Заметки семинаров по курсу «Уравнения математической физики»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *23 октября 2021 г.*

Содержание

1 Семинар от 25.09.21 (Фурье и Лаплас)

Про Фурье. Как раньше нашли

$$L(\partial_t)G(t) = \delta(t), \quad \Rightarrow \quad \hat{x}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} x(t)\, dt, \quad x(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} \hat{x}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Для этого должно выполняться

$$\int |x(t)|\, dd < +\infty.$$

Например, для $\partial_t + \gamma$:

$$(\partial_t + \gamma)G(t) = \delta(t), \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\ldots} e^{-i\omega t}\, dt = x(t)e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}, \quad \Rightarrow \quad (i\omega + \gamma)\hat{G}(\omega) = 1, \quad \Rightarrow \quad \hat{G}(\omega) = \frac{1}{i\omega + \gamma}.$$

Так приходим к уравнению

$$G(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\gamma} \frac{d\omega}{2\pi} = \{e^{-\gamma t}, \quad t > 00, \quad t < 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{G}(\omega) = \theta(t)e^{-|t|}.$$

Однако, при $\hat{L} = \partial_t - \gamma$ мы бы получили

$$G_A(t) = \theta(-t)e^{\gamma t},$$

хотя вообще должно быть (если посчитать через неопределенные коэффициенты)

$$G_R(t) = \theta(t)e^{\gamma t},$$

которая растёт.

В методе с Фурье будут получаться функции Грина затухающие, но, возможно, без причинности. В методе неопределенных коэффициентов исходим из причинности, но может быть рост $\sim e^{\gamma t}$.

Кроме того, в Фурье всегда предполагается $x(t \to -\infty) = 0$ и $x(t \to +\infty) = 0$. Также может случиться

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2)G(t) = \delta(t), \quad \Rightarrow \quad \hat{G}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2},$$

с особенностями на вещественной оси, что можно решить, сместив полюса в $\mathbb{C}$.

Свёртка. Рассмотрим уравнение

$$L(\partial_t)x(t) = f(t), \quad L(\partial_t)G(t) = \delta(t).$$

Фурье переводит

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_x^n x(t) e^{-i\omega t}\, dt = (i\omega)^n \hat{x}(\omega).$$

Тогда

$$L(i\omega)\hat{x}(\omega) = \hat{f}(\omega), \quad L(i\omega)\hat{G}(\omega) = 1, \quad \Rightarrow \quad \hat{G}(\omega) = \frac{1}{L(i\omega)}.$$

Также нашли, что

$$\hat{x}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{L(i\omega)} = \hat{f}(\omega)\hat{G}(\omega), \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)f(s)\, ds.$$

Преобразование Лапласа. Пусть есть некоторое преобразование

$$\tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt,$$

где подразумевается, что $\operatorname{Re} p \geqslant 0$ и, вообще, в Фурье можно $p \in \mathbb{C}$.

Пусть $p = i\omega$, где $\omega \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\tilde{f}(i\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t)\, dt = \hat{f}(\omega), \quad \Rightarrow \quad f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(i\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} \tilde{f}(p) \frac{dp}{2\pi}.$$

В вычислениях выше мы предполагали, что $f(t \to \infty) = 0$.

Обойдём это, пусть $|f(t)| < Me^{st}$, при $s > 0$. Возьмём $p_0 > s$, тогда

$$\tilde{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-p_0 t} e^{-(p-p_0)t} f(t)\, dt = \tilde{g}(p - p_0),$$

где вводе $g(t) = e^{-ip_0 t} f(t)$, которая уже убывает на бесконечности. Обратно:

$$g(t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \tilde{g}(p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi} = \int_{p_0 - i\omega}^{p_0 + i\omega} \tilde{g}(p - p_0) e^{-p_0 t} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}.$$

Так пришли к форме обращения
$$f(t)=\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega}\tilde{f}(p)\frac{dp}{2\pi i},\qquad \tilde{f}(p)=\int_{\mathbb{R}}e^{-p_0t}e^{-(p-p_0)t}f(t)\,dt=\tilde{g}(p-p_0),\tag{1}$$
где $g(t)=e^{-ip_0t}f(t)$.

Забавный факт, из леммы Жордана: при $t<0$ $f(t<0)=9$, по замыканию дуги по часовой стрелке (вправо). Выбирая p_0 так, чтобы все особенности лежали левее p_0, можем получать причинные функции.

Производная. Найдём преобразование Лапласа для $\partial_t f(t)$:
$$\int_0^\infty \frac{df}{dt}e^{-pt}\,dt=fe^{-pt}\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt=p\tilde{f}(p)-f(+0).$$
Но, для функции Грина $L(\partial_t)G(t)=\delta(t)$, тогда
$$L(\partial_t)G_\varepsilon(t)=\delta(t-\varepsilon),\qquad G_\varepsilon(t)=G(t-\varepsilon),\quad\Rightarrow\quad G_\varepsilon(0)=0,$$
где $G_\varepsilon\to G(t)$ при $\varepsilon\to0$.

Преобразуем[1] по Лапласу уравнения выше
$$L(p)G(p)=e^{p\varepsilon}=1,\quad\Rightarrow\quad G_\varepsilon(p)=\frac{1}{L(p)},\quad\overset{\varepsilon\to0}{\Rightarrow}\quad G(p)=\frac{1}{L(p)}.$$
Так получаем
$$G(t)=\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega}\frac{e^{pt}}{\tilde{L}(p)}\frac{dp}{2\pi i},\tag{2}$$
где p_0 правее всех особенностей.

