

ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ «УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

Автор: Хоружий Кирилл

От: 2 октября 2021 г.

Содержание

1	Неделя I	3
2	Неделя II	4
3	Неделя III	6
4	Семинар от 25.09.21	10
5	Приложение	13

ТеорМин

Вычеты. Интеграл по дуге может быть найден, как

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= 2\pi i \sum_{z_j} \operatorname{res}_{z_j} f(z), \quad \operatorname{res}_{z_j} f(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i\varphi} f(z_j + \varepsilon e^{i\varphi}) \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_j} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_j)^m f(z) \right), \end{aligned}$$

где m – степень полюса.

Лем 1 (лемма Жордана). Пусть $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $G = \{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R_0 > 0\}$. Обозначим через C_R полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ и пусть верно, что $\lim_{R \rightarrow \infty} \max |f(z)| = 0$. тогда при $a > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0,$$

аналогичное верно при C_R с $\operatorname{Im} z \leq 0$ и $a < 0$.

Функция Грина. Всегда и всюду, уравнение вида

$$Lx(t) = \varphi(t), \quad x(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s) \varphi(s) ds, \quad LG = \delta(t).$$

И, если хочется добавить начальные условия, то например, для $L = \partial_t^2$ будет

$$x(t) = \dot{x}(0)G(t) + x(0)\dot{G}(t) + \int_0^t G(t-s) \varphi(s) ds.$$

Матричное уравнение. Решение линейного уравнения для векторной величины \mathbf{y}

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} + \hat{\Gamma}\mathbf{y} = \chi,$$

может быть найдено, через функцию Грина, вида

$$\hat{G}(t) = \theta(t) \exp(-\hat{\Gamma}t), \quad \mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^t \hat{G}(t-s) \chi(s) ds.$$

Преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа функции $\Phi(t)$ определяется, как

$$\tilde{\Phi}(p) = \int_0^\infty \exp(-pt) \Phi(t) dt, \quad \Phi(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{\Phi}(p),$$

где далее c выбираем правее всех особенностей для причинности.

Решение уравнения $L(\partial_t)G(t) = \delta(t)$ может быть найдено, как

$$G(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{G}(p), \quad \tilde{G}(p) = \frac{1}{L(p)}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \sum_i \operatorname{res}_i \frac{\exp(pt)}{L(p)},$$

где суммирование идёт по полюсам $1/L(p)$.

Важно, что можно делать функциями маленькими

$$\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \tilde{f}(p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \frac{\tilde{f}(p)}{p^n} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}. \quad (1)$$

Уравнение Вольтерра. Интегральное уравнение Вольтерра первого рода с однородным ядром:

$$\int_0^t K(t-s) f(s) ds = \varphi(t).$$

Решение может быть найдено через обратное преобразование Лапласа

$$f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{f}(p), \quad \tilde{f}(p) = \frac{\tilde{\varphi}(p)}{\tilde{K}(p)}.$$

Но есть один нюанс. При $K(t)$, $\varphi(t) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} K_0$, φ_0 получается, что $\tilde{K}(p)$, $\tilde{\varphi}(p) \approx \frac{K_0}{p}$, $\frac{\varphi_0}{p}$, тогда

$$f(t) = \frac{\varphi_0}{K_0} \delta(t) + \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \left(\frac{\tilde{\varphi}}{\tilde{K}} - \frac{\varphi_0}{K_0} \right),$$

при этом в отсутствие аналитичности в нуле нет ничего страшного.

Неоднородная релаксация. Для одномерного случая

$$(\partial_t + \gamma(t))x(t) = \varphi(t), \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) \varphi(s) ds, \quad G(t,s) = \theta(t-s) \exp\left(-\int_s^t \gamma(\tau) d\tau\right),$$

где всё также $G(t, s > t) = 0$ в силу стремления к принципу причинности.

1 Неделя I

№1

Рассмотрим уравнение на $G(t)$

$$(\partial_t + \gamma)G(t) = \delta(t), \quad (2)$$

с учетом принципа причинности $g(t < 0) = 0$.

При $t > 0$ $\delta(t) = 0$, так что

$$\partial_t G(t) = -\gamma G(t), \quad \Rightarrow \quad G(t) = A \exp(-\gamma t).$$

Проинтегрируем уравнение (2) от $-\varepsilon$ до ε :

$$G(\varepsilon) - \cancel{G(-\varepsilon)} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \gamma G(t) dt = \int \delta(t) dt = 1, \quad \Rightarrow \quad G(\varepsilon) = 1, \quad \Rightarrow \quad A = 1.$$

Таким образом, искомая функция Грина $G(t)$:

$$G(t) = \theta(t) \cdot \exp(-\gamma t),$$

где $\theta(t)$ обеспечивает $G(t) = 0$ при $t < 0$.

№2

Рассмотрим уравнение, вида

$$(\partial_t^2 + \omega^2)\varphi(t) = g(t), \quad g(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [0, \tau]; \\ -\frac{v}{\tau l}, & t \in [0, \tau], \end{cases}$$

с нулевым начальным условием $\varphi(t < 0) = 0$. Функция Грина $G(t)$ для оператора $(\partial_t^2 + \omega^2)$ равна¹

$$G(t) = \theta(t) \frac{1}{\omega} \sin(\omega t), \quad (3)$$

Далее найдём вид $\varphi(t)$ при $t < \tau$ (красная линия рис. 1):

$$\varphi(t < \tau) = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^t \sin \omega(t-s) g(s) dt = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t-s) \frac{v}{2l} d(t-s) = \frac{v}{l\tau \omega^2} (\cos(\omega t) - 1).$$

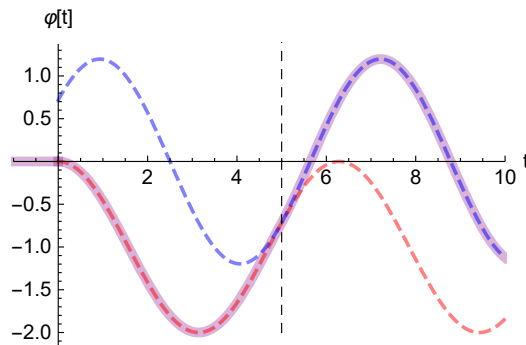


Рис. 1: Сшивка решений в I.2

Теперь решим² задачу Коши с начальным условием при $t = \tau$, введя переменную $T = t - \tau$:

$$\varphi(T) = \varphi(t - \tau) = \dot{\varphi}(\tau)G(t - \tau) + \varphi(\tau)\dot{G}(t - \tau) + 0 = \frac{v}{l\tau \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega(t - \tau)).$$

получая синюю кривую на рис. 1.

¹Конспект, уравнение (1.11).

²Конспект, уравнение (1.12).

Итого, решение уравнения (1) (фиолетовая кривая, рис 1):

$$\varphi(t) = \frac{v}{l\tau} \frac{1}{\omega^2} \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \cos \omega t - 1, & t \in [0, \tau]; \\ \cos \omega t - \cos \omega(t - \tau), & t > \tau. \end{cases}$$

№3

I. Найдём значение интеграла, вида

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx.$$

Заметим, что уравнение $z^2 + a^2 = 0$ имеет корни в $z_{1,2} = a^{\pm i\pi/2}$, тогда

$$I_1 = 2\pi i \cdot \text{res}_{z_1} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_1} \cdot \left(\frac{1}{(z - z_2)^2} \right)' = -4\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow z_1} \left(\frac{1}{(z - z_2)^3} \right) = -4\pi i \frac{1}{(2ia)^3} = \frac{\pi}{2a^3}.$$

II. Теперь найдём значение интеграла, вида

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipx}}{x^2 + a^2} dx \stackrel{p \geq 0}{=} 2\pi i \cdot \text{res}_{ia} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-ap}}{2ai} = \frac{\pi}{a} e^{-ap},$$

где мы считали $p > 0$. В случае $p < 0$:

$$I_2 \stackrel{p < 0}{=} -2\pi i \cdot \text{res}_{-ia} f(z) = -2\pi i \cdot \frac{e^{ap}}{-2ai} = \frac{\pi}{a} e^{ap}, \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{\pi}{a} e^{-a|p|}.$$

2 Неделя II

№1 (1.1.4)

Найдём функцию Грина $G(t)$ уравнения

$$L(\partial_t)x(t) = \varphi(t), \quad L(\partial_t) = \partial_t^4 + 4\nu^2 \partial_t^2 + 3\nu^4.$$

Функция Грина может быть найдена, как решение уравнения

$$L(\partial_t)G(t) = \delta(t), \quad \Rightarrow \quad G(t) = \theta(t) \cdot (b_1 e^{-\nu t} + b_2 e^{i\nu t} + b_3 e^{-i\sqrt{3}\nu t} + b_4 e^{i\sqrt{3}\nu t}),$$

где воспользовались разложением

$$L(z) = (z + i\nu)(z - i\nu)(z - i\sqrt{3}\nu)(z + i\sqrt{3}\nu).$$

Интегрируя от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$ уравнение на $G(t)$ находим, что

$$\partial_t^3 G(+0) = 1, \quad \partial_t^2 G(+0) = \partial_t^1 G(+0) = G(+0) = 0,$$

откуда получаем СЛУ на $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$:

$$\left. \begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 &= 0, \\ b_1 - b_2 + \sqrt{3}(b_3 - b_4) &= 0, \\ b_1 + b_2 + 3(b_3 + b_4) &= 0, \\ b_1 - b_2 + 3\sqrt{3}(b_3 - b_4) &= -\frac{i}{\nu^3}, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad b_1 = \frac{i}{4\nu^3}, \quad b_2 = -\frac{i}{4\nu^3}, \quad b_3 = -\frac{i}{4\sqrt{3}\nu^3}, \quad b_4 = \frac{i}{4\sqrt{3}\nu^3}.$$

Так получаем решение, вида

$$G(t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{3}\nu^3} \left(\sqrt{3} \sin(\nu t) - \sin(\sqrt{3}\nu t) \right).$$

№2 (1.1.5)

Найдём функцию Грина для уравнения, вида

$$(\partial_t^2 + \nu^2)^2 x(t) = \varphi(t).$$

Аналогично предыдущему номеру, сначала находим $G(t > 0)$:

$$G(t > 0) = b_1 e^{i\nu t} + b_2 t e^{i\nu} + b_3 e^{-i\nu t} + b_4 t e^{-i\nu t},$$

где секулярные члены возникли из-за кратности корней.

Также, интегрируя уравнение на $G(t)$ от $-\varepsilon$ до ε , получаем аналогичное условие

$$\partial_t^3 G(+0) = 1, \quad \partial_t^2 G(+0) = \partial_t^1 G(+0) = G(+0) = 0,$$

и приходим к СЛУ на коэффициенты $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$:

$$\left. \begin{aligned} b_1 + b_3 &= 0, \\ i(b_1 - b_3)\nu + b_2 + b_4 &= 0, \\ \nu((b_1 + b_3)\nu - 2i(b_2 - b_4)) &= 0, \\ \nu^2(-3(b_2 + b_4) - i(b_1 - b_3)\nu) &= 1, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad b_1 = -\frac{i}{4\nu^3}, \quad b_2 = -\frac{1}{4\nu^2}, \quad b_3 = \frac{i}{4\nu^3}, \quad b_4 = -\frac{1}{4\nu^2}.$$

Получаем решение, вида

$$G(t) = \frac{\theta(t)}{2\nu^3} \left(\sin(\nu t) - \nu t \cos(\nu t) \right).$$

№3 (1.1.8)

Для системы уравнений, вида

$$(\partial_t + \hat{\Gamma})\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\xi}(t), \quad \Gamma = \lambda\delta_{i,j} + \delta_{i,j-1},$$

найдём функцию Грина $G(t)$, как решение уравнения

$$(\partial_t + \hat{\Gamma})G(t) = \delta(t)\mathbb{E}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \theta(t) \exp(-\hat{\Gamma}t).$$

Осталось найти $\exp(-\hat{\Gamma}t)$, как матричную экспоненту, от жордановой клетки.

Для начала заметим, что

$$\delta_{i,j-1}^2 = \delta_{i,j-1}\delta_{j,k} = \delta_{i+1,k-1} = \delta_{i,k-2},$$

и так далее, то есть $\delta_{i,j-1}$ – нильпотентный оператор, с $\delta_{i,j-1}^4 = 0$.

Посмотрим на степени $\hat{\Gamma}$:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^2 &= \delta_{i,j} + 2\delta_{i,j-1} + \delta_{i,j-2} \\ \hat{\Gamma}^3 &= \delta_{i,j} + 3\delta_{i,j-1} + 3\delta_{i,j-2} + \delta_{i,j-3} \\ \hat{\Gamma}^4 &= \delta_{i,j} + 4\delta_{i,j-1} + 6\delta_{i,j-2} + 4\delta_{i,j-3} + \delta_{i,j-4}, \end{aligned}$$

но $\delta_{i,j-4} = 0$, так что можем явно выделить на побочных диагоналях соответствующие экспоненты:

$$G(t) = \theta(t)e^{-\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{t^2}{2} & -\frac{t^3}{6} \\ 0 & 1 & -t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где появившиеся t^k – секулярные члены.

№4

В частотном представлении для оператора $\partial_t^2 + \omega_0^2$ можем «найти» функцию Грина, приводящую к

$$G(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{d\omega}{2\pi},$$

с особенностями на вещественной оси.

Регуляризуем интеграл, рассмотрением «затухающего» осциллятора, тогда

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{-i\omega t}}{(\omega_0 - \omega + i\varepsilon_1)(\omega_0 + \omega + i\varepsilon_2)}}_{F(\omega)} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Получилось два полюса:

$$\omega_1 = \omega_0 + i\varepsilon_1, \quad \omega_2 = -\omega_0 - i\varepsilon_2.$$

Соответственно, по лемме Жордана, наличие/отсутствие вклада от $\varepsilon_{1,2}$ будет зависеть от выбора знаков в $\varepsilon_{1,2} \rightarrow \pm 0$.

Для начала найдём вычеты по каждому полюсу:

$$2\pi i \cdot \operatorname{res}_{\omega_1} F(\omega) = i\varepsilon e^{i\varphi} F(\omega_1) = -i\varepsilon e^{i\varphi} \frac{e^{it\omega_0}}{2\omega_0 + i(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon e^{i\varphi}} \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx} -\frac{i}{2\omega_0} e^{-it\omega_0}.$$

Аналогично, для второго полюса:

$$2\pi i \cdot \operatorname{res}_{\omega_2} F(\omega) = \dots = \frac{i}{2\omega_0} e^{it\omega_0}.$$

Сразу заметим, что при вхождении только одного вычета невозможно выполнение условия о $G(0) = 0$, тогда рассмотрим $\varepsilon_1 \rightarrow +0$ и $\varepsilon_2 \rightarrow -0$, тогда оба полюса находятся в верхней полуплоскости, по которой и происходит обход по часовой стрелке:

$$G(t) = \theta(-t) \frac{1}{\omega_0} \sin(-\omega_0 t),$$

что соответствует опережающей функции Грина ($\partial_t G(t=0) = -1$).

Теперь найдём, что при $\varepsilon_1 \rightarrow -0$ и $\varepsilon_2 \rightarrow +0$ оба вычета в нижней полуплоскости, что приведет к смене знака:

$$G(t) = \theta(t) \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t),$$

что и соответствует запаздывающей функции Грина (см. ур. (3), $\partial_t G(t=0) = 1$), что не может не радовать.

3 Неделя III

№1 (1.3.4)

Найдём решение уравнения

$$\int_0^t K(t-s)f(s)ds = \varphi(t), \quad K(t) = t, \quad \varphi(t) = \sin(t).$$

Решение может быть найдено, как

$$\tilde{f}(p) = \frac{\tilde{\varphi}(p)}{\tilde{K}(p)}, \quad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{f}(p).$$

Для начала найдём, что

$$\tilde{\varphi}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} dt = \frac{-1}{2i} \left(\frac{1}{i-p} + \frac{1}{i+p} \right) = \frac{1}{1+p^2}.$$

А также изображение для возмущения

$$\tilde{K}(p) = - \left(\int_0^\infty \exp(-pt) \right)'_p = \left(\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^\infty \right)'_p = \frac{1}{p^2}.$$

Заметим, что $\lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{f}(p) = 1$, тогда

$$f(t) = \delta(t) + \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \left(\frac{p^2}{1+p^2} - 1 \right) = \delta(t) - \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \left(\frac{1}{1+p^2} \right) = \delta(t) - \sin(t),$$

где воспользовались уже известным значением изображения синуса.

Для галочки можем посчитать оригинал напрямую. Тогда заметим, что полюса находятся в $p = \pm i$, соответственно возьмём $c = 1$ и сделаем замену $p = 1 + i\omega$, тогда придём к интегралу

$$-e^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i\omega t}}{[\omega - (1+i)][\omega - (-1+i)]} = -e^t \left(\frac{1}{2} i e^{(-1-i)t} - \frac{1}{2} i e^{(-1+i)t} \right) = \sin(t),$$

в общем, всё сходится.

№2 (1.4.2)

Найдём функцию Грина

$$G(t, s) = \theta(t-s) \exp \left(- \int_s^t \gamma(\tau) d\tau \right),$$

для $\gamma(t) = a/t$, где $a = \text{const}$. Нетрудно найти, что

$$G(t, s) = \theta(t-s) \exp \left(-a \ln \frac{t}{s} \right) = \theta(t-s) \left(\frac{s}{t} \right)^a.$$

№3 (1.5.1)

Общее замечание. Ограничимся здесь проверкой свойств δ -функции (обобщенной функции/функционала), а именно локализованность ($\delta(t) = 0 \ \forall t \neq 0$) и нормировку: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) = 1$.

I. Докажем, что

$$\frac{\pi}{2} \delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{t^2 \varepsilon}{(t^2 + \varepsilon^2)^2}.$$

Для начала проверим нормировку, полюса второй степени находятся в точках $\pm i\varepsilon$, замыкая дугу сверху, находим:

$$\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} = 2\pi i \varepsilon \cdot \lim_{t \rightarrow i\varepsilon} \left(\frac{d}{dt} \frac{t^2}{(t + i\varepsilon)^2} \right) = 2\pi i \varepsilon \cdot \lim_{t \rightarrow i\varepsilon} \frac{2it\varepsilon}{(t + i\varepsilon)^3} = 2\pi i \varepsilon \cdot \frac{1}{4i\varepsilon} = \frac{\pi}{2},$$

что доказывает нормировку δ -последовательности на единицу.

Теперь покажем локализованность:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{t^2 \varepsilon}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} \stackrel{t \neq 0}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} t^2 \varepsilon = 0, \quad \forall t \neq 0.$$

II. Аналогично, докажем, что

$$\sqrt{\pi} \delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(-\frac{t^2}{\varepsilon}\right).$$

Можно заметить, что нормировка выполняется, так как гауссов интеграл равен $\sqrt{\pi}$, осталось показать локализованность:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(-\frac{t^2}{\varepsilon}\right) \stackrel{t \neq 0}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{t^2 + \frac{1}{2}\varepsilon \ln \varepsilon}{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{t^2}{\varepsilon}\right) = 0, \quad \forall t \neq 0.$$

III. Наконец, покажем, что

$$\pi \delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(nt)}{nt^2}.$$

Начнём с нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(nt) - 1}{n} d\frac{1}{t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{t} dt = \pi,$$

как разность пределов на $\pm\infty$ интегрального синуса.

Проверяем локализованность:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(nt)}{nt^2} \leq \left| 1 - \cos(nt) \right| \leq 2 \left| \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \right| \leq \frac{2}{\pi nt^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(nt)}{nt^2} = 0.$$

№4 (1.5.8)

Найдём обратное преобразование Лапласа некоторых функций.

I. Первое изображение:

$$\tilde{f}(p) = \frac{\nu}{p^2 + \nu^2}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{f}(p) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \frac{\nu}{p^2 + \nu^2},$$

что выбором $c = 1$, заменой $p = \nu(i\omega + 1)$, сводится к уже рассмотренному интегралу (w3, №1), тогда

$$\mathcal{L}^{-1}(t) \left[\frac{\nu}{p^2 + \nu^2} \right] = \sin(\nu t).$$

II. Второе изображение:

$$\tilde{f}(p) = \frac{p}{p^2 + \nu^2}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \frac{p}{p^2 + \nu^2}.$$

Аналогично выбираем $c = 1$, делаем замену $p = \nu(i\omega + 1)$, так приходим к интегралу, вида

$$f(t) = -e^{\nu t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \exp(i\nu\omega t) \frac{1 + i\omega}{[\omega - (1 + i)][\omega - (-1 + i)]}$$

с полюсами в $\omega = i \pm 1$. Тогда, находим, что

$$\operatorname{res}_{\omega=i+1} f(t) = \frac{i}{4\pi} e^{(i-1)\nu t}, \quad \operatorname{res}_{\omega=i-1} f(t) = \frac{i}{4\pi} e^{(-i-1)\nu t}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = 2\pi i \sum_{\pm} \operatorname{res}_{i \pm 1} f(t) = \cos(\nu t).$$

III. Третье изображение:

$$\tilde{f}(p) = \frac{\nu}{p^2 - \nu^2}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \frac{\nu}{p^2 - \nu^2}.$$

Делая замену $p = i\nu\omega$, и выбирая $c = 0$ находим,

$$f(t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\nu\omega t} \frac{-1}{(\omega - i)(\omega + i)},$$

а тогда

$$\operatorname{res}_{\omega=-i} f(t) = \frac{e^{\nu t}}{4\pi i}, \quad \operatorname{res}_{\omega=i} f(t) = -\frac{e^{\nu(-t)}}{4\pi i}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = 2\pi i \sum_{\pm i} \operatorname{res}_{\pm i} f(t) = \operatorname{sh}(\nu t).$$

IV. Четвертое изображение:

$$\tilde{f}(p) = \frac{p}{p^2 - \nu^2}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \frac{p}{p^2 - \nu^2}.$$

Делая замену $p = i\nu\omega$, и выбирая $c = 0$ находим,

$$f(t) = - \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\nu\omega t} \frac{i\omega}{(\omega - i)(\omega + i)},$$

а тогда

$$\operatorname{res}_{\omega=i} f(t) = \frac{e^{\nu t}}{4\pi i}, \quad \operatorname{res}_{\omega=-i} f(t) = \frac{e^{\nu(-t)}}{4\pi i}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = 2\pi i \sum_{\pm i} \operatorname{res}_{\pm i} f(t) = \operatorname{ch}(\nu t).$$

V. Пятое изображение (оставлено на следующую неделю):

$$\mathcal{L}^{-1}(t) \left[\frac{1}{\sqrt{p + \alpha}} \right] = \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}}.$$

№5

Рассмотрим маятник, совершающий маленькие колебания под действием вынуждающей силы $f(t) = Fe^{-t^2/\tau^2}$:

$$(\partial_t^2 + \omega^2) \varphi(t) = f(t),$$

где мы знаем, что при $t \rightarrow -\infty$:

$$\varphi(t) = A_- \sin(\omega t + \theta_-).$$

Функция Грина, как известно,

$$G(t) = \theta(t) \frac{1}{\omega} \sin(\omega t).$$

Тогда, после возмущения, при $t \rightarrow \infty$:

$$\varphi(t) = A_- \sin(\omega t + \theta_-) + \int_{T_-}^{T_+} \frac{F}{\omega} \sin[\omega(t-s)] \exp\left(-\frac{s^2}{\tau^2}\right) ds,$$

где $\omega T_- \ll 0$ и $\omega T_+ \gg 0$, так что экспонента там ноль. Раскрывая и группируя, находим

$$\varphi(t) - A_- \sin(\omega t + \theta_-) = \sin(\omega t) \int_{T_-}^{T_+} \frac{F}{\omega} \cos(\omega s) \exp\left(-\frac{s^2}{\tau^2}\right) ds,$$

где интеграл по $\sin \omega s$ опустили, так как интеграл о произведении четной и нечетной функции ноль. Далее,

$$\int \cos(\omega s) \exp\left(-\frac{s^2}{\tau^2}\right) ds = \frac{1}{2} \int \exp\left(-\frac{1}{4}\tau^2\omega^2 - \frac{(s + \frac{1}{2}i\tau^2\omega)^2}{\tau^2}\right) ds + \frac{1}{2} \int \exp\left(-\frac{1}{4}\tau^2\omega^2 - \frac{(s - \frac{1}{2}i\tau^2\omega)^2}{\tau^2}\right) ds,$$

раскрывая два гауссовых интеграла, находим

$$\int \cos(\omega s) \exp\left(-\frac{s^2}{\tau^2}\right) ds = \frac{1}{\omega} \sqrt{\pi} F \tau e^{-\frac{1}{4}\tau^2\omega^2}.$$

Тогда, искомое поведение при $t \rightarrow \infty$:

$$\varphi(t) = A_- \sin(\omega t + \theta_-) + \frac{1}{\omega} \sqrt{\pi} F \tau e^{-\frac{1}{4}\tau^2\omega^2} \sin(\omega t),$$

что осталось засунуть в один синус.

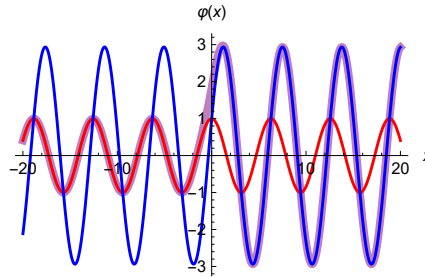


Рис. 2: Изменение амплитуды и фазы синуса в w3, №5

На 2 явно видно, как невозмущенный синус (красная линия) переходит в возмущенный синус (синяя линия), в итоге и получается наше решение (фиолетовая линия).

4 Семинар от 25.09.21

Про Фурье. Как раньше нашли

$$L(\partial_t)G(t) = \delta(t), \quad \Rightarrow \quad \hat{x}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} x(t) dt, \quad x(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} \hat{x}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Для этого должно выполняться

$$\int |x(t)| dt < +\infty.$$

Например, для $\partial_t + \gamma$:

$$(\partial_t + \gamma)G(t) = \delta(t), \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\dots} e^{-i\omega t} dt = x(t)e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty}, \quad \Rightarrow \quad (i\omega + \gamma)\hat{G}(\omega) = 1, \quad \Rightarrow \quad \hat{G}(\omega) = \frac{1}{i\omega + \gamma}.$$

Так приходим к уравнению

$$G(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\gamma} \frac{d\omega}{2\pi} = \begin{cases} e^{-\gamma t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \hat{G}(\omega) = \theta(t)e^{-|t|}.$$

Однако, при $\hat{L} = \partial_t - \gamma$ мы бы получили

$$G_A(t) = \theta(-t)e^{\gamma t},$$

хотя вообще должно быть (если посчитать через неопределённые коэффициенты)

$$G_R(t) = \theta(t)e^{\gamma t},$$

которая растёт.

В методе с Фурье будут получаться функции Грина затухающие, но, возможно, без причинности. В методе неопределённых коэффициентов исходим из причинности, но может быть рост $\sim e^{\gamma t}$.

Кроме того, в Фурье всегда предполагается $x(t \rightarrow -\infty) = 0$ и $x(t \rightarrow +\infty) = 0$. Также может случиться

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2)G(t) = \delta(t), \quad \Rightarrow \quad \hat{G}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2},$$

с особенностями на вещественной оси, что можно решить, сместив полюса в \mathbb{C} .

Свёртка. Рассмотрим уравнение

$$L(\partial_t)x(t) = f(t), \quad L(\partial_t)G(t) = \delta(t).$$

Фурье переводит

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_x^n x(t) e^{-i\omega t} dt = (i\omega)^n \hat{x}(\omega).$$

Тогда

$$L(i\omega)\hat{x}(\omega) = \hat{f}(\omega), \quad L(i\omega)\hat{G}(\omega) = 1, \quad \Rightarrow \quad \hat{G}(\omega) = \frac{1}{L(i\omega)}.$$

Также нашли, что

$$\hat{x}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{L(i\omega)} = \hat{f}(\omega)\hat{G}(\omega), \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)f(s) ds.$$

Преобразование Лапласа. Пусть есть некоторое преобразование

$$\tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

где подразумевается, что $\operatorname{Re} p \geq 0$ и, вообще, в Фурье можно $p \in \mathbb{C}$.

Пусть $p = i\omega$, где $\omega \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\tilde{f}(i\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t) dt = \hat{f}(\omega), \quad \Rightarrow \quad f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(i\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} \tilde{f}(p) \frac{dp}{2\pi}.$$

В вычислениях выше мы предполагали, что $f(t \rightarrow \infty) = 0$.

Обойдём это, пусть $|f(t)| < Me^{st}$, при $s > 0$. Возьмём $p_0 > s$, тогда

$$\tilde{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-p_0 t} e^{-(p-p_0)t} f(t) dt = \tilde{g}(p-p_0),$$

где вводе $g(t) = e^{-ip_0 t} f(t)$, которая уже убывает на бесконечности. Обратно:

$$g(t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \tilde{g}(p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi} = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \tilde{g}(p-p_0) e^{-p_0 t} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}.$$

Так пришли к форме обращения

$$f(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \tilde{f}(p) \frac{dp}{2\pi i}, \quad \tilde{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-p_0 t} e^{-(p-p_0)t} f(t) dt = \tilde{g}(p-p_0), \quad (4)$$

где $g(t) = e^{-ip_0 t} f(t)$.

Забавный факт, из леммы Жордана: при $t < 0$ $f(t < 0) = 9$, по замыканию дуги по часовой стрелке (вправо). Выбирая p_0 так, чтобы все особенности лежали левее p_0 , можем получать причинные функции.

Производная. Найдём преобразование Лапласа для $\partial_t f(t)$:

$$\int_0^\infty \frac{df}{dt} e^{-pt} dt = f e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = p \tilde{f}(p) - f(+0).$$

Но, для функции Грина $L(\partial_t)G(t) = \delta(t)$, тогда

$$L(\partial_t)G_\varepsilon(t) = \delta(t - \varepsilon), \quad G_\varepsilon(t) = G(t - \varepsilon), \quad \Rightarrow \quad G_\varepsilon(0) = 0,$$

где $G_\varepsilon \rightarrow G(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Преобразуем³ по Лапласу уравнения выше

$$L(p)G(p) = e^{p\varepsilon} = 1, \quad \Rightarrow \quad G_\varepsilon(p) = \frac{1}{L(p)}, \quad \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \quad G(p) = \frac{1}{L(p)}.$$

Так получаем

$$G(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \frac{e^{pt}}{\tilde{L}(p)} \frac{dp}{2\pi i}, \quad (5)$$

где p_0 правее всех особенностей.

Пример. Рассмотрим $L = \partial_t + \gamma$, тогда

$$(p + \gamma)G(p) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(p) = \frac{1}{p + \gamma}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{pt}}{p + \gamma} \frac{dp}{2\pi i} = \theta(t)e^{-\gamma t}.$$

Аналогично, пусть $L = \partial_t^2 + \omega^2$, тогда $LG(t) = \delta(t)$, и

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + \omega^2}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \frac{e^{pt}}{p^2 + \omega^2} \frac{dp}{2\pi i} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dots, & t > 0 \end{cases} = \theta(t) \left(\frac{e^{i\omega t}}{2i\omega} + \frac{e^{-i\omega t}}{-2i\omega t} = \theta(t) \frac{\sin \omega t}{\omega} \right)$$

В общем виде, пусть $L(\partial_t)G(t) = \delta(t)$, тогда

$$L(p)G(p) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(p) = \frac{1}{L(p)}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \frac{e^{pt}}{L(p)} \frac{dp}{2\pi i}.$$

Поговорим про свёртку:

$$Lx = f, \quad \Rightarrow \quad L(p)x(p) = f(p), \quad L(p)G(p) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(p) = \frac{1}{L(p)}.$$

Тогда получается

$$x(p) = \frac{f(p)}{L(p)} = f(p)G(p), \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int_0^t G(t-s)f(s) ds.$$

Уравнение Вольтера. Иногда бывает уравнения на $x(s)$ вида

$$f(t) = \int_0^t x(s)K(t-s) ds. \quad (6)$$

Через преобразование Лапласа, находим

$$f(p) = x(p)K(p), \quad \Rightarrow \quad x(p) = \frac{f(p)}{K(p)}. \quad (7)$$

В общем виде тогда находим

$$x(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \frac{f(p)}{K(p)} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}.$$

Кстати, забавный факт:

$$\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} 1 \cdot e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = e^{p_0 t} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = e^{p_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \delta(t), \quad (8)$$

то есть преобразование Лапласа от константы – дельта функция.

³Здесь и далее $f(t)$ – функция, $f(\omega) = \hat{f}(\omega)$ – Фурье образ, $f(p) = \tilde{f}(p)$ – преобразование Лапласа.

Рассмотрим, например

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{p+1-1}{p+1} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} - \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{pt}}{p+1} \frac{dp}{2\pi} = \delta(t) - \theta(t)e^{-t}.$$

Также верно, что

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} p e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \delta'(t).$$

Действительно,

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} \right) = \frac{d}{dt} \delta(t) = \delta'(t).$$

Важно, что можно делать функции маленькими

$$\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} f(p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \frac{f(p)}{p^n} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}. \quad (9)$$

Неоднородная релаксация. Рассмотрим уравнение

$$(\partial_t + \gamma(t))G(t, s) = \delta(t - s), \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, s) f(s) ds,$$

где продолжаем требовать причинность $G(t, s > t) = 0$. Для начала, рассмотрим $t > s$, тогда

$$(\partial_t + \gamma(t))G(t) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dG}{G} = -\gamma(t) dt, \quad \Rightarrow \quad G(t, s) = A(s) \exp \left(- \int_{t_0}^t \gamma(t') dt' \right).$$

Также записываем граничные условия:

$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \dots ds, \quad \Rightarrow \quad G(s+0, s) = 1.$$

Так можем найти

$$A(s) \exp \left(- \int_{t_0}^s \gamma(t') dt' \right) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(t, s) = \theta(t - s) \exp \left(- \int_s^t \gamma(t') dt' \right), \quad (10)$$

где мы разбили

$$\int_{t_0}^t = \int_{t_0}^s + \int_s^t,$$

и получили, что хотели.

Комментарий про дельта функцию. Главное, нужно показать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x) dx = 1, \quad \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x) = 0, \text{ при } x \neq 0.$$

Вообще можем плодить дельтаобразные последовательности, взяв f с единичным интегралом и

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a} f \left(\frac{x}{a} \right).$$

Комментарий про преобразование Лапласа. Для функции вида

$$\frac{1}{\sqrt{p + \alpha}},$$

необходим аппарат разрезом, так что её можно сделать с шифтом на неделю.

На следующей недели будет контрольная. Необходим аппарат метода неопределенных коэффициентов, матричные экспоненты, решение диффузов через Фурье (не всегда причинный результат), а также преобразование Лапласа. Вычеты скорее всего в районе второго порядка и меньше. Ещё полезно вспомнить, как записывать начальные условия: осциллятор, осциллятор с затуханием.

5 Приложение

Преобразование Лапласа. Выпишем несколько пар оригинал-изображение:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t^n e^{\lambda t}] &= \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}, & \mathcal{L}[t^\alpha e^{\lambda t}] &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}, & \mathcal{L}\left[\frac{(1-e^{-t})}{t}\right] &= \ln\left(1+\frac{1}{p}\right), & \mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right] &= \operatorname{arctg} p \\ \mathcal{L}[\sin(\nu t)] &= \frac{\nu}{p^2 + \nu^2}, & \mathcal{L}[\cos(\nu t)] &= \frac{p}{p^2 + \nu^2}, & \mathcal{L}[t \sin(\nu t)] &= \frac{p\nu}{(p^2 + \nu^2)^2}, & \mathcal{L}[t \cos(\nu t)] &= \frac{p^2 - \nu^2}{(p^2 + \nu^2)^2}, \\ \mathcal{L}[\operatorname{sh}(\nu t)] &= \frac{\nu}{p^2 - \nu^2}, & \mathcal{L}[\operatorname{ch}(\nu t)] &= \frac{p}{p^2 - \nu^2}, & \mathcal{L}[e^{\lambda t} \sin(\nu t)] &= \frac{\nu}{(p-\lambda)^2 + \nu^2}, & \mathcal{L}[e^{\lambda t} \cos(\nu t)] &= \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2 + \nu^2},\end{aligned}$$

Также помним, что $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$, и $\mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-ap}$, при $a > 0$.