Задание по курсу «Уравнения математической физики»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *30 ноября 2021 г.*

Содержание

ТеорМин №1

Вычеты. Интеграл по дуге может быть найден, как

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_j} \operatorname*{res}_{z_j} f(z), \qquad \operatorname*{res}_{z_j} f(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i\varphi} f(z_j + \varepsilon e^{i\varphi})$$
$$= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_j} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_j)^m f(z) \right),$$

где m – степень полюса.

Lem 1 (лемма Жордана)**.** *Пусть $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $G = \{z \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0,\, |z| \geqslant R_0 > 0\}$. Обозначим через C_R полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Im} x \geqslant 0$ и пусть верно, что $\lim_{R\to\infty} \max |f(z)| = 0$. тогда при $a > 0$*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz}\,dz = 0,$$

аналогичное верно при C_R с $\operatorname{Im} x \leqslant 0$ и $a < 0$.

Функция Грина. Всегда и всюду, уравнение вида

$$Lx(t) = \varphi(t), \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-s)\varphi(s)\,ds, \qquad LG = \delta(t).$$

И, если хочется добавить начальные условия, то например, для $L = \partial_t^2$ будет

$$x(t) = \dot x(0) G(t) + x(0)\dot G(t) + \int_0^t G(t-s)\varphi(s)\,ds.$$

Матричное уравнение. Решение линейного уравнения для векторной величины $\boldsymbol{y}$

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} + \hat\Gamma \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\chi},$$

может быть найдено, через функцию Грина, вида

$$\hat G(t) = \theta(t) \exp\left(-\hat\Gamma t\right), \qquad \boldsymbol{y}(t) = \int_{-\infty}^{t} \hat G(t-s)\boldsymbol{\chi}(s)\,ds.$$

Преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа функциии $\Phi(t)$ определяется, как

$$\tilde\Phi(p) = \int_0^\infty \exp(-pt)\Phi(t)\,dt, \qquad \Phi(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt)\tilde\Phi(p),$$

где далее c выбираем правее всех особенностей для причинности.

Решение уравнения $L(\partial_t)G(t) = \delta(t)$ может быть найдено, как

$$G(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt)\tilde G(p), \qquad \tilde G(p) = \frac{1}{L(p)}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \sum_i \operatorname*{res}_i \frac{\exp(pt)}{L(p)},$$

где суммирование идёт по полюсам $1/L(p)$.

Важно, что можно делать функции маленькими

$$\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \tilde f(p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \frac{\tilde f(p)}{p^n} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}. \tag{1}$$

Уравнение Вольтерра. Интегральное уравнение Вольтерра первого рода с однородным ядром:

$$\int_0^t K(t-s) f(s)\,ds = \varphi(t).$$

Решение может быть найдено через обратное преобразование Лапласа

$$f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt)\tilde f(p), \qquad \tilde f(p) = \frac{\tilde\varphi(p)}{\tilde K(p)}.$$

Но есть один нюанс. При $K(t)$, $\varphi(t) \overset{p\to\infty}{\to} K_0$, φ_0 получается, что $\tilde K(p)$, $\tilde\varphi(p) \approx \frac{K_0}{p}$, $\frac{\varphi_0}{p}$, тогда

$$f(t) = \frac{\varphi_0}{K_0}\delta(t) + \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \left(\frac{\tilde\varphi}{\tilde K} - \frac{\varphi_0}{K_0} \right),$$

при этом в отсутствие аналитичности в нуле нет ничего страшного.

Неоднородная релаксация. Для одномерного случая

$$\big(\partial_t + \gamma(t)\big) x(t) = \varphi(t), \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)\varphi(s)\,ds, \qquad G(t,\,s) = \theta(t-s)\exp\left(-\int_s^t \gamma(\tau)\,d\tau\right),$$

где всё также $G(t, s > t) = 0$ в силу стремления к принципу причинности.

1 Неделя I

№1

Рассмотрим уравнение на $G(t)$
$$(\partial_t + \gamma)G(t) = \delta(t), \tag{2}$$
с учетом принципа причинности $g(t < 0) = 0$.

При $t > 0$ $\delta(t) = 0$, так что
$$\partial_t G(t) = -\gamma G(t), \quad \Rightarrow \quad G(t) = A\exp(-\gamma t).$$
Проинтегрируем уравнение (2) от $-\varepsilon$ до ε:
$$G(\varepsilon) - \cancel{G(-\varepsilon)} + \cancel{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \gamma G(t)\,dt} = \int \delta(t)\,dt = 1, \quad \Rightarrow \quad G(\varepsilon) = 1, \quad \Rightarrow \quad A = 1.$$
Таким образом, искомая функция Грина $G(t)$:
$$G(t) = \theta(t) \cdot \exp\left(-\gamma t\right),$$
где $\theta(t)$ обеспечивает $G(t) = 0$ при $t < 0$.

№2

Рассмотрим уравнение, вида
$$(\partial_t^2 + \omega^2)\varphi(t) = g(t), \qquad g(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [0, \tau]; \\ -\frac{v}{\tau l}, & t \in [0, \tau], \end{cases}$$
с нулевым начальным условием $\varphi(t < 0) = 0$. Функция Грина $G(t)$ для оператора $(\partial_t^2 + \omega^2)$ равна[1]
$$G(t) = \theta(t)\frac{1}{\omega}\sin(\omega t), \tag{3}$$
Далее найдём вид $\varphi(t)$ при $t < \tau$ (красная линия рис. 1):
$$\varphi(t < \tau) = \frac{1}{\omega}\int_{-\infty}^{t} \sin\omega(t-s)\ g(s)\,dt = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-s)\frac{v}{2l}\,d(t-s) = \frac{v}{l\tau}\frac{1}{\omega^2}\left(\cos(\omega t) - 1\right).$$

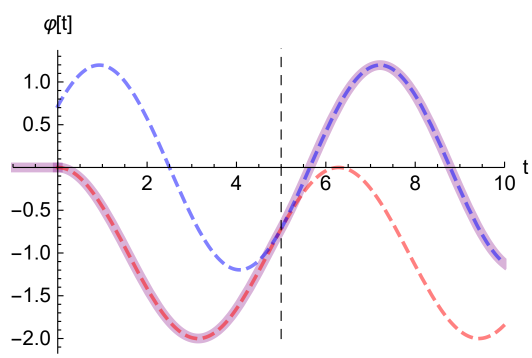

Рис. 1: Сшивка решений в I.2

Теперь решим[2] задачу Коши с начальным условием при $t = \tau$, введя переменную $T = t - \tau$:
$$\varphi(T) = \varphi(t-\tau) = \dot{\varphi}(\tau)G(t-\tau) + \varphi(\tau)\dot{G}(t-\tau) + 0 = \frac{v}{lt}\frac{1}{\omega^2}\left(\cos\omega t - \cos\omega(t-\tau)\right).$$
получая синюю кривую на рис. 1.

[1] Конспект, уравнение (1.11).
[2] Конспект, уравнение (1.12).