Пример. Рассмотрим $L=\partial_t+\gamma$, тогда
$$(p+\gamma)G(p)=1,\quad\Rightarrow\quad G(p)=\frac{1}{p+\gamma},\quad\Rightarrow\quad G(t)=\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{pt}}{p+\gamma}\frac{dp}{2\pi i}=\theta(t)e^{-\gamma t}.$$
Аналогично, пусть $L=\partial_t^2+\omega^2$, тогда $LG(t)=\delta(t)$, и
$$G(p)=\frac{1}{p^2+\omega^2},\quad\Rightarrow\quad G(t)=\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega}\frac{e^{pt}}{p^2+\omega^2}\frac{dp}{2\pi i}=\begin{cases}0, & t<0\\ \ldots, & t>0\end{cases}=\theta(t)\left(\frac{e^{i\omega t}}{2i\omega}+\frac{e^{-i\omega t}}{-2i\omega}\right)=\theta(t)\frac{\sin\omega t}{\omega}.$$

В общем виде, пусть $L(\partial_t)G(t)=\delta(t)$, тогда
$$L(p)G(p)=1,\quad\Rightarrow\quad G(p)\frac{1}{L(p)},\quad\Rightarrow\quad G(t)=\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega}\frac{e^{pt}}{L(p)}\frac{dp}{2\pi i}.$$

Поговорим про свёртку:
$$Lx=f,\quad\Rightarrow\quad L(p)x(p)=f(p),\quad L(p)G(p)=1,\quad\Rightarrow\quad G(p)=\frac{1}{L(p)}.$$
Тогда получается
$$x(p)=\frac{f(p)}{L(p)}=f(p)G(p),\quad\Rightarrow\quad x(t)=\int_0^t G(t-s)f(s)\,ds.$$

Уравнение Вольтера. Иногда бывает уравнения на $x(s)$ вида
$$f(t)=\int_0^t x(s)K(t-s)\,ds.\tag{3}$$
Через преобразрвание Лапласа, находим
$$f(p)=x(p)K(p),\quad\Rightarrow\quad x(p)=\frac{f(p)}{K(p)}.\tag{4}$$
В общем виде тогда находим
$$x(t)=\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega}\frac{f(p)}{K(p)}e^{pt}\frac{dp}{2\pi i}.$$
Кстати, забавный факт:
$$\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega}1\cdot e^{pt}\frac{dp}{2\pi i}=e^{p_0t}\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{pt}\frac{dp}{2\pi i}=e^{p_0t}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}=\delta(t),\tag{5}$$
то есть преобразование Лапласа от константы – дельта функция.

[1] Здесь и далее $f(t)$ – функция, $f(\omega)=\hat{f}(\omega)$ – Фурье образ, $f(p)=\tilde{f}(p)$ – преобразование Лапласа.

Рассмотрим, например

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{p+1-1}{p+1} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} - \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{pt}}{p+1} \frac{dp}{2\pi} = \delta(t) - \theta(t) e^{-t}.$$

Также верно, что

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} p e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \delta'(t).$$

Действительно,

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} \right) = \frac{d}{dt} \delta(t) = \delta'(t).$$

Важно, что можно делать функции маленькими

$$\int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\omega} f(p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\omega} \frac{f(p)}{p^n} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}. \tag{6}$$

Неоднородная релаксация. Рассмотрим уравнение

$$(\partial_t + \gamma(t)) G(t,s) = \delta(t-s), \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) f(s)\, ds,$$

где продолжаем требовать причинность $G(t, s > t) = 0$. Для начала, рассмотрим $t > s$, тогда

$$(\partial_t + \gamma(t)) G(t) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dG}{G} = -\gamma(t)\, dt, \quad \Rightarrow \quad G(t,s) = A(s) \exp\left(- \int_{t_0}^{t} \gamma(t')\, dt' \right).$$

Также записываем граничные условия:

$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \ldots ds, \quad \Rightarrow \quad G(s+0, s) = 1.$$

Так можем найти

$$A(s) \exp\left(- \int_{t_0}^{s} \gamma(t')\, dt' \right) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(t,s) = \theta(t-s) \exp\left(- \int_{s}^{t} \gamma(t')\, dt' \right), \tag{7}$$

где мы разбили

$$\int_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{s} + \int_{s}^{t},$$

и получили, что хотели.

Комментарий про дельта функцию. Главное, нужно показать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x) = 1, \qquad \lim_{a\to 0} \delta_a(x) = 0, \text{ при } x \neq 0.$$

Вообще можем плодить дельтаобразные последовательности, взяв f с единичным интегралом и

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right).$$

Комментарий про преобразование Лапласа. Для функции вида

$$\frac{1}{\sqrt{p+\alpha}},$$

необходим аппарат разрезов, так что её можно сделать с шифтом на неделю.

На следующей недели будет контрольная. Необходим аппарат метода неопределенных коэффициентов, матричные экспоненты, решение диффуров через Фурье (не всегда причинный результат), а также преобразование Лапласа. Вычеты скорее всего в районе второго порядка и меньше. Ещё полезно вспонить, как записывать начальные условия: осцияллятор, осциллятор с затуханием.

2 Семинар от 12.09.21

Раннее решалась задача Коши, вида $L(\partial_t) x(t) = \varphi(t)$. Можо рассмотреть другой класс задач:

$$f(0) = f(\pi) = 0, \quad (\partial_x^2 + 1) f(x) = 0, \quad \Rightarrow \quad f(x) = A \sin x,$$

где A – любая, то есть решение не единственно. Более того, решение может не существовать.

Однако, покуда мы рассматриваем диффуры первого порядка, граничное условие всего одно: значение функции в точке: $x(0) = x_0$, что эквивалентно задаче Коши.

2.1 Задача Штурма-Лиувилля

Интереснее на диффурах II порядка, один из наиболее ярких примеров: *задача Штурма-Лиувилля*:

$$\hat{L} = \partial_x^2 + Q(x)\partial_x + U(x), \qquad \hat{L}f(x) = \varphi(x), \qquad \begin{cases} \alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = 0 \\ \alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0, \end{cases}$$

где[2] $|\alpha_1| + |\beta_2| \neq 0$ и $|\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0$.

