Задание по курсу «Уравнения математической физики»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *28 сентября 2021 г.*

Содержание

ТеорМин

Вычеты. Интеграл по дуге может быть найден, как

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_j} \operatorname*{res}_{z_j} f(z), \qquad \operatorname*{res}_{z_j} f(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i\varphi} f(z_j + \varepsilon e^{i\varphi})$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_j} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_j)^m f(z) \right),$$

где m – степень полюса.

Lem 1 (лемма Жордана). *Пусть $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $G = \{z \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0,\, |z| \geqslant R_0 > 0\}$. Обозначим через C_R полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Im} x \geqslant 0$ и пусть верно, что $\lim_{R\to\infty} \max |f(z)| = 0$. тогда при $a > 0$*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz}\,dz = 0,$$

аналогичное верно при C_R с $\operatorname{Im} x \leqslant 0$ и $a < 0$.

Матричное уравнение. Решение линейного уравнения для векторной величины $\boldsymbol{y}$

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} + \hat{\Gamma}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\chi},$$

может быть найдено, через функцию Грина, вида

$$\hat{G}(t) = \theta(t) \exp\left(-\hat{\Gamma} t\right), \qquad \boldsymbol{y}(t) = \int_{-\infty}^t \hat{G}(t-s)\boldsymbol{\chi}(s)\,ds.$$

Преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа функциии $\Phi(t)$ определяется, как

$$\tilde{\Phi}(p) = \int_0^\infty \exp(-pt)\Phi(t)\,dt, \qquad \Phi(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt)\tilde{\Phi}(p),$$

где далее c выбираем правее всех особенностей для причинности.

Решение уравнения $L(\partial_t)G(t) = \delta(t)$ может быть найдено, как

$$G(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt)\tilde{G}(p), \qquad \tilde{G}(p) = \frac{1}{L(p)}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \sum_i \operatorname*{res}_i \frac{\exp(pt)}{L(p)},$$

где суммирование идёт по полюсам $1/L(p)$.

Важно, что можно делать функции маленькими

$$\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \tilde{f}(p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \frac{\tilde{f}(p)}{p^n} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}. \tag{1}$$

Уравнение Вольтерра. Интегральное уравнение Вольтерра первого рода с однородным ядром:

$$\int_0^t K(t-s)f(s)\,ds = \varphi(t).$$

Решение может быть найдено через обратное преобразование Лапласа

$$f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt)\tilde{f}(p), \qquad \tilde{f}(p) = \frac{\tilde{\varphi}(p)}{\tilde{K}(p)}.$$

Но есть один нюанс. При $K(t)$, $\varphi(t) \overset{p\to\infty}{\to} K_0$, φ_0 получается, что $\tilde{K}(p)$, $\tilde{\varphi}(p) \approx \frac{K_0}{p}$, $\frac{\varphi_0}{p}$, тогда

$$f(t) = \frac{\varphi_0}{K_0}\delta(t) + \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \left(\frac{\tilde{\varphi}}{\tilde{K}} - \frac{\varphi_0}{K_0} \right),$$

при этом в отсутствие аналитичности в нуле нет ничего страшного.

Неоднородная релаксация. Для одномерного случая

$$\big(\partial_t + \gamma(t)\big)x(t) = \varphi(t), \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)\varphi(s)\,ds, \quad G(t,\,s) = \theta(t-s)\exp\left(-\int_s^t \gamma(\tau)\,d\tau\right),$$

где всё также $G(t, s > t) = 0$ в силу стремления к принципу причинности.

1 Неделя I

№1

Рассмотрим уравнение на $G(t)$

$$(\partial_t + \gamma)G(t) = \delta(t), \tag{2}$$

с учетом принципа причинности $g(t<0) = 0$.

