Упражнения

Первое

В общем и целом нужно найти A^* и A^{-1} для заданного A.

а) Оператор инверсии

И так, что же такое оператор инверсии, а это $I\psi(x) = \psi(-x)$. Обратный оператор должен по определению

$$I^{-1}I\psi(x) = \psi(x) \quad \overset{x\mapsto -x}{\Longrightarrow} \quad I^{-1}\psi(x) = \psi(-x) \quad \Rightarrow \quad I^{-1} = I.$$

По определению сопряженного оператора $(\langle\Phi|I\Psi\rangle)^* = \langle\Psi|I^*\Phi\rangle$[1]. Напомним $[I\Psi](x) = \Psi(-x)$, что означает уже для состояний $\langle x|I\Psi\rangle = \langle -x|\Psi\rangle$, с этим знанием

$$\langle\Phi|I\Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle\Phi|x\rangle\langle x|I\Psi\rangle dx = \int_{\mathbb{R}} \langle\Phi|x\rangle\langle -x|\Psi\rangle dx = /x \mapsto -x/ = \int_{\mathbb{R}} \langle\Phi|-x\rangle\langle x|\Psi\rangle dx = \langle I\Phi|\Psi\rangle = \langle\Phi|I^*\Psi\rangle \quad \Rightarrow \quad I^* = I.$$

То есть получили, что оператор инверсии унитарен $II^* = \mathbb{E}$ (единичный оператор).

б) Оператор трансляции

Оператор трансляции работает $\hat{T}_a |x\rangle = |x + a\rangle$ или так $\langle x|T_a\Psi\rangle = \Psi(x + a)$.

Вполне тривиально, что обратный к оператору трансляции это просто T_{-a}. Сопряженный же пойдём искать по той же схеме

$$\langle\Phi|T_a\Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle\Phi|x\rangle\langle x + a|\Psi\rangle dx = /x \mapsto x - a/ = \int_{\mathbb{R}} \langle\Phi|x - a\rangle\langle x|\Psi\rangle dx = \langle T_a^*\Phi|\Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle T_a^*\Phi|x\rangle\langle x|\Psi\rangle dx.$$

Где предпоследние равенство взято просто по определению сопряженного оператора, а последнее неравенство просто по представлению средней величины, тогда видим, что получается следующее

$$\langle x|T_a^*\Phi\rangle = \Phi(x - a) \quad \Rightarrow \quad T_a^* = T_{-a} = T_a^{-1}.$$

Мы вновь получили, что $T_a^*T_a = \mathbb{E}$ – унитарнвй оператор.

Второе

Теперь будем искать собственные значения и собственные числа для операторов, изученных в предыдущей задаче.

Очень удобно совпала, что и оператор трансляции и оператор инверсии являются унитарными. А для унитарного оператора $\hat{A}$ и его собственного состояния $\hat{A}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$ легко показать, что

$$\langle A\lambda|A\lambda\rangle = \langle\lambda|A^\dagger A\lambda\rangle = \langle\lambda|\lambda\rangle,$$

но в то же время, учитывая предыдущую выкладку

$$\langle A\lambda|A\lambda\rangle = \lambda\lambda^*\langle\lambda|\lambda\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\lambda|\lambda\rangle = 1 = \lambda\lambda^*.$$

Тогда имеем $\lambda = e^{i\varphi}$, что приводит к самому виду оператора $\hat{A} = e^{i\hat{\varphi}}$.

а) Оператор инверсии

И так, когда мы поняли, что $\hat{I} = e^{i\hat{\varphi}}$, то уже всё просто

$$I\psi(x) = \psi(-x) = \lambda\psi(x).$$

Угадаем собственные функции, которые удовлетворяют соотношению выше

$$\begin{cases} \psi(x) = \psi(-x) \\ \lambda = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\psi(x) = \psi(-x) \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

б) Оператор трансляции

И так, оператор трансляции у нас тоже в виде $\hat{T}_a = e^{i\hat{\varphi}}$, и оператор фазы записывают в виде $\hat{\varphi} = \frac{1}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}$, где $\hat{\boldsymbol{k}}$ – оператор квазиимпульса.

