

ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ ТФКП

Авторы заметок: Хоружий Кирилл

От: 12 октября 2021 г.

Содержание

3	Степенные ряды и элементарные функции	2
4	Комплексное интегрирование	4
5	Ряд Тейлора и теорема единственности	6
6	Изолированные особые точки. Ряд Лорана.	9

3 Степенные ряды и элементарные функции

T15

Найдём радиус сходимости ряда, где

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}, \quad \text{if } \exists \Rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

а). Для начала,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-in}{1+in} \right)^{n^2} z^n, \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1-in}{1+in} \right)^n = \left(\frac{1-n^2-2in}{1-n^2} \right)^n = \left(1 - \frac{2in}{1-n^2} \right)^n,$$

где можно увидеть замечательный предел, тогда

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2i}{n} \right)^n \right| = 1, \quad \Rightarrow \quad R = 1.$$

б). Аналогично,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (1+i^n)^n z^n, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|1+i^n|^n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (1+i^n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (1+i^{4n}) = 2, \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{2}.$$

в). Здесь немного видоизменяется выражение для R :

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n!]{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n/n!} = 1, \quad \Rightarrow \quad R = 1.$$

г). Здесь перейдем к записи через экспоненту

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} ((1+i)^n + (1-i)^n) z^n, \quad (1+i)^n + (1-i)^n = 2^{n/2} e^{in\pi/4} + 2^{n/2} e^{-in\pi/4},$$

тогда выбирая $n = 4k$, получим

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2})^{\frac{n+2}{n}}, \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

§3, №10

3). Покажем, что

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Разложим в ряд:

$$(\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z)(\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) = e^{-z} \cdot e^z = 1.$$

4). Покажем, что

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b.$$

Действительно,

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{1}{4} (e^a + e^{-a}) (e^b + e^{-b}) + \frac{1}{4} (e^a - e^{-a}) (e^b - e^{-b}) = \frac{1}{2} (e^{a+b} + e^{-a-b}) = \operatorname{ch}(a+b).$$

§3, №12 (1)

Найдём Re и Im от $\sin z$. Считая $z = x + iy$:

$$\sin z = \frac{1}{2i} (e^{ix} e^{-y} - e^{-ix} e^y) = \sin(x) \operatorname{ch}(y) + i \cos(x) \operatorname{sh}(y).$$

§3, №13

1). Покажем, что

$$|\sin z|^2 = \sin^2(x) \operatorname{ch}^2(y) + \cos^2(x) \operatorname{sh}^2(y) = (1 - \cos^2 x) \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x (\operatorname{ch}^2 y - 1) = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x.$$

3). Аналогично:

$$\begin{aligned} |\operatorname{sh} z|^2 &= |-i \sin iz|^2 = |\sin(-y + ix)|^2 = \sin^2(-y) \operatorname{ch}^2 x + \cos^2 y \operatorname{sh}^2 x = \\ &= (1 - \cos^2 y) \operatorname{ch}^2 x + \cos^2 y (\operatorname{ch}^2 x - 1) = \operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y. \end{aligned}$$

§3, №17

3). Решим уравнение, вид

$$\cos z = \frac{3i}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \operatorname{ch} y = 0 \\ -\sin x \operatorname{sh} y = 3/4 \end{cases} \Leftrightarrow^* \begin{cases} \cos x = 0 \\ \operatorname{sh} y = \pm 3/4 \end{cases} \Leftrightarrow^* \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ y = \pm \ln 2. \end{cases}$$

где в * подразумевалось соответствие знаков. Тогда находим

$$z = \pm \left(\frac{\pi}{2} + i \ln 2 \right) + 2\pi k.$$

4). Аналогично,

$$\cos z = \frac{3}{4} + \frac{i}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \operatorname{ch} y = 3/4 \\ -\sin x \operatorname{sh} y = 1/4 \end{cases}$$

Из тригонометрии можем записать, что

$$\frac{9}{16} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 y} + \frac{1}{16} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 y} = 1, \quad \Rightarrow \quad 16 \left(\operatorname{sh}^2 y + \frac{1}{2} \right) \left(\operatorname{sh}^2 y - \frac{1}{8} \right) = 0,$$

