

ЗАМЕТКИ КУРСА «АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА II»

Семинарист: Сахаров А. В.

Восторженные слушатели: Хоружий К.
Примак Е.

От: 16 марта 2021 г.

Содержание

1	Малые колебания консервативных систем.	2
2	Вынужденные колебания и диссипативные системы	3
2.1	Вынужденные колебания	3
2.2	Диссипативные системы	4
3	Элементы теории бифуркаций	5
3.1	Двумерные динамические системы	5
4	Метод усреднений и нормальные формы	5
4.1	Метод усреднений	5
4.2	Нормальная форма Коши	6
5	Уравнение Гамильтона	6
5.1	Немного геометрии	7
5.2	Уравнения Гамильтона	7
5.3	Уравнения Рауса	8
5.4	Уравнения Уиттекера	8
6	Интегралы системы	8
6.1	Интегральные инварианты	9
6.2	Обратные теоремы теории интегральных инвариантов	10

1 Малые колебания консервативных систем.

Запишем уравнения Лагранжа для консервативной голономной системе:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad q \in M^n; \quad q, \dot{q} \in TM^n.$$

Тогда можно сказать, что

$$L(q, \dot{q}, t): TM^n \times \mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{R}^1.$$

Параллельным переносом выберем $q = 0$ – положение равновесия. Тогда считаем, что $q(t), \dot{q}(t) \in \varepsilon$ – окрестности. В идеале мы хотим всё линейризовать, тогда

$$T = T_2 + T_1 + T_0 = T_2 = \frac{1}{2} \dot{q}^i \dot{q}^j A_{ij}(q) \approx \frac{1}{2} \dot{q}^T A(0) \dot{q} + \dots, \quad A(0) = \frac{\partial^2 T(0)}{\partial \dot{q}^T \partial \dot{q}}.$$

т. к. для консервативных систем $T_1 = T_0 = 0$.

Аналогично можем сделать для потенциальной энергии

$$\Pi = \Pi(0) + \frac{\partial \Pi(0)}{\partial q^T} q + \frac{1}{2} q^T \frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial q^T \partial q} q + \dots \approx \frac{1}{2} q^T C(0) q, \quad C(0) = \frac{\partial^2 \Pi(0)}{\partial q^T \partial q}.$$

Таким образом мы пришли к уравнениям вида

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A\ddot{q} + Cq = 0.}$$

Последнее уравнение называется *уравнением малых колебаний*. Важно, что A – положительно определена, в силу невырожденности уравнений на \dot{q} уравнений Лагранжа.

Из линейной алгебры понятно, что существуют координаты $\theta \in M^n$, а также невырожденная матрица перехода к новым координатам $U: q = U\theta$, и $U^T A U = E$, $U^T C U = \Lambda$ – диагональная матрица. Тогда верно, что

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T U^T A U \dot{\theta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i^2.$$

Аналогично для потенциальной энергии

$$\Pi = \frac{1}{2} q^T C q = \frac{1}{2} \theta^T U^T C U \theta = \frac{1}{2} \theta^T \Lambda \theta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \lambda_i \theta_i^2.$$

Это ещё сильнее упрощает уравнения Лагранжа:

$$A\ddot{q} + Cq = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta}_i + \lambda_i \theta_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь λ_i – действительные диагональные элементы Λ . При различных λ получаем, что

$$\begin{aligned} \lambda_i > 0 & \Rightarrow \theta_i = c_i \sin(\sqrt{\lambda_i} t + \alpha_i); \\ \lambda_i = 0 & \Rightarrow \theta_i = c_i t + \alpha_i; \\ \lambda_i < 0 & \Rightarrow \theta_i = c_i \exp(\sqrt{-\lambda_i} t) + \alpha_i \exp(-\sqrt{-\lambda_i} t). \end{aligned}$$

где последние два – уже не колебаниям.

Возвращаясь к удобной форме, получаем, что

$$q = U\theta = \sum_{i=1}^n c_i u_i \sin(\sqrt{\lambda_i} t + \alpha_i),$$

где u_i – амплитудный вектор i -го главного колебания. Таким образом консервативная система движется по суперпозиции некоторых главных колебаний (гармонических осцилляций).

