Домашнее задание №2 курса «Гармонический анализ»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *8 апреля 2021 г.*

Содержание

Дополнительная задача о $\cos e^{ix}$

Найдём суммы вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{\cos(2nx)}{(2n)!}+i(-1)^n\frac{\sin(2nx)}{(2n)!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{2inx}}{(2n)!},$$

далее, принимая $z=e^{ix}$, найдём по определению

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{2inx}}{(2n)!}=\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}=\cos(z)=\cos\left(e^{ix}\right).$$

1 Собственные интегралы с параметром

Thr 1.1 (непрерваность интеграла по параметру)**.** *Пусть* $f\colon X\times E\mapsto\mathbb{R}$*, где* E *– область определения* α*, а* X *для* x*. Пусть также* $f(x,\alpha)\in\mathcal{L}(X)\quad\forall\alpha$*, где* $\mathcal{L}(X)$ *– интегрируема по Лебегу на множестве* X*,* $f(x,\alpha)$ *непрерывна почти всюду по* α*, и* $|f(x,\alpha)|$ *мажорируется Лебег-интегрируесой функцией* $\forall\alpha\in E$*. Тогда*

$$I(\alpha)=\int_X f(x,\alpha)\,dx$$

непрерывен.

Con 1.2 (непрерваность интеграла по параметру по Кудрявцеву)**.** *Если функция* $f(x,\alpha)$ *непреывна в прямоугольнике*

$$K=\{(x,\alpha):\quad a\leqslant x\leqslant b,\alpha_1\leqslant\alpha_2\},$$

то интеграл

$$\Phi(\alpha)=\int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)}f(x,\alpha)\,dx$$

есть непрерывная функция параметра α *на отрезке* $[\alpha_1,\alpha_2]$*. В частности, возможен предельный переход под знаком интеграла:*

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx=\int_a^b\lim_{a\to\alpha_0}f(x,\alpha)\,dx.$$

Con 1.3. *Пусть* $f\colon[a,+\infty)\mapsto\mathbb{R}$*. Если* f *непрерывна на* $[a,+\infty)\times[c,d]$ ***и***

$$I(\alpha)=\int_a^{+\infty}f(x,\alpha)\,dx$$

сходится равномерно по α *нв* $[c,d]$*,* ***то*** $I(\alpha)$ *непрерывен по* α *на* $[c,d]$*.*

Thr 1.4. *Пусть* $f\colon X\times E\mapsto\mathbb{R}$*, где* E *– область определения* α*, а* X *для* x*. Пусть также* $f(x,\alpha)\in\mathcal{L}(X)\quad\forall\alpha$*, где* $\mathcal{L}(X)$ *– интегрируема по Лебегу на множестве* X*,* $\exists f'(x,\alpha)\in\mathbb{R}$ *почти всюду по* α*, и* $|f'_\alpha(x,\alpha)|$ *мажорируется Лебег-интегрируесой функцией* $\forall\alpha\in E$ *почти всюду. Тогда*

$$I(\alpha)=\int_X f(x,\alpha)\,dx$$

дифференцируем E *и* $I'(\alpha)=\int_X f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$*.*

Con 1.5. *Пусть* $f\colon[a,b]\times[c,d]\mapsto\mathbb{R}$*,* f *и* f'_α *непрерынва на* $[a,b]\times[c,d]$*,* ***то***

$$I(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)\ \in C^1[c,d];\qquad I'(\alpha)=\int_a^b f'_a(x,\alpha)\,dx.$$

Con 1.6. *Пусть* $I(\alpha)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)}f(x,\alpha)\,dx$*. Для удобства выберем* $a_0=\inf_\alpha a(\alpha)$ *и* $b_0=\sup_\alpha b(\alpha)$*. Также требуем непрерывность* f *и* f'_x *на* $[a_0,b_0]\times[c,d]$*. Считаем, что* $a(\alpha)$ *и* $b(\alpha)$ *дифференцируемы.* ***Тогда*** $I(\alpha)$ *– дифференцируем по* α *на* $[c,d]$*. Более того, в таких условиях верна формула*

$$I'(\alpha)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)}f'_\alpha(x,\alpha)\,dx+f(b(\alpha),\alpha)\cdot b'_\alpha(\alpha)-f(a(\alpha),\alpha)\cdot a'_\alpha(\alpha).$$

Con 1.7. *Пусть функция* $f\colon[a,+\infty)\times[c,d]\mapsto\mathbb{R}$*.* ***Если*** *существует* $\alpha_0\in[c,d]$ *такое, что*

$$I(\alpha)=\int_a^{\infty}f(x,\alpha_0)\,dx$$

сходится, f и f'_α непрерывны на $[a,+\infty)\times[c,d]$, и

$$\int_a^\infty f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$

сходится равномерно по α на E, ***тогда*** *$I(\alpha)\in C^1[c,d]$ и*

$$I'_\alpha(\alpha)=\int_a^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx.$$

Thr 1.8 (интегрирование интегралов, зависящих от параметров)**.** *Если функция $f(x,\alpha)$ непрерывна в прямоугольнике, то интеграл есть функция, интегрируемая на отрезке $[\alpha_1,\alpha_2]$ и справедливо*

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left(\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right)d\alpha=\int_a^b\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\,d\alpha\right)dx.$$

1.1 К. III, §13

13.4

Пусть $f(x)$ непрерывна и принимает положительные значения на $[0,1]$. Докажем, что функция

$$I(\alpha)=\int_0^1\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}f(x)\,dx$$

разрывна при $\alpha=0$.

Функции $\varphi\colon \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}$ и f Лебег-интегрируемы по x на $[0,1]$, знакопостоянны $\forall x\in(0,1)$, а также f –непрерывна, тогда можем воспользоваться первой теоремой о среднем

$$I(\alpha)=f(\xi(\alpha))\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha},\qquad 0\leqslant\xi(\alpha)\leqslant 1.$$

Тогда для $\forall\varepsilon>0$

$$|F(\varepsilon)-F(-\varepsilon)|=\left|\left(f(\xi(\alpha))+f(\xi(-\alpha))\right)\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}\right|\geqslant 2\,in_{x\in[0,1]}f(x)\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}\right|\varepsilon\underset{\to}{\to}0\pi\min_{x\in[0,1]}f(x)>0,$$

что говорит о разрывности функции.

13.5(1)

Выясним, справедливо ли равенство

$$\lim_{\alpha\to0}\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx=\int_0^1\lim_{\alpha\to0}f(x,\alpha)\,dx,$$

где $f(x,\alpha)=\frac{x}{\alpha^2}e^{-x^2/\alpha^2}$.

Ну, вообще нельзя. Переходя к пределу под знаком интеграла, получаем нуль. Если же вычислить интеграл, а затем перейти к пределу, то получим

$$\lim_{\alpha\to0}\int_0^1\frac{x}{\alpha^2}e^{-x^2/\alpha^2}\,dx=\frac12\lim_{y\to0}\int_0^1 e^{-x^2/\alpha^2}\,d\left(\frac{x^2}{\alpha^2}\right)=\frac12\lim_{\alpha\to0}\left(1-e^{-1/\alpha^2}\right)=\frac12.$$

Заметим, что f разрывна в точке $(0,0)$, вот теоремы о предельном переходе и не работает, необходимо проверять вычислением.

