

БИЛЕТЫ КУРСА «ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

Источник: [an_explanations.pdf](#)

Лектор: Карасёв Р.Н.

Восторженные читатели: Хоружий Кирилл
Примаков Евгений

От: 13 июня 2021 г.

Содержание

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Приближение функций \Rightarrow, в среднем и среднеквадратичном | 3 |
| 1.1 | Приближение функций кусочно-линейными и многочленами | 3 |
| 1.2 | Приближение 2π -периодических функций тригонометрическими многочленами | 4 |
| 1.3 | * Алгебры непрерывных на компактах функций. Теорема Стоуна-Вейерштрасса | 4 |
| 1.4 | Пространства L_p . Неравенства Гёльдера и Минковского. | 5 |
| 1.5 | Полнота пространства L_p | 6 |
| 1.6 | Приближение функций в L_p ступенчатыми и бесконечно гладкими | 7 |
| 2 | Ограниченная вариация, абсолютная непрерывность и осцилляция | 8 |
| 2.7 | Функции ограниченной вариации | 8 |
| 2.8 | Абсолютно непрерывные функции | 9 |
| 2.9 | Абсолютная непрерывность интеграла с переменных верхним пределом | 9 |
| 2.10 | Обобщенная формула Ньютона-Лейбница | 10 |
| 2.11 | Абсолютная непрерывность произведения абсолютно непрерывных и обобщенное интегрирование по частям | 10 |
| 2.12 | Теорема Римана об осцилляции и равномерной осцилляции | 10 |
| 2.13 | Порядок убывания коэффициентов Фурье абсолютно непрерывных функций | 11 |
| 2.14 | Порядок убывания коэффициентов Фурье функций ограниченной вариации | 11 |
| 3 | Ряд Фурье в пространстве L_2 | 12 |
| 3.15 | Неравенство Коши-Буняковского | 13 |
| 3.16 | Неравенство Бесселя и оптимальность коэффициентов Фурье | 13 |
| 3.17 | Полные системы в пространстве L_2 | 14 |
| 3.18 | Равенство Парсеваля для Фурье функций из $L_2[-\pi, \pi]$ | 14 |
| 4 | Тригонометрический ряд Фурье и его сходимость | 15 |
| 4.19 | Интегральное представление частичных сумм ряда Фурье, ядро Дирихле | 15 |
| 4.20 | Принцип локализации для рядов Фурье и равномерный принцип локализации | 16 |
| 4.21 | Признак Липшица равномерной сходимости ряда Фурье | 16 |
| 4.22 | Признак Дирихле равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье на отрезке | 17 |
| 5 | Банаховы пространства | 17 |
| 5.40 | Нормированные векторные и банаховы пространства | 17 |
| 5.41 | Теорема Бэра в банаховом пространстве | 17 |
| 5.42 | Двойственное к банахову пространство | 17 |
| 5.43 | Теорема Банаха-Штейнгауза | 17 |
| 5.44 | Расходимость рядов Фурье | 17 |
| 5.46 | Непрерывные линейные отображения | 18 |
| 5.47 | Факторпространство банахового пространства | 18 |
| 5.48 | Изоморфизм непрерывных линейных отображений | 18 |
| 5.49 | Эпсилон-сети, предкомпактность и вполне ограниченность | 18 |
| 5.50 | Теорема Арцела-Асколи | 18 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 6 | Гильбертовы пространства | 19 |
| 6.51 | Гильбертово пространство | 19 |
| 6.52 | Полнота и замкнутость ортонормированной системы в гильбертовом пр-ве | 19 |
| 6.53 | Изометрии гильбертовых пространств | 19 |
| 6.54 | Метрическая проекция и двойственное к гильбертову пр-во | 19 |
| 6.55 | Двойственное к гильбертову пространству | 19 |
| 7 | Обобщенные функции | 20 |
| 7.63 | Пространство \mathcal{E} и топология в нём | 20 |
| 7.64 | Связь непрерывности и ограниченности | 20 |
| 7.65 | Описание через интегрирование производных по отрезку | 20 |
| 7.66 | Пространство \mathcal{D} и сходимость в нём | 20 |
| 7.67 | Пространство обобщённых функций. Регулярные и нерегулярные | 20 |

1 Приближение функций \Rightarrow , в среднем и среднеквадратичном

1.1 Приближение функций кусочно-линейными и многочленами

Носитель функции – дополнение к объединению всех открытых множеств, на которых функция равна нулю, иначе – замыкание множества точек, в которых функция не равна нулю. Получается носитель функции всегда замкнут и для функций на \mathbb{R}^n компактность носителя означает ограниченность.

Lem 1.1. Для непрерывной с компактным носителем $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $t_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, последовательность $f_n(x) = f(x + t_n) \Rightarrow f$.

Δ . Непрерывная функция с компактным носителем равномерно непрерывна, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}, \forall t, (|t| < \delta \Rightarrow |f(x - t) - f(x)| < \varepsilon),$$

что можно интерпретировать как равномерной сходимости $f(x - t_n) \Rightarrow f(x)$. □

Thr 1.2. Для $|x| < 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

с радиусом сходимости не менее 1.

Lem 1.3. $f(x) = \sqrt{x}$ можно равномерно приблизить многочленами на любом отрезке $[0, a]$.

Δ . Заменой переменной $x = a - y$ сведем вопрос к приближению функции

$$g(y) = \sqrt{a + \delta} \sqrt{1 - \frac{y}{a + \delta}},$$

который раскладывается по предыдущей лемме в степенной ряд при $|y| \leq a + \delta$, причём при $|y| \leq a$ ряд сходится равномерно, тогда $g(y)$ приближается многочленом на $[0, a]$, соответственно и \sqrt{x} тоже. □

Lem 1.4. $f(x) = |x|$ можно равномерно приблизить многочленами на любом отрезке $[-a, a]$.

Δ . На отрезке $[0, a^2]$ приближаем \sqrt{t} многочленом $|\sqrt{t} - P(t)| < \varepsilon$. Подставим $x = \sqrt{t}$, тогда на $x \in [0, a]$ верно $|x - P(x^2)| < \varepsilon$, что можно продолжить на $[-a, a]$, продолжая x чётным образом как $|x|: ||x| - P(x^2)| < \varepsilon$. □

Thr 1.5. Всякую непрерывную кусочно-линейную на отрезке $[a, b]$ функцию можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленом.

Δ . Если функция со скачком производной на Δ , то $f(x) - \Delta/2|x - x_i|$ будет уже без скачка, тогда кусочно-линейная представится в виде

$$f(x) = \sum_i c_i |x - x_i| + ax + b,$$

где каждое слагаемое уже приближаемо. □

Этого достаточно, чтобы приближать кусочно-линейные многочленами. Осталось понять, как приближать непрерывные на отрезке функции кусочно-линейными. Определим

$$\varphi_\delta(x) = \begin{cases} 0, & x < -\delta, \\ 1 - |x|/\delta, & |x| \leq \delta \\ 0, & x > \delta. \end{cases}$$

Такая функция кусочно линейная, непрерывная, и её носитель – $[-\delta, \delta]$.

Lem 1.6. Для непрерывной $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$: $\sum_{k=0}^m f(k/m) \varphi_{1/m}(x - k/m) \Rightarrow f$.