Иначе мы можем интерпретировать это так, что кинетическая энергия¹ образует некоторую метрику, а амплитудные вектора образуют некоторый ортонормированный базис.

$$U^T A U = E \quad \Rightarrow \quad u_i^T A u_j = \delta_{ij}$$

Получив матрицы A, C переходим к $[C - \lambda A]u = 0$, получая

$$|C - \lambda A| = 0,$$

что называют *вековым уравнением*, или *уравнением частот*. Из него получим $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, и уже перейдём к системе уравнений вида $|C - \lambda_i A| u_i = 0$.

¹Переписать грамотнее.

2 Вынужденные колебания и диссипативные системы

2.1 Вынужденные колебания

Давайте испортим консервативность так, чтобы

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i(t).$$

Как выяснили ранее

$$q = U\theta, \quad U^T AU = E, U^T CU = \Lambda.$$

Посчитаем элементарную работу добавленной силы

$$\delta A = Q_i \delta q^i = \Theta^T \delta \theta = Q^T U \delta \theta,$$

тогда можно записать, что

$$\Theta = U^T Q, \quad Q = (U^T)^{-1} \Theta,$$

то есть преобразование обобщенных сил. То есть уравнение приходит к виду

$$A\ddot{q} + Cq = Q(t), \quad \text{бог с индексами} \quad \ddot{q}_i + \lambda_i \theta_i = \Theta_i(t).$$

Тогда ответ запишется в виде

$$q = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{u}_i \sin(\sqrt{\lambda_i} t + \alpha_i) + \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \theta_i^*(t),$$

где вторая сумма соответствует *вынужденным колебаниям*, а первая свободным гармоническим колебаниям.

Пусть так вышло, что

$$\begin{cases} \theta_i^* = b_i \sin(\Omega t) \\ \Theta_i(t) = a_i \sin(\Omega t) \end{cases} \Rightarrow b_i (\lambda_i - \Omega^2) = a_i, \quad \Rightarrow \theta_i^* = \frac{a_i}{\lambda_i - \Omega^2} \sin(\Omega t).$$

В случае же резонанса ищем решение в виде

$$\theta_i^*(t) = b_i t \cos(\Omega t), \quad \Rightarrow b_i = -\frac{a_i}{2\Omega}.$$

И здесь мы видим первые звоночки от Пуанкаре, о конце линейной теории.

Задача 1 (18.42)

Есть некоторая платформа, перемещающаяся по закону $a \sin \omega t$. На ней подвешены куча стержней, соединенных пружинами разной упругости, на разных высотах. Вопрос – на каких ω возможен резонанс?

Перейдём в СО платформы, тогда возбуждающая сила – сила инерции, соответственно для всех стержней возбуждающая сила одинаковая

$$\mathbf{J}_i^e = -m\mathbf{w}_i^e = m\omega^2 a \sin(\omega t) \mathbf{e}.$$

Посчитаем обобщенные силы, как

$$Q_1^e = \dots = Q_n^e = \frac{\delta A_i}{\delta \varphi_i} = \frac{(\mathbf{J}_i^e \cdot \delta \mathbf{r}_i)}{\delta \varphi_i} = \frac{1}{2} m \omega^2 a l \sin(\omega t).$$

Получается, что мы посчитали столбец обобщенных сил

$$\mathbf{Q} = \frac{l}{2} [1, 1, \dots, 1]^T a \omega^2 m \sin(\omega t).$$

По крайней мере мы можем сказать, что у нас есть главная частота

$$\lambda_1 = \frac{3g}{2l}, \quad \mathbf{u}_1 = [1, 1, \dots, 1]^T.$$

Теперь выпишем матрицу кинетической энергии

$$A = \frac{ml^2}{6} E, \quad U^T AU = E, \quad \Rightarrow UU^T = E,$$

с точностью до множителя. Тогда $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ – ортогональный базис.