13.8(3)

Выясним, равны ли интегралы

$$I_1(\alpha)=\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,\alpha)\,d\alpha\right)dx\ \overset{?}{=}\ \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,\alpha)\,d\alpha\right)dx=I_2(\alpha),\qquad f(x,\alpha)=\left(\frac{x^5}{\alpha^4}-\frac{2x^3}{\alpha^3}\right)e^{-x^2/\alpha}.$$

Считая $t=-x^2/\alpha$ и $dt=x^2(-1/\alpha^2)\,d\alpha$, перейдём к интегралу

$$g(x)=\int_0^1 d\alpha\left(\frac{x^5}{\alpha^4}-\frac{2x^3}{\alpha^3}\right)e^{-x^2/\alpha}=\int_{x^2}^\infty\left(\frac{t^2-2t}{x}\right)e^{-t}\,dt=\frac1x\int_{x^2}^\infty\left(t^2-2t\right)e^{-t}\,dt=\frac1x\left(-t^2e^{-t}\right)\Big|_{x^2}^{+\infty}=x^3e^{-x^2}.$$

Возвращаясь к первоначальному интегрированию

$$\int_0^1 g(x)\,dx=\frac12\int_0^1 x^2e^{-x^2}\,d(x^2)=\frac12\int_0^1 te^{-t}\,dt=-\frac12(t+1)e^{-t}\big|_0^1=\frac12-\frac1e.$$

С другой стороны – другой интеграл,
$$h(\alpha) = \int_0^1 dx f(x,\alpha) = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{1/\alpha} (t^2-2t)e^{-t}\,dt = \frac{1}{2\alpha}\left\{-t^2e^{-t}\right\}\Big|_0^{1/\alpha} = -\frac{1}{2\alpha^3}e^{-1/\alpha}.$$
Остается посчитать интеграл по α
$$\int_0^1 h(\alpha)\,d\alpha = -\frac{1}{2}\int_1^\infty te^{-t}\,dt = -\frac{1}{e},$$
что приводит к противоречию, – интегралы LHS и RHS е равны друг другу.

13.12

Пусть $a>0$, $b>0$. Вычислим интеграл
$$I_1 = \int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx, \qquad I_2 = \int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx.$$
Внутри аргумента интеграла можно увидеть другой интеграл, так что рассмотрим вместо $I_{1,2}$ два повторных интеграла
$$I_1 = \int_0^1 dx\int_a^b x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\,dy, \qquad I_2 = \int_0 61\int_a^b x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\,dy.$$
Обозначим аргументы новых $I_{1,2}$ за f_1 и f_2, которые непрерывны, поэтому позволяют перестановку по Фубини:
$$I_1 = \int_a^b dy\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\,dx, \qquad I_2 = \int_a^b dy\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\,dx.$$
Подставим $x=e^{-t}$:
$$I_1 = \int_a^b dy\int_0^{+\infty} e^{-t(y+1)}\sin t\,dt, \qquad I_2 = \int_a^b dy\int_0^{+\infty} e^{-t(y+1)}\cos t\,dt.$$
Новый аргумент интегрировать мы уже умеем, так что находим
$$I_1 = \int_a^b \frac{dy}{(y+1)^2+1}, \qquad I_2 = \int_a^b \frac{(y+1)\,dy}{(y+1)^2+1},$$
что также интегрируется, так что находим
$$I_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}\right), \qquad I_2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}\right).$$

13.14(3)

Найти $\Phi'(\alpha)$, если
$$\Phi(\alpha) = \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$
Обозначая аргумент интеграла за $f(\alpha,x)$ заметим, что f и f'_α непрерывны, т.к. интеграл собственный, то, интегрируя по частям, находим, что
$$\Phi'(\alpha) = e^{\alpha|\sin\alpha|}(-\sin\alpha) - e^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha + \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

13.17

Есть интеграл вида
$$I(\alpha) = \int_0^b \frac{dx}{x^2+\alpha^2}.$$
Дифференцируя его по параметру $\alpha>0$ вычислим интграл
$$J(\alpha) = \int_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}.$$
Считая интеграл собственным, заметим, что аргумент интеграла $(f(x,\alpha))$, а также f'_α непрерывны. Раз так, то можем интегрировать под знаком интеграла:
$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial\alpha} = \int_0^b dx\;\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{x^2+\alpha^2} = -2\alpha\int_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2} = -2\alpha J(\alpha).$$

Таким образом приходим к

$$J(\alpha)=\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha}\right)=\frac{1}{2\alpha^3}\left\{\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha}+\frac{b\alpha}{b^2+\alpha^2}\right\}.$$

13.18 (1)

Теперь, применяя дифференцирование по параметру α, вычислим

$$I(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\ln\left(\alpha^2-\sin^2\varphi\right)\,d\varphi.$$

Опять таки, перед нами собственный интеграл, с непрерывным аргументом и его производной по α, соответсвенно интегрируемые по Лебегу, поэтому законно писать, что

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\int_0^{\pi/2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\left(\alpha^2-\sin^2\varphi\right)\,d\varphi=\int_0^{\pi/2}\frac{2\alpha\,d\varphi}{\alpha^2-\sin^2\varphi}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}.$$

Таким образом находим, что

$$I(\alpha)=\pi\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})+C.$$

С другой стороны

$$I(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\{2\ln\alpha+o(1)\}\,d\varphi=\pi\ln\alpha+o(1)$$
$$I(\alpha)=\pi\ln\alpha+\pi\ln 2+C+o(1),$$

при больших α. Получается, что

$$I(\alpha)=\pi\ln\left\{\frac{1}{2}\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)\right\}.$$

13.28 (T1)

Докажем формулу для $n\in\mathbb{N}$,

$$I_n=\frac{d^nf(x)}{dx^n}=\psi_n(x),\qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}\qquad \psi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^{n+1}}\displaystyle\int_0^x y^n\cos\left(y+\frac{\pi n}{2}\right)\,dy, & x\neq 0,\\ \dfrac{\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)}{n+1}, & x=0,\ n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Уже из этого потом покажем, что верна оценка

$$\left|\frac{d^nf(x)}{dx^n}\right|\leqslant\frac{1}{n+1},\qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

Ну, выражение для I_n справедливо при $n=1$. Пусть формула для I_n также верна при некотором $n=k$, тогда дифференцируя обе части по x с последующим применением инетгрирования по частям получаем

$$\begin{aligned}I_{k+1}&=\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{x}\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)-\frac{k+1}{x^{k+2}}\int_0^x y^k\cos\left(y+\frac{k\pi}{2}\right)\,dy=\\&=\frac{1}{x}\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)-\frac{k+1}{x^{k+2}}\left(\frac{y^{k+1}}{k+1}\cos\left(y+\frac{k\pi}{2}\right)\Bigg|_0^x+\frac{1}{k+1}\int_0^x y^{k+1}\sin\left(y+\frac{k\pi}{2}\right)\,dy\right)=\\&=-\frac{1}{x^{k+2}}\int_0^x y^{k+1}\sin\left(y+\frac{k\pi}{2}\right)\,dy=\frac{1}{x^{k+2}}\int_0^x y^{k+1}\cos\left(y+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)\,dy,\qquad x\neq 0.\end{aligned}$$

Раскладывая $\sin x$ в ряд Тейлора, можем найти

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{2k}}{(2k+1)!},\quad\forall x,\qquad\Rightarrow\qquad f^{(n)}(0)=\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)}{n+1}.$$

Далее, при $x\neq 0$,

$$\left|\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n\cos\left(y+\frac{\pi n}{2}\right)\,dy\right|\leqslant\frac{1}{|x|^{n+1}}\int_0^{|x|}y^n\,dy=\frac{1}{n+1},$$

а при $x=0$,

$$|f^{(n)}(0)|=\frac{\left|\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right|}{n+1}\leqslant\frac{1}{n+1},\qquad\overset{\forall x}{\Rightarrow}\qquad\left|\frac{d^nf(x)}{dx^n}\right|\leqslant\frac{1}{n+1},\qquad \text{Q. E. D.}$$

2 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Def 2.1. Интеграл, сходящийся $\forall\alpha \in E$, вида

$$I(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$$

называют *равномерно сходящимся на множестве* E, если

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_\varepsilon\colon \forall\alpha \in E,\ \forall\xi \geqslant \delta_\varepsilon \quad \left|\int_\xi^\infty f(x,\alpha)\,dx\right| \leqslant \varepsilon.$$

Если построить отрицание, то поймём, что *интеграл сходится неравномерно* на E, если

$$\exists\varepsilon_0 > 0\colon \forall\delta \in [\alpha,+\infty)\ \ \exists\alpha_\delta \in E,\ \xi_\delta \in [\delta,+\infty)\colon \left|\int_{\xi_\delta}^{+\infty} f(x,\alpha_\delta)\,dx\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

Определение равномерной сходимости соответствует условию

$$\lim_{\xi\to+\infty}\left(\sup_{\alpha\in E}\int_\xi^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx\right) = 0.$$

Lem 2.2 (признак Вейерштрасса)**.** *Если на* $[a,+\infty)$ $\exists\varphi(x)$ *такая, что* $|f(x,\alpha)| \leqslant \varphi(x)$ $\forall x \in [a,+\infty)$ *и* $\forall\alpha \in E$, *и если* $\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$ *сходится, то* $I(\alpha)$ *сходится абсолютно и равномерно на* E.

