

Задача 5

Вычислить коммутаторы $[l_\alpha, x_\beta]$, $[l_\alpha, p_\beta]$.

Напомним, что мы работаем с

$$l_\alpha = \varepsilon_\alpha^{\beta\gamma} r_\beta p_\gamma \quad [l_\alpha, a_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta}^{\gamma} a_\gamma, \quad \hat{p}_\gamma = -i\partial_\gamma.$$

Тогда подействуем на функцию состояния

$$[l_\alpha, x_\beta]\psi(x) = [-i\varepsilon_{\alpha\beta'}^{\gamma} x^{\beta'} \partial^\gamma, x_\beta]\psi(x) = -i\varepsilon_{\alpha\beta'}^{\gamma} x^{\beta'} \partial^\gamma (x_\beta \psi(x)) + i\varepsilon_{\alpha\beta'}^{\gamma} x_\beta \partial^\gamma \psi(x) = -i\varepsilon_{\alpha\beta'}^{\gamma} x^{\beta'} \psi(x)$$

Таким образом мы свели действие заданного оператора к

$$[l_\alpha, x_\beta] = -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} x^\beta s$$

Для другого случая действуем абсолютно аналогично

$$[l_\alpha, p_\beta]\psi(x) = [-i\varepsilon_{\alpha\beta'}^{\gamma} x^{\beta'} \partial^\gamma, -i\partial_\beta]\psi(x) = -\varepsilon_{\alpha\beta'}^{\gamma} x^{\beta'} \partial^\gamma \partial_\beta \psi(x) + \varepsilon_{\alpha\beta'}^{\gamma} \partial_\beta (x^{\beta'} \partial^\gamma \psi(x)) = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial^\gamma \psi(x)$$

Таким образом мы свели действие заданного оператора к

$$[l_\alpha, p_\beta] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial^\gamma = -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} p^\gamma$$

Задача №12

Записать стационарное уравнение Шредингера для атома водорода в импульсном представлении.

Задача №13

Найти средние значения $1/r$, $1/r^2$ и p^2 для nl -состояний атома водорода, используя теорему вириала и теорему Фейнмана–Гельмана.

Используя общую теорему о вириале: $2\langle \hat{T} \rangle = \langle \mathbf{r} \cdot \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \rangle$, а также явно потенциал в атоме водорода $V(r) = -\frac{e^2}{r}$ явно найдём то, как у нас работает вириал:

$$\frac{\partial V(r)}{\partial r^\alpha} = \frac{\partial V(r)}{\partial r} \cdot \frac{r_\alpha}{r} = -\frac{r_\alpha}{r^2} V(r) \Rightarrow \mathbf{r} \cdot \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = -r^\alpha \frac{r_\alpha}{r^2} V(r) = -V(r) \Rightarrow \langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle V(r) \rangle$$

Тогда, раз мы работаем с атомом водорода, с одной стороны мы знаем энергию на n -ом уровне E_n , а с другой эта энергия – есть сумма средних потенциальной и кинетической энергий:

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \frac{1}{n^2} = \langle T \rangle + \langle V \rangle = \frac{1}{2} \langle V \rangle = -\frac{e^2}{2} \langle 1/r \rangle \Rightarrow \boxed{\langle 1/r \rangle = \frac{\hbar^2}{2me^2} \frac{1}{n^2 a^2} = \frac{1}{an^2}}$$

Сразу же из кинетической энергии получаем:

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle V(r) \rangle \Rightarrow \left\langle \frac{\hat{p}^2}{2m} \right\rangle = \frac{e^2}{2} \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle \Rightarrow \boxed{\langle \hat{p}^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{a^2 n^2}}$$

Чтобы получить последний ответ, воспользуемся теоремой Фейнмана–Геллмана¹

$$\frac{\partial E_n}{\partial t} = \langle n | \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} | n \rangle, \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}_r^2}{2m} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{mr^2} - \frac{e^2}{r}, \quad n = n_r + l + 1.$$

Тогда заметим, что производная по l и даёт нам среднее от оставшегося выражения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{H}}{\partial l} &= \frac{\hbar^2(l + \frac{1}{2})}{mr^2} \\ \frac{\partial E_n}{\partial l} &= \frac{\partial E_n}{\partial n} = \frac{\hbar^2}{mn^3 a^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\langle 1/r^2 \rangle = \frac{1}{a^2 n^3 (l + \frac{1}{2})}}$$