При $t>0$ $\delta(t) = 0$, так что

$$\partial_t G(t) = -\gamma G(t), \quad \Rightarrow \quad G(t) = A\exp(-\gamma t).$$

Проинтегрируем уравнение (2) от $-\varepsilon$ до ε:

$$G(\varepsilon) - \cancel{G(-\varepsilon)} + \cancel{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \gamma G(t)\, dt} = \int \delta(t)\, dt = 1, \quad \Rightarrow \quad G(\varepsilon) = 1, \quad \Rightarrow \quad A = 1.$$

Таким образом, искомая функция Грина $G(t)$:

$$G(t) = \theta(t)\cdot \exp\left(-\gamma t\right),$$

где $\theta(t)$ обеспечивает $G(t) = 0$ при $t<0$.

№2

Рассмотрим уравнение, вида

$$(\partial_t^2 + \omega^2)\varphi(t) = g(t), \qquad g(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [0,\tau]; \\ -\frac{v}{\tau l}, & t\in[0,\tau], \end{cases}$$

с нулевым начальным условием $\varphi(t<0) = 0$. Функция Грина $G(t)$ для оператора $(\partial_t^2+\omega^2)$ равна[1]

$$G(t) = \theta(t)\frac{1}{\omega}\sin(\omega t), \tag{3}$$

Далее найдём вид $\varphi(t)$ при $t<\tau$ (красная линия рис. 1):

$$\varphi(t<\tau) = \frac{1}{\omega}\int_{-\infty}^{t} \sin\omega(t-s)\ g(s)\, dt = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-s)\frac{v}{2l}\, d(t-s) = \frac{v}{l\tau}\frac{1}{\omega^2}\left(\cos(\omega t) - 1\right).$$

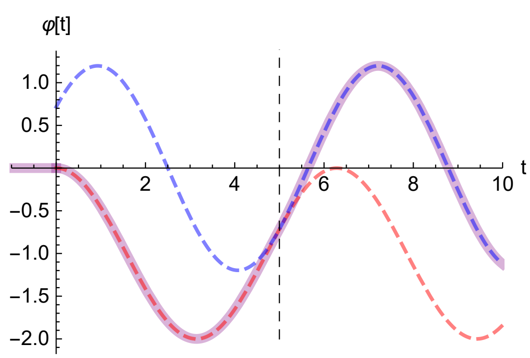

Рис. 1: Сшивка решений в I.2

Теперь решим[2] задачу Коши с начальным условием при $t=\tau$, введя переменную $T = t-\tau$:

$$\varphi(T) = \varphi(t-\tau) = \dot\varphi(\tau)G(t-\tau) + \varphi(\tau)\dot G(t-\tau) + 0 = \frac{v}{lt}\frac{1}{\omega^2}\left(\cos\omega t - \cos\omega(t-\tau)\right).$$

получая синюю кривую на рис. 1.

Итого, решение уравнения (1) (фиолетовая кривая, рис 1):

$$\varphi(t) = \frac{v}{l\tau}\frac{1}{\omega^2}\begin{cases} 0, & t<0; \\ \cos\omega t - 1, & t\in[0,\tau]; \\ \cos\omega t - \cos\omega(t-\tau), & t>\tau. \end{cases}$$

[1]Конспект, уравнение (1.11).
[2]Конспект, уравнение (1.12).

№3

I. Найдём значение интеграла, вида
$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\, dx.$$
Заметим, что уравнение $z^2+a^2=0$ имеет корни в $z_{1,2} = a^{\pm i\pi/2}$, тогда
$$I_1 = 2\pi i \cdot \mathrm{res}_{z_1} = 2\pi i \lim_{z\to z_1} \cdot \left(\frac{1}{(z-z_2)^2}\right)' = -4\pi i \cdot \lim_{z\to z_1}\left(\frac{1}{(z-z_2)^3}\right) = -4\pi i \frac{1}{(2ia)^3} = \frac{\pi}{2a^3}.$$
II. Теперь найдём значение интеграла, вида
$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipx}}{x^2+a^2}\, dx \overset{p\geq 0}{=} 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{ia} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-ap}}{2ai} = \frac{\pi}{a} e^{-ap},$$
где мы считали $p>0$. В случае $p<0$:
$$I_2 \overset{p\leq 0}{=} -2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{-ia} f(z) = -2\pi i \cdot \frac{e^{ap}}{-2ai} = \frac{\pi}{a} e^{ap}, \qquad \Rightarrow \qquad I_2 = \frac{\pi}{a} e^{-a|p|}.$$