△. Воспользуемся разбиением единицы

$$\sum_{k=0}^m \varphi_{1/m}(x - k/m) = 1.$$

Умножая это на $f(x)$ и вычитая $f_m(x)$, получаем

$$f(x) - f_m(x) = \sum_{k=0}^m (f(x) - f(k/m)) \varphi_{1/m}(x - k/m).$$

При фиксированном x в правой части слагаемые ненулевые только при $|x - k/m| < 1/m$. Тогда правую часть оценим через модуль непрерывности

$$\left| \sum_{k=0}^m (f(x) - f(k/m)) \varphi_{1/m}(x - k/m) \right| \leq \sum_{k=0}^m \omega_f(1/m) \varphi_{1/m}(x - k/m) = \omega_f(1/m),$$

который стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$ по непрерывности f . Напомним, что

$$\omega_f(\delta) = \sup \{ \rho(f(x) - f(y)) \mid x, y \in M, \rho(x, y) < \delta \}$$

□

Thr 1.7. *Всякую $f: [a_1, b_1] \times [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{R}$ можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленом.*

△. Сначала масштабируем параллелепипед в единичный куб. Потом равномерно приближаем непрерывную функцию комбинацией произведений кусочно-линейных функций отдельных переменных:

$$f: [0, 1]^n \mapsto \mathbb{R}, \quad f_m(x) = \sum_{k_1, \dots, k_n} f\left(\frac{k_1}{m}, \dots, \frac{k_n}{m}\right) \varphi_{1/m}\left(x_1 - \frac{k_1}{m}\right) \dots \varphi_{1/m}\left(x_n - \frac{k_n}{m}\right).$$

Потом их приближаем многочленами.

□

sw

1.2 Приближение 2π -периодических функций тригонометрическими многочленами

Thr 1.8 (теорема Вейерштрасса). *Всякую непрерывную на $[-\pi, \pi]$ функцию 2π -периодичную $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которой $f(-\pi) = f(\pi)$ можно сколько угодно точно равномерно приблизить*

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

△. Многочлен от тригонометрического многочлена – всё ещё многочлен. Рассмотрим некоторую непрерывную $g(\cos x)$, которую можем приблизить на компакте $P(\cos x)$. В частности, можем приблизить 2π -периодическую функцию

$$\psi_\delta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_\delta(x - 2\pi k),$$

так как она чётна и 2π -периодична, а значит зависит от $\cos x$ непрерывно. Далее любую непрерывную 2π -периодическую f будем приближать суммами

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^m f(2\pi k/m) \psi_{2\pi/m}(x - 2\pi k/m),$$

аналогично раннее доказанной лемме.

□

1.3 * Алгебры непрерывных на компактах функций. Теорема Стоуна-Вейерштрасса

Def 1.9. Множество $\mathcal{A} \subseteq C(x)$ (– непрерывные на компакте функции) называется *алгеброй*, если она содержит константы ($\mathbb{R} \subseteq \mathcal{A}$) и топологически "замкнута" относительно операций \cdot и $+$.

Def 1.10. *Алгебра разделяющая точки* – $\forall a, b \in \mathbb{R}, x = y \in X, \exists f \in \mathcal{A}$ такая что $f(x) = a$, а $f(y) = b$.

Thr 1.11 (теорема Стоуна-Вейерштрасса). Пусть у нас зафиксирован компакт K и дана алгебра непрерывных функций \mathcal{A} на этом компакте, которая разделяет точки. Тогда любую непрерывную на K функцию можно сколь угодно близко равномерно приблизить функциями из \mathcal{A} .

1.4 Пространства L_p . Неравенства Гёльдера и Минковского.

Def 1.12. Абсолютно интегрируемыми функциями на измеримом $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называют $f: X \mapsto \mathbb{R}$ с конечным интегралом $\int_X |f(x)| dx$. Расстоянием¹ между функциями f и g будем считать $\int_X |f(x) - g(x)| dx$.

Def 1.13. Нормой в векторном пространстве V над полем \mathbb{F} называется функционал $p: V \mapsto \mathbb{R}_+$, обладающий свойствами:

1. $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0_V$ – невырожденность нормы (в полунорме это неверно);
2. $\forall x, y \in V, p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ – неравенство треугольника;
3. $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in V, p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$.

Def 1.14. Обозначим через $L_1(X)$ факторпространство линейного пространства абсолютно интегрируемых функций по его линейному подпространству почти всюду равных нулю функций. То есть функции на 0 расстоянии считаем равными. Нормой будем считать

$$\|f\|_1 = \int_X |f(x)| dx.$$

Def 1.15. Для измеримого по Лебегу $X \subset \mathbb{R}^n$ и числа $p \geq 1$ факторпространство измеримых по Лебегу функций на X с конечной (полу)нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p dx \right)^{1/p},$$

по модулю функций равных нулю почти всюду, назовём $L_p(X)$.

Очень хорошим, симметричным, актуальным для описания квантовой механики оказывается L_2 пространство, на котором естественно вводить скалярное произведение, его порождающее.

Def 1.16. В комплексном случае норма L_2 порождена скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \longrightarrow \quad \|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}.$$

Thr 1.17 (Неравенство Гёльдера). Возьмём $p, q > 1$ такие, что $1/p + 1/q = 1$. Пусть $f \in L_p(X)$ и $g \in L_q(X)$. Тогда

$$\int_X |fg| dx \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

△. Добьёмся (домножением на константу) ситуации с $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Тогда достаточно проинтегрировать неравенство вида

$$|fg| \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}.$$

Неравенство же можем получить из выпуклости логарифма

$$\ln(\alpha a + \beta b) \geq \alpha \ln a + \beta \ln b, \quad \alpha + \beta = 1, \quad \Rightarrow \left/ \begin{matrix} \alpha = p^{-1} \\ \beta = q^{-1} \end{matrix} \right/ \Rightarrow \ln \left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q} \right) \geq \frac{\ln a}{p} + \frac{\ln b}{q} = \ln(a^{1/p} b^{1/q}).$$

□

Con 1.18. Для измеримых функций и чисел $p, q > 0$, таких что $1/p + 1/q = 1$, имеет место формула

$$\|f\|_p = \sup \left\{ \int_X fg dx \mid \|g\|_q \leq 1 \right\}. \quad (1.1)$$

¹В силу неравенства $|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ расстояние конечно.

△. По неравенству Гёльдера норма f не менее супремума правой части, более того равенство достигается при выборе

$$g(x) = \frac{\text{sign } f(x) |f(x)|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}}.$$

□

Def 1.19. Функция $f: V \mapsto \mathbb{R}$ на векторном пространстве называется *выпуклой*, если для любых $x, y \in V$ и любого $t \in (0, 1)$ имеет место неравенство

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Функция называется *строго выпуклой*, если неравенство строгое $\forall x \neq y$ и $t \in (0, 1)$.

Lem 1.20. Если в семействе функций $f_\alpha: V \mapsto \mathbb{R}$, $\alpha \in A$, все функции выпуклые, то

$$f(x) = \sup\{f_\alpha(x) \mid \alpha \in A\}$$

тоже выпуклая².

△. Выпуклость функции нескольких переменных означает выпуклость всех её ограничений на прямые, а значит достаточно доказать это для функции одной переменной, что допускает графическое доказательство. □

Thr 1.21 (Неравенство Минковского). Для функций $f, g \in L_p$ при $p \geq 1$

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

△. В силу предыдущих двух утверждений норма $\|\cdot\|_p$ – выпуклая функция на L_p , тогда, в частности

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p \leq \frac{1}{2} (\|f\|_p + \|g\|_p), \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{f}{2} + \frac{g}{2} \right\|_p \leq \left\| \frac{f}{2} \right\|_p + \left\| \frac{g}{2} \right\|_p,$$

где последнее верно по 1-однородности нормы. □

1.5 Полнота пространства L_p

Полнота пространства интегрируемых функций

Далее в разделе всегда предполагается суммирование по k от 1 до ∞ , если не сказано иного. Глобально можно сказать, что в нормированном пространстве вопрос полноты сводится в вопросу сходимости рядов, у которых сходятся суммы норм.

