Полиномы Лежандра в атоме водорода

Хоружий Кирилл

Intro. Вспоминаем вид лестничных операторов
$$\hat{l}_{\pm} = e^{\pm i\varphi}\left(\pm\partial_\theta + i\operatorname{ctg}\theta\partial_\varphi\right).$$
А также $Y_{l,l}$:
$$Y_{l,l}(\theta,\varphi) = (-1)^l\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}\frac{1}{2^l l!}\sin^l\theta e^{il\varphi}.$$
Применяем несколько раз $\hat{l}_-$:
$$\hat{l}_-^l Y_{l,l}(\theta,\varphi) = \partial^l_{\cos\theta}\sin^l\theta Y_{l,l}(\theta), \qquad \Rightarrow \qquad Y_{l,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\frac{(-1)^l}{2^l l!}\partial^l_{\cos\theta}\sin^{2l}\theta,$$
что удобно переписать в терминах полиномов Лежандра:
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\partial_x^n(x^2-1)^n, \qquad Y_{l,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta).$$
Решение. Для начала
$$\hat{l}_-\left|l,m\right\rangle = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\left|l,m-1\right\rangle, \qquad \hat{l}_-\left|l,l\right\rangle = \sqrt{2l}\left|l,l-1\right\rangle.$$
Подсталяя дифференциальное представление $\hat{l}_-$, находим
$$Y_{1,0} = \frac{\hat{l}_- Y_{1,1}}{\sqrt{2}}, \qquad \Rightarrow \qquad Y_{1,0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta.$$
Теперь
$$Y_{2,0}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}P_2(\cos\theta),$$
где P_2 можем найти, как
$$P_2(x) = \frac{3xP_1(x) - P_0(x)}{2} = \frac{3x^2-1}{2},$$
а значит
$$Y_{2,0} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(3\cos\theta^2 - 1) = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\left(3\cos(2\theta)+1\right).$$
Теперь с помощью $\hat{l}_+$, находим
$$\hat{l}_+ Y_{l,m}(\theta,\varphi) = \sqrt{l(l+1)-m(m+1)}Y_{l,m+1}(\theta,\varphi), \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} Y_{2,1} &= \frac{\hat{l}_+ Y_{2,0}}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}e^{i\varphi}\sin(2\theta), \\ Y_{2,2} &= \frac{\hat{l}_+ Y_{2,1}}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{\pi}}e^{2i\varphi}\sin^2(\theta). \end{aligned}$$