Теперь вспоминаем, что

$$\Theta = U^T Q = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \dots \\ \mathbf{u}_n^T \end{pmatrix} \mathbf{u}_1 \frac{1}{2} a \omega^2 l m \sin(\omega t) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \cdot \mathbf{u}_1 \\ \dots \\ \mathbf{u}_n^T \cdot \mathbf{u}_1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} a \omega^2 l m \sin(\omega t) = \begin{pmatrix} n \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_1 \frac{1}{2} a \omega^2 l m \sin(\omega t).$$

Ура, от сих приходим к приятным уравнениям Лагранжа

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_q + \lambda_1 \dot{\theta}_1 = na\omega^2 \frac{l}{2} \sin \omega t, \ddot{\theta}_2 + \lambda_2 \theta_2 \\ \dots \\ \ddot{\theta}_n + \lambda_n \theta_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{3g}{2l}}.$$

2.2 Диссипативные системы

И снова испортим консервативную систему до диссипативной,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + \tilde{Q}_i(\dot{q}) = Q_i(q, \dot{q}).$$

С кинетической всё как обычно, тогда

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T A \dot{\mathbf{q}}; \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(0) + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}^T} \mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{Q}(0)}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} \dot{\mathbf{q}} = -C\mathbf{q} - B\dot{\mathbf{q}}.$$

Где ввели матрицы вида

$$C = -\frac{\partial \mathbf{Q}(0)}{\partial \mathbf{q}^T}; \quad B = -\frac{\partial \mathbf{Q}(0)}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T}.$$

В таком случае уравнение примет вид

$$A\ddot{\mathbf{q}} + B\dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} = 0, \quad (2.1)$$

получили *линеаризация уравнений Лагранжа I*. Но его сходу к каноническому виду не привести.

Вспомним, что энергия системы

$$E = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}} \cdot A \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \mathbf{q} \cdot C \mathbf{q}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = A\ddot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} = [A\ddot{\mathbf{q}} + C\mathbf{q}] \cdot \dot{\mathbf{q}} = -B\dot{\mathbf{q}}^2 = N.$$

И пошла классификация: если $N \equiv 0$, то силы называем *гироскопическими*. Если $N \leq 0$, то силы *диссипативные*.

Def 2.1. Положение равновесия \mathbf{q}^* называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и

$$\exists \delta: \forall |\dot{\mathbf{q}}| < \delta, |\mathbf{q}| < \delta \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{q}(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{q}}(t) = 0.$$

Возвращаясь к уравнению, вспомним что решение ищется в виде²

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^{2n} C_i \mathbf{u}_i \exp(\lambda_i t), \quad \Rightarrow \quad [A\lambda^2 + B\lambda + C] \mathbf{u} = 0, \quad \Rightarrow \quad \det [A\lambda^2 + B\lambda + C] = 0,$$

тогда мы находим $2n$ решений $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$, и, соответственно, $2n$ амплитудных векторов.

Thr 2.2 (Достаточное условие асимптотической устойчивости). *Для того, чтобы решение $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$ было асимптотически устойчиво достаточно, чтобы*

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, 2n\}.$$

Если $\exists \lambda_i: \operatorname{Re} \lambda_i > 0$, тогда всё не так хорошо.

Как узнать, что ..., для этого достаточно посмотреть на рыбу

$$a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + a_0 = 0,$$

и отрезем голову и хвост, получим матрицу

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & \dots & 0 \\ a_m & a_{m-2} & \dots & 0 \\ 0 & a_{m-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix},$$

так получили матрицу Гурвица.

Thr 2.3 (Критерий Рауса-Гурвица). *Для того, чтобы $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ необходимо и достаточно, чтобы $a_i > 0$, и*

$$\Delta_1, \Delta_3, \dots, \Delta_{m-1} > 0.$$

Есть другие формы.

²В общем случае решение системы вообще сложнее (при кратных λ), но качественно всё примерно в таком же духе, поэтому, ну, всё хорошо.

3 Элементы теории бифуркаций

Общий подход

Запишем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q,$$

где основная идея Гамильтонова формализма – всегда уравнения разрешимы относительно ускорений $\ddot{q} = \ddot{q}(q, \dot{q})$. Пусть $x_1 = q_1$, $x_2 = \dot{q}_1$, $x_3 = q_2$, $x_4 = \dot{q}_2$, и т.д. Приведем уравнения к *нормальной форме Коши*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in M^{2n},$$

где M^{2n} – фазовое пространство, или пространство состояний.

