

# ДОПОЛНЕНИЕ К ВОПРОСУ ПО ВЫБОРУ « НАСЫЩЕННАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ $^7\text{Li}$ »

---

Авторы заметок: Хоружий Кирилл

От: 23 января 2022 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Вывод уравнения насыщенной спектроскопии</b>	<b>2</b>
1.1	Оптическая глубина . . . . .	2
1.2	Скоростные уравнения . . . . .	2
1.3	Итоговая картина для двухуровневой системы . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Численные теоретические и экспериментальные оценки</b>	<b>4</b>
2.1	Теоретическая оценка значения $\mathcal{I}$ . . . . .	4
2.2	Количественная картинка . . . . .	4
2.3	Оценка контрастности по наблюдаемой глубине доплеровского провала . . . . .	5
2.4	Сравнение теоретической и экспериментальной оценки $\mathcal{I}$ . . . . .	5

# 1 Вывод уравнения насыщенной спектроскопии

## 1.1 Оптическая глубина

Интенсивность слабого одиночного луча, проходящего через ячейку описывается законом Бэра:

$$dI/dx = -\alpha I, \quad \alpha = \alpha(\nu).$$

В хорошем приближении<sup>1</sup>  $\alpha \neq \alpha(x)$ . Введем оптическую длину  $\tau(\nu) = l\alpha(\nu)$ , тогда

$$I_{\text{out}} = I_{\text{in}} e^{-\alpha(\nu)l} = I_{\text{in}} e^{-\tau(\nu)}.$$

Вклад от группы атомов  $(\nu, \nu + d\nu)$  в  $\tau(\nu)$  можем быть записан, как

$$d\alpha(\nu, \nu) = \sigma(\nu, \nu) dn(\nu), \quad \Rightarrow \quad d\tau(\nu, \nu) = l\sigma(\nu, \nu) dn(\nu).$$

Коэффициент поглощения  $\sigma(\nu, \nu)$  имеет Лоренцовский профиль с натуральной шириной  $\Gamma$  и смещенной по Доплеру резонансной частотой

$$\sigma(\nu, \nu) = \sigma_0 \frac{\Gamma^2/4}{(\nu - \nu_0(1 - v/c))^2 + \Gamma^2/4}, \quad (1)$$

где  $\sigma_0$  – резонансное сечение поглощения<sup>2</sup>, зависящее от вида дипольного перехода и поляризации падающего света [1⇒4].

Часть атомов  $dn(\nu)$  с определенной скорости можем найти из распределения Больцмана

$$dn(\nu) = n_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv,$$

где  $n_0 = N/V$  – концентрация атомов в ячейке.

Собирая все вместе (?) приходим к выражению

$$d\tau(\nu, \nu) = \frac{2}{\pi} \frac{\tau_0}{\sigma_0 \Gamma} \frac{\nu_0}{c} \sigma(\nu, \nu) \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv, \quad (2)$$

где  $\tau_0$  – соответствующая нормировка такая, что для резонанса  $\tau_0 = \int_v d\tau(\nu_0, \nu)$ .

Для насыщенной спектроскопии нужно учесть эффект от дополнительного насыщающего лазерного луча. Из-за него значительная часть атомов в ячейке будут в возбужденном состоянии. Так как атомы могут поглощать свет только когда они в невозбужденном состоянии, к (2) добавим фактор  $(N_g - N_e)/N$ , описывающей разницу между количеством атомов в возбужденном состоянии  $N_e$  и невозбужденном  $N_g$ .

## 1.2 Скоростные уравнения

Населенность в двух состояния описывается скоростными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{N}_g &= \Gamma N_e - \sigma\Phi(N_g - N_e), \\ \dot{N}_e &= -\Gamma N_e + \sigma\Phi(N_g - N_e), \end{aligned}$$

где первое слагаемое отвечает спонтанной эмиссии, и второе насыщению лазером.  $\Phi = I/h\nu$  – насыщающий поток фотонов. Учитывая, что  $N_g + N_e = N = \text{const}$ , можем получить диффур первого порядка на  $N_e$ :

$$\dot{N}_e = -(\Gamma + 2\sigma\Phi)N_e + \sigma\Phi N.$$

Решение можем быть найдено в виде

$$N_e(t) = \left[ N_e(0) - \frac{N\sigma\Phi}{\Gamma + 2\sigma\Phi} \right] e^{-(\Gamma + 2\sigma\Phi)t} + \frac{N\sigma\Phi}{\Gamma + 2\sigma\Phi}.$$

