Домашнее задание курса «Теория поля»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *17 мая 2021 г.*

Содержание

1 Общие сведения I

Для кинематики полезно было бы ввести следующие величины

$$\gamma(v) = \gamma_v = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \qquad \beta(v) = \beta_v = \frac{v}{c}, \qquad \Lambda(v, OX) = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\beta_v\gamma_v & 0 & 0 \\ -\beta_v\gamma_v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где Λ – преобразование Лоренца, для которого, кстати, верно, что $\Lambda^{-1}(v) = \Lambda(-v)$.

Также преобразование Лоренца можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \boldsymbol{r}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\boldsymbol{\beta}_v\gamma \\ -\boldsymbol{\beta}_v\gamma & \mathbb{E} + \frac{\gamma_v - 1}{\beta_v^2}\boldsymbol{\beta}\otimes\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

что очень удобно и полезно.

Говоря о движение заряда в ЭМ-поле, хотелось бы получить уравнения движения. По принципу наименьшего действия

$$\delta S = \delta \int_a^b \left(-mc\, ds - \frac{e}{c} A_i\, dx^i\right) = 0, \qquad \overset{ds = \sqrt{dx_i\, dx^i}}{\Rightarrow} \qquad \delta S = -\int_a^b \left(mc\frac{dx_i\, d\delta x^i}{ds} + \frac{e}{c} A_i\, d\delta x^i + \frac{e}{c}\delta A_i\, dx^i\right) = 0,$$

где проинтегрировав по частям первые два слагаемые получаем

$$\int_a^b \left(mc\, du_i \delta x^i + \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\delta x^i\, dx^k - \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\, dx^i \delta x^k\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \int_a^b \left(mc\frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)u^k\right)\delta x^i\, ds = 0$$

где $(\delta \ldots)|_a^b = 0$ в силу варьирования при заданных пределах. Также сделаны замены $du_i \to (u_i)'_s\, ds,\ dx^i \to u^i\, ds$. А это уже победа, ведь в силу произвольности δx^i получаем

$$\frac{mc^2}{e}\frac{du^i}{ds} = F^{ik}u_k = F^{ik}g_{kj}u^j, \qquad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

что позволяет всегда смотреть на движение заряда в постоянном ЭМ-поле, как на систему линейных дифференциальных уравнений, решать которую, по крайней мере относительно $s = c\tau$ решать мы умеем.

2 Упражнения

У1

Строчка с символами Кронекера:

$$\delta_\alpha^\alpha = 3, \qquad \delta_\alpha^\beta\delta_\beta^\gamma = \delta_\alpha^\gamma, \qquad \delta_\alpha^\beta\delta_\beta^\gamma\delta_\gamma^\alpha = \delta_\alpha^\alpha = 3.$$

По определению символа Леви-Чивиты, раскроем определитель:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma} = \begin{vmatrix} \delta_\alpha^{\alpha'} & \delta_\alpha^{\beta'} & \delta_\alpha^\gamma \\ \delta_\beta^{\alpha'} & \delta_\beta^{\beta'} & \delta_\beta^\gamma \\ \delta_\gamma^{\alpha'} & \delta_\gamma^{\beta'} & \delta_\gamma^{\gamma} \end{vmatrix} = \delta_\alpha^{\alpha'}\left(\delta_\beta^{\beta'}\delta_\gamma^\gamma - \delta_\beta^\gamma\delta_\gamma^{\beta'}\right) - \delta_\alpha^{\beta'}\left(\delta_\beta^{\alpha'}\delta_\gamma^\gamma - \delta_\beta^\gamma\delta_\gamma^{\alpha'}\right) + \delta_\alpha^\gamma\left(\delta_\beta^{\alpha'}\delta_\gamma^{\beta'} - \delta_\beta^{\beta'}\delta_\gamma^{\alpha'}\right) =$$

$$= \delta_\alpha^{\alpha'}\left(3\delta_\beta^{\beta'} - \delta_\beta^{\beta'}\right) - \delta_\alpha^{\beta'}\left(2\delta_\beta^{\alpha'}\right) + \delta_\alpha^{\beta'}\delta_\beta^{\alpha'} - \delta_\alpha^\gamma\delta_\beta^{\beta'}\delta_\gamma^{\alpha'} = \boxed{\delta_\alpha^{\alpha'}\delta_\beta^{\beta'} - \delta_\alpha^{\beta'}\delta_\beta^{\alpha'}.}$$

Далее просто в последнем равенстве приравниваем в первом случае $\beta' = \beta$, а во втором ещё и $\alpha = \alpha'$, получая:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\alpha'\beta\gamma} = 3\delta_\alpha^{\alpha'} - \delta_\alpha^{\alpha'} = 2\delta_\alpha^{\alpha'}, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = 2\delta_\alpha^\alpha = 6.$$

У2

- $[\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]]^i = \varepsilon^i{}_{jk}a^j[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]^k = \varepsilon^i{}_{jk}a^j\varepsilon^k{}_{mn}b^mc^n = \left(\delta^i_m\delta_{jn} - \delta^i_n\delta_{jm}\right)a^jb^mc^n = a^jb^ic_j - c^ia^jb_j = b^i(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - c^i(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.
- $([\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\cdot[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}]) = \varepsilon_{ijk}a^jb^k\varepsilon^i{}_{mn}c^md^n = (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})\,a^jb^kc^md^n = a^jb^kc_jd_k - a^jb^kc_kd_j =$
  $= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.

- Тут придется применить результаты первого примера этого урпажения:
$$([\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]\cdot[[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]\times[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}]])=(\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}])\,(\boldsymbol{b}\cdot[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}])-(\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}])\,(\boldsymbol{b}\cdot[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}])=$$
$$=a^i\varepsilon_{ijk}b^jc^k\cdot b^\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}c^\beta a^\gamma-a^i\varepsilon_{ijk}c^ja^k\cdot b^\alpha\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}b^\beta c^\gamma=(a^i\varepsilon_{ijk}b^jc^k)^2=(\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}])^2$$

У3

Сразу оговорим, что все нечетные степени, ввиду инвариантности по перестановкам при усреднении дадут нуль.

Для четных же будем получать какие-то симметричные тензоры, которые могут быть выражены через всевозможные комбинации символов Кронекера. Так для два-тензора:
$$\langle n_\alpha n_\beta\rangle=z_{ab}=\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}.$$
В силу единичности n при свертке два-тензора из них должна получиться единица. Симметричный единичный два-тензор, инвариантный к поворотам это и есть Кроннекер на троих.

Для четырех же возьмём все возможные комбинации символов Кроннекера:
$$\langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu\rangle=\frac{1}{c}\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\mu}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\mu}+\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\gamma}\right).$$
Опять же нужно найти константу c, чтобы свертка четыре-тензора была единичной:
$$\delta^{\alpha\beta}\delta^{\gamma\mu}\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\mu}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\mu}+\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\gamma}\right)=9+\delta^\beta_\gamma\delta^\gamma_\beta+\delta^\beta_\mu\delta^\mu_\beta=15.\quad\Rightarrow\quad\langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu\rangle=\frac{1}{15}\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\mu}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\mu}+\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\gamma}\right).$$

У4

а)

- $(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A})^i=\varepsilon^i{}_{jk}\nabla^j(\varepsilon^k{}_{\alpha\beta}\nabla^\alpha A^\beta)=(\delta^i_\alpha\delta_{j\beta}-\delta^i_\beta\delta_{j\alpha})\nabla^j\nabla^\alpha A^\beta=\nabla^i(\nabla_jA^j)-\nabla_j\nabla^jA^i=\left(\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A}-\nabla^2\boldsymbol{A}\right)^i.$
- $(\operatorname{rot}[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}])^i=\varepsilon^i{}_{jk}\nabla^j\varepsilon^k{}_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta=(\delta^i_\alpha\delta_{j\beta}-\delta^i_\beta\delta_{j\alpha})(a^\alpha\nabla^jb^\beta+b^\beta\nabla^ja^\alpha)=a^i\nabla^jb_j-b^i\nabla^ja_j+b_j\nabla^ja^i-a^j\nabla^jb^i=$
$=(\boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a})^i+((\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b})^i..$
- $(\operatorname{rot}f\boldsymbol{A})^i=\varepsilon^i{}_{jk}\nabla^jfA^k=\varepsilon^i{}_{jk}(f\nabla^jA^k+A^k\nabla^jf)=f\varepsilon^i{}_{jk}\nabla^jA^k+\varepsilon^i{}_{jk}\nabla^jf=(f\operatorname{rot}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times\operatorname{grad}f)^i.$
- $\operatorname{div}f\boldsymbol{A}=\nabla_ifA^i=A^i\nabla_if+f\nabla_iA^i=(\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{grad}f)+f\operatorname{div}\boldsymbol{A}.$
- $\operatorname{div}[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]=\nabla_i\varepsilon^i{}_{jk}a^jb^k=\varepsilon^i{}_{jk}(b^k\nabla_ia^j+a^j\nabla_ib^k)=\varepsilon^i{}_{jk}b^k\nabla_ia^j+\varepsilon^i{}_{jk}a^j\nabla_ib^k=b^k\varepsilon_k{}^i{}_j\nabla_ia^j-a^j\varepsilon_j{}^i{}_k\nabla_ib^k=$
$=(\boldsymbol{b}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{b}).$
- $[\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})]^i=\nabla^ia^jb_j=a^j\nabla^ib_j+b_j\nabla^ia^j$

  Рассмотрим такую штуку: $((\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b})^j=a_i\nabla^ib^j$

  И такую: $(\boldsymbol{a}\times[\nabla\times\boldsymbol{b}])^i=\varepsilon^i{}_{jk}a^j\varepsilon^k{}_{\alpha\beta}\nabla^\alpha b^\beta=(\delta^i_a\delta_{j\beta}-\delta^i_\beta\delta_{j\alpha})a^j\nabla^\alpha b^\beta=a^j\nabla^ib_j-a_j\nabla^jb^i$

  Из этих штук и можем составить начальную:
$$[\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})]^i=\nabla^ia^jb_j=a^j\nabla^ib_j+b_j\nabla^ia^j=[\boldsymbol{a}\times[\nabla\times\boldsymbol{b}]]^i+[\boldsymbol{b}\times[\nabla\times\boldsymbol{a}]]+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}.$$

б)

- $\operatorname{rot}[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}]=2\boldsymbol{\omega}.$
- $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}=/a^i\nabla_ir^j=\quad a^i\delta^j_i/=\boldsymbol{a}$

в)

- $\operatorname{grad}r=/\nabla^i\sqrt{r^jr_j}=\frac{1}{2}\frac{\nabla^ir^jr_j}{\sqrt{r^\gamma r_\gamma}}=\frac{r^j\delta^i_j}{r}/=\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$
- $\operatorname{div}\boldsymbol{r}=\nabla_\alpha r^\alpha=\delta^\alpha_\alpha=3.$
- $(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}=/a^i\nabla_ir^j/=\boldsymbol{a}.$
- $\operatorname{grad}f(r)=/\nabla^if(r)=f'_r\nabla^i\sqrt{r^jr_j}/=f'_r\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$

- $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(r) = /\varepsilon^i{}_{jk}\nu^j a^k(r) = \varepsilon^i{}_{jk}(a^k)'_r \frac{\nabla^j r}{r^j/r}/ = \frac{1}{r}[\boldsymbol{a}'_r \times \boldsymbol{r}]$.
- $\operatorname{div}\boldsymbol{a}(r) = /\nabla^i a_i(r) = (a_i)'_r \nabla^i r/ = \frac{1}{r}(\boldsymbol{a}'_r \cdot \boldsymbol{r})$.