2 Неделя II

№1 (1.1.4)

Найдём функию Грина $G(t)$ уравнения
$$L(\partial_t)x(t) = \varphi(t), \qquad L(\partial_t) = \partial_t^4 + 4\nu^2\partial_t^2 + 3\nu^4.$$
Функция Грина может быть найдена, как решение уравнения
$$L(\partial_t)G(t) = \delta(t)l, \qquad \Rightarrow \qquad G(t) = \theta(t)\cdot\left(b_1 e^{-\nu t} + b_2 e^{i\nu t} + b_3 e^{-i\sqrt{3}\nu t} + b_4 e^{i\sqrt{3}\nu t}\right),$$
где воспользовались разложением
$$L(z) = (z+i\nu)(z-i\nu)(z-i\sqrt{3}\nu)(z+i\sqrt{3}\nu).$$
Интегрируя от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$ уравнение на $G(t)$ находим, что
$$\partial_t^3 G(+0) = 1, \qquad \partial_t^2 G(+0) = \partial_t^1 G(+0) = G(+0) = 0,$$
откуда получаем СЛУ на $\{b_1,\, b_2,\, b_3,\, b_4\}$:
$$\left.\begin{aligned} b_1+b_2+b_3+b_4 &= 0,\\ b_1-b_2+\sqrt{3}\,(b_3-b_4) &= 0,\\ b_1+b_2+3\,(b_3+b_4) &= 0,\\ b_1-b_2+3\sqrt{3}\,(b_3-b_4) &= -\tfrac{i}{\nu^3}, \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad b_1 = \frac{i}{4\nu^3}, \quad ,b_2 = -\frac{i}{4\nu^3}, \quad ,b_3 = -\frac{i}{4\sqrt{3}\nu^3}, \quad ,b_4 = \frac{i}{4\sqrt{3}\nu^3}.$$
Так получаем решение, вида
$$G(t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{3}\,\nu^3}\left(\sqrt{3}\sin(\nu t) - \sin(\sqrt{3}\nu t)\right).$$

№2 (1.1.5)

Найдём функцию Грина для уравнения, вида
$$(\partial_t^2+\nu^2)^2 x(t) = \varphi(t).$$
Аналогично предыдущему номеру, сначала находим $G(t>0)$:
$$G(t>0) = b_1 e^{i\nu t} + b_2 t e^{i\nu} + b_3 e^{-i\nu t} + b_4 t e^{-i\nu t},$$
где секулярные члены возникли из-за кратности корней.

Также, интегрируя уравнение на $G(t)$ от $-\varepsilon$ до ε, получаем аналогичное условие
$$\partial_t^3 G(+0) = 1, \qquad \partial_t^2 G(+0) = \partial_t^1 G(+0) = G(+0) = 0,$$

и приходим к СЛУ на коэффициенты $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$:

$$\left.\begin{aligned} b_1+b_3=0,\\ i\,(b_1-b_3)\,\nu+b_2+b_4=0,\\ \nu\left((b_1+b_3)\,\nu-2i\,(b_2-b_4)\right)=0,\\ \nu^2\left(-3\,(b_2+b_4)-i\,(b_1-b_3)\,\nu\right)=1, \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad b_1=-\frac{i}{4\nu^3},\quad b_2=-\frac{1}{4\nu^2},\quad b_3=\frac{i}{4\nu^3},\quad b_4=-\frac{1}{4\nu^2}.$$

Получаем решение, вида

$$G(t)=\frac{\theta(t)}{2\nu^3}\left(\sin(\nu t)-\nu t\cos(\nu t)\right).$$

№3 (1.1.8)

Для системы уравнений, вида

$$(\partial_t+\hat\Gamma)\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{\xi}(t),\qquad \Gamma=\lambda\delta_{i,j}+\delta_{i,j-1},$$

найдём функцию Грина $G(t)$, как решение уравнения

$$(\partial_t+\hat\Gamma)G(t)=\delta(t)\mathbb{E},\qquad\Rightarrow\qquad G(t)=\theta(t)\exp\left(-\hat\Gamma t\right).$$

Осталось найти $\exp(-\hat\Gamma t)$, как матричную экспоненту, от жордановой клетки.