Собственные же волновые функции для $\hat{T}_a$ выразим в координатном представлении

$$\hat{T}_a |\Psi\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}} |\Psi\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\boldsymbol{r}|T_a|\Psi\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}} |\Psi\rangle.$$

[1] тут можно стать свидетелем замены строчной пси на заглавную

Они удовлетворяют уравнению

$$\Psi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}) = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}}\Psi(r) \qquad \Rightarrow \qquad \Psi(r) = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}}\Phi(r), \quad \Phi(r+a) = \Phi(r).$$

В конце мы представили эти функции в таком периодическом виде, они называются функциями Блоха, и позже мы ещё встретим их в действии.

Собственные значения значит выражаются в виде $\lambda = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}}$.

Шестое

Девятое

Вспомним, что оператор трансляции нам в принципе задавался как

$$\hat{T}_a = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}.$$

Мы в таком случае в этом упражнении имеем просто оператор трансляции слева и обратной трансляции справа

$$e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}U(\boldsymbol{r})e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}} \quad \overset{\cdot\Psi(\boldsymbol{r})}{\Longrightarrow} \quad \hat{T}_\alpha U(\boldsymbol{r})\hat{T}_{-a}\Psi(\boldsymbol{r}) = \hat{T}_\alpha[U(\boldsymbol{r})\Psi(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})] = U(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a})\Psi(r).$$

Получили такую же домноженну на просто пси штуку, а значит есть соответсвие

$$\hat{T}_\alpha U(\boldsymbol{r})\hat{T}_{-a} = U(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}).$$

Т3

а)

Задан потенциал $U(x) = -\frac{\hbar^2}{m}\varkappa_0\delta(x)$, который представляет собой дельта-яму. Прежде чем как всегда решать стационарное уравнение шредингера сделаем замечание, что $E<0$, тогда получим

$$\hat{H}\psi = -|E|\psi, \qquad \varkappa^2 := \frac{2m|E|}{\hbar}.$$

С такой заменой получим вполне красивый диффур второго порядка:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' - \frac{\hbar^2}{m}\varkappa_0\delta(x)\psi + |E|\psi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \psi'' - (\varkappa - 2\varkappa_0\delta(x))\psi = 0.$$

Мы ожидаем непрерывности от волной функции на границах областей, а именно в точке дельта-ямы, то есть одним из граничных условий будет $\psi(-0) = \psi(+0)$.

Потребовав непрерывности ψ, из-за дельта функции, мы получаем разрыв для первой производной

$$\psi'' - (\varkappa - 2\varkappa_0\delta(x))\psi = 0 \qquad \overset{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}}{\Longrightarrow} \qquad \psi'(+0) - \psi'(-0) = -2\varkappa_0\psi(0).$$

Вне ямы будем наблюдать спад по экспоненте, сама же яма – по сути точечна, значит такое же поведение будем ожидать и в связном состоянии, таким образом ищем волновую функцию как

$$\psi = \begin{cases} C_1 e^{-\varkappa x} & , x>0 \\ C_2 e^{\varkappa x} & , x<0 \end{cases}$$

Из непрерывности получим автоматически, что

$$\psi(-0) = \psi(+0) \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = C_1 = C.$$

Разрыв же первой производной позволит нам найти

$$\psi'(+0) - \psi'(-0) = -2\varkappa_0\psi(0) \quad \Rightarrow \quad -2\varkappa_0 C = C(-\varkappa - \varkappa) \quad \Rightarrow \quad \varkappa = \varkappa_0.$$