У5

Суть в том, чтобы скалярно домножая на константу, получать интегралы от форм, которые можно позже преобразовать по формуле Стокса.

- $\boldsymbol{c} \cdot \int_V \nabla f d^3r = \int_V \operatorname{div}(\boldsymbol{c}f) = \oint_{\partial V} \omega^2_{\boldsymbol{c}f} = \oint_{\partial V} \boldsymbol{c}f \cdot d\boldsymbol{S}$.
- $\boldsymbol{c} \cdot \int_V \operatorname{rot}\boldsymbol{A} d^3r = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot [\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{c}] d^3r = \int_V \operatorname{div}[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{c}] d^3r = \oint_S [\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{c}] \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_S \boldsymbol{c} \cdot [d\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A}] = -\oint_S \boldsymbol{c}[A \times d\boldsymbol{S}]$.
- $\boldsymbol{c} \cdot \int_S [\nabla f \times d\boldsymbol{S}] = \int_S d\boldsymbol{S} \cdot [\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{\nabla} f] = -\int_S d\boldsymbol{S} \cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{c}f = -\oint \boldsymbol{c}f \cdot d\boldsymbol{l}$.
- $\oint_S [\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}] d\boldsymbol{S} = \int_\Gamma \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$, т.к. $\Gamma = \varnothing$.

3 Первое задание

Т1

Для начала запишем преобразование Лоренца для системы K':

$$t' = \gamma_{v_x}\left(t - \beta_x \frac{x}{c}\right), \qquad x' = \gamma_{v_x}(x - v_x t), \qquad y' = y, \qquad z' = z.$$

Аналогично перейдём к системе K'', выразив компоненты через их представление в системе K'

$$t'' = \gamma_{v'_y}\left(t' - \beta_{v'_y}\frac{y'}{c}\right), \qquad x'' = x', \qquad y'' = \gamma_{v'_y}(y' - v'_y t), \qquad z'' = z'.$$

Центр системы K'' неподвижен в координатах системы K'', соответственно

$$x'' = y'' = z'' = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{K''} = v_x t \\ y_{K''} = \gamma_{v_x}^{-1} v'_y t \end{cases},$$

что соответствет $(x, y)[t]$ для координат центра системы K'' в системе K.

Теперь найдём движение центра системы K в системе K'', подставив значения $x = y = 0$,

$$x''_K = -\gamma_{v_x} v_x t, \qquad y''_K = -\gamma_{v'_y}\gamma_{v_x} v'_y t, \qquad t''_K = -\gamma_{v'_y}\gamma_{v_x} t.$$

Можно заметить, что

$$\gamma_{v'_y}\gamma_{v_x} \approx \gamma\left(\sqrt{v_x^2 + v_y'^2}\right) = \gamma_v, \qquad \beta_{v_x}, \beta_{v'_y} \ll 1.$$

Теперь нас интересует направление прямой $\parallel \boldsymbol{v}$ – движения K'' в системе K:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\dot{y}_{K''}}{\dot{x}_{K''}} = \gamma_{v_x}^{-1}\frac{v'_y}{v_x}.$$

Угол же между осью x'' и движением центра системы K может быть найден, как

$$\operatorname{tg}(\theta + \varphi) = \frac{dy''_K}{dt''}\bigg/\frac{dx''_K}{dt''} = \gamma_{v'_y}\frac{v'_y}{v_x} = \gamma_{v_x}\gamma_{v'_y}\operatorname{tg}\varphi \approx \gamma_v \operatorname{tg}\varphi.$$

С другой стороны, раскрывая тангенс суммы, находим

$$\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\varphi = \gamma_v \operatorname{tg}\varphi(1 - \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\theta), \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{(\gamma_v - 1)\operatorname{tg}\varphi}{1 + \gamma_v \operatorname{tg}^2\varphi}.$$

Т2

Аппроксимируем движение нИСО в моменты времени t и $t + dt$ сопутствующими ИСО K' и K''. Пусть K – лабороторная система отсчета, K' – сопутствующая ИСО $\boldsymbol{v} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{v}(t)$, а K'' – сопутствующая ИСО движущаяся относительно K со скоростью $\boldsymbol{v}(t + dt) = \boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$. Далее для удобства будем считать, что K'' движется относительно K' со скоростью $d\boldsymbol{v}'$.

Проверим, что последовательное применеие $\Lambda(d\boldsymbol{v}') \cdot \Lambda(\boldsymbol{v})$ эквивалентно $R(\varphi) \cdot \Lambda(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v})$, где $R(\varphi)$ – вращение в $\{xyz\}$. Для этого просто найдём

$$R(\varphi) = \Lambda(d\boldsymbol{v}') \cdot \Lambda(\boldsymbol{v}) \cdot \Lambda(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v})^{-1}.$$

Пусть ось $x \parallel \boldsymbol{v}$, ось y выберем так, чтобы $d\boldsymbol{v} \in \{Oxy\}$. Теперь, согласно (1.2), считая $|\boldsymbol{v}| = \beta_1$, $d\boldsymbol{v}' = (\beta'_x,\ \beta'_y)^{\mathrm{T}}$ можем записать (пренебрегая слагаемыми β'_x, β'_y второй и выше степени):

$$\Lambda(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & -\beta_1\gamma_1 & 0 & 0 \\ -\beta_1\gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda(d\boldsymbol{v}') = \begin{bmatrix} 1 & -\beta'_x & -\beta'_y & 0 \\ -\beta'_x & 1 & 0 & 0 \\ -\beta'_y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь можем выразить $d\boldsymbol{v}'$ через $d\boldsymbol{v}$, считая $\boldsymbol{r}_{\mathrm{f}}$ центром системы K''

$$\boldsymbol{r}'_f = \Lambda(d\boldsymbol{v}') \cdot \Lambda(\boldsymbol{v})\boldsymbol{r}_f = (ct',\ 0,\ 0,\ 0)^{\mathrm{T}} \quad \Rightarrow \quad \beta(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v})_x = \frac{\beta_1 + \beta'_x}{1 + \beta_1\beta'_x}, \quad \beta(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v})_y = \frac{\gamma_{\beta_1}\beta_y}{1 + \beta_1\beta_x}.$$

где скорость находим аналогично первому номеру. Тут стоит заметить, что скоростью β_x можно было бы пренебречь в сравнении с β_1, так как скорее всего первый порядок малось β_x не войдёт в ответ, однако хотелось бы в этом убедиться.

Зная $d\boldsymbol{v}$ можем найти $d\boldsymbol{v}'$:

$$\beta'_x = \gamma^2_{\beta_1}\beta_x, \qquad \beta'_y = \gamma\beta_y.$$

Но это на потом.

Через $\boldsymbol{v},\ d\boldsymbol{v}'$ теперь можем найти $\Lambda(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v})$, и посчитать обратную матрицу:

$$\Lambda^{-1}(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}) = \begin{bmatrix} \gamma_{\beta_1}(\beta_1\beta_x + 1) & \gamma_{\beta_1}(\beta_1 + \beta_x) & \beta_y & 0 \\ \gamma_{\beta_1}(\beta_1 + \beta_x) & \gamma_{\beta_1}(\beta_1\beta_x + 1) & \frac{\beta_1\beta_y}{\gamma^{-1}_{\beta_1}+1} & 0 \\ \beta_y & \frac{\beta_1\beta_y}{\gamma^{-1}_{\beta_1}+1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Наконец можем посчитать матрицу поворота, которая в первом приближении действительно не содержит β_x:

$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\beta_1\beta'_y}{\sqrt{1-\beta_1^2}+1} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_1\beta'_y}{\sqrt{1-\beta_1^2}+1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

что дейстительно соответствует повороту в плоскости $\{xy\}$ вокруг оси z с углом φ равным

$$\varphi = -\frac{\beta_y\beta_1}{\gamma^{-2}_{\beta_1} + \gamma^{-1}_{\beta_1}} = -\frac{\gamma^2_{\beta_1}}{\gamma_{\beta_1} + 1}\beta_1\beta_y,$$

где φ малый, в силу малости β_y. Так вот, в результате поворота координатных осей меняются и любые векторы, неподвижные в неИСО, то есть искомая угловая скорость

$$\omega_z = -\frac{\gamma^2_{\beta_1}}{\gamma_{\beta_1} + 1}\beta_1(\beta_y/\Delta t), \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = -\frac{\gamma^2_{\beta_1}}{\gamma_{\beta_1} + 1}\left[\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\right] = \frac{\gamma^2_{\beta_1}}{\gamma_{\beta_1} + 1}\left[\dot{\boldsymbol{\beta}} \times \boldsymbol{\beta}\right],$$

что и требовалось доказать.

