Задание по практике от 8 июля

Автор: Хоружий Кирилл

От: *8 июля 2021 г.*

Первая задача

Вообще собственные значение эрмитова линейного оператора в конечномерном пространстве вещественны, а собственные векторы, соответсвующие различным собственным значениеям, ортогональны. Действительно, пусть A – эрмитов оператор, α, β – собственные значение, отвечающие векторам $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, тогда:

$$(\alpha\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b}) = (A\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a},\, A^\dagger\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a},\, A\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a},\, \beta\boldsymbol{b}) = \beta^*(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),$$

тогда $(\alpha - \beta^*)(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b}) = 0$, откуда выделяем два случая: 1) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, а тогда $\alpha = \alpha^*$; 2) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, откуда $\alpha \neq \beta$, тогда $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ что и доказывает ортогональность.

Введенная аксиоматика квантовой механики позволяет провести аналогичные рассуждения для *эрмитова* оператора $\boldsymbol{A}$ и набора собственных состояний наблюдаемых системы $\{|q\rangle\}$.

$$\begin{array}{c} \hat{A}|q'\rangle = q'|q'\rangle, \\ \langle q''|\hat{A} = q''^*\langle q''| \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \langle q''|\hat{A}|q'\rangle = q'\langle q'' \,|\, q'\rangle \\ \langle q''|\hat{A}|q'\rangle = q''^*\langle q'' \,|\, q'\rangle \end{array} \quad \Rightarrow \quad (q' - q''^*)\langle q'' \,|\, q'\rangle = 0,$$

сводящееся к аналогичным двум случаям говорящие о вещественности наблюдаемых и ортогональности собственных состояний.

Можно пойти с другой стороны, и потребовать вещественности среднего значения наблюдаемой, тогда

$$\langle q\rangle = \langle\Psi|A\Psi\rangle = \langle q\rangle^* \quad \Leftrightarrow \quad \langle\Psi \,|\, A\Psi\rangle = \langle\Psi \,|\, A\Psi\rangle^\dagger = \langle\Psi \,|\, A^\dagger\Psi\rangle,$$

для любого $\forall\ |\Psi\rangle$, что соответсвует операторному равенству $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$, которое по условию и выполняется.

Вторая задача

Магнитный момент заряженной частицы $\boldsymbol{\mu}$ и момент импульса $\boldsymbol{L}$, соответственно, равны

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c} e\left[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\right], \qquad \boldsymbol{L} = \left[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}\right] = \gamma m\left[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}\right],$$

откуда можем найти их соотношение, считая $v \ll c$,

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2\gamma mc}\boldsymbol{L} \approx \frac{e}{2mc}\boldsymbol{L},$$

что в два раза отличается от встретившегося выражения для момента электрона

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{m_e c}\boldsymbol{L}.$$

Третья задача

Можем просто посчитать оба оператора:

$$\begin{aligned} \hat{S}_x &= \tfrac{\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \tfrac{\hbar}{2}|-\rangle\langle+| \\ \hat{S}_y &= -\tfrac{i\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \tfrac{i\hbar}{2}|-\rangle\langle+| \end{aligned}$$

И найти $[\hat{S}_x,\, \hat{S}_y] \neq 0$:

$$[\hat{S}_x,\, \hat{S}_y] = \hat{S}_x\hat{S}_y - \hat{S}_y\hat{S} = \frac{i\hbar^2}{2}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right) \neq 0,$$

где воспользовались нормировкой состояний на 1 и ассоцитивностью.

Четвертая задача

Воспользуемся полнотой набора наблюдаемых, представляя $|\Psi\rangle$ как

$$|\Psi\rangle = \sum_a \langle a \,|\, \Psi\rangle|a\rangle,$$

и пременим к нему оператор $\hat{B} = \prod_a (\hat{A} - a)$,

$$\hat{B}|\Psi\rangle = |\Phi\rangle = \sum_a c_a |a\rangle,$$

где снова воспользовались разложением по базису.

Пусть нашлось такое значение a'', что $c_{a''} \neq 0$, тогда для некоторого a'

$$\hat{B}\langle a' \mid \Psi\rangle|a'\rangle \neq 0, \quad \Rightarrow \quad \langle a' \mid \Psi\rangle\big(\underbrace{\hat{A}|a'\rangle}_{a'|a'\rangle} - a'|a'\rangle\big) \neq 0,$$

таким образом пришли к противоречию. Следовательно $c_a = 0 \; \forall a$, а тогда и $|\Phi\rangle = 0$ для любого $|\Psi\rangle$, что и даёт операторное равенство $\hat{B} = 0$.