а тогда

$$\operatorname{sh} y = \pm \sqrt{\frac{1}{8}}, \quad \Rightarrow \quad y = \pm \ln \left(\sqrt{\frac{1}{8}} + \sqrt{1 + \frac{1}{8}} \right) = \pm \frac{1}{2} \ln 2.$$

Отсюда находим, что

$$\sin x = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \Rightarrow \quad x = \mp \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k.$$

Собирая всё вместе, находим

$$z = \pm \frac{1}{2} (\ln 2 - \pi) + \frac{\pi}{4} + 2\pi k.$$

4). Наконец, решим

$$\operatorname{tg} z = \frac{5i}{3}.$$

Так как синус и косинус расписывать уже умеем, рассмотрим

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \frac{bc-ad}{c^2+d^2},$$

где $a = \sin x \operatorname{ch} y$, $b = \cos x \operatorname{sh} y$, $c = \cos x \operatorname{ch} y$, $d = -\sin x \operatorname{sh} y$, соответственно, приходим к системе

$$\begin{cases} \sin x \cos x = 0 \\ \operatorname{th} y = 3/5 \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ y = \ln 2, \end{cases}$$

где мы учли, что $\operatorname{th} x \in [-1, 1] \forall x \in \mathbb{R}$.

T16

Найдём несколько значений:

$$\begin{aligned} \sin i &= i \sin(1), & \cos i &= \operatorname{ch} 1, \\ \operatorname{tg}(1+i) &= \frac{i(e^{-1+i}) + e^{1-i}}{e^{-1+i}e^{1-i}} = \frac{2e^2 \sin 2 + i(e^4 - 1)}{1 + e^4 + 2e^2 \cos(2)}. \end{aligned}$$

T17

а). Докажем, что

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= i \frac{2^{-iiz} - e^{iiz}}{2i} = -i \sin(iz), \\ \operatorname{ch} z &= \frac{1}{2} (e^{-iiz} + e^{iiz}) = \cos(iz). \end{aligned}$$

б). Раскроем левую и правую части:

$$2 \operatorname{LHS} = e^{z_1} - e^{-z_1} + e^{z_2} - e^{-z_2},$$

$$2 \operatorname{RHS} = \left(\exp \left(\frac{z_1 + z_2}{2} \right) - \exp \left(-\frac{z_1 + z_2}{2} \right) \right) \cdot \left(\exp \left(\frac{z_1 - z_2}{2} \right) + \exp \left(\frac{z_1 - z_2}{2} \right) \right) = e^{z_1} - e^{-z_1} + e^{z_2} - e^{-z_2},$$

что и требовалось доказать: $\operatorname{LHS} = \operatorname{RHS}$.

в). Очень внимательно посмотрев на бином Ньютона, можно заметить, что равенство степеней будет достигаться в C_{2n}^n , остальные же слагаемые продублируются, тогда

$$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}} (e^{ix} + e^{-ix})^{2n} = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n + \frac{2}{2^{2n}} \sum_{k=1}^n C_{2n}^{n+k} \cos(2kx).$$

T18

Ну, посчитаем, что

$$2^i = e^{i(\ln 2 + 2\pi i n)} = e^{-2\pi n} [\cos(\ln 2) + i \sin(\ln 2)], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично

$$i^i = \exp\left(i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right)^i = e^{-\pi/2} e^{-2\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично

$$(-1)^{2i} = \exp\left(i(\pi + 2\pi k)\right)^i = e^{-2\pi} e^{-4\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

T19

Пусть $\{a_n\}$ – последовательность ненулевых комплексных чисел такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L, \quad \stackrel{?}{\Rightarrow} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L.$$

△. По определению,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N: \forall n \geq N \left| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - L \right| < \varepsilon.$$

Занятный факт:

$$|a_n| = \underbrace{\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \cdot \frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|} \cdot \dots \cdot \frac{|a_{N+1}|}{|a_N|}}_{n-N \text{ штук}} \cdot |a_N| < (L + \varepsilon)^{n-N} |a_N|.$$

А теперь получим два ограничения: при фиксированном N и $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon,$$

