Билеты по квантовой механике

Авторы заметок: Хоружий Кирилл
Примак Евгений

От: *24 декабря 2021 г.*

Я так давно родился,
Что слышу иногда,
Как надо мной проходит
Студёная вода.
...
Я так давно родился,
Что говорить не могу,
И город мне приснился
На каменном берегу.

А я лежу на дне речном
И вижу из воды
Далекий свет, высокий дом,
Зелёный луч звезды.

А. А. Тарковский

Также выражаем благодарность Гурьевой Соне и Мещерякову Паше за консультации по отдельным задачам.

Содержание

1 Задачи

Задача №1

> Найти собственные значения и собственные функции оператора трансляции $\hat{T}_{\boldsymbol{a}}$. Также рассказать про «квазиимпульс», «функции Блоха» и «зону Бриллюэна».

Оператор трансляции работает $\hat{T}_a |x\rangle = |x+a\rangle$ или так $\langle x|T_a\Psi\rangle = \Psi(x+a)$. Написать про пассивные и активные преобразования.

Оператор трансляции унитарный, а для унитарного оператора $\hat{A}$ и его собственных состояний $\hat{A}\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle$ легко показать, что

$$\langle A\lambda|A\lambda\rangle = \langle\lambda|A^\dagger A\lambda\rangle = \langle\lambda|\lambda\rangle, \qquad \langle A\lambda|A\lambda\rangle = \lambda\lambda^*\langle\lambda|\lambda\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \langle\lambda|\lambda\rangle = 1 = \lambda\lambda^*.$$

Тогда имеем $\lambda = e^{i\varphi}$, что приводит к самому виду оператора $\hat{A} = e^{i\hat{\varphi}}$, где $\hat{\varphi}$ – эрмитов.

Оператор трансляции запишем в виде $\hat{T}_{\boldsymbol{a}} = e^{i\hat{\varphi}}$, и оператор фазы $\hat{\varphi} = \frac{1}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}$, где $\hat{\boldsymbol{k}}$ – оператор квазиимпульса. Собственные же волновые функции для $\hat{T}_{\boldsymbol{a}}$ выразим в координатном представлении

$$\hat{T}_{\boldsymbol{a}}\,|\Psi\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}}\,|\Psi\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \langle\boldsymbol{r}|T_a|\Psi\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}}\,|\Psi\rangle\,.$$

Они удовлетворяют уравнению

$$\Psi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}) = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}}\Psi(r) \qquad \Rightarrow \qquad \Psi(r) = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}}\Phi(r), \qquad \Phi(r+a) = \Phi(r),$$

и называются функциями Блоха.

Собственные значения выражаются в виде $\lambda = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}}$.

Задача №2

> Вычислить $[x,\,\hat{p}^2]$, $[U(x),\,\hat{p}]$, $[U(x),\,\hat{p}^2]$.

В координатном представлении $\hat{x} = x$ и $\hat{p}_x = -i\hbar\partial_x$, тогда $\hat{p}_x^2 = -\hbar^2\partial_x^2$.

0) Начнём с нулевого примера, чтобы убедиться, что правильно смотрим на мир:

$$\begin{aligned} &[\hat{x},\,\hat{p}]\psi(x) = x(-i\hbar)\partial_x\psi - (-i\hbar)\partial_x(x\psi) = i\hbar\psi + i\hbar x\partial_x\psi - i\hbar x\partial_x\psi = i\hbar\psi,\\ \Rightarrow\quad &[\hat{x},\,\hat{p}] = i\hbar. \end{aligned}$$