T3

Посмотрим на сопутствующую вращающемуся интерферометру в точке рассматриваемого луча. Для луча можем записать волновой вектор, как

$$\bar{k}'_\pm = \left(\frac{\omega}{c},\ \pm n\frac{\omega}{c},\ 0,\ 0\right),$$

где знак выбирается в соответсвии с направлением обхода. Считая, что ось Ox направлена вдоль вращения интерферометра в рассматриваемой точке

$$ck_\pm = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \pm n\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega\gamma(1 + \pm n\beta) \\ \omega\gamma(n \pm \beta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$ck_{x,\pm} = \omega\gamma(n \pm \beta).$$

Можно заметить, что у света также зависит частота от направления двиения, судя по формуле выше, но в силу малости скорости вращения, это приведет только к оооочень медленной осцилляции в интерференции
$$I_{\text{инт}} = I_1 + I_2 + \langle (\boldsymbol{E}_{10} \cdot \boldsymbol{E}_{20}) \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \ldots) \rangle,$$
так что по идее этим эффектом можно принебречь.

В силу различности k_+ и k_- можем найти разность хода
$$\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = 2\pi R \frac{\gamma\omega\beta}{c},$$
считая данной угловую скорость вращения интерферометра Ω приходим к выражению вида
$$\Delta\varphi = \frac{2\gamma}{c^2}\omega\Omega\pi R^2 \overset{\gamma \simeq 1}{\approx} \frac{2\pi}{c^2}\omega\Omega R^2,$$
где $\gamma \approx 1$ для корректности результата, так как при расчете не учитывалось изменение метрики для неИСО.

T4

Теперь рассмотрим реакцию превращения электрона и позитрона в мюон и антимюон:
$$e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-.$$
Хотелось бы зная энергию стакивающихся частиц найти эффективную массу системы $((\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)^2)$ и энергии $\mu^\pm$.

Для 4-импульса $p^i = (\mathscr{E}/c, \boldsymbol{p})$, для которого верно
$$c^2(2m_\mu)^2 \leqslant (p_1^i + p_2^i)^2 = \bar{p}_1^2 + \bar{p}_2^2 + 2\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2 = c^2 2m_e^2 + 2\left(\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2/c^2 - \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2\right).$$
что приводит нас к неравенству
$$c^2(2m_\mu^2 - m_e^2) \leqslant \frac{1}{c^2}\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 - \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2.$$
При равных энергия $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}$ и $\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2$ верно, что
$$\boldsymbol{p}_1^2 = \frac{\mathscr{E}^2}{c^2} - m^2c^2,$$
тогда
$$c^2(2m_\mu^2 - m_e^2) \leqslant \frac{1}{c^2}\mathscr{E}^2 + \boldsymbol{p}_1^2 = \frac{2}{c^2}\mathscr{E}^2 - m_e^2c^2,$$
таким образом
$$\mathscr{E} \geqslant m_\mu c^2, \qquad T_{\text{порог}} = (m_\mu - m_e)c^2.$$
При налете на неподвижную частицу $\mathscr{E}_2 = m_e c$ и $\boldsymbol{p}_2 = 0$, тогда
$$(2m_\mu^2 - m_e^2)c^2 \leqslant \mathscr{E}_1 m_e, \quad \Rightarrow \quad \mathscr{E}_1 \geqslant \left(2\frac{m_\mu^2}{m_e} - m_e\right)c^2.$$
Соответсвенно для пороговой энергии верно
$$T_{\text{порог}} = \frac{2c^2}{m_e}\left(m_\mu^2 - m_e^2\right).$$

T5

Имеем две частицы, 4-импульсы которых в начальный момент:
$$p_\gamma^i = \begin{pmatrix} \varepsilon_\gamma \\ \boldsymbol{p}_\gamma \end{pmatrix}, \quad |p_\gamma^i| \approx \varepsilon_\gamma. \qquad\qquad p_e^i = \begin{pmatrix} \varepsilon_e \\ \boldsymbol{p}_e \end{pmatrix}, \quad |p_e^i| = \beta_e\varepsilon_e.$$

Перейдём в систему центра инерции двух частиц. Пусть пусть движется со скоростью β, тогда матрица преобразования для такой пересадки и аберация угла будут
$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \cos\theta\beta}.$$
Запишем закон сохранения импульса до и после столкновения, штрихами пометим величины после столкновения.
$$p_\gamma^i + p_e^i = p_\gamma'^i + p_e'^i \quad \Rightarrow \quad (p_e'^i)^2 = (p_\gamma^i + p_e^i - p_\gamma'^i)^2 = p_\gamma^2 + p_e^2 + p_\gamma'^2 + 2p_e p_\gamma - 2p_e p_\gamma' - 2p_\gamma p_\gamma',$$

пренебрегая квадратом импульса фотонов получаем

$$m_e^2 = m_e^2 + 2p_e p_\gamma - 2p_e p'_\gamma - 2p_\gamma p'_\gamma \quad \Rightarrow \quad p_e p_\gamma - p_e p'_\gamma - p_\gamma p'_\gamma = 0.$$

Перемножим компоненты 4-импульсов:

$$\varepsilon_e \varepsilon_\gamma - \boldsymbol{p}_e \cdot \boldsymbol{p}_\gamma - \varepsilon_e \varepsilon'_\gamma + \boldsymbol{p}_e \cdot \boldsymbol{p}'_\gamma - \varepsilon_\gamma \varepsilon'_\gamma + \boldsymbol{p}_\gamma \cdot \boldsymbol{p}'_\gamma = 0.$$

Пусть частицы разлетелись под углом θ:

$$\varepsilon_e \varepsilon_\gamma + \varepsilon_e \varepsilon_\gamma \beta_e - \varepsilon_e \varepsilon'_\gamma + \beta_e \varepsilon_e \varepsilon'_\gamma \cos\theta - \varepsilon_\gamma \varepsilon'_\gamma + \varepsilon_\gamma \varepsilon'_\gamma \cos(\pi - \theta) = 0.$$

Откуда не сложно выразить энергию фотона после столкновения, заметим, что по условию задачи: $\varepsilon_\gamma/\varepsilon_e = 10^{-11}$, такими членами будем пренебрегать:

$$\varepsilon'_\gamma = \frac{\varepsilon_e \varepsilon_\gamma (1+\beta_e)}{\varepsilon_e (1 - \beta_e \cos\theta) + \varepsilon_\gamma (1 + \cos\theta)} = \frac{\varepsilon_\gamma (1+\beta_e)}{1 - \beta\cos\theta + \frac{\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_e}(1+\cos\theta)} \approx \frac{\varepsilon_\gamma (1+\beta_e)}{1 - \beta_e \cos\theta}.$$

Имея формулу плюс-минус общую не сложно ответить на вопрос про рассеяние назад:

$$\varepsilon'_\gamma(\cos\theta = -1) \approx \varepsilon_\gamma = 2 \text{ эВ}.$$

в то время, как вперед пролетает:

$$\varepsilon'_\gamma(\cos\theta = 1) \approx \frac{\varepsilon_\gamma \varepsilon_e^2}{m_e^2} \approx 320 \text{ ГэВ}.$$

T6

Пион распадается на нейтрино и мюон: $\pi \to \mu + \nu$. Будем работать в система центра инерции.

$$p^i_{0\mu} = p^i_{0\mu} + p^i_{0\nu} \quad \Rightarrow \quad (p^i_{0\mu})^2 = (p^i_{0\pi} - p^i_{0\nu})^2 \quad \Rightarrow \quad m_\mu^2 c^2 = c^2(m_\pi^2 + m_\nu^2) - 2p^i_{0\pi} p_{i0\nu} = c^2 m_\pi^2 - 2m_\pi \varepsilon_{0\nu}.$$

Откуда получаем

$$\varepsilon_{o\nu} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c^2 = \frac{140^2 - 105^2}{2 \cdot 140} \cdot 1^2 = 31 \text{ МэВ}.$$

Переходя в лабораторную систему отсчёта:

$$\varepsilon_\nu = \gamma(v) \varepsilon_{0\nu} \left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_0\right).$$

Подставляя углы θ_0 найдём минимальную и максимальную энергии:

$$\varepsilon^\nu_{\min} = \varepsilon_{0\nu}\gamma(v)\left(1 - \frac{v}{c}\right) \approx 0.4 \text{ МэВ}, \qquad \varepsilon^\nu_{\max} = \varepsilon_{0\nu}\gamma(v)\left(1 + \frac{v}{c}\right) \approx 2666 \text{ МэВ}.$$

Для определения среднего значения сначала нужно задаться вопросом распределения по углу отклонения, пока в системе покоя π:

$$\varepsilon_\nu = \gamma(v)\varepsilon_{0\nu}\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_0\right) \quad \overset{d}{\Rightarrow} \quad d\varepsilon = \frac{v}{c}\gamma\varepsilon_0 \, d\cos\theta_0.$$

Из всех частиц N_0 в телесном угле $d\Omega_0$ заключено:

$$\frac{dN}{N_0} = \frac{d\Omega_0}{4\pi} = \frac{1}{2}(d\cos\theta)\frac{d\varphi}{2\pi} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dN}{N_0} = \frac{1}{4\pi}\frac{c\,d\varepsilon}{v\gamma\varepsilon_0}(2\pi) = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}.$$

Но это всё было в системе центра инерции, нужно перейти в лабораторную, а тогда произойдёт аберрация:

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}.$$

Таким образом

$$\frac{dN}{d\cos\theta} = \left(\frac{dN}{d\cos\theta'}\right)\frac{d\cos\theta'}{d\cos\theta} = \left(\frac{dN}{d\cos\theta'}\right)\frac{1-\beta^2}{(\beta\cos\theta - 1)^2},$$

где $dN/d\cos\theta'$ — распределение по углу в системе центра инерции, которое в силу изотропности пространства постоянно. Так как в правой части отсутствует энергия, то распределение энергии по углу – постоянно, тогда

$$\langle\varepsilon^\nu\rangle = 1333 \text{ МэВ}.$$

T7

Выберем оси z по $\boldsymbol{H}$, ось y так, чтобы в $\boldsymbol{E} \in \text{Oyz}$. Тогда тензор электромагнитного поля запишется:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -E\sin\theta & -E\cos\theta \\ 0 & 0 & -H & 0 \\ E\sin\theta & H & 0 & 0 \\ E\cos\theta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

с учетом $\theta = \pi/2$, $E = \alpha H$, $mc^2/e = K$, вспомнив (1.3), запишем уравнение движения

$$\frac{mc^2}{e}\frac{du^i}{ds} = F^{ik}u_k = F^{ij}g_{jk}u^k, \qquad \Rightarrow \qquad K\frac{d\bar{u}}{ds} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha H & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 \\ \alpha H & -H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\bar{u},$$