и при фиксированном n и $N \rightarrow \infty$:

$$\left((L + \varepsilon)^{\frac{n+N}{n}} (a_n)^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{n}{N}} < \left(a_{\frac{n}{N}} \right)^{\frac{1}{N}}, \quad \Rightarrow \quad (L + \varepsilon)^{1 - \frac{n}{N}} \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{a_N}, \quad \Rightarrow \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_N} \geq L - \varepsilon.$$

Таким образом, ограничив сверху и снизу, действительно находим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

□

4 Комплексное интегрирование

T20

Вычислим интеграл, вида

$$\int_{\mathbb{T}} |z-1| |dz| = \int_0^{2\pi} |\cos \varphi - i \sin \varphi - 1| d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos \varphi - 1)^2 + \sin^2 \varphi} d\varphi = 4 \int_0^{2\pi} |\cos \frac{\varphi}{2}| d\frac{\varphi}{2} = 4 \int_0^{\pi} |\cos \varphi| d\varphi = 8,$$

где \mathbb{T} – единичная окружность.

Теперь вычислим интеграл, вида

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} |z-1| dz &= i \int_0^{2\pi} |e^{i\varphi} - 1| e^{i\varphi} d\varphi = i \int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos \varphi - 1)^2 + \sin^2 \varphi} (\cos \varphi + i \sin \varphi) d\varphi = \\ &= \underbrace{2i \int_0^{2\pi} |\sin \frac{\varphi}{2}| \cos \varphi d\varphi}_{-4i \int_0^{\pi} |\cos \varphi| \cos 2\varphi d\varphi} - \underbrace{2i \int_0^{2\pi} |\sin \frac{\varphi}{2}| \sin \varphi d\varphi}_{\equiv 0} = -16i \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi + 8i \int_0^{\pi/2} |\cos \varphi| d\varphi = -\frac{8}{3}i, \end{aligned}$$

где мы воспользовались выражением

$$\int_0^{\pi/2} \sin^a(x) \cos^b(x) dx = \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(1 + \frac{a+b}{2}\right)}.$$

T21

Пусть $P(z)$ – полином, а γ – положительно ориентированная окружность с центром в точке a и радиуса R . Докажем, что

$$\int_{\gamma} P(z) d\bar{z} = -2\pi i R^2 P'(a).$$

\triangle . Запишем $z = a + Re^{it}$, тогда $d\bar{z} = -itRe^{-it} dt$, тогда

$$-i \int_0^{2\pi} P(a + Re^{it}) t R e^{-it} dt = - \int_{\gamma} P(z) e^{-2it} dz = -R^2 \int_{\gamma} \frac{P(z)}{(z-a)^2} dz = -2\pi i P'(a) R^2.$$

Последнее равенство тут можно получить или из

$$\operatorname{res}_a P(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} f(z)(z-a)^2,$$

где $m = 1$ – порядок полюса. □

T22

Вычислим интеграл, вида

$$I = \int_{\gamma} \cos^8 z dz, \quad \gamma: z(t) = \pi + \pi e^{it}, \quad t \in [\pi, 2\pi].$$

Так как подынтегральная функция голоморфна, то можем стянуть контур интегрирования к вещественной оси:

$$I = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^8(z) dz = 4 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}{2\Gamma(5)} = 4\pi \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{16 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{35}{64} \pi.$$

T23

Покажем, что

$$|e^{-z} - 1| \leq |z|,$$

где $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$. Представим через интеграл экспоненту:

$$|e^{-z} - 1| = \left| \int_0^z e^{-t} dt \right| \leq \int_0^z |e^{-t}| |dt| \leq \int_0^z |dt| = |z|,$$

для $\operatorname{Re} z > 0$ и $t \in [0, z]$. Q.E.D.

