

1 Тепловое излучение

Введем лучистую энергию, раскладывая по частотам или длинам волн:

$$u = \int_0^\infty u_\omega d\omega = \int_0^\infty u_\lambda d\lambda,$$

где u_λ и u_ω – спектральные плотности лучистой энергии. При этом

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}, \quad \frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{d\omega}{\omega}, \quad u_\lambda = \frac{\omega}{\lambda} u_\omega, \quad u_\omega = \frac{\lambda}{\omega} u_\lambda.$$

В теорфизе обычно u_ω , в эксперименте чаще u_λ (как удобно).

Поток лучистой энергии, проходящий за время dt через площадку ds в пределах телесного угла $d\Omega$, ось которого перпендикулярна к площадке ds , можно представить, как

$$d\Phi = I ds d\Omega dt, \quad I = \int_0^\infty I_\omega d\omega,$$

где I – удельная интенсивность излучения, а I_ω – удельная интенсивность излучения частоты ω .

Для равновесного излучения несложно выписать связь:

$$u = \frac{4\pi}{c} I, \quad u_\omega = \frac{4\pi}{c} I_\omega.$$

Закон Кирхгофа. Для непрозрачного и поглощающего тела верно, что поток лучистой энергии, излучаемый площадкой ds поверхности тела внутрь телесного угла $d\Omega$:

$$d\Phi = E_\omega ds \cos \varphi d\Omega d\omega dt,$$

где φ – угол между направлением излучения и нормалью к площадке ds . Величина E_ω – *излучательная способность* поверхности тела, в направлении угла φ .

Поглощательной способностью A_ω поверхности для излучения той же частоты, называется величина, показывающая, какая доля энергии падающего излучения, поглощается рассматриваемой поверхностью. Величины E_ω и A_ω – характеристики тела, определяемые только температурой.

Рассмотрев тело в ящике, можем получить, что

$$\frac{E_\omega}{A_\omega} = I_\omega,$$

таким образом $\frac{E_\omega}{A_\omega}$ – универсальная функция только частоты и температуры для каждого тела.

Def 1.1. Абсолютно черным называется телос $A_\omega = 1 \forall \omega$.

Далее излучательную способность АЧТ примем за $\epsilon_\omega \equiv I_\omega$. Излучение АЧТ изотропно, а значит подчиняется *закону Ламберта*:

$$\frac{d\Phi}{d\Omega ds \cos \theta} = B_\theta = \text{const}(\theta).$$

Закон Стефана-Больцмана. Выведем этот закон, *методом циклов*. Пусть есть некоторая оболочка, при увеличении объема на dV за счёт давления света совершается работа $\mathcal{P} dV$, где $\mathcal{P} = \frac{1}{3}u$, а u – интегральная плотность лучистой энергии. Внутренняя энергия излучения в оболочке uV , откуда находим

$$\mathcal{P} dV = -d(uV), \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}u dV + V du = 0, \quad \Rightarrow \quad uV^{4/3} = \text{const}, \quad \mathcal{P}V^{4/3} = \text{const},$$

так получили *уравнения адиабаты* для изотропного излучения, с постоянной адиабаты $\gamma = 4/3$.

В силу эффекта Дполера, при адиабатическом сжатии должен меняться спектральный состав, пусть $\omega \rightarrow \omega'$, при этом:

$$u_\omega d\omega \cdot V^{4/3} = u'_{\omega'} d\omega' \cdot V'^{4/3} = \text{const},$$

где V' и $u'_{\omega'}$ – объем и спектральная плотность энергии излучения частоты ω' в конце процесса.

Произведем теперь над излучением АЧТ *цикл Карно* (см. Сивухин, т. IV, §115). А можно этого и не делать, а подставить $U = Vu(T)$ и $\mathcal{P} = \frac{1}{3}u(T)$ в формулу

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial T}\right)_V - \mathcal{P}, \quad \Rightarrow \quad u/T^4 = \text{const},$$

что и составляет закон Стефана-Больцмана.

Пользуясь формулой Планка, можем уточнить, что

$$u = \frac{h}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \frac{k^4 T^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^3 e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \frac{8}{15} \frac{\pi^5 k^4}{c^3 \hbar^3} T^4 = \frac{\pi^2 k^4}{15 c^3 \hbar^3} T^4.$$

На практике удобнее говорить про энергетическую светимость S для АЧТ, которая связана с яркостью B излучающей поверхности соотношением $S = \pi B = \pi I = cu/4$, а значит

$$S = \sigma T^4, \quad \sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60c^2 \hbar^3} = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 \hbar^3} = 5.670 \times 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4},$$

где σ – постоянная Стефана-Больцмана.