Def 1.22. Назовём последовательность (f_n) *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon: \forall n, m \geq N_\varepsilon \quad \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

Lem 1.23. Пусть у последовательности функций (u_k) из $L_p(X)$ сумма $\Sigma = \sum \|u_k\|_p$ оказалась конечной. Тогда $S(x) = \sum u_k(x)$ определена для почти всех x и $\|S\|_p \leq \sum \|u_k\|_p$.

△. Определим возрастающую последовательность

$$\rho_N(x) = \left(\sum_{k=1}^N |u_k(x)| \right)^p, \quad \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \quad \int_X \rho_N(x) \leq \left(\sum_{k=1}^N \|u_k(x)\| \right)^p \leq \Sigma^p \quad \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \quad \rho(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(x).$$

Первое следствие получается по неравенству Минковского, второе по теореме о монотонной сходимости функции: $\rho(x)$ почти всюду конечна и имеет конечный интеграл, что означает почти всюду абсолютную сходимость ряда $\sum u_k(x)$.

Функция $\sigma_N(x) = \left| \sum u_k(x) \right|^p$ сходится к $|S(x)|^p$ почти всюду и $\sigma_N(x) \leq \rho(x)$. По теореме об ограниченной сходимости

$$\left\| \sum u_k(x) \right\|_p^p \rightarrow \|S\|_p^p, \quad \Rightarrow \quad \|S\|_p \leq \sum \|u_k\|_p,$$

по предельному переходу в неравенстве Минковского. □

²Если разрешить в определении выпуклости значение $+\infty$.

Lem 1.24. Пусть y последовательности функций (u_k) из $L_p(X)$ сумма $\Sigma = \sum \|u_k\|_p$ оказалась конечной. Тогда $S(x) = \sum u_k(x)$ определена для почти всех x и (что отличает эту лемму от предыдущей) $S = \sum u_k$ в смысле сходимости в пространстве $L_p(X)$.

Δ. По предыдущей лемме для остатка $r_N(x) = \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k(x)$:

$$\|r_N\|_p \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \|u_k\|_p, \quad \text{при } N \rightarrow \infty,$$

что и означает сходимость в терминах L_p . □

Thr 1.25. Пространство $L_p(X)$ полно.

Δ. Рассмотрим фундаментальную последовательность (f_k) в $L_p(X)$ для подпоследовательности которой докажем сходимость. Выберем её так, чтобы $\|f_k - f_l\|_p \leq 2^{-k-1}$ при всех $l > k$.

Пусть тогда $u_1 = f_1$, $u_k = f_k - f_{k-1}$, получается хотим доказать сходимость суммы телескопического ряда $\sum u_k$, для которых $\|u_k\|_p \leq 2^{-k}$. По предыдущей лемме ряд почти всюду сходится к $S \in L_p(X)$, а (f_k) сходятся к S по норме $L_p(X)$. □

Так и сводится в L_p вопрос полноты к вопросу сходимости рядов, со сходящейся суммой норм. Вообще сходимость в $L_p(X)$ может не означать поточечной сходимости ни в одной точке.

1.6 Приближение функций в L_p ступенчатыми и бесконечно гладкими

Def 1.26. Назовём элементарно ступенчатыми функции с конечным числом ступенек, в основании которых лежат элементарные множества.

Thr 1.27. Пусть функция $f: X \mapsto \mathbb{R} \in L_p$ с конечным интегралом. Положим для $M > 0$

$$f_M(x) = \begin{cases} M, & f(x) \geq M; \\ f(x), & |f(x)| \leq M; \\ -M, & f(x) \leq -M; \end{cases} \Rightarrow \lim_{M \rightarrow +\infty} \|f_M\|_p = \|f\|_p.$$

Thr 1.28. Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ и $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда f можно сколь угодно близко приблизить в среднем элементарно ступенчатой функцией.

Thr 1.29. Можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить элементарно ступенчатой $\forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)$.

Δ. Интеграл разности $f - f_M$ можно оценить, как

$$\begin{aligned} |f(x) - M|^p &\leq |f(x)|^p - M^p, & f(x) > M; \\ |f(x) + M|^p &\leq |f(x)|^p - M^p, & f(x) < -M; \end{aligned}$$

что получается из выпуклости $|x|^p$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|f|^p - |f_M|^p) dx < \varepsilon^p, \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} |f - f_M|^p dx < \varepsilon^p.$$

Осталось перейти к ограниченной функции $g = f_M|_{[-a,a]^n}$. В силу непрерывности интеграла Лебега по множествам

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{[-a,a]^n} |g(x)|^p dx,$$

поэтому можем приблизить f_M функцией g с точностью ε функцией $h \leq M$ с $\text{supp } h = Q = [-a,a]^n$. Таким образом h измерима по Лебегу, то есть $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Теперь возвращаемся к приближению функции из L_1 элементарно ступенчатой s в норме L_1 :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h - s| dx < \varepsilon', \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} |h(x) - s(x)|^p dx \leq (2M)^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |h - s| dx < (2M)^{p-1} \varepsilon'.$$

Тогда можем добиться

$$\|f - s\|_p < \|f - g\|_p + \|g - h\|_p + \|h - s\|_p < 3\varepsilon,$$

при выборе $s = s(\varepsilon)$. □

Thr 1.30. Всякую $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить бесконечно дифференцируемой функцией с компактным носителем.

△. Вспомним хороший набор функций

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ e^{-1/x}, & x > 0. \end{cases} \quad \varphi(x) = f(x+1)f(1-x), \quad \varphi_\varepsilon(x) = A\varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_1}{\varepsilon}\right) \cdots \varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_n}{\varepsilon}\right),$$

где последняя нормирована быть с единичным интегралом и отлична от нуля только в $U_\varepsilon(0)$. Тогда можем построить

$$\psi(x) = B \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt, \quad B: \begin{cases} \psi(x) \equiv 0, & x \leq 1; \\ \psi(x) \equiv 1, & x \geq 1; \end{cases} \Rightarrow \psi_{\varepsilon,\delta}(x) = \psi\left(\frac{\delta + \varepsilon - 2|x|}{\varepsilon - \delta}\right),$$

где $\psi_{\varepsilon,\delta}$ отлична от нуля только в $U_\varepsilon(0)$ и тождественно равна 1 в $U_\delta(0)$.

Осталось свёрткой приблизить каждую ступеньку на параллелепипеде P , точнее χ_P в норме L_p , тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\chi_P - g(x)|^p dx \leq \mu[U_\varepsilon(P)] - \mu P,$$

что стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow +0$. □

Дополнительно. Также по теореме Стоуна-Вейерштрасса любую $f \in L_p(X)$ можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить ограниченным на X многочленом, где X – ограниченное измеримое в \mathbb{R}^n множество.

Также для любой $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ можно показать непрерывность сдвига в L_p :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|^p dx \rightarrow 0 \quad \text{при } |t| \rightarrow 0,$$

показав это для непрерывной функции с компактным носителем, а затем по неравенству Минковского, приближая f , доказать утверждение.

2 Ограниченная вариация, абсолютная непрерывность и осцилляция

2.7 Функции ограниченной вариации

Def 2.1. Функция f на промежутке I имеет *ограниченную вариацию*, если для любых $x_0 < x_1 < \dots < x_N \in I$ (в любом количестве)

$$|f(x_0) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \dots + |f(x_{N-1}) - f(x_N)| \leq M,$$

для некоторой константы M . Наименьшую константу M назовём *вариацией* функции f равную $\|f\|_B$, что задаёт *полуноорму*, вида

$$\|f\|_B = \sup \left\{ |f(x_0) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \dots + |f(x_{N-1}) - f(x_N)| \mid N \in \mathbb{N}, a \leq x_1 \leq \dots \leq x_N \right\}$$

Вообще это длина кривой в одномерном варианте, в частности кривая в \mathbb{R}^n спрямляема только при конечной вариации каждой своей координаты. Важно что вариация функции аддитивна и выпукла, в смысле $\|f+g\|_B \leq \|f\|_B + \|g\|_B$.