Не умоляя общности будем просто рассматривать системы вида $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, считая, что $\mathbf{x} \in M^n$. Посмотрим на некоторую $\mathbf{x}_0 \in M^n$, – начальные условия. Продолжаем считать, что решение охалки диффузов единственно, тогда и через каждую точку конфигурационного многообразия проходит единственная траектория.

Def 3.1. Множество траекторий (интегральных кривых) образует *фазовый портрет*. *Бифуркация* – качественное изменение фазового портрета при плавном изменении параметров модели. *Бифуркационная диаграмма* отображает бифуркацию системы.

3.1 Двумерные динамические системы

Посмотрим ещё на системы на \mathbb{R}^2 .

Def 3.2. *Предельный цикл* – замкнутая периодическая траектория (ЗПТ) системы дифференциальных уравнений, изолированная от других ЗПТ. Также ЗПТ такая, что для всех траекторий из некоторой окрестности периодических траекторий стремится к ней при $t \rightarrow +\infty$ (установившийся периодический цикл) **или** при $t \rightarrow -\infty$ (неустановившийся предельный цикл).

Другими словами является аттрактором для некоторой своей окрестности.

4 Метод усреднений и нормальные формы

4.1 Метод усреднений

Рассмотрим уравнение вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon h(x, \dot{x}) = 0.$$

Рассмотрим систему в терминах быстрого времени $\tau = t$ и медленного $T = \varepsilon t$. В первом приближение получим, что

$$\begin{aligned} O(1): \quad & x_0 = r(T) \cos(\omega\tau + \varphi(T)) \\ O(\varepsilon): \quad & \partial_\tau^2 x_1 + \omega^2 x_1 = -2\partial_\tau \partial_T x_0 - h = +2\omega \partial_T (r \cos(\omega\tau + \varphi)) - h = \\ & = 2\omega(r' \sin(\omega\tau + \varphi)) + r\varphi' \cos(\omega\tau + \varphi) - h \end{aligned}$$

и далее будем считать, что $\omega\tau + \varphi = \theta$, и разложим h в ряд Фурье. Тогда

$$h = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta,$$

соответственно, дабы убить резонансные слагаемые,

$$\begin{aligned} 2\omega r' - b_1 = 0 \\ 2\omega r\varphi' - a_1 = 0. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega r' = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h \sin \theta d\theta = \langle h \sin \theta \rangle \\ \omega r\varphi' = \dots = \langle h \cos \theta \rangle \end{cases}$$

Осциллятор Ван дер Поля

Рассмотрим уравнения вида

$$\ddot{x} + x + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} = 0,$$

что соответствует рассмотренному случаю с $\omega = 1$, или $(\tau + \varphi = \theta)$

$$\begin{aligned} h &= (r^2 \cos^2(\tau + \varphi) - 1)(-r \sin(\tau + \varphi)) = \\ &= r(\sin \theta - r^2 \cos^2 \theta \sin \theta), \end{aligned}$$

тогда

$$r' = r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta - r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) d\theta = \frac{r}{2} \left(1 - \frac{r^2}{4}\right),$$

что соответствует возникновению предельного цикла радиуса 2.

4.2 Нормальная форма Коши

Продолжаем рассматривать

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = 0: \mathbf{f}(0) = 0,$$

также будем считать, что $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ – аналитическая функция, и разложим её в ряд. Уравнение вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}),$$

хотим свести к линейному виду. Сделаем следующую замену

$$\mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \Lambda \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}),$$

далее сделаем замену

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{y} + \mathbf{p}(\mathbf{y}),$$

где $\mathbf{p}(\mathbf{y})$ – «вектор» из полиномов минимальной нелинейной степени.