Заметим, что уравнение линейно: если $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, то $f = f_1 + f_2$, а значит ответ можно найти в виде

$$f(x) \int_a^b G(x,y)\varphi(y)\, dy,$$

однако система теперь не является транслционно инвариантной.

Граничные условия на G:

$$\alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = \int_a^b \underbrace{(\alpha_1 G(a,y) + \beta_1 G'_x(a,y))}_{\text{непрерывен}} \varphi(y)\, dy = 0,$$

что верно $\forall\varphi$. По лемме Дюбуа-Реймона, можем свести уравнение к виду

$$\alpha_1 G(a,y) + \beta_1 G'_x(a,y) \equiv 0,$$

то есть функция Грина G наследует граничные условия. Аналогично,

$$\alpha_2 G(b,y) + \beta_2 G'_x(b,y) = 0.$$

Запищем уравнение на $G(x,y)$:

$$\varphi(y) = \delta(y - y'), \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = \int_a^b G(x,y)\delta(y-y')\, dy = G(x,y'), \qquad \Rightarrow \qquad \hat{L}G(x,y) = \delta(x-y).$$

Решения имеет смысл разбить на $x \neq y$, и, в частности, рассмотрим $x < y$:

$$\begin{cases} \hat{L}G(x,y) = 0 \\ \alpha_1 G(a,y) + \beta_1 G'_x(a,y) = 0 \end{cases}, \qquad \Rightarrow \qquad G(x,y) = A(y)\cdot u(x), \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \hat{L}u(x) = 0 \\ \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0 \end{cases}$$

Более того, почему бы и не доопределить $u(a) = -\beta_1$ и $u'(a) = \alpha_1$, таким образом свели задачу к задаче Коши, решение которой существует и единственно.

Аналогично для $x > y$:

$$\hat{L}G(x,y) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad G(x,y) = B(y)v(x), \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \hat{L}v = 0 \\ \alpha_2 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0 \end{cases}$$

где снова есть задача Коши, решение которой существует и единственно.

Сшивка. Во-первых заметим, что G непрерывна, а G' испытыывает скачок:

$$G(y+0,y) = G(y-0,y), \qquad \Rightarrow \qquad A(y)u(y) = B(y)v(y).$$

Интегрируя, находим

$$G'_x(y+0,y) - G'_x(y-0,y) = 1, \qquad \Rightarrow \qquad B(y)v'(y) - A(y)u'(y) = 1.$$

Собирая уравнения вместе, находим, что

$$B(y)\underbrace{\left(\frac{v'(y)u(y) - v(y)u'(y)}{u(y)}\right)}_{W[u,v]} = 1, \qquad \Rightarrow \qquad B(y) = \frac{u(y)}{W}, \qquad A(y) = \frac{v(y)}{W(y)},$$

где $W[u,v]$ – вронскиан. Итого, можем выписать ответ:

$$G(x,y) = \frac{1}{W(y)} \begin{cases} v(y)u(x), & x < y; \\ v(x)u(y), & x > y. \end{cases}$$

Можем записать, когда решение $\exists$ и !:

$$W \neq 0, \qquad \Rightarrow \qquad \text{Sol } \exists \&!.$$

Отсюда вытекает теорема Стеклова:

Thr 2.1 (теорема Стеклова)**.** *Если u, v – спец. ФСР, то решение существует и единственно:*

$$f(x) = \int_a^b G(x,y)\varphi(y)\, dy, \qquad \hat{L}^{-1}\varphi = f.$$

[2] Часто можно встретить нулевые граничные условия: $f(a) = f(b) = 0$.

Если $W = \mathrm{const}$, то $G(x,y) = G(y,x)$ – симметричное ядро, а значит L^{-1} – симметричный, самосапряженный оператор $\Rightarrow$ у $\hat{L}$ есть ОНБ из собственных функций.

Про вронскиан. Можно записать формулу Лиувилля-Остроградского

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} Q(z)\,dz\right).$$

Def 2.2. *Специальной ФСР* называется решение уравнении $\hat{L}u = 0$ и $\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0$, и аналогичного уравнения по $v(x)$ с граничным условием в b, если $W[u,v] \neq 0$, то есть u и v линейной независимы.

Пример I. Рассмотрим уравнения

$$\begin{cases} \partial_x^2 f(x) = \varphi(x) \\ f(a) = f(b) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u(x) = x - a, \quad v(x) = x - b, \quad \Rightarrow \quad W = \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} = b - a = \mathrm{const},$$

а значит

$$G(x,y) = \frac{1}{b-a}\begin{cases} (y-b)(x-a), & x < y \\ (x-b)(y-a), & x > y. \end{cases}$$

Пример II. Рассмотрим двумерный цилиндр, радуса R, вне которого $\rho(r > R) = 0$, $\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(r)$. Рассмотрим уравнения Лапласа:

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho, \quad \Rightarrow \quad (\partial_r^2 + \tfrac{1}{r}\partial_r)\varphi = -4\pi\rho.$$

Добавим граничные условия: потенциал определен с точностью до константы, так что пусть $\varphi(R) = 0$, также хотим конечность φ при $r = 0$, так что пусть $\varphi(0) = 1$.