T24

Докажем, что для $z \in \mathbb{C}$ и $|z| \leq 1$ выполняются неравенства:

$$\frac{1}{4}|z| \leq |e^z - 1| \leq \frac{7}{4}|z|, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} \leq \frac{|e^z - 1|}{|z|} \leq \frac{7}{4}.$$

\triangle . Пусть $z = x + iy$, тогда наша задача равносильна

$$\frac{1}{16} \leq F(x, y) \leq \frac{49}{16}, \quad F(x, y) = \frac{(e^x \cos y - 1)^2 + (e^x \sin y)^2}{x^2 + y^2}.$$

Заметим, что

$$\partial_y F(x, y) = \frac{2e^x}{(x^2 + y^2)^2} (2y \cos y - 2y \cosh x + (x^2 + y^2) \sin y),$$

где уравнение $2y \cos y - 2y \cosh x + (x^2 + y^2) \sin y = 0$ имеет единственный корень в $y = 0$ при $x, y: x^2 + y^2 < 1$. Более того, пусть $y = \varepsilon > 0$, тогда

$$\begin{aligned} \partial_y F(x, \varepsilon) &= \varepsilon(2 + x^2 - \cosh x) < 0, \\ \partial_y F(x, -\varepsilon) &= -\varepsilon(2 + x^2 - \cosh x) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом максимум/минимум $F(x, y)$ достигается при $y = 0$:

$$F(x, 0) = \frac{(e^x - 1)^2}{x^2}, \quad \partial_x F(x, 0) > 0,$$

то есть минимум достигается в $F(-1, 0)$ и максимум в $F(1, 0)$, тогда

$$\frac{1}{16} < \underbrace{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2}_{\approx 6/15} \leq F(x, y) = \frac{|e^z - 1|^2}{|z|^2} \leq \underbrace{(e - 1)^2}_{\approx 53/18} < \frac{49}{16},$$

что и требовалось доказать. □

T25

Покажем, что формулу Стокса (Грина) можно записать в виде

$$\iint_D \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} dx dy = \frac{1}{2i} \int_{\partial D} f(z) dz.$$

△. Для начала распишем

$$df = \partial_x f dx + \partial_y f dy = \frac{1}{2} \partial_x f (dz + d\bar{z}) + \frac{1}{2i} \partial_y f (dz - d\bar{z}) = \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f)}_{\partial_z f} dz + \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f)}_{\partial_{\bar{z}} f} d\bar{z}.$$

Теперь можем подставить:

$$\frac{1}{2i} \int_{\partial D} f(z) dz = \frac{1}{2i} \iint_D df(z) dz = \frac{1}{2i} \iint_D \partial_{\bar{z}} f d\bar{z} \wedge dz = \frac{1}{2i} \iint_D \partial_{\bar{z}} f (dx \wedge i dy - i dy \wedge dx) = \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy.$$

□

5 Ряд Тейлора и теорема единственности

§7, №5

Разложим в ряд Тейлора функцию

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z}{(z + 1)^3},$$

в окрестности точки $z = 1$.

Заметим, что

$$\left(\frac{1}{z+1}\right)' = -\frac{1}{(z+1)^2}, \quad \left(\frac{1}{(z+1)^2}\right)' = -\frac{2}{(z+1)^3}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+1}\right)'' = \frac{1}{(z+1)^3}.$$

Тогда

$$f(z) = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^3} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+1}\right)'.$$

Вспомним, что

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n, \quad \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{z-1}{2} + 1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^n}.$$

Теперь можем найти

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^n} - \frac{1}{4} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) \frac{(z-1)^{n-2}}{2^n} = \frac{3}{8} - \frac{1}{16}(z-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^n \left(1 - \frac{1}{8}(n+2)(n+1)\right),$$

то есть получили разложение по Тейлору.

§7, №6(2)

Разложим в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ функции:

$$f(z) = \cos^3 z = \frac{1}{4} \cos(3z) + \frac{3}{4} \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \frac{(-1)^n}{4(2n)!} (3^{2n} + 3).$$

§7, №11

Определим порядок нуля m функции $f(z)$ в точке a .

2). Во-первых рассмотрим

$$f(z) = (z^2 - \pi^2)^4 \sin^3 z, \quad a = \pi.$$

Можем представить функции в виде

$$\begin{aligned} z^2 - \pi^2 &= (z - \pi)h_1(z), & h_1(z) &\neq 0, \\ \sin z &= (z - \pi)h_2(z), & h_2(z) &\neq 0, \end{aligned}$$

где h – голоморфная функция. Тогда

$$f(z) = (z - \pi)^{3+3} h_1(z)^3 h_2^3(z),$$

таким образом нашли, что $m = 6$.