Прямой подстановкой получаем, что

$$\dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}^T} \dot{\mathbf{y}} = \left(E + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}^T}\right) \dot{\mathbf{y}} = \Lambda \mathbf{y} + \Lambda \mathbf{p} + \mathbf{g}(\mathbf{y} + \mathbf{p}), \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{y}} = \left(E + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}^T}\right)^{-1} (\Lambda \mathbf{y} + \Lambda \mathbf{p} + \mathbf{g}(\mathbf{y} + \mathbf{p})),$$

а теперь разложим всё в ряд и оставим слагаемые степени не более $\deg \mathbf{p} = k$, тогда

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \left(E - \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}^T}\right) (\Lambda \mathbf{y} + \Lambda \mathbf{p} + \mathbf{g}^m(\mathbf{y})) + O(|\mathbf{y}|^{m+1}) = \\ &= \Lambda \mathbf{y} + \Lambda \mathbf{p} + \mathbf{g}^m(\mathbf{y}) - \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}^T} \Lambda \mathbf{y} + O(|\mathbf{y}|^{m+1}). \end{aligned}$$

Вспомним, что понятно как выглядит p_i

$$p_i = \sum_{k_1, \dots, k_n} p_{k_1, \dots, k_n}^i y^{k_1} \dots y^{k_n}, \quad k_1 + \dots + k_n = m,$$

а также g_i^m

$$g_i^m = \sum_{k_1, \dots, k_n} g_{k_1, \dots, k_n}^i y^{k_1} \dots y^{k_n},$$

работая с каждым мономом приходим к уравнениям

$$\lambda_i p_{k_1, \dots, k_n}^i - (k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2 + \dots + k_n \lambda_n) p_{k_1, \dots, k_n}^i = -g_{k_1, \dots, k_n}^i, \quad \Rightarrow \quad p_{k_1, \dots, k_n}^i = \frac{-g_{k_1, \dots, k_n}^i}{\lambda_i - (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\lambda})},$$

что приводит нас к следующей теореме.

Thr 4.1 (Теорема Пуанкаре-Дюлака). *Можно всё убрать, кроме резонансных слагаемых.*

5 Уравнение Гамильтона

Запишем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad L = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - \Pi.$$

Пусть есть некоторый импульс

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = A \dot{q} + \dots, \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = A^{-1} + \dots, \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} (q, \dot{q}, t) \text{— лагранжевы переменные} \\ (q, p, t) \text{— гамильтоновы переменные} \end{array}$$

5.1 Немного геометрии

Было конфигурационное многообразие размерности n . Каждому состоянию соответствует точка на многообразии, $\dot{q} \in T_q M$. Собственно, $p \in T_q^* M$ (TM – касательное расслоение) лежит в кокасательном пространстве (T^*M – кокасательное расслоение)(почему?). Тогда возьмем некоторый функционал

$$H(q, p, t): T^*M \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1.$$

Считая $(q, t) = \text{const}$

$$dL = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot d\dot{q} = p \cdot d\dot{q}, \quad d(\dot{q}p) = p d\dot{q} + \dot{q} dp = dL + \dot{q} dp.$$

Тогда давайте всё сгруппируем

$$d(\dot{q}p - L) = \dot{q} dp = \frac{\partial H}{\partial p} dp.$$

То есть $dL = p dq$, а $dH = \dot{q} dp$.

Def 5.1. Определим гамильтониан, как

$$H(q, p, t) \stackrel{\text{def}}{=} p \cdot \dot{q}(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t).$$

5.2 Уравнения Гамильтона

Запишем дифференциал Гамильтониана

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \\ dH &= \dot{q} dp + p d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q} dq - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Во-первых отсюда следует, что

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (5.1)$$

Также имея право приравнивать коэффициенты

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}}. \quad (5.2)$$

Которые, о чудо, уже существуют в нормальной форме Коши.

Замечания

Консервативные системы

Для консервативной системы

$$L = T_2 - \Pi, \quad \Rightarrow \quad H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q} - T_2 + \Pi = T_2 + \Pi = E. \quad (5.3)$$

Вообще уравнения Гамильтона написал ещё Лагранж, а H , потому что Гюйгенс. А выше мы получили полную механическую энергию.