Получили задачу, где при $r < r'$

$$\left\{ \left(\partial_r^2 + \tfrac{1}{r}\partial_r\right) u(r) = 0, \quad u(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{C}{r}, \quad \Rightarrow \quad u(r) = C\ln r + D = 1.\right.$$

Аналогично, рассмотрим $r > r'$:

$$\left\{ \left(\partial_r^2 + \tfrac{1}{r}\partial_r\right) v(r) = 0, \quad v(R) = 0, \quad \Rightarrow \quad v(R) = C'\ln r + D', \quad \Rightarrow \quad v = \ln\left(\frac{r}{R}\right).\right.$$

Сразу вычислим

$$W[u,\, v] = \det\begin{pmatrix} 1 & \ln r/R \\ 0 & 1/r \end{pmatrix} = \frac{1}{r}, \quad \Rightarrow \quad G(r,r') = r'\left\{ \ln\tfrac{r'}{R}, \quad r < r' \ln\frac{r}{R}, \quad r > r' \right. \quad \Rightarrow \quad \varphi(r) = \int_0^R G(r,r')\,(-4\pi\rho(r'))\,dr'.$$

2.2 Задача с периодическими условиями

Рассмотрим такой же $\hat{L}$, и граничные условия в виде

$$\begin{cases} f(a) = f(b) \\ f'(a) = f'(b), \end{cases}$$

то есть решение периодично.

Пример. Рассмотрим задачу

$$\hat{L} = \partial_x^2 + \varkappa^2,$$

с условиями на $[-\pi, \pi]$.

При $x < y$:

$$G(x,y) = A_1(y)\sin\varkappa(x+\pi) + B_1(y)\cos\varkappa(x+\pi),$$

и аналогично для $x > y$:

$$G(x,y) = A_2\sin\varkappa(x-\pi) + B_2(y)\cos\varkappa(x-\pi).$$

Запишем граничные условия:

$$G(-\pi,y) = G(\pi,y), \quad \Rightarrow \quad B_1(y) = B_2(y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} B(y)$$

$$G'_x(-\pi,y) = G'_x(\pi,y), \quad \Rightarrow \quad A_1(y) = A_2(y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} A(y).$$

Тогда нашли, что

$$G(x,y) = \begin{cases} A\sin\varkappa(x+\pi) + B\cos\varkappa(x+\pi) \\ A\sin\varkappa(x-\pi) + B\cos\varkappa(x-\pi) \end{cases}$$

Теперь запишем непрерывность:

$$A\sin\varkappa(x+\pi) + B\cos\varkappa(x+\pi) = A\sin\varkappa(x-\pi) + B\cos\varkappa(x-\pi).$$

А также скачок производной
$$G'_x(y+0,y) - G'_x(y-0,y) = 1, \quad \Rightarrow \quad A\cos\varkappa(x-\pi) - B\sin\varkappa(x-\pi) - A\cos\varkappa(x+\pi) + B\cos\varkappa(x+\pi) = \varkappa^{-1}.$$
Решая эту систему находим, что
$$2\sin\pi\varkappa \begin{pmatrix} \cos\varkappa y & -\sin\varkappa y \\ \sin\xi y & \cos\varkappa y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\varkappa \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sin\pi\varkappa} \begin{pmatrix} \cos\varkappa y & \sin\varkappa y \\ \sin\varkappa y & \cos\varkappa y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\varkappa \end{pmatrix} = \frac{1}{2\varkappa\sin\pi\varkappa} \begin{pmatrix} \sin xy \\ \cos xy \end{pmatrix}.$$
Подставляя в $G(x,y)$, находим[3]
$$G(x,y) = \frac{1}{2\varkappa\sin\pi\varkappa} \begin{cases} \cos\left(\varkappa(x-y) + \varkappa\pi\right), & x < y \\ \cos(\varkappa(x-y) - \varkappa\pi), & x > y. \end{cases}$$
Всё это было, повторимся, для уравнения:
$$\left(\partial_x^2 + \varkappa^2\right) f(x) = \varphi(x), \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} G(x,y)\varphi(y)\, dy.$$

2.3 Другой способ

Дорустим мы $\mathcal{H}$, соответственно есть $\langle x|y\rangle$ – эрмитово. Допустим есть некоторый сопряженный оператор $\langle Ax|y\rangle = \langle x|A^* y\rangle$. При чём требуем, что $y\colon$ обе части непрерывны по x:
$$\mathcal{D}(A^*) = \{y\colon \langle Ax|y\rangle \text{ непр. по } x, \quad x \in \mathcal{D}A.\}$$
Получается, что было бы здорово, если бы выполнялось $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$ и $A = A^*$, тогда $\langle Ax|y\rangle = \langle x|Ay\rangle$, и A – ССО.

Thr 2.3 (thr Гильберта-Шмидта)**.** *Если A – компактный*[4] *ССО, то у A есть ОНБ из собственных векторов.*

Далее верим, что базис счётный, есть условие ортогональности и $Ae_n = \lambda_n e_n$. Вернемся к оператору Штурма-Лиувилля:
$$\hat{L} = A(x)\partial_x^2 + B(x)\partial_x + C(x),$$
и живем мы в $\mathcal{H} = L_2[a,b]$, со скалярным произведением, вида
$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f\bar{g}\, dx.$$

Покажем, что для задачи[5] Штурма-Лиувилля $\hat{L}$ симметричен, при $B(x) = A'(x)$.

Действительно,
$$\langle \hat{L}f|g\rangle = \int_a^b \left(\partial_x(A\partial_x) + C\right) f\bar{g}\, dx,$$
где $\langle Cf|g\rangle = \langle f|Cg\rangle$, так что дальше опустим.
$$\langle \hat{L}f|g\rangle \sim \int_a^b \partial_x(A\partial_x f)g\, dx = \ldots + A\partial_x f\bar{g}\Big|_a^b - \int_a^b \frac{d\bar{g}}{dx}\, df = A\frac{df}{dx}g\Big|_a^b - Af\frac{d\bar{g}}{dx}\Big|_a^b + \langle f|\hat{L}g\rangle.$$

Задача Штурма-Лиувилля. Для f и g верно, что
$$\begin{aligned} \alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = 0 \\ \alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0 \end{aligned} \qquad A(b)\left[f'(b)\bar{g}(b) - f(b)\bar{g}'(b)\right] - A(a)\left[\ldots\right] \sim \det\begin{pmatrix} \bar{g} & f \\ \bar{g}' & f' \end{pmatrix} = 0,$$
в силу граничных условий, а значит концов не будет:
$$\langle \hat{L}f|g\rangle = \langle f|\hat{L}g\rangle,$$
ура!)