Заметим, что при  $\Phi = 0$ :

$$N_e(t) = N_e(0)e^{-\Gamma t},$$

а в случае слабого насыщающего луча  $\sigma\Phi \ll \Gamma$ , и изначальной популяции в невозбужденном состоянии,

$$N_e(t) = \frac{N\sigma\Phi}{\Gamma} (1 - e^{-\Gamma t}),$$

достигающий стационарного состояния после  $\Gamma^{-1}$  с  $N_e = N\sigma\Phi/\Gamma \ll N$ . Наконец, при  $\sigma\Phi \gg \Gamma$ , получаем насыщенный переход

$$N_e(t) = [N_e(0) - N/2] e^{-2\sigma\Phi t} + N/2 \rightarrow N/2.$$

Под насыщением понимаем, что  $N_e = N/2$ , большие значения по понятным причинам невозможны  $\forall \Phi$ , по крайней мере для двухуровневых систем.

<sup>1</sup>Для слабого луча [1].

<sup>2</sup>[1], problem 1:  $\sigma_0 \sim n$  атомов в ячейке.

Также наблюдается увеличение «мощности» ширины линии перехода, в пределе  $(\Gamma + 2\sigma\Phi)t \gg 1$ , получаем

$$\frac{N_e(\infty)}{N} = \frac{\sigma\Phi}{\Gamma + 2\sigma\Phi}.$$

Вспоминая уравнение (1) с  $\Delta\nu = \nu - \nu_0(1 + v/c)$  (минус, т.к. доплеровский сдвиг в другую сторону), можем переписать уравнение в виде

$$\frac{N_e(\infty)}{N} = \frac{\sigma_0\Phi\Gamma/4}{\Delta\nu^2 + \Gamma^2/4 + \sigma_0\Phi\Gamma/2}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{N_e}{N} = \frac{s/2}{1 + s + 4\Delta\nu^2/\Gamma^2}}$$

, где ввели параметр насыщения  $s = \Phi/\Phi_{\text{sat}}$ ,  $\Phi_{\text{sat}} = \Gamma/2\sigma_0$ .

Получился лоренцев профиль с уширением, полуширина (FWHM) которого зависит от  $\Phi$ :

$$\text{FWHM} = \frac{\Gamma}{2} \sqrt{1 + \frac{2\sigma_0\Phi}{\Gamma}}.$$

Интенсивность насыщения  $I_{\text{sat}}$  может быть выражена, как  $[1 \Rightarrow 4]$

$$I_{\text{sat}} = 2\pi^2\hbar c\Gamma/3\lambda^3.$$

Например, для  $^{87}\text{Rb}$  с натуральной шириной  $\Gamma = 6$  МГц,  $I_{\text{sat}} = 1.65$  мВт/см<sup>2</sup>.

### 1.3 Итоговая картина для двухуровневой системы

Собираем всё вместе, в зависимости от мощности насыщающего лазера некоторое количество атомов будет находиться в возбужденном состоянии:

$$\frac{N_e}{N} = \frac{s/2}{1 + s + 4(\Delta_+\nu)^2/\Gamma^2}, \quad \frac{\sigma(\nu, v)}{\sigma_0} = \frac{1}{4(\Delta_-\nu)^2/\Gamma^2 + 1}, \quad \Delta_{\pm}\nu = \nu - \nu_0(1 \pm v/c).$$

Тогда

$$\frac{I_{\text{out}}}{I_{\text{int}}} = \exp \left[ -\kappa \int_{-\infty}^{\infty} \left( 1 - 2 \frac{N_e(\nu, v)}{N} \right) \frac{\sigma(\nu, v)}{\sigma_0} \exp \left( -\frac{mv^2}{2k_B T} \right) dv \right], \quad (3)$$

где

$$s = \Phi/\Phi_{\text{sat}}, \quad \Phi_{\text{sat}} = \Gamma/2\sigma_0, \quad \kappa = \sigma_0 n l \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}},$$