Итого, решение уравнения (1) (фиолетовая кривая, рис 1):

$$\varphi(t) = \frac{v}{l\tau}\frac{1}{\omega^2}\begin{cases} 0, & t < 0; \\ \cos\omega t - 1, & t \in [0,\tau]; \\ \cos\omega t - \cos\omega(t-\tau), & t > \tau. \end{cases}$$

№3

I. Найдём значение интеграла, вида

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,dx.$$

Заметим, что уравнение $z^2+a^2=0$ имеет корни в $z_{1,2} = a^{\pm i\pi/2}$, тогда

$$I_1 = 2\pi i \cdot \mathrm{res}_{z_1} = 2\pi i \lim_{z\to z_1} \cdot \left(\frac{1}{(z-z_2)^2}\right)' = -4\pi i \cdot \lim_{z\to z_1}\left(\frac{1}{(z-z_2)^3}\right) = -4\pi i \frac{1}{(2ia)^3} = \frac{\pi}{2a^3}.$$

II. Теперь найдём значение интеграла, вида

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipx}}{x^2+a^2}\,dx \overset{p\geq 0}{=} 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{ia} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-ap}}{2ai} = \frac{\pi}{a}e^{-ap},$$

где мы считали $p > 0$. В случае $p < 0$:

$$I_2 \overset{p\leq 0}{=} -2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{-ia} f(z) = -2\pi i \cdot \frac{e^{ap}}{-2ai} = \frac{\pi}{a}e^{ap}, \qquad \Rightarrow \qquad I_2 = \frac{\pi}{a}e^{-a|p|}.$$

2 Неделя II

№1 (1.1.4)

Найдём функию Грина $G(t)$ уравнения

$$L(\partial_t)x(t) = \varphi(t), \qquad L(\partial_t) = \partial_t^4 + 4\nu^2\partial_t^2 + 3\nu^4.$$

Функция Грина может быть найдена, как решение уравнения

$$L(\partial_t)G(t) = \delta(t), \qquad \Rightarrow \qquad G(t) = \theta(t)\cdot\left(b_1e^{-\nu t} + b_2e^{i\nu t} + b_3e^{-i\sqrt{3}\nu t} + b_4e^{i\sqrt{3}\nu t}\right),$$

где воспользовались разложением

$$L(z) = (z+i\nu)(z-i\nu)(z-i\sqrt{3}\nu)(z+i\sqrt{3}\nu).$$

Интегрируя от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$ уравнение на $G(t)$ находим, что

$$\partial_t^3 G(+0) = 1, \qquad \partial_t^2 G(+0) = \partial_t^1 G(+0) = G(+0) = 0,$$

откуда получаем СЛУ на $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$:

$$\left.\begin{aligned} b_1+b_2+b_3+b_4 &= 0, \\ b_1-b_2+\sqrt{3}\,(b_3-b_4) &= 0, \\ b_1+b_2+3\,(b_3+b_4) &= 0, \\ b_1-b_2+3\sqrt{3}\,(b_3-b_4) &= -\tfrac{i}{\nu^3}, \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad b_1 = \frac{i}{4\nu^3}, \quad ,b_2 = -\frac{i}{4\nu^3}, \quad ,b_3 = -\frac{i}{4\sqrt{3}\nu^3}, \quad ,b_4 = \frac{i}{4\sqrt{3}\nu^3}.$$

Так получаем решение, вида

$$G(t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{3}\,\nu^3}\left(\sqrt{3}\sin(\nu t) - \sin(\sqrt{3}\nu t)\right).$$

№2 (1.1.5)

Найдём функцию Грина для уравнения, вида

$$(\partial_t^2 + \nu^2)^2 x(t) = \varphi(t).$$

Аналогично предыдущему номеру, сначала находим $G(t>0)$:

$$G(t>0) = b_1e^{i\nu t} + b_2te^{i\nu} + b_3e^{-i\nu t} + b_4te^{-i\nu t},$$

где секулярные члены возникли из-за кратности корней.

Также, интегрируя уравнение на $G(t)$ от $-\varepsilon$ до ε, получаем аналогичное условие
$$\partial_t^3 G(+0) = 1, \qquad \partial_t^2 G(+0) = \partial_t^1 G(+0) = G(+0) = 0,$$
и приходим к СЛУ на коэффициенты $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$:
$$\left.\begin{aligned} b_1 + b_3 = 0, \\ i\left(b_1 - b_3\right)\nu + b_2 + b_4 = 0, \\ \nu\left(\left(b_1 + b_3\right)\nu - 2i\left(b_2 - b_4\right)\right) = 0, \\ \nu^2\left(-3\left(b_2 + b_4\right) - i\left(b_1 - b_3\right)\nu\right) = 1, \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad b_1 = -\frac{i}{4\nu^3}, \quad b_2 = -\frac{1}{4\nu^2}, \quad b_3 = \frac{i}{4\nu^3}, \quad b_4 = -\frac{1}{4\nu^2}.$$
Получаем решение, вида
$$G(t) = \frac{\theta(t)}{2\nu^3}\Big(\sin(\nu t) - \nu t\cos(\nu t)\Big).$$

№3 (1.1.8)

Для системы уравнений, вида
$$(\partial_t + \hat{\Gamma})\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{\xi}(t), \qquad \Gamma = \lambda\delta_{i,j} + \delta_{i,j-1},$$
найдём функцию Грина $G(t)$, как решение уравнения
$$(\partial_t + \hat{\Gamma})G(t) = \delta(t)\mathbb{E}, \qquad \Rightarrow \qquad G(t) = \theta(t)\exp\left(-\hat{\Gamma}t\right).$$
Осталось найти $\exp(-\hat{\Gamma}t)$, как матричную экспоненту, от жордановой клетки.

Для начала заметим, что
$$\delta_{i,j-1}^2 = \delta_{i,j-1}\delta_{j,k} = \delta_{i+1,k-1} = \delta_{i,k-2},$$
и так далее, то есть $\delta_{i,j-1}$ – нильпотентный оператор, с $\delta_{i,j-1}^4 = 0$.

Посмотрим на степени $\hat{\Gamma}$:
$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^2 &= \delta_{i,j} + 2\delta_{i,j-1} + \delta_{i,j-2} \\ \hat{\Gamma}^3 &= \delta_{i,j} + 3\delta_{i,j-1} + 3\delta_{i,j-2} + \delta_{i,j-3} \\ \hat{\Gamma}^4 &= \delta_{i,j} + 4\delta_{i,j-1} + 6\delta_{i,j-2} + 4\delta_{i,j-3} + \delta_{i,j-4}, \end{aligned}$$
но $\delta_{i,j-4} = 0$, так что можем явно выделить на побочных диагоналях соответсвтующие экспоненты:
$$G(t) = \theta(t)e^{-\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{t^2}{2} & -\frac{t^3}{6} \\ 0 & 1 & -t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
где появившиеся t^k – секулярные члены.

№4

В частотном представлении для оператора $\partial_t^2 + \omega_0^2$ можем «найти» функцию Грина, приводящую к
$$G(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}, \qquad \Rightarrow \qquad G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2}\frac{d\omega}{2\pi},$$
с особенностями на вещественной оси.

Регуляризуем интеграл, рассмотрением «затухающего» осцилятора, тогда
$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\frac{e^{-i\omega t}}{(\omega_0 - \omega + i\varepsilon_1)(\omega_0 + \omega + i\varepsilon_2)}}_{F(w)}\frac{d\omega}{2\pi}.$$
Получилось два полюса:
$$\omega_1 = \omega_0 + i\varepsilon_1, \qquad \omega_2 = -\omega_0 - i\varepsilon_2.$$
Соответсвенно, по лемме Жордана, наличие/отсутствие вклада от $\varepsilon_{1,2}$ будет зависеть от выбора знаков в $\varepsilon_{1,2} \to \pm 0$.

Для начала найдём вычеты по каждому полюсу:
$$2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{\omega_1} F(\omega) = i\varepsilon e^{i\varphi}F(\omega_1) = -i\varepsilon e^{i\varphi}\frac{e^{it\omega_0}}{2\omega_0 + i(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon e^{i\varphi}} \overset{\varepsilon\to 0}{\approx} -\frac{i}{2\omega_0}e^{-it\omega_0}.$$

Аналогично, для второго полюса:

$$2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{\omega_2} F(\omega) = \ldots = \frac{i}{2\omega_0} e^{it\omega_0}.$$

Сразу заметим, что при вхождение только отного вычета невозможно выполнение условия о $G(0) = 0$, тогда рассмотрим $\varepsilon_1 \to +0$ и $\varepsilon_2 \to -0$, тогда оба полюча находятся в верхней полуплоскости, по которой и происходит обход *по* часовой стрелке:

$$G(t) = \theta(-t) \frac{1}{\omega_0} \sin(-\omega_0 t),$$

что соответствует опережающей функции Грина ($\partial_t G(t=0) = -1$).

