Контрольная работа №1 по теории вероятностей

Автор работы: Хоружий Кирилл

От: *12 апреля 2021 г.*

T1

Известно, что ξ нормально распределена, и $\mathrm{E}\,\xi = -11$, а $\mathrm{E}\left((2\xi+3)(\xi-2)\right) = 253$, найти $\mathrm{P}(\xi \in (-15, 0.16))$.

Итак, $\mathrm{P}(\xi)$ вида

$$\mathrm{P}(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\xi-a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Матожидание можем найти, как интеграл вида

$$\mathrm{E}\,\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\xi-a)^2}{2\sigma^2}\right) d\xi = \Big/ \xi - a = t \Big/ = \frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\, dt\right) = a.$$

Аналогчино находим второй момент:

$$\mathrm{E}\,\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\xi-a)^2}{2\sigma^2}\right) d\xi = \Big/ \xi - a = t \Big/ = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt.$$

Первый интеграл легко сводится к Гамма-функции, находим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) dt = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{(2\sigma^2)^{3/2}}{\sqrt{2\pi}} = \sigma^2,$$

второй интеграл просто сводится к a^2, итого

$$\mathrm{E}\,\xi^2 = \sigma^2 + a^2.$$

Так приходим к системе вида

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{E}(\xi^2) - \mathrm{E}(\xi) - 6 = 253 \\ \mathrm{E}(\xi) = a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma^2 = 3, \\ a = -11. \end{cases}$$

Искомая веростность $\mathrm{P}(\xi \in (-15, 0.16))$ в таком случае равна

$$\int \mathbf{N}(\xi,\, \sigma,\; a)\, d\xi = \frac{1}{2}\mathrm{Erf}\left(\frac{\xi - a}{\sqrt{2}\sigma}\right), \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(\xi \in (-15, 0.16)) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Erf}\left(\frac{0.16-11}{\sqrt{6}}\right) - \mathrm{Erf}\left(\frac{-15+11}{\sqrt{6}}\right)\right) \approx 0.99$$

T2

Для функции вида

$$f(x) = \begin{cases} C/(x-3), & -5 < x < 2 \\ 0, & x \leqslant -5 \ || \ 2 \leqslant x \end{cases}$$

являющейся функцией распределения некоторой случайной величины ζ найдём C и характеристики $\mathrm{E}(\zeta)$, $\mathrm{D}(\zeta)$.

Для начала найдём C:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = -\int_{-5}^{2} \frac{C}{3-x} = C\ln(3-x)\Big|_{-5}^{2} = -C\ln(8), \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{\ln 8}.$$

Теперь найдём характеристики ζ:

$$\mathrm{E}(\zeta) = -\int_{-5}^{2} x\frac{C}{3-x} = \Big/ -\frac{x}{3-x} = \frac{3}{x-3} + 1 \Big/ = \frac{7 - 3\ln(8)}{-\ln 8} \approx -0.37$$

$$\mathrm{E}(\zeta^2) = -\int_{-5}^{2} x^2\frac{C}{3-x} = \Big/ -\frac{x^2}{3-x} = x + \frac{9}{x-3} + 3 \Big/ = \frac{18\ln 2 - 7}{\ln 4},$$

тогда дисперсия ζ:

$$\mathrm{D}(\zeta) = \mathrm{E}(\zeta^2) - \mathrm{E}^2(\zeta) = \frac{7(27\ln(2) - 14)}{18\ln^2(2)} \approx 3.82.$$

T3

Введем для каждого места величину ξ_i, равную 1 в случае нечётного числа и 0 иначе. Число, наверное, подразумевает, что на первом месте не может стоять ноль, но на всякий случай пока обозначим вероятность быть первой цифре нечетной за γ, остальных местах равновероятны значения 0 и 1.