а) Аналогично, в смысле операторного равенства,

$$\begin{aligned} [\hat{x},\,\hat{p}^2]\psi(x) &= x(-i\hbar)^2\partial_x^2\psi - (-i\hbar)^2\partial_x^2(x\psi) = -\hbar^2 x\partial_x^2\psi + \hbar^2\partial_x(\psi + x\partial_x\psi) =\\ &= -\hbar^2 x\partial_x^2\psi + \hbar^2\partial_x\psi + \hbar^2\partial_x\psi + \hbar^2 x\partial_x^2\psi = 2i\hbar\hat{p}\psi,\\ \Rightarrow [\hat{x},\,\hat{p}^2] &= 2i\hbar\hat{p}. \end{aligned}$$

б) Теперь найдём коммутатор с некоторой функцией $U(x)$:

$$\begin{aligned} &[U(\hat{x}),\,\hat{p}]\psi(x) = U(x)(-i\hbar\partial_x\psi) + i\hbar\partial_x(U\psi) = U(-i\hbar\partial_x\psi) + i\hbar(\psi\partial_x U + U\partial_x\psi) = i\hbar(\partial_x U)\psi,\\ \Rightarrow\ &[U(\hat{x}),\,\hat{p}] = 2i\hbar\hat{p}. \end{aligned}$$

в) Наконец,

$$\begin{aligned} [U(\hat{x}),\,\hat{p}^2]\psi(x) &= U(-\hbar^2)\partial_x^2\psi + \hbar^2\partial_x^2 U\psi = U(-\hbar^2)\psi'' + \hbar^2(\psi U'' + 2U'\psi' + \psi'' U) =\\ &= \hbar^2(\psi U'' + 2U'\psi') = (\hbar^2 U'' + \hbar 2iU'\hat{p})\psi,\\ \Rightarrow [U(\hat{x}),\,\hat{p}^2] &= \hbar^2 U'' + 2i\hbar U'\hat{p}. \end{aligned}$$

Задача №3

> Доказать соотноешния Фейнмана-Гельмана $\partial_\lambda f_n(\lambda) = \langle n|\partial_\lambda\hat{f}(\lambda)|n\rangle$, где f_n – собственное значение $\hat{f}\,|n\rangle = f_n\,|n\rangle$, то есть $f_n = \langle n|\hat{f}|n\rangle$.

$\triangle$. По формуле Лейбница:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda f_n &= \langle n|\partial_\lambda\hat{f}|n\rangle + \langle\partial_\lambda n|\hat{f}|n\rangle + \langle n|\hat{f}|\partial_\lambda n\rangle = \langle n|\partial_\lambda\hat{f}|n\rangle + \langle\partial_\lambda n|n\rangle f_n + \langle n|\partial_\lambda n\rangle f_n =\\ &= \langle n|\partial_\lambda\hat{f}|n\rangle + f_n\partial_\lambda\langle n|n\rangle = \langle n|\partial_\lambda\hat{f}|n\rangle, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

$\square$

Задача №4

> Найти операторы рождения и уничтожения для гармонического осцилляора в представлении Гейзенберга.

I. Запишем уравнение Гейзенберга

$$i\hbar\frac{d\hat{f}}{dt} = i\hbar\frac{\partial\hat{f}}{\partial t} + \left[\hat{f},\, \hat{H}\right].$$

Запищем гамильтониан системы

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right),$$

тогда можем найти

$$i\hbar\frac{d\hat{a}}{dt} = \hbar\omega\left[\hat{a},\, \hat{a}^\dagger\hat{a}\right] = \hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}\right) = \hbar\omega\left(\left[\hat{a},\, \hat{a}^\dagger\right]\hat{a}\right) = \hbar\omega\hat{a},$$

и, решая диффур, находим

$$i\hbar\frac{d\hat{a}}{dt} = \hbar\omega\hat{a}, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \hat{a}(t) = e^{-i\omega t}\hat{a}, \\ \hat{a}^\dagger(t) = e^{i\omega t}\hat{a}^\dagger. \end{cases}$$

II. Можно было напрямую, воспользоваться

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right), \qquad \Rightarrow \qquad \hat{a}(t) = \hat{a} + (i\omega t)[\hat{a}^\dagger\hat{a},\, \hat{a}] + (i\omega t)^2[\hat{a}^\dagger\hat{a},\, -\hat{a}] + \ldots = \exp(-i\omega t)\hat{a},$$

где мы воспользовались равенством, доказанным в У6:

$$e^{\xi A}Be^{-\xi A} = B + \xi[A, B] + \frac{1}{2!}\xi^2\left[A, [A, B]\right] + \ldots$$

Задача №5

> Выключить коммутаторы $[l_\alpha, x_\beta]$, $[l_\alpha, p_\beta]$.