можно подставить, но пока не нужно:

$$\frac{I_{\text{out}}}{I_{\text{int}}} = \exp \left[ -\kappa \int_{-\infty}^{\infty} \left( 1 - \frac{s}{1 + s + 4(\Delta_+\nu)^2/\Gamma^2} \right) \frac{1}{4(\Delta_-\nu)^2/\Gamma^2 + 1} \exp \left( -\frac{mv^2}{2k_B T} \right) dv \right] = \exp [-\kappa F(s, \nu)]. \quad (4)$$

## 2 Численные теоретические и экспериментальные оценки

### 2.1 Теоретическая оценка значения $\varkappa$

Оценим значение параметра  $\varkappa$ :

$$\varkappa = \sigma_0 n l \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}},$$

или, можем переписать в виде

$$\varkappa = \frac{\sigma_0 n l}{v_0 \sqrt{\pi}}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}.$$

**Концентрация.** Концентрацию атомов лития  ${}^7\text{Li}$  можем найти, зная зависимость [2] давления насыщенных паров  $P$  от температуры  $T$ :

$$P[T] = 133.32 \times \exp \left[ \ln 10 \left( 10.3354 - \frac{8345.57}{T} - 8.84 \times 10^{-5} T - 0.68106 \log_{10}[T] \right) \right].$$

Тогда, например, при температуре  $T = 300 + 273$  К,

$$P[573 \text{ К}] = 9.510^{-5} \text{ Па}, \quad \Rightarrow \quad n[573 \text{ К}] = \frac{P}{k_B T} = 1.2 \times 10^{-16} \text{ м}^{-3}.$$

**Сечение.** Сечение рассеяние для двухуровневой системы ( $\lambda = 671$  нм)

$$\sigma_0^{\text{теор}} = \frac{3\pi}{8} \lambda^2 \approx 5.3 \times 10^{-13} \text{ м}^2.$$

Итого, для  $l = 10$  см, при температуре в  $300$  °С, для  ${}^7\text{Li}$  находим

$$\varkappa = 0.31 \frac{1}{\text{м/с}}, \quad v_0 = 1.2 \times 10^3 \text{ м/с}, \quad \sigma_0 n l = 6.4 \times 10^2.$$

### 2.2 Количественная картинка

Подставляя найденное в предыдущем разделе значение  $\varkappa$  в формулу (4), получаем общий вид спектроскопии: рис. 1.

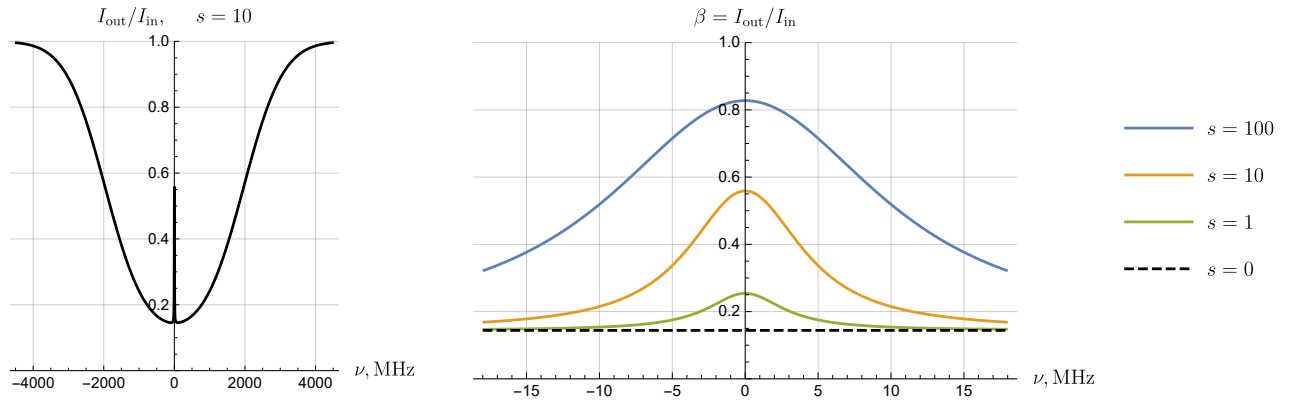


Рис. 1: Оценка  $\beta$  вблизи резонанса при температуре в  $300$  °С для  $\sigma_0^{\text{теор}}$  и  $l = 10$  см

Заметим, что указанные параметры системы приводят к значению  $\beta$  в резонансе при  $s = 0$ :

$$\beta[s = 0, \nu = \nu_0] = e^{-\varkappa F(0)} = 0.14,$$

что похоже на правду (см. раздел ...).