Теперь найдём, что при $\varepsilon_1 \to -0$ и $\varepsilon_2 \to +0$ оба вычета в нижней полуплоскости, что приведет к смене знака:

$$G(t) = \theta(t) \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t),$$

что и соответствует запаздывающей функции Грина (см. ур. (3), $\partial_t G(t=0) = 1$), что не может не радовать.

Правка. При других ε_1, ε_2 получаеются и не причинные и не опережающие функции Грина:

$$\varepsilon_1 \to +0,\ \varepsilon_2 \to +0, \quad \Rightarrow \quad G(t) = -\frac{e^{i\omega t}}{2i\omega_0} \left(\theta(t) - \theta(-t)\right),$$

и аналогично для другой стороны:

$$\varepsilon_1 \to -0,\ \varepsilon_2 \to -0, \quad \Rightarrow \quad G(t) = -\frac{e^{-i\omega t}}{2i\omega_0} \left(\theta(-t) - \theta(t)\right).$$

3 Неделя III

№1 (1.3.4)

Найдём решение уравнения

$$\int_0^t K(t-s) f(s)\, ds = \varphi(t), \qquad K(t) = t, \quad \varphi(t) = \sin(t).$$

Решение может быть найдено, как

$$\tilde{f}(p) = \frac{\tilde{\varphi}(p)}{\tilde{K}(p)}, \qquad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{f}(p).$$

Для начала найдём, что

$$\tilde{\varphi}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\, dt = \frac{-1}{2i} \left(\frac{1}{i-p} + \frac{1}{i+p} \right) = \frac{1}{1+p^2}.$$

А также изображение для возмущения

$$\tilde{K}(p) = -\left(\int_0^\infty \exp\left(-pt\right) \right)_p' = \left(\frac{1}{p} e^{-pt}\Big|_0^\infty \right)_p' = \frac{1}{p^2}.$$

Заметим, что $\lim_{p\to\infty} \tilde{f}(p) = 1$, тогда

$$f(t) = \delta(t) + \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \left(\frac{p^2}{1+p^2} - 1 \right) = \delta(t) - \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \left(\frac{1}{1+p^2} \right) = \delta(t) - \sin(t),$$

где воспользовались уже известным значением изображения синуса.

Для галочки можем посчитать оригинал напрямую. Тогда заметим, что полюса находятся в $p = \pm i$, соответственно возьмём $c = 1$ и сделаем замену $p = 1 + i\omega$, тогда придём к интегралу

$$-e^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i\omega t}}{[\omega - (1+i)][\omega - (-1+i)]} = -e^t \left(\frac{1}{2} i e^{(-1-i)t} - \frac{1}{2} i e^{(-1+i)t} \right) = \sin(t),$$

в общем, всё сходится.

№2 (1.4.2)

Найдём функцию Грина

$$G(t,\, s) = \theta(t-s) \exp\left(-\int_s^t \gamma(\tau)\, d\tau \right),$$

для $\gamma(t) = a/t$, где $a = \text{const}$. Нетрудно найти, что

$$G(t,s) = \theta(t-s)\exp\left(-a\ln\frac{t}{s}\right) = \theta(t-s)\left(\frac{s}{t}\right)^a.$$

№3 (1.5.1)

Общее замечание. Ограничимся здесь проверкой свойств δ-функции (обобщенной функции/функционала), а именно локализованность ($\delta(t) = 0\ \forall t \neq 0$) и нормировку: $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t) = 1$.

I. Докажем, что

$$\frac{\pi}{2}\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{t^2\varepsilon}{(t^2+\varepsilon^2)^2}.$$

Для начала проверим нормировку, полюса второй степени находятся в точках $\pm i\varepsilon$, замыкая дугу сверху, находим:

$$\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2}{(t^2+\varepsilon^2)^2} = 2\pi i\varepsilon\cdot\lim_{t\to i\varepsilon}\left(\frac{d}{dt}\frac{t^2}{(t+i\varepsilon)^2}\right) = 2\pi i\varepsilon\cdot\lim_{t\to i\varepsilon}\frac{2it\epsilon}{(t+i\epsilon)^3} = 2\pi i\varepsilon\cdot\frac{1}{4i\varepsilon} = \frac{\pi}{2},$$

что доказывает нормировку δ-последовательности на единицу.

Теперь покажем локализованность:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{t^2\varepsilon}{(t^2+\varepsilon^2)^2} \overset{t\neq 0}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} t^2\varepsilon = 0, \qquad \forall t\neq 0.$$

II. Аналогично, докажем, что

$$\sqrt{\pi}\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\exp\left(-\frac{t^2}{\varepsilon}\right).$$

Можно заметить, что нормировка выполняется, так как гауссов интеграл равен $\sqrt{\pi}$, осталось показать локализованность:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\exp\left(-\frac{t^2}{\varepsilon}\right) \overset{t\neq 0}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\exp\left(-\frac{t^2+\frac{1}{2}\varepsilon\ln\varepsilon}{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\exp\left(-\frac{t^2}{\varepsilon}\right) = 0, \qquad \forall t\neq 0.$$

III. Наконец, покажем, что

$$\pi\delta(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos(nt)}{nt^2}.$$

Начнём с нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(nt)-1}{n}\,d\frac{1}{t} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{t}\,dt = \pi,$$

как разность пределов на $\pm\infty$ интегрального синуса.

Проверяем локализованность:

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos(nt)}{nt^2} \leqslant \Big/ 1-\cos(nt)\leqslant 2\Big/ \leqslant \frac{2}{\pi n t^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos(nt)}{nt^2} = 0.$$

№4 (1.5.8)

Найдём обратное преобразование Лапласа некоторых функций.

I. Первое изображение:

$$\tilde{f}(p) = \frac{\nu}{p^2+\nu^2}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{dp}{2\pi i}\exp(pt)\tilde{f}(p) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{dp}{2\pi i}\exp(pt)\frac{\nu}{p^2+\nu^2},$$

что выбором $c = 1$, заменой $p = \nu(i\omega+1)$, сводится к уже рассмотренному интегралу (w3, №1), тогда

$$\mathcal{L}^{-1}(t)\left[\frac{\nu}{p^2+\nu^2}\right] = \sin(\nu t).$$

II. Второе изображение:

$$\tilde{f}(p) = \frac{p}{p^2+\nu^2}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{dp}{2\pi i}\exp(pt)\frac{p}{p^2+\nu^2}.$$

Аналогично выбираем $c = 1$, делаем замену $p = \nu(i\omega+1)$, так приходим к интегралу, вида

$$f(t) = -e^{\nu t}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\exp(i\nu\omega t)\frac{1+i\omega}{[\omega-(1+i)][\omega-(-1+i)]}$$

с полюсами в $\omega = i \pm 1$. Тогда, находим, что

$$\operatorname*{res}_{\omega=i+1} f(t) = \frac{i}{4\pi} e^{(i-1)\nu t}, \qquad \operatorname*{res}_{\omega=i-1} f(t) = \frac{i}{4\pi} e^{(-i-1)\nu t}, \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = 2\pi i \sum_{\pm} \operatorname*{res}_{i\pm 1} f(t) = \cos(\nu t).$$

III. Третье изображение:

$$\tilde{f}(p) = \frac{\nu}{p^2 - \nu^2}, \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \frac{\nu}{p^2 - \nu^2}.$$

Делая замену $p = i\nu\omega$, и выбирая $c = 0$ находим,

$$f(t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\nu\omega t} \frac{-1}{(\omega - i)(\omega + i)},$$