Lem 2.2. Функцию ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$ можно представить в виде суммы двух функций $f = u + d$, одна из которых возрастает, а другая убывает. При этом $\|f\|_B = \|u\|_B + \|d\|_B$ и если f была непрерывной, то u, d тоже будут непрерывны.

△. Определим *вариацию вверх* $u(x)$ как \sup сумм положительных приращений и *вариацию вниз* $d(x)$ как \inf сумм отрицательных приращений. Любой набор приращений даст $f(x)$ и его можно разбить на две части, одна из которых даст $u(x)$ а другая $d(x)$. Тогда

$$f(x) = u(x) + d(x), \quad \|f\|_{[a,x]} = u(x) - d(x),$$

при чём $u(x) \uparrow$ и $d(x) \downarrow$. Так как вариация монотонной функции – модуль её приращения, то $\|f\|_B = \|u\|_B + \|d\|_B$.

Покажем теперь, что $f \in C[a, b] \Rightarrow u, d \in C[a, b]$. Функции u и $-d$ не убывают, покажем, что нет скачков. Их сумма $u(x) - d(x)$ равна $\|f\|_{[a,x]}$ так что осталось показать, что у вариации нет скачков, что сводится к утверждению о непрерывности зависимости длины спрямляемой кривой от параметра. □

Вспомним, что для монотонной g и $f \in L_1$ верна следующая теорема о среднем:

Thr 2.3 (Вторая теорема о среднем). *Если f интегрируема по Лебегу с конечным интегралом, а g монотонна и ограничена на $[a, b]$, то при некотором $\nu \in [a, b]$*

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = g(a+0) \int_a^\nu f(x) dx + g(b-0) \int_\nu^b f(x) dx.$$

Таким образом приходим к утверждению о том, что функции ограниченной вариации допускают оценку интеграла своего произведения с другой функцией. В силу предыдущей леммы для любой функции ограниченной вариации g из второй теоремы о среднем

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq (|g(a+0)| + \|g\|_B) \cdot \sup \left\{ \left| \int_\nu^b f(x) dx \right| \text{ при } \nu \in [a, b] \right\}.$$

2.8 Абсолютно непрерывные функции

Для формулы Ньютона-Лейбница условие липшицевости можно ослабить до следующего:

Def 2.4. Функция F на промежутке I абсолютно непрерывна, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$, такое что $\forall x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq \dots \leq x_N \leq y_N \in I$ из неравенства

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_N - y_N| \leq \delta$$

следует, что

$$|F(x_1) - F(y_1)| + |F(x_2) - F(y_2)| + \dots + |F(x_N) - F(y_N)| \leq \varepsilon.$$

Говоря неформально, сумма модулей приращений функции на системе непересекающихся отрезков должна стремиться к нулю при суммарной длине системы, стремящейся к нулю.

Lem 2.5. Абсолютно непрерывная на отрезке функция f имеет на нём ограниченную вариацию. Также на отрезке существует разложение f в сумму двух монотонных абсолютно непрерывных функций.

Δ . Для данной абсолютно непрерывной $f: [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ рассмотрим $f = u + d$, также вспомним $u[x] + (-d[x]) = v(x) = \|f|_{[a, x]}\|_B$. Осталось показать абсолютную непрерывность $v(x)$.

От противного: $\exists \varepsilon > 0$ такое, что сумма приращений v на некоторых отрезках не менее ε . По аддитивности вариации $v(y_i) - v(x_i) = \|f|_{[x_i, y_i]}\|_B$, тогда

$$\exists [x_{i1}, y_{i1}], \dots, [x_{iN_i}, y_{iN_i}] \subset [x_i, y_i], : |f(x_{i1}) - f(y_{i1}) + \dots + f(x_{iN_i}) - f(y_{iN_i})| \geq \frac{v(y_i) - v(x_i)}{2}.$$

Суммируя такие неравенства по всем $i = 1, \dots, N$ получаем, что сумма модулей приращений f не менее $\varepsilon/2$, что противоречит абсолютной непрерывности f . \square

2.9 Абсолютная непрерывность интеграла с переменных верхним пределом

Thr 2.6. Для некоторой $f \in L_1[a, b]$, всякая обобщенная первообразная F

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

является абсолютно непрерывной и её производная почти всюду существует и совпадает с f .

Δ . В силу теоремы о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом, производная F почти всюду равна f . Осталось показать абсолютную непрерывность F . Как и раньше, приблизим f ограниченной $g \leq M$, так что $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Тогда при наборе отрезков S длины $< \delta$

$$\int_S |g(x)| dx \leq M\delta, \quad \int_S |f(x) - g(x)| < \varepsilon, \Rightarrow \int_S |f(x)| dx \leq M\delta + \varepsilon, \Rightarrow \int_S |f(x)| dx \leq 2\varepsilon,$$

что и означает сумме приращений F на отрезках S не более 2ε при $\mu[S] < \delta$. \square

2.10 Обобщенная формула Ньютона-Лейбница

Thr 2.7 (обобщенная формула Ньютона-Лейбница). Абсолютно непрерывная функция $F: [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ почти всюду имеет производную и является обобщенной первообразной своей производной с выполнением формулы Ньютона-Лейбница

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t) dt.$$

Легко показать через...ух, ну по лемме **Безикевича**, посмотреть можно [здесь](#).

2.11 Абсолютная непрерывность произведения абсолютно непрерывных и обобщенное интегрирование по частям

Con 2.8 (Обобщенное интегрирование по частям). Если $f \in L_1[a, b]$, а g абсолютно непрерывна, то верна формула интегрирования по частям

$$\int_a^b fg dx = F(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) dx,$$

где $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

\triangle . Производная g' существует почти всюду, функция F абсолютно непрерывна по ранее доказанной теореме, тогда Fg тоже абсолютно непрерывна:

$$F(y)g(y) - F(x)g(x) = [F(y) - F(x)]g(y) + [g(y) - g(x)]F(x).$$

Тогда $(Fg)' = fg + Fg'$, к её приращению применима формула Ньютона-Лейбница, так и получаем интегрирование по частям. \square

Дополнительно. Функция $f: [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда она может быть сколь угодно близко в B -норме приближена кусочно-линейными функциями.

2.12 Теорема Римана об осцилляции и равномерной осцилляции

Def 2.9. Определим коэффициент Фурье (с точностью до умножения на константу)

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy} dx.$$

Thr 2.10. Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то $|c_f(y)| \leq \|f\|_1$ и $c_f(y)$ непрерывно зависит от y .

Thr 2.11 (Теорема об ограниченной сходимости). Пусть неотрицательная функция g на измеримом X имеет конечный интеграл. Пусть f_k измеримы на X , $|f_k| \leq g$ для всех k и $f_k \rightarrow f$ поточечно на X . Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k dx = \int_X f dx$.

\triangle . По теореме об ограниченной сходимости разрешен предельный переход под знаком интеграла, значит $c_f(y)$ непрерывно зависит от y . **Расписать бы это.** \square

Thr 2.12 (Лемма Римана об осцилляции). Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то выражение

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy} dx$$

стремится к нулю при $y \rightarrow \infty$.

△. У Кудрявцева математичненько всё расписано. Получим оценку на порядок убывания $c_f(y)$ при $y \rightarrow \infty$ считая $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывной и производные до k -й включительно $\in L_1(\mathbb{R})$, тогда интегрируя по частям (дифференцируя функцию) получим:

$$\begin{aligned} c_f(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d\left(\frac{e^{-ixy}}{-iy}\right) = f(x) \left(\frac{e^{-ixy}}{-iy}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \cdot \left(\frac{e^{-ixy}}{-iy}\right) dx = \\ &= \frac{c[f'](y)}{iy} = \dots = \frac{c[f^{(k)}](y)}{(iy)^k} = O\left(\frac{1}{y^k}\right), \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тут мы воспользовались компактностью носителя функции и её производных.

