Билеты курса «Гармонический анализ»

Источник: an_explanations.pdf
Лектор: Карасёв Р.Н.

Восторженные читатели: Хоружий Кирилл
Примак Евгений

От: *11 июня 2021 г.*

Содержание

Дополнительная задача о $\cos e^{ix}$

Найдём суммы вида
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{\cos(2nx)}{(2n)!}+i(-1)^n\frac{\sin(2nx)}{(2n)!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{2inx}}{(2n)!},$$
далее, принимая $z=e^{ix}$, найдём по определению
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{2inx}}{(2n)!}=\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}=\cos(z)=\cos\left(e^{ix}\right).$$

1 Собственные интегралы с параметром

Thr 1.1 (непрерваность интеграла по параметру)**.** *Пусть $f\colon X\times E\mapsto\mathbb{R}$, где E – область определения α, а X для x. Пусть также $f(x,\alpha)\in\mathcal{L}(X)\quad\forall\alpha$, где $\mathcal{L}(X)$ – интегрируема по Лебегу на множестве X, $f(x,\alpha)$ непрерывна почти всюду по α, и $|f(x,\alpha)|$ мажорируется Лебег-интегрируесой функцией $\forall\alpha\in E$. Тогда*
$$I(\alpha)=\int_X f(x,\alpha)\,dx$$
непрерывен.

Con 1.2 (непрерваность интеграла по параметру по Кудрявцеву)**.** *Если функция $f(x,\alpha)$ непреывна в прямоугольнике*
$$K=\{(x,\alpha):\quad a\leqslant x\leqslant b,\alpha_1\leqslant\alpha_2\},$$
то интеграл
$$\Phi(\alpha)=\int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)}f(x,\alpha)\,dx$$
есть непрерывная функция параметра α на отрезке $[\alpha_1,\alpha_2]$. В частности, возможен предельный переход под знаком интеграла:
$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx=\int_a^b\lim_{a\to\alpha_0}f(x,\alpha)\,dx.$$

Con 1.3. *Пусть $f\colon[a,+\infty)\mapsto\mathbb{R}$. Если f непрерывна на $[a,+\infty)\times[c,d]$ **и***
$$I(\alpha)=\int_a^{+\infty}f(x,\alpha)\,dx$$
*сходится равномерно по α нв $[c,d]$, **то** $I(\alpha)$ непрерывен по α на $[c,d]$.*

Thr 1.4. *Пусть $f\colon X\times E\mapsto\mathbb{R}$, где E – область определения α, а X для x. Пусть также $f(x,\alpha)\in\mathcal{L}(X)\quad\forall\alpha$, где $\mathcal{L}(X)$ – интегрируема по Лебегу на множестве X, $\exists f'(x,\alpha)\in\mathbb{R}$ почти всюду по α, и $|f'_\alpha(x,\alpha)|$ мажорируется Лебег-интегрируесой функцией $\forall\alpha\in E$ почти всюду. Тогда*
$$I(\alpha)=\int_X f(x,\alpha)\,dx$$
дифференцируем E и $I'(\alpha)=\int_X f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$.

Con 1.5. *Пусть $f\colon[a,b]\times[c,d]\mapsto\mathbb{R}$, f и f'_α непрерынва на $[a,b]\times[c,d]$, **то***
$$I(\alpha)=\int_a^b f(x,\alpha)\ \in C^1[c,d];\qquad I'(\alpha)=\int_a^b f'_a(x,\alpha)\,dx.$$

Con 1.6. *Пусть $I(\alpha)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)}f(x,\alpha)\,dx$. Для удобства выберем $a_0=\inf_\alpha a(\alpha)$ и $b_0=\sup_\alpha b(\alpha)$. Также требуем непрерывность f и f'_x на $[a_0,b_0]\times[c,d]$. Считаем, что $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ дифференцируемы. **Тогда** $I(\alpha)$ – дифференцируем по α на $[c,d]$. Более того, в таких условиях верна формула*
$$I'(\alpha)=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)}f'_\alpha(x,\alpha)\,dx+f(b(\alpha),\alpha)\cdot b'_\alpha(\alpha)-f(a(\alpha),\alpha)\cdot a'_\alpha(\alpha).$$

Con 1.7. *Пусть функция $f\colon[a,+\infty)\times[c,d]\mapsto\mathbb{R}$. **Если** существует $\alpha_0\in[c,d]$ такое, что*
$$I(\alpha)=\int_a^{\infty}f(x,\alpha_0)\,dx$$

сходится, f и f'_α непрерывны на $[a,+\infty)\times[c,d]$, и

$$\int_a^\infty f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$

*сходится равномерно по α на E, **тогда** $I(\alpha)\in C^1[c,d]$ и*

$$I'_\alpha(\alpha)=\int_a^{+\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx.$$

Thr 1.8 (интегрирование интегралов, зависящих от параметров)**.** *Если функция $f(x,\alpha)$ непрерывна в прямоугольнике, то интеграл есть функция, интегрируемая на отрезке $[\alpha_1,\alpha_2]$ и справедливо*

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left(\int_a^b f(x,\alpha)\,dx\right)d\alpha=\int_a^b\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x,\alpha)\,d\alpha\right)dx.$$

1.1 К. III, §13

13.4

Пусть $f(x)$ непрерывна и принимает положительные значения на $[0,1]$. Докажем, что функция

$$I(\alpha)=\int_0^1\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}f(x)\,dx$$

разрывна при $\alpha=0$.

Функции φ: $\frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}$ и f Лебег-интегрируемы по x на $[0,1]$, знакопостоянны $\forall x\in(0,1)$, а также f –непрерывна, тогда можем воспользоваться первой теоремой о среднем

$$I(\alpha)=f(\xi(\alpha))\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha},\qquad 0\leqslant\xi(\alpha)\leqslant 1.$$

Тогда для $\forall\varepsilon>0$

$$|F(\varepsilon)-F(-\varepsilon)|=\left|(f(\xi(\alpha))+f(\xi(-\alpha)))\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}\right|\geqslant 2\,in_{x\in[0,1]}f(x)\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}\right|\varepsilon\underset{\rightarrow}{\rightarrow}0\pi\min_{x\in[0,1]}f(x)>0,$$

что говорит о разрывности функции.

13.5(1)

Выясним, справедливо ли равенство

$$\lim_{\alpha\to0}\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx=\int_0^1\lim_{\alpha\to0}f(x,\alpha)\,dx,$$

где $f(x,\alpha)=\frac{x}{\alpha^2}e^{-x^2/\alpha^2}$.

Ну, вообще нельзя. Переходя к пределу под знаком интеграла, получаем нуль. Если же вычислить интеграл, а затем перейти к пределу, то получим

$$\lim_{\alpha\to0}\int_0^1\frac{x}{\alpha^2}e^{-x^2/\alpha^2}\,dx=\frac12\lim_{y\to0}\int_0^1 e^{-x^2/\alpha^2}\,d\left(\frac{x^2}{\alpha^2}\right)=\frac12\lim_{\alpha\to0}\left(1-e^{-1/\alpha^2}\right)=\frac12.$$

Заметим, что f разрывна в точке $(0,0)$, вот теоремы о предельном переходе и не работает, необходимо проверять вычислением.

13.8(3)

Выясним, равны ли интегралы

$$I_1(\alpha)=\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,\alpha)\,d\alpha\right)dx\ \stackrel{?}{=}\ \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,\alpha)\,d\alpha\right)dx=I_2(\alpha),\qquad f(x,\alpha)=\left(\frac{x^5}{\alpha^4}-\frac{2x^3}{\alpha^3}\right)e^{-x^2/\alpha}.$$

Считая $t=-x^2/\alpha$ и $dt=x^2(-1/\alpha^2)\,d\alpha$, перейдём к интегралу

$$g(x)=\int_0^1 d\alpha\left(\frac{x^5}{\alpha^4}-\frac{2x^3}{\alpha^3}\right)e^{-x^2/\alpha}=\int_{x^2}^\infty\left(\frac{t^2-2t}{x}\right)e^{-t}\,dt=\frac1x\int_{x^2}^\infty\left(t^2-2t\right)e^{-t}\,dt=\frac1x\left(-t^2e^{-t}\right)\Big|_{x^2}^{+\infty}=x^3e^{-x^2}.$$

Возвращаясь к первоначальному интегрированию

$$\int_0^1 g(x)\,dx=\frac12\int_0^1 x^2e^{-x^2}\,d(x^2)=\frac12\int_0^1 te^{-t}\,dt=-\frac12(t+1)e^{-t}\big|_0^1=\frac12-\frac1e.$$

С другой стороны – другой интеграл,
$$h(\alpha) = \int_0^1 dx f(x,\alpha) = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{1/\alpha} (t^2 - 2t)e^{-t}\,dt = \frac{1}{2\alpha}\left\{-t^2 e^{-t}\right\}\Big|_0^{1/\alpha} = -\frac{1}{2\alpha^3}e^{-1/\alpha}.$$
Остается посчитать интеграл по α
$$\int_0^1 h(\alpha)\,d\alpha = -\frac{1}{2}\int_1^\infty te^{-t}\,dt = -\frac{1}{e},$$
что приводит к противоречию, – интегралы LHS и RHS е равны друг другу.

13.12

Пусть $a > 0$, $b > 0$. Вычислим интеграл
$$I_1 = \int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx, \qquad I_2 = \int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx.$$
Внутри аргумента интеграла можно увидеть другой интеграл, так что рассмотрим вместо $I_{1,2}$ два повторных интеграла
$$I_1 = \int_0^1 dx\int_a^b x^y \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\,dy, \qquad I_2 = \int_0 61\int_a^b x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\,dy.$$
Обозначим аргументы новых $I_{1,2}$ за f_1 и f_2, которые непрерывны, поэтому позволяют перестановку по Фубини:
$$I_1 = \int_a^b dy\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\,dx, \qquad I_2 = \int_a^b dy\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\,dx.$$
Подставим $x = e^{-t}$:
$$I_1 = \int_a^b dy\int_0^{+\infty} e^{-t(y+1)}\sin t\,dt, \qquad I_2 = \int_a^b dy\int_0^{+\infty} e^{-t(y+1)}\cos t\,dt.$$
Новый аргумент интегрировать мы уже умеем, так что находим
$$I_1 = \int_a^b \frac{dy}{(y+1)^2+1}, \qquad I_2 = \int_a^b \frac{(y+1)\,dy}{(y+1)^2+1},$$
что также интегрируется, так что находим
$$I_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}\right), \qquad I_2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}\right).$$

13.14(3)

Найти $\Phi'(\alpha)$, если
$$\Phi(\alpha) = \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$
Обозначая аргумент интеграла за $f(\alpha,x)$ заметим, что f и f'_α непрерывны, т.к. интеграл собственный, то, интегрируя по частям, находим, что
$$\Phi'(\alpha) = e^{\alpha|\sin\alpha|}(-\sin\alpha) - e^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha + \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

13.17

Есть интеграл вида
$$I(\alpha) = \int_0^b \frac{dx}{x^2+\alpha^2}.$$
Дифференцируя его по параметру $\alpha > 0$ вычислим интграл
$$J(\alpha) = \int_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}.$$
Считая интеграл собственным, заметим, что аргумент интеграла $(f(x,\alpha))$, а также f'_α непрерывны. Раз так, то можем интегрировать под знаком интеграла:
$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial\alpha} = \int_0^b dx\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{x^2+\alpha^2} = -2\alpha\int_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2} = -2\alpha J(\alpha).$$

Таким образом приходим к
$$J(\alpha)=\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha}\right)=\frac{1}{2\alpha^3}\left\{\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha}+\frac{b\alpha}{b^2+\alpha^2}\right\}.$$

13.18 (1)

Теперь, применяя дифференцирование по параметру α, вычислим
$$I(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\ln\left(\alpha^2-\sin^2\varphi\right)\,d\varphi.$$
Опять таки, перед нами собственный интеграл, с непрерывным аргументом и его производной по α, соответсвенно интегрируемые по Лебегу, поэтому законно писать, что
$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha}=\int_0^{\pi/2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\left(\alpha^2-\sin^2\varphi\right)\,d\varphi=\int_0^{\pi/2}\frac{2\alpha\,d\varphi}{\alpha^2-\sin^2\varphi}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}.$$
Таким образом находим, что
$$I(\alpha)=\pi\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})+C.$$
С другой стороны
$$I(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\{2\ln\alpha+o(1)\}\,d\varphi=\pi\ln\alpha+o(1)$$
$$I(\alpha)=\pi\ln\alpha+\pi\ln 2+C+o(1),$$
при больших α. Получается, что
$$I(\alpha)=\pi\ln\left\{\frac{1}{2}\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}\right)\right\}.$$

13.28 (T1)

Докажем формулу для $n\in\mathbb{N}$,
$$I_n=\frac{d^nf(x)}{dx^n}=\psi_n(x),\qquad f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}\qquad \psi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^{n+1}}\displaystyle\int_0^x y^n\cos\left(y+\frac{\pi n}{2}\right)\,dy, & x\neq 0,\\ \dfrac{\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)}{n+1}, & x=0,\ n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$
Уже из этого потом покажем, что верна оценка
$$\left|\frac{d^nf(x)}{dx^n}\right|\leqslant\frac{1}{n+1},\qquad x\in(-\infty,+\infty).$$
Ну, выражение для I_n справедливо при $n=1$. Пусть формула для I_n также верна при некотором $n=k$, тогда дифференцируя обе части по x с последующим применением инетгрирования по частям получаем
$$\begin{aligned}I_{k+1}=\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)&=\frac{1}{x}\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)-\frac{k+1}{x^{k+2}}\int_0^x y^k\cos\left(y+\frac{k\pi}{2}\right)\,dy=\\&=\frac{1}{x}\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)-\frac{k+1}{x^{k+2}}\left(\frac{y^{k+1}}{k+1}\cos\left(y+\frac{k\pi}{2}\right)\Bigg|_0^x+\frac{1}{k+1}\int_0^x y^{k+1}\sin\left(y+\frac{k\pi}{2}\right)\,dy\right)=\\&=-\frac{1}{x^{k+2}}\int_0^x y^{k+1}\sin\left(y+\frac{k\pi}{2}\right)\,dy=\frac{1}{x^{k+2}}\int_0^x y^{k+1}\cos\left(y+\frac{(k+1)\pi}{2}\right)\,dy,\qquad x\neq 0.\end{aligned}$$
Раскладывая $\sin x$ в ряд Тейлора, можем найти
$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{2k}}{(2k+1)!},\ \ \forall x,\qquad\Rightarrow\qquad f^{(n)}(0)=\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)}{n+1}.$$
Далее, при $x\neq 0$,
$$\left|\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n\cos\left(y+\frac{\pi n}{2}\right)\,dy\right|\leqslant\frac{1}{|x|^{n+1}}\int_0^{|x|}y^n\,dy=\frac{1}{n+1},$$
а при $x=0$,
$$|f^{(n)}(0)|=\frac{\left|\cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)\right|}{n+1}\leqslant\frac{1}{n+1},\qquad\overset{\forall x}{\Rightarrow}\qquad\left|\frac{d^nf(x)}{dx^n}\right|\leqslant\frac{1}{n+1},\qquad \text{Q. E. D.}$$

2 Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Def 2.1. Интеграл, сходящийся $\forall\alpha \in E$, вида

$$I(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$$

называют *равномерно сходящимся на множестве* E, если

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_\varepsilon \colon \forall\alpha \in E,\ \forall\xi \geqslant \delta_\varepsilon \quad \left|\int_\xi^\infty f(x,\alpha)\,dx\right| \leqslant \varepsilon.$$

Если построить отрицание, то поймём, что *интеграл сходится неравномерно* на E, если

$$\exists\varepsilon_0 > 0 \colon \forall\delta \in [\alpha,+\infty)\ \ \exists\alpha_\delta \in E,\ \xi_\delta \in [\delta,+\infty) \colon \left|\int_{\xi_\delta}^{+\infty} f(x,\alpha_\delta)\,dx\right| \geqslant \varepsilon_0.$$

Определение равномерной сходимости соответствует условию

$$\lim_{\xi\to+\infty}\left(\sup_{\alpha\in E}\int_\xi^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx\right) = 0.$$

Lem 2.2 (признак Вейерштрасса)**.** *Если на* $[a,+\infty)$ $\exists\varphi(x)$ *такая, что* $|f(x,\alpha)| \leqslant \varphi(x)$ $\forall x \in [a,+\infty)$ *и* $\forall\alpha \in E$, *и если* $\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$ *сходится, то* $I(\alpha)$ *сходится абсолютно и равномерно на* E.

Lem 2.3 (признак Дирихле)**.** *Интеграл*

$$\int_a^\infty f(x,\alpha)g(x,\alpha)\,dx$$

сходтся равномерно по α *на* E, *если* $\forall\alpha \in E$ *функции* f, g, g'_x *непрерывны по* x *на множестве* $[a,+\infty)$ *и удовлетворяют следующим условиям:* $g(x,\alpha) \rightrightarrows 0$ *при* $x \to \infty$, $g'_x(x,\alpha)$ $\forall\alpha$ *не меняет знака при* $x \in [a,+\infty)$, *функция* f $\forall\alpha \in E$ *имеет ограниченную первообразную* $\forall x,\ \alpha$.

Lem 2.4 (критерий Коши)**.** *Интеграл* $I(\alpha)$ *сходится равномерно на* E *тогда и тольког тогда, когда выполняется условие Коши:*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon \in (a,\infty)\ :\ \forall\xi' \in [\varphi_\varepsilon,+\infty),\ \xi'' \in [\delta_\varepsilon,+\infty),\ \forall\alpha \quad \left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,\alpha)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Lem 2.5 (непрерывность)**.** *Если функция* $f(x,\alpha)$ *непрерывна на* $D = \{(x,a) \mid a \leqslant x < +\infty, \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha)2\}$ *и* $I(\alpha)$ *сходится равномерно по* α *на отрезке* $[\alpha_1,\alpha_2]$, *то функция* $I(\alpha)$ *непрерывна на отрезке* $[\alpha_1,\alpha_2]$.

2.1 К. III, §14

14.1(1, 2)

Докажем в 14.1(1) равномерную сходимость интеграла

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \qquad E = [\alpha_0;+\infty), \quad \alpha_0 > 1.$$

По признаку Вейерштрассе $x^\alpha \geqslant x^{\alpha_0}$, если $x > 1$, $\alpha > \alpha_0 > 1$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \leqslant \int_1^\infty \frac{dx}{x^{\alpha_0}} \qquad \Rightarrow \qquad M(x) = \frac{1}{x^{\alpha_0}}.$$

что соответствует сходимости. Аналогично 14.1(2), интеграл вида

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \qquad E = (0,\alpha_0), \quad \alpha_0 < 1.$$

Так как $x < 1$, то верно, что при $\alpha < \alpha_0 < 1$ функция $x^\alpha \geqslant x^{\alpha_0}$, что позволяет найти Лебег-интегрируемую мажоранту на E.

14.6(3)

Докажем, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на множестве E_1, и сходится неравномерно на E_2, если

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{4+(x-\alpha)^6}, \qquad E_1 = [-\infty,0], \quad E_2 = [1,+\infty).$$

Для начала на E_1:

$$\left|\int_\xi^{-\infty}\frac{dx}{4+(x-\alpha)^6}\right| = \left|\int_{\xi-\alpha}^{+\infty}\frac{dt}{4+t^6}\right|, \qquad \sup_{\alpha\in E_1}\left|\int_{\xi-\alpha}^{+\infty}\frac{dt}{4+t^6}\right| = \int_\xi^{+\infty}\frac{dt}{4+t^6}\underset{\xi\to+\infty}{\to}0,$$

что соответсвует равномерной сходимости.

В случае же E_2, по аналогичным рассуждениям, приходим к

$$\sup_{\alpha\in E_2}\left|\int_{\xi-\alpha}^{+\infty}\frac{dt}{4+t^6}\right| = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{4+t^6}\underset{\xi\to+\infty}{\not\to}0,$$

что говорит о неравномерной сходимости.

14.6(4)

Теперь на множествах $E_1=[0,2]$ и $E_2=[0,+\infty)$ рассмотрим интеграл вида

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\exp(-(x-\alpha)^2)\,dx.$$

По определению равномерной непрерывности рассмотрим

$$\Omega(E)=\lim_{\xi\to+\infty}\sup_{\alpha\in E}\left|\int_\xi^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}\,dx\right| = \lim_{\xi\to+\infty}\sup_{\alpha\in E}\left|\int_{\xi-\alpha}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx\right|.$$

В силу ограниченности E_1 $\Omega(E_1)=0$. А вот на E_2 уже будет верно, что

$$\sup_{\alpha\in E_2}\left|\int_{\xi-\alpha}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx\right| = \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx\underset{\xi\to+\infty}{\not\to}0,$$

что говорит о неравномерной сходимости.

14.7(2)

Исследдуем на равномерную сходимость интеграл вида

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}\,dx, \qquad E=[0,1].$$

И снова по определению рассмотрим интеграл

$$\left|\int_\xi^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}\,dx\right| = \left|\int_{\alpha\xi}^{+\infty}e^{-t}\,dt\right| = e^{-\alpha\xi}.$$

В условиях задачи

$$\alpha>0, \qquad e^{-\alpha\xi}\geqslant\varepsilon_0\in(0,1).$$

Точнее рассмотрим

$$\alpha\xi\leqslant\ln\frac{1}{\varepsilon_0}, \qquad\Leftrightarrow\qquad \alpha\leqslant\frac{1}{\xi}\ln\frac{1}{\varepsilon_0}.$$

Далее, по определению,

$$\exists\varepsilon_0>0\ \forall\delta>0\ \exists\xi_\delta=\delta\ \exists\alpha(\delta)=\frac{1}{\delta}\ln\frac{1}{\varepsilon_0}, \qquad\Rightarrow\qquad \left|\int_{\xi_\delta}^{+\infty}f(x,\alpha)\,dx\right| = e^{-\alpha(\delta)\xi(\delta)}\geqslant\varepsilon_0.$$

Признак Абеля

Lem 2.6 (признак Абеля)**.** *Если интеграл $I(\alpha)=\int_a^{+\infty}f(x,\alpha)\,dx$ сходится равномерно на $[\alpha_1,\alpha_2]$ и функция φ ограничена и монотонна по x, то интеграл*

$$\int_a^{+\infty}f(x,y)\varphi(x,y)\,dx\underset{[\alpha_1,\alpha_2]}{\rightrightarrows}.$$

$\triangle$. Для $\forall\varepsilon>0$, по Критерию Коши, $\exists B(\varepsilon)$ такое, что $\forall b'$, ξ, $b''>B(\varepsilon)$ независимо от $\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]$ выполняется

$$\left|\int_{b'}^{\xi}f(x,\alpha)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2M}, \qquad \left|\int_\xi^{b''}f(x,\alpha)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2M},$$

где $M=\sup_{x,\alpha}|\varphi(x,\alpha)|\neq0$.

Далее, так как φ монотонна по x, а функция f интегрируема, то, по второй теореме о среднем, имеем

$$\int_{b'}^{b''}f(x,\alpha)\varphi(x,\alpha)\,dx=\varphi(b'+0,\alpha)\int_{b'}^{\xi}f(x,\alpha)\,dx+\varphi(b''-0,\alpha)\int_\xi^{b''}f(x,\alpha)\,dx,$$

где $b' \leqslant \xi \leqslant b''$. Отсюда, учитывая неравенства, получаем оценку

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x,\alpha)\varphi(x,\alpha)\,dx\right| \leqslant |\varphi(b'+0,\alpha)|\cdot\left|\int_{b'}^{\xi} f(x,\alpha)\,dx\right| + |\varphi(b''-0,\alpha)|\cdot\left|\int_{\xi}^{b''} f(x,\alpha)\,dx\right| < \varepsilon,$$

для $\forall\alpha \in [\alpha_1,\alpha_2]$. А это, по критерию Коши, и означает, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на E. □

14.7(4)

Исследуем на равномерную сходимость на E интеграл $I(\alpha)$ вида

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^\alpha}\,dx, \qquad E = [0,+\infty).$$

Сделав замену $x = \sqrt{t}$, получим

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t\,dt}{2(1+t^{p/2})\sqrt{t}}.$$

По признаку Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ сходится, а функция $\frac{1}{2}\left(1+t^{\alpha/2}\right)^{-1}$ при $\alpha \geqslant 0$ монотонна по t и ограничена числом 0.5, следовательно, по *признаку Абеля*, интеграл сходится равномерно.