а тогда

$$\operatorname*{res}_{\omega=-i} f(t) = \frac{e^{\nu t}}{4\pi i}, \qquad \operatorname*{res}_{\omega=i} f(t) = -\frac{e^{\nu(-t)}}{4\pi i}, \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = 2\pi i \sum_{\pm} \operatorname*{res}_{\pm i} f(t) = \operatorname{sh}(\nu t).$$

IV. Четвертое изображение:

$$\tilde{f}(p) = \frac{p}{p^2 - \nu^2}, \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \frac{p}{p^2 - \nu^2}.$$

Делая замену $p = i\nu\omega$, и выбирая $c = 0$ находим,

$$f(t) = -\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\nu\omega t} \frac{i\omega}{(\omega - i)(\omega - i)},$$

а тогда

$$\operatorname*{res}_{\omega=i} f(t) = \frac{e^{\nu t}}{4\pi i}, \qquad \operatorname*{res}_{\omega=-i} f(t) = \frac{e^{\nu(-t)}}{4\pi i}, \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = 2\pi i \sum_{\pm} \operatorname*{res}_{\pm i} f(t) = \operatorname{ch}(\nu t).$$

V. Пятое изображение (оставлено на следующую неделю):

$$\mathcal{L}^{-1}(t)\left[\frac{1}{\sqrt{p+\alpha}}\right] = \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}}.$$

№5

Рассмотрим маятник, совершающий маленькие колебания под действием вынуждающей силы $f(t) = Fe^{-t^2/\tau^2}$:

$$\left(\partial_t^2 + \omega^2\right) \varphi(t) = f(t),$$

где мы знаем, что при $t \to -\infty$:

$$\varphi(t) = A_- \sin(\omega t + \theta_-).$$

Функция Грина, как известно,

$$G(t) = \theta(t) \frac{1}{\omega} \sin(\omega t).$$

Тогда, после возмущения, при $t \to \infty$:

$$\varphi(t) = A_- \sin(\omega t + \theta_-) + \int_{T_-}^{T_+} \frac{F}{\omega} \sin\left[\omega(t-s)\right] \exp\left(-\tfrac{s^2}{\tau^2}\right) ds,$$

где $\omega T_- \ll 1$ и $\omega T_+ \gg 1$, так что экспонента там ноль. Раскрывая и группируя, находим

$$\varphi(t) - A_- \sin(\omega t + \theta_-) = \sin(\omega t) \int_{T_-}^{T_+} \frac{F}{\omega} \cos(\omega s) \exp\left(-\frac{s^2}{\tau^2}\right) ds,$$

где интеграл по $\sin \omega s$ опустили, так как интеграл о произведения четной и нечетной функции ноль. Далее,

$$\int \cos(\omega s) \exp\left(-\frac{s^2}{\tau^2}\right) ds = \frac{1}{2} \int \exp\left(-\frac{1}{4}\tau^2\omega^2 - \frac{\left(s + \frac{1}{2} i \tau^2 \omega\right)^2}{\tau^2}\right) ds + \frac{1}{2} \int \exp\left(-\frac{1}{4}\tau^2\omega^2 - \frac{\left(s - \frac{1}{2} i \tau^2 \omega\right)^2}{\tau^2}\right) ds,$$

раскрывая два гауссовых интеграла, находим

$$\int \cos(\omega s) \exp\left(-\frac{s^2}{\tau^2}\right) ds = \frac{1}{\omega} \sqrt{\pi} F \tau e^{-\frac{1}{4}\tau^2\omega^2}.$$

Тогда, искомое поведение при $t \to \infty$:

$$\varphi(t) = A_- \sin(\omega t + \theta_-) + \frac{1}{\omega} \sqrt{\pi} F \tau e^{-\frac{1}{4}\tau^2\omega^2} \sin(\omega t),$$

что осталось засунуть в один синус.

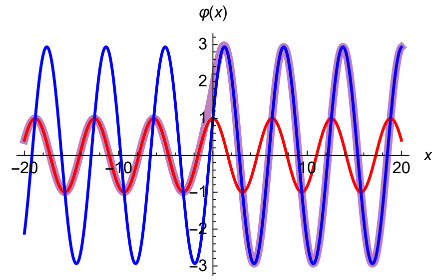

Рис. 2: Изменение амплитуды и фазы синса в w3, №5

На 2 явно видно, как невозмущенный синус (красная линяя) переходит в возмущенный синус (синяя линяя), в итоге и получается наше решение (фиолетовая линия).

4 Неделя IV

№1

Рассмотрим сумму, вида

$$S(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}.$$

Будем считать, что в $n \in \mathbb{Z}$, у некоторой функции $g(z)$ случается полюс первого порядка, например у функции:

$$g(z) = \pi \operatorname{ctg}(\pi z), \qquad \operatorname*{res}_n g(z) = 1.$$

Тогда сумму $S(a)$ можно переписать через проивезедение $f(z)g(z)$, где

$$f(z) = \frac{1}{n^2+a^2},$$

тогда

$$S(a) = \int \frac{dz}{2\pi i} \frac{\pi}{z^2+a^2} \operatorname{ctg}(\pi z) = \Big/ \operatorname*{res}_{\pm ia} \Big/ = \frac{\pi}{a} \operatorname{cth}(a\pi),$$

где воспользовались равенством $\operatorname{ctg} ix = -i \operatorname{cth} x$.

№2

Теперь рассмотрим сумму, вида

$$G(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{\varkappa^2 - n^2}, \qquad x \in (-\pi, \pi).$$

Аналогично №1, представим $G(x)$ в виде интеграла:

$$G(x) = \int \frac{dz}{2\pi i} \frac{\pi e^{inx}}{\varkappa^2 - z^2} (\operatorname{ctg}(\pi z) + \tilde{g}),$$

где регулярную $\tilde{g}$ выберем так, чтобы независимо от направления дуги в больших полуокружностях $e^{nx} g(z) \sim$ const, достаточно рассмотреть пределы и сдвинуть на них $\operatorname{ctg} z$:

$$\lim_{z\to\infty} \operatorname{cth}(-iz) = i, \qquad \lim_{z\to\infty} \operatorname{cth}(iz) = -i, \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{g}(x) = -i \operatorname{sign} x.$$

Тогда $G(x)$ можем найти, как

$$G(x) = \int \frac{dz}{2\pi i} \frac{\pi e^{inx}}{\varkappa^2 - z^2} (\operatorname{ctg}(\pi z) - i \operatorname{sign} x),$$

где такой интеграл будет равен сумме интегралов по полуокружностям (особенностей нет, $\equiv 0$), минус вычеты в точках $\pm k$:

$$G(x) = \frac{\pi}{\varkappa} \Big(\operatorname{ctg} \pi\varkappa \cos \varkappa x + \operatorname{sign} x \sin \varkappa x \Big)$$

№3 (2.1.3)

Найдём решение задачи

$$\hat{L}f = \varphi(x), \qquad \hat{L} = \partial_x^2 + \varkappa^2, \qquad \varphi(x) = \operatorname{sign} x,$$

на классе периодических фнкций на интервале $(-\pi, \pi)$.

Функция Грина. Повторм выкладки с семинара, а именно найдём функцию Грина, оператора $\hat{L}$ с периодическими граничными условиями на $[-\pi, \pi]$.