Вероятность существования хотя бы одной нечётной цифры найдём через вероятность их отсутсвия:

$$\mathrm{P}(\exists a_i \in \mathrm{Odd}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (1-\gamma).$$

Матожидание же величины $\xi = \sum_{i=1}^{8} \xi_i$ легко найти, в силу независимости ξ:

$$\mathrm{E}(\xi) = \sum_{i=1}^{8} \mathrm{E}(\xi_i) = 7\,\mathrm{E}(\xi_i) + \gamma.$$

Если на первом месте может стоять 0, то $\gamma = 0.5$ и, соответственно,

$$\mathrm{P}(\exists a_i \in \mathrm{Odd}) = \frac{255}{256} \approx 1 - 3.9 \cdot 10^{-3}, \qquad \mathrm{E}(\xi) = 4.$$

Если же 0 стоять на первом месте не может, то $\gamma = 5/9$ и, соответственно,

$$\mathrm{P}(\exists a_i \in \mathrm{Odd}) = 1 - \frac{1}{128}\frac{5}{9} \approx 1 - 4.3 \cdot 10^{-3}, \qquad \mathrm{E}(\xi) = \frac{73}{18} \approx 4.06.$$

T4

Найдём производящую функция для биномиального распределения, вида

$$\mathrm{P}(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

что соответствует количеству успехов в схеме Бернулли, где вероятность успеха p.

Коэффициенты в биноме Ньютона выглядят очень похоже на P, так что заметим, что производящая функция вида

$$P(s) = (q + ps)^n,$$

нам подходит. Найдём матожидание и дисперсию, как

$$\mathrm{E}(\xi) = P'_s(s=1), \qquad \mathrm{D}(\xi) = P''(1) + P'(1) - \mathrm{E}^2(\xi).$$

Производные $P(s)$:

$$P'(s) = np(q+ps)^{n-1}, \quad P'(1) = np, \qquad P''(s) = n(n-1)p^2(q+ps)^{n-1}, \quad P''(1) = n(n-1)p^2,$$

тогда искомые величины:

$$\mathrm{E}(\xi) = np, \qquad \mathrm{D}(\xi) = np(1-p) = npq.$$

T5

Известно, что $\mathrm{E}\,x = 6$, $\mathrm{E}\,y = 19$, $\mathrm{D}\,x = 7$, $\mathrm{D}\,y = 12$, тогда матожидание и дисперсия для $z = 3x - 2y$ равны

$$\mathrm{E}\,z = \mathrm{E}(3x) - \mathrm{E}(2y) = 3\,\mathrm{E}(x) - 2\,\mathrm{E}(y) = -20, \qquad \mathrm{D}\,z = \mathrm{D}(3x) + \mathrm{D}(2y) = 9\,\mathrm{D}(x) + 4\,\mathrm{D}(y) = 111.$$

T6

Для поиска коэффициента корреляции сначала найдём дисперсию и матожидание количества людей, выходящих на 8 этаже, (ξ) и количества людей, выходящих на 8 этаже или выше (η).

Представим величину ξ как сумму четырёх других $\xi = \sum_{i=1}^{4} \xi_i$, где ξ – вероятность выйти на 8 этаже для каждого из четырех людей:

ξ	1	0
P	1/12	11/12

В силу независимости ξ_i верно, что

$$\mathrm{E}(\xi) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{4} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{4} \mathrm{E}(\xi_i) = \frac{4}{12}, \qquad \mathrm{D}(\xi) = \mathrm{D}\left(\sum_{i=1}^{4} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{4} \mathrm{D}(\xi_i) = 4\left(\frac{1}{12} - \left(\frac{1}{12}\right)^2\right) = \frac{11}{36}.$$

Аналогично найдём характеристики η, представив через сумму независимых величин $\eta = \sum_{i=1}^{4} \eta_i$, где η_i – вероятность для каждого человека выйти на этаже, выше восьмого

η	1	0
P	5/12	7/12

Тогда, аналогично, в силу незаивимости η_i, находим

$$\mathrm{E}(\eta) = \sum_{i=1}^{4} \mathrm{E}(\eta_i) = 4 \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{3}, \qquad \mathrm{D}(\eta) = \sum_{i=1}^{4} \mathrm{D}(\eta_i) = 4 \cdot \left(\frac{5}{12} - \frac{25}{144}\right) = \frac{35}{36}.$$

Теперь найдём матожидание $\mathrm{E}(\xi\eta)$, построив таблицу $\mathrm{P}(\xi, \eta)$, где ξ и η принимает значения от 0 до 4. Заметим, что таблица будет верхнетреугольной: если на 8 этаже вышло n людей, то $\eta \geqslant n$. Сформировать вероятность $\mathrm{P}(\xi = \xi_0, \eta = \eta_0)$ можно, выбирая ξ_0 людей из 4 – оставшихся на 8 этаже, выбирая $\eta - \xi$ людей из $4 - \xi$ – оказавшихся на 9 этаже и выше, где вероятность оказаться ниже 8 – (7/12), и вероятность быть на 9 и выше – (5/12), итого находим

$$\mathrm{P}(\xi = \xi_0, \eta = \eta_0) = \binom{4}{\xi_0} \left(\frac{1}{12}\right)^{\xi_0} \binom{4-\xi_0}{\eta_0 - \xi_0} \left(\frac{7}{12}\right)^{4-\eta_0} \left(\frac{5}{12}\right)^{\eta_0 - \xi_0},$$