### 2.3 Оценка контрастности по наблюдаемой глубине доплеровского провала

В первом приближении, не зная значения  $\varkappa$ , можем оценить его, зная глубину доплеровского провала в резонансе  $\nu_0$ . Введем для удобства приведенную интенсивность  $\beta \stackrel{\text{def}}{=} I_{\text{out}}/I_{\text{in}}$ , далее в этом разделе всегда полагаем  $\nu = \nu_0$ , тогда

$$\beta(s=0) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_0 = e^{-\varkappa F(0)}, \quad \Rightarrow \quad \varkappa = \frac{\ln 1/\beta_0}{F(0)},$$

где  $1 - \beta_0$  – глубина доплеровского провала.

Тогда контрастность спектроскопии  $K$ , определенную, как отношение высоты лэмбского пика к глубине доплеровского провала, можем найти, как

$$K(s) = \frac{e^{-\varkappa F(s)} - e^{-\varkappa F(0)}}{1 - e^{-\varkappa F(0)}} = \frac{\beta_0^{F(s)/F(0)} - \beta_0}{1 - \beta_0}.$$

Ниже на рисунке приведены значения контрастности  $K(s)$  для различных  $\beta$ .

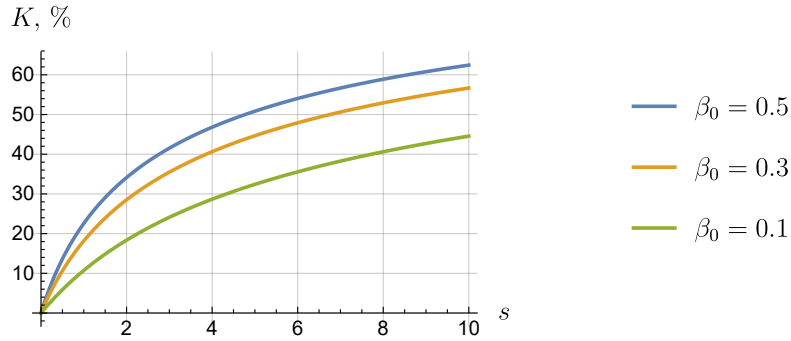


Рис. 2: Оценка контрастности при различных значениях  $\beta$ , как функция от  $s$

### 2.4 Сравнение теоретической и экспериментальной оценки $\varkappa$

Пока что, в контексте выбранной модели, хуже всего можем оценить  $l$ , поэтому будем сравнивать теоретическую и экспериментальную оценку  $\varkappa$  по значению  $l$  при котором они бы сошлись:

$$l = \underbrace{\frac{\log 1/\beta_0}{F[0, \nu_0]}}_{\varkappa} \underbrace{\frac{\sqrt{\pi}}{n\sigma_0} \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}}_{v_0}.$$

Считая  $\sigma_0 = \sigma_0^{\text{теор}}$ , построим зависимость  $l[\beta]$ , рис. 3.

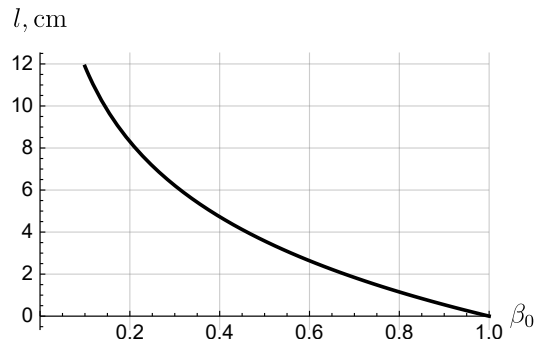


Рис. 3: Оценка длины взаимодействия лазера с литием при температуре в 300 °С

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod [1] tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, [2] quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo [3] consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non [4] proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

## Список литературы

- [1] Thomas Rieger and Thomas Volz. Doppler-free saturation spectroscopy.
- [2] В. Б. Махалов. *Приготовление и диагностика двумерного ферми-газа атомов*. PhD thesis, ИПФ РАН, 2014.
- [3] Adra Victoria Carr. Hyperfine studies of lithium vapor using saturated absorption spectroscopy, 2007.
- [4] Wolfgang Demtröder. *Laser Spectroscopy*, chapter 9, 10. Springer, 3 edition, 2003.