При $x < y$:

$$G(x,y) = A_1(y)\sin\varkappa(x+\pi) + B_1(y)\cos\varkappa(x+\pi),$$

и аналогично для $x > y$:

$$G(x,y) = A_2\sin\varkappa(x-\pi) + B_2(y)\cos\varkappa(x-\pi).$$

Запишем граничные условия:

$$G(-\pi,y) = G(\pi,y), \qquad \Rightarrow \qquad B_1(y) = B_2(y) \overset{\text{def}}{=} B(y)$$

$$G'_x(-\pi,y) = G'_x(\pi,y), \qquad \Rightarrow \qquad A_1(y) = A_2(y) \overset{\text{def}}{=} A(y).$$

Тогда нашли, что

$$G(x,y) = \begin{cases} A\sin\varkappa(x+\pi) + B\cos\varkappa(x+\pi) \\ A\sin\varkappa(x-\pi) + B\cos\varkappa(x-\pi) \end{cases}$$

Теперь запишем непрерывность:

$$A\sin\varkappa(x+\pi) + B\cos\varkappa(x+\pi) = A\sin\varkappa(x-\pi) + B\cos\varkappa(x-\pi).$$

А также скачок производной

$$G'_x(y+0,y) - G'_x(y-0,y) = 1, \quad \Rightarrow \quad A\cos\varkappa(x-\pi) - B\sin\varkappa(x-\pi) - A\cos\varkappa(x+\pi) + B\cos\varkappa(x+\pi) = \varkappa^{-1}.$$

Решая эту систему находим, что

$$2\sin\pi\varkappa \begin{pmatrix} \cos\varkappa y & -\sin\varkappa y \\ \sin\xi y & \cos\varkappa y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\varkappa \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sin\pi\varkappa} \begin{pmatrix} \cos\varkappa y & \sin\varkappa y \\ \sin\varkappa y & \cos\varkappa y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\varkappa \end{pmatrix} = \frac{1}{2\varkappa\sin\pi\varkappa} \begin{pmatrix} \sin xy \\ \cos xy \end{pmatrix}.$$

Подставляя в $G(x,y)$, находим

$$G(x,y) = \frac{1}{2\varkappa\sin\pi\varkappa} \begin{cases} \cos(\varkappa(x-y) + \varkappa\pi), & x < y, \\ \cos(\varkappa(x-y) - \varkappa\pi), & x > y. \end{cases} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} G_1(x-y), & x < y, \\ G_2(x-y), & x > y. \end{cases}$$

Решение с возмущением. Подставим теперь возмущение, вида

$$\varphi(x) = \operatorname{sign} x, \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} G(x,y)\varphi(y)\,dy,$$

а дальше разделим задачу на две части $x < 0$ и $x > 0$:

$$x < 0: \qquad f(x) = \int_{-\pi}^{x} (-G_2)\,dy + \int_{x}^{0} (-G_1)\,dy + \int_{0}^{\pi} G_1\,dy,$$

$$x > 0: \qquad f(x) = \int_{-\pi}^{0} (-G_2)\,dy + \int_{0}^{x} G_2\,dy + \int_{x}^{\pi} G_1\,dy.$$

Осталось посчитать шесть интегралов, так находим:

$$f(x) = \frac{1}{\varkappa^2}\left(1 - \frac{\sin\varkappa(\pi - |x|)}{\sin\pi\varkappa}\right)\operatorname{sign} x - \frac{\sin\varkappa x}{\varkappa^2\sin\varkappa\pi}.$$

№4 (2.1.6)

Найдём поведение решения уравнения Бесселя

$$\hat{L}f(x) = 0, \qquad \hat{L} = \partial_x^2 + Q(x)\partial_x - U(x), \qquad Q(x) = \frac{1}{x}, \qquad U(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x^2}.$$

Перейдём к уравнени, вида

$$x^2\partial_x^2 u + x\partial_x u + x^2 u - \nu^2 u = 0.$$

Вблизи $x = 0$, приведенное уравнение имеет степенные решения $f \sim x^\alpha$, где

$$x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + x\alpha x^{\alpha-1} + \cancel{x^2 x^\alpha} - \nu^2 x^\alpha = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \pm\nu,$$

откуда находим $f \sim x^\nu$ – регулярное решение и $f \sim 1/x^\nu$ – нерегулярное решение.

При $\nu = 0$, регулярное решение выродится в $f \sim \text{const}$ вблизи $x = 0$, а асимптотику нерегулярного найдём из:

$$x^2 u'' + xu' + x^2 u = 0, \qquad \Rightarrow \qquad xu'' + u' + xu = 0,$$

решение которого можно попробовать найти в виде $c \ln x$:

$$-\frac{c}{x} + \frac{c}{x} + xc \log x = 0,$$

ну, похоже на $\ln x$. Надо бы показать, что $c = 2/\pi$, но кроме как численно пока не придумал. По крайней мере не этим методом.

5 Неделя V

№1

Найдём функцию Грина оператора $\partial_x^2(\partial_x^2+1)$ для функций над $[-\pi,\pi]$, удовлетворяющих граничным условиям.

Подстановкой $e^{\lambda x}$, найдём, что нулевые моды удовлетворяют уравнению

$$\lambda^2(\lambda-i)(\lambda+i)=0, \quad \Rightarrow \quad e_{1,2,3}=\frac{1}{2\pi}\left\{1,\, e^{ix},\, e^{-ix}\right\},$$

где 2π – нормировка.

Тогда функция Грина удовлетворяет уравнению, вида

$$\hat{L}G(x)=\delta(x)-\frac{1+2\cos x}{2\pi}.$$

При $x>0$ общее решение может быть найдено в виде

$$G^{\text{gen}}(x)=-c_1\cos x-c_2\sin x+c_3+xc_4.$$

Частное решение:

$$G^{\text{part}}(x)=-\frac{x^2}{4\pi}+\frac{4\cos x}{2\pi}+\frac{x\sin x}{2\pi}.$$

Вклад от $\delta(x)$ можно записать, как

$$G^{\delta}(x)=\theta[x](x-\sin x).$$

Осталось подставить граничные условия , откуда находим:

$$G(\pi)=G(-\pi), \quad \Rightarrow \quad 1+2c_4=0.$$

Остальные граничные условия на G', G'', G''' выполняются автоматически.

Однако по постановке задачи $G(x)$ не содержит $e_{1,\,2,\,3}$, а значит

$$\begin{cases}\langle e_1|G(x)\rangle=0,\\ \langle e_2|G(x)\rangle=0,\\ \langle e_3|G(x)\rangle=0,\end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix}\pi(\pi+6c_3)=3\\ \pi(2i+4c_1+4ic_2)=1,\\ 4\pi c_1-2i\pi-4i\pi c_2=1.\end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}c_1=1/4\pi,\\ c_2=-1/2,\\ c_3=(3-\pi^2)/6\pi.\end{cases}$$

Таким образом, искомая функция Грина:

$$G(x)=(\theta[x]-\tfrac{1}{2})(x-\sin x)-\frac{x^2}{4\pi}+\frac{5\cos x}{4\pi}+\frac{x\sin x}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}-\frac{\pi}{6}.$$

№1 (пример)

Рассмотрим, например, возмущение, вида

$$\varphi(x)=\operatorname{sign}(x)\cos(x).$$

Стоит заметить, что $\varphi(x)$ не содержит в себе нулевых мод, так что задача корректна и имеет решение. Уже зная $G(x)$ для $\hat{L}$, нетрудно найти решение:

$$f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}G(x-y)\varphi(y)\,dy=-\theta(x)(x\sin(x)+2\cos(x)-2)+\frac{(2x+\pi)(\pi\sin(x)-4)}{4\pi}+\cos(x).$$

Посмотрим на вид $G(x)$, $f(x)$ и также для наглядности построим все слагаемые $f(x)$, а то как-то больно хорошо $f(x)$ выглядит.