где $\bar{u} = (u_0,\, u_x,\, u_y,\, u_z) = \bar{p}/mc$. Линейные дифференциальные уравнения мы решать вроде умеем, так что находм собственные числа, как

$$\det(F^{ik}g_{kj} - \lambda\mathbb{E}^i_j) = \lambda^2(\lambda^2 - H^2(\alpha^2-1)) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} &\lambda_{1,2} = 0, \\ &\lambda_{3,4} = \pm H\sqrt{\alpha^2 - 1}. \end{aligned}$$

И, соответственно, собственные векторы ($\alpha \neq 1$):

$$(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\alpha} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} & -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} & 1 & 0 \\ \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} & \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Осталось подставить начальные условия

$$\bar{u}(s=0) = (\mathscr{E}_0/c, p_{0x}, p_{0y}, p_{0z})^{\mathrm{T}}/mc,$$

находим уравнения относительно $\bar{u}$ для трёх случаев. При $\alpha \in (0,1)$:

$$u_x(s) = -\frac{(\alpha p_0 - p_{0x})\cos\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}eHs}{c^2m}\right)}{(1-\alpha^2)\,cm} - \frac{(\alpha^2-1)\,p_{0y}\sin\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}eHs}{c^2m}\right)}{(1-\alpha^2)^{3/2}\,cm} - \frac{\alpha(\alpha p_{0x} - p_0)}{(1-\alpha^2)\,cm},$$

$$u_y(s) = \frac{(\alpha p_0 - p_{0x})\sin\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}eHs}{c^2m}\right)}{\sqrt{1-\alpha^2}cm} + \frac{p_{0y}\cos\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}eHs}{c^2m}\right)}{cm}.$$

При $\alpha > 1$:

$$u_x(s) = \frac{(\alpha p_0 - p_{0x})\cosh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1}eHs}{c^2m}\right)}{(\alpha^2-1)\,cm} + \frac{p_{0y}\sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1}eHs}{c^2m}\right)}{\sqrt{\alpha^2-1}cm} + \frac{\alpha(\alpha p_{0x} - p_0)}{(\alpha^2-1)\,cm},$$

$$u_y(s) = \frac{(\alpha p_0 - p_{0x})\sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1}eHs}{c^2m}\right)}{\sqrt{\alpha^2-1}cm} + \frac{p_{0y}\cosh\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-1}eHs}{c^2m}\right)}{cm}.$$

И при $\alpha = 1$:

$$u_0(s) = \frac{e^2H^2s^2(p_0 - p_{0x})}{2c^5m^3} + \frac{eHp_{0y}s}{c^3m^2} + \frac{p_0}{cm}$$

$$u_x(s) = \frac{e^2H^2s^2(p_0 - p_{0x})}{2c^5m^3} + \frac{eHp_{0y}s}{c^3m^2} + \frac{p_{0x}}{cm},$$

$$u_y(s) = \frac{eHs(p_0 - p_{0x})}{c^3m^2} + \frac{p_{0y}}{cm}.$$

и по оси z движение с $u_z = p_{0z}/mc = \text{const}$, а $s = c\tau$.

При пристальном взгляде на u_0 и u_x

$$u_0 - u_x = \frac{p_0 - p_{0x}}{cm} = \frac{\mathscr{E}_0 - cp_{0x}}{mc^2} = \text{const}.$$

Для скорости по оси x получили компоненту, независящую от времени ($E < H$) — это скорость дрейфа:

$$v_{\text{др}} = u_x^{\neq f(s)}c = c\frac{\alpha(\alpha p_{0x} - p_0)}{(\alpha^2-1)\,cm} = \left/ \begin{matrix} p_0 \approx mc \\ \alpha \ll 1. \end{matrix} \right/ = c\alpha = c\frac{E}{H},$$

что соответствует нерелятивистскому случаю.

Для случая $H < E$:

$$v_{\text{др}} = u_x^{\neq f(s)} c = c\frac{\alpha(\alpha p_{0x} - p_0)}{(\alpha^2-1)\, cm} = \bigg/ \begin{matrix} p_0 \approx mc \\ \alpha \gg 1. \end{matrix} \bigg/ = \frac{p_0}{cm}\frac{c}{\alpha} = -\frac{c}{\alpha} = -c\frac{H}{E},$$

что уже очень похоже на правду.

Тут стоит заметить, что решение получено в параметризации собственным временем системы, что, конечно, дает представление о геометрии происходящего, но, возможно, не всегда информативно. Решение в параметризации временем лабораторной системы отсчета можно посмотреть здесь.

Видеть три случая с движением по спирали и по.. чему-то вроде цепной линии тоже вполне логично: в зависимости от значения α можно пересесеть в систему ($\alpha > 1$), где $H' = 0$, и увидеть движение по $\sim$ цепной, а при $\alpha < 1$ перейти к системе с $E' = 0$ и движением по окружности, движущейся относительно лабораторной с дрейфовой скоростью.

Также замечу, что $\operatorname{sign}\alpha$ – инвариант, в силу существующих инвариантов поля (свертов тензора ЭМ-поля)

$$F_{ik}F^{ik} = H^2 - E^2 = H^2(1-\alpha^2) = \text{inv}, \qquad \varepsilon^{iklm}F_{ik}F_{lm} = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H} = \text{inv},$$

что и является основой для вышеприведенных рассуждений.

4 Общие сведения II

Электростатика. Запишем действие взаимодействия S_{int}

$$S_{\text{int}} = -\frac{e}{c}\int d\tau\, u^\mu A_\mu,$$

учитывая $u^\mu = fx^\mu/d\tau$:

$$S_{\text{int}} = -\frac{1}{c}\int d^3V\,\rho\int d\tau\,\frac{dx^\mu}{d\tau}A_\mu = -\frac{1}{c}\int dt\, d^3V\,\rho\frac{dx^\mu}{dt}A_\mu,$$

что можем переписать в случае неподвижных зарядов ($\frac{dx^\mu}{dt} = (c,\ \vec{0})^{\text{T}}$), как

$$S_{\text{int}} = -\int dt\int d^3V\cdot\rho\varphi(\boldsymbol{r}), \quad \Rightarrow \quad L_{\text{int}} = -\int d^3V\,\rho A_0(\boldsymbol{r}), \quad \Rightarrow \quad U = \int d^3r\,\rho(\boldsymbol{r})A_0(\boldsymbol{r}).$$

Thr 4.1 (Теорема Адемолло-Гатто)**.** *Если к исходному действию S_0, привлдящему к периодическому движению, и, следовательно, к адиабатическому инварианту $\mathcal{I}$, добавлено возмущение с малым параметром λ, так что полной действие $S = S_0 + \lambda\int V(q,\dot q)\,dt$, то инвариант, по-прежнему, сохарняется с точностью до членов второго порядка малости по λ: $\frac{d}{dt}\mathcal{I} = O(\lambda^2)$.*

Тензор энергии-импульса поля:

$$T_\mu^\nu = \frac{1}{4\pi c}F^{\nu\lambda}F_{\lambda\mu} + \frac{1}{16\pi c}F^2\delta_\mu^\nu,$$

где $F^2 = F_{ij}F^{ij}$. В частности, пространственная и временная компоненты

$$T_0^0 = \frac{1}{8\pi c}(\boldsymbol{H}^2 + \boldsymbol{E}^2), \qquad T_0^\alpha = \frac{1}{4\pi c}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right]^\alpha.$$

Баланс энергии можем записать в интегральном и в дифференциальном виде:

$$\frac{d}{dt}\left(W_{\text{ч}} + \int d^3r\, cT_0^0\right) + \int d^3r\ \operatorname{div}\boldsymbol{S} = 0, \qquad \boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right], \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} + \frac{d}{dt}cT_0^0 + \operatorname{div}\boldsymbol{S} = 0.$$

Аналогично, баланс импульса:

$$\frac{d}{dt}\left(p^\beta + \frac{1}{c^2}\int d^3r\, S^\beta\right) = \int d^3r\, c\nabla_\alpha T_\beta^\alpha, \qquad \frac{1}{c}\left(j_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}\right)^\beta + \frac{1}{c^2}\frac{dS^\beta}{dt} = c\nabla_\alpha T_\beta^\alpha.$$

5 Второе задание

T8

Заряд электрона распределен с плотностью

$$\rho(r) = \frac{e}{\pi a^3}\exp\left(-\frac{2r}{a}\right).$$

Найдём энергию взаимодействия электронного облака с ядром в случае ядра, как точечного заряда, и в случае ядра, как равномерно заряженного шара радиуса r_0. Точнее найдём значение следующего выражения:

$$S_{\text{int}} = -\frac{e}{c}\int d\tau\, u^\mu A_\mu, \quad\Rightarrow\quad U = \int d^3r\, \rho(\boldsymbol{r}) A_0(\boldsymbol{r}).$$

Ядро, как точечный заряд. Вспоминая, что $\boldsymbol{E} = -\nabla A_0$ и $\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho_N$, тогда $\nabla(-\nabla A_0) = -\Delta A_0 = 4\pi\rho_N$, тогда плотность заряда ядра

$$\rho_N = -e\cdot\delta(\boldsymbol{r}).$$

Для электронного облака известно $\rho(\boldsymbol{r})$, тогда

$$-\Delta A_0 = -4\pi e\,\delta(\boldsymbol{r}), \quad\Rightarrow\quad A_0 = -\frac{e}{r},$$

и, соответсвенно,

$$U = \int d^3r\, \frac{e}{\pi a^3} e^{-2r/a}\cdot\left(-\frac{e}{r}\right) \overset{\text{sp. c.s.}}{=} -\frac{e^2}{\pi a^3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \int_0^\infty r^2\, dr \frac{1}{r} e^{-2r/a},$$

упрощая выражение, переходим к интегралу вида

$$U = -\frac{e^2}{\pi a^3}\cdot 2\Pi\cdot 2\cdot\int_0^\infty dr\, r e^{-2r/a} = -\frac{e^2}{a},$$

где интеграл мы взяли по частям:

$$\int_0^\infty dt\, t^n e^{-t} = e^{-t}t^n\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}t^{n-1} n\, dt = \ldots = n!\ .$$

Ядро, как шар. Здесь стоит разделить пространство на две области:

$$A_0 = \begin{cases} -\,e/r, & r \geqslant r_0,\\ \dfrac{e}{2r_0^3}r^2 - \dfrac{3}{2}\dfrac{e}{r_0}, & r \leqslant r_0,\end{cases}$$