Lem 2.3 (признак Дирихле)**.** *Интеграл*

$$\int_a^\infty f(x,\alpha)g(x,\alpha)\,dx$$

сходтся равномерно по α *на* E, *если* $\forall\alpha \in E$ *функции* f, g, g'_x *непрерывны по* x *на множестве* $[a,+\infty)$ *и удовлетворяют следующим условиям:* $g(x,\alpha) \rightrightarrows 0$ *при* $x \to \infty$, $g'_x(x,\alpha)$ $\forall\alpha$ *не меняет знака при* $x \in [a,+\infty)$, *функция* f $\forall\alpha \in E$ *имеет ограниченную первообразную* $\forall x,\ \alpha$.

Lem 2.4 (критерий Коши)**.** *Интеграл* $I(\alpha)$ *сходится равномерно на* E *тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши:*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon \in (a,\infty)\ :\ \forall\xi' \in [\varphi_\varepsilon,+\infty),\ \xi'' \in [\delta_\varepsilon,+\infty),\ \forall\alpha \quad \left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,\alpha)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Lem 2.5 (непрерывность)**.** *Если функция* $f(x,\alpha)$ *непрерывна на* $D = \{(x,a) \mid a \leqslant x < +\infty, \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha)2\}$ *и* $I(\alpha)$ *сходится равномерно по* α *на отрезке* $[\alpha_1,\alpha_2]$, *то функция* $I(\alpha)$ *непрерывна на отрезке* $[\alpha_1,\alpha_2]$.

2.1 К. III, §14

14.1(1, 2)

Докажем в 14.1(1) равномерную сходимость интеграла

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}, \qquad E = [\alpha_0;+\infty), \quad \alpha_0 > 1.$$

По признаку Вейерштрассе $x^\alpha \geqslant x^{\alpha_0}$, если $x > 1$, $\alpha > \alpha_0 > 1$

$$\int_1^\infty\frac{dx}{x^\alpha} \leqslant \int_1^\infty\frac{dx}{x^{\alpha_0}} \qquad\Rightarrow\qquad M(x) = \frac{1}{x^{\alpha_0}}.$$

что соответствует сходимости. Аналогично 14.1(2), интеграл вида

$$I(\alpha) = \int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}, \qquad E = (0,\alpha_0), \quad \alpha_0 < 1.$$

Так как $x < 1$, то верно, что при $\alpha < \alpha_0 < 1$ функция $x^\alpha \geqslant x^{\alpha_0}$, что позволяет найти Лебег-интегрируемую мажоранту на E.

14.6(3)

Докажем, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на множестве E_1, и сходится неравномерно на E_2, если

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{4+(x-\alpha)^6}, \qquad E_1 = [-\infty,0], \quad E_2 = [1,+\infty).$$

Для начала на E_1:

$$\left|\int_{\xi}^{-\infty}\frac{dx}{4+(x-\alpha)^6}\right|=\left|\int_{\xi-\alpha}^{+\infty}\frac{dt}{4+t^6}\right|,\qquad \sup_{\alpha\in E_1}\left|\int_{\xi-\alpha}^{+\infty}\frac{dt}{4+t^6}\right|=\int_{\xi}^{+\infty}\frac{dt}{4+t^6}\underset{\xi\to+\infty}{\to}0,$$

что соответсвует равномерной сходимости.

В случае же E_2, по аналогичным рассуждениям, приходим к

$$\sup_{\alpha\in E_2}\left|\int_{\xi-\alpha}^{+\infty}\frac{dt}{4+t^6}\right|=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{4+t^6}\underset{\xi\to+\infty}{\not\to}0,$$

что говорит о неравномерной сходимости.

14.6(4)

Теперь на множествах $E_1=[0,2]$ и $E_2=[0,+\infty)$ рассмотрим интеграл вида

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\exp(-(x-\alpha)^2)\,dx.$$

По определению равномерной непрерывности рассмотрим

$$\Omega(E)=\lim_{\xi\to+\infty}\sup_{\alpha\in E}\left|\int_{\xi}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}\,dx\right|=\lim_{\xi\to+\infty}\sup_{\alpha\in E}\left|\int_{\xi-\alpha}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx\right|.$$

В силу ограниченности E_1 $\Omega(E_1)=0$. А вот на E_2 уже будет верно, что

$$\sup_{\alpha\in E_2}\left|\int_{\xi-\alpha}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx\right|=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx\underset{\xi\to+\infty}{\not\to}0,$$

что говорит о неравномерной сходимости.

14.7(2)

Исследуем на равномерную сходимость интеграл вида

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}\,dx,\qquad E=[0,1].$$

И снова по определению рассмотрим интеграл

$$\left|\int_{\xi}^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}\,dx\right|=\left|\int_{\alpha\xi}^{+\infty}e^{-t}\,dt\right|=e^{-\alpha\xi}.$$

В условиях задачи

$$\alpha>0,\qquad e^{-\alpha\xi}\geqslant\varepsilon_0\in(0,1).$$

Точнее рассмотрим

$$\alpha\xi\leqslant\ln\frac{1}{\varepsilon_0},\qquad\Leftrightarrow\qquad\alpha\leqslant\frac{1}{\xi}\ln\frac{1}{\varepsilon_0}.$$

Далее, по определению,

$$\exists\varepsilon_0>0\ \forall\delta>0\ \exists\xi_\delta=\delta\ \exists\alpha(\delta)=\frac{1}{\delta}\ln\frac{1}{\varepsilon_0},\qquad\Rightarrow\qquad\left|\int_{\xi_\delta}^{+\infty}f(x,\alpha)\,dx\right|=e^{-\alpha(\delta)\xi(\delta)}\geqslant\varepsilon_0.$$

Признак Абеля

Lem 2.6 (признак Абеля)**.** *Если интеграл $I(\alpha)=\int_a^{+\infty}f(x,\alpha)\,dx$ сходится равномерно на $[\alpha_1,\alpha_2]$ и функция φ ограничена и монотонна по x, то интеграл*

$$\int_a^{+\infty}f(x,y)\varphi(x,y)\,dx\underset{[\alpha_1,\alpha_2]}{\rightrightarrows}.$$

$\triangle$. Для $\forall\varepsilon>0$, по Критерию Коши, $\exists B(\varepsilon)$ такое, что $\forall b'$, ξ, $b''>B(\varepsilon)$ независимо от $\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]$ выполняется

$$\left|\int_{b'}^{\xi}f(x,\alpha)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2M},\qquad\left|\int_{\xi}^{b''}f(x,\alpha)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2M},$$

где $M=\sup_{x,\alpha}|\varphi(x,\alpha)|\neq0$.