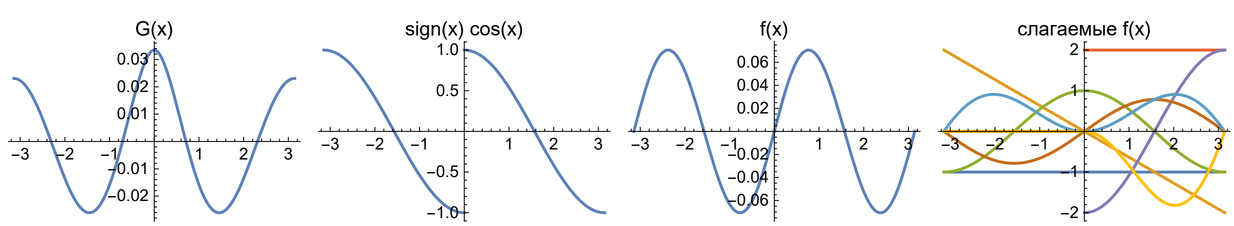

Рис. 3: Вид функций в w5, №1.

№2 (2.2.3)

Переёдем в сферические координаты для интеграла, вида

$$f(\boldsymbol{r}) = \int G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\phi(\boldsymbol{r}')\,dV', \qquad G(\boldsymbol{r}) \equiv G(r) = -\frac{1}{4\pi r}, \qquad \Rightarrow \qquad f(\boldsymbol{r}) = -\int dV' \,\frac{\phi(\boldsymbol{r}')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.$$

Считая, что $\phi(\boldsymbol{r}) \equiv \phi(r)$, находим:

$$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r}\int_0^r \phi(r')r'^2\,dr' + \int_r^\infty \phi(r')r'\,dr'.$$

№3 (2.2.10)

Найдём решение уравнения Лапласа f в полуплоскости $y>0$, для $f(x,0)=e^{ix}$. Искомая функция может быть найдена, как

$$f(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{y/\pi}{(x-\xi)^2+y^2}e^{i\xi}.$$

У подынтегральной функции всего две особенности: $\xi = x \pm iy$ – полюса первого порядка. По лемме Жордана, замыкая функцию сверху, интегрируя против часовой стрелки, находим значение интеграла через вычет в точке $x+iy$:

$$f(x,y) = 2\pi i\frac{y}{p}\lim_{\xi\to x+iy}\frac{(\xi-x-iy)}{(x-\xi)^2+y^2}e^{i\xi} = e^{ix-y},$$

таким образом нашли голоморфную функцию, удовлетворяющую граничному условию.

№4 (2.3.2)

Найдём радиальную функцию R связного состояния атома водорода, соответствующего $n=2$ и $l=1$.

Вообще, волновая функция для атома водорода будет иметь вид

$$\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n\cdot(n+l)!}}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\exp\left(-\frac{r}{n}\right)\cdot\left(\frac{2r}{n}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{n}\right)\cdot Y_{l,m}(\theta,\varphi),$$

где L – полиномы Лагерра. Так что ожидаем найти, что $R\sim r\cdot e^{-r/2}$.

Образ функции $\Phi = R\cdot r^{l+1}$, может быть записан, как

$$\tilde{\Phi}(p) \sim \frac{(p-1/n)^{n-l-1}}{(p+1/n)^{n+l+1}} = \frac{1}{(p+\frac{1}{2})^4}.$$

Делая замену $p=i\nu$, переходим к интегралу

$$\Phi(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu t}\frac{1}{(i\nu+\frac{1}{2})^4}\frac{d\nu}{2\pi},$$

с полюсом 4 порядка в $\nu = i/2$. Тогда, считая вычет в этой точке, находим

$$\Phi(r) = i\lim_{\nu\to i/2}\frac{d^4}{dx^4}\left(\nu-\frac{1}{2}i\right)^4\frac{e^{i\nu r}}{(i\nu-\frac{1}{2})^4} = r^3e^{-r/2}, \qquad \Rightarrow \qquad R = r\cdot e^{-r/2},$$

как и ожидалось. Если бы нам хотелось иметь нормированную $R(r)$, то

$$\int_0^\infty re^{-r/2}\,dr = 2\int_0^\infty e^{-r/2}\,dr = 4, \qquad \Rightarrow \qquad R^{\text{norm}} = \frac{r}{4}e^{-r/2}.$$

6 Неделя VI

№1 (3.1.1)

Найдём объём d-мерного единичного шара B_n. Для этого рассмотрим интеграл от $f(\boldsymbol{x}) = e^{-|\boldsymbol{x}|^2}$:

$$I^n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\boldsymbol{x}|^2}\,d\boldsymbol{x} = \int_0^1 \mu\left[e^{-|\boldsymbol{x}|^2} \leqslant y\right]\,dy = \int_0^1 \mu\left[|\boldsymbol{x}|^2 \leqslant -\ln y\right]\,dy.$$

Заметим, что справа стоит объем шара, радиуса $r=\sqrt{-\ln y}$, равный r^nB_n. Тогда

$$I^n = B_n\int_0^1 (-\ln y)^{n/2}\,dy.$$

Заменяя $-\ln y = t$, находим

$$I^n = B_n \int_0^\infty t^{n/2} e^{-t}\, dt = B_n \Gamma\left(\tfrac{n}{2}+1\right), \qquad \Rightarrow \qquad B_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{1}+1\right)},$$

где I – гауссов интеграл: $I = \sqrt{\pi}$. Нетрудно от объема шара перейти к площади сферы, дифференцируя $B_n r^n$ по r:

$$S_n = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

только здесь размерность сферы $n-1$ (поверхность n-мерного шара).

№2 (3.1.3)

Найдём значение

$$I_c = \int_0^\infty u^{z-1} \cos u\, du = \frac{1}{2} \int_0^\infty u^{z-1} \left(e^{iu} + e^{-iu}\right) du.$$

Для этого вычислим интегралы, вида

$$I_1 = \int_0^\infty u^{z-1} e^{iu}\, du = \Big/ u = i\alpha \Big/ = i^z \int_0^\infty \alpha^{z-1} e^{-\alpha}\, d\alpha = i^z \Gamma(z).$$

Аналогично находим

$$I_2 = \int_0^\infty u^{z-1} e^{-iu}\, du = \Big/ u = -i\alpha \Big/ = (-i)^z \int_0^\infty \alpha^{z-1} e^{-\alpha}\, d\alpha = (-i)^z \Gamma(z).$$

Вспоминая, что

$$i^z = e^{z \ln i} = e^{i\pi z/2}, \qquad (-i)^z = e^{z \ln -i} = e^{-i\pi z/2}.$$

Тогда

$$I_c = \frac{1}{2}\left(I_1 + I_2\right) = \frac{1}{2}\Gamma(z)\left(e^{i\pi z/2} + e^{-i\pi z/2}\right) = \Gamma(z) \cos\left(\tfrac{\pi z}{2}\right).$$

Аналогично находим, что

$$I_s = \int_0^\infty u^{z-1} \sin u\, du = \frac{1}{2i}\left(I_1 - I_2\right) = \Gamma(z) \sin\left(\tfrac{\pi z}{2}\right).$$

№4 (3.1.7)

Найдём значение интеграла, вида

$$I = \int_0^1 \ln \Gamma(z)\, dz.$$

Делая замену $z = 1 - z$, находим, что

$$I = -\int_1^0 \ln \Gamma(1-z)\, dz = \int_0^1 \ln \Gamma(1-z)\, dz.$$

Вспоминая, что

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

и складывая два представления, находим:

$$2I = \int_0^1 dz \ln\left[\Gamma(z)\Gamma(1-z)\right] dz = \ln \pi - \int_0^1 \ln \sin \pi z\, dz = \ln \pi - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln \sin z\, dz.$$

Введем $I_1 = \int_0^{\pi/2} \ln \sin z\, dz$, тогда

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \ln \sin z\, dz = \int_0^{\pi/2} \ln \cos z\, dz, \qquad \Rightarrow \qquad 2I_1 = \int_0^{\pi/2} \ln\left[\tfrac{\sin 2z}{2}\right] dz = \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x - \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Заметим, что

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin 2z = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin z\, dz = I_1,$$