Теорема Вина. Рассмотрим сферически симметричную систему (вообще вроде можно показать что в общем случае изотропия излучения сохраняется), сожмем от V_1 до V_2 , уравновесим (необратимый процесс), расцирим от V_2 до V_1 , получим адиабатический обратимый круговой процесс, что невозможно, а значит верна следующая теорема:

Thr 1.2 (теорема Вина). *Равновесное излучение, в оболочке с идеально отражающими стенками, остается равновесным при квазистатическом изменении объема системы.*

Рассмотрим сферическую оболочку с идеально зеркальными стенками. Рассмотрим луч, падающий под углом θ , тогда время между двумя последовательными отражениями равно $\Delta t = (2r/c) \cos \theta$, за это время радиус оболочки получит приращение $\Delta r = r \delta \Delta t$. При каждом отражении происходит доплеровское изменение частоты:

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = -\frac{2\dot{r} \cos \theta}{c} = -\frac{2\Delta r \cos \theta}{c \Delta t} = -\frac{\Delta r}{r}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{\omega} + \frac{dr}{r} = 0, \quad \Rightarrow \quad \omega r = \text{const.}$$

Так как $r \sim V^{1/3}$, то можно записать в чуть более общем виде:

$$\omega^3 V = \text{const.},$$

что объединяя с другими адиабатическими инвариантами и законом Стефана-Больцмана, находим закон смещения Вина в наиболее общей форме:

$$\frac{\omega^4}{u} = \text{const.}, \quad \frac{\omega}{T} = \text{const.}, \quad \frac{u_\omega d\omega}{\omega^4} = \text{const.}$$

По теореме Вина излучение остается равновесным, так что можно было бы такж и нагревать/охлаждать стенки, да и вообще: полученные результаты – свойства только самого равновесного излучения, не связанные с процессами.

Максимумы спектральной плотности. Их последней формулы можем получить¹

$$u_\omega(\omega, T) = \frac{\omega^4}{\omega'^4} \frac{d\omega'}{d\omega} u'_{\omega'}(\omega', T) = \frac{T^3}{T'^3} u'_{\omega'}\left(\frac{T'}{T} \omega, T'\right) = \text{const}(T'), \quad \Rightarrow \quad u_\omega(\omega, T) = T^3 \cdot \varphi_1\left(\frac{\omega}{T}\right) = \omega^3 f_1\left(\frac{\omega}{T}\right),$$

где φ, f – универсальные функции. Аналогично можно переписать, в виде

$$u_\lambda = T^5 \varphi_2(\lambda T), \quad u_\lambda = \frac{1}{\lambda^5} f_2(\lambda T).$$

Найдём теперь максимумы u_λ обозначив, за λ_{\max} :

$$\frac{d\varphi_2}{d\lambda} = T \frac{d\varphi_2}{d(\lambda T)} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi_2}{d(\lambda T)} = 0.$$

Таким образом, при всех температурах максимум получается при одном и том же значении λT , а значит выполняется закон смещения Вина:

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} \cdot T &= b_\lambda = \text{const.}, & b_\lambda &= 2.898 \times 10^6 \text{ нм} \cdot \text{К} \\ \nu_{\max}/T &= b_\nu = \text{const.}, & b_\nu &= 5.879 \times 10^{10} \text{ Гц} \cdot \text{К}. \end{aligned}$$

Введем $\beta = hc/\lambda kT$, тогда задача сводится к отысканию минимума:

$$\frac{1}{\beta^5} (e^\beta - 1) \rightarrow \min, \quad \Rightarrow \quad e^{-\beta} + \frac{\beta}{5} - 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad \beta = 4.9651142, \quad b_\lambda = \lambda_{\max} T = \frac{hc}{k\beta}.$$

При поиске β_ω уравнение получится, вида

$$(3 - \beta_\omega) e^{\beta_\omega} - 3 = 0, \quad \beta_\omega = \frac{\hbar \omega}{kT} = \frac{hc}{\lambda kT}, \quad \Rightarrow \quad \beta_\omega = 2.821, \quad \lambda_{\max}^\omega = \frac{hc}{k\beta_\omega} \frac{1}{T}.$$

Стоит заметить, что $\lambda_{\max}^\omega / \lambda_{\max} = \beta / \beta_\omega \approx 1.76$.

Формула Планка. опускаем кусок вывода про стоячие волны

Итак, считая, что на каждую стоячую волну приходится $\mathcal{E} = kT$, то записав энергию равновесного излучения в полости в спектральном интервале $d\omega$ в виде $V u_\omega d\omega$, получаем:

$$u_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \bar{\mathcal{E}} = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \omega^2, \quad (1.1)$$

¹ Интегрируя $u_\omega(\omega, T) = T^3 \cdot \varphi_1\left(\frac{\omega}{T}\right)$, находим, что $u = \int_0^\infty u_\omega d\omega = T^4 \int_0^\infty \varphi(\omega/T) d(\omega/T) = aT^4$.