Таким образом энергия связного состояния:

$$\boxed{E = -\frac{\hbar^2\varkappa_0^2}{2m}}$$

Теперь, осталось проверить нормировку нашей волновой функции

$$\int_{\mathbb{R}}\psi\psi^* dx = 1 \quad \Rightarrow \quad C^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\varkappa_0|x|}dx = \frac{C^2}{\varkappa_0}\int_0^{+\infty} e^{-2\varkappa_0 x}d2\varkappa_0 x = \frac{C^2}{\varkappa_0} = 1 \quad \Rightarrow \quad \varkappa_0 = C^2.$$

Таким образом собирая всё вместе получаем волновую функцию вида:

$$\boxed{\psi(x) = \sqrt{\varkappa_0}e^{-\varkappa_0|x|}}$$

Мы получили волновую функцию в координатном представлении для уровня энергии ноль $\psi(x) = \langle x|0\rangle$. Тогда в импульсном представлении

$$\psi(p) = \langle p|0\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx \langle p|x\rangle\langle x|0\rangle = \Big/ \langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px} \Big/ = \frac{\sqrt{\varkappa_0}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\varkappa_0 x - \frac{i}{\hbar}px} dx = \frac{\sqrt{\varkappa_0}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \frac{2\varkappa_0}{\varkappa_0^2 + (p/\hbar)^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\varkappa_0\hbar)^{3/2}}{(\varkappa_0\hbar)^2 + p^2}.$$

Дальше будет менее широко, честно, а ведь это ещё опущено наше любимое интегрирование по частям.

$$\boxed{\langle 0|\hat{p}|0\rangle = 0}, \qquad \boxed{\langle 0|\hat{x}|0\rangle = 0}.$$

По тому же определению теперь будем получать нечто сложнее чем ноль

$$\langle 0|\hat{x}^2|0\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varkappa e^{-2\varkappa_0|x|} \hat{x}^2 dx = \underbrace{2\varkappa_0}_{\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-2\varkappa_0 x} x^2 dx = \alpha \frac{d^2}{d\alpha^2} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha^2} = \boxed{\frac{1}{2\varkappa_0^2}}.$$

Красиво продифференцировали под знаком интеграла и получили ответ, осталось ещё немного, не зря же мы $\psi(p)$ считали, стоит, кстати, обратить внимание, что теперь именно по α^2 дифференцируем:

$$\langle 0|\hat{p}^2|0\rangle = \int_{\mathbb{R}} dp\ p^2 \frac{2}{\pi} \frac{(\varkappa_0\hbar)^3}{((\hbar\varkappa_0)^2 + p^2)^2} = \frac{2}{\pi}(\varkappa_0\hbar)^3 (-\frac{d}{d\alpha^2}) \int_{\mathbb{R}} \frac{p^2}{\alpha^2 p^2} dp = \frac{2}{\pi}(\varkappa_0\hbar)^3 (-\frac{d}{d\alpha^2}) \frac{2\pi i (i\alpha)^2}{2i\alpha}\Big|_{\alpha=\varkappa_0\hbar} = \boxed{(\varkappa_0\hbar)^2}.$$

Из-за того, что средние от координаты и импульса нулевые – дисперсии совпадают с средними квадратами.

Для интереса теперь ещё посмотрим на соотношение неопределенности

$$\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle = \frac{1}{2\varkappa_0^2}\varkappa_0^2\hbar^2 = \frac{\hbar^2}{2},$$

что больше абсолютного минимума для когерентного состояния осциллятора $= h^2/4$.

б)

И казалось бы всё хорошо, всё изучили в связном состоянии, но теперь в той же задаче мы будем смотреть на области непрерывного спектра и решать задачу о рассеянии волны на потенциале.