Для векторной величины $\boldsymbol{a}$ коммутатор можно найти, как

$$[l_\alpha, a_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}a_\gamma,$$

где $\hat{l}_\alpha = -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}r_\beta\partial_\gamma$, или $\hat{L}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{r}_\beta\hat{p}_\gamma$.

Дописать.

Задача №7

> Найти уровни энергии и волновые функции стационарных состояний частицы в потенциальном ящике
>
> $$U(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, a], \\ +\infty, & x \in \mathbb{R}\backslash[0, a]. \end{cases}$$

Стационарное уравнение Шрёдингера:

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x), \qquad \Rightarrow \qquad \psi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0.$$

Тогда решение может быть найдено в виде

$$\psi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx), \qquad k^2 = \tfrac{2m}{\hbar^2}E,$$

но в силу требования $\psi(x)|_{x\in\{0,a\}} = 0$, сразу получаем $B = 0$, и условие на k:

$$k = k_n = \frac{\pi n}{a}, \qquad \Rightarrow \qquad E_n = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\pi^2 n^2,$$

то есть спектр дискретный.

Из нормировки ψ можем найти

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int_0^a dx|\psi(x)|^2 = \frac{|A|^2}{2}a = 1, \qquad \Rightarrow \qquad A = \sqrt{\frac{2}{a}}.$$

Тогда искомая волнавая функция стационарных состояний и соответсвующие уровни энергии

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\tfrac{\pi n}{a}x\right), \qquad E_n = \frac{\hbar^2}{2ma^2}\pi^2 n^2.$$

Задача №8

> Найти уровни энергии[a] и волновые функции стационарных состояний частицы в потенциале $U(x) = -\frac{\hbar^2}{m}\varkappa_0\delta(x)$.
>
> [a]Формально «уровень энергии», δ-ямая – всегда мелкая яма, то есть $\exists!$ связное состояние.

Координатное представление. Сделаем замечание, что $E < 0$, тогда получим

$$\hat{H}\psi = -|E|\psi, \qquad \varkappa^2 \overset{\text{def}}{=} \frac{2m|E|}{\hbar}.$$

С такой заменой получим:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' - \frac{\hbar^2}{m}\varkappa_0\delta(x)\psi + |E|\psi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \psi'' - (\varkappa - 2\varkappa_0\delta(x))\psi = 0.$$

Мы ожидаем непрерывности от волной функции на границах областей, а именно в точке дельта-ямы, то есть одним из граничных условий будет $\psi(-0) = \psi(+0)$.

Потребовав непрерывности ψ, из-за дельта функции, мы получаем разрыв для первой производной

$$\psi'' - (\varkappa - 2\varkappa_0\delta(x))\psi = 0 \qquad \overset{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}}{\Longrightarrow} \qquad \psi'(+0) - \psi'(-0) = -2\varkappa_0\psi(0).$$

Вне ямы будем наблюдать спад по экспоненте, сама же яма – по сути точечна, значит такое же поведение будем ожидать и в связном состоянии, таким образом ищем волновую функцию как

$$\psi = \begin{cases} C_1 e^{-\varkappa x} \ , \ x > 0 \\ C_2 e^{\varkappa x} \ , \ x < 0 \end{cases}$$

Из непрерывности получим автоматически, что

$$\psi(-0) = \psi(+0) \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = C_1 = C.$$