Рассмотрим теперь $\forall f \in L_1(\mathbb{R})$. Найдём бесконечно гладкую g с компактным носителем $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Тогда $\forall y \in \mathbb{R}$:

$$|c[f](y) - c[g](y)| = |c[f - g](y)| \leq \varepsilon.$$

При этом для $c[g](y) \rightarrow 0$ доказали (быстрее любой степени). Отсюда следует, что $\lim_{y \rightarrow \infty} |c[f](y)| < \varepsilon$, точнее равен нулю. \square

Thr 2.13 (Лемма о равномерной осцилляции). Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то выражение

$$c[f](y, \xi, \eta) = \int_{\xi}^{\eta} f(x) e^{-ixy} dx$$

стремится к нулю при $y \rightarrow \infty$ равномерно по ξ, η .

△. Разобьём \mathbb{R} на конечное число промежутков числами $x_1 < \dots < x_N$ так, чтобы на каждом промежутке $\int |f| < \varepsilon$. Для ξ и η найдём ближайшие x_i, x_j :

$$\left| \int_{\xi}^{\eta} f(x) e^{-ixy} dx \right| \leq \left| \int_{x_i}^{x_j} f(x) e^{-ixy} dx \right| + 2\varepsilon$$

и при достаточно большом ε по доказанному неравномерному варианту, применяемого к ограничению f на $[x_i, x_j]$, что и доказывает равномерную оценку. \square

2.13 Порядок убывания коэффициентов Фурье абсолютно непрерывных функций

Lem 2.14. Если производная $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и производные до k -й включительно³ находятся в $L_1(\mathbb{R})$, то

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx = o\left(\frac{1}{y^k}\right), \quad y \rightarrow \infty.$$

△. Всё как раньше, но слагаемые вида $f^{(l)}(x) e^{-ixy} \Big|_{-\infty}^{+\infty}$ исчезают в силу конечности пределов $f^{(l)}$ на бесконечности. Так как $f^{(l+1)} \in L_1(\mathbb{R})$, то $f^{(l)}$ имеет конечные пределы в $-\infty$ и $+\infty$, которые должны быть равны нулю, так как $f^{(l)}$ конечного интеграла. Я бы и эту штуку посмотрел в другой книжке. \square

2.14 Порядок убывания коэффициентов Фурье функций ограниченной вариации

Thr 2.15. Если $f \in L - 1(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на \mathbb{R} , то выражение

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx = O(1/y), \quad y \rightarrow +\infty.$$

△. Получим оценку для интеграла по $[a, b]$. Можем представить $f = u + g$ в виде суммы монотонно возрастающей и убывающей. Тогда по второй теореме о среднем

$$c_{[a,b]}[f](y) = \int_a^b f(x) e^{-ixy} dx = u(a+0) \int_a^\nu e^{-ixy} dx + u(b-0) \int_\nu^b e^{-ixy} dx + g(a+0) \int_a^\psi e^{-ixy} dx + g(b-0) \int_\psi^b e^{-ixy} dx.$$

³Для k -й достаточно существования почти всюду.

Функция ограниченной вариации имеет пределы на бесконечности, а из интегрируемости следует их равенство нулю. Тогда значения $u(a+0)$, $u(b-a)$, $g(a+0)$, $g(b-0)$ оцениваются полной вариацией $\|f\|_B$, а интегралы оцениваются по модулю как $\frac{2}{|y|}$. \square

Con 2.16. Пусть функция $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ имеет абсолютно непрерывную $(k-1)$ -ую производную, производные до k -й включительно находятся в $L_1(\mathbb{R})$, а $f^{(k)}$ (возможно, после изменения на множестве меры нуль) имеет ограниченную вариацию на \mathbb{R} , тогда

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy} dx = O\left(\frac{1}{y^{k+1}}\right), \quad y \rightarrow \infty.$$

\triangle . Можно получить интегрированием по частям, аналогично лемме 2.14, только используя предыдущую теорему. \square

Периодические функции

Def 2.17. Для 2π -периодической функции $f(x+2\pi) \equiv f(x)$ коэффициенты Фурье запишутся, как

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx = \frac{(f, e^{inx})}{\|e^{inx}\|_2^2},$$

где последнее выражение понимается в смысле скалярного произведения и нормы в $L_2[-\pi, \pi]$.

Для таких функций сохраняются утверждения, доказанные выше.

Thr 2.18. Пусть функция f имеет период 2π и абсолютно непрерывную $(k-1)$ -ую производную, причём $f^{(k)}$ (возможно, после изменения на множестве меры нуль) имеет ограниченную вариацию на $[-\pi, \pi]$, тогда

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx} dx = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

\triangle . Здесь слагаемые $f(x)e^{-ixy}|_{-\pi}^{+\pi}$ обращаются в нуль в силу 2π -периодичности, поэтому можем воспользоваться теоремой об ограниченной вариации. \square

Lem 2.19. Если у 2π -периодической функции ограниченной вариации есть ненулевое конечное число разрывов, и она кусочно абсолютно непрерывна, то оценка $O(1/n)$ для коэффициентов Фурье неумлучшаема.

Thr 2.20. Пусть функция f непрерывна и 2π -периодическая, тогда для коэффициента Фурье имеется оценка

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)e^{inx} dx = O(\omega_f(\pi/n)),$$

где ω_f – модуль непрерывности f .

\triangle . Перейдём к переменной $x = x' + \pi/n$, тогда

$$c_n = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x' + \pi/n)e^{-inx'} dx', \quad \Rightarrow \quad |c_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2} (f(x + \pi/n) - f(x)) e^{-inx} dx \right| \leq \frac{1}{2} \omega_f(\pi/n).$$

Так и получаем не очень точную, но полезную оценку. \square

3 Ряд Фурье в пространстве L_2

3.15 Неравенство Коши-Буняковского

Thr 3.1 (Неравенство Коши-Буняковского). Пусть функции $f, g: X \mapsto \mathbb{R}$ измеримы по Лебегу, а также $|f|^2, |g|^2 \in L_1(X)$. Тогда

$$\left(\int_X f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_X |f(x)|^2 dx \right) \cdot \left(\int_X |g(x)|^2 dx \right).$$

Δ . Домножая на константы добиваемся нормировки к 1 интегралов $|f|^2$ и $|g|^2$. Тогда

$$|fg| \leq \frac{|f|^2}{2} + \frac{|g|^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad \int_X |fg| dx \leq 1, \quad \Rightarrow \quad \left| \int_X fg dx \right| \leq 1.$$

□

По теореме 1.30 любую $f \in L_2[-\pi, \pi]$ можно сколь угодно близко по норме приблизить бесконечно гладкой функцией с носителем строго в $(-\pi, \pi)$. Такая функция продолжается до бесконечно гладкой 2π -периодической и по теореме 1.8 равномерно приближается тригонометрическим многочленом $\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$.

Равномерное приближение является приближением по норме L_2 , так как на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеется неравенство $\|f\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|f\|_C$. В случае L_2 нормы определим коэффициенты, которыми собираемся приближать.

Дописать про геометрическое представление коэффициентов Фурье.

