Задание по курсу «Теория функций комплексного переменного I»

Автор: Шишкин П.Е.

От: *2 сентября 2021 г.*

Содержание

1 I. Комплексные числа. Стереографическая проекция

1.1 §1: 3(2)

Условие

3. Найти все корни уравнения:
2) $|z| - z = 1 + 2i$

Решение

Положим $z = a + bi$

$$\sqrt{a^2+b^2} - a - bi = 1 + 2i$$

$$a^2 + b^2 = (1 + 2i + a + bi)^2$$

$$a^2 + b^2 = a^2 + 2iab + (2+4i)a - b^2 - (4-2i)b + (-3+4i)$$

$$2(1+a)(2+b)i - 3 + 2a - 2b(2+b) = 0$$

$$\begin{cases} (1+a)(2+b) = 0 \\ -3 + 2a - 2b(2+b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ b = -2 \end{array}\right. \\ -3 + 2a - 2b(2+b) = 0 \end{cases}$$

//тупой подстановкой каждого их вариантов получаем ответ//

$$\begin{cases} a = 3/2 \\ b = -2 \end{cases}$$

Ответ:

$z = a + bi = 3/2 - 2i$

Вообще говоря можно было сразу заметить что b=-2 просто взглянув на мнимую часть слева и справа, но это слишком интеллектуально для меня

1.2 §1: 4(2)

Условие

4. Решить систему уравнений:
2) $\begin{cases} \left|z^2 - 2i\right| = 4 \\ |z + 1 + i| = |z - 1 - i| \end{cases}$

Решение

Поскольку геометрическое решение уже было разобрано, было бы скучно переписывать его (а ещё мне лень техать картинки). Заметим что $(1+i)^2 = 2i$ тогда получим:

$$\begin{cases} |z^2 - (1+i)^2| = 4 \\ |z + (1+i)| = |z - (1+i)| \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z + (1+i)| = |z - (1+i)| \\ |z + (1+i)| \cdot |z - (1+i)| = 2 \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z + (1+i)| = 2 \\ |z - (1+i)| = 2 \end{cases}$$

Получается точка, удалённая на 2 от $1 + i$ и от $-1 - i$.