Разрыв же первой производной позволит нам найти

$$\psi'(+0) - \psi'(-0) = -2\varkappa_0\psi(0) \qquad \Rightarrow \qquad -2\varkappa_0 C = C(-\varkappa - \varkappa) \qquad \Rightarrow \qquad \varkappa = \varkappa_0.$$

Таким образом энергия связного состояния:

$$E = -\frac{\hbar^2\varkappa_0^2}{2m}.$$

Теперь, осталось проверить нормировку нашей волновой функции

$$\int_{\mathbb{R}} \psi\psi^* dx = 1 \qquad \Rightarrow \qquad C^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\varkappa_0|x|}dx = \frac{C^2}{\varkappa_0}\int_0^{+\infty} e^{-2\varkappa_0 x} d2\varkappa_0 x = \frac{C^2}{\varkappa_0} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \varkappa_0 = C^2.$$

Таким образом собирая всё вместе получаем волновую функцию вида:

$$\langle x|0\rangle = \psi(x) = \sqrt{\varkappa_0}e^{-\varkappa_0|x|}.$$

Импульсное представление. Вставляя разбиение единицы, вида $\mathbb{1} = \int_{\mathbb{R}} |x\rangle\langle x|\, dx$, находим

$$\psi(p) = \langle p|0\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx\langle p|x\rangle\langle x|0\rangle = \Big/ \langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}px} \Big/ = \frac{\sqrt{\varkappa_0}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\varkappa_0 x - \frac{i}{\hbar}px}dx = \frac{\sqrt{\varkappa_0}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\cdot\frac{2\varkappa_0}{\varkappa_0^2 + (p/\hbar)^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(\varkappa_0\hbar)^{3/2}}{(\varkappa_0\hbar)^2 + p^2}.$$

Задача №8

> Найти волновую функцию, минимизирующую соотношение неопределенностей $\Delta x \cdot \Delta p = \hbar/2$.

Возьмём операторы импульса $\hat{p} = -i\hbar\partial_x$ и координаты $\hat{x}$. Сразу найдём их средние и коммутатор

$$\bar{x} = \langle x\rangle = \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle, \qquad \bar{p} = \langle p\rangle = \langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle, \qquad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar.$$

Перейдём к несмещенным переменным:

$$\hat{\xi} = \hat{x} - \bar{x}, \qquad \hat{\eta} = \hat{p} - \bar{p}, \qquad [\hat{\xi}, \hat{\eta}] = i\hbar.$$

С неизмененным значением дисперсии

$$(\Delta\xi)^2 = \langle\psi|(\hat{\xi} - \bar{\xi})|\psi\rangle = \langle\psi|(\hat{x} - \bar{x})|\psi\rangle = (\Delta x)^2, \qquad (\Delta\eta)^2 = (\Delta p)^2.$$

Теперь введем функцию Φ по методу Вейля

$$|\Phi\rangle = (\hat{\xi} - i\gamma\hat{\eta})\,|\psi\rangle\,.$$

И, по определению нормы, $\langle\Phi|\Phi\rangle \geqslant 0$, а значиты

$$\langle\psi|(\hat{\xi} - i\gamma\hat{\eta})^\dagger(\hat{\xi} - i\gamma\hat{\eta})|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{\xi}^2 - i\gamma(\hat{\xi}\hat{\eta} - \hat{\eta}\hat{\xi}) + \gamma^2\hat{\eta}^2|\psi\rangle \geqslant 0.$$

Неотрицательной должно быть и выражение

$$(\Delta x)^2 + \hbar\gamma + \gamma^2(\Delta p)^2 \geqslant 0 \qquad \Rightarrow \qquad \hbar^2 - 4(\Delta p)^2(\Delta x)^2 \leqslant 0,$$

что получилось просто из условия на дискриминант для квадратного уравнения на γ, тогда минимум достигнется просто при нулевом дискриминанте

$$(\Delta p)^2(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{4}, \qquad \gamma = -2\frac{(\Delta x)^2}{\hbar}.$$

Таким образом и нашли волновую функцию, которая удовлетворяет минимизации соотношения неопределенности, что мы четко и показали

$$|\Phi\rangle = \left[\hat{x} - \bar{x} + \tfrac{2i}{\hbar}(\Delta x)^2(\hat{p} - \bar{p})\right]|\psi\rangle\,,$$

для некоторой $\forall\psi$.