Запишем тогда наиболее общую волновую функцию, в которой на нижней строчки стоят (условно) волны распространяющиеся левее ямы, а точнее подошедшая из $-\infty$ с амплитудой C, и ушедшая в $-\infty$ с амплитудой D. Аналогично правее потенциала будет ушедшая в $+\infty$ с амплитудой A и пришедшая из $+\infty$ с амплитудой B.

$$\psi = \begin{cases} Ae^{i\varkappa x} + Be^{-i\varkappa x} & , x > 0 \\ Ce^{i\varkappa x} + De^{-i\varkappa x} & , x < 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \psi = \begin{cases} Ae^{i\varkappa x} & , x > 0 \\ Ce^{i\varkappa x} + De^{-i\varkappa x} & , x < 0 \end{cases}$$

Мы сразу выберем, что волна падала слева, значит $B = 0$, и пусть она это делала с $C = 1$, так как в вопросах рассеивания нас будут интересовать относительные величины.

Тем не менее у нас всё так же должно быть непрерывно для волновой функции и скачкообразно для её производной в нуле:

$$\begin{aligned} A + B &= C + D \\ i\varkappa(A - B) - i\varkappa(C - D) &= -2\varkappa_0\psi(0) \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad i\varkappa[(C - D) - (A - B)] = 2\varkappa_0(A + B)$$

Теперь подставим наши допущения $(B = 0,\ C = 0)$ и выразим каппу

$$\varkappa = 2i\varkappa_0 \frac{A + B}{(A - B) - (C - D)} = 2i\varkappa_0 \frac{A}{A - (1 - D)} = i\varkappa_0 \frac{A}{A - 1}.$$

Тут последнее равенство последовало из непрерывности в нуле: $A + 0 = 1 + D$. И чтобы научиться сравнивать амплитуды возьмём и выразим их все через $\varkappa$ и $\varkappa_0$, что мы уже можем сделать:

$$A = \frac{\varkappa}{\varkappa - i\varkappa_0}, \qquad D = \frac{i\varkappa_0}{\varkappa - i\varkappa_0}.$$

Теперь введем такое понятие как плотность потока вероятности, что, если грубо обобщать, является отголоском уравнения непрерывности из какой-нибудь механики сплошной среды или теории поля. И так по определению

$$j(x) = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi'\psi^* - \psi\psi'^*).$$

А так же коэффициенты прохождения и отражения соответственно

$$T_u = \left|\frac{j_{\text{out}}}{j_{\text{in}}}\right|, \qquad R_u = \left|\frac{j_{\text{back}}}{j_{\text{in}}}\right|.$$

Где подписи *in*, *out*, *back* соответствуют пришедшей, прошедшей, отразившейся волне, а в нашем случае коэффициентам потокам вероятности от волновой функции с коэффициентами $C,\ A,\ D$ соответственно.

$$\begin{aligned}
j_{in} = j[e^{i\varkappa x}] &= -\frac{i\hbar}{2m}(i\varkappa + i\varkappa) &&= \frac{\hbar\varkappa}{m} \\
j_{out} = j[Ae^{i\varkappa x}] &= -\frac{i\hbar}{2m}|A|^2(i\varkappa + i\varkappa) &&= \frac{\hbar\varkappa}{m\left(\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_0}\right)^2 + 1\right)} \\
j_{back} = j[De^{-i\varkappa x}] &= -\frac{i\hbar}{2m}|D|^2(-i\varkappa - i\varkappa) &&= -\frac{\hbar\varkappa}{m\left(\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_0}\right)^2 + 1\right)}
\end{aligned}$$

И тогда

$$\boxed{T = \left|\frac{j_{\text{out}}}{j_{\text{in}}}\right| = \frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 + \varkappa_0^2}} \qquad \boxed{R = \left|\frac{j_{\text{back}}}{j_{\text{in}}}\right| = \frac{\varkappa_0^2}{\varkappa^2 + \varkappa_0^2}}.$$

в)