14.7(6)

Исследуем на равномерную сходимость на E интеграл $I(\alpha)$ вида

$$I(\alpha) = \int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^\alpha}, \qquad E = (0,2).$$

Положим $x = 1/t$, $t > 0$. Тогда

$$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-\alpha}}\,dt, \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\xi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{2-\alpha}}\,dt = \frac{\cos\xi}{\xi^{2-\alpha}} + (\alpha-2)\int_{\xi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3-\alpha}}\,dt.$$

Последний интеграл [!] сходится равномерно, поэтому при достаточно большм ξ справедлива оценка

$$\left|\int_B^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3-\alpha}}\,dt\right| < \varepsilon_1, \qquad \varepsilon > 0.$$

Возвращаясь к первому слагаемому, заметим, что оно не может быть сделано сколь уголно малым $\forall\Xi \geqslant \xi$ равномерно относительно параметра α. Действительно, пусть $\xi > 0$ задано, а также $0 < \varepsilon_2 \leqslant 1/2$, тогда выбирая $\Xi = 2\pi k > \xi$, $k \in \mathbb{N}$ значение параметра α из неравенства $0 < 2-\alpha < \ln(\varepsilon_2^{-1})/\ln(2\pi\kappa)$ находим, что

$$\left|\frac{\cos\xi}{\xi^{2-\alpha}}\right| = \frac{1}{(2k\pi)^{2-\alpha}} > \varepsilon_2,$$

что означает, что исследуемый интеграл сходится неравномерно.

Lem 2.7. *Если $f(x,\alpha) \rightrightarrows f(x,\alpha_0)$ на каждом интерва $[a,b]$ и $|f(x,\alpha)| \leqslant F(x)$, где $F(x)$ – Лебег-интегрируема, то*

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx = \int_a^{+\infty} \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)\,dx.$$

△. Оценим по абсолютной величине разность

$$\int_0^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx - \int_0^{+\infty} f(x,\alpha_0)\,dx = \int_a^b \left(f(x,\alpha)-f(x,\alpha_0)\right)\,dx + \int_a^b f(x,\alpha)\,dx - \int_b^{+\infty} f(x,\alpha_0)\,dx, \qquad b > a.$$

Для $\forall\varepsilon > 0$ задано, в силу мажорируемости Лебег-интегрируемой функцией, при достаточно большом b справедливы оценки

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx\right| \leqslant \int_b^{+\infty} F(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \left|\int_b^{+\infty} f(x,\alpha_0)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

а в силу условия равномерной сходимости – оценка

$$|f(x,\alpha)-f(x,\alpha_0)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}, \qquad \forall x \in [a,b],$$

если разность $|y-y_0|$ достаточно мала.

Таким образом получаем

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx - \int_a^{+\infty} f(x,\alpha_0)\,dx\right| < \varepsilon,$$

при достаточно малом $|\alpha - \alpha_0|$. $\square$

14.21

Покажем, что есть f непрерывна и ограничена на промежутке $[0, +\infty)$, то

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha f(x)}{x^2+\alpha^2}\, dx = f(0).$$

Как обычно положим $x = t\alpha$, при $t > 0$ и $y > 0$. Тогда

$$I = \lim_{y\to+0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(ty)}{t^2+1}\, dt.$$

Так как $|f(ty)|/(t^2+1) \leqslant M/(t^2+1)$, где $|f(ty)| \leqslant M = \text{const}$, $\int_0^{+\infty} dt/(t^2+1) = \pi/2$ (сходится), а в силу непрерывности f дробь $\frac{f(t\alpha)}{t^2+1} \rightrightarrows \frac{f(0)}{t^2+1}$ при $y \to +0$ на каждлм конечном интервале $[a, b]$, то, согласно выше рассмотренной лемме, находим

$$\lim_{\alpha\to+0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(t\alpha)}{t^2+1}\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \lim_{\alpha\to+0} \frac{f(t\alpha)}{t^2+1}\, dt = f(0).$$

В силу нечетности интеграла по α, имеем

$$\lim_{\alpha\to-0} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\alpha f(x)}{x^2+\alpha^2}\, dx = -f(0).$$

2.2 T2

Интеграл Дирихле. Вычислим *интеграл Дирихле*

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx \tag{2.1}$$

Для начала вычислим некоторый другой интеграл:

$$\Phi(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx, \qquad \Phi'_\alpha(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-\beta x} \cos(\alpha x)\, dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Действительно, считая $f'_\alpha(x, \alpha) = e^{-\beta x} \cos(\alpha x)$, заметим, что f и f'_α непрерывны на E, $\int_0^{\infty} f(x, \alpha)\, dx$ сходится $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ по Дирихле:

$$\left| \int_0^{\infty} \sin(\alpha x)\, dx \right| = \left| \frac{\cos(\alpha t) - 1}{\alpha} \right| \leqslant \frac{2}{|\alpha|}, \qquad \alpha \neq 0,$$

а функция $x^{-1} e^{-\beta x}$ убывает на промежутке $(0, +\infty)$, также верно, что $\int_0^{\infty} f'_\alpha(x, \alpha)\, dx$ сходится равномерно по признаку Вейерштрассе, следовательно можем дифференцировать под знаком интеграла.

Теперь, интегриря α на отрезке $[0, \alpha]$ находим

$$\Phi(\alpha, \beta) - \Phi(0, \beta) = \beta \int_0^{\alpha} \frac{dt}{t^2+\beta^2} = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta}.$$

Понятно, что $I(\alpha) = -I(\alpha)$, так что далее считаем $\alpha > 0$. Имеем право рассмотреть $\beta \in [0, 1]$, точнее предел

$$\lim_{\beta\to+0} \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx = I(\alpha) = \lim_{\beta\to+0} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом для произвольного α верно, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign}(\alpha). \tag{2.2}$$

Интеграл Лапласа. Вычислим интегралы Лапласа

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx = \int_0^{\infty} f(x, \alpha)\, dx, \qquad K(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx.$$

Без ограничения общности рассмотрим $\alpha > 0$. Проверим, что можем дифференцировать под знаком интеграла: $f(x, \alpha)$ непрерывна $\forall \alpha$, x, интеграл

$$\int_0^{+\infty} f'_\alpha\, dx = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx,$$

сходится равномерно по α на $[a_0, +\infty)$ для $\forall \alpha_0 > 0$, получается верно, что

$$I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} = -K(\alpha).$$

Складывая с известным выражением интеграла Дирихле, находим

$$I'(\alpha) + \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} - \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)}\, dx.$$

Аргумент интеграла непрерывен, как и его производная по α, они Лебег-интегрируемы, поэтому, дифференцируя под знаком интеграла, находим

$$I''(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx.$$

Так мы приходим к дифференциальному уравнению на $I(\alpha)$:

$$I''(\alpha) - I(\alpha) = 0, \quad \Rightarrow \quad I(\alpha) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha}.$$

Рассматривая пределы $\alpha \to 0$ и $\alpha \to +\infty$, находим константы интегрирования $C_1 = 0$ и $C_2 = \pi/2$. В силу четности $I(\alpha)$ находим

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Бонусом находим $K(\alpha) = -I'_\alpha(\alpha)$:

$$K(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|} \cdot \operatorname{sign} \alpha.$$

Интегралы Френеля. Вычислим *интеграл Френеля*

$$I = \int_0^{+\infty} \sin^2 x^2\, dx.$$

Для нахождения нам понадобится *интеграл Эйлера-Пуассона* и, возможно, *интеграл Лапласа*:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2}..$$

Полагая $x^2 = t$ запишем интеграл I в виде

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt.$$

При $t > 0$ справедливо равенство

$$\int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\, du = \Big/ x = \sqrt{t} u \Big/ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\, du, \tag{2.3}$$

Так приходим к двойному интегралу

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin t\, dt \int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\, du.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \sin t\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4}.$$

Который легко вычисляется, если заметить, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2\, dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{(1/x^2)\, dx}{1+(1/x)^4} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

Поэтому

$$2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{(1+1/x^2)\, dx}{x^2+1/x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{d(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1/x}{\sqrt{2}} \right) \Bigg|_0^{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Откуда уже и получаем

$$I = \int_0^{+\infty} \sin^2 x^2\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{2.4}$$

2.3 Т3

Докажем *формулу Фруллани*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = f(0) \ln \frac{b}{a}, \qquad a > 0,\ b > 0,$$

где f – непрерывная функция и $\int_A^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx$ сходится $\forall A > 0$.

В силу условий теоремы

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x}\,dx = \int_{Aa}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt, \qquad \int_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x}\,dx = \int_{Ab}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt, \quad \Rightarrow \quad \int_A^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int_{Aa}^{Ab} \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

По *первой теореме о среднем*, получаем

$$\int_A^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(\xi)\int_{Aa}^{Ab} \frac{dt}{t} = f(\xi)\ln\frac{b}{a}, \qquad Aa \leqslant \xi \leqslant Ab.$$

Поскольку функция f непрерывна, то $\lim_{A\to+0} f(\xi) = f(0)$, откуда находим

$$\lim_{A\to+0}\int_A^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a}. \tag{2.5}$$

Стоит заметить, что если $\int_A^\infty f(x)/x\,dx$ расходится, то

$$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty), \qquad \exists \int_A^{+\infty} \frac{f(x)-f(+\infty)}{x}\,dx \in \mathbb{R}, \quad \Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = (f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}.$$

2.4 К. III, §15

15.1(1, 2, 3, 4)

1) Найдём интеграл вида

$$\int_0^{+\infty} \left(\cos^2(ax) - \cos^2(bx)\right)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(\cos(2ax) - \cos(2bx)\right)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}.$$

где воспользовались формулой Фрулани, выбрав $\cos(2ax) = f(ax)$.

2) Теперь найдём

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{-ax^2} - e^{-bx^2}\right)\frac{dx}{x} = \ln\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a},$$

3) Интеграл вида

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\,dx = \Bigg/ \begin{matrix} x = \sqrt{t}, \\ dx = dt/(2\sqrt{t}) \end{matrix} \Bigg/ = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{2t}\,dt = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}.$$

4) И, наконец, вычислим интеграл вида

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x}\,dx = \Bigg/ \ln\frac{1}{x} = t \Bigg/ = \int_\infty^0 \frac{dt}{t} e^{-t}(e^{-at} - e^{-bt}) = \int_0^\infty \left(e^{-(b+1)t} - e^{-(a+1)t}\right)\frac{dt}{t} = \ln\frac{a+1}{b+1}$$

15.2(1)

Найдём интеграл, вида

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x^2}\,dx = -\int_0^{+\infty} \sin^2\left(\frac{\alpha x}{2}\right) d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}x\right)}{x}\Bigg|_0^{+\infty} + \frac{\alpha}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi|\alpha|}{2},$$

где модуль вполне правомерен в силу чётности $\cos(\alpha x)$.

15.3(2)

Интеграл

$$\int_0^\infty \sin x\cos^2 x\frac{dx}{x} = \int_0^{+\infty} \sin(x)\frac{1+\cos(2x)}{2}\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin x\cos 2x}{x}\,dx,$$

где уже хочется подставить $\sin(3x) - \sin(x) = 2\sin(x)\cos(2x)$:

$$\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(3x)}{x}\,dx - \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

15.4(3)

Есть интеграл вида

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(\alpha x)}{x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx..$$

Заметим, что f, f'_α существуют почти всюду по α, $f'_\alpha = \frac{4\sin^3(\alpha x)\cos(\alpha x)}{x}$ мажорируется $10x^2$ при малых x и *не абсолютно* интегрируема при больших по признаку Дирихле, соответственно можем нтегрировать под знаком интеграла

$$I'_\alpha(\alpha) = \int_0^{+\infty} 4\sin^3(\alpha x)\cos(\alpha x)\frac{dx}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x}\left(\frac{1}{4}\sin(2x\alpha) - \frac{1}{8}\sin(4x\alpha)\right) = \frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\alpha,$$

что верно $\forall\alpha$.

Возвращаясь к интегралу, находим, что

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{4}|\alpha| + 0,$$

так как $I(0) = 0$.

Thr 2.8 (интерирование по частям)**.** *Вооообще*

$$\int_a^{+\infty} f(x,\alpha)g'_x(x,\alpha)\,dx = f(x,\alpha)g(x,\alpha)\Big|_a^{\infty} - \int_a^{+\infty} f'_x(x,\alpha)g(x,\alpha)\,dx,$$

работает, когда $f, g \in C^1$ по x и любые два из трёх написанных пределов существуют.

15.5(6)

Вычислим интеграл вида

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sin^3(x)\cos(\alpha x)\frac{dx}{x^3}.$$

Интегрируя по частям

$$\sin^3 x\cos(\alpha x) = \frac{3}{8}\left(\sin(\alpha+1)x - \sin(\alpha-1)x\right) - \frac{1}{8}\left(\sin(\alpha+3)x - \sin(\alpha_3)x\right),$$

для $\alpha > 3$. В общем приходим к выражению

$$\begin{aligned}
I(\alpha) &= \int_0^{+\infty} \sin^3(x)\cos(\alpha x)\frac{dx}{x^3} = \int_0^{\infty} \sin^3 x\cos(\alpha x)\,d\left(\frac{-1}{2x^2}\right) = \\
&= \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\sin^3 x\cos\alpha x\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,d(\sin^3 x\cos\alpha x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(\sin^3(x)\cos(\alpha x)\right)'_x f\left(-\frac{1}{x}\right) = \\
&= -\frac{1}{2x}\left(\sin^3 x\cos(\alpha x)\right)'_x\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,d\left(\sin^3 x\cos\alpha x\right)'_x = \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x}\Bigg(\frac{3}{8}\left[(\alpha+1)^2\sin(\alpha+1)x - (\alpha-1)2\sin(\alpha-1)x\right] - \\
&\qquad \frac{1}{8}\left[(\alpha+3)^2\sin(\alpha+3)x - (\alpha-3)^2\sin(\alpha-3)x\right]\Bigg) = \\
&= -\frac{\pi}{4}\left\{\frac{3}{8}(\alpha+1)^2 - \frac{3}{8}(\alpha-1)^2 - \frac{1}{8}(\alpha+3)^2 + \frac{1}{8}(\alpha-3)^2\right\} = 0
\end{aligned}$$

15.6(3)

С помощью дифференцирования по параметру вычислим

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\sin\lambda x\,dx = \int_0^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx, \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \lambda \neq 0.$$

Для начала проверим, что можем дифференцировать по параметру λ. Действительно $f \in \mathcal{L}(X)$, $f'_\lambda = \left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right)\cos(\lambda x)$ существует, конечна и Лебег-интегрируема ($< e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}$) $\forall\lambda$. Тогда, дифференцируя под знаком интеграла

$$I'_\lambda(\lambda) = \int_0^{+\infty} \left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right)\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\lambda^2} - \frac{\beta}{\beta^2+\lambda^2}.$$

В таком случае $I(\lambda)$

$$I(\lambda) = \int I'_\lambda(\lambda)\, d\lambda = \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda}{\beta}\right) + C = \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda}{\beta}\right),$$

где $C = 0$ так как $I(0) = 0$.

15.6(5)

При выполнении всех условий о дифференцирование интеграла по параметру, для интеграла

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx,$$

может быть так посчитан.

Действительно,

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{1+(\alpha x)^2} = \int_0^1 dx \left[\sqrt{1-x^2}(1+(\alpha x)^2)\right]^{-1} =$$

$$= \Big/ x = \cos t,\ dx = -\sin t\, dt \Big/ = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

Тогда $I(\alpha)$

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} \int \frac{d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} + C = \frac{\pi}{2} \ln\left|\alpha + \sqrt{\alpha^2+1}\right| + C = \frac{\pi}{2} \ln\left(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}\right),$$

где $I(0) = 0$ так что $C = 0$.

15.13(5)

Попробуем через интеграл Эйлера-Пуассона доказать, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+\alpha^2/x^2)}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

Представим интеграл в виде

$$\int_0^1 \exp\left(-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) + \int_1^{+\infty} \left(-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) dx,$$

далее, произведя замену $y = 1/x$ в первом интеграле получаем

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \exp\left(-\alpha^2 y^2 + \frac{1}{y^2 1}\right) \frac{dy}{y^2} + \int_1^{+\infty} \exp\left(-y^2 - \frac{\alpha^2}{y^2}\right) dy.$$

Так как подынтегральные функции f_1 и f_2 сходятся непрерывны при всех α и $1 \leqslant y < +\infty$, а соответствующие интегралы, по признаку Вейерштрасса, сходятся равномерно:

$$|f_1| \leqslant \frac{1}{y^2}, \qquad |f_2| \leqslant e^{-y^2},$$

и интегралы

$$\int_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2}, \qquad \int_1^{+\infty} e^{-y^2}\, dy$$

сходятся, то функция I непрерывна $\forall |\alpha| \in \mathbb{R}$.

Пусть $|\alpha| \geqslant \varepsilon > 0$. Поскольку функции $\partial_\alpha f_1$ и $\partial_\alpha f_2$ непрерывны в области $|\alpha| \geqslant \varepsilon,\ 1 \leqslant y < +\infty$, а соответствующие интегралы от них, в силу мажорантного признака, сходятся равномерно, то функция I' непрерывна при $\alpha \neq 0$. Следовательно

$$I'_\alpha(\alpha) = -2\alpha \int_0^{+\infty} \exp\left(-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) \frac{dx}{x^2}.$$

Кроме того, положив в исходном интеграле $x = \alpha/y$, $y > 0$, можем написать

$$I(\alpha) = \alpha \int_0^{+\infty} \exp\left(-y^2 - \frac{\alpha^2}{y^2}\right) \frac{dy}{y^2}.$$

Сравнивая последние два интеграла, получаем дифференциальное уравнение $I' + 2I = 0$, решая которое, находим

$$I(\alpha) = Ce^{-2\alpha}.$$

В силу непрерывности $I(\alpha)$ находим, что $I(0)=\sqrt{\pi}/2$, откуда $C=\sqrt{\pi}/2$. Окончательно,
$$I(\alpha)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-2|\alpha|\right).$$

Lem 2.9. *Верно представление, вида*
$$\frac{1}{x^2+1}=\int_0^{+\infty}e^{-y(1+x^2)}\,dy.$$

15.15(1, 4)

1) Найдём интеграл, вида
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(\alpha x)}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos(2\alpha x)}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(2\alpha x)}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2|\alpha|}\right).$$
4) Теперь хочется взять интеграл
$$I(\alpha)=\int_0^{\infty}\frac{\sin^2(\alpha x)}{x^2(1+x^2)}\,dx=\int_0^{+\infty}f(x,\alpha)\,dx.$$
Заметим, что $f(x,\alpha)$ Лебег-интегрируема $\forall\alpha\in E$. Рассмотрим
$$f'_\alpha=\frac{\sin 2\alpha x}{x^2(1+x^2)}.$$
для которой верно, что
$$\left|\frac{2\sin 2\alpha x}{x(1+x^2)}\right|\leqslant\left|\frac{1}{1+x^2}\right|,\qquad x<0.1/\alpha,\qquad\qquad \left|\frac{2\sin 2\alpha x}{x(1+x^2)}\right|\leqslant\left|\frac{2}{x^3}\right|,\qquad x>1,$$
соответственно, f'_α Лебег-интегрируема. Тогда верно, что
$$I'_\alpha(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2\alpha x}{x(1+x^2)}\,dx.$$
Дифференцируем дальше, по крайней мере хотим, для этого необходимо, чтобы f'_α и $f''_{\alpha,\alpha}$ были бы Лебег-интегрируемы и существуют $\forall\alpha$, что верно. Тогда
$$\frac{d^2I(\alpha)}{d\alpha^2}=2\int_0^{+\infty}\frac{\cos(2\alpha x)}{1+x^2}\,dx=2\frac{\pi}{2}e^{-2|\alpha|}.$$
Последний интеграл уже берется:
$$I''(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{2\cos 2\alpha x}{1+x^2}\,dx=2\frac{\pi}{2}e^{-2\alpha}.$$
Отсюда находим
$$I'_\alpha(\alpha)=-\frac{\pi}{2}e^{-2\alpha}+C_1=-\frac{\pi}{2}e^{-2\alpha}+\frac{\pi}{2},$$
и, наконец, находим
$$I(\alpha)=\frac{\pi}{4}e^{-2\alpha}+\frac{\pi}{2}\alpha+C_2,\qquad\Rightarrow\qquad I(\alpha)=\frac{\pi}{4}\left(e^{-2\alpha}+2\alpha-1\right),\qquad \alpha>0.$$

3 Интеграл Фурье и преобразование Фурье

Введём прямое и обратное преобразование Фурье:
$$f(x)\mapsto\hat{f}(y)=F[f](y)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iyt}\,dt,\tag{3.1}$$
$$f(y)\mapsto\check{f}(x)=F^{-1}[f](x)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{ixt}\,dt.\tag{3.2}$$
Далее выпишем некоторые свойства преобразования Фурье.

Фомула обращения. Если непрерывная функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$ и имеет в каждой точке $x\in\mathbb{R}$ конечные односторонние производные, то
$$F^{-1}[F[f]]=F[F^{-1}[f]]=f.$$

Непрерывность. Если функция f абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то её преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ – непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}$ функция, для которой верно
$$\lim_{y\to+\infty}\hat{f}(y)=\lim_{y\to-\infty}\hat{f}(y)=0.$$

Преобразования Фурье производной. Если функция f и её производные до n-го порядка включительно непрерывны и абсолтно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то

$$F[f^{(k)}] = (iy)^k F[f], \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Производная преобразования Фурье. Если функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, а функции $f(x), xf(x), \ldots, x^n f(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, то функция $\hat{f}(y) = F[f](y)$ имеет на $\mathbb{R}$ производные до n-го порядка включительное, причем

$$\hat{f}^{(k)}(y) = (-i)^k F[x^k f(x)], \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Также полезно определить *интеграл Фурье*, как интеграл вида

$$f(x) \sim F^{-1}[F[f]](x) = v.p.\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\, dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ty}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} c(y) e^{ixy}\, dy,$$

где

$$c(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iyt}\, dt.$$

Иначе, через тригонометрические функции

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(y) \cos(yx)\, dx + \int_0^{+\infty} b(y) \sin(yx)\, dx,$$

где

$$a(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(yt)\, dt, \qquad b(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(yt)\, dt.$$

3.1 К. III, §17

17.1(4)

Представим функцию $f(x)$ интегралом Фурье, если $f(x)$ вида

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, \qquad a \neq 0.$$

Заметим, что $b(y) = 0$, а $a(y)$

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(yt)}{t^2 + a^2}\, dt = \Big/ t = ax \Big/ \frac{2}{\pi a} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ayx)}{1 + x^2} = \frac{2}{\pi a} \frac{\pi}{2} e^{-ya},$$

таким образом находим представление в виде интеграла Фурье

$$f(x) = \frac{1}{|a|} \int_0^{+\infty} e^{-y|a|} \cos(xy)\, dy.$$

17.2(3)

Представим функцию $f(x)$ интегралом Фурье, если $f(x)$ вида

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & |x| \leqslant \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Для начала заметим, что $b(y) = 0$, а $a(y)$

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dt f(t) \cos(yt) = \frac{2}{\pi} \begin{cases} \cos(\pi y/2), & y \neq 1 \\ \pi/4, & y = 1 \end{cases}$$

В таком случае можем сопоставить функции её интеграл Фурье

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\pi y/2)}{y^2 - 1} \cos(xy)\, dy.$$

17.6(2)

Представим интегралом Фурье функцию $f(x)$, продолжив её чётным образом на $(-\infty, 0)$, если

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ -, & |X| > 1. \end{cases}$$

Функция является кусочно-гладкой и абсолютно интегрируемой на $(-\infty, \infty)$, следовательно, её можно представить интегралом Фурье, в силу четности $b(\lambda) = 0$, а $a(\lambda)$

$$a(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos\lambda x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin\lambda}{\lambda}.$$

Таким образом находим представление:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\cos(\omega x)\,d\omega, \qquad |x| \neq 1.$$

В точках же $x = \pm 1$, интеграл Фурье равен $1/2$.