Задача №13

> Найти средние значения $1/r$, $1/r^2$ и p^2 для nl-состояний атома водорода, используя теорему вириала и теорему Фейнмана–Гельмана.

Используя общую теорему о вириале: $2\langle\hat{T}\rangle = \langle \boldsymbol{r}\cdot\frac{\partial V(r)}{\partial \boldsymbol{r}}\rangle$, а также явно потенциал в атоме водорода $V(r) = -\frac{e^2}{r}$ явно найдём то, как у нас работает вириал:

$$\frac{\partial V(r)}{\partial r^\alpha} = \frac{\partial V(r)}{\partial r}\cdot\frac{r_\alpha}{r} = -\frac{r_\alpha}{r^2}V(r) \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{r}\cdot\frac{\partial V(r)}{\partial \boldsymbol{r}} = -r^\alpha\frac{r_\alpha}{r^2}V(r) = -V(r) \qquad \Rightarrow \qquad \langle T\rangle = -\frac{1}{2}\langle V(r)\rangle$$

Тогда, раз мы работаем с атомом водорода, с одной стороны мы знаем энергию на n-ом уровне E_n, а с другой эта энергия – есть сумма средних потенциальной и кинетической энергий:

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\frac{1}{n^2} = \langle T\rangle + \langle V\rangle = \frac{1}{2}\langle V\rangle = -\frac{e^2}{2}\langle 1/r\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\langle 1/r\rangle = \frac{\hbar^2}{2me^2}\frac{1}{n^2a^2} = \frac{1}{an^2}}$$

Сразу же из кинетической энергии получаем:

$$\langle T\rangle = -\frac{1}{2}\langle V(r)\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \left\langle\frac{\hat{p}^2}{2m}\right\rangle = \frac{e^2}{2}\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\langle\hat{p}^2\rangle = \frac{\hbar^2}{a^2n^2}}$$

Чтобы получить последний ответ, воспользуемся теоремой Фейнмана-Геллмана[1]

$$\frac{\partial E_n}{\partial t} = \langle n|\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}|n\rangle, \qquad \hat{H} = \frac{\hat{p}_r^2}{2m} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{mr^2} - \frac{e^2}{r}, \qquad n = n_r + l + 1.$$

Тогда заметим, что производная по l и даёт нам среднее от оставшегося выражения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\hat{H}}{\partial l} &= \frac{\hbar^2(l+\frac{1}{2})}{mr^2} \\ \frac{\partial E_n}{\partial l} &= \frac{\partial E_n}{\partial n} = \frac{\hbar^2}{mn^3a^2} \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\langle 1/r^2\rangle = \frac{1}{a^2n^3(l+\frac{1}{2})}}$$

Задача №14

> Вычислить в квазиклассическом приближении уровни энергии и собственные функции частицы для
> $$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2x^2, & x > 0 \end{cases}$$

Нужно быть аккуратными, слева – бесконечная граница, что требует от нас наложения граничного условия

$$\psi(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \psi_{x\geqslant 0}(x=0) \sim \sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_{x=0}^{x_0} p(x)dx + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Таким образом запишем модифицированное правило квантования Бора-Зоммерфельда

$$\int_0^{x_0} p(x)dx = \pi\hbar\left(n + \frac{3}{4}\right).$$

[1] он же Хеллман, он же Гельман, он же "окорок"и он же "одноногий"

