Задание по курсу «Уравнения математической физики»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *20 сентября 2021 г.*

1 Неделя I

№1

Рассмотрим уравнение на $G(t)$

$$(\partial_t + \gamma)G(t) = \delta(t), \tag{1}$$

с учетом принципа причинности $g(t<0)=0$.

При $t>0$ $\delta(t)=0$, так что

$$\partial_t G(t) = -\gamma G(t), \quad \Rightarrow \quad G(t) = A\exp(-\gamma t).$$

Проинтегрируем уравнение (1) от $-\varepsilon$ до ε:

$$G'(\varepsilon) - \cancel{G'(-\varepsilon)} + \cancel{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \gamma G(t)\, dt} = \int \delta(t)\, dt = 1, \quad \Rightarrow \quad G'(\varepsilon) = 1, \quad \Rightarrow \quad A = 1.$$

Таким образом, искомая функция Грина $G(t)$:

$$G(t) = \theta(t)\cdot \exp\left(-\gamma t\right),$$

где $\theta(t)$ обеспечивает $G(t)=0$ при $t<0$.

№2

Рассмотрим уравнение, вида

$$(\partial_t^2 + \omega^2)\varphi(t) = g(t), \qquad g(t) = \begin{cases} 0, & t\notin[0,\tau]; \\ -\frac{v}{\tau l}, & t\in[0,\tau], \end{cases}$$

с нулевым начальным условием $\varphi(t<0)=0$. Функция Грина $G(t)$ для оператора $(\partial_t^2+\omega^2)$ равна[1]

$$G(t) = \theta(t)\frac{1}{\omega}\sin(\omega t).$$

Далее найдём вид $\varphi(t)$ при $t<\tau$ (красная линия рис. 1):

$$\varphi(t<\tau) = \frac{1}{\omega}\int_{-\infty}^{t} \sin\omega(t-s)\ g(s)\, dt = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-s)\frac{v}{2l}\, d(t-s) = \frac{v}{l\tau}\frac{1}{\omega^2}\left(\cos(\omega t) - 1\right).$$

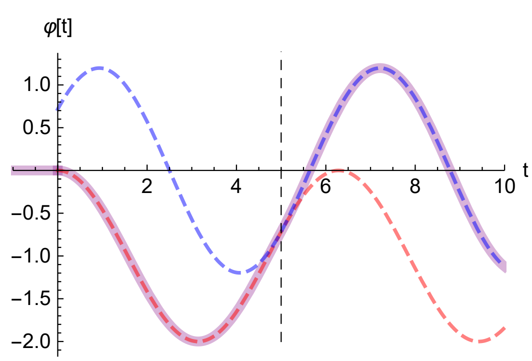

Рис. 1: Сшивка решений в I.2

[1] Конспект, уравнение (1.11).

Теперь решим[2] задачу Коши с начальным условием при $t=\tau$, введя переменную $T = t-\tau$:
$$\varphi(T) = \varphi(t-\tau) = \dot\varphi(\tau)G(t-\tau) + \varphi(\tau)\dot G(t-\tau) + 0 = \frac{v}{lt}\frac{1}{\omega^2}\left(\cos\omega t - \cos\omega(t-\tau)\right).$$
получая синюю кривую на рис. 1.

Итого, решение уравнения (1) (фиолетовая кривая, рис 1):
$$\varphi(t) = \frac{v}{l\tau}\frac{1}{\omega^2}\begin{cases}0, & t<0;\\ \cos\omega t - 1, & t\in[0,\tau];\\ \cos\omega t - \cos\omega(t-\tau), & t>\tau.\end{cases}$$

№3

Найдём значение интеграла, вида
$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,dx.$$
Заметим, что уравнение $z^2+a^2=0$ имеет корни в $z_{1,2} = a^{\pm i\pi/2}$, тогда
$$I_1 = 2\pi i\cdot \mathrm{res}_{z_1} = 2\pi i \lim_{z\to z_1}\cdot\left(\frac{1}{(z-z_2)^2}\right)' = -4\pi i\cdot\lim_{z\to z_1}\left(\frac{1}{(z-z_2)^3}\right) = -4\pi i\frac{1}{(2ia)^3} = \frac{\pi}{2a^3}.$$

2 Неделя I

№5

Рассмотрим многомерное нормальное распределение для $\tilde y_i$ с симметричной матрицей ковариации Σ:
$$\tilde y = \frac{1}{(2\pi)^{l/2}\sqrt{\det\Sigma}}\exp\left(-\tfrac12(\tilde y - y)\Sigma^{-1}(\tilde y - y)\right).$$

