Задание от 20 июля

Автор: Хоружий Кирилл
Соавтор: Примак Евгений

От: *20 июля 2021 г.*

Первая задача

Зная состояние в $|l,\,l\rangle$

$$Y_{ll} = C_l e^{il\varphi}\sin^l\theta, \qquad c_l = \left[\frac{(-1)^l}{2^l l!}\right]\sqrt{\frac{(2l+1)(2l)!}{4\pi}},$$

с помощью понижающего оператора

$$\hat{L}_- = i\hbar e^{-i\varphi}\left(i\partial_\theta + \operatorname{ctg}\theta\partial_\varphi\right),$$

найдём состояния с $l=1$ и $m=-1,0,+1$. Для начала,

$$Y_{11} = \left(\frac{-1}{2}\right)\sqrt{\frac{3\cdot 2}{4\pi}}e^{i\varphi}\sin\theta = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}e^{i\varphi}\sin\theta.$$

Теперь вспомним, что

$$\hat{L}_-|l,m\rangle = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\hbar|l,m\rangle, \qquad \langle\theta,\varphi|\hat{L}_-|1,1\rangle = \hbar\sqrt{2}\langle\theta,\varphi\,|\,1,0\rangle = \hat{L}_-\langle\theta,\varphi\,|\,1,1\rangle = \hat{L}_-Y_{11},$$

теперь, с учётом нормировки, подставляем $\hat{L}_-$ и находим

$$Y_{10} = \hat{L}_-\frac{Y_{11}}{\hbar\sqrt{2}} = \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}\left(-\partial_\theta + i\operatorname{ctg}\theta\;\partial_\varphi\right)\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3}{2\pi}}e^{i\varphi}\sin\theta\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta.$$

Аналогично повторяем операцию понижения,

$$Y_{1,-1} = \hat{L}_-\frac{Y_{10}}{\hbar\sqrt{2}} = \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}\left(-\partial_\theta + i\operatorname{ctg}\theta\,\partial_\varphi\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}e^{-i\varphi}\sin\theta.$$

Вид орбиталей $YY^\dagger$ приведен на рисунке.

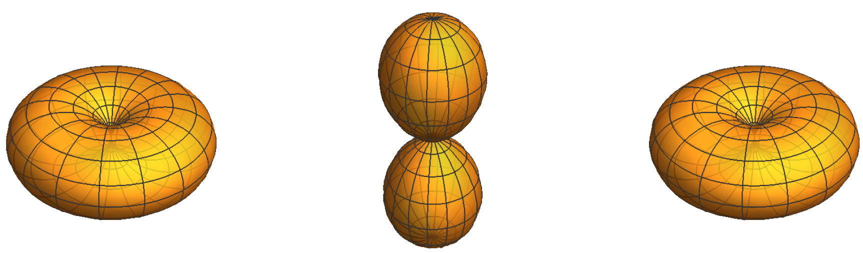

Рис. 1: Вид орбиталей типа $Y_{1,1}$, $Y_{1,0}$, $Y_{1,-1}$.

Вторая задача

Хотелось бы найти $\langle\theta,\varphi|\hat{L}_y|\alpha\rangle$, для этого рассмотрим инфинитизимальное вращение на угол $\delta\xi$ вокруг оси x:

$$\langle\boldsymbol{x}|\mathbb{1} - \tfrac{i}{\hbar}\delta\xi\hat{L}_y|\alpha\rangle = \langle x - z\delta\xi, y, z + x\delta\xi|\alpha\rangle.$$

Вспомним, что в сферических координатах

$$\begin{cases}\delta x = \cos\theta\cos\varphi\delta\theta - \sin\theta\sin\varphi\delta\varphi = -z\delta\xi\\ \delta y = \cos\theta\sin\varphi\delta\theta + \sin\theta\cos\varphi\delta\varphi = 0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\delta\theta = -\cos\varphi\,\delta\xi\\ \delta\varphi = \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\,\delta\xi\end{cases}$$

Подставим это выражение в выражение для малой трансляции в сферических координатах:

$$\langle\theta,\varphi|\mathbb{1} - \tfrac{i}{\hbar}\delta\xi\hat{L}_y|\alpha\rangle = \langle\theta,\varphi|\alpha\rangle + \partial_\theta(\langle\theta,\varphi|\alpha\rangle)\delta\theta + \partial_\varphi(\langle\langle\theta,\varphi|\rangle)\delta\varphi,$$

где мы воспользовались аналитичностью. Тогда

$$\langle\theta,\varphi|\hat{L}_y|\alpha\rangle = i\hbar\left(-\cos\varphi\,\partial_\theta + \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\,\partial_\varphi\right)\langle\theta,\varphi|\alpha\rangle,$$

откуда и находим операторное равенство

$$\hat{L}_y = i\hbar\left(-\cos\varphi\,\partial_\theta + \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\,\partial_\varphi\right), \qquad \text{Q. E. D.}$$