Задача №14

Вычислить в квазиклассическом приближении уровни энергии и собственные функции частицы для

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & x > 0 \end{cases}$$

¹он же Хеллман, он же Гельман, он же "окорок" и он же "одноногий"

Нужно быть аккуратными, слева – бесконечная граница, что требует от нас наложения граничного условия

$$\psi(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{x \geq 0}(x = 0) \sim \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x=0}^{x_0} p(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Таким образом запишем модифицированное правило квантования Бора-Зоммерфельда

$$\int_0^{x_0} p(x) dx = \pi \hbar \left(n + \frac{3}{4}\right).$$

Подставим импульс как $p(x) = \sqrt{2m(E_n - V(x))}$ возьмём интеграл от 0 до $x_0 = \sqrt{2E/(m\omega^2)}$ – то есть в классически разрешенной области

$$\int_0^{x_0} p(x) dx = \int_0^{x_0} \sqrt{2mE_n - m^2\omega^2 x^2} dx = \frac{E_n}{\omega} \int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2\omega} E_n \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_n = \hbar\omega \left(2n + \frac{3}{2}\right)}$$

В квазиклассическом приближении $\psi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \cdot \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int p(x) dx\right]$ тогда исходя из правила согласования квазиклассических решений при переходе из запрещенной (затухание) в разрешенную (осцилляция) область

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{C}{\sqrt{p(x)}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_0} p(\xi) d\xi\right), & 0 < x \leq x_0 \\ \frac{C}{2\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x |p(\xi)| d\xi\right), & x_0 \leq x \end{cases}$$

Остается только найти константы из условия

$$C^2 = \frac{4m}{T} = 4 \frac{1}{\int_0^{x_0} dx/p(x)} = \frac{2m\omega}{\pi}.$$

Задача №15

Квазиклассическое рассмотрение α -распада, закон Гейгера–Неттола.

Стоит всё-таки вспомнить потенциал из задания, ведь именно такой потенциал впервые рассматривался в теории α -распада. И так

$$U(x) = \begin{cases} -U_0, & 0 < x < a \\ \frac{2Ze^2}{x}, & x > a \end{cases}$$

Коэффициент прохождения через такой барьер, как отношение входящего потока к выходящему

$$\mathcal{T} \sim \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p(x)| dx\right), \quad \int_a^b |p(x)| dx = \int_a^b \sqrt{2m|E - U(x)|} dx = \sqrt{2m} \int_a^{2Ze^2/E} \sqrt{\frac{2Ze^2}{x} - E} dx.$$

Остается только вычислить интеграл, для удобства введём $\beta = \frac{aE}{2Ze^2}$, тогда

$$\mathcal{T} \sim \exp\left[-\frac{4Ze^2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} (\arccos \sqrt{\beta} - \sqrt{\beta(1-\beta)})\right]$$

И если мы уже далеко отошли от пика $x = a$, то $\beta \ll 1$ и соответственно коэффициент пропускания

$$\mathcal{T} \sim \exp\left(-\frac{2\pi Ze^2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}}\right).$$

Соответственно альфа частицы из потенциала такого вида могут туннелировать, с известным теперь нам коэффициентом, то есть излучаться. Таким образом вероятность излучения в единицу времени пропорциональна пропусканию: $w = n\mathcal{T}$, где n – частота столкновений частиц с барьером. Если ввести характерную скорость частиц в потенциальной яме ($x < a$), то

$$n \sim v/a, \quad v \sim p/m_\alpha \sim \frac{\hbar}{m_\alpha a} \quad \Rightarrow \quad n \sim \frac{\hbar}{m_\alpha a^2}.$$

Вероятность распада в единицу времени λ связан с периодом полураспада T

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{w} \approx \frac{m_\alpha a^2 \ln 2}{\hbar D} = C_1 \exp\left(\frac{C_2}{\sqrt{E}}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ln T_{1/2} = A + \frac{B}{\sqrt{E}}}$$

Конечное равенство представляет собой уравнение *Гейгера-Неттола*. Константы выписывать конечно не интересно, ведь и так наши рассуждения носят оценочный характер, но на всякий случай

$$A = \ln C_1 \approx \ln \left(\frac{m_\alpha a^2 \ln 2}{\hbar} \right), \quad B = C_2 \approx \frac{2\pi Z e^2 \sqrt{2m}}{\hbar}.$$