3.16 Неравенство Бесселя и оптимальность коэффициентов Фурье

Thr 3.2 (Оптимальность коэффициентов Фурье). Для всякой $f \in L_2[-\pi, \pi]$ и данного числа n лучшее по норме L_2 приближение f тригонометрическим многочленом $\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ дают коэффициенты Фурье

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx.$$

Δ . Воспользуемся скалярным произведением в L_2 , занумеруем e^{ikx} в некотором порядке $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, где далее будет важна лишь ортогональность этих функций относительно введенного скалярного произведения. Пусть мы приближаем $\varphi = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k$ и оптимизируем a_k , тогда

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^N \bar{a}_k (f, \varphi_k) - \sum_{k=1}^N a_k (\varphi_k, f) + \sum_{k=1}^N |a_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2.$$

Далее, по определению коэффициентов Фурье в виде $(f, \varphi_k) = c_k \|\varphi\|_2^2$ находим

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^N (\bar{a}_k c_k + a_k \bar{c}_k - |a_k|^2) \|\varphi_k\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^N |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2 + \sum_{k=1}^N |c_k - a_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2,$$

откуда оптимально положить $a_k = c_k$.

□

Lem 3.3 (неравенство Бесселя). Из доказательства предыдущей теоремы, можем получить, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^N |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2, \quad \Rightarrow \quad \|f\|_2^2 \geq \sum_{k=1}^N |c_k|^2 \|\varphi_k\|_2^2, \quad \stackrel{\text{trig}}{\Rightarrow} \quad \|f\|_2^2 \geq 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2.$$

Точно ли до n ?

Lem 3.4 (Представление действительнзначной функции). Для действительнзначной функции представление в виде ряда Фурье переписется в виде

$$f = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx,$$

для $k \geq 1$. Неравенство Бесселя тогда запишется так:

$$\|f\|_2^2 \geq \frac{\pi}{2} |a_0|^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

3.17 Полные системы в пространстве L_2

Пусть $\{\varphi_i\}$ – ортогональная система в L_2 . Допустим $f = \sum_i c_i \varphi_i$, где коэффициенты c_i могут быть найдены непосредственно:

$$c_i = \frac{(f, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)},$$

что упрощается в случае ортонормированной системы до $c_i = (f, \tilde{\varphi}_i)$. Числа c_i и называются *коэффициентами Фурье элемента f* в ортогональной системе φ_i .

В таких терминах можем определить и *ряд Фурье* элемента f по ортогональной системе $\{\varphi_k\}$:

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} \varphi_k,$$

где если система φ_k конечна, то ряд сводится к конечной сумме.

Так например можно выделить ортогональную систему $\{1, \cos kx, \sin kx; k \in \mathbb{N}\}$. Или, например, многочлены Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n,$$

образующих ортогональную систему.

Def 3.5. Система $\{\varphi_\alpha; \alpha \in \mathcal{A}\}$ векторов нормированного пространства X называется *полной по отношению к множеству $E \subseteq X$* (полной в E), если любой вектор $x \in E$ можно сколь угодно точно в смысле нормы пространства X приблизить конечными линейными комбинациями векторов системы. Другими словами $E \subset \bar{L}\{\varphi_\alpha\}$ – замыкание линейной оболочки векторов.

Thr 3.6 (условие полноты ортогональной системы). Пусть X – линейное пространство со скалярным произведением, а φ_k – конечная или счётная система ортогональных векторов в X . Тогда следующие условия эквивалентны:

1. система $\{\varphi_k\}$ полна по отношению к множеству $E \subseteq X$;
2. для любого вектора $f \in E \subset X$ имеет место разложение в ряд Фурье в смысле нормы;
3. для любого вектора $f \in E \subset X$ имеет место равенство Парсеваля $\|f\|^2 = \sum_k |(f, \varphi_k)|^2 / (\varphi_k, \varphi_k)$.

\triangle . Из (1) \Rightarrow (2) в силу экстремального свойства коэффициентов Фурье. Из (2) в (3) по теореме Пифагора. Из (3) \Rightarrow (1) т.к. ввиду леммы о перпендикуляре по теореме Пифагора ... **по Зоричу можно дописать**. \square

Def 3.7. Система элементов линейного нормированного пространства X называется *базисом пространства X* , если любая конечная её подсистема состоит из линейно независимых векторов и любой вектор $x \in X$ может быть представлен в виде $f = \sum_k \alpha_k x_k$, где α_k – коэффициенты из поля констант пространства X , а сходимость понимается по норме пространства X .

Для доказательства неравенства Бесселя достаточно требовать ортогональность системы. В случае же равенства Парсеваля необходима *полнота* системы – возможность приблизить любую функцию L_2 линейной комбинаций функций рассматриваемой системы сколь угодно точно.

3.18 Равенство Парсеваля для Фурье функций из $L_2[-\pi, \pi]$

Thr 3.8 (Сходимость ряда Фурье в среднеквадратичном). Для всякой комплекснозначной $f \in L_2[-\pi, \pi]$

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

в смысле сходимости суммы в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$, а также выполняется равенство Парсеваля

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

\triangle . Сначала функцию f приближаем по L_2 норме тригонометрическим многочленом. Формула для квадрата точности приближения

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2\pi \sum_{k=1}^N |c_k|^2 < \varepsilon,$$

откуда при $N \uparrow$ можем говорить про сходимость ряда Фурье по L_2 норме по определению. Также получаем в пределе в неравенстве Бесселя равенство Парсеваля. \square

Стоит заметить что в последней теореме использовали «симметричное» суммирование – *суммирование в смысле главного значения*:

$$v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

Пока мы не доказали, что в полученную формулу можно подставить хоть одно конкретное значение x . Тот факт, что ряд Фурье функции из $L_2[-\pi, \pi]$ на самом деле сходится к этой функции почти всюду, был доказан Л. Карлсоном (1966), а до этого был известен как гипотеза Лузина.

4 Тригонометрический ряд Фурье и его сходимость

4.19 Интегральное представление частичных сумм ряда Фурье, ядро Дирихле

Def 4.1. Обозначим *частичную сумму* тригонометрического ряда Фурье для 2π -периодической функции f как

$$T_n(f, x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}.$$

Lem 4.2. Для n -й частичной суммы ряда Фурье 2π -периодической функции имеет место формула в виде свёртки

$$T_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt,$$

с ядром Дирихле

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}.$$

\triangle . По определению:

$$T_n[f](x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi) e^{ikx-ik\xi} d\xi = \left/ \xi = x+t \right/ = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x+t) \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} \right) dt.$$

Теперь раскрываем геометрическую прогрессию:

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{-itk} = -\frac{e^{int}}{2\pi} \frac{e^{it} - e^{-2int}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{i(n+1/2)t} - e^{-i(n+1/2)t}}{2\pi (e^{it/2} - e^{-it/2})} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}.$$

\square

Lem 4.3 (Равномерная ограниченность интегралов от ядра Дирихле). *Существует такая константа C , что*

$$\left| \int_a^b D_n(t) dt \right| \leq C$$

для любых $a, b \in [-\pi, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$.

\triangle . Заметим, что $t/\sin(t/2)$ – монотонная и ограниченная на $[-\pi, \pi]$ функция, тогда вынесем её из под знака интеграла:

$$\left| \int_a^b \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} dt \right| \sim \left| \int_a^b \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{t} dt \right| \sim \left| \int_a^b \frac{\sin t}{t} dt \right|.$$

А оставшееся выражение принимает значения $\in [-1, 1]$, так что имеет конечный интеграл на отрезке. \square

Также можем оценить интеграл от ядра Дирихле:

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{-ikt}, \quad \Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1, \quad \Rightarrow \quad T_n[f](x) - f(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt,$$

что исследуется равномерным принципом локализации.

4.20 Принцип локализации для рядов Фурье и равномерный принцип локализации

Thr 4.4 (принцип локализации). Если f — 2π -периодическая абсолютно интегрируемая функция, то существование и значение предела последовательности её частичных сумм Фурье $T_n[f](x)$ в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ зависит только от существования и значения предела при $n \rightarrow \infty$ интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\delta D_n(t) (f(x_0 + t) + f(x_0 - t)) dt,$$

иначе говоря сходимость ряда Фурье в точке x_0 определяется лишь поведением функции f в любой сколь угодно малой окрестности x_0 .