Далее, так как φ монотонна по x, а функция f интегрируема, то, по второй теореме о среднем, имеем

$$\int_{b'}^{b''}f(x,\alpha)\varphi(x,\alpha)\,dx=\varphi(b'+0,\alpha)\int_{b'}^{\xi}f(x,\alpha)\,dx+\varphi(b''-0,\alpha)\int_{\xi}^{b''}f(x,\alpha)\,dx,$$

где $b' \leqslant \xi \leqslant b''$. Отсюда, учитывая неравенства, получаем оценку

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x,\alpha)\varphi(x,\alpha)\,dx\right| \leqslant |\varphi(b'+0,\alpha)|\cdot\left|\int_{b'}^{\xi} f(x,\alpha)\,dx\right| + |\varphi(b''-0,\alpha)|\cdot\left|\int_{\xi}^{b''} f(x,\alpha)\,dx\right| < \varepsilon,$$

для $\forall\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]$. А это, по критерию Коши, и означает, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на E. □

14.7(4)

Исследуем на равномерную сходимость на E интеграл $I(\alpha)$ вида

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^\alpha}\,dx, \qquad E=[0,+\infty).$$

Сделав замену $x=\sqrt{t}$, получим

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t\,dt}{2(1+t^{p/2})\sqrt{t}}.$$

По признаку Дирихле $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ сходится, а функция $\frac{1}{2}\left(1+t^{\alpha/2}\right)^{-1}$ при $\alpha\geqslant 0$ монотонна по t и ограничена числом 0.5, следовательно, по *признаку Абеля*, интеграл сходится равномерно.

14.7(6)

Исследуем на равномерную сходимость на E интеграл $I(\alpha)$ вида

$$I(\alpha) = \int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^\alpha}, \qquad E=(0,2).$$

Положим $x=1/t$, $t>0$. Тогда

$$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-\alpha}}\,dt, \qquad \Rightarrow \qquad \int_\xi^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-\alpha}}\,dt = \frac{\cos\xi}{\xi^{2-\alpha}} + (\alpha-2)\int_\xi^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{3-\alpha}}\,dt.$$

Последний интеграл [!] сходится равномерно, поэтому при достаточно большм ξ справедлива оценка

$$\left|\int_B^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{3-\alpha}}\,dt\right| < \varepsilon_1, \qquad \varepsilon>0.$$

Возвращаясь к первому слагаемому, заметим, что оно не может быть сделано сколь уголно малым $\forall\Xi\geqslant\xi$ равномерно относительно параметра α. Действительно, пусть $\xi>0$ задано, а также $0<\varepsilon_2\leqslant 1/2$, тогда выбирая $\Xi=2\pi k>\xi$, $k\in\mathbb{N}$ значение параметра α из неравенства $0<2-\alpha<\ln(\varepsilon_2^{-1})/\ln(2\pi\kappa)$ находим, что

$$\left|\frac{\cos\xi}{\xi^{2-\alpha}}\right| = \frac{1}{(2k\pi)^{2-\alpha}} > \varepsilon_2,$$

что означает, что исследуемый интеграл сходится неравномерно.

Lem 2.7. *Если $f(x,\alpha)\rightrightarrows f(x,\alpha_0)$ на каждом интерва $[a,b]$ и $|f(x,\alpha)|\leqslant F(x)$, где $F(x)$ – Лебег-интегрируема, то*

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx = \int_a^{+\infty}\lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)\,dx.$$

△. Оценим по абсолютной величине разность

$$\int_0^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx - \int_0^{+\infty} f(x,\alpha_0)\,dx = \int_a^b \left(f(x,\alpha)-f(x,\alpha_0)\right)\,dx + \int_a^b f(x,\alpha)\,dx - \int_b^{+\infty} f(x,\alpha_0)\,dx, \qquad b>a.$$

Для $\forall\varepsilon>0$ задано, в силу мажорируемости Лебег-интегрируемой функцией, при достаточно большом b справедливы оценки

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx\right| \leqslant \int_b^{+\infty} F(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \left|\int_b^{+\infty} f(x,\alpha_0)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

а в силу условия равномерной сходимости – оценка

$$|f(x,\alpha)-f(x,\alpha_0)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}, \qquad \forall x\in[a,b],$$

если разность $|y-y_0|$ достаточно мала.

Таким образом получаем

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx - \int_a^{+\infty} f(x,\alpha_0)\,dx\right| < \varepsilon,$$

при достаточно малом $|\alpha - \alpha_0|$. □

14.21

Покажем, что есть f непрерывна и ограничена на промежутке $[0, +\infty)$, то

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha f(x)}{x^2+\alpha^2}\, dx = f(0).$$

Как обычно положим $x = t\alpha$, при $t > 0$ и $y > 0$. Тогда

$$I = \lim_{y\to+0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(ty)}{t^2+1}\, dt.$$

Так как $|f(ty)|/(t^2+1) \leqslant M/(t^2+1)$, где $|f(ty)| \leqslant M = \mathrm{const}$, $\int_0^{+\infty} dt/(t^2+1) = \pi/2$ (сходится), а в силу непрерывности f дробь $\frac{f(t\alpha)}{t^2+1} \rightrightarrows \frac{f(0)}{t^2+1}$ при $y \to +0$ на каждлм конечном интервале $[a, b]$, то, согласно выше рассмотренной лемме, находим

$$\lim_{\alpha\to+0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(t\alpha)}{t^2+1}\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \lim_{\alpha\to+0} \frac{f(t\alpha)}{t^2+1}\, dt = f(0).$$

В силу нечетности интеграла по α, имеем

$$\lim_{\alpha\to-0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha f(x)}{x^2+\alpha^2}\, dx = -f(0).$$

2.2 T2

Интеграл Дирихле. Вычислим *интеграл Дирихле*

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx \tag{2.1}$$

Для начала вычислим некоторый другой интеграл:

$$\Phi(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx, \qquad \Phi'_\alpha(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\beta x} \cos(\alpha x)\, dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Действительно, считая $f'_\alpha(x, \alpha) = e^{-\beta x}\cos(\alpha x)$, заметим, что f и f'_α непрерывны на E, $\int_0^{\infty} f(x, \alpha)\, dx$ сходится $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ по Дирихле:

$$\left| \int_0^{\infty} \sin(\alpha x)\, dx \right| = \left| \frac{\cos(\alpha t) - 1}{\alpha} \right| \leqslant \frac{2}{|\alpha|}, \qquad \alpha \neq 0,$$

а функция $x^{-1}e^{-\beta x}$ убывает на промежутке $(0, +\infty)$, также верно, что $\int_0^{\infty} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx$ сходится равномерно по признаку Вейерштрассе, следовательно можем дифференцировать под знаком интеграла.

Теперь, интегриря α на отрезке $[0, \alpha]$ находим

$$\Phi(\alpha, \beta) - \Phi(0, \beta) = \beta \int_0^{\alpha} \frac{dt}{t^2+\beta^2} = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta}.$$

Понятно, что $I(\alpha) = -I(\alpha)$, так что далее считаем $\alpha > 0$. Имеем право рассмотреть $\beta \in [0, 1]$, точнее предел

$$\lim_{\beta\to+0} \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx = I(\alpha) = \lim_{\beta\to+0} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом для произвольного α верно, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(\alpha). \tag{2.2}$$

Интеграл Лапласа. Вычислим интегралы Лапласа

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx = \int_0^{\infty} f(x, \alpha)\, dx, \qquad K(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx.$$

Без ограничения общности рассмотрим $\alpha > 0$. Проверим, что можем дифференцировать под знаком интеграла: $f(x, \alpha)$ непрерывна $\forall \alpha$, x, интеграл

$$\int_0^{+\infty} f'_\alpha\, dx = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx,$$

сходится равномерно по α на $[a_0, +\infty)$ для $\forall \alpha_0 > 0$, получается верно, что

$$I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} = -K(\alpha).$$

Складывая с известным выражением интеграла Дирихле, находим

$$I'(\alpha) + \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} - \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)}\, dx.$$

Аргумент интеграла непрерывен, как и его производная по α, они Лебег-интегрируемы, поэтому, дифференцируя под знаком интеграла, находим

$$I''(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx.$$

Так мы приходим к дифференциальному уравнению на $I(\alpha)$:

$$I''(\alpha) - I(\alpha) = 0, \quad \Rightarrow \quad I(\alpha) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha}.$$