Честно, трудно понять, что автор задания имеет в виду под вероятностью "ионизации". Самое правдоподобное, что нам удалось придумать — вылет электрона из ямы при таком её резком изменении, что по аналогии с отрыванием электрона от атома её ионизует. Однако посчитать что-то близкое по ответу к Белоусову так и не вышло, а потому по определению вероятность "ионизации":

$$W = 1 - \frac{4\varkappa_0\varkappa_1}{(\varkappa_0 + \varkappa_1)^2} = \left(\frac{\varkappa_0 - \varkappa_1}{\varkappa_0 + \varkappa_1}\right)^2.$$

T4

б) потенциальная яма

И так, зададим потенциальную яму и эволюцию нашей системы

$$U(x) = \begin{cases} -U_0 \ , \ |x| < a/2 \\ \quad 0 \ , \ |x| > a/2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} &\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + (U_0 + E)\psi(x) = 0 \ , \quad && |x| < a/2 \\ &\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + E\psi(x) = 0 \ , && |x| > a/2 \end{aligned}$$

Мы смотрим на энергию в несвязном состоянии, то есть $E > 0$, получаем волновую функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 \cdot e^{ik_1x} + Ae^{-ik_1x} \ , \ x < a/2 \\ \ Be^{ik_2x} + Ce^{-ik_2x} \ , \ |x| < a/2 \\ De^{ik_1x} + 0 \cdot e^{-ik_1x} \ , \ x > a/2 \end{cases} \qquad k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \qquad k_2^2 = \frac{2m(E+U_0)^2}{\hbar^2}.$$

Где аналогично Т3, мы выбираем волну падающую из $-\infty$ с единичной амплитудой, и соответсвенно из $+\infty$ к нам ничего не приходит.

Теперь на каждой границе нам нужно взять граничные условия

$$\begin{cases} \psi(\frac{a}{2} - \varepsilon) = \psi(\frac{a}{2} + \varepsilon) \\ \psi(-\frac{a}{2} - \varepsilon) = \psi(-\frac{a}{2} + \varepsilon) \\ \psi'(\frac{a}{2} - \varepsilon) = \psi'(\frac{a}{2} + \varepsilon) \\ \psi'(-\frac{a}{2} - \varepsilon) = \psi'(-\frac{a}{2} + \varepsilon) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} Be^{ik_2a/2} + Ce^{-ik_2a/2} = De^{ik_1a/2} \\ e^{-ik_1a/2} + Ae^{ik_1a/2} = Be^{ik_2a/2} + Ce^{ik_2a/2} \\ k_1e^{-ik_1a/2} - k_1Ae^{ik_1a/2} = k_2Be^{-ik_2a/2} - k_2Ce^{ik_2a/2} \\ k_1De^{ik_1a/2} = k_2Be^{ik_2a/2} - k_2Ce^{-iak_2a/2} \end{cases}$$

В этот раз мы покажаем какие-то алгебраические выкладки, которые ведут к свету, но на самом деле *Wolfram Mathematica* нам в помощь. Удобно заменить экспоненты в сетпенях k_1 и k_2 на соответсвующие α_i, тогда какимнибудь Гауссом, система решиться. Здесь приведем просто, что досчитать это реально

$$\begin{cases} B\alpha_2 + \dfrac{C}{\alpha_2} = D\alpha_1 \\ \dfrac{1}{\alpha_1} + A\alpha_1 = \dfrac{B}{\alpha_2} + C\alpha_2 \\ \dfrac{k_1}{\alpha_1} - Ak_1\alpha_1 = \dfrac{k_2 B}{\alpha_2} - k_2 C\alpha_2 \\ D\alpha_1 k_1 = B\alpha_2 k_2 - \dfrac{Ck_2}{\alpha_2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \ldots \text{(мы в вас верим)}$$

Куда полезней, сейчас понять, что если помучиться и решить данную систему, то мы по сути и найдём ответ на задачу, ведь

$$j_{\text{in}}[e^{ik_1 x}] = -\frac{i\hbar}{2m}(ik_1 + ik_1) = \frac{\hbar k_1}{m}, \qquad j_{\text{out}}[De^{ik_1 x}] = |D|^2 \frac{\hbar k_1}{m}, \qquad j_{\text{back}}[Ae^{-ik_1 x}] = |A|^2 \frac{-\hbar k_1}{m},$$

То есть in – падающая волна, амплитуду которой мы выбрали единицей, out – ушедшая в $+\infty$ с амплитудой D и *back* отразившаяся обратно в $-\infty$.