Подставим импульс как $p(x) = \sqrt{2m(E_n - V(x))}$ возьмём интеграл от 0 до $x_0 = \sqrt{2E/(m\omega^2)}$ – то есть в классически разрешенной области

$$\int_0^{x_0} p(x)dx = \int_0^{x_0} \sqrt{2mE_n - m^2\omega^2 x^2}dx = \frac{E_n}{\omega}\int_0^{\pi} \cos^2\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2\omega}E_n \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_n = \hbar\omega\left(2n + \frac{3}{2}\right)}$$

В квазиклассическом приближении $\psi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \cdot \exp[\frac{i}{\hbar}\int p(x)dx]$ тогда исходя из правила согласования квазиклассических решений при переходе из запрещенной (затухание) в разрешенную (осцилляция) область

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \dfrac{C}{\sqrt{p(x)}}\sin\left(\dfrac{1}{\hbar}\displaystyle\int_x^{x_0} p(\xi)d\xi\right), & 0 < x \leqslant x_0 \\ \dfrac{C}{2\sqrt{|p(x)|}}\exp\left(\dfrac{1}{\hbar}\displaystyle\int_{x_0}^{x} |p(\xi)|d\xi\right), & x_0 \leqslant x \end{cases}$$

Остается только найти константы из условия

$$C^2 = \frac{4m}{T} = 4\frac{1}{\int_0^{x_0} dx/p(x)} = \frac{2m\omega}{\pi}.$$

Задача №15

> Квазиклассическое рассмотрение α-распада, закон Гейгера–Неттола.

Стоит всё-таки вспомнить потенциал из задания, ведь именно такой потенциал впервые рассматривался в теории α-распада. И так

$$U(x) = \begin{cases} -U_0, & 0 < x < a \\ \frac{2Ze^2}{x}, & x > a \end{cases}$$

Коэффициент прохождения через такой барьер, как отношение входящего потока к выходящему

$$\mathcal{T} \sim \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_a^b |p(x)|dx\right), \qquad \int_a^b |p(x)|dx = \int_a^b \sqrt{2m|E - U(x)|}dx = \sqrt{2m}\int_{r_0}^{2Ze^2/E} \sqrt{\frac{2Ze^2}{x} - E}dx.$$

Остается только вычислить интеграл, для удобства введём $\beta = \frac{aE}{2Ze^2}$, тогда

$$\mathcal{T} \sim \exp\left[-\frac{4Ze^2}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E}}(\arccos\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta(1-\beta)})\right]$$

И если мы уже далеко отошли от пика $x = a$, то $\beta \ll 1$ и соответственно коэффициент пропускания

$$\mathcal{T} \sim \exp\left(-\frac{2\pi Ze^2}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E}}\right).$$

Соответственно альфа частицы из потенциала такого вида могут туннелировать, с известным теперь нам коэффициентом, то есть излучаться. Таким образом вероятность излучения в единицу времени пропорциональна пропусканию: $w = n\mathcal{T}$, где n – частота столкновений частиц с барьером. Если ввести характерную скорость частиц в потенциальной яме ($x < a$), то

$$n \sim v/a, \qquad v \sim p/m_\alpha \sim \frac{\hbar}{m_\alpha a} \qquad \Rightarrow \qquad n \sim \frac{\hbar}{m_\alpha a^2}.$$

Вероятность распада в единицу времени λ связан с периодом полураспада T

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{w} \approx \frac{m_\alpha a^2 \ln 2}{\hbar D} = C_1\exp\left(\frac{C_2}{\sqrt{E}}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\ln T_{1/2} = A + \frac{B}{\sqrt{E}}}$$

Конечное равенство представляет собой уравнение *Гейгера-Неттола*. Константы выписывать конечно не интересно, ведь и так наши рассуждения носят оценочный характер, но на всякий случай

$$A = \ln C_1 \approx \ln\left(\frac{m_\alpha a^2 \ln 2}{\hbar}\right), \qquad B = C_2 \approx \frac{2\pi Ze^2\sqrt{2m}}{\hbar}.$$