17.7(4)

Теперь найдём преобразование Фурье у аналогичной функции:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leqslant \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

Преобразование Фурье найдём, как интеграл вида

$$F[f](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)(-i)\sin(yt)\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = 2\int_0^{\pi} \sin t\sin(yt)(-i)\frac{dt}{\sqrt{2\pi}},$$

который уже легко считается

$$F[f](y) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\begin{cases} \dfrac{\sin(\pi y)}{1-y^2}, & y \neq \pm 1, \\ \dfrac{\pi}{2}, & y = \pm 1. \end{cases}$$

17.8(2, 4)

2) Найдём преобразование Фурье функции

$$f(x) = e^{-x^2/2}.$$

Преобразование Фурье найдём, как интеграл вида

$$F[f](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}e^{-ity}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = \Big/ t/\sqrt{2} = x \Big/ = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(\sqrt{2}yx)\,dx =$$
$$= e^{-y^2/2},$$

где мы воспользовались свойством

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos(2\alpha x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha^2}.$$

6) Найдём преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{d^2}{dx^2}(xe^{-|x|}).$$

Преобразование Фурье найдём, как интеграл вида

$$F[f](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2}{dt^2}(te^{-|t|})e^{-iyt}\frac{dt}{d\sqrt{2\pi}} = y^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\frac{\partial}{\partial(iy)}e^{-iyt}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} =$$
$$= -iy^2\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\cos(yt)\,dt = i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{y^2}{(1+y^2)^2}.$$

17.14

Рассмотрим преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ функции $f(x) = 1/(1+|x|^5)$.

1) Рассмотрим третью производную

$$\partial_y^3 F[f](y) = (-i)^3 F[t^3 f](y) = (-i)^3\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3}{1+|t|^5}e^{-iyt}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \overset{\text{def}}{=} \Psi(y).$$

Заметим, что

$$|\Psi(y)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|^3}{1+|t|^5}\cdot 1\cdot\frac{dt}{\sqrt{2\pi}} < +\infty,$$

по признаку Вейерштрассе.

2) Заметим, что $y^5O(y^{-5}) = O(1)$, а также $(iy)^5F[f](y) = O(1)$ в окрестности больших y. Если $\exists C\colon \overset{\circ}{U}(x_0)\colon |f(x)/g(x)| \leqslant C$, то говорят, что $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$. Верно, что

$$\varphi(y) = (iy)^5F[f](y) = F[f^{(5)}](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\partial^5 f(t)}{\partial t^5}\right) e^{-iyt}.$$

Тогда верна оценка

$$|\varphi(y)| = |y|^5|F[f](y)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \left|\frac{\partial^5 f(t)}{\partial t^5}\right| \equiv C < +\infty.$$

Более того

$$|F[f](y) \leqslant \frac{X}{|y|^5}, \qquad \Rightarrow \qquad F[f](y) = O\left(\frac{1}{y^5}\right).$$

3) Наконец получим оценку для больших y:

$$|\varphi(y)| = |y|^5\Big|F[f](y)\Big| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial^5 f(t)}{\partial t^5} e^{-iyt}\right|.$$

Так приходим к оценке

$$\Big|F[f](y)\Big| = \frac{1}{|y|^5}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial^5 f(t)}{\partial t^5} e^{-iyt}\right| = \frac{K(y)}{|y|^5},$$

где $C(y)$ бесконечно малое при $y \to \infty$ по лемме Лебега-Римана, или лемме об осцилляции.

Lem 3.1 (лемма Римана-Лебега). *Если $f(x)$ такая, что $\int_{\mathbb{R}} |f| < +\infty$, то $\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ipx} \to 0$ при $p \to \infty$.*

17.17(2)

Найдём $\varphi(y)$, если

$$\int_0^{+\infty} \varphi(y)\sin(xy)\,dy = e^{-x}, \qquad x > 0.$$

Через обратное преобразование Фурье:

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \left(\cos(xy)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\pi}\varphi(t)\cos(yt) + \sin(xy)2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\pi}\varphi(t)\sin(yt)\right) dy,$$

тогда

$$\varphi(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} dye^{-y}\sin(xy) = \frac{2}{\pi}\frac{x}{1+x^2}, \qquad x > 0.$$

3.2 T4

Докажем, что функции вида $P(x)e^{-x^2/2}$, где $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, при преобразовании Фурье переходти в функцию того же вида, причём степень многочлена не повышается.

Действительно,

$$F[f](y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} P_\alpha(t)e^{-t^2/2}e^{-iyt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}P_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial(-iy)}e^{-yt}\right) =$$
$$= P_\alpha\left(i\frac{\partial}{\partial y}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}e^{-iyt} \overset{17.8(2)}{=} P_\alpha\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)e^{-y^2/2}.$$

Осталось показать, что степень многочлена не увеличилась, для этого достаточно рассмотреть

$$F[f](y) = p_\alpha\cdot\left(i\frac{\partial}{\partial y}\right)^n e^{-y^2/2} + P_{\alpha-1}\left(i\frac{\partial}{\partial y}\right)e^{-y^2/2} = p_\alpha i^\alpha(-y)^\alpha e^{-y^2/2} + Q_{\alpha-1}(y)e^{-y^2/2} + P_{\alpha-1}\left(i\frac{\partial}{\partial y}\right)e^{-y^2/2},$$

поэтому степень не повышается.

3.3 T5

Вычислим интегралы Лапласа с помощью образения преобразования Фурье:

$$I(y) = \int_0^{+\infty} dx\frac{\cos(yx)}{1+x^2}, \qquad K(y) = \int_0^{+\infty} dx\frac{x\sin(yx)}{1+x^2}.$$

В частности рассмотрим функцию $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, где $\alpha > 0$, тогда

$$F[f](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}, \qquad F^{-1}[g](x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}g(y)e^{ixy}.$$

Теперь воспользуемся формулой образения, и найдём

$$f(x) = F^{-1}\left[F[f]\right](x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} dy\frac{\alpha\cos(2y)}{\alpha^2+y^2} = e^{-\alpha|x|}, \quad \alpha > 0.$$

Соответственно, при $\alpha = 1$, найдём

$$\int_0^{+\infty} dy\frac{\cos(xy)}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}.$$

Аналогично находим $K(\alpha)$, а именно $F[f'](y) = iyF[f](y)$

$$F^{-1}[F[f']](x) = f'(x) = F^{-1}\left[iyF[f]\right](x) = 2\int_0^{+\infty}\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}i\sin(xy)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha iy}{\alpha^2+y^2} = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} dy\frac{\alpha y\sin(xy)}{\alpha^2+y^2} = -\alpha\operatorname{sign}x e^{-\alpha|x|},$$

что при $\alpha = 1$ перейдёт в интеграл вида

$$\int_0^{+\infty}\frac{y\sin(xy)}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(x)e^{-|x|}.$$

3.4 T6

Пусть $f \in S(\mathbb{R})$, $\forall x_0, y_0 \in \mathbb{R}$:

$$\|(x-x_0)f(x)\|_2 \cdot \|(y-y_0)\hat{f}(y)\| \geqslant \frac{1}{2}\|\hat{f}\|_2^2.$$

Для начала рассмотрим $(y-y_0)\hat{f}(y)$. Сделаем замену $t = y - y_0$, тогда

$$(y-y_0)\hat{f}(y) = t\hat{f}(y_0+t),$$

раскрывая, находим

$$\hat{f}(y_0+t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+y_0)e^{-iyt}\,dt = e^{iy_0t}F[f](y).$$

Построим следующую цепочку равенств

$$\|(y-y_0)\hat{f}(y)\|_2 = \|f\hat{f}(y_0+t)\| = \|te^{iy_0t}\hat{f}(t)\|_2.$$

Также заметим, что такое преобразование сохраняет норму (что логично):

$$\|ge^{iy_0t}\|_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} ge^{iy_0t}\cdot\overline{ge^{iy_0t}}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g\bar{g}\,dt = \|g\|_2.$$

Тогда

$$\|te^{iy_0t}\hat{f}(t)\|_2 = \|t\hat{f}(t)\|_2 = \|\hat{f}'(t)\|_2.$$

Теперь, воспользовавшись унитарностью преобразования Фурье, найдём

$$\|\hat{f}'(t)\|_2 = \|f'(t)\|_2.$$

Наконец, можем свести изначальное утверждение к неравенству

$$\|xf(x)\|_2 \cdot \|f'(x)\|_2 \geqslant \frac{1}{2}\|f\|_2^2,$$

которое уже можем доказать по неравенству Коши-Буняковского

$$\int_{\mathbb{R}}(xf(x))^2\,dx\int_{\mathbb{R}}(f')^2\,dx \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}} xf(x)f'(x)\,dx\right)^2 = \left(-xf^2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f^2(x)\,dx\right)^2 = \frac{1}{4}\|f\|_2^4, \quad \text{Q. E. D.}$$

где равенство нулю на границах обусловлено принадлежности пространству Шварца.

3.5 T7

Найдём преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} x^{p-1}e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

при $p > 0$.

Для начала рассмотрим

$$\frac{d\hat{f}}{dx} = -iF[f\cdot x] = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x^p e^{-x-ixy}\,dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{xpe^{-x(1+iy)}}{-1-iy}\Bigg|_0^{+\infty}\right) - \frac{ip}{\sqrt{2\pi}}\int x^{p-1}\frac{e^{-x-ixy}}{-1+iy}\,dx = \frac{-ip\hat{f}(y)}{1+iy},$$

что даёт нам некоторое дифференциальное уравнение на $\hat{f}$ вида

$$\frac{d\hat{f}}{\hat{f}} = \frac{(-ip)\,dy}{1+iy}, \qquad \Rightarrow \qquad \hat{f}(y) = C(1+iy)^{-p}.$$

Осталось найти константу интегрирования, при $y=0$:

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} x^p e^{-x}\,dx = \frac{\Gamma(p)}{\sqrt{2\pi}},$$

откуда находим

$$\hat{f}(y) = \frac{\Gamma(p)}{\sqrt{2\pi}}(1+iy)^{-p}.$$

3.6 T8

Пусть фунция $f\in L_1(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на всей прямой. Докажем, что свёртка

$$f*\ldots*f$$

$k+2$ раза будет k раз непрерывно дифференцируема.

Рассмотрим

$$\hat{h}(y) = (2\pi)^{-k/2-1}(\hat{f}(y))^{k+2}.$$

Если $f\in L_1(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, то

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx,$$

будет равным $O(1/y)$ при $y\to\infty$. Тогда $\hat{h}(y) = O(y^{-k-2})$ при больших y.

Теперь рассмотрим

$$F^{-1}[h](y)\colon\ \frac{d}{dy}F^{-1}[h](y) = F[(-it)h(t)](y),$$

также верно, что

$$(F^i)^{(k)} = F[(-it)^k h[t]](y) \to \int_{-\infty}^{+\infty} O\left(\frac{1}{y^2}\right)e^{iyt}\,dt.$$

Вспомним, что $I(\alpha) = \int f(x,\alpha)\,dx$ непрерывен при f непрерывной, и $I(\alpha)$ сходящемуся равномерно по α:

$$|f(x)| = O(g(x)),$$

когда найдётся κ такая, что

$$|f(x)|\leqslant \kappa|g(x)|, \qquad \Rightarrow \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} O\left(\frac{1}{y^2}\right)e^{iyt}\,dt \leqslant \kappa\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{y^2}e^{iyt}\,dt = \frac{-i\kappa e^{iyt}}{y^3} \leqslant \frac{\kappa}{y^3},$$

следовательно сходится равномерно по признаку Вейерштрассе, а значит и k-я производная существует и непрерывна.

3.7 T9

Найдём преобразование Фурье функции $f\colon\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ вида $f(x) = e^{-A(x)}$, где $A(x)$ – положительно определенная квадратичная форма.

Во-первых

$$A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}A_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta.$$

Тогда преобразование Фурье можно найти, как интеграл, вида

$$F[f](\boldsymbol{y}) = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{d^n t}{(2\pi)^{n/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}A_{\alpha\beta}t^\alpha t^\beta - iy_\alpha t^\alpha\right) = \frac{1}{\sqrt{\det A}}\exp\left(-\frac{1}{2}(A^{-1})_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta\right) \equiv \frac{\exp(-A^{-1}(\boldsymbol{y}))}{\sqrt{\det A}}. \tag{3.3}$$

Докажем эту замечательную формулу.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{2}(O\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}A(O\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}O^{\mathrm{T}}AO\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}D\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\sum_\alpha\left(\sqrt{\lambda_\alpha}x^\alpha\right)\left(\sqrt{\lambda_\alpha}x_\alpha\right) = \frac{1}{2}z^\alpha z_\alpha.$$

Дифференциал можем переписать в виде
$$d^n t = \left|\frac{\partial(t_1,\ldots,t_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} d^n x\right| = |\det O| d^n x = \frac{d^n z}{\sqrt{\det A}}.$$
Также можем рассмотреть скалярное произведение:
$$(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{t}) = (O^{\mathrm{T}})_{\alpha\beta} y^\alpha x^\beta = \sum_\beta \frac{1}{\sqrt{\lambda_b}} O_{\beta\alpha} y^\alpha z^\beta = k_\beta z^\beta.$$
Итого наш первоначальный интеграл сводится к
$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n z}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det A}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{z}) - i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{z})\right) = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \prod_{\alpha=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz^\alpha}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z^\alpha)^2 - ik_\alpha z^\alpha\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\det A}} \prod_{\alpha=1}^n \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\right) = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \prod_{\alpha=1}^n e^{-A^{-1}(y)},$$
где воспользовались равенством
$$k_\alpha k^\alpha = \sum_\alpha \frac{1}{\lambda_\alpha} O_{\beta\alpha} (O^{\mathrm{T}})^{\alpha\gamma} y^\beta y_\gamma = (A^{-1})^\gamma_\beta y^b y)\gamma = 2A^{-1}(\boldsymbol{y}),$$
что в итоге доказывает написанную формулу
$$\boxed{F\left[e^{-A(x)}\right](\boldsymbol{y}) = \frac{\exp(-A^{-1}(\boldsymbol{y}))}{\sqrt{\det A}}}.$$

4 Третье задание по математическому анализу

14.8(2)

Рассмотрим интеграл с подвижной особенностью. В частности есть $c(\alpha) \in [a,b]$:
$$I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \left(\int_a^{c(\alpha)} + \int_{c(\alpha)}^b\right) f(x,\alpha)\,dx.$$
В частности опишем ситуации, когда функция неограничена на нижнем и верхнем пределе:
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\alpha_1(\varepsilon) \geqslant a\ \forall\xi_1 > \alpha_1(\varepsilon)\ \forall\varepsilon \in E\ \left|\int_{\xi_1}^{c(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Аналогично для нижнего предела
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\alpha_2(\varepsilon) \leqslant b\ \forall\xi_2 > \alpha_2(\varepsilon)\ \forall\varepsilon \in E\ \left|\int_{c(\alpha)}^{\xi_2} f(x,\alpha)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Если взять Δ большое правильным образом, то приходим к определению вида
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\Delta(\varepsilon) > 0\ \forall\delta_1 \in (0,\Delta(\varepsilon))\ \forall\delta_2 \in (0,\Delta(\varepsilon))\ \forall\alpha \in E\ \left|\int_{c(\alpha)-\delta_1}^{c(\alpha)+\delta_2} f(x,\alpha)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Теперь можем перейти к примеру:
$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin(\alpha x)}{\sqrt{|x-\alpha|}}\,dx,$$
тогда, по определению,
$$\left|\int_{\alpha-\delta_1}^{\alpha+\delta_2} \frac{\sin(\alpha x)\,dx}{\sqrt{|x-\alpha|}}\right| \leqslant \int_{\alpha-\delta_1}^{\alpha+\delta_2} \frac{dx}{\sqrt{|x-\alpha|}} = \int_{\alpha-\delta_1}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{|x-\alpha|}} + \int_\alpha^{\alpha+\delta_2} \frac{dx}{\sqrt{|x-\alpha|}} = 2\sqrt{\delta_1} + 2\sqrt{\delta_2} < 4\Delta(\varepsilon),$$
в таком случае достаточно взять $\Delta(\varepsilon) = \varepsilon^2/16$.

4.1 Сходимость и полнота систем функций в пространствах C и L_p

Можно построить следующую систему вложений: топологические пространства $\supset$ метрические пространства $\supset$ нормированные пространства $\supset$ предгильбертовы пространства.

Def 4.1. *Банахово пространство* – полное нормированое пространство.

Def 4.2. *Гильбертово пространство* – банахово пространство, с нормой, порожденной положительно определенным скалярным произведением $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Def 4.3. *Гильбертово пространство* – ~~полное~~ нормированое пространство, с нормой, порожденной положительно определенным скалярным произведением $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Приведем некоторые примеры: пространство непрерывных функций $C[a,b]$ с нормой $\|\cdot\|_C = \|\cdot\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]}|x(t)|$. Пространство L_p. Пространство C_p, совпадающее с $C[a,b]$, но с нормой $\|\cdot\|_2$ – предгильбертово, кстати.

T1

Построим табличку сходимостей. Для начала вспомним, что если $\mu(A) < +\infty$ и $1 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant +\infty$, то
$$\|\cdot\|_{p_1} \leqslant C(\mu(A), p_1, p_2)\|\cdot\|_{p_2}, \qquad C(\ldots) = (\mu(A))^{\frac{p_2-p_1}{p_1p_2}}.$$
В частности, можно перейти к пределу, и обнаружить, что
$$\|\cdot\|_1 \leqslant C(\ldots)\|\cdot\|_\infty, \qquad \|\cdot\|_\infty = \lim_{p\to\infty}\|\cdot\|_p \equiv \|\cdot\|_C.$$
Таким образом из сходимости L_2 следует сходимость в L_1.

Ещё раз напишем, что значит сходимость по норме:
$$f_n \underset{L_p}{\to} f \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N_\varepsilon\ \|f_n - f\|_p < \varepsilon.$$
Тогда рассмотрим
$$\|f_n - f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\|f_n - f\| < \varepsilon, \qquad \square.$$
Теперь докажем $f_n \underset{C}{\to} f \ \Rightarrow\ f_n \underset{L_2}{\to} f$, где сходимость по C-норме:
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N_\varepsilon\ \forall x \in A\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$
Ну, действительно,
$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_A |f_n - f|^2(x)\mu(\,dx) \leqslant \int_A \left\{\sup_{x\in A}|f_n - f|(x)\right\}^2\mu(\,dx) = \left\{\sup_{x\in A}|f_n - f|(x)\right\}^2\mu(A),$$
где множитель перед $\mu(A)$ стремится к 0 при $n \to \infty$, $\quad\square$.

Также стоит вспомнить, что из равномерной сходимости следует поточечная сходимость. По определению, поточечная сходимость:
$$\forall x \in A\ \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\xi,\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ |f_n - f|(x) < \varepsilon.$$
Получается, что достаточно взять $N(x,\varepsilon) = N(\varepsilon)$ и получить искомое утверждение.

В качетсве контрпримера рассмотрим $f_n(x) = n\operatorname{arcctg}(n/x^2)$ с $A = [1,_\infty)$. По отрицанию условия Коши, если
$$\exists\varepsilon_0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant k\ \exists p \in \mathbb{N}\ \exists\tilde{x} \in A\colon\ |f_{n+p} - f_n|(\tilde{x}) \geqslant \varepsilon_0,$$
то последовательность f_n не явдяется равномерно сходящейся. Действительно, при $n = k$, $p = 2k - 2n$, $\tilde{x} = \sqrt{k} = \sqrt{n}$, верно, что
$$|f_{n+p} - f_n|(\tilde{x}) = n|2\operatorname{arctg}2 - \operatorname{arctg}1| \geqslant |2\operatorname{arctg}2 - \pi/4| = \varepsilon_0 > 0,$$
что говорит об отсутсвие равномерной сходимости. При этом $f_n \to x^2$ поточечно на $x \in E$.

Контрпримеры. Покажем, что $f_n \underset{L_1}{\to} f \not\Rightarrow f_n \underset{L_2}{\to} f$. Прямую мы умеем строить по двум точкам
$$\frac{f - f_0}{f_1 - f_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$
Построим последовательность функций вида
$$\frac{f_n - c_n}{0 - c_n} = \frac{x - 0}{x_n - 0}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} c_n(1 - \frac{x}{x_n}), & x \in [0, x_n), \\ 0, & x \in [x_n, 1]. \end{cases}$$
Контропримеры строим на отрезке $[0,1]$. Выберем последоательность сходящуюся к 0 в L_1 норме:
$$\|f_n - 0\|_1 = \int_0^{x_n}\left|c_n\left(1 - \tfrac{x}{x_n}\right)\right|\mu(\,dx) = \frac{1}{2}c_nx_n, \qquad \|f_n - 0\|_2^2 = \frac{1}{3}c_n^2x_n, \qquad \Rightarrow \qquad \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}c_n\sqrt{x_n}.$$
Пусть $c_nx_n = \alpha_n$ – бесконечно малая последовательность. Выберем $x_n = 1/n$, тогда $c_n = n\alpha_n$.

Для $\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\alpha_n}{\sqrt{x_n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{n}\alpha_n$, что устремим к ∞, выбрав
$$\alpha_n = \frac{1}{n^{1/2-\xi}}, \qquad \xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \qquad \square.$$

Эту историю можно обобщить до отсутсвия следствия в $\|f_n\|_p = c_n x_n^{1/p}(1+p)^{-1/p}$. Тогда можем взять $\alpha_n = \left(n^{1-1/p-\xi}\right)^{-1}$, для $\xi \in (0, 1-1/p)$.

Теперь покажем, что $f_n \underset{L_2}{\to} f \not\Rightarrow f_n \underset{C}{\to} f$. Пусть $f_n \to 0$ в L_2 норме. Пусть

$$\|f_n - 0\|_2 = \|f_n\| = \frac{c_n}{\sqrt{3}} x_n = \alpha_n, \qquad x_n = \frac{1}{n}.$$

Пусть f_n вида

$$f_n(x) = \{\sqrt{3}\alpha_n \sqrt{n}(1-nx), \quad x \in [0, 1/n)0, \quad x \in (1/n, 1].$$

В таком случае

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n - 0|(x) = \sup_{x\in[0,1/n]} |\sqrt{3}\alpha_n\sqrt{n}(1-nx)| = \sqrt{3}\alpha_n\sqrt{n} \not\to 0, \qquad \alpha_n = \frac{1}{n^{1/2-\xi}}, \qquad \xi \in [0, 1/2),$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь есть поточечная сходимость но нет сходимости в L_1. Построим пилу, вида

$$f_n(x) = \begin{cases} c_n \frac{x_{1,n}-x}{x_{1,n}-x_n}, & x \in (x_{1,n}, x_n], \\ c_n \frac{x_{2,n}-x}{x_{2,n}-x_n}, & x \in [x_n, x_{2,n}), \\ 0, & x \in [0, x_{1,n}] \cup [x_{2,n}, 1]. \end{cases}$$

В этой задаче достаточно считать $x_{1,n} = 1/(n+1)$, а $x_{2,n} = 1/n$, тогда

$$\|f_n\|_1 = c_n \frac{x_{2,n} - x_{1,n}}{2} = \frac{c_n}{2} \frac{1}{(n+1)n} \to \infty.$$

Чтобы это сделать, достаточно выбрать $c_n = n^{2+\xi}$. Однак поточечно такой зуб пилы сходится к 0. Действительно, при $x = 0$ $f_n(0) = 0$. Для остальных x можно показать, что по определению $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

T2

Приведем пример, когда последовательность функция (f_n) сходится в пространстве $L_1[a,b]$, но для любого $x \in [a,b]$ последовательность чисел $f_n(x)$ расходится.