где равенство со звёздочкой – формула Рэлея-Джинса, верная при малых ω .

Однако, считая, что существует минимальный квант энергии света, по теореме Больцмана, вероятности возбуждения энергетических уровней осциллятора пропорциональны

$$1, e^{-\mathcal{E}_0/kT}, e^{-2\mathcal{E}_0/kT}, \dots, \Rightarrow \bar{\mathcal{E}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\mathcal{E}_0 e^{-n\mathcal{E}_0/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\mathcal{E}_0/kT}} = \mathcal{E}_0 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}},$$

где введено обозначение $x = \mathcal{E}_0/kT$. Вспоминая, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}, \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}_0}{e^{\mathcal{E}_0/kT} - 1}.$$

Подставляя это в формулу (1.1), находим

$$u_{\omega}(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\mathcal{E}_0}{e^{\mathcal{E}_0/kT} - 1}.$$

А теперь внимание, гений Планка предложил подобрать \mathcal{E}_0 так, чтобы выполнялся закон смещения Вина:

$$u_{\omega}(\omega, T) = \omega^3 f_1\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\mathcal{E}_0/\omega}{e^{\mathcal{E}_0/kT} - 1} = f\left(\frac{\omega}{T}\right),$$

но \mathcal{E}_0 – характеристика только самого осциллятора, а значит $\mathcal{E}_0 = \text{const}(T)$, тогда $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0(\omega)$, откуда находим

$$\mathcal{E}_0 = \hbar\omega,$$

где \hbar – постоянная Планка. Подставляя, находим

$$u_{\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \quad u_{\nu} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad u_{\lambda} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}, \quad (1.2)$$

что и называют *формулой Планка*.

2 Фотоэффект. Эффект Комптона.

Фотоэффект. Максимальная кинетическая энергия, которой будут обладать электроны, вылетевшие при фотоэффекте определяется формулой Эйнштейна:

$$\frac{1}{2} m_e v_{\max}^2 = \hbar\omega - A.$$

Эффект Комптона, – изменение длины волны $\lambda' - \lambda$ в длинноволновую сторону спектра при рассеянии излучения. Смещение не зависит от состава тела и длины падающей волны, но пропорционально $\sin^2(\theta/2)$, где θ – угол рассеяния. Рассмотрев упругое столкновение фотона и электрона, можем получить:

$$\frac{\mathcal{E}_{\text{ph}} \mathcal{E}'_{\text{ph}}}{c^2} + \frac{\mathcal{E}'_{\text{ph}} \mathcal{E}_0}{c^2} - \frac{\mathcal{E}_{\text{ph}} \mathcal{E}_0}{c^2} - \mathbf{p}_{\text{ph}} \cdot \mathbf{p}'_{\text{ph}} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \cos \theta = m_e c \left(\frac{1}{p'_{\text{ph}}} - \frac{1}{p_{\text{ph}}} \right),$$

где θ – угол рассеяния, т.е. угол между \mathbf{p}_{ph} и \mathbf{p}'_{ph} . Считая, что $p'_{\text{ph}} = h/\lambda'$ и $p_{\text{ph}} = h/\lambda$, находим

$$\lambda' - \lambda = \lambda_K (1 - \cos \theta) = 2\lambda_K \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \Rightarrow \quad \lambda_K = \frac{h}{m_e c} = 2.43 \cdot 10^{-3} \text{ нм},$$

так и находим комптоновскую длину² для электрона. Также можно встретить приведенную комптоновскую длину для электрона

$$\lambda_K = \frac{\hbar}{m_e c} = \frac{\lambda_K}{2\pi} = 3.86 \cdot 10^{-4} \text{ нм},$$

где электрон предполагается неподвижным. Движущийся электрон может передать свою энергию фотону, а сам остановиться – обратный эффект Комптона. Несмещенная компонента возникает из рассеяния на связанных электронах.

Также можем посмотреть на направление вылета электрона отдачи:

$$\text{tg } \varphi = \frac{\text{ctg}(\theta/2)}{1 + \hbar\omega/(m_e c^2)}.$$

²Формально, λ_K можно рассматривать, как длину волны де Бройля, которой соответствует величина импульса, равная инвариантной длине четырехмерного вектора энергии-импульса в пространстве Минковского.

3 Волны де Бройля. Соотношение неопределенностей.