Рассматривая пределы $\alpha \to 0$ и $\alpha \to +\infty$, находим константы интегрирования $C_1 = 0$ и $C_2 = \pi/2$. В силу четности $I(\alpha)$ находим

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Бонусом находим $K(\alpha) = -I'_\alpha(\alpha)$:

$$K(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|} \cdot \operatorname{sign} \alpha.$$

Интегралы Френеля. Вычислим *интеграл Френеля*

$$I = \int_0^{+\infty} \sin^2 x^2\, dx.$$

Для нахождения нам понадобится *интеграл Эйлера-Пуассона* и, возможно, *интеграл Лапласа*:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2}..$$

Полагая $x^2 = t$ запишем интеграл I в виде

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt.$$

При $t > 0$ справедливо равенство

$$\int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\, du = \Big/ x = \sqrt{t} u \Big/ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\, du, \tag{2.3}$$

Так приходим к двойному интегралу

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin t\, dt \int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\, du.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \sin t\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4}.$$

Который легко вычисляется, если заметить, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{(1/x^2)\, dx}{1+(1/x)^4} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

Поэтому

$$2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{(1+1/x^2)\, dx}{x^2+1/x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{d(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1/x}{\sqrt{2}} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Откуда уже и получаем

$$I = \int_0^{+\infty} \sin^2 x^2\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{2.4}$$

2.3 Т3

Докажем *формулу Фруллани*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = f(0) \ln \frac{b}{a}, \qquad a > 0,\ b > 0,$$

где f – непрерывная функция и $\int_A^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx$ сходится $\forall A > 0$.

В силу условий теоремы

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x}\,dx = \int_{Aa}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt, \qquad \int_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x}\,dx = \int_{Ab}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt, \quad \Rightarrow \quad \int_A^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int_{Aa}^{Ab} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

По *первой теореме о среднем*, получаем

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(\xi)\int_{Aa}^{Ab} \frac{dt}{t} = f(\xi)\ln\frac{b}{a}, \qquad Aa \leqslant \xi \leqslant Ab.$$

Поскольку функция f непрерывна, то $\lim_{A\to+0} f(\xi) = f(0)$, откуда находим

$$\lim_{A\to+0}\int_A^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a}. \tag{2.5}$$

Стоит заметить, что если $\int_A^\infty f(x)/x\,dx$ расходится, то

$$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty), \quad \exists \int_A^{+\infty} \frac{f(x)-f(+\infty)}{x}\,dx \in \mathbb{R}, \quad \Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = (f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}.$$

2.4 К. III, §15

15.1(1, 2, 3, 4)

1) Найдём интеграл вида

$$\int_0^{+\infty} \left(\cos^2(ax) - \cos^2(bx)\right)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(\cos(2ax) - \cos(2bx)\right)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}.$$

где воспользовались формулой Фрулани, выбрав $\cos(2ax) = f(ax)$.

2) Теперь найдём

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{-ax^2} - e^{-bx^2}\right)\frac{dx}{x} = \ln\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a},$$

3) Интеграл вида

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\,dx = \Big/ \begin{aligned} x &= \sqrt{t}, \\ dx &= dt/(2\sqrt{t}) \end{aligned} \Big/ = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{2t}\,dt = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}.$$

4) И, наконец, вычислим интеграл вида

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x}\,dx = \Big/ \ln\frac{1}{x} = t \Big/ = \int_\infty^0 \frac{dt}{t} e^{-t}(e^{-at} - e^{-bt}) = \int_0^\infty \left(e^{-(b+1)t} - e^{-(a+1)t}\right)\frac{dt}{t} = \ln\frac{a+1}{b+1}$$

15.2(1)

Найдём интеграл, вида

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x^2}\,dx = -\int_0^{+\infty} \sin^2\left(\frac{\alpha x}{2}\right)\,d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}x\right)}{x}\Bigg|_0^{+\infty} + \frac{\alpha}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi|\alpha|}{2},$$

где модуль вполне правомерен в силу чётности $\cos(\alpha x)$.

15.3(2)

Интеграл

$$\int_0^\infty \sin x\cos^2 x\frac{dx}{x} = \int_0^{+\infty} \sin(x)\frac{1+\cos(2x)}{2}\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin x\cos 2x}{x}\,dx,$$

где уже хочется подставить $\sin(3x) - \sin(x) = 2\sin(x)\cos(2x)$:

$$\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(3x)}{x}\,dx - \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

15.4(3)

Есть интеграл вида
$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(\alpha x)}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx..$$
Заметим, что f, f'_α существуют почти всюду по α, $f'_\alpha = \frac{4\sin^3(\alpha x)\cos(\alpha x)}{x}$ мажорируется $10x^2$ при малых x и *не абсолютно* интегрируема при больших по признаку Дирихле, соответственно можем нтегрировать под знаком интеграла
$$I'_\alpha(\alpha) = \int_0^{+\infty} 4\sin^3(\alpha x)\cos(\alpha x)\frac{dx}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x}\left(\frac{1}{4}\sin(2x\alpha) - \frac{1}{8}\sin(4x\alpha)\right) = \frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\alpha,$$
что верно $\forall\alpha$.

Возвращаясь к интегралу, находим, что
$$I(\alpha) = \frac{\pi}{4}|\alpha| + 0,$$
так как $I(0) = 0$.

Thr 2.8 (интерирование по частям)**.** *Вооообще*
$$\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)g'_x(x,\alpha)\,dx = f(x,\alpha)g(x,\alpha)\Big|_a^{\infty} - \int_a^{+\infty} f'_x(x,\alpha)g(x,\alpha)\,dx,$$
работает, когда $f, g \in C^1$ по x и любые два из трёх написанных пределов существуют.

15.5(6)

Вычислим интеграл вида
$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sin^3(x)\cos(\alpha x)\frac{dx}{x^3}.$$
Интегрируя по частям
$$\sin^3 x\cos(\alpha x) = \frac{3}{8}\left(\sin(\alpha+1)x - \sin(\alpha-1)x\right) - \frac{1}{8}\left(\sin(\alpha+3)x - \sin(\alpha_3)x\right),$$
для $\alpha > 3$. В общем приходим к выражению
$$\begin{aligned}
I(\alpha) &= \int_0^{+\infty} \sin^3(x)\cos(\alpha x)\frac{dx}{x^3} = \int_0^{\infty} \sin^3 x\cos(\alpha x)\,d\left(\frac{-1}{2x^2}\right) = \\
&= \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\sin^3 x\cos\alpha x\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,d(\sin^3 x\cos\alpha x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(\sin^3(x)\cos(\alpha x)\right)'_x f\left(-\frac{1}{x}\right) = \\
&= -\frac{1}{2x}\left(\sin^3 x\cos(\alpha x)\right)'_x\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,d\left(\sin^3 x\cos\alpha x\right)'_x = \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x}\Bigg(\frac{3}{8}\left[(\alpha+1)^2\sin(\alpha+1)x - (\alpha-1)2\sin(\alpha-1)x\right] - \\
&\qquad \frac{1}{8}\left[(\alpha+3)^2\sin(\alpha+3)x - (\alpha-3)^2\sin(\alpha-3)x\right]\Bigg) = \\
&= -\frac{\pi}{4}\left\{\frac{3}{8}(\alpha+1)^2 - \frac{3}{8}(\alpha-1)^2 - \frac{1}{8}(\alpha+3)^2 + \frac{1}{8}(\alpha-3)^2\right\} = 0
\end{aligned}$$

15.6(3)

С помощью дифференцирования по параметру вычислим
$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\sin\lambda x\,dx = \int_0^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx, \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \lambda \neq 0.$$
Для начала проверим, что можем дифференцировать по параметру λ. Действительно $f \in \mathcal{L}(X)$, $f'_\lambda = \left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right)\cos(\lambda x)$ существует, конечна и Лебег-интегрируема ($< e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}$) $\forall\lambda$. Тогда, дифференцируя под знаком интеграла
$$I'_\lambda(\lambda) = \int_0^{+\infty} \left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right)\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2} - \frac{\beta}{\beta^2+\lambda^2}.$$

В таком случае $I(\lambda)$

$$I(\lambda) = \int I'_\lambda(\lambda)\,d\lambda = \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda}{\beta}\right) + C = \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda}{\beta}\right),$$

где $C = 0$ так как $I(0) = 0$.