Из сходимости в L_1 следует сходимость по мере, так что можем воспользоваться *примером Рисса*. Пусть $f_n \underset{L_2}{\to} f \equiv 0$. Рассмотрим конструкцию вида

$$\varphi_{m,k}(x) = \xi\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right](x), \qquad m \in \mathbb{N}_0,$$

где $k = 0, 1 \ldots, 2^m - 1$. Утверждается, что $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists! m, k\ :\ n = 2^m + k$. Таким нетривиальным образом мы (точнее Рисс) решили дробить ступеньку. Верно, что

$$\|f_n - 0\|_1 = \int_{k/2^m}^{(k+1)/2^m} \varphi_{m,k}(x)\,dx = \frac{1}{2^m} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Однако, для $\forall x \in [0,1]$ существует бесконечное число сленов последовательности равных 0 и 1. Таким образом поточечно последовательнсоть расходится.

T3

Докажем, что естественное отображение $C[a,b] \to L_1[a,b]$ не сюръективно, не забывая, что элементы L_1 – это не функции, а классы эквивалентности.

Достаточно выбрать функцию, вида

$$f(x) = \operatorname{sign} x,$$

которую *нельзя* изменить на множестве нулевой меры, чтобы сделать её непрерывной.

T4

Выясним полноты некоторых систем функций в пространстве $L_2[0, \pi/2]$. Начём с

$$\{f_n(x) = \sin[(2n-1)x]\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Def 4.4. Пусть X – нормированное пространство. Система $S = \{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ называется *полной*, если $\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0$ $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{A}$, а также $\exists f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n} \in S$ такие, что $\|x - (\alpha_1 f_{\alpha_1} + \ldots + \alpha_n f_{\alpha_n})\|_X < \varepsilon$.

Стоит подчеркнуть, что это не определение базиса, так как $\alpha \equiv \alpha(\varepsilon)$. Это определение слабее базиса, это – приближение.

Если мы возьмём $L_2[-\pi, \pi]$, и систему вида $\{1, \sin(nx), \cos(nx)\}_{n \in \mathbb{N}}$, то она будет полна, более того будет являться базисом. В рамках задачи мы интересуемся промежутком $[0, \pi/2]$.

Более того, такая система полна в $\overset{\circ}{C}[-\pi, \pi]$, $(f(-\pi) = f(\pi))$, чем мы потом воспользуемся в T5.

В смысле L_2 мы можем приближать, игнорируя счётное число точек:

$$\|f - \tau_n\|_2^2 = \int_0^{\pi/2} |f - \tau_n|(x) \mu(\,dx).$$

Достраивая функцию специфичным образом на отрезок $[-\pi, \pi]$ (u, d, u, d), пользуемся знанием о полноте тригонометрической системы и приходим к полной системе.

Для понимания продолжения функции с отрезка $[0, \pi/2]$, на $[-\pi, \pi]$, достаточно построить функции, образующие системы (рис. 1). И, аналогично, для $k = 2$ (рис. 2).

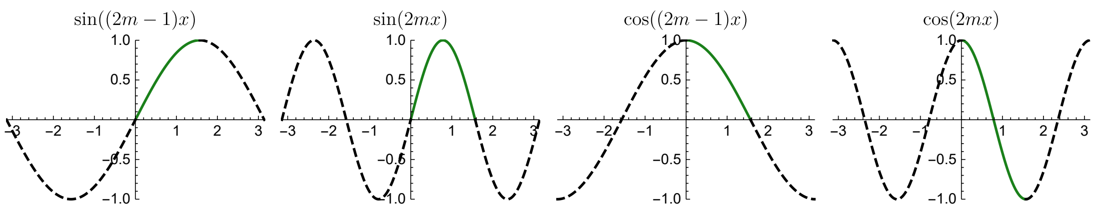

Рис. 1: Графики функция при $m = 1$ для T4

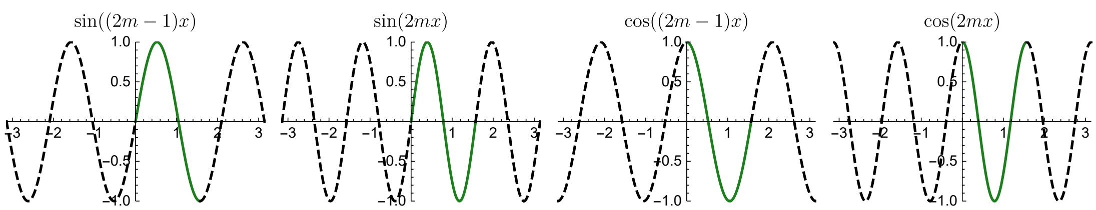

Рис. 2: Графики функция при $m = 2$ для T4

T5

Аналогично T4, рассмотрим полноту систем некоторых функция в пространстве $C[0, \pi/2]$. В частности покажем, что $\exists \tilde{x} \in C[0, \pi/2]$ и $\exists \varepsilon_0\ \forall \tau_n$. Все синусы упираются в 0, выберем $\tilde{x}(t) = 1$, тогда

$$\|\tilde{x} - \tau_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, \pi/2]} |\tilde{x}(t) - \tau_n(t)| \geqslant |\tilde{x} - \tau_n| = |\tilde{x} - \tau_n|(0) = |1 - 0| = \varepsilon_0.$$

Получается, что ломаются все синусы и косинусы с «нечётными дугами» (достаточно взять $t = \frac{\pi}{2}$), что явно видно по построению.

Итого, единственная хорошая система, – $\cos(2k\,x)$.

T6. Функции Эрмита

Приведем пример счетной системы фукций, полной в $L_2(\mathbb{R})$. В частности, воспользуемся функциями Эрмита:

$$\varphi_n(t) = c_n H_n(t) e^{-\frac{1}{2}t^2}, \qquad H_n(t) = e^{\frac{1}{2}t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

Утверждается, что это базис $L_2(\mathbb{R})$, докажем это.

Есть система функций

$$\mathcal{L} = \{\varphi_n(t)\} = \{\rho(t) e^{-\frac{1}{2}t^2},\ \rho \in \mathcal{P}\}.$$

Так как L_2 – гильбертово пространство, то достаточно проверить замкнутость системы, то есть показать, что $\mathcal{L}^\perp = \{0\}$. По определению:

$$f \in \mathcal{L}^\perp, \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\mathbb{R}} f(t) t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим преобразование Фурье:

$$F\left[f(t)e^{-\frac{1}{2}t^2}\right](y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} f(t)e^{-\frac{1}{2}t^2}, e^{-iyt} = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} f(t)e^{-\frac{1}{2}t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iyt)^n}{n!} =$$

$$\overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iy)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} f(t) \underbrace{t^n e^{-\frac{1}{2}t^2}}_{=0 \text{ по условию}} = 0,$$

таким образом мы выяснили, что Фурье функции $\equiv 0$.

Далее воспользуемся тем, что $f(t)e^{-\frac{1}{2}t^2} \in L_2(\mathbb{R})$, а значит работает равенство Парсеваля:

$$\int_{\mathbb{R}} \left|f(t)e^{-\frac{1}{2}t^2}\right|^2 \frac{dt}{2\pi} = \int_{\mathbb{R}} \left|F[\ldots](y)\right|^2 dy = 0, \quad \Rightarrow \quad f(t)e^{-\frac{1}{2}t^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad f(t) = 0,$$

по крайней мере кроме множества меры нуль. Таким образом функции эрмита составляют базис в L_2.

T7

Возьмём функцию, которая лежит в L_2, но не лежит в $\mathring{C}[-\pi, \pi]$, например, ограничение $\operatorname{sign} x$. И рассмотрим подпространство $V \subset \mathring{C}[-\pi, \pi]$, заданное ортогональностью к ней, то есть заданное формулой

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\, dx = \int_{0}^{\pi} f(x)\, dx.$$

Это V есть замкнутое подпространство в $\mathring{C}[-\pi, \pi]$ и в нём можно выбрать какую-то полную систему, и даже её ортогонализовать. Если начать с тригонометрической системы, то косинусы и чётные синусы и так лежат в V, нечётные синусы надо будет подправить, скомбинировав их с $\sin x$, а потом ещё ортогонализовать (что может быть неприятно).

В итоге, система не может быть полна в $\mathring{C}[-\pi, \pi]$, так как её линейные комбинации не выходят за пределы V. А что касается замкнутости, то переходя в гильбертово L_2 видно, что ортогональное дополнение к замыканию образа V в гильбертовом пространстве одномерно и натянуто на этот вот $\operatorname{sign} x$, который разрывен и не лежит в образе $\mathring{C}[-\pi, \pi]$. Так что замкнутость в терминах $\mathring{C}[-\pi, \pi]$ есть.

4.2 Банаховы пространства и их двойственные

T8

Здесь, и далее $p(x) = \|x\|$, $q(x) = \|x\|'$. Нормы *эквивалентны*, если

$$\exists m, M \;:\; mp(x) \leqslant q(x) \leqslant Mp(x) \;\; \forall x.$$

Так вот, всегда есть $\{e_k\}_{k=1}^n$ базис Гамиля, такой что $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$, где естественно ввести норму вида

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Пусть $q(x)$ – ещё одна норма на X, в качестве мажоранты выберем $M = \max\limits_{i=1,\ldots,n} q(e_i)$. Теперь можем оценить сумму сверху:

$$q(x) = q\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| q(e_k) \leqslant M \cdot p(x).$$

И оценить снизу:

$$|q(x) - q(y)| \leqslant q(x-y) \leqslant M \cdot p(x-y),$$

вообще это значит, что q – липшецев функционал, – непрерывный функционал на X с нормой p, а тогда и $q(x)$ непрерывный функционал X с нормой $p(x)$.

Lem 4.5. *Шары в пространстве компактны тогда, и только тогда, когда* $\dim X < +\infty$.

Рассмотрим сферу $S = \{x \in X \mid p(x) = 1\}$ – компакт. Но мы знаем, что непрерывный функционал на компакте достигает своего миниимума:

$$\min_{x \in S} q(x) = \min_{p(x)=1} q(x) = m > 0.$$

Тогда на сфере S верно, что $q(x) \geqslant m$. Тогда в X $q(x) \geqslant m \cdot p(x)$. Действительно,

$$q(tx) = |t| q(x), \quad p(tx) = |t|\, p(x), \qquad \Rightarrow \qquad q(tx) = \frac{p(tx)}{p(x)} q(x) \geqslant m\, p(tx).$$

Собственно, $mp(x) \leqslant q(x) \leqslant M \cdot p(x)$, $Q.E.D.$

T9. Пространство c

Пространство состоит из некоторых бесконечномерных «векторов» (последовательностей):

$$x = \big(x(1), x(2), \ldots, x(k), \ldots\big), \qquad \left|\lim_{k\to\infty} x(k)\right| < +\infty.$$

Норма определена, как

$$p(x) = \|x\|_c = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)| = \|x\|_\infty.$$

Докажем, что это пространство является банаховым, а именно полноту по $\|\cdot\|_\infty$ норме.

Рассмотрим последовательность x_n, где

$$x_n = (x_n(1), \ldots, x_n(k), \ldots).$$

Глобально хотим показать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant N(\varepsilon) \ \ \forall l \in \mathbb{N} \quad \|x_{n+l} - x_n\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_{n+l}(k) - x_n(k)| < \varepsilon.$$

Попробуем через это продраться: из сходимости следует, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \ |x_{n+l}(k) - x_n(k)| < \varepsilon.$$

Здесь можем выделить $(x_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ – числовая фундаментальная в $\mathbb{R}$. По критерию Коши:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{n\to\infty} x_n(k) = y(k) \in \mathbb{R},$$

уставнавливается покомпонентая сходимость. Теперь рассмотрим

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_n(k) - y(k)| = \|x_n - y\|_\infty < \varepsilon,$$

что автоматически означает, что $\exists y$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = y.$$

Следующий этап – показать, что

$$\exists \lim_{k\to\infty} y(k) \in \mathbb{R},$$

то есть показать полноту пространства:

$$\begin{aligned}
|y(k+q) - y(k)| &= |y(k+q) - x_n(k+q) + x_n(k+q) - x_n(k) + x_n(k) - x_n(k)| \\
&\leqslant |y(k+q) - x_n(k+q)| + |y(k) - x_n(k)| + |x_n(k+q) - x_n(k)| \\
&< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Таким образом мы доказали полноту пространства[1] .

T10. Критерий Йордана-фон Неймана

Хочется понять, можно ли ввести на пространстве $C[a,b]$ скалярное произведение так, что норма пространства будет получаться из этого скадяного произведения.

Thr 4.6 (критерий Йордана-фон Неймана)**.** *Норма $\|\circ\|_X$ порождается скалярным произведением тогда, и тоглько тогда, когда $\|\circ\|_X$ удовлетворяет правилу параллелограмма:*

$$\forall x, y \in X \quad \|x+y\|_X^2 + \|x-y\|_X^2 = 2\|x\|_X^2 + 2\|y\|_X^2.$$

Выберем $C[0, \pi/2]$, и $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$. Заметим, что

$$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1, \qquad \|x+y\|_\infty = \sqrt{2}, \qquad \|x-y\|_\infty = 1, \qquad 2 + 1 \neq 2 + 2,$$

таким образом пространство не гильбертово.

T11. Поиск функционала

Далее будем обозначать за $\mathcal{D}(A)$ область определения оператора A, и $\mathcal{R}(A)$ – область значений. Оператор действует $A\colon X \mapsto Y$, где X и Y – линейные нормированные пространства.

[1] c_0, c_{00}, l_∞ – банаховы ли? (!): c_0 (сходящиеся к 0), c_{00} (финитные), l_∞ (ограниченные).

Def 4.7. Говорится, что линейный оператор $A\colon X \mapsto Y$ *непрерывен* а точка $x \in \mathcal{D}(A)$, если $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(A)$, сходящейся к x в X, $Ax_n \to Ax$ в Y. Оператор *глобально непрерывен*, если он непрерывен $\forall x \in \mathcal{D}(A)$.

Lem 4.8. *Для того, чтобы линейный оператор A был непрерывен на всей $\mathcal{D}(A)$, необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен в нуле.*

Def 4.9. Линейный оператор $A\colon X \mapsto Y$ называется *ограниченным*, если $\exists C > 0\colon \|Ax\|_Y \leqslant C \cdot \|x\|_X \ \forall x \in \mathcal{D}(A)$. Наименьшее из чисел C называется *нормой* оператора A и обозначается $\|A\|$.

Lem 4.10. *Для того, чтобы линейный оператор был ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы он переводил всякое ограниченное в X множество, в ограниченное в Y.*

Thr 4.11. *Оператор A непрерывен тогда, и только тогда, когда он ограничен.*

Thr 4.12 (о норме линейного оператора)**.** *Верно, что*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Найдём норму функционала

$$A\colon f \mapsto \sum_{k=0}^{N} (-1)^k f\left(\frac{k}{N}\right),$$

на пространстве $C[0,1]$.

Вообще нормированным пространством мы называем пару вида $(X, \|\circ\|_X)$. И пусть есть некоторый непрерывный ограниченный оператор из X в Y. Если $Y = \mathbb{C}(\mathbb{R})$,

$$A = F\colon X \to \mathbb{C}(\mathbb{R}),$$

то A называют *функционалом*. Выберем в качетсве $X = C[0,1]$, а в качетсве $F\colon C[0,1] \mapsto \mathbb{C}(\mathbb{R})$. Функционал вида

$$F[f] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Что есть норма функционала? Норма функционала есть

$$\|F\| = \sup_{\|f\|_\infty \leqslant 1} |F[f]| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |F[f]| = \inf\{L > 0 \mid |F[f]| \leqslant L \|f\|_\infty\}, \qquad \forall f \in C[0,1].$$

`Глобально, это доказывается, например, в Константинове очень подробно.`

`Всегда легко сверху ограничить.` Тривиальный шаг:

$$|F[f]| = \left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = (n+1)\cdot \|f\|_\infty.$$

Продолжаем,

$$\frac{|F[f]|}{\|f\|_\infty} \leqslant n+1, \qquad \Rightarrow \qquad \|F\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} |F[f]| \leqslant n+1.$$

Теперь выберем функцию $f_s(x) = f(k/n) = (-1)^k$. На ней мы действительно достигаем супремум, тогда

$$\|F\| = |F[f_s]| = n+1.$$

Таким образом нашли норму оператора.

В более общем случае можем показать, что

$$F[f] = \sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k), \qquad |F[f]| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |c_k| \cdot \|f\|_\infty, \qquad \Rightarrow \qquad \|F\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

Далее, определив схожим образом непрерывную функцию $\tilde{f}$, равную $\operatorname{sign} c_k$ в $t = t_k$ увидим, что $\|\tilde{f}\| = 1$,

$$\|F[\tilde{f}]\| \geqslant |F[\tilde{f}]| = \sum_{k=1}^{n} |c_k|,$$

таким образом решили чуть более общую задачу.

T12

Пусть функция g непрерывна на $[a,b]$. Найдём норму линейного отображения $M_g\colon L_2[a,b] \mapsto L_2[a,b]$, где $A_g(f) = [f]$ – мультипликативный оператор. Здесь $X = Y = L_2[a,b]$.

По опредению, норма оператора $\|A_g\| = \sup_{\|f\|_X=1} \|A_g[f]\|_Y$. Аналогично, ищем ограничение сверху:

$$\|A_g[f]\|_2^2 = \|gf\|_2^2 = \int_{[a,b]} |gf|^2(x)\mu(\,dx) \leqslant \int_{[a,b]} \left\{ \sup_{x\in[a,b]} |g(x)| \right\}^2 |f(x)|^2\mu(\,dx).$$

Вынесенный супремум позволит записать:

$$\|A_g[f]\|_2^2 \leqslant \|g\|_\infty^2 \|f\|_2^2, \quad \Rightarrow \quad \|A_g\| = \sup_{\|f\|_2=1} \|A_g[f]\|_2 \leqslant \|g\|_\infty.$$

Далее покажем, что норма не достигается, но сколь угодно близко приближается.

Есть функция

$$\sup_{x\in[a,b]} |g(x)| = |g(c)|,$$

есть некоторая $f_\varepsilon \in L_2[a,b]$ вида

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_\varepsilon, & x \in [c-\varepsilon, c+\varepsilon], \\ 0, & x \notin [c-\varepsilon, c+\varepsilon], \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \|f_\varepsilon\|_2^2 = \int_{[c-\varepsilon,c+\varepsilon]} \alpha_\varepsilon^2 \mu(dx) = \alpha_\varepsilon^2 \cdot 2\varepsilon = 1, \quad \alpha_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}.$$

В таком случае рассмотрим

$$\|A_g[f_\varepsilon]\|_2^2 = \|gf_\varepsilon\|_2^2 = \alpha_\varepsilon^2 \int_{[c-\varepsilon,c+\varepsilon]} |g(x)|^2 \mu(dx) = \alpha_\varepsilon^2 \cdot 2\varepsilon |g(x_{c,\varepsilon})|^2 \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \|g\|_\infty^2,$$

в силу непрерывности g, по теореме о среднем.

Можно пойти другим путем, по определению:

$$\forall \varepsilon \in (0, \|g\|_\infty), \quad \exists x_\varepsilon \subseteq [a,b]\ g(x) \geqslant \|g\|_\infty - \varepsilon,$$

почти всюду на X_ε. Выберем $h(x)$ вида

$$h(x) = \operatorname{sign} g(x)\ \mathcal{X}_{X_\varepsilon}(x), \quad \|h_\varepsilon\|_1 = \|h_\varepsilon\|_2 = \mu(X_\varepsilon),$$

тогда верно, что

$$\|A_g\| \geqslant \|A_g[h_\varepsilon]\|_1 \cdot \|h_\varepsilon\|_1 = \int_{[a,b]} |g(x)| \mathcal{X}_{X_\varepsilon}(x)\mu(\,dx) \geqslant (\|g\|_\infty - \varepsilon)\, \chi\mu(X_\varepsilon), \quad \Rightarrow \quad \|A_g\| = \|g\|_\infty.$$

Аналогично в L_2:

$$\|A_g\|^2 \geqslant \||g|\mathcal{X}_{X_\varepsilon}\|_2^2 \cdot \|h_\varepsilon\|_2^2 \geqslant \|g\|_\infty^2 \mu^2(X_\varepsilon),$$

что приводит такому же результату.

T13

Сначала найдём норму оператора F, откуда уже получим значение нормы для J, где

$$F[f] = \int_a^b g(t)f(t)\,dt, \quad J[f] = \int_a^b K(x,y)f(y)\,dy,$$

где $g \in C[a,b]$, а $F,\ J$ – линейные функционалы на $C[a,b]$.

Первая часть. Функционал F ограничен в силу

$$|F[f]| \leqslant \int_a^b |g(t)|f(t)|\,dt \leqslant \|f\|_\infty \cdot \int_a^b |g(t)|\,dt.$$

Далее выберем произвольное $\varepsilon > 0$. По *теореме Кантора* найдётся такое разбиение отрезка $[a,b]$ точками $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, что колебание $\omega_i(g)$ функции g на i-ом отрезке $\Delta_i = [t_{i-1}, t_i]$ удовлетворяет неравенствам

$$\omega_i(g) < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Разобьём все Δ_i на две группы. В первую группу отнесем те отрезки, на которых g сохраняет знак. Пусть это будут отрезки $\Delta_1', \ldots, \Delta_r'$. Вторую группу $\Delta_1'', \ldots, \Delta_s''$ образуют отрезки, на которых g меняется знак. В каждом промежутке второго типа существует точка, в которой g обращается в нуль. Ввиду установленных неравенств там $|g(t)| < \varepsilon$.

На промежутках первого типа положим $\tilde{f}(t) = \operatorname{sign} g(t)$, в остальных точках $\tilde{f}(t)$ – линейная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству $|\tilde{f}| \leqslant 1$. Тогда $\|\tilde{f}\| = 1$, и

$$\|F\| = \sup_{\|f\|=1} |F[f]| \geqslant |F[\tilde{f}]| = \left| \int_a^b g(t)\tilde{f}(t)\, dt \right| = \left| \sum_{k=1}^{r} \int_{\Delta'_k} |g(t)|\, dt + \sum_{i=1}^{s} \int_{\Delta''_i} g(t)\tilde{f}(t)\, dt \right| \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{r} \int_{\Delta'_k} |g(t)|\, dt - \sum_{i=1}^{s} \int_{\Delta''_i} = \int_a^b |g(t)|\, dt - 2\sum_{i=1}^{s} \int_{\Delta''_i} |g(t)|\, dt \geqslant \int_a^b |g(t)|\, dt - 2\varepsilon \cdot \mu[a,b],$$

что ввиду произвольности ε означает, что $\|F\| \geqslant \int_a^b |g(t)|\, dt$, что вместе со знанием супремума позволяет утверждать: $\|f\| = \int_a^b |g(t)|\, dt$.