3). Во-вторых рассмотрим

$$f(z) = (z^2 + \pi^2)^2 (e^{2z} - 1)^4, \quad a = \pi i.$$

Аналогично раскрываем

$$\begin{aligned} z^2 + \pi^2 &= (z - i\pi)h_1(z), & h_1(z) &\neq 0, \\ e^{2z} - 1 &= (z - i\pi)h_2(z), & h_2(z) &\neq 0, \end{aligned}$$

и снова получаем $m = 6$.

§7, №12 (3)

Найдем, какая же функция является решением для гармонического осциллятора, вида

$$f''(z) + \lambda^2 f(z) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = \lambda.$$

Считая $f(z)$ голоморфной, запишем

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+1)(k+2)x^k.$$

Подставляя в уравнение, находим

$$(c_0 \lambda^2 + 2c_2)z^0 + (c_1 \lambda^2 + 6c_3)z^1 + \sum_{k=2}^{\infty} (c_{k+2}(k+2)(k+1) + \lambda^2 c_k) z^k = 0.$$

Приравнявая к 0 коэффициенты при всех степенях, находим

$$c_0 = c_2 = c_{2k} = 0, \quad c_1 = \lambda, \quad c_3 = -\frac{\lambda^3}{6}, \quad c_5 = \frac{\lambda^5}{5!}, \quad \dots \Rightarrow f(z) = \sin(\lambda z).$$

§9, №2

1). Покажем, что не существует голоморфной функции такой, что

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin \frac{\pi n}{2}.$$

Действительно, рассмотрим $g = f - f(0)$, где $f(0) \in [-1, 1]$, тогда $g(0) = 0$ – не изолированный 0 функции, соответственно f не могла быть голоморфной.

2). Аналогично рассмотрим

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cos(\pi n),$$

при чем при $n = 2k$ $f > 0$ и $n = 2k + 1$ $f < 0$, тогда где-то между случается, что $f = 0$, а значит снова 0 – не изолированный 0 функции, соответственно f не может быть голоморфной.

3). Просто подберем нужную функцию

$$f(z) = \frac{z}{2+z}, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}.$$

4). Аналогичная функция подойдет и здесь:

$$f(z) = \frac{z}{2+z}, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\cos^2 \pi n}{2n+1},$$

где $\cos^2 \pi n = \text{const}$, при $n \in \mathbb{N}$.

5). Рассмотрим функцию, вида

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n + \cos \pi n}.$$

Заметим, что при $n_1 = 2k$ и при $n_2 = 2k + 1$:

$$f\left(\frac{1}{n_1}\right) = \frac{1}{4k + 1}, \quad f\left(\frac{1}{n_2}\right) = \frac{1}{4k + 1}.$$

Рассмотрим функцию $f(z) - \frac{z}{2}$, которая будет иметь не изолированный 0 в $z = 0$, т.к. $z/2$ голоморфная функция, можем сделать вывод, что $f(z)$ не могла быть голоморфной.

6). Просто подберем подходящую функцию:

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}, \quad \Rightarrow \quad f(z) = z^2.$$

7). Рассмотрим

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n + 1}.$$

С одной стороны, из (3), следует, что

$$g(z) = \frac{z}{2 + z},$$

«подходит», но $g(-\frac{1}{n}) \neq g(\frac{1}{n})$, так что существование такой голоморфной f противоречило бы теореме о единственности.

8) Немного по-другому покажем, что

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n}, \quad \stackrel{?}{\Rightarrow} \quad f(z) = e^{-1/|z|},$$

но такая функция не аналитична в нуле, так что такой голоморфной f не существует.

9). Аналогично (7):

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}.$$

По теореме о единственности, если такая голоморфная f существует, то $f(z) = g(z) = z^3$, но $g(-z) \neq g(z)$, а значит такой голоморфной f не существует.