где A_0 для $r \leqslant r_0$ находится, как решение уравнения Пуассона ($\rho_N = \text{const}$):

$$\int_0^{r_0} d^3r\ \rho_N = -e, \qquad \rho_N = -\frac{3}{4\pi}\frac{e}{r_0^3}, \qquad \Delta A_0 = -3\frac{e}{r_0^3}. \quad A_0(r_0) = -\frac{e}{r_0}.$$

Так как садача симметрична относительно любых поворотов, то $A_0 \equiv A_0(r)$, тогда

$$\Delta A_0 = \frac{d^2A_0}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dA_0}{dr}, \quad\Rightarrow\quad A_0'' + \frac{2A_0'}{r} = \frac{(rA_0)''}{r} = -3\frac{e}{r_0^3}.$$

Интегрируя, находим

$$rA_0 = -\frac{3e}{r_0^3}\left(\frac{1}{6}r^3 + c_1 r + c_2\right), \quad\Rightarrow\quad A_0(r) = -\frac{e}{2r_0^3}r^2 + \tilde{c}_1 + \frac{\tilde{c}_2}{r}.$$

Подставляя граничное условие, находим

$$\tilde{c}_1 = -\frac{3}{2}\frac{e}{r_0}, \quad\Rightarrow\quad A_0 = \frac{e}{2r_0^3}r^2 - \frac{3}{2}\frac{e}{r_0}.$$

Осталось посчитать интеграл вида

$$U = \int d^3r\ \rho A_0 \overset{sp.\,c.s.}{=} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \int_0^\infty r^2\, dr\cdot\rho A_0 = 4\pi I,$$

где I, соответсвенно, равен

$$I = \int_0^{r_0} r^2\, dr\cdot(A_0 - A_0^{\text{точ}} + A_0^{\text{точ}}) + \int_0^\infty r^2\, dr\rho A_0^{\text{точ}} = \int_0^\infty r^2\, dr\rho A_0^{\text{точ}} + \int_0^{r_0} r^2\, dr\rho\,(A_0 - A_0^{\text{точ}})\,.$$

Таким образом искомая энергия представилась, как $U = U_{\text{точ}} + \Delta U$, где ΔU – некоторая поправка, связанная с ненулевым размером ядра. Она равна

$$\Delta U = 4\pi\int_0^{r_0} r^2\, dr\rho\cdot(A_0 - A_0^{\text{точ}}) = \frac{4e^2}{a^3}\int_0^{r_0} dr e^{-2r/a}\left(\frac{e}{2r_0^3}r^4 - \frac{3}{2}\frac{e}{r_0}r^2 + er\right).$$

Если разложить экспоненту в ряд, то найдём, что $r_0/a \approx 10^{-5} \ll 1$, тогда получится интеграл вида

$$\Delta U = \frac{4e^2}{a^3}\left(\frac{e}{2r_0^3}\frac{1}{5}r_0^5 - \frac{3}{2}\frac{e}{r_0}\frac{1}{3}r_0^3 + e\frac{r_0^2}{2}\right) = \frac{4}{9}\left(\frac{e^2}{2a}\right)\left(\frac{r_0}{a}\right)^2 = \ldots$$

что соответствует поправке 10^{-10}. Досчитать и дописать.

T9

Потенциал диполя

$$\varphi = -\boldsymbol{d}\cdot\nabla\frac{1}{r} = \frac{\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Соответсвенно, поле диполя

$$E = -\operatorname{grad}\varphi = \frac{3(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{n}-\boldsymbol{d}}{r^3},$$

в случае $r \neq 0$. Если же учесть такую возможность, то

$$\boldsymbol{E} = \frac{3(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}-\boldsymbol{d}}{r^3} - \frac{4\pi}{3}\delta(\boldsymbol{r})\boldsymbol{d}.$$

Потенциальная энергия диполя:

$$U = \int d^3r\,\rho A_0 = -q\varphi(\boldsymbol{R}) + q\varphi(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{l}) = q(\boldsymbol{l}\cdot\nabla)\varphi = \boldsymbol{d}\cdot(\nabla\varphi) = -\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{E}_{\text{ext}}.$$

Подставляя $\boldsymbol{E}_{\text{ext}}$ находим

$$U = \frac{(\boldsymbol{d}_1\cdot\boldsymbol{d}_2) - 3(\boldsymbol{n}\cdot d_1)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{d}_2)}{r_{12}^3} + \frac{4\pi}{3}\delta(\boldsymbol{r}_{12})\,(\boldsymbol{d}_1\cdot\boldsymbol{d}_2),$$

где $\boldsymbol{r}_{12}$ – радиус вектор от первого диполя, ко второму.

T10

Нас просят найти диполный момент двух полусфер. Так как нас спросили только про дипольный момент, а про распределение зарядов не спросили, то мы последнее и не будем находить.

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int\frac{\rho(\boldsymbol{r}')d^3\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \ldots = \sum_{l=0}^{\infty}\varphi^{(l)}.$$

Известно что (ЛЛII §41 его лучше прочитать, потому как мне лень техать выражения для всех величин тут) :

$$\varphi^{(l)} = \sum_a e_a\sum_{m=-l}^{l}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}D_l^{(m)}Y_{lm}(\theta,\varphi)\frac{r_a^l}{R_0^{l+1}}. \tag{5.1}$$

Любой скалярный потенциал мы всегда можем разложить по сферическим гармоникам:

$$\varphi(z) = \sum_{l,m}c_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi)R(z).$$

На сфере: $R = z$:

$$\varphi(r) = \begin{cases}\Phi_0, & z>0\\ -\Phi_0, & z<0\end{cases} \quad\rightsquigarrow\quad \int\varphi(r)Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sin\theta d\theta d\varphi = i\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos\theta\varphi(r)\sin\theta d\theta\varphi =$$

$$= i\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\left(-\int_0^{\pi/2}\Phi_0\cos\theta d\cos\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}\Phi_0\cos\theta d\cos\theta\right) = 2\Phi_0\pi i\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\left(-\frac{\cos^2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\cos^2\theta}{2}\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right).$$

Мы получили, что из (5.1) взяв как и в выводе формулы до $l=1$:

$$2\pi i\Phi_0\sqrt{\frac{3}{4\pi}} = \frac{4\pi}{3}\frac{1}{r}D_l^m = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}id_z\frac{1}{r} \quad\Rightarrow\quad d_z = r\frac{3\Phi_0}{2}.$$

Занятно, но решая ту же задачу на семинаре четвртой парой 08.04 мы получили ответ:

$$d_z = \frac{3}{2}R^2\Phi_0 \qquad\Leftarrow\qquad \varphi^{(l)} = \sum_a e_a\sum_{m=-l}^{l}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}D_l^{(m)}Y_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{R_0^{l+1}},$$

думается, что это из-за отличия в вот этой формуле (5.1). И вроде бы сейчас он правдивее и совпадает с ЛЛ2.

T11

Задача аксиально симметрична относительно оси Oz, дан потенциал:

$$v(r,0) - v_0\left(1 - \frac{r^2-a^2}{r\sqrt{r^2+a^2}}\right),\ r>a.$$

Хочется узнать $v(r,\theta)$–? при условии, что $r \gg a$.

Соотвественно раскладываем в ряд, раз $r \gg a$, и получаем:

$$v(z,0) = v_0\left(1-\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)\left(1+\frac{a^2}{z^2}\right)^{-1/2}\right) \simeq v_0\left(1-\left(1-\frac{a^2}{z^2}\right)\left(1+\frac{a^2}{2z^2}\right)\right) = v_0\left(\frac{3a^2}{2z^2}-\frac{a^4}{2z^4}\right).$$

С другой стороны по теории должно было бы получиться разложение вида

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{r'})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|}d^3r' = \frac{Q}{r} + \frac{\boldsymbol{dr}}{r^3} + \frac{r_\alpha r_\beta D_{\alpha\beta}}{2r^5} + \frac{O_{\alpha\beta\gamma} r_\alpha r_\beta r_\gamma}{6r^7} + \ldots$$

. Сравнивая степени в разложении получаем:

$$Q = 0, \qquad D_{zz} = 0, \qquad d_z = \frac{3a^2}{2}v_0, \qquad 0_{zzz} = -3a^4 v_0.$$

Теперь применим аксиальную симметрию: $\boldsymbol{d} = \int \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}d^3\boldsymbol{r}$. В дипольном моменте компоненты $d_x = d_y = 0$, что мы получаем так же как в упражнении про усреднение $\rho(x,y) = \rho(-x,-y)$.

Далее $D_{\alpha\alpha} = 0$, значит $D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0$ то есть $D_{xx} = -D_{yy}$, но в силу аксиальной симметрии такое возможно лишь если $D_{xx} = D_{yy} = 0$.

Наконец $O_{\alpha\alpha\beta} = 0$. То есть $O_{xxz} + O_{yyz} + O_{zzz} = 0$, тогда получаем:

$$O_{xxz} = O_{yyz} = -\frac{O_{zzz}}{2} = \frac{3a^4}{2}v_0$$

$$O_{xzx} = O_{yzy} = O_{zxx} = O_{zyy} = \frac{3a^4}{2}v_0$$

Вариант со всеми разными: $O_{xyz} = \int \rho(x,y,z)(15xyz)d^3r = 0$, так как $\rho(x) = \rho(-x)$. И поэтому же $O_{xxx} = O_{yyy} = 0$.

И не взятые ещё:

$$O_{zzx} = O_{zzy} = O_{xzz} = O_{yzz} = O_{zxz} = O_{zyz} = 0.$$

$$O_{xxy} = O_{yyx} = O_{xyx} = O_{yxy} = O_{yxx} = O_{xyy} = 0.$$

Теперь давайте, как нас просят в задаче, подставим $z = r\cos\theta$:

$$v_0(r,\theta) = \frac{3a^2v_0}{2}\frac{\cos\theta}{r^2} + \left(-\frac{a^4v_0}{2r^4}\cos^3\theta + \frac{3O_{xxz}xxz}{6r^7} + \frac{3O_{yyz}yyz}{6r^7}\right) = \frac{3a^2v_0}{2}\frac{\cos^2\theta}{r^2} + \frac{\left(\frac{3}{4}\cos\theta\sin^2\theta - \frac{1}{2}\cos^3\theta\right)}{r^4}a^4v_0.$$

/так как по сферической замене: $xxz = r^3\cos\theta\sin^2\theta\cos^2\varphi$, $yyz = r^3\cos\theta\sin^2\theta\sin^2\varphi$/

x T12

T13

Известен дипольный момент земли $\boldsymbol{\mu} = 8.1{\cdot}10^{25}$ гаусс·см^3. Найдём в полярных координатах линии магнитного диполя, и определим, как меняется поле вдоль силовой линии.

Уравнение силовых линий магнитного поля. Поле от магнитного диполя $\boldsymbol{H}$ можем записать, как

$$\boldsymbol{H} = \frac{3\left(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\mu}}{r^3}, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

Считая, что $\boldsymbol{\mu} = \mu\boldsymbol{o}$, и выбирая $Oz \parallel \boldsymbol{o}$, можем записать

$$\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{e}_r = \mu_r, \qquad \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{e}_\theta = \mu_\theta, \qquad \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{e}_\varphi = \mu_\varphi.$$

Также верно, что $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r = \boldsymbol{e}_r$. Можем вычислить все проекции

$$\mu_r = \mu(\boldsymbol{o}\cdot\boldsymbol{e}_r) = \mu(\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_r) = \mu\cos\theta, \qquad \mu_\theta = -\mu\sin\theta, \qquad \mu_\varphi = 0.$$

Так приходим к записи для векторов в сферических координатах

$$\boldsymbol{\mu} = \mu\left(\cos\theta,\, -\sin\theta,\, 0\right)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{n} = \left(1,\, 0,\, 0\right)^{\mathrm{T}}.$$

Тогда магнитное поле

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{r^3}\mu\begin{pmatrix}3\cos\theta - \cos\theta\\ -(-\sin\theta)\\ 0\end{pmatrix} = \frac{\mu}{r^3}\begin{pmatrix}2\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}, \qquad d\boldsymbol{l} = \begin{pmatrix}dr\\ r\ \theta\\ r\sin\theta\, d\varphi\end{pmatrix}, \qquad \frac{H_r}{dl_r} = \frac{H_\theta}{dl\theta}.$$

Раскрывая последнее уравнение находим

$$\frac{dr}{r} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta = 2\frac{d\sin\theta}{\sin\theta}, \qquad \Rightarrow \qquad \ln r = 2\ln\sin\theta + \mathrm{const}, \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{r(\theta) = r_0\sin^2\theta}, \qquad r_0 = r\left(\theta = \pi/2\right).$$

Можно построить такой бублик (симметричный относительно оси z, или относительно поворота φ), см. рис. 1.

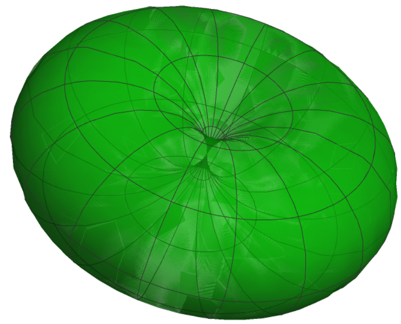

Рис. 1: Поверхность, образованная силовыми линиями в задаче 13.

Кривизна силовой линии магнитного поля. Определим $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{H}/H$, для него верно

$$\dot{\boldsymbol{H}} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{h}\,dt) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r})\right) = \frac{\boldsymbol{h}}{\rho}\cdot\boldsymbol{h}^2.$$

Расписывая дифференцирование, находим

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{h}\,dt) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{r}) = h^\alpha\,dt\partial_\alpha\boldsymbol{h}, \qquad \Rightarrow \qquad (\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{n}}{\rho}.$$

Подробнее рассмотрим диффернцирование по направлению

$$\boldsymbol{h}\cdot\nabla = h_r\partial_r + h_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta + h_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi.$$

Магнитное поле, соответсвенно, равно

$$\boldsymbol{H}^2 = \left(\frac{\mu}{r^3}\right)^2\cdot(3\cos^2\theta+1), \qquad \Rightarrow \qquad h_r = \frac{2\cos\theta}{\sqrt{3\cos^2\theta+1}}, \qquad h_\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+2}}.$$

Наконец, можем подтсавить их в $(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{h} = \left(h_r\partial_r + h_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta\right)\boldsymbol{h} = \boldsymbol{n}/\rho$. Так, например, на экваторе $\theta = \pi/2$, $h_r = 0$, $h_\theta = 1$:

$$\left(\frac{1}{r}\partial_\theta\right)\boldsymbol{h} = \frac{1}{r}\partial_\theta\left(h_r\boldsymbol{e}_r + h_\theta\boldsymbol{e}_\theta\right)\Big|_{\theta=\pi/2} = \frac{1}{r}\left(\partial_\theta h_r\boldsymbol{e}_r + h_r\partial_\theta\boldsymbol{e}_r + \partial_\theta h_\theta\boldsymbol{e}_\theta + h_\theta\partial_\theta\boldsymbol{e}_\theta\right).$$

В частности, слагаемые равны

$$\partial_\theta h_r\big|_{\theta=\pi/2} = -2, \qquad \partial_\theta h_\theta\big|_{\theta=\pi/2} = 0.$$

В результате получаем

$$(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{h}\Big|_{\theta=\pi/2} = -\frac{3}{r}\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{n}}{\rho}, \qquad \Rightarrow \qquad \rho_{\text{экв}} = \frac{r}{3}.$$

Движение частицы. Для начала вспомним, что поле называется слабонеоднородным, если

$$r_\perp = p_\perp\frac{c}{|e|H_0} \ll \rho.$$

Движение же можно разделить на движение по спирали вокруг силовой линии и двиение вдоль силовой линии.

Вспомним, про существование адиабатического инварианта, вида

$$\frac{p_\perp^2}{H} = \text{const}, \qquad \boldsymbol{p}^2 = p_\perp^2 + p_\parallel^2.$$

Таким образом при движении $H\uparrow$ меняется и $p_\perp\uparrow$, таким образом $p_\parallel = 0$ в некотороый момент, а потом и меняет знак.

Также происходит дрейф по бинормали, обеспечивающий радиационные пояса Земли.

Ну, действительно, общее уравнение движения можем записать в виде

$$m\gamma\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{e}{c}\left[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right].$$

Можно воспринимать происходящее как движение в постоянном магнитном поле, с поправкой к Лагранжиану $L_{\text{маг}} = \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{H}$, тогда добавочная сила

$$\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{H}), \qquad \Rightarrow \qquad F = (\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla)\boldsymbol{H} + \boldsymbol{\mu}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{H},$$

где учтено, что $\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\partial_t\boldsymbol{E} = 0$. Итого, уравнение движения

$$m\gamma\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H} + (\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla)\boldsymbol{H}.$$

Можно показать, что $\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_\perp$ мало, и перейти к уравнению
$$\frac{d\boldsymbol{v}_\parallel}{dt} = \omega_L \boldsymbol{v}_\perp \times \boldsymbol{H} + \frac{1}{mg}\left(\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{H},$$
которое почленно распишем. В частности,
$$(\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla)\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{h}_\mu\cdot(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)H - H_\mu(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{h}.$$
Другое слагаемое, соответсвенно
$$\frac{d\boldsymbol{v}_\parallel}{dt} = \dot{v}_\parallel \boldsymbol{h} + v_\parallel^2(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{h}.$$
Переписывая уравнения в ОНБ $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{n})$, где бинормаль определим, как $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{h}\times\boldsymbol{n}$.

Домножая одно из уравнений на $\boldsymbol{h}$, переходим к выражению для $\boldsymbol{v}_\perp$
$$\boldsymbol{v}_\perp = \frac{1}{\rho\omega L}\left(v_\parallel^2 + \frac{u_\perp^2}{2}\right)\cdot\boldsymbol{b}.$$

Проеция на $\boldsymbol{h}$ может быть найдена через скалярное домножение:
$$\dot{v}_\parallel = -\frac{\mu h^2}{m\gamma}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)H = -\frac{u_\perp^2}{2H}(\boldsymbol{h}\nabla)H.$$
Также можем учесть, что магнитное поле не совершает работы, тогда $u_\perp + v_\parallel^2 = \text{const}$ тогда
$$v_\parallel(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)H = \dot{H}, \qquad \dot{v}_\parallel \sim -(\boldsymbol{h}\nabla)H,$$
где мы знаем, что $u_\perp^2/H = \text{const}$. Таким образом возможны колебания $v_\parallel$ вокруг положения 0, что и называется «магнитным зеркалом».

Зная $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_\perp + \boldsymbol{v}_\parallel$ можем определить, где возникает магнитное зеркало.

T14

Запишем выражение для магнитного дипольного момента:
$$\boldsymbol{\mu} = g\frac{e}{2mc\gamma}[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}].$$
Обозначив момент количества движения как $\boldsymbol{l} = [\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}]$ получим поправку в гамильтониан от взаимодействие вида:
$$H_{int} = -\frac{eg}{2mc\gamma}(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{H}) = -\frac{eg}{2mc\gamma}l_\alpha H^\alpha.$$
И так у нас есть величина, которая вообще есть функция $F(q,p,t)$, то есть
$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}.$$
Тогда с таким великим механическим знанием пойдём посмотрим на наш момент импульса:
$$\frac{dl_i}{dt} = 0 + \frac{\partial l_i}{\partial r^\alpha}\left(-\frac{eg}{2mc\gamma}H^\beta\frac{\partial l_\beta}{\partial p_\alpha}\right) - \frac{\partial l_i}{\partial p_\alpha}\left(-\frac{eg}{2mc\gamma}H^\beta\frac{\partial l_\beta}{\partial r^\alpha}\right) = -\frac{eg}{2mc\gamma}H^\beta\{l_i, l_\beta\}$$
Давайте отдельно посмотрим на скобку Пуассона для таких вот векторных произведений, как моменты импульса мюона:
$$\{l_i, l_\beta\} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}\{r^j p^k, r^\alpha p^\gamma\} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}(\delta^{j\gamma}p^k r^\alpha - \delta^{\alpha k}p^\gamma r^j) = \varepsilon_{i\ k}^{\ \gamma}\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}p^k r^\alpha - \varepsilon_{ij}^{\ \ \alpha}\varepsilon_{\beta\alpha\gamma}p^\gamma r^j =$$
$$= (\delta_{i\beta}\delta_{j\gamma} - \delta_{i\gamma}\delta_{j\beta})p^\gamma r^j - (\delta_{i\beta}\delta_{k\alpha} - \delta_{i\alpha}\delta_{k\beta})p^k p^\alpha = \delta_{i\beta}p_j r^j - p_i r_\beta - \delta_{i\beta}p_\alpha r^\alpha + p_\beta r_i = p_\beta r_i - p_i r_\beta = \varepsilon_{i\beta}^{\ \ \gamma}\varepsilon_{\gamma mn}r^m p^n = \varepsilon_{i\beta}^{\ \ \gamma}l_\gamma.$$
Тогда получаем:
$$\frac{dl_i}{dt} = -\frac{eg}{2mc\gamma}\varepsilon_{i\beta}^{\ \ \gamma}l_\gamma H^\beta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \frac{eg}{2mc\gamma}[\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{H}].$$
Тогда для производной по времени от магнитного дипольного момента имеем:
$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \frac{eg}{2mc\gamma}[\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{H}] = \frac{g}{2}[\boldsymbol{\omega}_L\times\boldsymbol{\mu}],$$
где $\boldsymbol{\omega}_L = -\frac{e\boldsymbol{H}}{mc\gamma}$ – Ларморовская частота.

Знаем теперь гиромагнитное соотношение для дипольного момента, и тогда в первом приближении в постоянном магнитном поле:
$$\boldsymbol{\mu} = \frac{ge}{2mc}\boldsymbol{s} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\boldsymbol{s}}^{(1)} = \frac{g}{2}\gamma[\boldsymbol{\omega}_L\times\boldsymbol{s}].$$

Во втором же приближении получим прецессию Томаса, с которой мы уже работали в Задаче 2.

$$\dot{\boldsymbol{s}}^{(2)} = \frac{\gamma^2}{(\gamma+1)c^2}[\dot{\boldsymbol{v}} \times \boldsymbol{v}] = \boldsymbol{\omega}_{th} \times \boldsymbol{s}.$$

Теперь свяжем Ларморовскую частоту с Томасоновской, зная, что

$$m\gamma\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{e}{c}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}] \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\boldsymbol{v}} = [\boldsymbol{\omega}_L \times \boldsymbol{v}]$$

Тогда выражение для прецессии Томаса:

$$\boldsymbol{\omega}_{th} = \frac{\gamma^2}{\gamma+1}c^2[\boldsymbol{\omega}_L \times \boldsymbol{v}] \times \boldsymbol{v} = -\frac{\gamma^2 v^2}{(\gamma+1)c^2} = -(\gamma-1)\boldsymbol{\omega}_L.$$

Таким образом для изменения спина получаем:

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \left(\frac{g}{2}\gamma - (\gamma-1)\right)\boldsymbol{\omega}_L \times \boldsymbol{s} = \boldsymbol{\omega}_L \times \boldsymbol{s} + \gamma\left(\frac{g}{2}-1\right)\boldsymbol{\omega}_L \times \boldsymbol{s}.$$

Таким образом за один оборот спин отклонится на

$$\Delta\varphi = \left(\frac{g}{2} - 1\gamma\right)\cdot 2\pi = \alpha\gamma.$$

И как нетрудно показать,

$$P = mc\sqrt{\gamma^2-1} \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = \sqrt{\left(\frac{P}{mc}\right)^2 + 1}$$

Тогда получаем ответ:

$$\Delta\varphi = \alpha\sqrt{\left(\frac{P}{mc}\right)^2 + 1} \simeq 0.07.$$

T15

Пусть есть плоскость Oxz, и диполь направлен под углом θ_d к оси Oz. Воспользуемся методом изображений и зеркально под проводящей плоскостью Oxyрасположим второй диполь, заменяющий её.

$$\boldsymbol{d}_1 = d(\boldsymbol{e}_z\cos\theta_d + \boldsymbol{e}\sin\theta_d), \qquad \boldsymbol{d}_2 = d(\boldsymbol{e}_z\cos\theta_d - \boldsymbol{e}_x\sin\theta_d).$$

Здесь введены единичные векторы, и также ещё введём на будущее $\boldsymbol{r}$ вектор на точку наблюдения из середины координат, $\boldsymbol{n}$ – единичный по этому направлению.

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r} - L\boldsymbol{e}_z, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r} + L\boldsymbol{e}_z.$$

Тут $2L$ – расстояние между диполями, будем работать в приближении $r \gg L$. Тогда примерно $\boldsymbol{r}_1 \parallel \boldsymbol{r}_2 \parallel \boldsymbol{n}$. И соответственно $r = (\boldsymbol{rn})$, а остальные:

$$r_1 = (\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n}) = r - L(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n}), \qquad r_2 = (\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{n}) = r + L(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n}).$$

И для $d_{1,2}(t - \frac{r_{1,2}}{c})$

$$\boldsymbol{d}_1 = d(\boldsymbol{e}_z\cos\theta_d + \boldsymbol{e}\sin\theta_d)\cos(\omega t - kr_1), \qquad \boldsymbol{d}_2 = d(\boldsymbol{e}_z\cos\theta_d - \boldsymbol{e}_x\sin\theta_d)\cos(\omega t - kr_2),$$

колеблеющегося гармонически (по условию):

$$\boldsymbol{H} = \frac{[\ddot{\boldsymbol{d}}_1 \times \boldsymbol{n}]}{c^2 r_1} + \frac{\ddot{\boldsymbol{d}}_2 \times \boldsymbol{n}}{c^2 r_2} = \frac{-\omega^2 d}{c^2 r}\Big(([\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n}]\cos\theta_d + [\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{n}]\sin\theta_d)\cos(\omega t - \frac{\omega}{c}r_1) + ([\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n}]\cos\theta_d + [\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{n}]\sin\theta_d)\cos(\omega t - \frac{\omega}{c}r$$

Очень хочется упростить:

$$\cos(\omega t - kr_1) = \cos(\omega t - kr + kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n})) = \cos(\omega t - kr)cos(kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n})) - \sin(\omega t - kr)\sin(kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n})).$$

$$\cos(\omega t - kr_2) = \cos(\omega t - kr - kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n})) = \cos(\omega t - kr)cos(kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n})) + \sin(\omega t - kr)\sin(kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n})).$$

Тогда возвращаемся к выражению для H:

$$\boldsymbol{H} = \frac{-2\omega^2 d}{c^2 r}\left([\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{n}]\cos\theta_d\cos(\omega t - kr)\cos(kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n})) - [\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{n}]\sin\theta_d\sin(\omega t - kr)\sin(kL(\boldsymbol{e}_z\boldsymbol{n}))\right).$$

T16

Значит есть разноименные заряды, один будем характеризовать индексами "1 а другой "2". Будем работать в системе центра инерции:

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2}, \ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \quad \rightsquigarrow \quad \boldsymbol{R}_{\text{центра инерции}} = 0.$$

Тогда не сложно вычислить:

$$\boldsymbol{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{r}_2,\ \boldsymbol{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2(1+\frac{m_2}{m_1}),\ \boldsymbol{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r}.$$

Ну и как мы показывали для излучения диполя: $I = 2|\ddot{\boldsymbol{d}}|^2/(3c^3)$. В нашем случае:

$$\boldsymbol{d} = e_1\boldsymbol{r}_1 + e_2\boldsymbol{r}_2 = \left(\frac{e_2m_1 - e_1m_2}{m_1+m_2}\right)\boldsymbol{r} = q\boldsymbol{r} \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{2q^2\ddot{\boldsymbol{r}}^2}{3c^3}.$$

Введем $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$. Посмотрим на энергию, излучаемую за один период:

$$\delta\varepsilon = I\cdot T_{\text{период}} = I\frac{2\pi r}{v}.$$

Будем работать в предположении, что $\delta\varepsilon \ll \varepsilon$. Воспользуемся теоремой Вириала:

$$2\langle T\rangle = n\langle u\rangle,\ T = \frac{\mu v^2}{2},\ \mu v^2 = -\frac{e_1e_2}{r} \quad \rightsquigarrow \quad u = \frac{e_1e_2}{r}.$$

Таким образом $v = \sqrt{|e_1e_2|/\mu^2}$, тогда опять к энергии:

$$\delta\varepsilon = \frac{2q^2\ddot{r}^2}{3c^3}\frac{\pi r^{3/2}\mu^{1/2}}{|e_1e_2|^{1/2}} = \frac{2q^2}{3c^3}\frac{|e_1e_2|^{3/2}}{\mu^{3/2}r^{5/2}}\pi = \frac{|e_1e_2}{2r}\frac{4\pi q^2}{3|e_1e_2|}\underbrace{\frac{|e_1e_2|^{3/2}}{c^3\mu^{3/2}r^{3/2}}}_{(v/c)^3} = \varepsilon\left(\frac{v}{c}\right)^3\frac{4\pi q^2}{3|e_1e_2|} \ll \varepsilon.$$

Теперь на интересует $r(t)$. Знаем, что $\varepsilon = \frac{e_1e_2}{2r}$.

$$I = -\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{d\varepsilon}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{e_1e_2}{2r^2}\dot{r} = \frac{2q^2\ddot{r}^2}{3c^3},$$

подставляем сюда Кулона $\mu\ddot{r} = \frac{e_1e_2}{r^2}$, а он выполняется, так как за один оборот не очень много энергии теряется:

$$\frac{e_1e_2}{2r^2}\dot{r} = \frac{2q^2(e_1e_2)^2}{3c^3\mu^2r^4} \quad \rightsquigarrow \quad r^2\dot{r} = \frac{4q^2(e_1e_2}{3c^3\mu^2} = \frac{1}{3}\frac{dr^3}{dt}.$$

Не сложно тогда получается:

$$r = \left(r_0^3 + \frac{4\theta^2(e_1e_2)}{c^3\mu^2}t\right)^{1/3}, \qquad t_{\text{пад}} = \frac{r_0^3\mu^2c^3}{4q^2(e_1e_2)}.$$

Для атома время падения электрона на него $t \sim 10^{-8}$ секунды, и действительно в классической теории поля атомы с электронами стабильно существовать не могут.