а значит мы нашли значения для I_1:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \ln \sin z\, dz = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Подставляя I_1 в выражение для I, находим

$$2I = \ln\pi - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right) = \ln\pi + \ln 2 = \ln 2\pi, \qquad \Rightarrow \qquad I = \int_0^1 \ln\Gamma(z)\,dz = \frac{1}{2}\ln 2\pi.$$

№5

Найдём значение функции $S(z)$, вида

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z}\right).$$

Для этого рассотрим только сумму до некоторого N следующих рядов:

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{n} = -\psi(1) + \psi(N+2),$$

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+z} \overset{*}{=} -\psi(z) + \psi(N+1+z),$$

где $\psi(z)$ – дигамма функция: $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$. Равенство со звёздочкой можно получить из следующих соображений:

$$\psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z), \qquad \Rightarrow \qquad \psi(N+z+1) = \frac{1}{N+z} + \psi(N+z) = \ldots = \psi(z) + \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n+z}.$$

Также заметим, что

$$\lim_{N\to\infty}\left(\psi(N+2) - \psi\left(N+1+z\right)\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N} + \psi(N) - \frac{1}{N+z} - \psi\left(N+z\right)\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\psi(N) - \psi(N+z)\right),$$

и так далее вплоть до поиска предела разницы $\psi(N) - \psi(N+\alpha)$, где $\alpha \in (0,1)$. Асимптотикой $\psi(z)$ является $\ln z$, так что

$$\lim_{N\to\infty}\left(\psi(N) - \psi\left(N+\alpha\right)\right) = 0,$$

а значит искомое значение $S(z)$:

$$S(z) = \psi(z) - \psi(1).$$

7 Неделя VII

№1 (3.2.1)

Известно, что

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\left(xu + \frac{u^3}{3}\right)du, \qquad \mathrm{Bi}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\exp\left(xu - \frac{u^3}{3}\right) + \sin\left(xu + \frac{u^3}{3}\right)\right]du.$$

Найдём значения в $x = 0$, переходя к $u = t^{1/3}$:

$$\mathrm{Ai}(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(u^3/3)\,du = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(t/3)}{3t^{2/3}}\,dt = \frac{1}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

Аналогично для Bi:

$$\mathrm{Bi}(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\exp\left(-u^3/3\right) + \sin(u^3/3)\right]du = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{t}{3}} + \sin\left(\frac{t}{3}\right)}{3t^{2/3}}\,dt = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3^{2/3}\pi} - \frac{\Gamma\left(-\frac{2}{3}\right)}{3^{5/3}\pi} = \frac{1}{3^{1/6}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

Теперь, дифференцируя под знаком интеграла, находим

$$\mathrm{Ai}'(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} -\frac{\sin\left(\frac{t}{3}\right)}{3\sqrt[3]{t}}\,dt = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}.$$

Аналогично для Bi:

$$\mathrm{Bi}'(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-\frac{t}{3}}}{3\sqrt[3]{t}} + \frac{\cos\left(\frac{t}{3}\right)}{3\sqrt[3]{t}}\right)dt = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\sqrt[3]{3}\pi} + \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2\sqrt[3]{3}\pi} = \frac{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2\pi} = \frac{3^{1/6}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}.$$

№2 (3.2.2)

Найдём асимптотику $\mathrm{Bi}(x \to +\infty)$, где Bi:

$$\mathrm{Bi}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_3 - C_2} \exp\left(-\frac{p^3}{3} + xp\right) dp, \qquad F(p) = -\frac{p^3}{3} + xp.$$

Аналогично Ai для Bi, методом перевала, при $x \to +\infty$, заметим, что контура C_2 и C_3 задевают только $+\sqrt{x}$:

$$F(\sqrt{x}) = \frac{2}{3}x^{3/2}, \quad F''(\sqrt{x}) = -2\sqrt{x}, \quad \varphi = \pi, \qquad \Rightarrow \qquad \underset{x\to\infty}{\mathrm{Bi}(x)} = 2 \times \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{2\sqrt{x}}} \exp\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}x^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right).$$

Теперь найдём асимптотику $\mathrm{Bi}(x \to -\infty)$. Для начала, как и для Ai:

$$F\left(\pm i\sqrt{|x|}\right) = \pm\left(i\frac{|x|^{3/2}}{3} - i|x|^{3/2}\right) = \mp\frac{2}{3}i|x|^{3/2}.$$

Отличие от Ai будет только в фазе, из-за другого напраления контура в точке $-i\sqrt{|x|}$:

$$\varphi|_{+i\sqrt{\pi}} = -\frac{\pi}{2}, \qquad \Rightarrow \qquad \phi = -\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2} = +\frac{3}{4}i\pi,$$

$$\varphi|_{-i\sqrt{\pi}} = \frac{\pi}{2}, \qquad \Rightarrow \qquad \phi = -\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3}{4}i\pi.$$

А значит, с учётом раскрытя $\sqrt{2}\cos(a + \pi/4) = \cos a - \sin a$, получаем выражение для Bi при $x \to -\infty$:

$$\underset{x\to-\infty}{\mathrm{Bi}(x)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

8 Неделя VIII

№1 (3.3.3)

Найдём вид преобразования Лапласа (далее $p \equiv a$ из условия) от функций Бесселя J:

$$\Lambda[J_m](p) = \int_0^\infty e^{-pz} J_m(z)\, dz.$$

Воспользуемся интегральным представлением и переставим интегралы:

$$\Lambda[J_m](p) = \int_0^\infty e^{-pz} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{iz\sin\varphi} e^{-im\varphi}\, d\varphi\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{im\varphi}\, d\varphi \int_0^\infty e^{-z(p - i\sin\varphi)}\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{-im\varphi}}{p - i\sin\varphi}\, d\varphi.$$

Сведем происходящее к интегралу по окружности, вводя $t = e^{i\varphi}$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{-im\varphi}}{p - i\sin\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{i\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} i\frac{e^{im\varphi}e^{i\varphi}}{2pe^{i\varphi} - e^{2i\varphi} + 1} = \frac{1}{\pi i} \oint_{|t|=1} \frac{1}{2pt - t^2 + 1} \frac{dt}{t^m},$$

где $t = 0$ – полюс m-го порядка, зато

$$\frac{1}{2pt - t^2 - 1} = -\frac{1}{2\sqrt{p^2+1}} \left(\frac{1}{pt\sqrt{p^2+1}} - \frac{1}{pt + \sqrt{p^2+1}}\right),$$

а значит

$$\Lambda[J_m](p) = \ldots = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} \frac{1}{(p + \sqrt{p^2+1})^m}. \tag{4}$$

В частности,

$$\Lambda[J_1](a) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}\left(\sqrt{a^2+1} + a\right)} = 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}.$$

№2 (3.3.4)

Найдём интеграл, вида

$$I_n = \int_0^\infty \frac{J_n(z)}{z^n}\, dz.$$

Вспомним, что

$$\partial_z\left(z^m J_m[z]\right) = z^m J_{m-1}[z], \qquad \text{или} \qquad J_m[z] = \frac{1}{z^{m+1}} \partial_z\left(z^{m+1} J_{m+1}[z]\right).$$

Подставляя в I_n, и, интегрируя по частям, находим

$$I_n(z) = \frac{J_{n+1}}{z^n}\bigg|_0^\infty - \int_0^{+\infty} z^{n+1} J_{n+1} \frac{-2n-1}{z^{2n+2}}\, dz = (2n+1)\int_0^\infty \frac{J_{n+1}}{z^{n+1}}\, dz = (2n+1) I_{n+1},$$

откуда

$$I_n = \frac{1}{(2n-1)!!} I_0.$$

Осталось найти I_0, как, например, $\Lambda[J_0](1)$:

$$I_0 = \int_0^\infty J_0(z)\, dz = \int_0^\infty J_0(z)\, dz = \Lambda[J_0](0) = 1,$$

а значит исходный интеграл:

$$I_n = \int_0^\infty \frac{J_n(z)}{z^n}\, dz = \frac{1}{(2n-1)!!}, \qquad I_2 = \frac{1}{3}.$$

№3 (3.3.8)

Функции Бесселя J_n ортогональны с весом x, в смысле

$$\int_0^\infty x J_n(kx) J_n(qx)\, dx = k^{-1}\delta(k-q), \qquad \langle f|g\rangle = \int_0^\infty x g(x) g(x)\, dx.$$

Что позволяет сформулировать разложение, вида

$$f(x) = \int_0^\infty q J_n(qx) f_q\, dq, \qquad f_q = \int_0^\infty x J_n(qx) f(x)\, dx.$$

Найдём подобное разложение для функции $f(x)$

$$f(x) = e^{-p^2x^2},$$

при $n = 0$.