Для начала заметим, что

$$\delta^2_{i,j-1}=\delta_{i,j-1}\delta_{j,k}=\delta_{i+1,k-1}=\delta_{i,k-2},$$

и так далее, то есть $\delta_{i,j-1}$ – нильпотентный оператор, с $\delta^4_{i,j-1}=0$.

Посмотрим на степени $\hat\Gamma$:

$$\begin{aligned} \hat\Gamma^2&=\delta_{i,j}+2\delta_{i,j-1}+\delta_{i,j-2}\\ \hat\Gamma^3&=\delta_{i,j}+3\delta_{i,j-1}+3\delta_{i,j-2}+\delta_{i,j-3}\\ \hat\Gamma^4&=\delta_{i,j}+4\delta_{i,j-1}+6\delta_{i,j-2}+4\delta_{i,j-3}+\delta_{i,j-4}, \end{aligned}$$

но $\delta_{i,j-4}=0$, так что можем явно выделить на побочных диагоналях соответсвтующие экспоненты:

$$G(t)=\theta(t)e^{-\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{t^2}{2} & -\frac{t^3}{6}\\ 0 & 1 & -t & \frac{t^2}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -t\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где появившиеся t^k – секулярные члены.

№4

В частотном представлении для оператора $\partial_t^2+\omega_0^2$ можем «найти» функцию Грина, приводящую к

$$G(\omega)=\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2},\qquad\Rightarrow\qquad G(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2}\frac{d\omega}{2\pi},$$

с особенностями на вещественной оси.

Регуляризуем интеграл, рассмотрением «затухающего» осцилятора, тогда

$$G(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\frac{e^{-i\omega t}}{(\omega_0-\omega+i\varepsilon_1)(\omega_0+\omega+i\varepsilon_2)}}_{F(w)}\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Получилось два полюса:

$$\omega_1=\omega_0+i\varepsilon_1,\qquad \omega_2=-\omega_0-i\varepsilon_2.$$

Соответсвенно, по лемме Жордана, наличие/отсутствие вклада от $\varepsilon_{1,2}$ будет зависеть от выбора знаков в $\varepsilon_{1,2}\to\pm0$.

Для начала найдём вычеты по каждому полюсу:

$$2\pi i\cdot\operatorname*{res}_{\omega_1}F(\omega)=i\varepsilon e^{i\varphi}F(\omega_1)=-i\varepsilon e^{i\varphi}\frac{e^{it\omega_0}}{2\omega_0+i(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+\varepsilon e^{i\varphi}}\overset{\varepsilon\to0}{\approx}-\frac{i}{2\omega_0}e^{-it\omega_0}.$$

Аналогично, для второго полюса:

$$2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{\omega_2} F(\omega) = \ldots = \frac{i}{2\omega_0} e^{it\omega_0}.$$

Сразу заметим, что при вхождение только отного вычета невозможно выполнение условия о $G(0) = 0$, тогда рассмотрим $\varepsilon_1 \to +0$ и $\varepsilon_2 \to -0$, тогда оба полюча находятся в верхней полуплоскости, по которой и происходит обход *по* часовой стрелке:

$$G(t) = \theta(-t) \frac{1}{\omega_0} \sin(-\omega_0 t),$$

что соответствует опережающей функции Грина ($\partial_t G(t=0) = -1$).

Теперь найдём, что при $\varepsilon_1 \to -0$ и $\varepsilon_2 \to +0$ оба вычета в нижней полуплоскости, что приведет к смене знака:

$$G(t) = \theta(t) \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t),$$

что и соответствует запаздывающей функции Грина (см. ур. (3), $\partial_t G(t=0) = 1$), что не может не радовать.