△. Во-первых, по чётности ядра Дирихле, можем записать

$$T_n[f](x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_n(t) (f(x+t) + f(x-t)) dt = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\delta + \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \right) D_n(t) (f(x+t) + f(x-t)) dt.$$

Подробнее рассмотрим последнее слагаемое:

$$\frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2 \sin(t/2)} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

так как $\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2 \sin(t/2)}$ интегрируемое по интегрируемости f и ограниченности $\frac{1}{\sin(t/2)}$. Оставшаяся величина стремится к 0 по лемме Римана об осцилляции. □

Thr 4.5 (Равномерный принцип локализации). Запишем для $\delta \in (0, \pi)$

$$T_n(f, x) - f(x) = \int_{-\pi}^\pi (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt = \int_{-\delta}^\delta (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt + \int_M (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt,$$

где $M = \{t \mid \delta \leq |t| \leq \pi\}$. Если $f \in L_1[-\pi, \pi]$, то

$$\int_M (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Если f ограничена на отрезке $[a, b]$, то это выражение стремится к нулю равномерно по $x \in [a, b]$.

△. Делаем то же, что и раньше, но подводим всё к лемме о равномерной осцилляции:

$$\left| \int_a^b f(x+t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \right| \sim \left| \int_a^b f(x+t) e^{i\left(n + \frac{1}{2}\right)t} dt \right| = \left| \int_{x+a}^{x+b} f(\xi) e^{i\left[n + \frac{1}{2}\right]\xi - i\left[n + \frac{1}{2}\right]x} d\xi \right| = \left| \int_{x+a}^{x+b} f(\xi) e^{i\left[n + \frac{1}{2}\right]\xi} d\xi \right|,$$

где уже можем применить лемму о равномерной осцилляции в силу $f \in L_1$. □

4.21 Признак Липшица равномерной сходимости ряда Фурье

Def 4.6. Функция f называется гёльдеровой степени $\alpha > 0$, если для любых x, y из области определения

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

с некоторой константой C .

Thr 4.7 (Признак Липшица сходимости ряда Фурье). Для абсолютно интегрируемой 2π -периодической функции, которая является гёльдеровой с некоторыми $C, \alpha > 0$ на интервале $(A, B) \supset [a, b]$

$$T_n(f, x) \rightarrow f(x)$$

равномерно $x \in [a, b]$ при $n \rightarrow \infty$.

△. Вспомним локальное представление $T_n[f](x) - f(x)$, как

$$\left| \int_{-\delta}^\delta (f(x+t) - f(x)) D_n(t) dt \right| \leq C \int_{-\delta}^\delta \frac{|t|^\alpha}{2\pi |\sin t/2|} dt \leq \frac{C}{2} \int_{-\delta}^\delta |t|^{\alpha-1} dt = \frac{C}{\alpha} |\delta|^\alpha,$$

где мы воспользовались мыслью, что $\pi |\sin t/2| \geq t$ на $[-\pi, \pi]$. По произвольности δ и равномерного принципа локализации следует, что $T_n[f](x) - f(x)$ может быть равномерно сделано сколь угодно маленьким при некотором $\delta > 0$ и n . □

4.22 Признак Дирихле равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье на отрезке

Thr 4.8 (Признак Дирихле сходимости ряда Фурье). Для абсолютно интегрируемой 2π -периодической функции, которая является непрерывной с ограниченной вариацией на интервале $(A, B) \supset [a, b]$

$$T_n(f, x) \rightarrow f(x)$$

равномерно по $x \in [a, b]$ при $n \rightarrow \infty$.

5 Банаховы пространства

5.40 Нормированные векторные и банаховы пространства

Def 5.1. Векторное E – **нормировано**, если $\forall v \in E$ имеется $\|v\|$ такое, что:

- Однородность: $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$
- Неравенство треугольника: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$
- Невырожденность: $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Можно эквивалентно определить норму единичным шаром с центром в $B_0(1)$:

$$\|x\| = \inf\{1/t \mid tx \in B_0(1)\} \quad \text{where } B_c(r) = \{x \in E \mid \|x - c\| \leq r\}.$$

Def 5.2. Полное нормированное пространство называется **банаховым**.

5.41 Теорема Бэра в банаховом пространстве

Thr 5.3. Счетное U_k – открытых всюду плотных подмножеств банахова E имеет $\bigcap_k U_k \neq \emptyset$.

Con 5.4. Если банахово E покрыто счетным (Z_k) замкнутых множеств, то $\exists m: \text{int} Z_m \neq \emptyset$.

Thr 5.5 (Неподвижные точки сжимающих отображений). Для банахова E замкнутого $X \subset E$ отображение $f: X \rightarrow X$ – **сжимающее**, то есть

$$\exists C < 1: \forall x, y \in X \|f(x) - f(y)\| \leq C \|x - y\|.$$

Имеет неподвижную точку $x \in X$ такую, что $f(x) = x$.

5.42 Двойственное к банахову пространство

Def 5.6. Для нормированного E введи двойственное E' – линейных отображений $\lambda: E \rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{C})$. Норма:

$$\|\lambda\| = \sup\{|\lambda(x)| \mid \|x\| \leq 1\} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in E |\lambda(x)| \leq \|\lambda\| \cdot \|x\|.$$

Lem 5.7. Линейный функционал $\lambda \in E'$ непрерывен **тогда и только тогда**, когда $\|\lambda\| \leq +\infty$.

Thr 5.8. Двойственное E' к нормированному E – полно по своей норме.

5.43 Теорема Банаха-Штейнгауза

Пусть семейство $Y \subset E' \forall x \in E \{\lambda(x) \mid \lambda \in Y\}$ – ограничено. Тогда Y ограничено в смысле нормы E' .

5.44 Расходимость рядов Фурье

Thr 5.9. Существует 2π -периодическая функция, ряд Фурье которой расходится в точке 0.

5.46 Непрерывные линейные отображения

Def 5.10. Норма линейного $A: E \rightarrow F$ между банаховыми — $\|A\| = \sup\{\|A(x)\| \mid x \in E, \|x\| \leq 1\}$.

Можно сформулировать утверждения:

$$\forall x \in E, \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

и для $f: E \rightarrow F$ и $g: F \rightarrow G$ верно:

$$\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|.$$

Ядро отображения между банаховыми это просто $\ker A = \{x \in E \mid Ax = 0\}$.

5.47 Факторпространство банахового пространства

Def 5.11. Если $G \subset E$ — замкнутое неполное подпространство E , то на факторпространстве E/G норма:

$$\|x + G\| = \inf\{\|x + y\| \mid y \in G\} = \inf\{\|x - y\| \mid y \in G\} = \text{dist}(x, G) = \text{dist}(0, x + G).$$

Lem 5.12. Определенная выше $\|\cdot\|: E/G \rightarrow \mathcal{R}$ для замкнутого $G \subset E$ в банаховом E является нормой.

Lem 5.13. Естественная проекция $\pi: E \rightarrow E/G$ для замкнутого $G \in E$ имеет единичную норму.

Lem 5.14. Факторпространство E/G банахова пространства по замкнутому подпространству полно.

5.48 Изоморфизм непрерывных линейных отображений

Lem 5.15. Если отображение банаховых $A: E \rightarrow F$ непрерывно, то соответствующее $\bar{A}: E/\ker A \rightarrow F$ тоже непрерывно и $\|\bar{A}\| = \|A\|$.

Def 5.16. Линейное отображение банаховых $A: E \rightarrow F$ — **изоморфизм**, если A непрерывно и A тоже непрерывно.