Аналогично для периодических граничных условий:
$$\langle \hat{L}f|g\rangle = Af'\bar{g}\Big|_a^b - Af\bar{g}'\Big|_a^b + \langle f|\hat{L}g\rangle,$$
но из периодических граничных условий сразу получаем, что $\hat{L}$ симметричный, а значт, скорее всего, $\hat{L}$ – ССО.

[3] К дз будет полезно заметить, что $G(x,y) = G(x-y)$ – задача трансляционно инвариантна.

[4] $\mathcal{D}(A)$ – компакт в гильбертовом пространстве.

[5] с периодическими гран. усовиями?

А теперь внимание:

$$\hat{L}f = \varphi, \quad \Rightarrow \quad f = \underbrace{\int_a^b dt\, G(x,y)}_{\text{комп } \hat{L}^{-1}} \varphi(y) = \hat{L}^{-1}\varphi,$$

где

$$\hat{L} = A\partial_x^2 + A'\partial_x + C, \quad \Rightarrow \quad L^{-1} \text{ симметричный} \quad \Rightarrow \quad G(x,y) = G(y,x).$$

Итак, для операторов Штурма-Лиувилля ищем собственные функции:

$$\begin{cases} \hat{L}e_n(x) = \lambda_n e_n(x) \\ \text{гран. усл.} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sum_n f_n e_n(x),$$

домножая на e_m, находим, что

$$\langle f|e_m\rangle = f_m\langle e_m|e_n\rangle, \quad \Rightarrow \quad f_m = \frac{\langle f|e_m\rangle}{\langle e_m|e_n\rangle}, \qquad \langle f|e_m\rangle = \int_a^b f(x)\bar{e}_m(x)\,dx.$$

Метод Фурье решения краевых задач:

$$L(\partial_t)u(x,t) = \hat{A}_x u(x,t) + f(x,t),$$

плюс граничные условия. Раскладывая,

$$\hat{A}_x e_n = \lambda_n e_n, \qquad u = \sum_n u_n(t)e_n(x), \quad \Rightarrow \quad f(x,t) = \sum f_n(t)e_n(x),$$

а значит

$$\sum_n \left(L(\partial_t)u_n(t) - \lambda_n u_n(t) - f_n(t)\right)e_n(x) = 0,$$

откуда можем находить $u_n(t)$:

$$u(x,t) = \sum_n u_n(t)e_n(x).$$

Пример. Рассмотрим снова задачу, вида

$$(\partial_x^2 + \varkappa^2)G(x,y) = \delta(x-y)$$

и решим методом Фурье. Получим систему, вида

$$\begin{cases} \partial_x^2 e_n = \lambda_n e_n \\ e_n(-\pi) = e_n(\pi) \\ e_n'(-\pi) = e_n'(\pi) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad e = \alpha e^{iqx} + \beta e^{-iqx}, \quad \alpha e^{iq\pi} + \beta e^{-iq\pi} = \alpha e^{-iq\pi} + \beta e^{iq\pi}. \quad \Rightarrow \quad \alpha\sin\pi q = \beta\sin\pi q,$$

а значит $q = n$, $n \in \mathbb{Z}$, вот и дискретность:

$$\lambda^2 = -n^2, \quad \Rightarrow \quad e_n = e^{inx}, \quad e_{-n} = e^{-inx}.$$

3 Семинар от 16.10.21

Рассмотрим снова некоторую граничную задачу:

$$\hat{L}G(x,y) = \delta(x-y).$$

Запишем граничные условия:

$$\alpha_1 G(a.y) + \beta_1 G_x'(a,y) = 0, \qquad \alpha_2 G(b,y) + \beta_2 G_x'(b,y) = 0,$$

где $|\alpha_1| + |\beta_2| \neq 0$ и $|\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0$. Можем выписать ответ:

$$G(x,y) = \frac{1}{W(y)} \begin{cases} v(y)u(x), & x < y; \\ v(x)u(y), & x > y, \end{cases}$$

где Вронскиан можно запсиать, как

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^x Q(t)\,dt,\right)$$

где $Q(t)$ – из оператора Штурма-Лиувилля.

Также решали задачу с периодическими гран. условиями, где G наследовала гран. условия. Решать это всё умеем двумя способами: разделяя на $x > y$ и $x < y$, и через метод Фурье:

$$\hat{L}e_n = \lambda_n e_n, \qquad \langle e_n|e_m\rangle = \int_a^b e_n(x)\bar{e}_m(x)\,dx.$$

Тогда можем найти функцию Грина, как

$$G(x,y)=\sum_n g_n(y)e_n(x),\qquad \delta(x-y)=\sum_n \delta_n(y)e_n(x).$$

Находим коэффициенты Фурье:

$$g_n(y)=\frac{\langle G|e_n\rangle}{\langle e_n|e_n\rangle},\quad\Rightarrow\quad \delta_n(y)=\frac{\bar e_n(y)}{\langle e_n|e_n\rangle},\quad\Rightarrow\quad g_n(y)=\frac{1}{\lambda_n}\frac{\bar e_n(y)}{\langle e_n|e_n\rangle},$$

где мы решали уравнение, вида $\hat L G=\delta(x-y)$. Проблема возникает при $\lambda_n=0$.