3 Неделя III

№1 (1.3.4)

Найдём решение уравнения

$$\int_0^t K(t-s) f(s)\, ds = \varphi(t), \qquad K(t) = t, \quad \varphi(t) = \sin(t).$$

Решение может быть найдено, как

$$\tilde{f}(p) = \frac{\tilde{\varphi}(p)}{\tilde{K}(p)}, \qquad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{f}(p).$$

Для начала найдём, что

$$\tilde{\varphi}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\, dt = \frac{-1}{2i} \left(\frac{1}{i-p} + \frac{1}{i+p} \right) = \frac{1}{1+p^2}.$$

А также изображение для возмущения

$$\tilde{K}(p) = -\left(\int_0^\infty \exp\left(-pt\right) \right)'_p = \left(\frac{1}{p} e^{-pt}\Big|_0^\infty \right)'_p = \frac{1}{p^2}.$$

Заметим, что $\lim_{p\to\infty} \tilde{f}(p) = 1$, тогда

$$f(t) = \delta(t) + \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \left(\frac{p^2}{1+p^2} - 1 \right) = \delta(t) - \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \left(\frac{1}{1+p^2} \right) = \delta(t) - \sin(t),$$

где воспользовались уже известным значением изображения синуса.

Для галочки можем посчитать оригинал напрямую. Тогда заметим, что полюса находятся в $p = \pm i$, соответственно возьмём $c = 1$ и сделаем замену $p = 1 + i\omega$, тогда придём к интегралу

$$-e^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i\omega t}}{[\omega - (1+i)][\omega - (-1+i)]} = -e^t \left(\frac{1}{2} i e^{(-1-i)t} - \frac{1}{2} i e^{(-1+i)t} \right) = \sin(t),$$

в общем, всё сходится.

№2 (1.4.2)

Найдём функцию Грина

$$G(t,\, s) = \theta(t-s) \exp\left(-\int_s^t \gamma(\tau)\, d\tau \right),$$

для $\gamma(t) = a/t$, где $a = \text{const}$. Нетрудно найти, что

$$G(t, s) = \theta(t-s) \exp\left(-a \ln\frac{t}{s} \right) = \theta(t-s) \left(\frac{s}{t} \right)^a.$$

№3 (1.5.1)

Общее замечание. Ограничимся здесь проверкой свойств δ-функции (обобщенной функции/функционала), а именно локализованность ($\delta(t) = 0\ \forall t \neq 0$) и нормировку: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) = 1$.

I. Докажем, что

$$\frac{\pi}{2}\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{t^2\varepsilon}{(t^2+\varepsilon^2)^2}.$$

Для начала проверим нормировку, полюса второй степени находятся в точках $\pm i\varepsilon$, замыкая дугу сверху, находим:

$$\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2+\varepsilon^2)^2} = 2\pi i\varepsilon\cdot\lim_{t\to i\varepsilon}\left(\frac{d}{dt}\frac{t^2}{(t+i\varepsilon)^2}\right) = 2\pi i\varepsilon\cdot\lim_{t\to i\varepsilon}\frac{2it\epsilon}{(t+i\epsilon)^3} = 2\pi i\varepsilon\cdot\frac{1}{4i\varepsilon} = \frac{\pi}{2},$$

что доказывает нормировку δ-последовательности на единицу.

Теперь покажем локализованность:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{t^2\varepsilon}{(t^2+\varepsilon^2)^2} \overset{t\neq 0}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} t^2\varepsilon = 0, \qquad \forall t\neq 0.$$

II. Аналогично, докажем, что

$$\sqrt{\pi}\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\exp\left(-\frac{t^2}{\varepsilon}\right).$$

Можно заметить, что нормировка выполняется, так как гауссов интеграл равен $\sqrt{\pi}$, осталось показать локализованность:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\exp\left(-\frac{t^2}{\varepsilon}\right) \overset{t\neq 0}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\exp\left(-\frac{t^2+\frac{1}{2}\varepsilon\ln\varepsilon}{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\exp\left(-\frac{t^2}{\varepsilon}\right) = 0, \qquad \forall t\neq 0.$$

III. Наконец, покажем, что

$$\pi\delta(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos(nt)}{nt^2}.$$

Начнём с нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(nt)-1}{n}\,d\frac{1}{t} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(nt)}{t}\,dt = \pi,$$

как разность пределов на $\pm\infty$ интегрального синуса.

