Первое задание по практике

Автор: Хоружий Кирилл

От: *6 мая 2021 г.*

Фазовая плотность газа

Оценим фазовую плотность

$$\rho \sim n\left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}\right)^{3/2}$$

азота в атмосфере при нормальных условиях и для холодного лития.

Для азота соответствующие величины

$$T \approx 273 \text{ К}, \qquad P \approx 10^5 \text{ Па}, \qquad m \approx \frac{28 \cdot 10^{-3}}{N_\text{A}} \text{ кг}, \qquad n \approx 0.78\frac{P}{kT} \approx 2.1 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Коэффициент 0.78 – количество объёмное количество азота в атмосфере. Итого находим

$$\rho\left(\text{N}_2\right) \sim 1.6 \cdot 10^{-7}$$

Для лития соответствующие величины

$$T \approx 100 \cdot 10^{-6} \text{ К}, \qquad m \approx \frac{3 \cdot 10^{-3}}{N_\text{A}} \text{ кг}, \qquad n \approx 0.2 \cdot \frac{1}{a^3} \approx 2.0 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}.$$

Здесь коэффицент 0.2 в выражение для концентрации – результат расчёта межчастичного расстояния для идеального газа, с вероятностью нахождения на радиусе r:

$$P(r) = \frac{3}{r_s}\left(\frac{r}{r_s}\right)^2 \exp\left(-\left[\frac{r}{r_s}\right]^3\right), \qquad r_s = \left(\frac{3}{4\pi n}\right)^{1/3}, \qquad \langle P(r)\rangle = 0.893 \cdot r_s, \qquad \Rightarrow \qquad n \approx 0.17 \cdot \frac{1}{a^3},$$

что совпадает с численным моделированием. Итого, фазовая плотность для лития,

$$\rho\left(\text{Li}\right) \sim 2.0 \cdot 10^{-4} \sim 1.2 \cdot 10^3 \rho\left(\text{N}_2\right).$$

Замедление лития

Теперь оценим, ускорение с которым замедляется литий в пучке:

$$mw = \hbar\frac{\Gamma}{2}, \qquad \Gamma = \frac{1}{27} \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}.$$

Тогда

$$w \approx 0.39 \text{ м/с}^2 \approx g/25,$$

а длина тормозного пути (с начальной скорости 500 м/с) составит $s = v_0^2/2g \approx 319$ км, что как-то слишком много.

Однако не при наличии k в формуле для w, не при отсутсвии, остается проблема с размерностью в этой формуле (по крайней мере в СИ), в частности не хватает деления на скорость в RHS, однако использование скорости света сделает результат ещё непригляднее, так что открытым остается вопрос – какая скорость (размерный коэффициент?) имелись ввиду.

Частота столкновений

Оценка частоты столкновений (в одном кубометре):

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}}n^2\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\sigma,$$

и здесь вопрос только к σ для холодного лития.

Для холодного лития. Судя по этой эффективное сечение для температуры порялка 50 мкК и столкновений Li-Cs порядка

$$\sigma_\text{CsLi} \sim 5 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2,$$

кстати, там же указана частота для такого процесса.

$$f_0 \sim 20 \text{ с}^{-1}.$$

Так как нас интересует оценка порядков, то наверное не очень плохая затея считать цезий сильно меньше лития, и тогда $\sigma_{\mathrm{LiLi}} \approx 2\sigma_{\mathrm{CsLi}} \approx\sim 1 \cdot 10^{-15}$ м^2. Вообще есть зависимость $\sigma(T)$ вида $\sigma = \sigma_0(1 + S/T)$ (формула Сазерленда), но этим тоже пренебрежем. Тогда

$$f_1 = 1.7 \cdot 10^{19} \text{ с}^{-1},$$

что много (?). Если взять просто размер (?) атомов лития $r = 1.8 \cdot 10^{-12}$ м, то $\sigma \approx 2.1 \cdot 10^{-19}$, и $f_2 \sim 3.6 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$.

Для азота в нормальных условиях. Здесь проще воспользоваться знанием длины свободного пробега для молекул азота в нормальных условиях

$$\lambda \approx 0.6 \cdot 10^{-7} \text{ м},$$

откуда

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda n} \approx 5.7 \cdot 10^{-19} \text{ м}^2.$$

Тогда частота столкновений

$$f \approx 1.3 \cdot 10^{35} \text{ с}^{-1},$$

что много больше частоты столкновений для атомов лития.