Решение. Наличие у оператора собственного числа $\lambda_n=0$ называется нулевой модой. Рассмотрим оператор:

$$\hat L=\partial_x^2,$$

для которого $e_n(x)=e^{inx}$, где $\langle e_n|e_n\rangle=2\pi$, где $e_0=1$ и $\lambda_0=0$. Пусть тогда

$$\delta(x)=\sum\frac{\bar e_n(0)e_n(x)}{\langle e_n|e_n\rangle}=\sum\frac{e^{inx}}{2\pi},\qquad G(x)=\sum g_n e_n(x).$$

но для $\hat L G=\delta(x)$ оказывается нет решений (справа e_0 есть, а слева нет). То есть

$$\ker\hat L\neq\{0\},\qquad \ker\hat L+\operatorname{Im}\hat L=\mathcal H,$$

поэтому всегда имеем ввиду, что $\hat L\hat L^{-1}=\mathbb 1$, но только для $\operatorname{im}\hat L$.

В общем, проблему уйдёт, если рассмотрим уравнение, вида

$$\hat L G(x)=\delta(x)-e_0(x)=\delta(x)-\frac{1}{2\pi},$$

то есть справа единичный оператор только на образе $\operatorname{im}\hat L$.

Если в источнике есть нулевая мода, то уравнение не имеет решений.

Алгоритм (Фурье). Раскладываем

$$G(x)=\sum_{n\neq 0} g_n e_n,\qquad \delta(x)=\sum\frac{e_n(x)}{2\pi},\quad\Rightarrow\quad \hat L G=\delta(x)-\frac{1}{2\pi}.$$

Знаем, что $\lambda_n g_n=\frac{1}{2\pi}$, а значит

$$g_n(x)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{-n^2},\quad\Rightarrow\quad G(x)=\sum_{n\neq 0}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{-n^2}e^{inx},$$

и рассмотрим $0<x<\pi$, суммирая это через вычеты, записываем

$$f(z)=\frac{e^{zx}}{2\pi z^2},\quad\Rightarrow\quad G(x)=\sum\oint_{in}\frac{dz}{2\pi i}f(z)g(z).$$

Соответственно, выберем

$$g(z)=\frac{\pi e^{-\pi z}}{\operatorname{sh}(\pi z)}$$

тогда

$$f(z)g(z)=\frac{\pi}{z^2}\frac{e^{(x-\pi)z}}{\operatorname{sh}\pi z},$$

получаем, что интеграл по душам вправо/влево равен 0, и остается только вычет в $z=0$:

$$G(z)=-\operatorname{res}_0 f(z)g(z)=\ldots=-\frac{x^2}{4\pi}+\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}.$$

Алгоритм (сшивка). Решим задачу

$$\partial_x^2 G(x)=\delta(x)-\frac{1}{2\pi}.$$

Разбиваем $x<0$ и $x>0$:

$$\begin{aligned}
x&<0, & G&=-\tfrac{x^2}{4\pi}+ax+b,\\
x&>0, & G&=-\tfrac{x^2}{4\pi}+cx+\varpi,
\end{aligned}$$

учитываем граничные условия:

$$G(-0)=G(+0),\quad G'(+0)-G'(-0)=1,\quad\Rightarrow\quad b=\varpi.$$

Также получаем, что $-a=b$.

Учтём, что e_0 не входит в G:

$$\langle G|e_0\rangle=0=\int_{-\pi}^{+\pi}G(x)\,dx=0,\quad\Rightarrow\quad b=-\frac{\pi}{6},$$

так и получаем все необходиме условия на $G(x, y)$.

3.1 Многомерие $\mathbb{R}^3$

Рассмотрим $\mathbb{R}^3$:

$$\nabla^2 f = \varphi,$$

где все линейно, всё хорошо. Как обычно будем искать функцию, виде

$$f(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\varphi(\boldsymbol{r})\, d^3 r.$$

Функцию Грина найдём в виде

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r}) = \delta(r^3) = \delta(x)\delta(y)\delta(z), \qquad \int f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\, d^3\boldsymbol{r}' = f(\boldsymbol{r}').$$

Можем свести уравнение Лапласа, к уравнению Дебая:

$$(\nabla^2 - \varkappa^2)G(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}),$$

которое очень удобно раскладывать по Фурье:

$$\begin{aligned} &\text{ПФ}: && G(\boldsymbol{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r}, \\ &\text{ОПФ}: && G(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{r}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}. \end{aligned}$$

Также вспомним, что

$$\partial_m G(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r} = i k_m G(\boldsymbol{k}),$$

а значит

$$(-k^2 - \varkappa^2)G(\boldsymbol{k}) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{k^2 + \varkappa^2}, \quad \Rightarrow \quad G(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{k^2 + \varkappa^2} \frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}.$$

Переходим в сферические координаты, получаем, что

$$G(\boldsymbol{r}) = -\frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{k^2}{k^2 + \varkappa^2} \int_0^\pi \sin\theta e^{ikr\cos\theta}\, d\theta\, dk = -\frac{e^{-\varkappa r}}{4\pi r}.$$

Устремляя $\varkappa \to 0$, находим

$$\nabla^2 G = \delta(\boldsymbol{r}), \quad \Rightarrow \quad G = -\frac{1}{4\pi r}.$$

3.2 Многомерие $\mathbb{R}^2$

Для Гаусса можно найти, что

$$G^{[\dim = n]}(x) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \frac{1}{r^{n-2}},$$

где σ_{n-1} – площадь $n-1$ мерной сферы.

Вообще часто задача формулируется в виде задачи Дирихле:

$$\nabla^2 f = 0, \qquad f'_{\partial D} = f_0(\boldsymbol{r}),$$

то есть функция задана на границе некоторой области. Пусть

$$f(z) = u(z) = iv(z), \qquad \nabla^2 u = \nabla^2 v = 0.$$

Пусть знаем комплексную функцию $f(z)$ такую, что $\operatorname{Re} f|_{\partial D} = f_0$, тогда $\operatorname{Re} f(z)$ решает задачу Дирихле. Далее конформным преобразованием переводим любое D в круг, в круге задача Дирихле решается, а дальше отображаем назад.