Нормировка. В силу симметричности Σ существует S такая, что $S^{\mathrm T}\Sigma^{-1}S = E$, тогда $\det S = \sqrt{\det\Sigma}$. Тогда, в силу знания о линейной замене переменных в кратном интеграле, при замене $\tilde y - y = Sz$, верно:
$$\int \tilde y\, d^l\tilde y = \frac{\det S}{\sqrt{\det\Sigma}}\int\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^l}\exp\left(-\tfrac12 z^{\mathrm T}S^{\mathrm T}\Sigma^{-1}Sz\right)\,d^l\tilde y,$$
что приводит к факторизации, и, по теореме Фубини, можем записать
$$\int \tilde y\, d^l\tilde y = \int\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\tfrac12 z_1^2\right)\,dz_1 \;\cdot\; \ldots \;\cdot\; \int\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\tfrac12 z_l^2\right)\,dz_l = 1,$$
следовательное, указанное распределение нормировано.

Парные корреляторы. Вообще, говорят, что набор случайных величин ξ имеет многомерноное нормальное распределение, если найдётся вектор a, невыроденная матрица C и набор *независимых* стандартных нормальных величин η такие, что
$$\xi = a + C\eta.$$
Так гораздо удобнее найти $\mathrm{cov}(\xi_i,\,\xi_k)$:
$$\langle\!\langle \xi_i,\,\xi_j\rangle\!\rangle = \langle\!\langle (a+C\eta)_i,\,(a+C\eta)_j\rangle\!\rangle = \sum_{\alpha=1}^{l}\sum_{\beta=1}^{l} c_{i\alpha}c_{j\beta}\underbrace{\langle\!\langle \eta_\alpha,\,\eta_\beta\rangle\!\rangle}_{\delta_{\alpha\beta}} = \sum_{\alpha=1}^{l} c_{i\alpha}c_{j\alpha} = \left(CC^{\mathrm T}\right)_{ij} = \Sigma_{ij},$$
где последнее равенство следует из факторизации распределения для η.

Погрешности параметров. Оценим погрешности парметров, аналогично расчёту с лекции:
$$\begin{matrix} w_\alpha = Q_{\alpha i}y_i \\ \tilde w_\alpha = Q_{\alpha i}\tilde y_i\end{matrix} \quad\Rightarrow\quad \langle\!\langle \tilde w_\alpha,\,\tilde w_\beta\rangle\!\rangle = \ldots = Q_{\alpha i}Q_{\beta j}\langle\!\langle \tilde y_i,\,\tilde y_j\rangle\!\rangle = Q_{\alpha i}Q_{\beta j}\Sigma_{ij} = (Q\Sigma Q^{\mathrm T})_{\alpha\beta},$$
что похоже на правду, по крайней мере формы совпадают.

Погрешности в линейной регрессии. Считая $A = \mathrm{diag}(A_1,\,\ldots,\,A_l)$, оценим погрешности $\mathrm{var}\,w_\alpha$. Рассмотрим, видимо, линейную регрессию, тогда, как и раньше
$$X = \begin{pmatrix} x_1 & 1\\ \ldots & \ldots \\ x_l & 1\end{pmatrix},\qquad X^{\mathrm T}X = l\begin{pmatrix}\bar{x^2} & \bar x\\ \bar x & 1\end{pmatrix},\qquad (X^{\mathrm T}X)^{-1} = \frac{1}{l\,\mathrm{var}\,x}\begin{pmatrix}1 & -\bar x\\ -\bar x & \bar{x^2}\end{pmatrix}..$$

[2] Конспект, уравнение (1.12).

Здесь, наверное, будет удобнее сразу найти

$$Q = \left(X^{\mathrm{T}} X\right)^{-1} X^{\mathrm{T}} = \frac{1}{l \operatorname{var} x} \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} & \ldots & x_l - \bar{x} \\ \overline{x^2} - \bar{x} x_1 & \ldots & \overline{x^2} - \bar{x} x_l \end{pmatrix}.$$

Тогда искомые погрешности могут быть найдены, как

$$\operatorname{var} w_1 = (Q \Sigma Q^{\mathrm{T}})_{11} = \frac{1}{l (\operatorname{var} x)^2} \left(\langle x_i^2 \sigma_i^2 \rangle - 2\bar{x} \langle x_i \sigma_i^2 \rangle + \bar{x}^2 \langle \sigma_i^2 \rangle \right),$$

$$\operatorname{var} w_0 = (Q \Sigma Q^{\mathrm{T}})_{22} = \frac{1}{l (\operatorname{var} x)^2} \left((\overline{x^2})^2 \langle \sigma_i^2 \rangle - 2\bar{x} \cdot \overline{x^2} \langle x_i \sigma_i^2 \rangle + \bar{x}^2 \langle x_i^2 \sigma_i^2 \rangle \right).$$

где $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_l)$, и $\operatorname{var} \tilde{y}_i \sim \sigma_i^2$. Действительно, при $\sigma_i^2 = s^2 = \mathrm{const}$ всё сходится.