§9, №3

Пусть функции f_1 и f_2 регулярны в области D и удовлетворяют уравнения $f'(z) = P(z, f(z))$, где P — многочлен. Покажем, что если в некоторой точке $z_0 \in D$ имеет место равенство $f_1(z_0) = f_2(z_0)$, то $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

△. Для начала заметим, что

$$f_1(z_0) = f_2(z_0), \quad \Rightarrow \quad f_1'(z_0) = P(z_0, f_1(z_0)) = f_2'(z_0) = P(z_0, f_2(z_0)).$$

Также заметим, что

$$f'(z_0) = \sum_{k,m} c_{mk} z_0^k f(z_0)^m, \quad \Rightarrow \quad f''(z_0) = \sum_{k,m} c_{mk} (k z_0^{k-1} f^m(z_0) + z_0^k m f^{m-1}(z_0) f'(z_0)), \quad \Rightarrow \quad f_1^{(2)}(z_0) = f_2^{(2)}(z_0),$$

и аналогично для всех остальных производных: $f_1^{(n)}(z_0) = f_2^{(n)}(z_0)$, а значит, по аналитичности f_1 и f_2 можем сделать вывод, что $f_1 \equiv f_2$. □

T26

Функция $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Выразим через f сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 a_n z^n$. Можем просто несколько раз продифференцировать:

$$z f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n, \quad z(z f')' = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n z^n, \quad z(z(z f')')' = \sum_{n=0}^{\infty} n^3 a_n z^n.$$

Тогда не сложно выразить

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 a_n z^n = z(z(z f')')' = (z f' + f'' z^2)' = f''' z^3 + 3 f'' z^2 + f' z.$$

T27

Пусть $f(z)$ – целая функция и для каждого $z_0 \in \mathbb{C}$ в разложении по Тейлору найдётся нулевой коэффициент. Покажем, что $f(z)$ – полином.

\triangle . Построим множество

$$E_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid f^{(n)}(z) = 0 \right\}.$$

При чем множество всех $\{E_n\}$ счётно, \mathbb{C} несчётно, и по условию $\forall z \exists n: z \in E_n$, а значит найдётся N такой, что E_N несчётно. Тогда, по теореме о единственности, $f^{(N)} \equiv 0$, а значит $f(z)$ – полином. \square

T28

Пусть целая функция $f(z)$ удовлетворяет условию $\operatorname{Re} f'(z) > 0 \forall z \in \mathbb{C}$. Докажем, что $f(z)$ – полином первой степени с положительным коэффициентом при z^1 .

\triangle . Воспользуемся теоремой Пикара или теоремой Лиувилля (**доказательство**).

Thr 5.1 (теорема Пикара). *Образ целой функции $\neq \text{const}$ тождественно равен \mathbb{C} , без, быть может, одной точки.*

Thr 5.2 (теорема Лиувилля). *Если целая функция $f(z)$ ограничен, то $f(z)$ константа.*

Построим функцию $g(z)$ вида

$$g(z) = \frac{1}{1 + f'(z)},$$

которая по условию ($\operatorname{Re} f' > 0$ и f – целая) является целой. Тогда

$$g(z) = \frac{1}{(x+1) + iy} = \underbrace{\frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}}_{<1} - i \underbrace{\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}}_{<1}, \quad \Rightarrow \quad |g(z)| \leq \sqrt{2},$$

а значит, по теореме Лиувилля:

$$g(z) = \text{const}, \quad \Rightarrow \quad f'(z) = \text{const}, \quad \Rightarrow \quad f(z) = az + b, \quad a > 0.$$

\square

6 Изолированные особые точки. Ряд Лорана.

§11, №3(4)

Разложим в ряд Лорана по степеням z в кольце $1 < |z| < 2$, функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)62(z+2)} = \frac{Az+B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z+2}, \quad \begin{cases} 2B+C=1 \\ C+A=0 \\ 2A+B=2C \end{cases} \Rightarrow f(z) = -\frac{z-4}{9(z-1)^2} + \frac{1}{9(z+2)},$$

где, выделяя удобные слагаемые, находим

$$f(z) = \frac{1}{3(1-z)^2} + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2(1+z/2)} + \frac{1}{1-z} \right), \quad \frac{1}{z+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n, \quad \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \frac{1}{z^n},$$

таким образом искомое разложение:

$$f(z) = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-3n-4}{9} \frac{1}{z^n}.$$

§11, №4(6)

Разложим в ряд Лорана по степеням $z-a$ в кольце D функцию, вида

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 2i}, \quad a = 1, \quad -1 \in D.$$