Общность происходящего

Последовательный курс – некоторая история, должна быть приемственностью тем. В общем так мы и движемся в сторону большей абстракции. Но минус в том, что лагранжева механика и гамильтонова механика существуют сами по себе. Гамильтонова система это (M, ω, H) , где M – конфигурационное $2n$ -мерное многообразие, ω – 2-форма, а H – гамильтониан, то есть функция гамильтоновых переменных.

Задача 19.24

Есть некоторая сфера, у которой радиус – известная функция времени $R(t)$ (реономная связь), есть сила тяжести g . В качестве координат выберем сферические θ, φ .

$$\mathbf{r} = (\dots) \quad \Rightarrow \quad T = \frac{m}{2}(R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{m}{2} \dot{R}^2.$$

Потенциальная энергия

$$\Pi = mgR \cos \theta.$$

Теперь

$$\begin{aligned} p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\theta} = mR^2 \dot{\theta}, & \Rightarrow & \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}, \\ p_\varphi &= mR^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta, & \Rightarrow & \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2 \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

Теперь

$$H = p \cdot q - L = p_\varphi \varphi + p_\theta \dot{\theta} - L = \frac{mR^2}{2} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right) - \frac{m}{2} \dot{R}^2(t) + mgR(t) \cos \theta.$$

Запишем теперь уравнения Гамильтона

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2 \sin^2 \theta},$$

что вполне логично, а также второй набор

$$\dot{p}_\theta = -mg\dot{R}$$

5.3 Уравнения Рауса

Идея в том, что можно делать преобразование только по некоторому набору переменных, что приводит нас к функции Рауса

$$R = \left(\sum_{i=k+1}^n p_i \hat{q}_i \right) - L(q, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{k+1}, \hat{q}_k, \dots, \hat{q}_n, t),$$

где шляпка соответствует выражению через q, p, t . Можно ещё здесь уравнения записать, см. билеты.

5.4 Уравнения Уиттекера

Хочется уменьшать порядок дифференциальных уравнений. Пусть $H(q, p) \equiv h$. Тогда у нас есть некоторая $2n - 1$ -поверхность. Пусть

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} \neq 0, \quad \Rightarrow \quad p_1 = -K(q, p_2, \dots, p_n, h).$$

Получается, что траектории заполняют не всё пространство, а некоторое его подпространство. Количество уравнения можем сменить с $2n$ до $2n - 2$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial p_i} = 0.$$

Теперь выпишем уравнения Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, & \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{dq_i}{dq_1} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \bigg/ \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dq_1} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \bigg/ \frac{\partial H}{\partial p_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_i}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (5.4)$$

Красота и победа!)

6 Интегралы системы

Есть система Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{q} = \partial_p H \\ \dot{p} = -\partial_q H \end{cases}$$

и для них существуют первые интегралы – $\varphi(q, p, t)$ – сохранение на любых траектория движения системы.

Как их получать? Во-первых, до тех пор, пока гамильтонин явно от времени не зависит – это первый интеграл:

$$\partial_t H = 0, \quad \Rightarrow \quad d_t H = 0.$$

Аналогично

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = 0, \quad \Rightarrow \quad p_i = \text{const.}$$

Def 6.1. Скобкой Пуассона для функции гамильтоновых переменных может быть определена, как

$$\{\varphi, \psi\} = \frac{\partial \varphi}{\partial q} \frac{\partial \psi}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial q}.$$

Что происходит и почему

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \{\varphi, H\} = 0,$$

соответственно скобки пуассона – вполне логичный критерий первого интеграла.

Thr 6.2. Если φ, ψ – первые интегралы, то $\{\varphi, \psi\}$ – это первый интеграл или число.

Первые интегралы бывают зависимы, так для $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ можем составить

$$\text{rg} \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(q^i, p_j, t)} = m.$$

Thr 6.3 (Теорема Э. Нетер). Пусть есть некоторое однопараметрическое семейство $\tilde{q} = \tilde{q}(q, t, \alpha)$ и $\tilde{t} = \tilde{t}(q, t, \alpha)$ где $\alpha \in \mathbb{R}^1$ такое, что дифференцируемо, $\alpha = 0 \sim$ тождественное преобразование, и

$$L\left(\tilde{q}, \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{t}}, \tilde{t}\right) d\tilde{t} = L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) dt.$$

Тогда в системе есть первый интеграл, который вычисляется так:

$$\varphi(q, p, t) = \tilde{p} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} - H \cdot \left(\frac{\partial \tilde{t}}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}.$$

Например,

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= q + \alpha, & \Rightarrow & \quad p_q = \text{const} \\ \tilde{t} &= t + \alpha, & \Rightarrow & \quad H = \text{const.} \end{aligned}$$

Задача 1

Пусть есть некоторая точка в радиальном потенциальном поле. Лагранжиан

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - \Pi(r).$$

Тогда вполне логично рассмотреть $\tilde{\varphi} = \varphi + \alpha$, тогда

$$I = p_{\varphi} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi},$$

так что момент сохраняется. Вопрос: если есть первый интеграл, то существует ли симметрия для этого первого интеграла?

6.1 Интегральные инварианты

Def 6.4. Интегральный инвариант – интегральное выражение, от гамильтоновых переменных, сохраняющееся на некоторой области траектории прямых путей.

Скажем, что N – конфигурационное многообразие, $(q, \dot{q}) \in TN$, также введем $\mathbf{x} = (q, p)^T$, где

$$\mathbf{x} \in M^{2n} \equiv T^*N.$$

Продолжим итерации, перейдем к

$$(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \in TM^{4n}.$$

Теперь введем некоторый

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \equiv L(q, p, \dot{q}, \dot{p}, t) = p \cdot \dot{q} - H(q, p, t).$$

Также мы знаем, что

$$\delta \int L dt = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad \Rightarrow \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

что верно для задачи варьирования за закрепленными концами.

Тогда

$$\delta \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L dt = (p\delta q - H\delta t) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \cdot \delta q + \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \cdot \delta p \right] dt.$$

Это приводит нас к **трубке прямых путей**. Вводим согласованные контуры по α .

Вспоминаем, что

$$\int_{\alpha=0}^{\alpha=1} \delta S(\alpha) = S(1) - S(0) \equiv 0.$$

Тогда

$$\oint_{C_0} (p\delta q - H\delta t) - \oint_{C_1} (p\delta q - H\delta t) = 0,$$

что в силу произвольности выбранных контуров

$$J_{\text{ПК}} = \oint_C (p\delta q - H\delta t) = \text{const}$$

что приводит нас к *интегралу Пуанкаре-Картана*.

В изохронном случае

$$I_{\Pi} = \oint p\delta q = \text{const}$$

что приводит к универсальному интегральному инварианту Пуанкаре. Прикол в том, что он не особо зависит от H .

Пример

Пусть $L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - q^2)$, и в качестве C_0 выберем $q = \cos \alpha$ и $\dot{q} = \sin \alpha$, при $t \equiv 0$. Хотелось найти вид трубки прямых путей и посчитать интегральный инвариант:

$$\begin{cases} q = A \cos(t + \alpha) \\ p = \dot{q} = -A \sin(t + \alpha) \end{cases}$$

Тогда

$$q^2 + p^2 = A^2,$$

что соответствует окружности, или, в случае с движением по времени, цилиндру. Интеграл Пуанкаре тогда

$$I_{\Pi} = \oint p\delta q = \int_0^{2\pi} p \frac{\partial q}{\partial \alpha} \delta \alpha = \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha \stackrel{!}{=} A^2 \pi.$$

то есть пока $n = 1$ интеграл Пуанкаре – это просто фазовый объем, который для всех гамильтоновых систем сохраняется.

6.2 Обратные теоремы теории интегральных инвариантов

Пока что мы сформулировали, что если система Гамильтонова, то у нее сохраняется интегральный инвариант Пуанкаре и интегральный инвариант Пуанкаре Картана.

Но верно и обратно, если $\forall \bar{c}$

$$I_{\Pi} = \oint p\delta q = \text{const}, \quad \Rightarrow \quad \exists H(q, p, t).$$

Если же сохраняются для некоторой F интеграл $I_{\text{ПК}}$, то $H = F(q, p, t) + f(t)$.