15.6(5)

При выполнении всех условий о дифференцирование интеграла по параметру, для интеграла

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

может быть так посчитан.

Действительно,

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{1+(\alpha x)^2} = \int_0^1 dx\left[\sqrt{1-x^2}(1+(\alpha x)^2)\right]^{-1} =$$

$$= \Big/ x = \cos t,\ dx = -\sin t\,dt \Big/ = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

Тогда $I(\alpha)$

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\int \frac{d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} + C = \frac{\pi}{2}\ln\left|\alpha + \sqrt{\alpha^2+1}\right| + C = \frac{\pi}{2}\ln\left(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}\right),$$

где $I(0) = 0$ так что $C = 0$.

15.13(5)

Попробуем через интеграл Эйлера-Пуассона доказать, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+\alpha^2/x^2)}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

Представим интеграл в виде

$$\int_0^1 \exp\left(-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) + \int_1^{+\infty}\left(-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)dx,$$

далее, произведя замену $y = 1/x$ в первом интеграле получаем

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \exp\left(-\alpha^2 y^2 + \frac{1}{y^2 1}\right)\frac{dy}{y^2} + \int_1^{+\infty}\exp\left(-y^2 - \frac{\alpha^2}{y^2}\right)dy.$$

Так как подынтегральные функции f_1 и f_2 сходятся непрерывны при всех α и $1 \leqslant y < +\infty$, а соответствующие интегралы, по признаку Вейерштрасса, сходятся равномерно:

$$|f_1| \leqslant \frac{1}{y^2}, \qquad |f_2| \leqslant e^{-y^2},$$

и интегралы

$$\int_1^{+\infty}\frac{dy}{y^2}, \qquad \int_1^{+\infty} e^{-y^2}\,dy$$

сходятся, то функция I непрерывна $\forall|\alpha| \in \mathbb{R}$.

Пусть $|\alpha| \geqslant \varepsilon > 0$. Поскольку функции $\partial_\alpha f_1$ и $\partial_\alpha f_2$ непрерывны в области $|\alpha| \geqslant \varepsilon,\ 1 \leqslant y < +\infty$, а соответствующие интегралы от них, в силу мажорантного признака, сходятся равномерно, то функция I' непрерывна при $\alpha \neq 0$. Следовательно

$$I'_\alpha(\alpha) = -2\alpha\int_0^{+\infty}\exp\left(-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)\frac{dx}{x^2}.$$

Кроме того, положив в исходном интеграле $x = \alpha/y$, $y > 0$, можем написать

$$I(\alpha) = \alpha\int_0^{+\infty}\exp\left(-y^2 - \frac{\alpha^2}{y^2}\right)\frac{dy}{y^2}.$$

Сравнивая последние два интеграла, получаем дифференциальное уравнение $I' + 2I = 0$, решая которое, находим

$$I(\alpha) = Ce^{-2\alpha}.$$

В силу непрерывности $I(\alpha)$ находим, что $I(0) = \sqrt{\pi}/2$, откуда $C = \sqrt{\pi}/2$. Окончательно,
$$I(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(-2|\alpha|\right).$$

Lem 2.9. *Верно представление, вида*
$$\frac{1}{x^2+1} = \int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)}\, dy.$$

15.15(1, 4)

1) Найдём интеграл, вида
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\alpha x)}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(2\alpha x)}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\alpha x)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-2|\alpha|}\right).$$
4) Теперь хочется взять интеграл
$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\alpha x)}{x^2(1+x^2)}\, dx = \int_0^{+\infty} f(x,\alpha)\, dx.$$
Заметим, что $f(x,\alpha)$ Лебег-интегрируема $\forall \alpha \in E$. Рассмотрим
$$f'_\alpha = \frac{\sin 2\alpha x}{x^2(1+x^2)}.$$
для которой верно, что
$$\left|\frac{2\sin 2\alpha x}{x(1+x^2)}\right| \leqslant \left|\frac{1}{1+x^2}\right|, \quad x < 0.1/\alpha, \qquad \left|\frac{2\sin 2\alpha x}{x(1+x^2)}\right| \leqslant \left|\frac{2}{x^3}\right|, \quad x > 1,$$
соответственно, f'_α Лебег-интегрируема. Тогда верно, что
$$I'_\alpha(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2\alpha x}{x(1+x^2)}\, dx.$$
Дифференцируем дальше, по крайней мере хотим, для этого необходимо, чтобы f'_α и $f''_{\alpha,\alpha}$ были бы Лебег-интегрируемы и существуют $\forall\alpha$, что верно. Тогда
$$\frac{d^2 I(\alpha)}{d\alpha^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\alpha x)}{1+x^2}\, dx = 2\frac{\pi}{2} e^{-2|\alpha|}.$$
Последний интеграл уже берется:
$$I''(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{2\cos 2\alpha x}{1+x^2}\, dx = 2\frac{\pi}{2} e^{-2\alpha}.$$
Отсюда находим
$$I'_\alpha(\alpha) = -\frac{\pi}{2} e^{-2\alpha} + C_1 = -\frac{\pi}{2} e^{-2\alpha} + \frac{\pi}{2},$$
и, наконец, находим
$$I(\alpha) = \frac{\pi}{4} e^{-2\alpha} + \frac{\pi}{2}\alpha + C_2, \quad \Rightarrow \quad I(\alpha) = \frac{\pi}{4}\left(e^{-2\alpha} + 2\alpha - 1\right), \quad \alpha > 0.$$

3 Интеграл Фурье и преобразование Фурье

Введём прямое и обратное преобразование Фурье:
$$f(x) \mapsto \hat{f}(y) = F[f](y) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt}\, dt, \tag{3.1}$$
$$f(y) \mapsto \check{f}(x) = F^{-1}[f](x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{ixt}\, dt. \tag{3.2}$$
Далее выпишем некоторые свойства преобразования Фурье.

Фомула обращения. Если непрерывная функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и имеет в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ конечные односторонние производные, то
$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f.$$

Непрерывность. Если функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то её преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ – непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}$ функция, для которой верно
$$\lim_{y\to+\infty} \hat{f}(y) = \lim_{y\to-\infty} \hat{f}(y) = 0.$$

Преобразования Фурье производной. Если функция f и её производные до n-го порядка включительно непрерывны и абсолтно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то

$$F[f^{(k)}] = (iy)^k F[f], \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Производная преобразования Фурье. Если функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, а функции $f(x), xf(x), \ldots, x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то функция $\hat{f}(y) = F[f](y)$ имеет на $\mathbb{R}$ производные до n-го порядка включительное, причем

$$\hat{f}^{(k)}(y) = (-i)^k F[x^k f(x)], \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Также полезно определить *интеграл Фурье*, как интеграл вида

$$f(x) \sim F^{-1}[F[f]](x) = v.p.\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\, dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ty}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} c(y) e^{ixy}\, dy,$$

где

$$c(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iyt}\, dt.$$

Иначе, через тригонометрические функции

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(y) \cos(yx)\, dx + \int_0^{+\infty} b(y) \sin(yx)\, dx,$$

где

$$a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(yt)\, dt, \qquad b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(yt)\, dt.$$

3.1 К. III, §17

17.1(4)

Представим функцию $f(x)$ интегралом Фурье, если $f(x)$ вида

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, \qquad a \neq 0.$$

Заметим, что $b(y) = 0$, а $a(y)$

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(yt)}{t^2 + a^2}\, dt = \Big/ t = ax \Big/ \frac{2}{\pi a} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ayx)}{1 + x^2} = \frac{2}{\pi a} \frac{\pi}{2} e^{-ya},$$