Вторая часть. Переходим к поиску нормы J:

$$\|J[f]\| = \sup_{t\in[a,b]} \left| \int_a^b K(t,s)f(s)\, ds \right| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)| \cdot |f(s)|\, ds \leqslant \|f\| \cdot \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\, ds,$$

таким образом, по определению

$$\|J\| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\, ds \overset{\text{def}}{=} M.$$

Так как ядро K непрерывно, то непрерывен и интеграл $\int_a^b |K|\, ds$, поэтому $\exists t_0 \in [a,b]$ такой, что $M = \int_a^b |K(t_0,s)|\, ds$.

Как было показано в первой части, $q(x) = \int_a^b |K(t_0,s)| f(s)\, ds$ – линейный непрерывный функционал на $C[a,b]$ с нормой равной M. Таким образом, выбирая $\tilde{f}$ так, чтобы $\operatorname{sign} \tilde{f(s)} = \operatorname{sign} K(t_0,s)$ может утверждать, что супремум достигается, и

$$\|J\| = M = \sup_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\, ds.$$

Thr 4.13 (Теоремма Бэра для открытых множеств)**.** *Счётное семейство открытых всюду плотных подмножеств банахова пространства имеет непустое пересечение.*

Thr 4.14 (Теорема Бэра для замкнутых множеств)**.** *Если банахово пространство E покрыто счётным семейством замкнутых множеств, то одно из них имеет непустую внутренность.*

T14

Докажем, что алгебраический базис бесконечномерного банахова пространства не может быть счётным.

Вводился алгебраический базис Гамиля $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$, где $\forall x \in E$ представляется в виде $x\ \sum_{k=1}^n x_k e_{\alpha_k}$. Получается, что нужно показать, что в бесконечномерном банаховом пространстве такой базис не может быть счётным: докажем от противного.

Пусть $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, тогда пространство описывется, как

$$E_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \mid x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R} \right\} = \langle E_1, \ldots, e_n \rangle, \qquad \Rightarrow \qquad E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

Но по теореме Бэра для замкнутых множеств E не может быть счётным объединением нигде не плотных множеств.

Точнее, это было бы возможно, только с случае непустой внутренности одного из пространств E_n, что невозможно.

T15

Приведем пример плотного в $X = C[a,b]$ банахова пространства, со счётным базисом.

По теореме Вейерштрассе система степеней A полна в $C[a,b]$, что равносильно тому, что линейная оболочка системы степеней A плотна на $C[a,b]$. Таким образом, A со счётным базисом, является ответом на задачу.

Def 4.15. Последовательность элементов $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ называется *базисом* в пространстве[2] X, если $\forall x \in X$ существует единственный набор $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}$ таких, что сумма вида (не конечная не при каком n)

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists! \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}_0}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}_0\ \forall n \geqslant N_\varepsilon\ \|x - \sum_{k=0}^{n} x_k e_k\|_X = \|x - S_n\| < \varepsilon.$$

[2] Если линейное нормированное пространство имеет не более, чем счётный базис, то оно сепарабельно. Однако существуют сепарабельные банаховы пространства без базиса.

Thr 4.16 (Теорема Банаха-Штейнгауза для линейных функционалов). *Пусть семейство линейный функционалов $Y \subset E'$ ограничено в любой точке банахова пространства E, то есть для любого $x \in E$ множество чисел $\{\lambda(x) \mid \lambda \in Y\}$ ограничено. Тогда Y ограничено в смысле нормы в E'.*

T16

Thr 4.17 (Расходимость ряда Фурье в точке). *Существует непрерывная 2π-периодическая функция, ряд Фурье которой расходится в точке 0.*

$\triangle$. На пространстве $\dot{C}[-\pi,\pi]$ непрерывных 2π -периодических функций с нормой $\|\cdot\|_C$ определим линейный функционал

$$\lambda_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t)\, dt,$$

это значение n-й частичной суммы ряда Фурье в точке 0, $T_n(f,0)$. Можно заметить по определению нормы, что его норма равна

$$\|\lambda_n\| = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt.$$

Оценим интеграл модуля ядра Дирихле стандартным способом:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(n+1/2)x|}{2\pi|\sin x/2|}\, dx \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin(n+1/2)x|}{\pi|x|}\, dx = \int_{-\pi(1+1/2)}^{\pi(1+1/2)} \frac{|\sin u|}{\pi|u|}\, du \geqslant$$
$$\geqslant \int_{-\pi(1+1/2)}^{\pi(1+1/2)} \frac{\sin^2 u}{\pi|u|}\, du = \int_{-\pi(1+1/2)}^{\pi(1+1/2)} \frac{1-\cos 2u}{2\pi|u|}\, du \to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos 2u}{2\pi|u|}\, du = +\infty, \qquad n \to \infty.$$

Получается, то нормы функционалов λ_n при $n \to \infty$ не являются ограниченными. Следовательно, по теореме Банаха-Штейгауза, примененной в обратную сторону, для некоторой функции $f \in \dot{C}[-\pi,\pi]$ значения $\lambda_n(f) = T_n(f,0)$ не будут ограничены, и, следоватеьно, расходятся при $n \to \infty$.

$\square$

T17

Для последовательностей

$$x = (x(1), \ldots, x(k), \ldots),$$

рассмотрим пространство вида

$$l_p = \{x \mid \|x\|_p \in \mathbb{R}\}, \qquad \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p\right)^{1/p}.$$

Возьмём пространство l_p как множество, но добавим норму из пространства l_q, где $\infty > q > p$. Покажем, что в таком «дырявом» пространстве не выполняется теорема Бэра и принцип равномерной ограниченности.

Рассмотрим шар A_n вида

$$A_n = \{x \in l_p \mid \|x\|_p \leqslant n\}, \qquad l_p = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Докажем от противного, что A_n нигде не плотно.

Пусть существует такой $R > 0$ и $x_0 \in A_n \colon B_R(x_0) \subset \operatorname{cl} A_n = A_n$.

$$\forall x \in l_p\colon \quad \rho_q(x, x_0) < R, \quad \Rightarrow \quad x \in A_n \quad \Rightarrow \quad \|x\|_p \leqslant n.$$

Рассмотрим некоторую последовательность

$$z(k) = \frac{R}{2} \frac{1}{\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^{q/p}}} \frac{1}{k^{1/p}}.$$

Для начала,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (z(k))^q\right)^{1/q} = \|z\|_q = \frac{R}{2} < +\infty.$$

Далее, видим гармонический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z(k))^p = +\infty, \quad \Rightarrow \quad \exists N\colon \sum_{k=1}^{N} (z(k))^p > (2n)^p.$$

Теперь рассмотрим набор «частниных последовательностей»

$$y(k) = \{z(k), \quad k \leqslant N, 0, \quad k > N.$$

Теперь рассмотрим последовательность $h(k) = (x_0 + y)(k)$, для которой верно, что

1. $\rho_q(h, x_0) = \|y\|_q \leqslant R/2$, откуда следует $\|h\|_p \leqslant n$.

2. $\|h\|_p \geqslant \|y\|_p - \|x_0\|_p > 2n - n = n$, а тогда $\|h\|_p > n$, таким образом пришли к противоречию.

Полное пространство нельзя представить, как объединение нигде не плотных множеств, получается l_p не полно. Осталось доказать, что A_n замкнуто.

Пусть t – точка прикосновения. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ найдётся

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in A_n \colon \rho_q(t, x_\varepsilon) < \varepsilon, \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{N} |t(k) - x_\varepsilon(k)|^q < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |t(k) - x_\varepsilon(k)| < \varepsilon^{1/q},$$

получается это правда и для

$$\Rightarrow \quad \forall N \in \mathbb{N} \left(\sum_{k=1}^{N} |t(k)|^p \right)^{1/p} \leqslant t(k) - x_\varepsilon(k) + x_\varepsilon(k) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} |t(k) - x_\varepsilon(k)|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{N} |x_\varepsilon(k)|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(N\varepsilon^{p/q} \right)^{1/p} + n,$$

что стремится к n при $\varepsilon \to 0$. Таким образом $\|t\|_p \leqslant n$.

И, наконец, докажем, что не выполняеся принцип равномерной ограниченности. Рассмотрим функционалы

$$F_n[x] = \sum_{k=1}^{n} x(k).$$

Верно, что

$$\forall x \in l_1 \quad |F_n[x]| \leqslant \|x\|_1.$$

По норме $\| \circ \|_2$ верно, что эти функционалы можно переписать в виде скалярного произведения (x, e_n), где $e_n = (1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$:

$$F_n[x] = (x, e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{(k)} (e_n)_{(k)} = \sum_{k=1}^{n} x(k),$$

что является проявлением одной из теорем Рисса. Положив $x = e_n$ видим, что норма достигается и $\|F_n\| = n \to \infty$ при $n \to \infty$. Таким образом мы показали, что на таком пространстве не работает принцип равномерной сходимости.

T18

Докажем, что в бесконечномерном банаховом пространстве E единичный шар не является компактным.

Lem 4.18 (Лемма Рисса или лемма о перпендикуляре)**.** *Если X_0 – замкнутое линейное подпространство в нормированом пространстве X, $X_0 \neq X$, тогда*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists x_\varepsilon \in X \colon \|x_\varepsilon\| = 1, \quad \|x_\varepsilon - y\| \geqslant 1 - \varepsilon \ \ \forall y \in X_0.$$

$\triangle$. Найдётся $z \in X \backslash X_0$, положим $\delta = \inf\{\|z - u\| \mid y \in X_0\} > 0$. Тогда выберем

$$\varepsilon_0 > 0 \colon \frac{\delta}{\delta + \varepsilon_0} > 1 - \varepsilon,$$

выберем $y_0 \in X_0$ такой, что $\|z - y_0\| < \delta + \varepsilon_0$.

Далее, считая

$$x_\varepsilon = \frac{z - y_0}{\|z - y_0\|}, \quad \forall y \in X_0.$$

Теперь оценим

$$\|x_\varepsilon - y\| = \frac{1}{\|z - y_0\|} \|z - y_0 - \|z - y_0\| y\| \geqslant \frac{\delta}{\delta + \varepsilon_0} > 1 - \varepsilon.$$

Заметим, что

$$v = y_0 + \|z - y_0\| y \in X_0, \quad \Rightarrow \quad \|z - v\| \geqslant \delta.$$

$\square$

Con 4.19. *В $\forall X$ (бесконеномерном, нормированном пространстве) $\exists (x_n) \colon \|x_n\| = 1$ и $\|x_n - x_k\| \geqslant 1$, $n \neq k$. Как следставие все шары $R > 0$ в X некомпактны.*

$\triangle$. Всякое бесконечное подмножество компакта имеет предельную точку. Последовательность x_n строится по индукции с помошью леммы Рисса.

$\square$

Thr 4.20 (Теорема Хана-Банаха)**.** *Пусть E – банахово пространтво, $F \subset E$ – его линейное подпространство. Тогда всякий ограниченный линейный функционал $\lambda \in \mathbb{F}'$ продолжается до линейногофункционала на всём E без увеличения его нормы.*

Con 4.21. *Для всякого банахова пространства E и его ненулевого элемента $x \in E$ найдётся $\lambda \in E'$, такой что $\|\lambda\| = 1$ и $\lambda[x] = \|x\|$.*

Con 4.22. *Естественное отображение банахова пространства в двойственное к его двойственному (второе двойственное)*

$$E \mapsto E'', \qquad x \mapsto (\lambda \mapsto \lambda(x))$$

является вложением, сохраняющим норму.

Thr 4.23 (Теорема Радона-Никодима в $\mathbb{R}^n$)**.** *Пусть неотрицательная конечная борелевская мера μ на $\mathbb{R}^n$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Тогда у меры ν есть плотность, то есть борелевская $f \geqslant 0$, такая что для всякого борелевского X $\nu(X) = \int_X f(x)\,dx$.*

T19

Выведем из теоремы Хана-Банаха, что всякое конечномерное подпространство V в банаховом постранстве E имеет замкнутое дополнение $W \subseteq E$, такое что $E = V \oplus W$.

Thr 4.24. *Для всякого ненулевого элемента x нормированного пространства X найдётся такой функционал l, что $\|l\| = 1$ и $l[f] = \|f\|$.*

$\triangle$. На одномерном пространствеЮ порожденном xЮ положим $l_0(tx) = t\|x\|$. Тогда $l_0(x) = \|x\|$ и $\|l_0\| =1$. Остается продолжить l на x с сохранением нормы. $\square$

Из этой теоремы можно получить, что в случае бесконечномерного пространства X для всякого n найдутся такие векторы $x_1, \ldots, x_n \in X$ и функционалы $l_1, \ldots, l_n \in X^*$, что $l_i(x_j) = \delta_{ij}$. В частности поэтому, сопряженное пространство тоже бесконечномерно.

Con 4.25. *Пусть X_0 – конечномерное подпростанство нормированного пространства X. Тогда X_0 топологически дополняемо в X, т.е. существует такое замкнутое линейное подпространство X_1, что X является прямой алгебраической суммой X_0 и X_1, а естественные алгебраические проекции P_0 и P_1 на X_0 и X_1 непрерывны.*

$\triangle$. *Можно* найти базис $x_1, \ldots, x_n$ пространства X_0 и элементы $l_i \in X^*$ с $l_i(x_j) = \delta_{ij}$. Положим

$$X_1 \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} l_i, \qquad P_0[x] \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} l_i(x)x_i, \qquad P_1[x] \overset{\text{def}}{=} x - P_0x.$$

Для всякого j имеем $P_0[x_j] - l_j(x_j)x_j = x_j$. В таком контексте становится понятно, что $P_0|_{X_1} = 0$, и $X_0 \cap X_1 = \{0\}$, $X = X_) \oplus X_1$, ибо $x - P_0x \in X_1$ ввиду равенств $l_j(x - P_0x) = l_j(x) - l_j(x)l_j(x_j) = 0$. Непрерывность P_0 и P_1 понятна из опредления, более того сопадают с алгебраическими проектированиями на X_0 и X_1. $\square$

T20

Приведем пример замкнутого в топологии нормы множества $X \subset E'$ (двойственное к некоторому банахову пространству), которое не замкнутое в его *-слабой топологии.

Ответ – *сфера*, докажем это. Покажем, что для $X \subset E'$ $\operatorname{cl} X = X$ и $w.\operatorname{cl} X \neq X$. Что есть сфера? Сфера есть

$$S = \{f \in E' \mid \|f\| = 1\}, \qquad \operatorname{cl} S = S, \qquad w.\operatorname{cl} S = \bar{B}, \qquad \bar{B} = \{F \in E' \mid \|f\| \leqslant 1\}.$$

Введём дополнение $S_C \overset{\text{def}}{=} E \backslash S$, и покажем, что оно открыто.

Выберем $g \in S_c$ с $\|g\| < 1$ и $\varepsilon = 1 - \|g\| > 0$. Пусть $h \in B_\varepsilon(g)$, более того

$$\|h\| = \|g + h - g\| \leqslant \|g\| + \|h - g\| < 1, \qquad \Rightarrow \qquad B_\varepsilon(g) \subseteq S_c.$$

Далее, пусть $g \in S_c$ и $\|g\| > 1$, тогда $\varepsilon = \|g\| - 1 > 0$. Выберем $h \in B_\varepsilon(g)$, тогда

$$\|g\| = \|h + g - h\| \leqslant \|h\| + \|g - h\|, \qquad \Rightarrow \qquad \|h\| \geqslant \|g\| - (\|g\| - 1) = 1,$$

получается $\|h\| > 1$ и $B_\varepsilon(g) \subseteq S_c$. Таким образом S_c открыто, S замкнуто.

Докажем теперь, что $w, \operatorname{cl} S = \bar{B}$. Во-первых $\forall g_0 \notin B$ верно, что

$$\|g_0\| > 1, \quad \exists x_0 \in E,\ \exists \varepsilon_0 > 0\ \forall g \in U_{x_0, g_0, \varepsilon_0} \quad \|g\| > 1, \quad \Rightarrow \quad w.\operatorname{cl} S \subseteq B.$$

В чатсности, покажем, что

$$\|g\| \geqslant |g[x_0]| = |g[x_0] - g_0[x_0] + g_0[x_0]| \geqslant |g_0[x_0]| - |g[x_0] - g_0[x_0]|,$$

что уже можно сделать строго больше:

$$\|g\| > |g_0[x_0]| - \varepsilon_0 = 1,$$

где $\varepsilon_0 = |g_0[x_0]| - 1$.

Пусть теперь $\forall$ фиксированного $g_0 \in \bar{B}$ с $\|g_0\| < 1$. Тогда

$$\exists U(g_0)\colon g_0 \in \bigcap_{k=1}^{N} U_{x_k, g_k, \varepsilon_k} \subset U(g_0).$$

Утверждается, что существует ненулевой g такой, что $\forall t \in \mathbb{R}$ с $g_0 + tg \in U(g_0)$.

Осталось построить цилиндрическое множество по которому «прогуляемся» до нужной нам области. Пусть

$$\varphi(t) = \|g_0 + tg\| \in C(\mathbb{R}), \qquad |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leqslant |t_1 - t_2| \cdot \|g\|.$$

Понятно, что $\varphi(0) = \|g_0\| < 1$. Тогда $\varphi(t) \geqslant |t| \cdot \|g\| - \|g\|_0 \to \infty$ при $t \to \infty$. По теореме о промежуточных значениях непрерывной функции

$$\exists t_0 \in \mathbb{R}\colon \varphi(t_0) = 1, \quad \Rightarrow \quad g_0 + t_0 g \in S.$$

Получается, что взяв точку из шара, и взяв её слабую окрестность, мы находим непустое пересечение этой окрестности со сферой. Из этого следует, что $g_0 \in w.\operatorname{cl} S$, а тогда и $\bar{B} \subseteq w.\operatorname{cl} S$, которое содержится в замкнутом шаре. Вывод: $\bar{B} = w.\operatorname{cl} S$.

T21

Докажем, что $*$-слабой топологии E' компактность некоторого множества влечет его замкнутость.

Lem 4.26. *Слабая топология хаусдорфова.*

Пусть K – компакт в ХТП X. Пусть $x \in X \backslash K$. Для $\forall y \in K$ $\exists U_y$, V_y (открытые) такие, что $U_y \cap V_y = \varnothing$, где $x \in U_y$ и $y \in V_y$.

Рассмотрим систему $S = \{V_y \mid y \in K\}$ – открытое покрытие компакта K. Также $S_0 = \{V_y \mid y \in F\}$, F – конечное подмножество K (т.к. K – компакт).

Рассмотрим множество $U = \cap_{y \in F} U_y$ – открытая окрестность точки x. Утверждается, что $U \cap K = \varnothing$. Перебирая все точки $x \in K$ получаем доказательство исходного утверждения.

T22

Хочется найти такое топологическое пространство, в котором есть компактные, но не замкнутые подмножества. В качестве такого ~~хаусдорфова~~ топологического пространства можем выбрать $X = \{a, b\}$, базой топологии $\tau = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$.

Пример выглядит искуственным, но, на мой взгляд, большинство примеров нехаумдорфовых пространств выглядят очень искуственно.

4.3 Распредления (обобщенные функции)

Работать будем с $\mathcal{D}(X) \stackrel{\text{def}}{=} C_0^\infty(X)$, $X \subseteq \mathbb{R}$. Функция называется *финитной*, если $\operatorname{supp} \varphi = K \subset X$,

$$\operatorname{supp} \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \bar{Y}, \qquad Y = \{x \in X \mid \varphi(x) \neq 0\}.$$

Далее будем считать $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \equiv \mathcal{D}$.

Вспомним, что $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \varphi$ означает $\exists [a, b] \supset \operatorname{supp} \varphi_n$ и $\operatorname{supp} \varphi$, а также $\varphi_n^{(k)} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi^{(k)}$, и тогда пишут, что $\lim_{n\to\infty} \varphi_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} \varphi$.

Хочется определить пространство линейный непрерывных функционалов. Далее, договоримся обозначать $f(\varphi) \equiv f[\varphi] \stackrel{\text{def}}{=} \langle f \mid \varphi \rangle$.

Def 4.27. Функционал $f\colon \mathcal{D} \mapsto \mathbb{C}(\mathbb{R})$ *непрерывен* в $\mathcal{D}'$, если

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} \varphi, \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \langle f \mid \varphi_n \rangle = \langle f \mid \varphi \rangle.$$

Def 4.28. Всякий линейный функционал из $\mathcal{D}'$ называют *обобщенной функцией* на $\mathcal{D}$.

Каждая локально-интегрируемая функция порождает некоторую обобщенную, их назовём *регулярными*. Если не существует такой локально-интегрируемой функции в D для функционала из $\mathcal{D}'$, то это *сингулярная обобщенная функция*. Стоит заметить, что регулярные обобщенные функции плотны в $\mathcal{D}'$, а их пополнением являются сингулярные.