а искомое матожидание тогда будет равно

$$\mathrm{E}(\xi\eta) = \sum_{\xi_0=0}^{4} \sum_{\eta_0=0}^{4} \xi_0 \eta_0 \, \mathrm{P}(\xi =_{\xi_0}, \eta = \eta_0) = \frac{3}{4},$$

что нетрудно получить прямым вычислением. Конечно, судя по простоте ответа, его можно было получить и более простым путём, но зато мы уверены в результатах.

Наконец, корреляция ξ и η, равна

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathrm{D}\,\xi}\sqrt{\mathrm{D}\,\eta}} = \frac{\mathrm{E}(\xi\eta) - \mathrm{E}(\xi)\,\mathrm{E}(\eta)}{\sqrt{\mathrm{D}\,\xi}\sqrt{\mathrm{D}\,\eta}} = \sqrt{\frac{7}{55}} \approx 0.36.$$

T7

Так как доска небольшая, то, имея калькулятор, ничего в принципе не мешает просто посчитать количество доступных путей:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680
1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820	2380	3060
1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188	8568	11628
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564	27132	38760
1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388	77520	116280
1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582	125970	203490	319770

Таблица 1: Заполненная количеством доступных путей доска к задаче №T7

Расчёт происходит из предположения о том, что у количество путей $N[i, j]$ равно

$$N[i, j] = N[i-1, j] + N[i, j-1],$$

а левый столбей и верхняя строка «заполнены» единицами – существует единственный способ добраться до этой клетки.

Если нас интересует движение такое, что последние три клетки были сделаны по короткой стороне доски, то вероятность такого маршрута:

$$\mathrm{P}_0 = \frac{11628}{319770} = \frac{2}{55} \approx 3.64 \cdot 10^{-2}.$$

Вообще можно заметить в числах биномиальные коэффициенты – действительно, достигая[1] $[i, j]$ клетки, мы делаем i шагов вправо и j вниз, то есть необходимо в $i + j$ элементах выбрать i элементов (или j), тогда искомая

[1] Формулы удобнее выглядят, когда i и j нумеруются с 0.

вероятность

$$P_0 = \binom{14+8}{8} \Big/ \binom{14+5}{5} = \frac{2}{55},$$

что сходится с прямым вычислением.

T8

Известно следующее совместное распределение:

$\xi\backslash\eta$	-2	0	2
-1	α	β	$2/13$
1	$3/13$	$2/13$	$1/13$

, $\quad \alpha + \beta = \dfrac{5}{13}.$

где также известно, что $7\,\mathrm{D}(\xi) = 19\,\mathrm{D}(\eta)$.

Для начала найдём первые и вторые моменты для ξ и η:

$$\mathrm{E}(\xi) = -2 \cdot \left(\alpha + \frac{3}{13}\right) + 2 \cdot \frac{3}{13} = -2\alpha,$$

$$\mathrm{E}(\eta) = -1 \cdot \left(\alpha + \beta + \frac{2}{13}\right) + 1 \cdot \frac{6}{13} = -\frac{1}{13},$$

$$\mathrm{E}(\xi^2) = 4 \cdot \left(\frac{6}{13} + \alpha\right) = \frac{24}{13} + 4\alpha,$$

$$\mathrm{E}(\eta^2) = 1.$$

Теперь можем перейти к квадратному уравнению

$$19 \cdot \left(1 - \frac{1}{13^2}\right) = 7\left(\frac{24}{13} + 4\alpha - 4\alpha^2\right), \quad \Rightarrow \quad 13^2(x^2 - x) + 36 = 0, \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{4}{13}, \quad x_2 = \frac{9}{13}.$$

Но, так как $\alpha + \beta = 5/13$, а также $\operatorname{sign}\alpha = \operatorname{sign}\beta = 1$, то $\alpha < 5/13$, а значит искомая величина

$$\alpha = \frac{4}{13}.$$