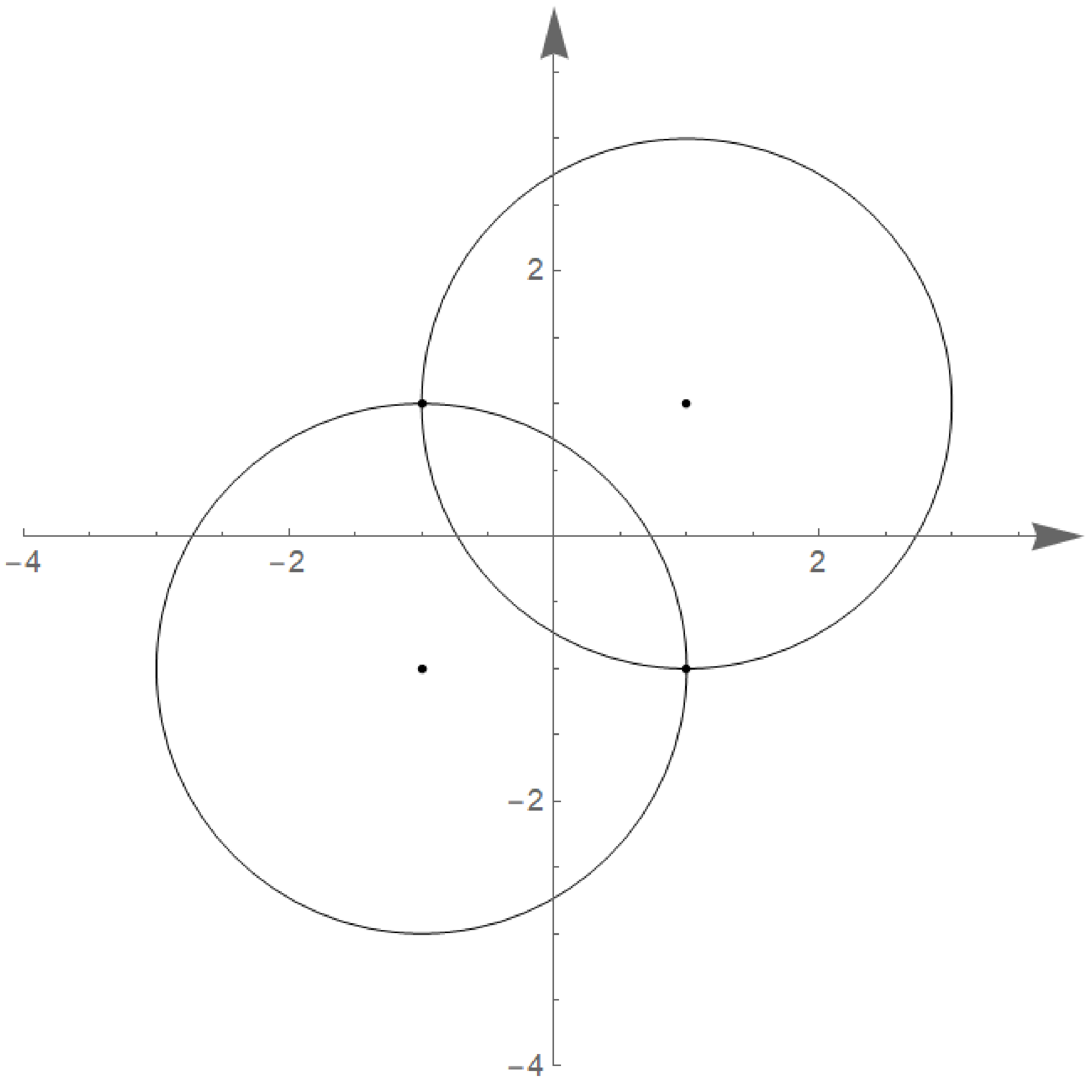

Рис. 1: 4(2)

Получается Ответом будут точки $z_1 = -1 + i; z_2 = 1 - i$ это можно проверить также прямой подстановкой

Ответ:

$z_1 = -1 + i; z_2 = 1 - i$

1.3 §1: 11

Условие

11. Пусть A и C действительные, а B-комплексная постоянные и пусть $AC < |B|^2$. Доказать, что уравнение

$$A|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} + C = 0 \quad (A > 0)$$

является уравнением окружности, а также найти центр этой окружности и ее радиус.

Решение

Пусть $\Re z = x; \Im z = y; \Re B = b_1; \Im B = b_2$

$$A(x^2 + y^2) + (b_1 - ib_2)(x + iy) + (b_1 + ib_2)(x - iy) + C = 0$$

$$A(x^2 + y^2) + 2b_1 x + 2b_2 y + C = 0$$

$$(x^2 + 2\frac{b_1}{A}x + \frac{b_1^2}{A^2}) + (y^2 + 2\frac{b_2}{A}y + \frac{b_2^2}{A^2}) + C/A = \frac{b_1^2 + b_2^2}{A^2}$$

$$(x + b_1/A)^2 + (y + b_2/A)^2 = \frac{|B|^2 - AC}{A^2}$$

Ну уже очевидно - окружность с центром в точке $z_{cental} = -B/A$, радиусом $R = \frac{|B|^2 - AC}{A^2} > 0$

Ответ:

$z_{cental} = -B/A$, $R = \frac{|B|^2 - AC}{A^2} > 0$

1.4 §1: 18

Условие

18. Доказать, что три попарно различные точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой в том и только в том случае, когда величина $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ действительна.

Решение

Упростим данное условие домножив на сопряжённое:

$$\frac{(z_3 - z_1)(\bar{z_2} - \bar{z_1})}{|z_2 - z_1|^2} \in \mathbb{R}$$

$$(z_3 - z_1)(\bar{z_2} - \bar{z_1}) \in \mathbb{R}$$

$$z_1\bar{z_2} + \bar{z_1}z_3 - z_3\bar{z_2} \in \mathbb{R}$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) + (x_1 - iy_1)(x_3 + iy_3) - (x_3 + iy_3)(x_2 - iy_2) \in \mathbb{R}$$

$$(x_3(-y_1 + y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_1(-y_2 + y_3))i - x_2x_3 + x_1(x_2 + x_3) - y_2y_3 + y_1(y_2 + y_3) \in \mathbb{R}$$

//Что эквивалентно условию//

$$(x_3(-y_1 + y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_1(-y_2 + y_3)) = 0$$

//немного преобразуя получаем//

$$(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3) = 0$$

//Это в свою очередь является z-компонентной произведения векторов//

$$\left(\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x3 \\ y3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)(x_2 - x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Что собственно и доказывает требуемое в задаче утверждение. (вектор соединяющий одну пару точек коллинеарен вектору, соединяющему другую пару)

Ответ:

Доказано

1.5 §2: 3

Условие

3. Пусть $\lim_{n\to\infty} z_n = A \neq \infty$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n} = A$$

Решение

Если честно я не понимаю, в чём проблема рассмотреть отдельно действительную часть, отдельно мнимую. А потом сложить. Для действительных чисел уже доказывалось в курсе Математического анализа

Ответ:

Я не понял условия

1.6 Т.1.