Например, $\delta(x)$ можно представить как предел РОФ, где под пределом имеется ввиду

$$f_n \overset{\mathcal{D}'}{\to} f \qquad (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}',\ f \sin \mathcal{D}', \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \lim_{n\to\infty} \langle f_n \,|\, \varphi \rangle = \langle f \,|\, \varphi \rangle,$$

в частности тогда пишут

$$\lim_{n\to\infty} f_n \overset{\mathcal{D}'}{=} f \qquad \Leftrightarrow \qquad *w.\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

T23

Найдём пределы последовательностей регулярныъ элементов пространства $\mathcal{D}'$, при

$$\lim_{n\to\infty} \langle \cos(nx) \,|\, \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(nx)\varphi(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{inx}\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} \hat{\varphi}(n) = \langle 0 \,|\, \varphi \rangle \overset{\mathcal{D}'}{=} 0.$$

По той же причине

$$*w.\lim_{n\to\infty} n\sin(nx) - 0.$$

Найдём некоторые пределы в терминах обобщенных функций. В частности,

$$*w \lim_{a\to+0} \frac{a}{\pi(a^2+x^2)} = *w \lim_{\mathcal{B}_a} \frac{a}{\pi(a^2+x^2)},$$

где $\mathcal{B}_a$ – база, состоящяя из всех последовательностей, стремящихся к 0. В частности, при $a = 1/n$, перейдём к T24(a). Прямым вычислением, находим

$$\left\langle \frac{a}{\pi(a^2+x^2)} \,\middle|\, \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\varphi(x)}{\pi(a^2+x^2)}\,dx = \left(\lim_{\Lambda_+\to+\infty} \int_0^{\Lambda_+} + \lim_{\Lambda_+\to-\infty} \int_{\Lambda_-}^0 \right) \frac{a\varphi(x)}{\pi(a^2+x^2)}\,dx,$$

что интегрируя по частям можем свести к $\operatorname{arctg} x$:

$$\frac{1}{\pi} \lim_{\Lambda_+\to+\infty} \left\{ \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\varphi(x) \Big|_0^{\Lambda_+} - \int_0^{\Lambda_+} \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) \varphi'(x)\,dx \right\} + \frac{1}{\pi} \lim_{\Lambda_-\to-\infty} \left\{ \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\varphi(x) \Big|_{\Lambda_-}^0 - \int_{\Lambda_-}^0 \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) \varphi'(x)\,dx \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\varphi(x)\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\varphi(x)\Big|_{-\infty}^0 = \varphi(0) = \langle \delta(x) \,|\, \varphi \rangle,$$

таким образом мы нашли, что

$$\left\langle \frac{a}{\pi(a^2+x^2)} \,\middle|\, \varphi \right\rangle = \langle \delta(x) \,|\, \varphi \rangle.$$

Второй пункт сводится к интегрированию

$$\frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{1}{t} \sin\frac{t}{a}\,dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{x/a} \frac{d\sin y}{dy}\,dy = \frac{1}{\pi} \operatorname{Si}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Вспоминая, что

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{Si}(+\infty) = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{\pi}\operatorname{Si}(-\infty) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right), \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x} \overset{\mathcal{D}'}{=} \delta(x).$$

T25

Теперь найдём предел вида

$$*w.\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 x}{(1+n^2x^2)^2} = *w.\lim_{a\to+0} \frac{xa}{(x^2+a^2)^2} = F,$$

для этого

$$\left\langle \frac{xa}{(x^2+a^2)^2} \,\middle|\, \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xa}{(x^2+a^2)^2}\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{a}{x^2+a^2}\right) \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\varphi'(x)}{x^2+a^2}\,dx \underset{a\to+0}{\to} \frac{\pi}{2}\varphi'(0),$$

что, учитывая предыдущую задачу, позволяет записать

$$\frac{\pi}{2}\langle \delta(x) \,|\, \varphi' \rangle = \left\langle \left(-\frac{\pi}{2}\right)\delta'(x) \,\middle|\, \varphi \right\rangle, \qquad \Rightarrow \qquad w.\lim_{a\to+0} \frac{xa}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{\pi}{2}\delta'(x),$$

T26

Алгоритмично, обработаем выражение
$$\langle d \,|\, \varphi \rangle = \langle g \cdot \delta \,|\, \varphi \rangle = \langle \delta \,|\, g \cdot \varphi \rangle = g(0)\varphi(0) = \langle g(0_\delta) \,|\, \varphi \rangle,$$
так приходим к упрощенному выражению вида
$$g(x)\delta(x) \overset{\mathcal{D}'}{=} g(0)\delta(x).$$
Во втором пункте $f = g\delta'$, упростим выражение
$$\begin{aligned} \langle f \,|\, \varphi \rangle = \langle g\delta' \,|\, \varphi \rangle = \langle \delta' \,|\, g\varphi \rangle = -\langle \delta \,|\, (g\varphi)' \rangle = -\langle \delta \,|\, g'\varphi + g\varphi' \rangle = \\ = -g'(0)\varphi(0) - g(0)\varphi'(0) = -g'(0)\langle \delta \,|\, \varphi \rangle - g(0)\langle \delta \,|\, \varphi' \rangle = \langle g(0)\delta' - g'(0)\delta \,|\, \rangle, \end{aligned}$$
таким образом приходим к равенству в $\mathcal{D}'$:
$$g(x)\delta'(x) \overset{\mathcal{D}'}{=} -g'(0)\delta(x) + g(0)\delta'(x).$$

T27

Lem 4.29. *В $\mathcal{D}'$ верно, что*
$$(g \cdot f)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k g^{(k)} f^{(m-k)}.$$

Найдём производные отдельных «строительных блоков»:
$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad \tilde{H}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$
Докажем, что
$$\operatorname{sign} x = 2\tilde{H}(x) - 1, \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{sign}'(x) = 2\tilde{H}'(x) = 2\delta(x).$$
Первый шаг, по определению,
$$\big\langle \operatorname{sign}'(x) \,\big|\, \varphi \big\rangle = -\langle \operatorname{sign} x \,|\, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign} x \varphi'(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\, dx - \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\, dx = 2\varphi(0) = \langle 2\delta(x) \,|\, \varphi \rangle.$$
Теперь покажем, что
$$|x|' = (x \operatorname{sign} x)' = \operatorname{sign} x + x \operatorname{sign}' x = \operatorname{sign} x + x2\delta(x) = \operatorname{sign} x.$$
Также можем найти вторую производную
$$|x|'' = \operatorname{sign}'(x) = 2\delta(x).$$
Пункт а. Теперь легко посчитать, что
$$(g(x) \operatorname{sign} x)' = g'(x) \operatorname{sign} x + g(x) \operatorname{sign}'(x) = g'(x) \operatorname{sign} x + 2g(0)\delta(x),$$
где равенства подразумеваются в пространстве $\mathcal{D}'$. Для второй производной, находим
$$\begin{aligned} (g(x) \operatorname{sign} x)'' = g'' \operatorname{sign} x + 2g'(x) \operatorname{sign}' x + g(x) \operatorname{sign}''(x) = g''(x) \operatorname{sign} x + 4g'(0)\delta(x) + 2g(x)\delta'(x) = \\ = g''(x) \operatorname{sign} x + 4g'(0)\delta(x) + 2\left(-g'(0)\delta(x) + g(0)\delta'(x)\right) = g''(x) \operatorname{sign} x + 2g'(0)\delta(x) + 2g(0)\delta'(x). \end{aligned}$$
Пункт б. Сразу подставим значение $g(x) = (x+1)e^{|x|}$:
$$\begin{aligned} g' &= e^{|x|}\left(1 + (x+1)\operatorname{sign} x\right), \\ g'' &= e^{|x|}\left(1 + \operatorname{sign} x + 2\delta(x)(x+1) + \operatorname{sign} x + x + 1\right) = 2e^{|x|}\left(1 + x/2 + \operatorname{sign} x + \delta(x)\right). \end{aligned}$$

T28

Докажем, что слабая сходимость $\delta_{x_n} \to \delta_{x_0}$ эквивалентна обычной сходимости $x_n \to x_0$. Другими словами есть набор $f_n(x) = \delta(x - x_n)$ которые в пределе сходится к $f(x) = \delta(x - x_0)$.

По определению,
$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \lim_{n\to\infty} \langle \delta(x - x_n) \,|\, \varphi \rangle = \langle \delta(x - x_0) \,|\, \varphi \rangle.$$
В силу непрерывности функций в $\mathcal{D}$:
$$\forall \varphi \in D \quad \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)\varphi(x_0).$$

Наконец, это можно переписать в виде

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}\;\forall\varepsilon>0\;\exists N(\varphi,\varepsilon)\in\mathbb{N}\;\forall n\geqslant N(\varphi.\varepsilon)\quad|\varphi(x_n)-\varphi(x_0)|<\varepsilon.$$

Это было дано. Хочется показать, что из этого следует $x_n\to x_0$, или

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0\qquad\forall\varepsilon>0\;\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\forall n\geqslant N_\varepsilon\quad|x_n-x_0|<\varepsilon.$$

Докажем от противного, пусть $x_n\to x_1\neq x_0$. Тогда пусть $\varkappa=|x_1-x_0|/3$, выберем функцию $\varphi=\chi_{X_0}(x)+-\chi_{X_1}(x)$, где $X_0=[x_0-\varkappa,x_0+\varkappa]$, $X_1=[x_1-\varkappa,x_1+\varkappa]$. В таком случае, в пределе, $\langle f_n(x)\,|\,\varphi\rangle=-1$, при этом по условию $\langle f(x)\,|\,\varphi\rangle=1$, что приводит нас к противоречию.

Пример (К3, 21.75)

Найдём

$$I=\langle(\ln x)'\mid\varphi\rangle=-\langle\ln|x|\mid\varphi\rangle=-\int_{-\infty}^{+\infty}\ln|x|\varphi'(x)\,dx=\langle\mathrm{smth}\mid\varphi\rangle,$$

однако просто вернуть производную на лоагрифм будет нехорошо. Запишем это так:

$$I=-\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\ln|x|\varphi'(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\ln\varepsilon\cdot(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))\right]+\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Здесь заметим, что

$$\ln\varepsilon\cdot(\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon))=2\varepsilon\ln\varepsilon\cdot\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)}{2\varepsilon}=0\cdot\varphi'(0)=0,$$

тогда

$$I=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx,$$

но $1/x$ – не является локально интегрируемой в 0 функцией. Итого

$$I=\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx=\left\langle\mathcal{P}\frac{1}{x}\middle|\varphi\right\rangle.$$

Другими словами мы установили, что

$$(\ln|x|)'\overset{D'}{=}\mathcal{P}\frac{1}{x},\;\Leftrightarrow\;(\ln|x|)'\overset{*w\cdot}{=}\mathcal{P}\frac{1}{x},\;\Leftrightarrow\;\left\langle(\ln|x|)'\right|=\left\langle\mathcal{P}\frac{1}{x}\right|.$$

Пример (К3, 21.84)

Уместен вопрос: когда верно, что

$$\langle\lambda_f'\mid\varphi\rangle=\langle\lambda_{f'}\mid\varphi\rangle.$$

Далее пусть $\frac{d}{dx}$ – классическая производная, f' – производная обобщенной функции, тогда наш вопрос будет выглядеть, как

$$\langle f'\mid\varphi\rangle=\left\langle\frac{df}{dx}\;\middle|\;\varphi\right\rangle+\sum_{k=1}^{n}\Delta f(x_k)\langle\delta(x-x_k)\mid\ldots\rangle,$$

где x_k – точки разрыва классической функции f, а

$$\Delta f(x_k)=f(x_k+0)-f(x_k-0)\in\mathbb{R}.$$

В частности рассмотрим случай с $x_k=0$. Тогда

$$\langle f'\mid\varphi\rangle=-\langle f\,|\,\varphi'\rangle=-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi'(x)\,dx,$$

что удобно расписать в виде

$$-\left(\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\infty}\right)f(x)\varphi'(x)=-f(x)\varphi(x)\Big|_{+0}^{+\infty}-f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{-0}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{df(x)}{dx}\varphi(x)\,dx=\Delta f(0)\langle\delta(x)\,|\,\varphi\rangle+\left\langle\frac{df}{dx}\;\middle|\;\varphi\right\rangle.$$

Т29 и Т30

Сначала доакажем, что всякое распределение $\lambda\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ имеет первообразную, то есть такую $\mu\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, что $\mu'=\lambda$ в смысле дифференцирования обобщенных функций. Потом докажем, что любые две первообразные одного и того же распределения отличаются на константу.

Lem 4.30. *Пусть* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *и так оказалось, что* $f' = 0$, *тогда* f *имеет вид* $\langle f|\varphi\rangle = c\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx$.

$\triangle$. Утверждается, что $c = \langle f\,|\,\varphi_0\rangle$ годится, где

$$\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}): \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_0(x)\,dx = 1.$$

Итак, любую функцию $\varphi \in \mathcal{D}$ можно представить в виде

$$\varphi = -\theta\cdot\varphi_0 + \theta\cdot\varphi_0, \qquad \theta = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx.$$

Зададим функцию от вида

$$\psi(x) = \int_{\infty}^{x}\left(\varphi(t) - \theta\varphi_0(t)\right)\,dt \quad \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Собирая всё вместе находим

$$\psi' = \varphi - \theta\cdot\varphi_0, \qquad \Rightarrow \qquad \langle f\,|\,\varphi\rangle = \langle f\,|\,\psi' + \theta\varphi_0\rangle = \langle f\,|\,\psi'\rangle + \theta\langle f\,|\,\varphi_0\rangle,$$

где $-\langle f'\,|\,\psi\rangle = 0$ по условию. Также $\langle f\,|\,\varphi_0\rangle = c$, тогда верно, что

$$\psi' = c\cdot\theta = c\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx, \qquad \text{Q. E. D.}$$

$\square$

Thr 4.31. *Для всякой обобщенной функции* f *из* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *существует* $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *такая, что* $g' \overset{D'}{=} f$. *Для всякой другой* $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *верно, что если* $h' \overset{\mathcal{D}'}{=} f$, *то* $g - h \overset{\mathcal{D}'}{=} c$.

$\triangle$. Точно также берем некоторую φ, ψ. Положим, по определению, что

$$\langle g\,|\,\varphi\rangle \overset{\text{def}}{=} -\langle f\,|\,\Psi\rangle,$$

для которого хотелось бы показать линейность и непрерывность.

Для этого рассмотрим

$$\langle g\,|\,\varphi_1 + \varphi_2\rangle = -\langle f\,|\,\psi_1 + \psi_2\rangle = -\left\langle f\,\middle|\,\int_{-\infty}^{x}(\varphi_1 + \varphi_2 - (\theta_1+\theta_2)\varphi_0)\,dt\right\rangle = -\langle f\,|\,\psi_1\rangle - \langle f\,|\,\psi_2\rangle.$$

Осталось показать непрерывность, точнее показать, что линейной отображение $\varphi \to \psi$ непрерывно на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Рассмотрим в частности $\varphi_k \overset{\mathcal{D}'}{\to} 0$, для них $\theta_k \to 0$ при $k \to \infty$. Построим теперь $\varphi_k - \theta_k\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и имеют нулевые интегралы. Более того

$$\hat{l}(\varphi_k) = \psi_k = \int_{-\infty}^{x}\left(\varphi_k(t) - \theta_k\varphi_0(t)\right)\,dt \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Итого $\psi_k \to 0$ при $k \to \infty$, что и завершает доказательство непрерывности.

$\square$

T31

Thr 4.32. *Для* $\forall$ *СОФ* $g \in \mathcal{D}'$, *с носителем в открытом шаре, существует такая РОФ* f *и* $k \in \mathbb{N}$, *что* $f^{(k)} = g$.

Def 4.33. *Носитель обобщенной функции* $\operatorname{supp} f$ – дополнение к объединению всех открытых множеств U, на которых f равна нулю. Обобщённая функция f равна нулю на U, если $\langle f\,|\,\varphi\rangle = 0$ для всех φ таких, что $\operatorname{supp}\varphi$ содержится в U.

Примером такой функции (которая не является m-й производной РОФ), носитель которой не помещается в открытый шар, может служить распределение вида

$$f = \sum_{k=1}^{\infty}\delta^{(k)}(x-k).$$

Докажем от противного, пусть $g^{(m)} = f$ и g – РОФ.

Ну, по определению,

$$\langle(-1)^m g^{(m)}\,|\,\varphi\rangle = (-1)^m\sum_{k=0}^{\infty}\varphi^{(k)}(x-k)(-1)^k = (-1)^m\sum_{n=N}^{N}\varphi^{(k)}(x-k)(-1)^k.$$

Распишем чуть подробнее свёртку с g:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi^{(m)}(x)\,dx = (-1)^m \sum_{k=0}^{N} \varphi^{(k)}(k)(-1)^k.$$

Теперь выберем φ, такую, что это ступенька гаусс вокруг $x = m$, тогда

$$I = (-1)^m(-1)^m\varphi^{(m)}(m) = \langle \delta(x-m) \,|\, \varphi^{(m)}\rangle,$$

таким образом пришли к противоречию.

4.4 Преобразование Фурье обобщенных функций

Для преобразования Фурье над пространством обобщенных функций медленного роста S – пространства Шварца, верны следующие утверждения:

$$\langle F[f] \,|\, \varphi\rangle = \langle f \,|\, F[\varphi]\rangle, \qquad \langle F^{-1}[f] \,|\, \varphi\rangle = \langle f \,|\, F^{-1}[\varphi]\rangle, \qquad F[f^{(n)}] = (ix)^n F[f], \qquad F^{(n)}[f] = (-i)^n F[x^n f].$$

Верно, что $\mathcal{D} \subset S$. Также важно держать в голове, что

$$F[1] = \sqrt{2\pi}\delta.$$

T32

Найдём преобразование Фурье в S' некоторых функций.

Синус. Найдём преобразование Фурье вида

$$\big\langle F^{-1}[\delta(x-x_0)] \,\big|\, \varphi\big\rangle = \big\langle \delta(x-x_0) \,\big|\, F^{-1}[\varphi]\big\rangle = F^{-1}[\varphi](x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}\varphi(t)e^{ix_0t} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t)\varphi(t) = \left\langle \frac{e^{ix_0t}}{\sqrt{2\pi}} \,\middle|\, \varphi\right\rangle, \qquad \Rightarrow \qquad F^{-1}[\delta(x-x_0)](t) = \frac{e^{ix_0t}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Отсюда следует, что

$$\big\langle F[e^{ix_0t}] \,\big|\, \varphi\big\rangle = \big\langle F\left[\sqrt{2\pi}F^{-1}[\delta(x-x_0)]\right] \,\big|\, \varphi\big\rangle,$$

тогда можем перегрупировать, и найти

$$\big\langle F[e^{ix_0t}] \,\big|\, \varphi\big\rangle = \langle \sqrt{2\pi}\delta(x-x_0) \,|\, \varphi\rangle.$$

Нас, правда, интересует Фурье от синуса

$$\langle F[\sin(x_0t)] \,|\, \varphi\rangle = \left\langle F\left[\frac{e^{ix_0t} - e^{-ix_0t}}{2i}\right] \,\middle|\, \varphi\right\rangle = \left\langle \sqrt{\frac{\pi}{2}} i\left(\delta(x+x_0) - \delta(x-x_0)\right) \,\middle|\, \varphi\right\rangle.$$

Тогда $\mathcal{D}'$ справедливо равенство вида

$$F[\sin(x_0t)] \overset{\mathcal{D}'}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2}} i\big(\delta(x+x_0) - \delta(x-x_0)\big).$$

Дельта-функция. Пользуясь формулой n-й производной

$$\big\langle F[\delta^{(n)}(x)] \,\big|\, \varphi\big\rangle = \big\langle \delta^{(n)}(x) \,\big|\, F[\varphi]\big\rangle = (-1)^n F^{(n)}[\varphi](0) = \frac{(-1)^n}{i^n} F[x^n\varphi](0) = \left\langle \frac{(-1)^n}{i^n}\delta(x) \,\middle|\, F[x^n\varphi]\right\rangle =$$

$$= i^n \big\langle F[\delta(x)] \,\big|\, x^n\varphi\big\rangle = \langle (ix)^n F[\delta(x)] \,|\, \varphi\rangle = \left\langle \frac{(ix)^n}{\sqrt{2\pi}} \,\middle|\, \varphi\right\rangle,$$

таким образом пришли к равенству вида

$$F[\delta^{(n)}(x)] \overset{\mathcal{D}'}{=} \frac{(ix)^n}{\sqrt{2\pi}}.$$

Фунция Хевисайда. Для начала найдём преобразование Фурье функции $\theta(x)e^{-tx}$ при $t > 0$

$$F[\theta(x)e^{-tx}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x(t+iy)}\,dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}(y-it)}.$$

Покажем теперь, что в S'

$$\lim_{t\to+0} \theta(x)e^{-tx} = \theta(x).$$

Действительно, для каждой функции $\varphi \in S$ и любого числа A имеем

$$|\langle \theta(x) \,|\, \varphi(x)\rangle - \langle \theta(x)e^{-tx} \,|\, \varphi(x)\rangle| = \left|\int_0^{\infty} (1-e^{-tx})\varphi(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_0^{A} (1-e^{-tx})\varphi(x)\,dx\right| + \left|\int_A^{\infty} (1-e^{-tx})\varphi(x)\,dx\right|.$$

Теперь зафиксируем $\sigma \in S$ и какое-либо число $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной интегрируемости φ, существует $A > 0$ такео, что $\int_A^{+\infty} < \varepsilon/2$, тогда
$$\left| \int_A^\infty (1 - e^{-tx}) \varphi(x)\, dx \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
Выберем теперь $t_0 > 0$ так, чтобы при $0 < t < t_0$ было справедливо неравенство
$$(1 - e^{-tA}) \int_0^A |\varphi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \Rightarrow \quad |\langle \theta(x) \,|\, \varphi(x) \rangle - \langle \theta(x) e^{-tx} \,|\, \varphi(x) \rangle| < \varepsilon.$$
Таким образом утверждение про $\lim_{t \to +0} \theta(x) e^{-tx} = \theta(x)$ верно.

В силу непрерывности преобразования Фурье
$$\lim_{t \to +0} F\left[\theta(x) e^{-tx}\right] = F[\theta(x)], \quad \Rightarrow \quad F[\theta(x)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{t \to +0} \frac{i}{y - it},$$
причём мы сразу утверждаем, что S' предел существует, и, кстати, обозначается за $\frac{i}{y - i0}$. Тогда
$$F[\theta(x)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{y - i0}.$$

Т33

Докажем, что если $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и преобразование Фурье $F[f] \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, то $f \equiv 0$.

По Зоричу, если есть некоторое преобраование сигнала
$$\hat{f}(\omega) \equiv F[f](\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\pi}{a} k\right) \exp\left(-i \frac{\pi k}{a} \omega\right),$$
где $\hat{F}(\omega) = 0$ за пределами $|\omega| > a$, то мы приходим ряду с некоторыми отсчётными значениями. Но, так как $f \in \mathcal{D}$, то можем записать тригонометрический полином вида
$$\hat{f}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} \sum_{k=-N}^{N} f\left(\frac{\pi}{a} k\right) \exp\left(-i \frac{\pi k}{a} \omega\right) = 0,$$
ведь у конечного полинома не может быть континуально нулей.

Теорема Котельникова

Рассмотрим получаемый сигнал $f(t)$ с финитным спектром, отличный от нуля только для $\omega < a > 0$. Итак, $\hat{f}(\omega) \equiv 0$ при $|\omega| > a$, поэтому представление
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$
для функции с финитным спектром сводится к интегралу лишь по промежутку $[-a, a]$. На этом отрезке функцию $\hat{f}(\omega)$ разложим в ряд Фурье
$$\hat{f}(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(\hat{f}) \exp\left(i \frac{\pi\omega}{a} k\right),$$
по полной и ортогональной система на этом отрезке. Для коэффициентов этого ряда можем получить простое выражение вида
$$c_k(\hat{f}) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \hat{f}(\omega) \exp\left(i \frac{\pi\omega}{a} k\right)\, d\omega = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} f\left(-\frac{\pi}{a} k\right).$$
Собирая всё вместе находим, что
$$f(t) = \frac{1}{2a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{a} k\right) \int_{-a}^{a} \exp\left(i\omega \left(t - \frac{\pi}{a} k\right)\right)\, d\omega.$$
Вычисляя эти интегралы и приходим к *формуле Котельникова*:
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{a} k\right) \frac{\sin a \left(t - \frac{\pi}{a} k\right)}{a \left(t - \frac{\pi}{a} k\right)}.$$
Таким образом, для восстановления сообщения, опиописываемого функцией с финитным спектром, сосредоточенным в полосе частот $|\omega| < a$ достаточно передать по каналу связи лишь значения $f(k\Delta)$ (называемые

отсчетными значениями) данной функции через равные промежутки времени $\Delta = \pi/a$.

T34

Докажем, что преобразование Фурье в S' переводит распределение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{2\pi n} \quad \mapsto \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n.$$

Thr 4.34 (Формула Пуассона)**.** *Так называется следующее соотношение:*

$$\sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n).$$

$\triangle$. Формула получается при $x = 0$ из равенства вида

$$\sqrt{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n) e^{inx},$$

которое мы и докажем.

Поскольку φ, $\hat{\varphi} \in S$, ряды сходятся абсолютно и равномерно по x на $\mathbb{R}$. Также чтоит заметить, что

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n)$$

бесконечно гладкая и 2π-периодическая. Пусть $\{\hat{c}_k(f)\}$ – её коэффициенты Фурье по ортонормированной системе $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$. Тогда

$$\hat{c}_k(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{ikx}\, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{2\pi n}^{2p(n+1)} \varphi(x) e^{ikx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{ikx}\, dx \overset{\text{def}}{=} \hat{\varphi}(k).$$

Но ряд фурье f сходится к ней в любой точке $x \in \mathbb{R}$, значит в любой точке $x \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n) = f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{c}_n(f) \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n) e^{ikx}, \text{Q. E. D.}$$

$\square$

Тогда в пределах задания можем переписать это в терминах обобщенных функций

$$\sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \delta(x - 2\pi n) \,|\, \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \delta(x - n) \,|\, F[\varphi] \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle F[\delta(x - n)] \,|\, \varphi \rangle.$$

Тогда приходим к выражению вида

$$F\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n).$$

Вообще $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) = G$ называют *решеткой Дирака.*

Утверждается, что G_N сходится в S' к G $\forall \varphi$. В частности,

$$\lim_{N \to \infty} \langle G_N(x) \,|\, \varphi \rangle = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) \,\middle|\, \varphi \right\rangle,$$

так что ряд дейтсвительно сходится и всё хорошо.

5 Приближение функций $\rightrightarrows$, в среднем и среднеквадратичном

5.1 Приближение функций кусочно-линейными и многочленами

Носитель функции – дополнение к объдинению всех открытых множеств, на которых функция равна нулю, иначе – замыкание множества точек, в которых функция не равна нулю. Получается носитель функции всегда замкнут и для функций на $\mathbb{R}\ltimes$ компактнось носителя означает ограниченность.

Lem 5.1. *Для непрерывной с компактным носителем* $f(x)\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *и* $t_n \to 0$ *при* $n\to\infty$*, последовательность* $f_n(x) = f(x+t_n) \rightrightarrows f$.

$\triangle$. Непрерывня функция с компактным носителем равномерно непрерывна, то есть

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall x\in\mathbb{R},\,\forall t,\ \ (|t|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x-t)-f(x)|<\varepsilon,)$$

что можно интепретировать как равномерной сходимости $f(x-t_n)\rightrightarrows f(x)$. $\square$

Thr 5.2. *Для* $|x|<1$ *и* $\alpha\in\mathbb{R}$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$$

с радиуом сходимости не менее 1.

Lem 5.3. $f(x)=\sqrt{x}$ *можно равномерно приблизить многочленами на любом отрезке* $[0,a]$.

$\triangle$. Заменой переменной $x=a-y$ сведем вопрос к приближению функции

$$g(y)=\sqrt{a+\delta}\sqrt{1-\frac{y}{a+\delta}},$$

который раскладывается по предыдущей лемме в степенной ряд при $|y|\leqslant a+\delta$, причём при $|y|\leqslant a$ ряд сходится равномерно, тогда $g(y)$ приближается многочленом на $[0,a]$, соответственно и $\sqrt{x}$ тоже. $\square$

Lem 5.4. $f(x)=|x|$ *можно равномерно приблизить многочленами на любом отрезке* $[-a,a]$.

$\triangle$. Идея $\square$

$\triangle$. На отрезке $[0,a^2]$ приближаем $\sqrt{t}$ многочленом $|\sqrt{t}-P(t)|<\varepsilon$. Подставим $x=\sqrt{t}$, тогда на $x\in[0,a]$ верно $|x-P(x^2)|<\varepsilon$, что можно продолжить на $[-a,a]$, продолжая x чётным образом как $|x|$: $\Big||x|-P(x^2)\Big|<\varepsilon$. $\square$

Thr 5.5. *Всякую непрерывную кусочно-линейную на отрезке* $[a,b]$ *функцию можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленом.*

$\triangle$. Если функция со скачком производной на Δ, то $f(x)-\Delta/2|x-x_i|$ будет уже без скачка, тогда кусочно-линейная представится в виде

$$f(x)=\sum_i c_i|x-x_i|+ax+b,$$

где каждое слагаемой уже приближаемо. $\square$

Этого достаточно, чтобы приближать кусочно-линейные многочленами. Осталось понять, как приближать непрерывные на отрезке функции кусочно-линейными. Определим

$$\varphi_\delta(x)=\begin{cases}0, & x<-\delta,\\ 1-|x|/\delta, & |x|\leqslant\delta\\ 0, & x>\delta.\end{cases}$$

Такая функция кусочно линейная, непрерывная, и её носитель – $[-\delta,\delta]$.

Lem 5.6. *Для непрерывной* $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$*:* $\sum\limits_{k=0}^{m} f(k/m)\varphi_{1/m}(x-k/m)\rightrightarrows f$.

$\triangle$. Воспользуемся разбиением единицы

$$\sum_{k=0}^{m} \varphi_{1/m}(x - k/m) = 1.$$

Умножая это на $f(x)$ и вычитая $f_m(x)$, получаем

$$f(x) - f_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \left(f(x) - f(k/m)\right) \varphi_{1/m}(x - k/m).$$

При фиксированном x в правой части слагаемые ненулевые только при $|x - k/m| < 1/m$. Тогда правую часть оценим через модуль непрерывности

$$\left| \sum_{k=0}^{m} \left(f(x) - f(k/m)\right) \varphi_{1/m}(x - k/m) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{m} \omega_f(1/m) \varphi_{1/m}(x - k/m) = \omega_f(1/m),$$

который стремится к нулю при $m \to \infty$ по непрерывности f. Напомним, что

$$\omega_f(\delta) = \sup \left\{ \rho(f(x) - f(y)) \mid x, y \in M, \ \ \rho(x, y) < \delta. \right\}$$

$\square$

Thr 5.7. *Всякую $f\colon [a_1, b_1] \times [a_n, b_n] \to \mathbb{R}$ можно сколь угодно близко равномерно приблизить многочленом.*

$\triangle$. Сначала масштабируем параллелепипед в единичный куб. Потом равномерно приближаем непрерывную функцию комбинацией произведений кусочно-линейных функций отдельных переменных:

$$f\colon [0,1]^n \mapsto \mathbb{R}, \qquad f_m(x) = \sum_{k_1, \ldots, k_n} f\left(\frac{k_1}{m}, \ldots, \frac{k_n}{m}\right) \varphi_{1/m}\left(x_1 - \frac{k_1}{m}\right) \ldots \varphi_{1/m}\left(x_n - \frac{k_n}{m}\right).$$

Потом их приближаем многочленами. $\square$

sw

5.2 Приближение 2π-периодических функций тригонометрическими многочленами

Thr 5.8 (теорема Вейерштрасса)**.** *Всякую непрерывную на $[-\pi, \pi]$ функцию 2π-периодичную $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой $f(-\pi) = f(\pi)$ можно сколько угодно точно равномерно приблизить*

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

$\triangle$. Многочлен от тригонометрическего многочлена – всё ещё многочлен. Рассмотрим некотрую непрерывную $g(\cos x)$, которую можем приблизить на компакте $P(\cos x)$. В частности, можем приблизить 2π-периодическую функцию

$$\psi_\delta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_\delta(x - 2\pi k),$$

так как она чётна и 2π-периодична, а значит зависит от $\cos x$ непрерывно. Далее любую непрерывную 2π-периодическую f будем приближать суммами

$$f_m(x) = \sum_{k=0}^{m} f(2\pi k/m) \psi_{2\pi/m}(x - 2\pi k/m),$$

аналогично раннее доказанной лемме. $\square$

5.3 * Алгебры непрерывных на компактах функций. Теорема Стоуна-Вейерштрасса

Def 5.9. Множество $\mathcal{A} \subseteq C(x)$ (– непрерывные на компакте функции) называется *алгеброй*, если она содержит константы ($\mathbb{R} \subseteq \mathcal{A}$) и топологически "замкнута"относительно операций $\cdot$ и $+$.

Def 5.10. *Алгебра разделяющая точки* — $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $x = y \in X$, $\exists f \in A$ такая что $f(x) = a$, а $f(y) = b$.

Thr 5.11 (теорема Стоуна-Вейерштрасса)**.** *Пусть у нас зафиксирован компакт K и дана алгебра непрерывных функций $\mathcal{A}$ на этом компакте, которая разделяет точки. Тогда любую непрерывную на K функцию можно сколь угодно близко равномерно приблизить функциями из $\mathcal{A}$.*

5.4 Пространства L_p. Неравенства Гёльдера и Минковского.

Def 5.12. *Абсолютно интегрирумыми функциями* на измеримом $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называют $f\colon X \mapsto \mathbb{R}$ с конечным интегралом $\int_X |f(x)|\,dx$. *Расстоянием*[3] между функциями f и g будем считать $\int_X |f(x) - g(x)|\,dx$.

Def 5.13. *Нормой* в векторном пространстве V над полем $\mathbb{F}$ называется функционал $p\colon V \mapsto \mathbb{R}_+$, обладающий свостами:

1. $p(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0_V$ – невырожденность нормы (в *полунорме* это неверно);
2. $\forall x,\, y \in V,\;\; p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ – неравенство треугольника;
3. $\forall \alpha \in \mathbb{F},\, \forall x \in V,\;\; p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

Def 5.14. Обозначим через $L_1(X)$ факторпространство линейного пространства абсолютно интегрируемых функций по его линейному подпространству почти всюду равных нулю функций. То есть функции на 0 расстоянии считаем равными. *Нормой* будем считать

$$\|f\|_1 = \int_X |f(x)|\,dx.$$

Def 5.15. Для измеримого по Лебегу $X \subset \mathbb{R}^n$ и числа $p \geqslant 1$ *факторпространство* измеримых по Лебегу функций на X с конечной (полу)нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p\,dx\right)^{1/p},$$

по модулю функций равных нулю почти всюду, назовём $L_p(X)$.

Очень хорошим, симметричным, актуальным для описания квантовой механики оказывается L_2 пространство, на котором естественно вводить скалярное произведение, его порождающее.

Def 5.16. В комплексном случае норма L_2 порождена *скалярным произведением*

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx \qquad \longrightarrow \qquad \|f\|_2 = \sqrt{(f, f)}.$$

Thr 5.17 (Неравенство Гёльдера)**.** *Возьмём $p,\, q > 1$ такие, что $1/p + 1/q = 1$. Пусть $f \in L_p(X)$ и $g \in L_q(X)$. Тогда*

$$\int_X |fg|\,dx \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

$\triangle$. Добьёмся (домножением на константу) ситуации с $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. Тогда достаточно проинтегрировать неравенство вида

$$|fg| \leqslant \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}.$$

Неравенство же можем получить из выпуклости логарифма

$$\ln(\alpha f + \beta g) \geqslant \alpha \ln f + \beta \ln g, \quad \alpha + \beta = 1, \qquad \Rightarrow \Big/ \begin{matrix} \alpha = p^{-1} \\ \beta = q^{-1} \end{matrix} \Big/ \Rightarrow \qquad \ln\left(\frac{f}{p} + \frac{b}{q}\right) \geqslant \frac{\ln f}{p} + \frac{\ln g}{q} = \ln(f^{1/p} g^{1/q}).$$

$\square$

Con 5.18. *Для измеримых функций и чисел $p,\, q > 0$, таких что $1/p + 1/q = 1$, имеет место формула*

$$\|f\|_p = \sup\left\{\int_X fg\,dx \;\middle|\; \|g\|_q \leqslant 1\right\}. \tag{5.1}$$

[3]В силу неравенства $|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)|$ расстояние конечно.

△. По неравенству Гёльдера норма f не менее супремума правой части, более того равенство достигается при выборе

$$g(x) = \frac{\operatorname{sign} f(x)|f(x)|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}}.$$

□

Def 5.19. Функция $f\colon V \mapsto \mathbb{R}$ на векторном пространство называется *выпуклой*, если для любых x, $y \in V$ и любого $t \in (0,1)$ имеет место неравенство

$$f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y).$$

Функция называется *строго выпуклой*, если неравенство строгое $\forall x \neq y$ и $t \in (0,1)$.

Lem 5.20. *Если в семействе функций $f_\alpha\colon V \mapsto \mathbb{R}$, $\alpha \in A$, все функции выпуклые, то*

$$f(x) = \sup\{f_\alpha(x) \mid \alpha \in A\}$$

тоже выпуклая[4].

△. Выпуклость функции нескольких переменных означает выпуклость всех её ограничений на прямые, а значит достаточно доказать это для функции одной переменной, `что допускает графическое доказательство`. □

Thr 5.21 (Неравенство Минковского)**.** *Для функций f, $g \in L_p$ при $p \geqslant 1$*

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

△. В силу предыдущих двух утверждений норма $\|\cdot\|_p$ – выпуклая функция на L_p, тогда, в частности

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \leqslant (\|f\|_p + \|g\|_p)\,, \qquad \Rightarrow \qquad \left\|\frac{f}{2} + \frac{g}{2}\right\|_p \leqslant \left\|\frac{f}{2}\right\|_p + \left\|\frac{g}{2}\right\|_p,$$

где последнее верно по 1-однородности нормы. □

5.5 Полнота пространства L_p

Полнота пространства интегрируемых функций

Далее в разделе всегда предполагается суммирование по k от 1 до ∞, если не сказано иного. Глобально можно сказать, что `в нормированном пространстве вопрос полноты сводится в вопросу сходимости рядов`, у которых сходятся суммы норм.

Def 5.22. Назовём последовательность (f_n) *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon\colon \forall n, m \geqslant N_\varepsilon \ \ \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

Lem 5.23. *Пусть у последовательности функций (u_k) из $L_p(X)$ сумма $\Sigma = \sum \|u_k\|_p$ оказалась конечной. Тогда $S(x) = \sum u_k(x)$ определена для почти всех x и $\|S\|_p \leqslant \sum \|u_k\|_p$.*

△. Определим возрастающую последовательность

$$\rho_N(x) = \left(\sum_{k=1}^N |u_k(x)|\right)^p, \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \int_X \rho_N(x) \leqslant \left(\sum_{k=1}^N \|u_k(x)\|\right)^p \leqslant \Sigma^p \quad \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad \rho(x) = \lim_{N\to\infty} \rho_N(x).$$

Первое следствие получается по неравенству Минковского, второе по теореме о монотонной сходимости функции: $\rho(x)$ почти всюду конечна и имеет конечный интеграл, что означает почти всюду абсолютную сходимость ряда $\sum u_k(x)$.

Функция $\sigma_N(x) = \left|\sum u_k(x)\right|^p$ сходится к $|S(x)|^p$ почти всюду и $\sigma_N(x) \leqslant \rho(x)$. По теореме об ограниченной сходимости

$$\left\|\sum u_k(x)\right\|_p^p \to \|S\|_p^p, \qquad \Rightarrow \qquad \|S\|_p \leqslant \sum \|u_k\|_p,$$

по предельному переходу в неравенстве Минковского. □

[4] Если разрешить в определении выпуклости значение $+\infty$.

Lem 5.24. *Пусть у последовательности функций (u_k) из $L_p(x)$ сумма $\Sigma = \sum \|u_k\|_p$ оказалась конечной. Тогда $S(x) = \sum u_k(x)$ определена для почти всех x и (что отличает эту лемму от предыдущей) $S = \sum u_k$ в смысле сходимости в пространстве $L_p(X)$.*

$\triangle$. По предыдущей лемме для остатка $r_N(x) = \sum_{k=N=1}^{\infty} u_k(x)$:

$$\|r_N\|_p \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \|u_k\|_p, \qquad \text{при} N \to \infty,$$

что и означает сходимость в терминах L_p. $\square$

Thr 5.25. *Пространство $L_p(X)$ полно.*

$\triangle$. Рассмотрим фундаментальную последовательность (f_k) в $L_p(x)$ для подпоследовательности которой докажем сходимость. Выберем её так, чтобы $\|f_k - f_l\|_p \leqslant 2^{-k-1}$ при всех $l > k$.

Пусть тогда $u_1 = f_1$, $u_k = u_k - f_{k-1}$, получается хотим доказать сходимость суммы телескопического ряда $\sum u_k$, для которых $\|u_k\|_p \leqslant 2^{-k}$. По предыдущей лемме ряд почти всюду сходится к $S \in L_p(X)$, а (f_k) сходятся к S по норме $L_p(X)$. $\square$

Так и сводится в L_p вопрос полноты к вопросу сходимости рядов, со сходящейся суммой норм. Вообще сходимость в $L_p(X)$ может не означать поточечной сходимости ни в одной точке.

5.6 Приближение функций в L_p ступенчатыми и бесконечно гладкими

Def 5.26. Назовём *элементарно ступенчатыми* функции с конечным числом ступенек, в основании которых лежат элементарные множества.

Thr 5.27. *Пусть функция $f\colon X \mapsto \mathbb{R} \in L_p$ с конечным интегралом. Положим для $M > 0$*

$$f_M(x) = \begin{cases} M, & f(x) \geqslant M; \\ f(x), & |f(x)| \leqslant M; \\ -M, & f(x) \leqslant -M; \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{M\to+\infty} \|f_M\|_p = \|f\|_p.$$

Thr 5.28. *Пусть функция $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ и $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда f можно сколь угодно близко приблизить в среднем элементарно ступенчатой функцией.*

Thr 5.29. *Можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить элементарно ступенчатой $\forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)$.*

$\triangle$. Интеграл разности $f - f_M$ можно оценить, как

$$\begin{aligned} |f(x) - M|^p &\leqslant |f(x)|^p - M^p, && f(x) > M; \\ |f(x) + M|^p &\leqslant |f(x)|^p - M^p, && f(x) < -M; \end{aligned}$$

что получается из выпуклости $|x|^p$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|f|^p - |f_M|^p)\, dx < \varepsilon^p, \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\mathbb{R}^n} |f - f_M|^p\, dx < \varepsilon^p.$$

Осталось перейти к ограниченной функции $g = f_M|_{[-a,a]^n}$. В силу непрерывности интеграла Лебега по множествам

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p\, dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{[-a,a]^n} |g(x)|^p\, dx,$$

поэтому можем приблизить f_M функцией g с точностью ε функцией $h \leqslant M$ с $\operatorname{supp} h = Q = [-a,a]^n$. Таким образом h измерима по лебегу, то есть $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Теперь возвращаемся к приближению функции из L_1 элементарно ступенчатой s в норме L_1:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h - s|\, dx < \varepsilon', \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\mathbb{R}^n} |h(x) - s(x)|^p\, dx \leqslant (2M)^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |h - s|\, dx < (2M)^{p-1}\varepsilon'.$$

Тогда можем добиться

$$\|f - s\|_p < \|f - g\|_p + \|g - h\|_p + \|h - s\|_p < 3\varepsilon,$$

при выборе $s = s(\varepsilon)$. $\square$

Thr 5.30. *Всякую $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить бесконечно дифференцируемой функцией с компактным носителем.*

$\triangle$. Вспомним хороший набор функций

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ e^{-1/x}, & x > 0. \end{cases} \qquad \varphi(x) = f(x+1)f(1-x), \qquad \varphi_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = A\varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_1}{\varepsilon}\right)\cdots\varphi\left(\frac{\sqrt{n}x_n}{\varepsilon}\right),$$

где последняя нормирована быть с единичным интегралом и отлична от нуля только в $U_\varepsilon(0)$. Тогда можем построить

$$\psi(x) = B\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt, \qquad B\colon \begin{cases} \psi(x) \equiv 0, & x \leqslant 1; \\ \psi(x) \equiv 1, & x \geqslant 1; \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \psi_{\varepsilon,\delta}(x) = \psi\left(\frac{\delta+\varepsilon-2|x|}{\varepsilon-\delta}\right),$$

где $\psi_{\varepsilon,\delta}$ отлична от нуля только в $U_\varepsilon(0)$ и тождественно равна 1 в $U_\delta(0)$.

Осталось свёрткой приблизить каждую ступеньку на параллелепипедом P, точнее χ_P в норме L_p, тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|\chi_P - g(x)\right|^p dx \leqslant \mu\left[U_\varepsilon(P)\right] - \mu P,$$

что стремится к нулю при $\varepsilon \to +0$. $\square$

Доплнительно. Также по теоерме Стоуна-Вейерштрасса любую $f \in L_p(X)$ можно сколь угодно близко по норме $\|\cdot\|_p$ приблизить ограниченным на X многочленом, где X – ограниченное измеримое в $\mathbb{R}^n$ множество.

Также для любой $f \in L_p\left(\mathbb{R}^n\right)$ можно показать непрерывность сдвига в L_p:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+t)-f(x)|^p\,dx \to 0 \;\text{ при }\; |t| \to 0,$$

показав это для непрерывной функции с компактным носителем, а затем по неравенству Минковского, приближая f, доказать утверждение.

6 Ограниченная вариация, абсолютная непрерывность и осцилляция

6.7 Функции ограниченной вариации

Def 6.1. Функция f на промежутке I имеет *ограниченную вариацию*, если для любых $x_0 < x_1 < \ldots M x_N \in I$ (в любом количестве)

$$|f(x_0)-f(x_1)| + |f(x_1)-f(x_2)| + \ldots + |f(x_{N-1})-f(x_N)| \leqslant M,$$

для некоторой константы M. Наименьшую константу M назовём *вариацией* функции f равную $\|f\|_B$, что задаёт *полунорму*, вида

$$\|f\|_B = \sup\left\{|f(x_0)-f(x_1)| + |f(x_1)-f(x_2)| + \ldots + |f(x_{N-1})-f(x_N)| \;\middle|\; N \in \mathbb{N}, a \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant b\right\}$$

Вообще это длина кривой в одномерном варианте, в частности кривая в $\mathbb{R}^n$ спрямляема только при конечной вариации каждой своей координаты. Важно что вариация функции аддитивна и выпукла, в смысле $\|f+g\|_B \leqslant \|f\|_B + \|g\|_B$.

Lem 6.2. *Функцию ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$ можно представить в виде суммы двух функций $f = u + d$, одна из которых возрастает, а другая убывает. При этом $\|f\|_B = \|u\|_B + \|d\|_B$ и если f была непрерывной, то u, d тоже будут непрерывны.*

$\triangle$. Определим *вариацию вверх* $u(x)$ как sup сумм положительных приращений и *вариацию вниз* $d(x)$ как inf сумм отрицательных приращений. Любой набор приращений даст $f(x)$ и его можно разбить на две части, одна из которых даст $u(x)$ а другая $d(x)$. Тогда

$$f(x) = u(x) + d(x), \qquad \left\|f|_{[a,x]}\right\| = u(x) - d(x),$$

при чём $u(x) \uparrow$ и $d(x) \downarrow$. Так как вариация монотонной функции – модуль её приращения, то $\|f\|_B = \|u\|_B + \|d\|_B$.

Покажем теперь, что $f \in C[a,b] \;\Rightarrow\; u, d \in C[a,b]$. Функции u и $-d$ не убывают, покажем, что нет скачков. Их сумма $u(x) - d(x)$ равна $\left\|f|_{[a,x]}\right\|$ так что осталось показать, что у вариации нет скачков, что сводится к утверждению о непрерывности зависимости длины спрямляемой кривой от параметра. $\square$

Вспомним, что для монотонной g и $f \in L_1$ верна следующая теорема о среднем:

Thr 6.3 (Вторая теорема о среднем). *Если f интегрируема по Лебегу с конечным интегралом, а g монотонна и ограниченна на $[a,b]$, то при некотором $\nu \in [a,b]$*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a+0)\int_a^\nu f(x)\,dx + g(b-0)\int_\nu^b f(x)\,dx.$$

Таким образом приходим к утверждению о том, что `функции ограниченной вариации допускают оценку интеграла своего произведения с другой функцией`. В силу предыдущей леммы для любой функции ограниченной вариации g из второй теоремы о среднем

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant (|g(a+0)| + \|g\|_B)\cdot \sup\left\{\left|\int_\nu^b f(x)\,dx\right| \text{ при } \nu \in [a,b]\right\}.$$

6.8 Абсолютно непрерывные функции

Для формулы Ньютона-Лейбница условие липшицевости можно ослабить до следующего:
Def 6.4. Функция F на промежутке I *абсолютно непрерывна*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$, такое что $\forall\, x_1 \leqslant y_1 \leqslant x_2 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant x_N \leqslant y_N \in I$ из неравенства

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \ldots + |x_N - y_N| \leqslant \delta$$

следует, что

$$|F(x_1) - F(y_1)| + |F(x_2) - F(y_2)| + \ldots + |F(x_N) - F(y_N)| \leqslant \varepsilon.$$

Говоря неформально, сумма модулей приращений функции на системе непересекающихся отрезков должна стремиться к нулю при суммарной длине системы, стремящейся к нулю.