Def 5.17. Если линейное непрерывное из банаховых $A: E \rightarrow F$ имеет замкнутый $\text{Im } A(E)$, то оно порождает изоморфизм $E/\ker A \rightarrow A(E)$.

5.49 Эпсилон-сети, предкомпактность и вполне ограниченность

Def 5.18. Для топологического пространства M , его $X \subseteq M$ — **предкомпактным**, если \bar{X} — компактно.

Def 5.19. $X \subseteq M$ называется **вполне ограниченным**, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \subseteq X$ — конечная ε -сеть. (равносильно и утверждение с $N \subset X$) Или $\forall \varepsilon > 0$, X покрывается конечным набором шаров с центрами в X и радиусами ε .

Thr 5.20. Для полного метрического пространства M , его $X \subseteq M$ — компактно $\iff X$ — вполне ограничено.

5.50 Теорема Арцела-Асколи

Def 5.21. Множество функций $X \subset C(K)$ (над метрическим компактом) **равностепенно непрерывно**, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall f \in X \forall x, y \in K, \rho(x, y) < \delta \iff |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Если все функции ещё и L -липшецевы, то $|f(x) - f(y)| = L\rho(x, y)$.

Def 5.22. Модуль непрерывности липшецевых функций:

$$\omega_X(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid f \in X, \rho(x, y) < \delta\}.$$

И тогда, X — равностепенно непрерывно $\iff \omega_X(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow +0$.

Thr 5.23 (Арцела-Асколи). Множество $X \subset C(K)$ предкомпактно $\iff X$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

6 Гильбертовы пространства

6.51 Гильбертово пространство

Def 6.1. Если норма в банаховом E порождается +определённым $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, то E — **гильбертово**.

Thr 6.2 (Неравенство Коши-Буняковского). $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

$$(ax + by, ax + by) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |a|^2\|x\|^2 + a\bar{b}(x, y) + b\bar{a}\overline{(x, y)} + |b|^2\|y\|^2 \geq 0$$

Thr 6.3. Вещественное банахово E — гильбертово **тогда и только тогда**, когда $\forall x, y \in E$:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

6.52 Полнота и замкнутость ортонормированной системы в гильбертовом пр-ве

Def 6.4. Последовательность векторов (φ_k) — **полная система векторов** в банаховом E , если $\overline{\langle \varphi_k \rangle} = E$. Другими словами $\forall x \in E$ и $\forall \varepsilon > 0$ найдется конечная $a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n$ такая, что $\|x - a_1\varphi_1 - \dots - a_n\varphi_n\| < \varepsilon$.

Def 6.5. (φ_k) — **замкнутая система векторов** в гильбертовом H , если в $\forall x \in H$: $(x, \varphi_k) = 0, \forall k$.

Thr 6.6. $\forall \varphi_k$ — ортогональной в гильбертовом H эквивалентны утверждения:

- полнота системы;
- замкнутость системы;
- сходимость ряда Фурье $\forall x \in H$ по системе (φ_k) к x ;
- равенство Парсеваля для коэффициентов Фурье $\forall x \in H$ по данной системе.

6.53 Изометрии гильбертовых пространств

Def 6.7. Линейное $A: E \rightarrow F$ — **изометрия**, если оно биективно и сохраняет норму: $\|A\| = \|A^{-1}\| = 1$.

Lem 6.8. Изометрия гильбертовых пространств сохраняет скалярное произведение.

Thr 6.9 (Рисса-Фишера). $\forall H$, в котором \exists счетная полная система элементов, изометрична $C^n(\mathcal{R}^n)$ или комплексному(действительному) варианту бесконечномерного пространства последовательностей $l_2 = L_2(\mathcal{N})$.

6.54 Метрическая проекция и двойственное к гильбертову пр-во

Thr 6.10. $V \subset H$ — замкнутое линейное подпространство (аффинное) гильбертова. $\forall x \in H \exists! P_V(x) \in V$ ближайший к x то есть $\|x - P_V(x)\| = \text{dist}(x, V)$.

Thr 6.11. Если $V \subset H$ — замкнутое линейное подпространство, то **метрическая проекция** $P_V: H \rightarrow V$ линейна, $\|P_V\| = 1$ при $V \neq 0$ и имеет место ортогональное разложение в прямую сумму замкнутых подпространств $H = V \oplus \ker P_V$.

6.55 Двойственное к гильбертову пространству

Thr 6.12. $\forall y \in H: \lambda_y(x) = (x, y)$. Тогда $\lambda_y \in H'$, $\|\lambda_y\| = \|y\|$ и все элементы двойственного пространства H' имеют такой вид.

7 Обобщенные функции

7.63 Пространство \mathcal{E} и топология в нём

Будем рассматривать функции на действительной прямой, чтобы не отвлекаться на технические тонкости. И так

Def 7.1. $\mathcal{E}(\mathcal{R}) = C^\infty(\mathcal{R})$. Топологию в таком пространстве зададим полунормами:

$$\|f\|_{K,k} = \sup\{|f^{(k)}| \mid x \in K\},$$

где $K \subset \mathcal{R}$ – компакты и $k \in \mathbb{Z}_+$. Ну то есть имеем семейство открытых:

$$U_{K,k,\varepsilon}(f_0) = \{f \mid \|f - f_0\|_{K,k} < \varepsilon\}.$$

Thr 7.2. Пространство \mathcal{E} – полно.

7.64 Связь непрерывности и ограниченности

Thr 7.3. \forall непрерывного линейного $\lambda \in \mathcal{E}'(\mathcal{R}) \exists C > 0, k \in \mathbb{Z}_+, K = [-m, m] :$

$$|\lambda(\varphi)| \leq C \max\{\|\varphi\|_{K,l} \mid 0 \leq l \leq k\} = C \sup\{|\varphi^{(l)}(x)| \mid x \in [-m, m], 0 \leq l \leq k\}.$$

7.65 Описание через интегрирование производных по отрезку

Thr 7.4. $\forall \lambda \in \mathcal{E}'(\mathcal{R})$ задаётся интегрированием производных $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ по борелевским мерам со знаком конечной вариации на некотором отрезке:

$$\lambda(\varphi) = \int_{-m}^m \varphi d\mu_0 + \int_{-m}^m \varphi' d\mu_1 + \dots + \int_{-m}^m \varphi^{(k)} d\mu_k.$$

7.66 Пространство \mathcal{D} и сходимость в нём

В основном, когда речь заходит про обобщенные функции имеется в виду именно пространство \mathcal{D}'

Def 7.5. $(\varphi_k) \subset \mathcal{D}(\mathcal{R})$ сходится к $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{R})$, если $\text{supp } \varphi_k \in [-m, m]$ и $\forall l \in \mathbb{Z}^+$ равномерно $\varphi_k^{(l)} \xrightarrow{[-m, m]} \varphi_0^{(l)}$.

С помощью сходимости в \mathcal{D} определим непрерывные линейные функционалы из которых получим $\mathcal{D}'(\mathcal{R})$. И если не оговорено обратного, именно его мы будем называть **пространством обобщенных функций**

7.67 Пространство обобщённых функций. Регулярные и нерегулярные

Def 7.6. \forall локально $L_1 \ni f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ задаёт $\lambda_f \in \mathcal{D}'(\mathcal{R})$ **регулярные функции**:

$$\lambda_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

Lem 7.7. Локально интегрируемые f и g задаются $\lambda_f = \lambda_g \in \mathcal{D}'(\mathcal{R})$ **тогда и только тогда**, когда они отличаются на множестве меры нуль.

Помимо регулярных в пространстве \mathcal{D}' лежат ещё нерегулярные. Давайте посмотрим на самую популярную из них.

Def 7.8. Дельта-функция или функция Дирака

$$\lambda_\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \quad \delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

Также можно говорить о смещенной дельта-функции:

$$\lambda_\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)dx = \varphi(a)$$