Проверяем локализованность:

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos(nt)}{nt^2} \leqslant \Big/ 1-\cos(nt)\leqslant 2 \Big/ \leqslant \frac{2}{\pi n t^2} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos(nt)}{nt^2} = 0.$$

№4 (1.5.8)

Найдём обратное преобразование Лапласа некоторых функций.

I. Первое изображение:

$$\tilde{f}(p) = \frac{\nu}{p^2+\nu^2}, \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{dp}{2\pi i}\exp(pt)\tilde{f}(p) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{dp}{2\pi i}\exp(pt)\frac{\nu}{p^2+\nu^2},$$

что выбором $c = 1$, заменой $p = \nu(i\omega+1)$, сводится к уже рассмотренному интегралу (w3, №1), тогда

$$\mathcal{L}^{-1}(t)\left[\frac{\nu}{p^2+\nu^2}\right] = \sin(\nu t).$$

II. Второе изображение:

$$\tilde{f}(p) = \frac{p}{p^2+\nu^2}, \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{dp}{2\pi i}\exp(pt)\frac{p}{p^2+\nu^2}.$$

Аналогично выбираем $c = 1$, делаем замену $p = \nu(i\omega+1)$, так приходим к интегралу, вида

$$f(t) = -e^{\nu t}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\exp(i\nu\omega t)\frac{1+i\omega}{[\omega-(1+i)][\omega-(-1+i)]}$$

с полюсами в $\omega = i\pm 1$. Тогда, находим, что

$$\operatorname*{res}_{\omega=i+1} f(t) = \frac{i}{4\pi}e^{(i-1)\nu t}, \qquad \operatorname*{res}_{\omega=i-1} f(t) = \frac{i}{4\pi}e^{(-i-1)\nu t}, \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = 2\pi i\sum_{\pm}\operatorname*{res}_{i\pm 1} f(t) = \cos(\nu t).$$

III. Третье изображение:

$$\tilde{f}(p) = \frac{\nu}{p^2 - \nu^2}, \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \frac{\nu}{p^2 - \nu^2}.$$

Делая замену $p = i\nu\omega$, и выбирая $c = 0$ находим,

$$f(t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\nu\omega t} \frac{-1}{(\omega - i)(\omega + i)},$$

а тогда

$$\operatorname*{res}_{\omega=-i} f(t) = \frac{e^{\nu t}}{4\pi i}, \qquad \operatorname*{res}_{\omega=i} f(t) = -\frac{e^{\nu(-t)}}{4\pi i}, \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = 2\pi i \sum_{\pm} \operatorname*{res}_{\pm i} f(t) = \operatorname{sh}(\nu t).$$

IV. Четвертое изображение:

$$\tilde{f}(p) = \frac{p}{p^2 - \nu^2}, \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \frac{p}{p^2 - \nu^2}.$$

Делая замену $p = i\nu\omega$, и выбирая $c = 0$ находим,

$$f(t) = -\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\nu\omega t} \frac{i\omega}{(\omega - i)(\omega - i)},$$

а тогда

$$\operatorname*{res}_{\omega=i} f(t) = \frac{e^{\nu t}}{4\pi i}, \qquad \operatorname*{res}_{\omega=-i} f(t) = \frac{e^{\nu(-t)}}{4\pi i}, \qquad \Rightarrow \qquad f(t) = 2\pi i \sum_{\pm} \operatorname*{res}_{\pm i} f(t) = \operatorname{ch}(\nu t).$$

V. Пятое изображение (оставлено на следующую неделю):

$$\mathcal{L}^{-1}(t) \left[\frac{1}{\sqrt{p + \alpha}} \right] = \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}}.$$