Для начала подставим $t = z - 1$:

$$f(t) = \frac{1}{2+i} \frac{1}{1+\frac{t}{2+i}} + \frac{i}{1-\frac{t}{i}}, \quad \frac{i}{1+t/i} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{(z-1)^n}, \quad \frac{1}{1+\frac{t}{2+i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2+i)^n} t^n.$$

Собирая все вместе, находим

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2+i)^{n+1}} (z-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} (z-1)^n.$$

§11, №7(3)

Разложим в ряд Лорана по степеням $z - a$ в кольце D функцию, вида

$$f(z) = \frac{5-4z}{(z+1)(z^2-1)^2}, \quad a=1, \quad z_0=0.$$

Сделаем подстановку $t = z - 1$, тогда

$$f(t) = \frac{1-4t}{t^2(t+2)^3} = \frac{-\frac{11}{16}t + \frac{1}{8}}{t^2} + \frac{\frac{11}{16}t^2 + 4t + \frac{15}{2}}{(t+2)^3},$$

где разложение было получено, как решение

$$A+C=0, \quad 6A+D+B=0, \quad 8A+12B=-4, \quad 8B=1,$$

решая которую, нашли, что

$$A = -\frac{11}{16}, \quad B = \frac{1}{8}, \quad C = \frac{11}{16}, \quad D = 4, \quad E = \frac{15}{2}.$$

Раскрывая, до удобного вида, находим

$$f(t) = -\frac{11}{16t} + \frac{1}{8t^2} + \frac{1}{(t+2)^3} \left(\frac{11}{16}t^2 + 44t + \frac{15}{2} \right).$$

Вспомним, что

$$\frac{1}{1+t/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{2} \right)^n, \quad \left| \frac{t}{2} \right| < 1, \quad \frac{1}{2(1+t/2)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} n(n-1)t^{n-2}.$$

Собирая всё вместе находим, что

$$f(t) = \frac{1}{8t^2} - \frac{11}{16t} + \frac{1}{64} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{2^n} (3+n)(20+9n), \quad 0 < |t| < 2,$$

или, возвращаясь к z :

$$f(z) = \frac{1}{8(z-1)^2} - \frac{11}{16(z-1)} + \frac{1}{64} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^n} (3+n)(20+9n), \quad 0 < |z-1| < 2.$$

§11, №10(6)

Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - 2i$, считая, что 0 принадлежит кольцу, где $f(z)$ вида

$$f(z) = \frac{z-1-5i}{z^2-2z+2} + \frac{3z-1-3i}{z^2-z(1+2i)-1+1}.$$

Для начала перейдём к переменной $t = z - 2i$:

$$f(t) = \frac{t-1-3i}{(t-1+i)(t-1+3i)} + \frac{3t-1+3i}{(t+i)(t-1+i)} = \underbrace{\frac{1}{i+t}}_{\text{по Лорану}} + \underbrace{\frac{3}{t+(1+3i)}}_{\text{по Тейлору}}.$$

В частности:

$$\frac{1}{t(1+i/t)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} i^{n-1} t^n, \quad \frac{3}{-\left(\frac{t}{1-3i}\right) + 1} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-3i)^{n+1}} t^n,$$

собирая всё вместе, находим

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} \frac{1}{t^n} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-3i)^{n+1}} t^n, \quad 1 < |t| < \sqrt{10},$$

где ограничения продиктованы сходимостью указанных разложений по Лорану и по Тейлору. Возвращаясь к z :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n-1} \frac{1}{(z-2i)^n} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-3i)^{n+1}} (z-2i)^n, \quad 1 < |z-2i| < \sqrt{10}.$$

§12, №2(7)

Покажем, что $z = \pi i$ – полюс функции

$$f(z) = \frac{z}{(e^z + 1)^2}.$$

Действительно,

$$\lim_{z \rightarrow \pi i} f(z)(z - \pi i)^2 = \pi i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2}{(\cos(\pi + \varepsilon) + 1 + i \sin(\pi + \varepsilon))^2} = \pi i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2}{(-i\varepsilon)^2} = \pi i,$$

а значит $z = \pi i$ – полюс второго порядка.

§12, №8

3). Найдём все изолированные особые точки однозначного характера для $f(z)$, вида

$$f(z) = z^2 \sin \frac{z}{z+1}.$$

Для начала заметим, что $z = -1$: $\nexists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\lim_{z \rightarrow -1+0} \neq \lim_{z \rightarrow -1-0})$, а значит $z = -1$ – существенная особая точка.