Поверим, что коэффициенты из той системы получаются и соответственно

$$R = \left|\frac{j_{\text{back}}}{j_{\text{in}}}\right| = |A|^2 = \frac{(k_1^2 - k_2^2)^2 \sin k_1 a}{4k_2^2 k_1^2 + (k_1^2 + k_2^2)^2 \sin^2 k_1 a},$$

$$T = \left|\frac{j_{\text{out}}}{j_{\text{in}}}\right| = |D|^2 = \frac{4k_1^2 k_2^2}{4k_1^2 k_2^2 + (k_1^2 - k_2^2)^2 \sin^2 k_1 a}.$$

а) потенциальный барьер

Всё остаётся почти таким же, только сейчас проследим за сменой знаков кое-где

$$U(x) = \begin{cases} U_0 \ , \ |x| < a/2 \\ \ 0 \ , \ |x| > a/2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} &\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + (E - U_0)\psi(x) = 0 \ , \quad && |x| < a/2 \\ &\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + E\psi(x) = 0 \ , && |x| > a/2 \end{aligned}$$

Теперь если аналогично предыдущему пункту начать решать задачу, то заметим, что нужно лишь заменить одну! переменную $k_1 \mapsto \varkappa_1 = \frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E)$. При чем, $0 < E < U_0$. И тогда по аналогии $k_1 = i\varkappa_1$ получаем:

$$R = \frac{(\varkappa_1^2 + k_2^2)^2 sh^2 \varkappa_1 a}{4\varkappa_1^2 k_2^2 + (\varkappa_1 + k_2^2)^2 sh^2 \varkappa_1 a}, \qquad T = \frac{4\varkappa_1^2 k_2^2}{4\varkappa_1^2 k_2^2 + (\varkappa_1^2 + k_2^2)^2 sh^2 \varkappa_1 a}.$$

И главное что в прошлом пункте, что сейчас мы получаем сумму $R + T = 1$ что и ожидается.

T6

Возьмём операторы импульса $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$ и координаты $\hat{x}$. Сразу найдём их средние и коммутатор

$$\bar{x} = \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle, \qquad \bar{p} = \langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle, \qquad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\mathbb{E}.$$

Если сейчас ввести такие величины, у которых ещё и оказывается коммутатор тот же

$$\hat{\varkappa} = \hat{x} - \bar{x}, \qquad \hat{\varpi} = \hat{p} - \bar{p} \qquad [\hat{\varkappa}, \hat{\varpi}] = i\hbar\mathbb{E}.$$

Это ещё что[2], самое главное ещё и что помимо $\bar{\varpi} = \bar{\varkappa} = 0$, так ещё

$$(\Delta\varkappa)^2 = \langle\psi|(\hat{\varkappa} - \bar{\varkappa})|\psi\rangle = \langle\psi|(\hat{x} - \bar{x})|\psi\rangle = (\Delta x)^2, \qquad (\Delta\varpi)^2 = (\Delta p)^2.$$

Теперь введем функции по методу Вейля

$$|\Phi\rangle = (\hat{\varkappa} - i\gamma\hat{\varpi})\,|\Psi\rangle\,.$$

И так как по определению нормы $\langle\Phi|\Phi\rangle \geqslant 0$ получим

$$\langle\psi|(\hat{\varkappa} - i\gamma\hat{\varpi})^\dagger(\hat{\varkappa} - i\gamma\hat{\varpi})|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{\varkappa}^2 - i\gamma(\hat{\varkappa}\hat{\varpi} - \hat{\varpi}\hat{\varkappa}) + \gamma^2\hat{\varpi}^2|\psi\rangle \geqslant 0.$$

