силу разных обозначений C_2. Так-то ответ мой правильный (ответ учебника я в вольфраме не проверял)*

2.5 С. §16: 26

Найдя два независимых первых интеграла системы, решить систему в указанной области.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = 2x^3 - xy - z, \\ \dot{z} = xz - 2x^4, (x > 0) \end{cases} \tag{4}$$

Хмм, кажется что первое уравнение системы интегрируется. Ну раз так, проинтегрируем: $x = \frac{1}{C_1 - t}$. Далее смотрим на оставшиеся 2 уравнения. Возьмём то в котором кроме x не более 1 другой переменной. Т.е. третье. Подставив x можем получить:

$$\dot{z} = \frac{z}{C_1 - t} - 2\frac{1}{(C_1 - t)^4}$$

$$//\tau = C_1 - t, \dot{z} = -\frac{dz}{d\tau} = -z'//$$

$$z' + \frac{z}{\tau} = 2\frac{1}{\tau^4}$$

$$//\text{О, это же уравнение Эйлера, его мы умеем решать заменой } \tau = e^T, z'_\tau = z'_T e^{-T}//$$

$$z' + z = 2e^{-3T}$$

$$//\text{находит общее, угадываем частное, благо тут оно очевидное и получаем ответ}//$$

$$z(T) = C_2 e^{-T} - e^{-3T} = z(\tau) = \frac{C_2}{\tau} - \frac{1}{\tau^3} = z(t) = \frac{C_2}{C_1 - t} - \frac{1}{(C_1 - t)^3}$$

Теперь подставим $x(t)$ и $z(t)$ во второе уравнение системы 4:

$$\dot{y} = \frac{3}{(C_1 - t)^3} - \frac{C_2}{(C_1 - t)} - \frac{y}{C_1 - t}$$

$$//C_1 - t = e^T, \dot{y} = y'_T e^{-T}//$$

$$-y' e^{-T} = 3e^{-3T} - C_2 e^{-T} - y e^{-T}$$

$$y' - y = C_2 - 3e^{-2T}$$

$$y(T) = C_3 e^T - C_2 + e^{-2T} = y(t) = C_3(C_1 - t) - C_2 + \frac{1}{(C_1 - t)^3}$$

И чтобы посмотреть на этот ужас скопанованно:
Ответ: $x(t) = \frac{1}{C_1 - t}$,
$y(t) = C_3(C_1 - t) - C_2 + \frac{1}{(C_1 - t)^3}$,
$z(t) = \frac{C_2}{C_1 - t} - \frac{1}{(C_1 - t)^3}$.
На самом деле надо ещё показать что первые интегралы C_1, C_2 независимы. Ну если очень хочется можно их выразить, явно посчитать ранг и т.д. Но я воспользуюсь следующим утверждением: поскольку система разрешима (мы смогли решить 2 уравнение) с использованием этих первых 2 интегралов, то они независимы. *Пока эти первые интегралы больше используются, как окнстанты. И мало смысла смотреть на них как-то иначе. В следующей части задания это будет не совсем так.*

3 II. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

3.1 С. §17: 5

3.2 С. §17: 16

3.3 С. §17: 22

3.4 С. §17: 79

3.5 С. §17: 83

3.6 Т2

4 III. Вариационное исчисление

4.1 С. §19: 21

4.2 С. §19: 45

4.3 С. §19: 72

4.4 С. §19: 105

4.5 Т3

4.6 С. §20.1: 9

4.7 С. §20:

4.8 Т4

4.9 С. §20.2: 5

4.10 С. §20.3: 2

4.11 С. §21: 1

4.12 Т5*