таким образом находим представление в виде интеграла Фурье

$$f(x) = \frac{1}{|a|} \int_0^{+\infty} e^{-y|a|} \cos(xy)\, dy.$$

17.2(3)

Представим функцию $f(x)$ интегралом Фурье, если $f(x)$ вида

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & |x| \leqslant \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Для начала заметим, что $b(y) = 0$, а $a(y)$

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dt f(t) \cos(yt) = \frac{2}{\pi} \begin{cases} \cos(\pi y/2), & y \neq 1 \\ \pi/4, & y = 1 \end{cases}$$

В таком случае можем сопоставить функции её интеграл Фурье

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\pi y/2)}{y^2 - 1} \cos(xy)\, dy.$$

17.6(2)

Представим интегралом Фурье функцию $f(x)$, продолжив её чётным образом на $(-\infty, 0)$, если

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ -, & |X| > 1. \end{cases}$$

Функция является кусочно-гладкой и абсолютно интегрируемой на $(-\infty, \infty)$, следовательно, её можно представить интегралом Фурье, в силу четности $b(\lambda) = 0$, а $a(\lambda)$

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos\lambda x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin\lambda}{\lambda}.$$

Таким образом находим представление:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\cos(\omega x)\,d\omega, \qquad |x| \neq 1.$$

В точках же $x = \pm 1$, интеграл Фурье равен $1/2$.

17.7(4)

Теперь найдём преобразование Фурье у аналогичной функции:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leqslant \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

Преобразование Фурье найдём, как интеграл вида

$$F[f](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)(-i)\sin(yt)\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = 2\int_0^{\pi} \sin t\sin(yt)(-i)\frac{dt}{\sqrt{2\pi}},$$

который уже легко считается

$$F[f](y) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\begin{cases} \dfrac{\sin(\pi y)}{1-y^2}, & y \neq \pm 1, \\ \dfrac{\pi}{2}, & y = \pm 1. \end{cases}$$

17.8(2, 4)

2) Найдём преобразование Фурье функции

$$f(x) = e^{-x^2/2}.$$

Преобразование Фурье найдём, как интеграл вида

$$F[f](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}e^{-ity}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = \Big/ t/\sqrt{2} = x \Big/ = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(\sqrt{2}yx)\,dx =$$
$$= e^{-y^2/2},$$

где мы воспользовались свойством

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos(2\alpha x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha^2}.$$

6) Найдём преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{d^2}{dx^2}(xe^{-|x|}).$$

Преобразование Фурье найдём, как интеграл вида

$$F[f](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2}{dt^2}(te^{-|t|})e^{-iyt}\frac{dt}{d\sqrt{2\pi}} = y^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\frac{\partial}{\partial(iy)}e^{-iyt}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} =$$
$$= -iy^2\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\cos(yt)\,dt = i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{y^2}{(1+y^2)^2}.$$

17.14

Рассмотрим преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ функции $f(x) = 1/(1+|x|^5)$.

1) Рассмотрим третью производную

$$\partial_y^3 F[f](y) = (-i)^3 F[t^3 f](y) = (-i)^3\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3}{1+|t|^5}e^{-iyt}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi(y).$$

Заметим, что

$$|\Psi(y)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|^3}{1+|t|^5}\cdot 1\cdot\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} < +\infty,$$

по признаку Вейерштрассе.

2) Заметим, что $y^5 O(y^{-5}) = O(1)$, а также $(iy)^5 F[f](y) = O(1)$ в окрестности больших y. Если $\exists C\colon \overset{\circ}{U}(x_0)\colon |f(x)/g(x)| \leqslant C$, то говорят, что $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$. Верно, что

$$\varphi(y) = (iy)^5 F[f](y) = F[f^{(5)}](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\partial^5 f(t)}{\partial t^5}\right) e^{-iyt}.$$

Тогда верна оценка

$$|\varphi(y)| = |y|^5 |F[f](y)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \left|\frac{\partial^5 f(t)}{\partial t^5}\right| \equiv C < +\infty.$$

Более того

$$|F[f](y) \leqslant \frac{X}{|y|^5}, \qquad \Rightarrow \qquad F[f](y) = O\left(\frac{1}{y^5}\right).$$

3) Наконец получим оценку для больших y:

$$|\varphi(y)| = |y|^5 \Big|F[f](y)\Big| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial^5 f(t)}{\partial t^5} e^{-iyt}\right|.$$

Так приходим к оценке

$$\Big|F[f](y)\Big| = \frac{1}{|y|^5}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial^5 f(t)}{\partial t^5} e^{-iyt}\right| = \frac{K(y)}{|y|^5},$$

где $C(y)$ бесконечно малое при $y \to \infty$ по лемме Лебега-Римана, или лемме об осцилляции.

Lem 3.1 (лемма Римана-Лебега). *Если $f(x)$ такая, что $\int_{\mathbb{R}} |f| < +\infty$, то $\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ipx} \to 0$ при $p \to \infty$.*

17.17(2)

Найдём $\varphi(y)$, если

$$\int_0^{+\infty} \varphi(y) \sin(xy)\, dy = e^{-x}, \qquad x > 0.$$

Через обратное преобразование Фурье:

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \left(\cos(xy) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\pi} \varphi(t) \cos(yt) + \sin(xy) 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\pi} \varphi(t) \sin(yt)\right) dy,$$

тогда

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} dy e^{-y} \sin(xy) = \frac{2}{\pi} \frac{x}{1+x^2}, \qquad x > 0.$$

3.2 T4

Докажем, что функции вида $P(x) e^{-x^2/2}$, где $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, при преобразовании Фурье переходти в функцию того же вида, причём степень многочлена не повышается.

Действительно,

$$\begin{aligned} F[f](y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} P_\alpha(t) e^{-t^2/2} e^{-iyt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} P_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial(-iy)} e^{-yt}\right) = \\ &= P_\alpha\left(i\frac{\partial}{\partial y}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} e^{-iyt} \overset{17.8(2)}{=} P_\alpha\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right) e^{-y^2/2}. \end{aligned}$$

Осталось показать, что степень многочлена не увеличилась, для этого достаточно рассмотреть

$$F[f](y) = p_\alpha \cdot \left(i\frac{\partial}{\partial y}\right)^n e^{-y^2/2} + P_{\alpha-1}\left(i\frac{\partial}{\partial y}\right) e^{-y^2/2} = p_\alpha i^\alpha (-y)^\alpha e^{-y^2/2} + Q_{\alpha-1}(y) e^{-y^2/2} + P_{\alpha-1}\left(i\frac{\partial}{\partial y}\right) e^{-y^2/2},$$

поэтому степень не повышается.

3.3 T5

Вычислим интегралы Лапласа с помощью образения преобразования Фурье:

$$I(y) = \int_0^{+\infty} dx \frac{\cos(yx)}{1+x^2}, \qquad K(y) = \int_0^{+\infty} dx \frac{x\sin(yx)}{1+x^2}.$$

В частности рассмотрим функцию $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, где $\alpha > 0$, тогда

$$F[f](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}, \qquad F^{-1}[g](x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}g(y)e^{ixy}.$$

Теперь воспользуемся формулой образения, и найдём

$$f(x) = F^{-1}\left[F[f]\right](x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} dy\frac{\alpha\cos(2y)}{\alpha^2+y^2} = e^{-\alpha|x|}, \quad \alpha > 0.$$

Соответственно, при $\alpha = 1$, найдём

$$\int_0^{+\infty} dy\frac{\cos(xy)}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}.$$

Аналогично находим $K(\alpha)$, а именно $F[f'](y) = iyF[f](y)$

$$F^{-1}[F[f']](x) = f'(x) = F^{-1}\left[iyF[f]\right](x) = 2\int_0^{+\infty}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}i\sin(xy)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha iy}{\alpha^2+y^2} = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} dy\frac{\alpha y\sin(xy)}{\alpha^2+y^2} = -\alpha\operatorname{sign} x e^{-\alpha|x|},$$

что при $\alpha = 1$ перейдёт в интеграл вида

$$\int_0^{+\infty}\frac{y\sin(xy)}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(x)e^{-|x|}.$$

3.4 T6

Пусть $f \in S(\mathbb{R})$, $\forall x_0, y_0 \in \mathbb{R}$:

$$\|(x-x_0)f(x)\|_2 \cdot \|(y-y_0)\hat{f}(y)\| \geqslant \frac{1}{2}\|\hat{f}\|_2^2.$$

Для начала рассмотрим $(y-y_0)\hat{f}(y)$. Сделаем замену $t = y - y_0$, тогда

$$(y-y_0)\hat{f}(y) = t\hat{f}(y_0+t),$$

раскрывая, находим

$$\hat{f}(y_0+t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+y_0)e^{-iyt}\,dt = e^{iy_0t}F[f](y).$$

Построим следующую цепочку равенств

$$\|(y-y_0)\hat{f}(y)\|_2 = \|f\hat{f}(y_0+t)\| = \|te^{iy_0t}\hat{f}(t)\|_2.$$

Также заметим, что такое преобразование сохраняет норму (что логично):

$$\|ge^{iy_0t}\|_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} ge^{iy_0t}\cdot\overline{ge^{iy_0t}}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g\bar{g}\,dt = \|g\|_2.$$

Тогда

$$\|te^{iy_0t}\hat{f}(t)\|_2 = \|t\hat{f}(t)\|_2 = \|\hat{f}'(t)\|_2.$$

Теперь, воспользовавшись унитарностью преобразования Фурье, найдём

$$\|\hat{f}'(t)\|_2 = \|f'(t)\|_2.$$

Наконец, можем свести изначальное утверждение к неравенству

$$\|xf(x)\|_2 \cdot \|f'(x)\|_2 \geqslant \frac{1}{2}\|f\|_2^2,$$

которое уже можем доказать по неравенству Коши-Буняковского

$$\int_{\mathbb{R}}(xf(x))^2\,dx\int_{\mathbb{R}}(f')^2\,dx \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}} xf(x)f'(x)\,dx\right)^2 = \left(-xf^2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f^2(x)\,dx\right)^2 = \frac{1}{4}\|f\|_2^4, \qquad \text{Q. E. D.}$$

где равенство нулю на границах обусловлено принадлежности пространству Шварца.

3.5 T7

Найдём преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} x^{p-1}e^{-x}, & x > 0\\ 0, & x \leqslant 0,\end{cases}$$

при $p > 0$.

Для начала рассмотрим

$$\frac{d\hat{f}}{dx} = -iF[f\cdot x] = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x^p e^{-x-ixy}\,dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left(\left.\frac{xpe^{-x(1+iy)}}{-1-iy}\right|_0^{+\infty}\right) - \frac{ip}{\sqrt{2\pi}}\int x^{p-1}\frac{e^{-x-ixy}}{-1+iy}\,dx = \frac{-ip\hat{f}(y)}{1+iy},$$

что даёт нам некоторое дифференциальное уравнение на $\hat{f}$ вида

$$\frac{d\hat{f}}{\hat{f}} = \frac{(-ip)\,dy}{1+iy}, \qquad \Rightarrow \qquad \hat{f}(y) = C(1+iy)^{-p}.$$

Осталось найти константу интегрирования, при $y=0$:

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x^p e^{-x}\,dx = \frac{\Gamma(p)}{\sqrt{2\pi}},$$

откуда находим

$$\hat{f}(y) = \frac{\Gamma(p)}{\sqrt{2\pi}}(1+iy)^{-p}.$$

3.6 T8

Пусть фунция $f\in L_1(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на всей прямой. Докажем, что свёртка

$$f * \ldots * f$$

$k+2$ раза будет k раз непрерывно дифференцируема.

Рассмотрим

$$\hat{h}(y) = (2\pi)^{-k/2-1}(\hat{f}(y))^{k+2}.$$

Если $f\in L_1(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, то

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx,$$

будет равным $O(1/y)$ при $y\to\infty$. Тогда $\hat{h}(y) = O(y^{-k-2})$ при больших y.

Теперь рассмотрим

$$F^{-1}[h](y)\colon \frac{d}{dy}F^{-1}[h](y) = F[(-it)h(t)](y),$$

также верно, что

$$(F^i)^{(k)} = F[(-it)^k h[t]](y) \to \int_{-\infty}^{+\infty} O\left(\frac{1}{y^2}\right)e^{iyt}\,dt.$$

Вспомним, что $I(\alpha) = \int f(x,\alpha)\,dx$ непрерывен при f непрерывной, и $I(\alpha)$ сходящемуся равномерно по α:

$$|f(x)| = O(g(x)),$$

когда найдётся κ такая, что

$$|f(x)| \leqslant \kappa|g(x)|, \qquad \Rightarrow \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} O\left(\frac{1}{y^2}\right)e^{iyt}\,dt \leqslant \kappa\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{y^2}e^{iyt}\,dt = \frac{-i\kappa e^{iyt}}{y^3} \leqslant \frac{\kappa}{y^3},$$

следовательно сходится равномерно по признаку Вейерштрассе, а значит и k-я производная существует и непрерывна.

3.7 T9

Найдём преобразование Фурье функции $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ вида $f(x) = e^{-A(x)}$, где $A(x)$ – положительно определенная квадратичная форма.

Во-первых

$$A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}A_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta.$$

Тогда преобразование Фурье можно найти, как интеграл, вида

$$F[f](\boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{d^n t}{(2\pi)^{n/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}A_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta - iy_\alpha t^\alpha\right) = \frac{1}{\sqrt{\det A}}\exp\left(-\frac{1}{2}(A^{-1})_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta\right) \equiv \frac{\exp(-A^{-1}(\boldsymbol{y}))}{\sqrt{\det A}}. \tag{3.3}$$

Докажем эту замечательную формулу.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{2}(O\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}A(O\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}O^{\mathrm{T}}AO\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}D\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\sum_\alpha\left(\sqrt{\lambda_\alpha}x^\alpha\right)\left(\sqrt{\lambda_\alpha}x_\alpha\right) = \frac{1}{2}z^\alpha z_\alpha.$$

Дифференциал можем переписать в виде

$$d^n t = \left| \frac{\partial(t_1, \dots, t_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} d^n x \right| = |\det O| d^n x = \frac{d^n z}{\sqrt{\det A}}.$$

Также можем рассмотреть скалярное произведение:

$$(\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{t}) = (O^{\mathrm{T}})_{\alpha\beta} y^\alpha x^\beta = \sum_\beta \frac{1}{\sqrt{\lambda_b}} O_{\beta\alpha} y^\alpha z^\beta = k_\beta z^\beta.$$

Итого наш первоначальный интеграл сводится к

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n z}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det A}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{z}) - i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{z})\right) = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \prod_{\alpha=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz^\alpha}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z^\alpha)^2 - ik_\alpha z^\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det A}} \prod_{\alpha=1}^n \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k})\right) = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \prod_{\alpha=1}^n e^{-A^{-1}(y)},$$

где воспользовались равенством

$$k_\alpha k^\alpha = \sum_\alpha \frac{1}{\lambda_\alpha} O_{\beta\alpha} (O^{\mathrm{T}})^{\alpha\gamma} y^\beta y_\gamma = (A^{-1})^\gamma_\beta y^b y)\gamma = 2A^{-1}(\boldsymbol{y}),$$

что в итоге доказывает написанную формулу

$$\boxed{F\left[e^{-A(x)}\right](\boldsymbol{y}) = \frac{\exp(-A^{-1}(\boldsymbol{y}))}{\sqrt{\det A}}}.$$