Условие

Т.1. Найти вещественную и мнимую части комплексных чисел: а) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2021}$ б) $(1+i)^n - (1-i)^n, n \in \mathbb{N}$

Решение

а)

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2021} = \left(\frac{\sqrt{2}\cdot\exp\left(-\pi i/4\right)}{\sqrt{2}\cdot\exp\left(\pi i/4\right)}\right)^{2021} =$$

$$= \exp\left(-\pi i/2\right)^{2021} = \exp\left(-\pi i/2 - 505\cdot 2\pi i\right) = \cos(-\pi/2) - i\sin(\pi/2) = -i$$

б)

$$(1+i)^n - (1-i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\exp\left(\pi n i/4\right) - \exp\left(-\pi n i/4\right)\right) = 2i\cdot 2^{n/2}(\sin\left(\pi n/4\right))$$

Ответ:

а) $-i$ b) $2i\cdot 2^{n/2}(\sin\left(\pi n/4\right)$

1.7 Т.2.

Условие

Т.2. Пусть $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ не лежат на одной прямой. Найти выражение для центра окружности, проходящей через эти три точки.

Решение

$$\begin{cases} |z_1 - z| = r \\ |z_2 - z| = r \\ |z_3 - z| = r \end{cases}$$

Ответ:

1.8 Т.3.

Условие

Т.3. На единичной окружности $|z| = 1$ взяты две точки a и $b, a + b \neq 0$, и через них проведены касательные к окружности. Найти точку, в которой пересекаются эти касательные.

Решение

Ответ:

1.9 Т.4.

Условие

Т.4. Покажите, что при стереографической проекции окружности на сфере Римана соответствует в комплексной плоскости окружность или прямая.

Решение

Ответ:

1.10 Т.5.

Условие

Т.5. Доказать, что для $z, z' \in \mathbb{C}$ величина

$$d\left(z, z'\right) = \frac{2\left|z - z'\right|}{\sqrt{\left(1 + |z|^2\right)\left(1 + \left|z'\right|^2\right)}}$$

выражает расстояние между прообразами этих точек при стереографической проекции.

Решение

Ответ:

1.11 Т.6.

Условие

Т.6. Параметрическое уравнение прямой в комплексной плоскости можно записать в виде $z(t) = a + bt, -\infty < t < \infty$, где $a, b \in \mathbb{C}, b \neq 0$. При этом направление прямой можно идентифицировать с направлением b. Покажите, что неравенство $\operatorname{Im} \frac{z-a}{b} < 0$ выделяет правую полуплоскость (относительно прямой), а неравенство $\operatorname{Im} \frac{z-a}{b} > 0$ выделяет левую полуплоскость.

Решение

Ответ:

1.12 Т.7.

Условие

Т.7. Пусть $a, b-$ ненулевые комплексные числа. Рассматривая их как векторы в комплексной плоскости, покажите, что $\operatorname{Re}\{\bar{a}b\}$-их скалярное произведение, а $|\operatorname{Im}\{\bar{a}b\}|$-площадь параллелограмма со сторонами a и b.

Решение

Ответ:

1.13 T.8.

Условие

T.8. Пусть $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}, -$ корни n-ой степени из $1, n \geq 2$. Докажите, что выполняются следующие соотношения

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0, \quad \prod_{k=0}^{n-1} \omega_k = (-1)^{n-1}$$

Решение

Заметим что множество ω_i совпадает с множеством решений уравнения $\omega^n + \omega^{n-1} \cdot 0 + ... + \omega \cdot 0 - 1 = 0$. Тогда применением теоремы Виета для коэффициентов при ω^{n-1} и при ω^0 получим необходимые соотношения.

$$0 = a_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k$$

$$1 = a_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \omega_k$$

Что и требовалось доказать

Ответ:

Доказано.

1.14 T.9*.

Условие

T.9*. Доказать, что точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами равностороннего треугольника в том и только том случае, если выполняется условие $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$

Решение

Двумя преобразованиями (смещение вдоль оси и поворот) можно перенести одновременно z_1, z_2 на ось действительных числел. При этом равносторонний треугольник (если он был таковым) останется равносторонним. Тогда достаточно рассмотреть частный случай когда $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$

Ответ: