1 Задачи

Задача №13

> Найти средние значения $1/r$, $1/r^2$ и p^2 для nl-состояний атома водорода, используя теорему вириала и теорему Фейнмана–Гельмана.

Используя общую теорему о вириале: $2\langle\hat{T}\rangle = \langle \boldsymbol{r}\cdot\frac{\partial V(r)}{\partial \boldsymbol{r}}\rangle$, а также явно потенциал в атоме водорода $V(r) = -\frac{e^2}{r}$ явно найдём то, как у нас работает вириал:

$$\frac{\partial V(r)}{\partial r^\alpha} = \frac{\partial V(r)}{\partial r}\cdot\frac{r_\alpha}{r} = -\frac{r_\alpha}{r^2}V(r) \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{r}\cdot\frac{\partial V(r)}{\partial \boldsymbol{r}} = -r^\alpha\frac{r_\alpha}{r^2}V(r) = -V(r) \quad\Rightarrow\quad \langle T\rangle = -\frac{1}{2}\langle V(r)\rangle$$

Тогда, раз мы работаем с атомом водорода, с одной стороны мы знаем энергию на n-ом уровне E_n, а с другой эта энергия – есть сумма средних потенциальной и кинетической энергий:

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\frac{1}{n^2} = \langle T\rangle + \langle V\rangle = \frac{1}{2}\langle V\rangle = -\frac{e^2}{2}\langle 1/r\rangle \quad\Rightarrow\quad \boxed{\langle 1/r\rangle = \frac{\hbar^2}{2me^2}\frac{1}{n^2a^2} = \frac{1}{an^2}}$$

Сразу же из кинетической энергии получаем:

$$\langle T\rangle = -\frac{1}{2}\langle V(r)\rangle \quad\Rightarrow\quad \left\langle\frac{\hat{p}^2}{2m}\right\rangle = \frac{e^2}{2}\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle \quad\Rightarrow\quad \boxed{\langle\hat{p}^2\rangle = \frac{\hbar^2}{a^2n^2}}$$

Чтобы получить последний ответ, воспользуемся теоремой Фейнмана-Геллмана[1]

$$\frac{\partial E_n}{\partial t} = \langle n|\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}|n\rangle, \qquad \hat{H} = \frac{\hat{p}_r^2}{2m} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{mr^2} - \frac{e^2}{r}, \qquad n = n_r + l + 1.$$

Тогда заметим, что производная по l и даёт нам среднее от оставшегося выражения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\hat{H}}{\partial l} &= \frac{\hbar^2(l+\frac{1}{2})}{mr^2} \\ \frac{\partial E_n}{\partial l} &= \frac{\partial E_n}{\partial n} = \frac{\hbar^2}{mn^3a^2} \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\langle 1/r^2\rangle = \frac{1}{a^2n^3(l+\frac{1}{2})}}$$

Задача №14

> Вычислить в квазиклассическом приближении уровни энергии и собственные функции частицы для
> $$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x<0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2x^2, & x>0 \end{cases}$$

Нужно быть аккуратными, слева – бесконечная граница, что требует от нас наложения граничного условия

$$\psi(0) = 0 \quad\Rightarrow\quad \psi_{x\geqslant 0}(x=0) \sim \sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_{x=0}^{x_0}p(x)dx + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Таким образом запишем модифицированное правило квантования Бора-Зоммерфельда

$$\int_0^{x_0}p(x)dx = \pi\hbar\left(n+\frac{3}{4}\right).$$

Подставим импульс как $p(x) = \sqrt{2m(E_n - V(x))}$ возьмём интеграл от 0 до $x_0 = \sqrt{2E/(m\omega^2)}$ – то есть в классически разрешенной области

$$\int_0^{x_0}p(x)dx = \int_0^{x_0}\sqrt{2mE_n - m^2\omega^2x^2}dx = \frac{E_n}{\omega}\int_0^{\pi}\cos^2\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2\omega}E_n \quad\Rightarrow\quad \boxed{E_n = \hbar\omega\left(2n+\frac{3}{2}\right)}$$

В квазиклассическом приближении $\psi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\cdot\exp[\frac{i}{\hbar}\int p(x)dx]$ тогда исходя из правила согласования квази-

[1] он же Хеллман, он же Гельман, он же "окорок"и он же "одноногий"

классических решений при переходе из запрещенной (затухание) в разрешенную (осцилляция) область

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \dfrac{C}{\sqrt{p(x)}} \sin\left(\dfrac{1}{\hbar}\displaystyle\int_x^{x_0} p(\xi) d\xi\right), & 0 < x \leqslant x_0 \\ \dfrac{C}{2\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(\dfrac{1}{\hbar}\displaystyle\int_{x_0}^{x} |p(\xi)| d\xi\right), & x_0 \leqslant x \end{cases}$$

Остается только найти константы из условия

$$C^2 = \frac{4m}{T} = 4\frac{1}{\int_0^{x_0} dx/p(x)} = \frac{2m\omega}{\pi}.$$

Задача №15

> Квазиклассическое рассмотрение α-распада, закон Гейгера–Неттола.

Стоит всё-таки вспомнить потенциал из задания, ведь именно такой потенциал впервые рассматривался в теории α-распада. И так

$$U(x) = \begin{cases} -U_0, & 0 < x < a \\ \frac{2Ze^2}{x}, & x > a \end{cases}$$

Коэффициент прохождения через такой барьер, как отношение входящего потока к выходящему

$$\mathcal{T} \sim \exp\left(-\frac{2}{h}\int_a^b |p(x)| dx\right), \qquad \int_a^b |p(x)| dx = \int_a^b \sqrt{2m|E - U(x)|} dx = \sqrt{2m}\int_{r_0}^{2Ze^2/E} \sqrt{\frac{2Ze^2}{x} - E} dx.$$

Остается только вычислить интеграл, для удобства введём $\beta = \frac{aE}{2Ze^2}$, тогда

$$\mathcal{T} \sim \exp\left[-\frac{4Ze^2}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E}}(\arccos\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta(1-\beta)})\right]$$

И если мы уже далеко отошли от пика $x = a$, то $\beta \ll 1$ и соответственно коэффициент пропускания

$$\mathcal{T} \sim \exp\left(-\frac{2\pi Ze^2}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E}}\right).$$

Соответственно альфа частицы из потенциала такого вида могут туннелировать, с известным теперь нам коэффициентом, то есть излучаться. Таким образом вероятность излучения в единицу времени пропорциональна пропусканию: $w = n\mathcal{T}$, где n – частота столкновений частиц с барьером. Если ввести характерную скорость частиц в потенциальной яме ($x < a$), то

$$n \sim v/a, \qquad v \sim p/m_\alpha \sim \frac{\hbar}{m_\alpha a} \quad \Rightarrow \quad n \sim \frac{\hbar}{m_\alpha a^2}.$$

Вероятность распада в единицу времени λ связан с периодом полураспада T

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{w} \approx \frac{m_\alpha a^2 \ln 2}{\hbar D} = C_1 \exp\left(\frac{C_2}{\sqrt{E}}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ln T_{1/2} = A + \frac{B}{\sqrt{E}}}$$

Конечное равенство представляет собой уравнение *Гейгера-Неттола*. Константы выписывать конечно не интересно, ведь и так наши рассуждения носят оценочный характер, но на всякий случай

$$A = \ln C_1 \approx \ln\left(\frac{m_\alpha a^2 \ln 2}{\hbar}\right), \qquad B = C_2 \approx \frac{2\pi Ze^2\sqrt{2m}}{\hbar}.$$