T17

Два заряда у нас сталкиваются, излучают и летят обратно, нас интересует процесс излучения. Будем считать, что $v \ll c$. Воспользуемся выведенной формулой $I = 2|\ddot{\boldsymbol{d}}|^2/3(c^3)$. И всё так же живём в системе центра инерции, как в прошлой задаче.

$$\boldsymbol{d} = e_1\boldsymbol{r}_1 + e_2\boldsymbol{r}_2 = \left(\frac{e_2m_1 - e_1m_2}{m_1+m_2}\right)\boldsymbol{r} = q\boldsymbol{r}.$$

Давайте рассмотрим случай, когда $e_2m_1 \neq e_1m_2$. Тогда у нас не появляется лишних нулей, $I = \frac{2q^2\ddot{\boldsymbol{r}}^2}{ec^3}$. И, собственно, для энергии имеем:

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} I(t)dt = \frac{2q^2}{3c^3}\int_{-\infty}^{\infty}\ddot{r}^2dt = \frac{2q^2}{3c^3}\int_{v_{-\infty}}^{v_\infty}\ddot{r}d\dot{r}$$

Опять, работая с предположением: $\varepsilon_{\text{изл}} \ll \varepsilon_{\text{полная}}$, воспользуемся законом кулона. Ещё нам, для выражения скорости понадобится закон сохранения энергии:

$$\frac{\mu v_\infty^2}{2} = \frac{\mu v^2}{2} + \frac{e_1e_2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(e_1e_2)^2}{r^2} = \frac{\mu^2}{4}(v_\infty^2 - v^2)^2,$$

что при подстановке в закон Кулона:

$$\ddot{r} = \frac{e_1e_2}{\mu r^2} = \frac{(e_1e_2)^2}{r^2}\frac{1}{\mu(e_1e_2)} = \frac{\mu}{4(e_1e_2)}(v_\infty^2 - v^2)^2.$$

Теперь мы готовы взять наш интеграл:

$$\varepsilon = \frac{q^2\mu}{6c^3(e_1e_2)}\int_{-v_\infty}^{v_\infty}(v_\infty^2 - v^2)dv = \frac{\mu q^2}{6c^3(e_1e_2)}\left(v_\infty^4 v - \frac{2v^3}{3}v_\infty^2 + \frac{v^5}{5}\right)\Bigg|_{-v_\infty}^{v_\infty} = \frac{8\mu q^2}{45c^3(e_1e_2)}v_\infty^5 = \left(\frac{\mu v_\infty^2}{2}\right)\left(\frac{v_\infty}{c}\right)^3\frac{16q^2}{45(e_1e_2)} \ll \frac{\mu v_\infty^2}{2}.$$

Так и показали, что $\varepsilon \ll \varepsilon_{\text{полн}}$.

T18

У нас есть некий электрон летящий по окружности. Магнитное поле пусть направлено $\boldsymbol{H} = (0, 0, H)$. И у нас релетявистсктй случай $v \to c$.

Пренебрегаем излучением:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}].$$

Изменение энергии при $E = 0$ будет:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = e\boldsymbol{v}\boldsymbol{E} = 0.$$

То есть константа, а значит:

$$\varepsilon = \gamma mc^2 = \text{const} \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = \text{const}.$$

Тогда далее жить намного удобнее, найдем радиус орбиты:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \gamma m\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{e}{c}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}].$$

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \frac{e}{mc\gamma}[(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \times \boldsymbol{H}], \quad \boldsymbol{v}_0 = \frac{e}{mc\gamma}[\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{H}] \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{v} = \frac{e}{\gamma mc}[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{H}]$$

Тогда имеем радиус и циклотронную частоту:

$$R = \frac{\gamma mc}{eH}v, \qquad \Omega = \frac{eH}{\gamma mc}.$$

Далее достаточно большой блок теории – нужны запаздывающие потенциалы, но мы будем пытаться обойтись без них, введем на веру *потенциалы Лиенара-Вихерта*:

$$\varphi = \frac{e}{R\left(1 - \frac{\boldsymbol{n}\boldsymbol{v}}{c}\right)}, \qquad \boldsymbol{A} = \frac{e\boldsymbol{v}}{R\left(1 - \frac{\boldsymbol{n}\boldsymbol{v}}{c}\right)}.$$

Переходим в мгновенную систему отсчета K':

$$\boldsymbol{v}' = (0, 0, 0);\ \boldsymbol{v}(0, v, 0);\ \boldsymbol{H}(0, 0, H);\ \boldsymbol{E} = (0, 0, 0).$$

Тогда, зная как преобразуются компоненты поля:

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel} = 0,\ H'_{\parallel} = H_{\parallel} = 0.$$

$$\boldsymbol{E}'_{\perp} = \gamma = \left(\boldsymbol{E}_{\perp} - \frac{1}{c}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}]\right), \qquad \boldsymbol{H}'_{\perp} = \gamma = \left(\boldsymbol{H}_{\perp} - \frac{1}{c}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}]\right).$$

Таким образом получаем:

$$\boldsymbol{H}' = (0, 0, \gamma H),\ \boldsymbol{E}' = (-\beta\gamma H, 0, 0).$$

Тогда в новой системе отсчета движение описывается как:

$$\frac{dp'}{dt'} = e\boldsymbol{E}' + \underbrace{\frac{e}{c}[\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{H}']}_{0} = \underbrace{\dot{\gamma}' m\boldsymbol{v}'}_{0} + \gamma' m\dot{\boldsymbol{v}}' \qquad \Rightarrow \qquad m\dot{\boldsymbol{v}}' = e\boldsymbol{E}'.$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}' = -\frac{e\beta\gamma H}{m}\boldsymbol{e}_x \qquad \ddot{\boldsymbol{d}}' = e\ddot{\boldsymbol{r}}' = -\frac{e^2\beta\gamma H}{m}\boldsymbol{e}_x.$$

Тогда интенсивность излучения:

$$I' = \frac{2|\ddot{\boldsymbol{d}}'|^2}{3c^3} = \frac{2e^4\beta^2\gamma^2H^2}{3m^2c^3}.$$

Но в то же время $I' = -d\varepsilon'/dt'$ и $I = -d\varepsilon/dt$. счастью наше преобразование нам даёт, что $x' = y' = z' = 0$, и главное – $t = \gamma t'$. И большая удача, что преобразование четыре импульса системы тоже даёт нам $p'_x = p'_y = p'_z = 0$, и самое главное – $\varepsilon = \gamma\varepsilon'$. Тогда и $I = I'$, по замечанию выше.

x T19

T20

Имеем что? $\boldsymbol{E}_0 \parallel \boldsymbol{e}_x$ и $\boldsymbol{H}_0 \parallel \boldsymbol{e}_y$. Запишем вектор Пойтинга для такой рассейянной волны:

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}|H|^2\boldsymbol{n} = \frac{c}{4\pi}|\boldsymbol{E}|^2\boldsymbol{n}.$$

Вдали от источника, как мы обсуждали выполняется $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{H}$ и равны по модулю.

Для интенсивности имеем

$$dI = \boldsymbol{n}\boldsymbol{S}r^2 d\Omega = S_0 d\sigma,$$

где ввели дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma$, а $S_0 = \frac{c}{4\pi}|\boldsymbol{E}_0|^2$.

Внутри идеально проводящего шара $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{0}$. Рассмотрим конкретно электрическое поле в центре шара с плотностью заряда $\rho(\theta, \phi)$, взяв закон Кулона:

$$\boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) + \int \frac{\rho(\theta,\varphi)(-\boldsymbol{r})}{r^3} dS = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t) - \frac{1}{r^3}\underbrace{\int \rho(\theta,\varphi)\boldsymbol{r}\, dS}_{\boldsymbol{d}} = 0.$$

Соответственно получаем: $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{E}_0 r^3 \cos(\omega t)$.

Теперь берем Био-Савара

$$\boldsymbol{H}_0 \cos(\omega t) + \int \frac{[\boldsymbol{J}\times(-\boldsymbol{r})]}{cr^3} dS = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{H}_0 \cos(\omega t) + \frac{2}{r^3}\int \frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{J}}{2c} dS = 0.$$

И аналогично $\boldsymbol{\mu} = -\frac{\boldsymbol{H}_0 r^3}{2}\cos(\omega t)$.

В волновой (зоне) будет верно, что

$$\boldsymbol{H}_d = \frac{\ddot{\boldsymbol{d}}\times\boldsymbol{n}}{c^2 r}, \qquad \boldsymbol{H}_\mu = \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{\mu}}) - \ddot{\boldsymbol{\mu}}}{c^2 r}.$$

Таким образом вектор Пойтинга:

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}|\boldsymbol{H}_d + \boldsymbol{H}_\mu|^2\boldsymbol{n} = \frac{c}{4\pi c^4 r^2}\big(|[\ddot{\boldsymbol{d}}\times\boldsymbol{n}]|^2 + (\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{\mu}})^2 + |\ddot{\boldsymbol{\mu}}|^2 + 2([\ddot{\boldsymbol{d}}\times\boldsymbol{n}]\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{\mu}}) - 2(\ddot{\boldsymbol{\mu}}\cdot[\ddot{\boldsymbol{d}}\times\boldsymbol{n}]) - 2(\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{\mu}})^2\big)\boldsymbol{n}.$$

Будем разбираться по очереди: $[\ddot{\boldsymbol{d}}\times\boldsymbol{n}]\cdot\boldsymbol{n} = 0$. Далее:

$$[\ddot{\boldsymbol{d}}\times\boldsymbol{n}]_\alpha[\ddot{\boldsymbol{d}}\times\boldsymbol{n}]^\alpha = |\ddot{\boldsymbol{d}}|^2 - (\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{d}})^2.$$

Теперь вроде как немного упростилось:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{4\pi c^3 r^2}\big(|[\ddot{\boldsymbol{d}}\times\boldsymbol{n}]|^2 - (\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{\mu}})^2 + |\ddot{\boldsymbol{\mu}}|^2 - (\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{\mu}})^2 - 2(\ddot{\boldsymbol{\mu}}\cdot[\ddot{\boldsymbol{d}}\times\boldsymbol{n}])\big)\boldsymbol{n}.$$

И теперь по формулам выше найдём сечение:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{\omega^4 r^6}{c^4}\cos^2(\omega t)\big(|\boldsymbol{e}_x|^2 - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_x)^2 + \frac{1}{4}|\boldsymbol{e}_y|^2 - \frac{1}{4}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_y)^2 - (\boldsymbol{e}_y[\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{n}])\big)d\Omega = \\ &= \frac{\omega^4 r^6}{2c^4}\left(\frac{5}{4} - \sin^2\theta\cos^2\varphi - \frac{1}{4}\sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos\theta\right)d\Omega. \end{aligned}$$

А теперь, как нас просят задаче, мы это возьмём и проинтегрируем!

$$\sigma = 2\pi\frac{\omega^4 r^6}{2c^4}\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\right) = \frac{5\pi}{3}\frac{\omega^4}{2c^4}r^6.$$