Lem 6.5. *Абсолютно непрерывная на отрезке функция f имеет на нём ограниченную вариацию. Также на отрезке существует разложение f в сумму двух монотонных абсолютно непрерывных функций.*

$\triangle$. Для данной абсолютно непрерывной $f\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ рассмотрим $f = u + d$, также вспомним $u[x] + (-d[x]) = v(x) = \left\|f|_{[a,x]}\right\|_B$. Осталось показать абсолютную непрерывность $v(x)$.

От противного: $\exists \varepsilon > 0$ такое, что сумма приращений v на некоторых отрезках не менее ε. По аддитивности вариации $v(y_i) - v(x_i) = \left\|f|_{[x_i,y_i]}\right\|_B$, тогда

$$\exists\ [x_{i1}, y_{i1}], \ldots, [x_{iN_i}, y_{iNN_i}] \subset [x_i, y_i],\ :\ |f(x_i1) - f(y_{i1}) + \ldots + |f(x_{iN_i}) - f(y_{iN_i})| \geqslant \frac{v(y_i) - v(x_i)}{2}.$$

Суммируя такие неравенства по всем $i = 1, \ldots, N$ получаем, что сумма модулей приращений f не менее $\varepsilon/2$, что противоречит абсолютной непрерывности f. $\square$

6.9 Абсолютная непрерывность интеграла с переменных верхним пределом

Thr 6.6. *Для некоторой $f \in L_1[a,b]$, всякая обобщенная первообразная F*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

является абсолютно непрерывной и её производная почти всюду существует и совпадает с f.

$\triangle$. В силу теоремы о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом, производная F почти всюду равна f. Осталось показать абсолютную непрерывность F. Как и раньше, приблизим f ограниченной $g \leqslant M$, так что $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Тогда при наборе отрезков S длины $< \delta$

$$\int_S |g(x)|\,dx \leqslant M\delta, \qquad \int_S |f(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \Rightarrow \quad \int_S |f(x)|\,dx \leqslant M\delta + \varepsilon, \quad \Rightarrow \quad \int_S |f(x)|\,dx \leqslant 2\varepsilon,$$

что и означает сумме приращений F на отрезках S не более 2ε при $\mu[S] < \delta$. $\square$

6.10 Обобщенная формула Ньютона-Лейбница

Thr 6.7 (обобщенная формула Ньютона-Лейбница)**.** *Абсолютно непрерывная функция* $F\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ *почти всюду имеет производную и является обобщенной первообразной своей производной с выполнением формулы Ньютона-Лейбница*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,dt.$$

Легко показать через... ух, ну по **лемме Безиковича**, посмотреть можно здесь.

6.11 Абсолютная непрерывность произведения абсолютно непрерывных и обобщенное интегрирование по частям

Con 6.8 (Обобщенное интегрирование по частям)**.** *Если* $f \in L_1[a,b]$, *а* g *абсолютно непрерывна, то верна формула интегрирования по частям*

$$\int_a^b fg\,dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx,$$

где $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

△. Производная g' существует почти всюду, функция F абсолютно непрерывна по раннее доказанной теореме, тогда Fg тоже абсолютно непрерывна:

$$F(y)g(y) - F(x)g(x) = [F(y) - F(x)]\,g(y) + \big[g(y) - g(x)\big]\,F(x).$$

Тогда $(Fg)' = fg + Fg'$, к её приращению применима формула Ньютона-Лейбница, так и получаем интегрирование по частям. □

Дополнительно. Функция $f\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда она может быть сколь угодно близко в B-норме приближена кусочно-линейными функциями.

6.12 Теорема Римана об осцилляции и равномерной осцилляции

Def 6.9. Определим *коэффициент Фурье* (с точностью до умножения на константу)

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx.$$

Thr 6.10. *Если* $f \in L_1(\mathbb{R})$, *то* $|c_f(y)| \leqslant \|f\|_1$ *и* $c_f(y)$ *непрерывно зависит от* y.

Thr 6.11 (Теорема об ограниченной сходимости)**.** *Пусть неотрицательная функция* g *на измеримом* X *имеет конечный интеграл. Пусть* f_k *измеримы на* X, $|f_k| \leqslant g$ *для всех* k *и* $f_k \to f$ *поточечно на* X. *Тогда* $\lim_{k\to\infty} \int_X f_k\,dx = \int_X f\,dx$.

△. По теореме об ограниченной сходимости разрешен предельный переход под знаком интеграла, значит $c_f(y)$ непрерывно зависит от y. Расписать бы это. □

Thr 6.12 (Лемма об осцилляции)**.** *Если* $f \in L_1(\mathbb{R})$, *то выражение*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx$$

стремится к нулю при $y \to \infty$.

△. Получим оценко на порядок убывания $c_f(y)$ при $y \to \infty$ считая $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывной и производные до k-й включительно $\in L_1(\mathbb{R})$, тогда интегрируя по частям (дифференцируя функцию) получим:

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d\left(\frac{e^{-ixy}}{-iy}\right) = f(x)\left(\frac{e^{-ixy}}{-iy}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\cdot\left(\frac{e^{-ixy}}{-iy}\right) dx =$$
$$= \frac{c[f'](y)}{iy} = \ldots = \frac{c[f^{(k)}](y)}{(iy)^k} = O\left(\frac{1}{y^k}\right), \qquad y \to \infty.$$

Тут мы воспользовались компактностью носителя функции и её производных.

Рассмотрим теперь $\forall f \in L_1(\mathbb{R})$. Найдём бесконечно гладкую g с компактным носителем $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Тогда $\forall y \in \mathbb{R}$:

$$|c[f](y) - c[g](y)| = |c[f-g](y)| \leqslant \varepsilon.$$

При этом для $c[g](y) \to 0$ доказали (быстрее любой степени). Отсюда следует, что $\overline{\lim}|c[f](y)| < \varepsilon$, точнее равен нулю. Но не убывает быстрее любой степени, ведь так? □

6.13 Порядок убывания коэффициентов Фурье абсолютно непрерывных функций

Lem 6.13. *Если производная $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и производные до k-й включительно*[5] *находятся в $L_1(\mathbb{R})$, то*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\, dx = o\left(\frac{1}{y^k}\right), \qquad t \to \infty.$$

△. Всё как раньше, но слагаемые вижа $f^{(l)}(x)e^{-ixy}|_{-\infty}^{+\infty 1}$ исчезают в силу конечности пределов $f^{(l)}$ на бесконечности. Так как $f^{(l+1)} \in L_1(\mathbb{R})$, то $f^{(l)}$ имеет конечные пределы в $-\infty$ и $+\infty$, которые должны быть равны нулю, так как $f^{(l)}$ конечного интеграла. Я бы и эту штуку посмотрел в другой книжке. □

6.14 Порядок убывания коэффициентов Фурье функций ограниченной вариации

Thr 6.14. *Если $f \in L-1(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, то выражение*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\, dx = O(1/y), \qquad y \to +\infty.$$

△. Это доказательство также оставило в моём мировозрение белые пятна. Получим оценку для интеграла по $[a,b]$. Можем представить $f = u + g$ в виде суммы монотонно возрастающей и убывающей. Тогда по второй теореме о среднем

$$c_{[a,b]}[f](y) = \int_a^b f(x)e^{-ixy}\, dx = u(a+0)\int_a^\nu e^{-ixy}\, dx + u(b-0)\int_\nu^b e^{-ixy}\, dx + g(a+0)\int_a^\psi e^{-ixy}\, dx + g(b-0)\int_\psi^b e^{-ixy}\, dx.$$

Функция ограниченной вариации имеет пределы на бесконечности, а из интегрируемости следует их равенство нулю. Тогда значения $u(a+0)$, $u(b-a)$, $g(a+0)$, $g(b-0)$ оцениваются полной вариацией $\|f\|_B$, а интегралы оцениваются по модулю как $\frac{2}{|y|}$. □

Con 6.15. *Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ имеет абсолютно непрерывную $(k-1)$-ую производную, производные до k-й включительно находятся в $L_1(\mathbb{R})$, а $f^{(k)}$ (возможно, после изменения на множестве меры нуль) имеет ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$, тогда*

$$c_f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\, dx = O\left(\frac{1}{y^{k+1}}\right), \qquad y \to \infty.$$

△. Можно получить интегрированием по частям, аналогично лемме 6.13, только используя предыдущую теорему. □

[5] Для k-й достаточно существования почти всюду.

Thr 6.16 (Лемма о равномерной осцилляции). *Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то выражение*

$$c[f](y,\xi,\eta) = \int_\xi^\eta f(x)e^{-ixy}\,dx$$

стремится к нулю при $y \to \infty$ равномерно по $\xi,\ \eta$.

$\triangle$. Разобьём $\mathbb{R}$ на коненое число промежутков числами $x_1 < \ldots < x_N$ так, чтобы на каждом промежутке $\int |f| < \varepsilon$. Для ξ и η найдём ближайшие $x_i,\ x_j$:

$$\left| \int_\xi^\eta f(x)e^{-ixy}\,dx \right| \leqslant \left| \int_{x_i}^{x_j} f(x)e^{-ixy}\,dx \right| + 2\varepsilon$$

и при достаточно большом ε по доказанноу неравномерному варианту, применяемого к ограничению f на $[x_i,\ x_j]$, что и доказывает равномерную оценку. $\square$

Периодические функции

Def 6.17. Для 2π-*периодической функции* $f(x+2\pi) \equiv f(x)$ *коэффициенты Фурье* запишутся, как

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx = \frac{(f, e^{inx})}{\|e^{inx}\|_2^2},$$

где последнее выражение понимается в смысле скалярного произведения и нормы в $L_2[-\pi,\pi]$.

Для таких функций сохраняются утверждения, доказанные выше.

Thr 6.18. *Пусть функция f имеет период 2π и абсолютно непрерывную $(k-1)$-ую производную, причём $f^{(k)}$ (возможно, после изменения на множестве меры нуль) имеет ограниченную вариацию на $[-\pi,\pi]$, тогда*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), \qquad n \to \infty.$$

$\triangle$. Здесь слагаемые $f(x)e^{-ixy}|_{-\pi}^{+\pi}$ обращаются в нуль в силу 2π-периодичности, поэтому можем воспользоваться теоремой об ограниченной вариации. $\square$

Lem 6.19. *Усли у 2π-периодической функции ограниченной вариации есть ненулевое конечное число разрывов, и она кусочно абсолютно непрерывна, то оценка $O(1/n)$ для коэффициентов Фурье неулучшаема.*

Thr 6.20. *Пусть функция f непрерывна и 2π-периодическая, тогда для коэффициента Фурье имеется оценка*

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)e^{inx}\,dx = O(\omega_f(\pi/n)),$$

где ω_f – модуль непрерывности f.

$\triangle$. Перейдём к переменной $x = x' + \pi/n$, тогда

$$c_n = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x'+\pi/n)e^{-inx'}\,dx', \qquad \Rightarrow \qquad |c_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2}\left(f(x+\pi/n) - f(x)\right)e^{-inx}\,dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\omega_f(\pi/n).$$

Так и получаем не очень точную, но полезную оценку. $\square$

7 Ряд Фурье в пространстве L_2

7.15 Неравенство Коши-Буняковского

textcolorugray

Thr 7.1 (Неравенство Коши-Буняковского). *Пусть функции f, $g\colon X \mapsto \mathbb{R}$ измеримы по Лебегу, а также $|f|^2$, $|g|^2 \in L_1(X)$. Тогда*

$$\left(\int_X f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(|f(x)|^2\,dx\right)\cdot\left(\int_X |g(x)|^2\,dx\right).$$

$\triangle$. Домножая на константы добиваемся нормировки к 1 интегралов $|f|^2$ и $|g|^2$. Тогда

$$|fg| \leqslant \frac{|f|^2}{2} + \frac{|g|^2}{2}, \quad \Rightarrow \quad \int_X |fg|\,dx \leqslant 1, \quad \Rightarrow \quad \left|\int_X fg\,dx\right| \leqslant 1.$$

$\square$

По теореме 5.30 любую $f \in L_2[-\pi,\pi]$ можно сколь угодно близко по норме приблизить бесконечно гладкой функцией с носителем строго в $(-\pi,\pi)$. Такая функция продолжается до бесконечно гладкой 2π-периодической и по теореме 5.8 *равномерно* приближается тригонометрическим многочленом $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$.

Равномерное приближение является приближением по норме L_2, так как на отрезке $[-\pi,\pi]$ имеется неравенство $\|f\|_2 \leqslant \sqrt{2\pi}\|f\|_C$. В случае L_2 нормы определим коэффициенты, которыми собираемся приближать.

Дописать про геометрическое представление коэффициентов Фурье.

7.16 Неравенство Бесселя и оптимальность коэффициентов Фурье

Thr 7.2 (Оптимальность коэффициентов Фурье). *Для всякой $f \in L_2[-\pi,\pi]$ и данного числа n лучшее по норме L_2 приближение f тригонометрическим многочленом $\sum_{-n}^{+n} c_k e^{ikx}$ дают коэффициенты Фурье*

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,dx.$$

$\triangle$. Воспользуемся скалярным произведением в L_2, занумеруем e^{ikx} в некотором порядке φ_1, φ_2, $\ldots$, где далее будет важна лишь орогональность этих функций относительно введенного скалярного произведения. Пусть мы приближаем $\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k$ и оптимизируем a_k, тогда

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k\right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} \bar{a}_k(f,\varphi_k) - \sum_{k=1}^{N} a_k(\varphi_k, f) + \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2\|\varphi_k\|_2^2.$$

Далее, по определению коэффициентов Фурье в виде $(f,\varphi_k) = c_k\|\varphi\|_2^2$ находим

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_k\right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N}\left(\bar{a}_k c_k + a_k\bar{c}_k - |a_k|^2\right)\|\varphi_k\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2\|\varphi_k\|_2^2 + \sum_{k=1}^{N} |c_k - a_k|^2\|\varphi_k\|_2^2,$$

откуда оптимально положить $a_k = c_k$. $\square$

Lem 7.3 (неравенство Бесселя). *Из доказательства предыдущей теоремы, можем получить, что*

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{N} c_k\varphi_k\right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2\|\varphi_k\|_2^2, \quad \Rightarrow \quad \|f\|_2^2 \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2\|\varphi_k\|_2^2, \quad \overset{\text{trig}}{\Rightarrow} \quad \|f\|_2^2 \geqslant 2\pi\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.$$

Точно ли до n?

Lem 7.4 (Представление действительнозначной функции). *Для действительнозначной функции представление в виде ряда Фурье перепишется в виде*

$$f = a_0 + \sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx), \quad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx,$$

для $k \geqslant 1$. Неравенство Бесселя тогда запишется так:

$$\|f\|_2^2 \geqslant \frac{\pi}{2}|a_0|^2 + \pi\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

7.17 Полные системы в пространстве L_2

Пусть $\{\varphi_i\}$ – ортогональная система в L_2. Допустим $f = \sum_i c_i \varphi_i$, где коэффиценты c_i могут быть найдены непосредственно:

$$c_i = \frac{(f,\, \varphi_i)}{(\varphi_i,\, \varphi_i)},$$

что упрощается в случае ортонормированной системы до $c_i = (f,\, \tilde{\varphi}_i)$. Числа c_i и называются *коэффицентами Фурье элемента* f в ортогональной системе φ_i.

В таких терминах можем определить и *ряд Фурье* элемента f по ортогональной системе $\{\varphi_k\}$:

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f,\, \varphi_i)}{(\varphi_i,\, \varphi_i)} \varphi_k,$$

где если система φ_k конечна, то ряд сводится к конечной сумме.

Так например можно выделить ортогональную систему $\{1, \cos kx, \sin kx;\ k \in \mathbb{N}\}$. Или, например, многочлены Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} \left(z^2 - 1\right)^n,$$

образующих ортогональную систему.

Def 7.5. Система $\{\varphi_\alpha; \alpha \in \mathcal{A}\}$ векторов нормированного пространства X называется *полной по отношению к множеству* $E \subseteq X$ (полной в E), если любой вектор $x \in E$ можно сколь угодно точно в смысле нормы пространства X приблизить конечными линейными комбинациями векторов системы. Другими словами $E \subset \bar{L}\{\varphi_\alpha\}$ – замыкание линейной оболочки векторов.

Thr 7.6 (условие полноты ортогональной системы)**.** *Пусть X – линейное пространство со скалярным произведением, а φ_k – конечная или счётная система ортогональных векторов в X. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *система $\{\varphi_k\}$ полна по отношению к множеству $E \subseteq X$;*
2. *для любого вектора в $f \in E \subset X$ имеет место разложение в ряд Фурье в смысле нормы;*
3. *для любого вектора $f \in E \subset X$ имеет место равенство Парсеваля $\|f\|^2 = \sum_k |(f, \varphi_k)|^2 / (\varphi_k, \varphi_k)$.*

$\triangle$. Из (1) $\Rightarrow$ (2) в силу экстремального свойства коэффициентов Фурье. Из (2) в (3) по теореме Пифагора. Из (3) $\Rightarrow$ (1) т.к. ввиду леммы о перпендикуляре по теореме Пифагора ... по Зоричу можно дописать. $\square$

Def 7.7. Система элементов линейного нормированного простанства X называется *базисом пространства* X, если любая конечная её подсистема состоит из линейно независимых векторов и любой вектор $x \in X$ может быть представлен в виде $f = \sum_k \alpha_k x_k$, где α_k – коэффициенты из поля констант пространства X, а сходимость понимается по норме пространства X.

Для доказательства неравенства Бесселя достаточно требовать ортогональность системы. В случае же равенства Парсеваля необходима *полнота* системы – возможность приблизить любую функцию L_2 линейной комбинацикй функций рассматриваемой системы сколь угодно точно.

7.18 Равенство Парсеваля для Фурье функций из $L_2[-\pi, \pi]$

Thr 7.8 (Сходимость ряда Фурье в среднеквадратичном)**.** *Для вской комплекснозначной $f \in L_2[-\pi, \pi]$*

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{ikx}\, dx$$

в смысле сходимости суммы в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$, а также выполняется равенство Парсеваля

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

$\triangle$. Сначала функцию f приближаем по L_2 норме тригонометрическим многочленом. Формула для квадрата точности приближения

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2\pi \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 < \varepsilon,$$

откуда при $N \uparrow$ можем говорить про сходимость ряда Фурье по L_2 норме по определению. Также получаем в пределе в неравенстве Бесселя равенство Парсеваля. $\square$

Стоит заметить что в последней теореме использовали «симметричное» сумирование – *суммирование в смысле главного значения*:

$$v.p. \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Пока мы не доказали, что в полученную формулу можно подставить хоть одно конкретное значение x. Тот факт, что ряд Фурье функции из $L_2[-\pi,\pi]$ на самом деле сходится к этой функции почти всюду, был доказан Л. Карлесоном (1966), а до этого был известен как гипотеза Лузина.

8 Тригонометрический ряд Фурье и его сходимость

8.19 Интегральное представление частичных сумм ряда Фурье, ядро Дирихле

Def 8.1. Обозначим *частичную сумму* тригонометрического ряда Фурье для 2π-периодической функции f как

$$T_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}.$$

Lem 8.2. *Для n-й частичной суммы ряда Фурье 2π-периодической функции имеет место формула в виде свёртки*

$$T_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\, dT,$$

с ядром Дирихле

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}.$$

Lem 8.3 (Равномерная ограниченность интегралов от ядра Дирихле)**.** *Существует такая константа C, что*

$$\left| \int_a^b D_n(t)\, dt \right| \leqslant C$$

для любых $a, b \in [-\pi,\pi]$, $n \in \mathbb{N}$.

8.20 Принцип локализации для рядов Фурье и равномерный принцип локализации

Thr 8.4 (Равномерный принцип локализации)**.** *Запищем для $\delta \in (0,\pi)$*

$$T_n(f,x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x+t) - f(x)\right) D_n(t)\, dt = \int_{-\delta}^{\delta} \left(f(x+t) - f(x)\right) D_n(t)\, dt + \int_M (f(x+t) - f(x)) D_n(t)\, dt,$$

где $M = \{t \mid \delta \leqslant |t| \leqslant \pi\}$. Если $f \in L_1[-\pi,\pi]$, то

$$\int_M \left(f(x+t) - f(x)\right) D_n(t)\, dt \;\to\; 0, \qquad n \to \infty.$$

Если f ограничена на отрезке $[a,b]$, то это выражение стремится к нулю равномерно по $x \in [a,b]$.

Def 8.5. Функция f называется гёльдеровой степени $\alpha > 0$, если для любых x, y из области определения

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha$$

с некоторой константой C.

Thr 8.6 (Признак Липшица сходимости ряда Фурье)**.** *Для абсолютно интегрируемой 2π-периодической функции, которая является гёльдеровой с некоторыми C, $\alpha > 0$ на интервале $(A, B) \supset [a, b]$*

$$T_n(f, x) \to f(x)$$

равномерно $x \in [a, b]$ при $n \to \infty$.

8.22 Признак Дирихле равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье на отрезке

Thr 8.7 (Признак Дирихле сходимости ряда Фурье)**.** *Для абсолютно интегрируемой 2π-периодической функции, которая является непрерывной с ограниченной вариацией на интервале $(A, B) \supset [a, b]$*

$$T_n(f, x) \to f(x)$$

равномерно по $x \in [a, b]$ при $n \to \infty$.

Далее несколько лемм, сформулированных в виде задач, а именно признак Дирихле сходимости ряда Фурье в точке, признак Липшица сходимости ряда Фурье в точке, признак Дини сходимости ряда Фурье в точке. Ага, это 13 тема. А потом будут темы 14 - 17.

8.24 Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье

Thr 8.8 (Почленное интегрирование ряда Фурье)**.** *Пусть $f \in L_1[-\pi, \pi]$ соответствует не обязательно сходящийся ряд Фурье, записанный в действительном виде как*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + B_n \sin nx).$$

Тогда ряд Фурье можно почленно интегрировать, то есть выполняется формула

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{2} a_0 (b - a) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n \sin nx}{n} - \frac{b_n \cos nx}{n} \right) \Bigg|_a^b .$$

8.25 Теорема Фейера

Def 8.9. Определим *ядро Фейера*

$$\Phi_n(t) = \frac{D_0(t) + D_1(t) + \ldots + D_n(t)}{n+1} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} \frac{n+1-|k|}{n+1} e^{ikx},$$

как усреднение ядер Дирихле. Соответствующая *сумма Фейера* будет соответствовать усреднением первых $n+1$ частичных сумм ряда Фурье,

$$S_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x + \xi) \Phi_n(\xi)\, d\xi = \frac{T_0(f, x) + \ldots + T_n(f, x)}{n+1}.$$

Записав

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} t\right)} = \frac{1}{4\pi} \frac{\cos nt - \cos((n+1)t)}{\sin^2\left(\frac{1}{2} t\right)},$$

и суммируя, получаем

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - \cos((n+1)t)}{(n+1)\sin^2\left(\frac{1}{2} t\right)} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2} t\right)}{(n+1)\sin^2\left(\frac{1}{2} t\right)}$$

Thr 8.10. *Для непрерывной 2π-периодической f*

$$S_n(f, x) \rightrightarrows f(x),$$

то есть сходится равномерно.

8.26 Представление котангенса и косеканса. Формула дополнения для бета-функции

Lem 8.11. *Разложим* $\cos ax$ *на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *при* $a \notin \mathbb{Z}$ *в ряд Фурье. Легко получить, что*

$$\operatorname{ctg} x = v.p. \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - \pi k}$$

$$\frac{1}{\sin x} = v.p. \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x - \pi k}$$

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right).$$

Lem 8.12. *Формула дополнения для бета-функции про* $p \in (0, 1)$

$$B(p, 1-p) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{-p}\,dt = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

Lem 8.13. *Для* $0 < |x| < \pi$ *верно, что*

$$\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x = \sum_{n,k \geqslant 1} \frac{2x^{2k-1}}{\pi^{2k} n^{2k}},$$

откуда можно получить значения сумм $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.