Также можем найти, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^2} = \sin 1,$$

а значит $z = \infty$ – полюс II порядка.

7). Теперь рассмотрим функцию, вида

$$f(z) = e^{\operatorname{ctg} \pi/z}.$$

Во-первых, $z = 1/k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ – СОТ, т.к.

$$\underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f\left(\frac{\pi}{\pi + \varepsilon}\right)}_{-\infty} \neq \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f\left(\frac{\pi}{\pi - \varepsilon}\right)}_{+\infty}.$$

Точка $z = 0$ не является изолированной, а $z = \infty$ – СОТ, т.к. $\operatorname{ctg} t$ испытывает разрыв в $t = 0$.

§12, №17(9)

Рассмотрим функцию, вида

$$f(z) = \frac{e^{1/(z-2i)}}{1 - \cos i\pi z}.$$

Для начала заметим, что $z = 2i$ – СОТ ($1/x$ разрывна в 0).

Рассмотрим точки такие, что $\cos i\pi z = 1$:

$$\lim_{z \rightarrow 2ik} \frac{(z - 2ik)^2}{1 - \cos(i\pi z)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2}{1 - \cos \varepsilon} = 2 = \operatorname{const} \neq 0,$$

а значит $z = 2ik$, где $k \in \mathbb{Z}$ – полюса II порядка. Точка $z = \infty$ не является изолированной.

§12, №20(5)

Повторим указанную выше процедуру для функции, вида

$$f(z) = \frac{\sin \pi z - \operatorname{ch} \pi/z}{(i - e^{\pi/z})^2}.$$

Стоит обратить внимание на точки $e^{\pi/z} = i \Leftrightarrow \frac{\pi}{z} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $z = 0$ и $z = \infty$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Для начала заметим, что

$$z_k = -i \left(\frac{1}{2} + 2k \right)^{-1}, \quad \Rightarrow \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(z_k + \varepsilon) \varepsilon^2 = (\sin \pi z_k - \operatorname{ch} \pi/z_k) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2}{-\frac{1}{16}(1 + 4k)^4 \pi^2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)} = \operatorname{const} \neq 0,$$

а значит z_k – полюса II порядка. Сразу получаем, что $z = 0$ не является изолированным.

Осталось показать, что $z = \infty$ – СОТ. Действительно, при $z \rightarrow \infty$ из $f(z)$ можно выделить $\sin z$, который является целой трансцендентной функцией, а значит $z = \infty$ – СОТ.

T29

Пусть функция f голоморфна в проколотом единичном круге $0 < |z| < 1$, и при некоторых $A > 0$ и $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$|f(z)| \leq \frac{A}{|z|^\alpha}.$$

Логично выделить случаи $\alpha = 1$ и $\alpha \in [0, 1)$.

При $\alpha = 1$, a – устранимая особая точка или полюс первого порядка, т.к.

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) \cdot z^1 \leq A,$$

а значит в разложении $c_{k \leq -2} = 0$, и c_{-1} может быть не равно 0.

При $\alpha \in [0, 1)$ верно, что $c_{k \leq -1} = 0$, а значит $z = 0$ не более, чем УОТ.

T30

Найдём главную часть ряда Лорана, функции

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}.$$

Представим функцию, виде

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{z}{\sin z},$$

и воспользуемся методом неопределённых коэффициентов для нахождения разложения $z/\sin z$:

$$\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right)}_{\sin z} \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \right)}_{z/\sin z} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k}_{\equiv z}.$$

Само собой, выбираем кольцо, не содержащее точек, вида $z = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Вспомним, что

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1},$$

тогда получаем набор уравнений на b_k , из которых нас интересует только b_0 (ищем главную часть $f(z)$):

$$\{a_0 b_0 = c_0 a_1 b_0 + a_0 b_1 = c_1 \Rightarrow b_0 = 1,$$

т.к. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и $c_0 = 0$, $c_1 = 1$. А значит искомая главная часть $f(z)$:

$$f(z) = \boxed{\frac{1}{z}} + \text{TheilorSeries}[f](z).$$