Переставляя сумму и интеграл, находим

$$J_m(x) = \frac{z^m}{2^m}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k z^{2k}}{4^k k!(n+k)!}, \qquad \Rightarrow \qquad f_q = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} q^{2k} \underbrace{\int_0^\infty x^{2k+1} e^{-p^2x^2}\, dx}_{p^{-2k-2}\Gamma(k+1)/2} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{2p^2}\left(\frac{q}{2p}\right)^{2k} = \frac{e^{-q^2/4p^2}}{2p^2},$$

а значит $f(x)$ может быть представлена в виде

$$f(x) = \int_0^\infty q J_0(qx) \frac{e^{-q^2/4p^2}}{2p^2}\, dq.$$

9 Неделя IX

Примечание. Далле по тексту встречается символ Похгаммера, с соответствующим обозначением

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1) = x!/(x-n)!.$$

№1 (3.4.3)

Докажем формулу Кристоффеля-Дарбу для ортогональных полиномов:

$$\sum_{k=0}^n \frac{p_k(x)p_k(y)}{\|p_k\|^2} = \frac{1}{A_n\|p_n\|^2}\frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x)}{x-y}.$$

Для начала вспомним рекуррентное соотношение для полиномов:

$$p_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)p_n(x) + C_n p_{n-1}(x)$$
$$p_{n+1}(y) = (A_n y + B_n)p_n(y) + C_n p_{n-1}(y).$$

Посмотрим, в частности, на $p_n(y)p_{n+1}(x) - p_n(x)p_{n+1}(y)$:

$$p_n(y)p_{n+1}(x) - p_n(x)p_{n+1}(y) = A_n\left[(x-y)p_n(x)p_n(y)\right] - C_n\left[p_n(x)p_{n-1}(y) - p_n(y)p_{n-1}(x)\right].$$

Вспомним, что C_n выражается, как

$$C_n = -\frac{A_n}{A_{n-1}} \frac{\|p_n\|^2}{\|p_{n-1}\|^2},$$

а значит мы получили новое рекуррентное соотношение, которым и воспользуемся

$$\frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x)}{A_n\|p_n\|^2} = \frac{p_n(x)p_n(y)}{\|p_n\|^2} + \frac{p_n(x)p_{n-1}(y) - p_n(y)p_{n-1}(x)}{A_{n-1}\|p_{n-1}\|^2(x-y)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)p_k(y)}{\|p_k\|^2},$$

окуда и получаем искомое соотношение.

Осталось подставить значение коэффициентов для полиномов Лежандра:

$$A_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{n+1}, \qquad a_n = \frac{(2n)_n}{2^n n!}, \qquad \|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

где a_n – кэффициент при старшей степени. Подставляя, находим

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(x)P_k(y) = (n+1)\frac{P_n(x)P_{n+1}(y) - P_{n+1}(x)P_n(y)}{y-x},$$

что и требовалось доказать.

№3 (3.4.14)

Найдём значение интеграла

$$I_n = \int_{-1}^{1} P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)\,dx.$$

Вспоминая, что $P_n \perp x^k\ \forall k < n$, переходим к интегралу, вида

$$I_n = \int_{-1}^{1} a_{n-1}x^{n+1}P_{n+1}\,dx = \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} \int_{-1}^{1} a_{n+1}x^{n+1}P_{n+1}\,dx = \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}}\|P_{n+1}\|^2,$$

где a_n – коэффициент при старшей степени:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\partial_x^n (x^2-1)^n, \qquad \Rightarrow \qquad a_n = \frac{(2n)_n}{2^n n!}.$$

Норму полиномов Лежандра можно найти, как

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Собирая все вместе, находим:

$$I_n = \frac{8}{2n+3}\frac{(2n-2)!}{(2n+2)!} = \frac{8}{(2n+3)_5}\big[n(n+1)\big]^2.$$

№4 (3.5.5)

Найдём нормировку $\|H_n\|$ из формулы Родрига:

$$\|H_n\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\,dx,$$

Для этого вычислим коэффициент при старшей степени:

$$H_n = (-1)^n e^{x^2}\partial_x^n e^{-x^2}, \qquad \Rightarrow \qquad a_n = 2^n.$$

Вспоминая, что $H_n \perp x^k\ \forall k < n$, переписываем исходный интеграл в виде

$$\|H_n\|^2 = a_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}x^n H_n\,dx = a_n(-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \partial_x^n e^{-x^2}\,dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2^n n!\sqrt{\pi}.$$

Итого, нормировка полиномов Эрмита:

$$\|H_n\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_n^2(x)\,dx = 2^n n!\sqrt{\pi}.$$

№5 (3.5.8)

Найдём значение интеграла

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(x-y)^2) H_n(x)\, dx.$$

Вспоминая, что

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \partial_x^n e^{-x^2},$$

переписываем I_n, как

$$I_n = (-1)^n e^{-y^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2xy} \partial_x^n e^{-x^2}\, dx = e^{-y^2} \int_{-\infty}^{+\infty} 2^n y^n e^{2xy} e^{-x^2}\, dx = 2^n y^n \sqrt{\pi},$$

где мы просто много раз проинтегрировали по частям. Итого, исходный интеграл:

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(x-y)^2) H_n(x)\, dx = 2^n y^n \sqrt{\pi}.$$

№6 (3.5.10)

Найдём значение интеграла

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp(-x^2) H_n(xy)\, dx.$$

Заметим, что

$$\partial_y H_{2n}(xy) = x \cdot 2n \cdot H_{2n-1}(xy) \cdot 2, \qquad \ldots, \qquad \Rightarrow \qquad \partial_y^n H_{2n}(xy) = x^n 2^n \frac{(2n)!}{n!} H_n(xy) = x^n 2^n (2n)_n H_n(xy).$$

А значит исходный интеграл можем представить в виде

$$I_n = \frac{1}{2^n (2n)_n} \partial_y^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_{2n}(xy)\, dx = \frac{1}{2^n (2n)_n} \partial_y^n J_{2n}(y), \qquad J_n(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(xy)\, dx.$$

Найдём значение $J_n(y)$ через производящую функцию, а именно рассмотрим $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_n z^n}{n!} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(xy) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-z^2 + 2z\cdot xy} = \sqrt{\pi} e^{z^2(y^2-1)},$$

где мы, зная, что все сходится равномерное, переставили сумму и интеграл. Раскладывая ответ в ряд, находим

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J_n z^n}{n!} = \sqrt{\pi} e^{z^2(y^2-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} (y^2-1)^n \sqrt{\pi}, \qquad \Rightarrow \qquad J_{2n}(y) = \sqrt{\pi} (2n)_n (y^2-1)^n.$$

Осталось вспомнить, что полиномы Лежандра выражаются, как

$$P_n(y) = \frac{1}{2^n n!} \partial_y^n (y^2-1)^n,$$

так что, собирая всё вместе, находим, что

$$I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \partial_y^n (y^2-1)^n = n! \sqrt{\pi} P_n(y).$$