А значит неотрицательной должно быть и выражение

$$(\Delta x)^2 + \hbar\gamma\langle\mathbb{E}\rangle + \gamma^2(\Delta p)^2) \geqslant 0 \qquad \Rightarrow \qquad \hbar^2 - 4(\Delta p)^2(\Delta x)^2 \leqslant 0,$$

[2]это *varpi*, классно выглядит же

что получилось просто из условия на дискриминант для квадратного уравнения на γ, тогда минимум достигнется просто при нулевом дискриминанте

$$(\Delta p)^2(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{4}, \qquad \gamma = -2\frac{(\Delta x)^2}{\hbar}.$$

Таким образом и нашли волновую функцию, которая удовлетворяет минимизации соотношения неопределенности, что мы четко и показали

$$|\Phi\rangle = [\hat{x} - \bar{x} + i\frac{2}{\hbar}(\Delta x)^2(\hat{p} - \bar{p})]\,|\Psi\rangle\,.$$

T10

В нашем гармоническом осцилляторе посмотрим на коммутатор оператора уничтожения с гамильтонианом

$$[\hat{H}, \hat{a}] = [\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right), \hat{a}] = \hbar\omega[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}] = -\hbar\omega[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\hat{a} = -\hbar\omega\hat{a}.$$

Как видим, этот коммутатор не обращается в нуль, если собственное значение $\hat{a}$ – не ноль. То есть энергия такого состояния $|\alpha\rangle$ флуктуирует вокруг своего среднего значения[3]. Разложим это состояния по базису стационарных состояний

$$|\alpha\rangle = \sum_n C_n(\alpha)\,|n\rangle\,.$$

Найдём C_n из уравнения на собственные значения

$$C_n(\alpha) = \langle n|\alpha\rangle = \frac{1}{\alpha}\langle n|\hat{a}\alpha\rangle = \frac{1}{\alpha}\langle\hat{a}^\dagger n|\alpha\rangle$$

Сопряженный оператор уничтожения работает как

$$\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,, \qquad (\hat{a}^\dagger\,|n\rangle)^\dagger = \langle n|\,\hat{a} = \left\langle\hat{a}^\dagger n\right|.$$

То есть получили рекурентную формулу с помощью которой C_n уже вычисляется

$$\alpha C_n(\alpha) = \sqrt{n+1}\langle n+1|\alpha\rangle = \sqrt{n+1}C_{n+1}(\alpha) \qquad \Rightarrow \qquad C_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}C_0(\alpha).$$

Теперь посмотрим на вид нашего разложения

$$|\alpha\rangle = C_0(\alpha)\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle = C_0(\alpha)\sum_n \frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle = C_0(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\,|0\rangle\,.$$

Теперь по условию единично нормировки находим $C_0(\alpha)$ и ликуем

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = |C_0(\alpha)|^2\langle 0|e^{\alpha^*\hat{a}}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle = |C_0(\alpha)|^2\sum_n\frac{(\alpha^*\alpha)^n}{n!} = 1,$$

и тут под суммой снова удобный ряд

$$|C_0(\alpha)|^2 e^{|\alpha|^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad C_0(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2}.$$

Окончательно получили

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\,|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_n\frac{\alpha^2}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle\,.$$

Теперь мы готовы искать распределение по числу квантов, ведь вероятность, что в $|\alpha\rangle$ найдётся n квантов это

$$P_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}e^{-|\alpha|^2} = \frac{\langle N\rangle^n}{n!}e^{-\langle N\rangle}.$$

Получили распределение Пуассона для числа квантов со средним значением $\langle N\rangle$.

[3]Эта энергия определена как $\langle E\rangle = \hbar\omega(\langle N\rangle + 1/2)$. А вот $\langle N\rangle = |\alpha|^2$