Пусть задана функция $u_0(x) = u(x, 0)$. Вообще можно было бы разложить по Фурье u, и записать

$$\nabla^2 u = 0, \qquad u(x, 0) = u_0(x).$$

Тогда

$$u(q, y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iqx} u(x, y)\, dx, \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 u = -q^2 u(q, y) = 0.$$

Так приходим к

$$u(q, y) = \exp\left(-|q|y\right) u(q, 0), \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{2\pi} e^{iqx} \underbrace{e^{-|q|y}}_{h(q)} u(q, 0).$$

Произведение Фурье образов – свёртка:

$$u(x,y)=\int_{\mathbb{R}} d\xi h(x-\xi,\,y)u_0(\xi).$$

Найдём, что

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{2\pi} e^{iqx}e^{-|q|y}=\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}.$$

Подставляем, и находим:

$$u(x,y)=\int_{\mathbb{R}} d\xi\,\frac{y/\pi}{(x-\xi)^2+y^2}u_0(\xi),$$

где

$$\frac{y/\pi}{(x-\xi)^2+y^2}=\operatorname{Im}\frac{-1}{x+iy-\xi},\qquad\Rightarrow\qquad f(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{z-\xi}u_0(\xi),$$

что в некотором смысле привело нас к интегралу Коши, так что и $\nabla^2 f=0$ и гран. условия удовлетворяются.

Пример. Рассмотрим

$$u_0(x)=\frac{1}{1+x^2},\qquad u(x,y)=\int_{\mathbb{R}} d\xi\frac{1}{\pi}\frac{y}{y^2+(x-\xi)^2}\frac{1}{1+\xi^2}=\frac{1+y}{x^2+(1+y)^2}.$$

4 Семинар от 23.10.21

Γ-функция. Найдем некоторые интересные свойства:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt \overset{t=\tau x}{=} x^z\int_0^\infty \tau^{z-1}e^{-\tau x}\,d\tau,\qquad \frac{1}{x^z}=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty \tau^{z-1}e^{-\tau x}\,d\tau.$$

Также знаем $\Gamma(n+1)=n!$, $\Gamma(2n+1)$, $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ и т.д.

Аналитическое продолжение Γ-функции. Пусть есть две функции φ_1 и f_2, равные друг другу на сходящемся множестве точек $z_i\in\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2$. Так и строим аналитическое продолжение для f_1 функуцией f_2.

Можно сказать, что

$$\Gamma(z-1)=\frac{\Gamma(z)}{z-1},\qquad \operatorname{Re} z>0.$$

Но давайте сыграем в чудеса. Изначально определяли

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt,\qquad t^{z-1}=e^{(z-1)\ln t}.$$

Выберем такую связную область, чтобы точку $t=0$ нельзя было бы обойти, и получим $\ln t=\ln|t|+i\varphi$.

Сверху $\ln(|t|+i0)=\ln|t|+2\pi i$, и снизу $\ln(|t|+i0)=\ln|t|+2\pi i$. Тогда верно, что

$$\int_0^\infty e^{(z-1)\ln t}e^{-t}\,dt,\qquad \text{up}:\quad e^{(z-1)\ln|t|}e^{-|t|},\qquad \text{down}:\quad e^{(z-1)\ln|t|}e^{-|t|}e^{2\pi i z}.$$

Сложим интеграл поверху и понизу, получим

$$I=\int e^{(z-1)\ln t}e^{-t}\,dt=(1-e^{2\pi i z})\Gamma(z)=\int_C e^{(z-1)\ln t}e^{-t}\,dt=\int_C t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$

Особенность есть только в точке 0. Таким образом находим аналитическое продолжение:

$$\Gamma(z)=\frac{1}{1-e^{2\pi i z}}\int_C t^{z-1}e^{-t}\,dt. \tag{8}$$

Видим, что у $\Gamma(z)$ есть особенности $z\in\mathbb{Z}$, где $z\in\mathbb{N}$ – УОТ, и $z\in\mathbb{Z}\ \mathbb{N}$ – полюса первого порядка.

Рассмотрим $z=-n$, тогда интегрируем

$$\int_C t^{-n-1}e^{-t}\,dt=2\pi i\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dt}\right)^n e^{-t}=-\frac{2\pi i(-1)^n}{n!}.$$

Итого находим, что

$$\operatorname{res}_{-n}\Gamma(z)=\frac{(-1)^n}{n!},$$

что позволяет определить преобразование Мелина от $\Gamma(z)$:

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma(z)x^{-z}\,dx,\qquad M(f(z))=\int_0^\infty t^{z-1}f(t)\,dt,$$

но это к слову.

Найдём теперь $\Gamma(n)$:

$$\Gamma(n) = \lim_{z\to n} \frac{1}{1-e^{2\pi i z}} \int_C t^{z-1+n-n} e^{-t}\, dt = \Big/ t^{z-n} \approx 1 + (z-n)\ln t \Big/ \overset{\frac{a}{b}\to\frac{a'}{b'}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_C t^{n-1} \ln t e^{-t}\, dt.$$

Теперь делаем обратную интерацию, «сдувая» логарифм к $\operatorname{Re} t$. Здесь всё также $\ln(|t|+i0) = \ln|t|$ и $\ln(|t|-i0) = \ln|t| + 2\pi i$. Тогда

$$\left(\int_C = \int_{\text{up}} + \int_{\text{down}}\right) \frac{1}{1-e^{2\pi i z}} \int_C t^{z-1} e^{-t}\, dt = -2\pi i \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t}\, dt = (n-1)!.$$

B**-функция**. Рассмотрим функцию, вида

$$B(\alpha,\, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt, \qquad \operatorname{Re}\alpha, \beta > 0.$$

Сделаем замену переменных

$$B(\alpha,\, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt \overset{t=y/s}{=} \int_0^s dy\; y^{\alpha-1}(s-y)^{\beta-1}/s^{\alpha+\beta-1}.$$

Нетрудно получить, что

$$B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta) = \int_0^\infty ds\, e^{-s} \int_0^s dy\, y^{\alpha-1}(s-y)^{\beta-1} = \int_0^\infty dy\, y^{\alpha-1} \int_y^\infty ds\, e^{-s+y-y}(s-y)^{\beta-1} = \int_0^\infty dy\, y^{\alpha-1}e^{-y} \int_0^\infty dx\, e^{-x}x^{\beta-1},$$

а значит

$$B(\alpha,\, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \tag{9}$$

что и является аналитическим продолжением B-функции.