Гипотеза де Бройля. Волны де Бройля:

$$\Psi = \Psi_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)},$$

для которой верны следующие соотношения:

$$\mathcal{E} = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p}.$$

Также можно получить выражения для фазовой и групповой скорости волн:

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\mathcal{E}}{p} \stackrel{v \approx c}{=} \frac{c^2}{v}, \quad v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\mathcal{E}}{dp} = v, \quad v_{\text{ф}} v_{\text{гр}} = c^2.$$

На всякий случай еще приведем условие Брэгга-Вульфа:

$$2d \sin \varphi = m\lambda,$$

где φ – угол скольжения, d – межплоскостное расстояние, $m \in \mathbb{N}$.

Для волн де Бройля случается дисперсия:

$$\left(\frac{\mathcal{E}}{c}\right)^2 - p^2 = (m_0 c)^2, \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 - (\hbar k)^2 = (m_0 c)^2.$$

Нерелятивистский случай. Все так же

$$\mathcal{E} = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k},$$

но теперь (!) не учитывается $m_0 c^2$, а значит это ω отличается от ω , что была выше на некоторую константу. В частности, теперь

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m}, \quad \omega = \frac{\hbar}{2m} k, \quad v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = \frac{p}{2m} = \frac{v}{2}.$$

Соотношение неопределенностей. Соотношение неопределенностей Гейзенберга:

$$\sqrt{\langle(\Delta q)^2\rangle} \cdot \sqrt{\langle(\Delta p)^2\rangle} \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Вообще, для двух эрмитовых операторов, верно:

$$\sqrt{\langle(\Delta A)^2\rangle} \cdot \sqrt{\langle(\Delta B)^2\rangle} \geq \frac{\hbar}{2} |\langle[A, B]\rangle|.$$

Также верно соотношение неопределенности Гейзенберга для времени и энергии:

$$\Delta t \cdot \Delta \mathcal{E} \geq \hbar.$$

4 Уравнение Шредингера

Уравнение Шредингера. Уравнение Шредингера:

$$i\hbar\partial_t\Psi = \hat{H}\psi, \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U \quad \hat{p} = -i\hbar\nabla.$$

Плотность потока вероятности для частицы:

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi), \quad \text{div } \mathbf{j} + \partial_t\rho = 0,$$

где ρ – плотность вероятности $\psi^*\psi$.

Среднее значение величины, с оператором \hat{A} :

$$\langle A \rangle = \int \psi^* \hat{A} \psi dV.$$

Условие квантования. Условие квантования Бора-Зоммерфельда:

$$\oint p dx = 2\pi\hbar(n + \frac{1}{2}) \approx 2\pi\hbar n,$$

что верно при больших n .

Потенциальные барьеры. Коэффициент пропускания (прозрачности) барьера:

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|j_{\text{out}}|}{|j_{\text{in}}|},$$

где для свободной частицы $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$. Коэффициент отражения, соответственно

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\dot{j}_{\text{back}}|}{|\dot{j}_{\text{in}}|} = 1 - D.$$

Для случая, когда барьер выше энергии частицы:

$$D = D_0 e^{-2\chi l} = D_0 \exp\left(-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)}\right) = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U - E)} dx\right), \quad D_0 \sim 1.$$

Стоит заметить, что коэффициенты прохождения волной потенциала в прямом и обратном направлении совпадают.

Для ступеньки верно, что

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar}(E - U), \quad D = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}.$$

5 Числа

Постоянная Планка:

$$\hbar = 1.054 \times 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с},$$

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

$$\hbar = 1.054 \times 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с},$$

$$h = 6.626 \times 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}$$

$$\hbar = 6.582 \times 10^{-16} \text{ эВ} \cdot \text{с},$$

$$h = 4.136 \times 10^{-15} \text{ эВ} \cdot \text{с}$$

Для электрона:

$$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ кг}, \quad |\vec{e}| = 1.602 \times 10^{-19} \text{ Кл} = 4.803 \times 10^{-10} \text{ ед. СГСЭ}.$$

Масса протона:

$$m_p = 1.673 \times 10^{-27} \text{ кг} = 1.836 m_e.$$

Постоянная Больцмана:

$$k = 1.381 \times 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1} = 8.617 \times 10^{-5} \text{ эВ} \cdot \text{К}^{-1} = 1.381 \times 10^{-16} \text{ эрг} \cdot \text{К}^{-1}.$$

Энергия кванта видимого света:

$$\hbar\nu_{405\text{нм}} \approx 2.3 \text{ эВ}, \quad \hbar\nu_{532\text{нм}} \approx 2.3 \text{ эВ}, \quad \hbar\nu_{671\text{нм}} \approx 1.8 \text{ эВ}.$$