Например,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha\varphi \cos^\beta\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2} B\left(\frac{a+1}{2},\, \frac{b+1}{2}\right).$$

Также верно, что

$$\int_0^\infty \frac{x^m}{(1+x^n)^k}\, dx = \Big/ t = \frac{1}{1+x^n} \Big/ .$$

Аналогично можем получить, что

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\Gamma(2z). \tag{10}$$

Ну действительно, представим

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(z)^2}{B(z,\, \frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}B(z,z)}{B(z,\, \frac{1}{2})}\Gamma(2z).$$

Осталось раскрыть

$$B(z,z) = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi\;\; (\sin\varphi\cos\varphi)^{2z-1} = \frac{2}{2^{2z-1}} \int_0^{\pi/2} d\varphi\;\; \sin^{2z-1}\varphi.$$

Теперь, уже интегрируя двойной угол, находим

$$B(z,z) == \frac{2}{2^{2z-1}}\frac{1}{2}B(z,\, \tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2^{2z-1}}B(z,\, \tfrac{1}{2}).$$

Ещё один забавный факт:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z},$$

что также совершает аналитическое продолжение. Действительно,

$$B(z,\, 1-z) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\, dt = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^z \frac{dt}{t}.$$

Тут логично ввести $x = \frac{t}{1-t} = -1 + \frac{1}{1-t}$, а значит

$$t = \frac{x}{x+1}, \qquad dt = \frac{dx}{(x+1)^2}.$$

Продолжая жонглировать переменными

$$B(z,\, 1-z) = \int_0^\infty x^z \frac{x+1}{x}\frac{dx}{(x+1)^2} = \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{x+1}\, dx.$$

Который снова удобно посчитать через разрезы.

$$B(z,\,1-z)=\int_{\mathrm{up}}\frac{x^{z-1}}{1+x}\,dx=\frac{1}{1-e^{2\pi iz}}\int_C\frac{x^{z-1}}{1+x}\,dx,$$

но тут уже можно замкнуть дугу на бесконечности, вклад от котрой нулевой. Осталось найти вычет в точке -1, тогда

$$\int_{\mathrm{up}}\frac{x^{z-1}}{1+x}\,dx=\frac{1}{1-e^{2\pi iz}}\operatorname{res}_{-1}=\frac{2\pi i(-1)e^{\pi iz}}{1-e^{2\pi iz}}=\frac{2\pi i}{e^{\pi iz}-e^{-i\pi z}}=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

Дигамма-функция. По определнию $\psi(z)$:

$$\psi(z)\overset{\text{def}}{=}(\ln\Gamma(z))'=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Заметим, что $\psi(1)=-\gamma$, где γ – постоянная Эйлера-Маскерони. Найдём

$$\psi(z+1)=(\ln z+\ln\Gamma(z))=\frac{1}{z}+\psi(z)/$$

Забавынй факт:

$$\psi(N+1)=\frac{1}{N}+\psi(N)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\psi(1),$$

где $\sum_{n=1}^N\frac{1}{n}$ – N-е гармоническое число.

Также найдем, что

$$\psi(x+N+1)=\frac{1}{x+N}+\psi(x+N)=\frac{1}{x+N}+\ldots+\frac{1}{x+1}+\psi(x+1).$$

Вспомним, что $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$. Тогда

$$\psi(-z)-\psi(z)=\pi\operatorname{ctg}\pi z.$$

Найдём асимптотику

$$\Gamma(z\to\infty)=\sqrt{2\pi z}e^{z\ln z-z}=\sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^z,$$

что и составляет формулу Стирлинга.

Также для $\psi(z\to\infty)$:

$$\psi(z\to\infty)=(\ln\Gamma(z))'=\ln z+\frac{1}{2z}+o(1)=\ln z+o(1).$$

Метод перевала. Представим семейство интегралов с параметром λ:

$$I_\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)e^{\lambda f(x)}\,dx.$$

При этом предположим, что $f(x)$ такая, что существует единственный максимум в точке x_0. Тогда

$$I_\lambda\approx g(x_0)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\lambda f(x)}\,dx.$$

Теперь воспользуемся аналитичностью функции $f(x)$:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o(x-x_0)^2.$$

Подставляя в интеграл, находим

$$I_\lambda==g(x_0)e^{\lambda f(x_0)}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\lambda f'(x_0)(x-x_0)^2/2}\,dx=g(x_0)e^{\lambda f(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda f''(x_0)|}}.$$

Пусть λ нет. Тогда достаточно потребовать $|f''(x_0)|$ большой – максимум резкий. Тогда

$$|f''(x_0)(x-x_0)^2|\sim 1,\quad\Rightarrow\quad|x-x_0|\frac{1}{\sqrt{f'(x_0)}},\quad\Rightarrow\quad|f'''(x_0)(x-x_0^3)|\ll 1,\quad\Rightarrow\quad(f'')^3\gg(f''')^2.$$

Посмотрим на Г-функцию:

$$\Gamma(z+1)=\int_0^\infty t^ze^{-t}\,dt=\int_0^\infty e^{z\ln t-t}\,dt.$$

Тогда $f(t)=z\ln t-t$. Подставляем в критерий, видим что макимум у f резкий.

Подставляем, находим

$$\Gamma(z+1)\approx e^{z\ln z-z}\sqrt{2\pi z},$$

что и составляет формулу Стирлинга, верной на всей комплексной плоскости.