

ОТЧЁТ

Авторы заметок: Хоружий Кирилл

От: 14 января 2022 г.

Содержание

1	Введение	2
2	Вывод уравнения насыщенной спектроскопии	3
2.1	Оптическая глубина	3
2.2	Скоростные уравнения	3
2.3	Итоговая картина для двухуровневой системы	4
3	Численные теоретические и экспериментальные оценки	5
3.1	Теоретическая оценка значения \varkappa	5
3.2	Количественная картинка	5
3.3	Оценка контрастности по наблюдаемой глубине доплеровского провала	6
3.4	Сравнение теоретической и экспериментальной оценки \varkappa	6
4	Эксперимент	7

1 Введение

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

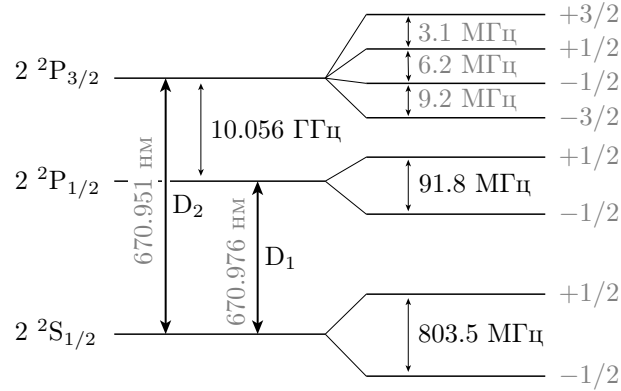


Рис. 1: Термы ${}^7\text{Li}$

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

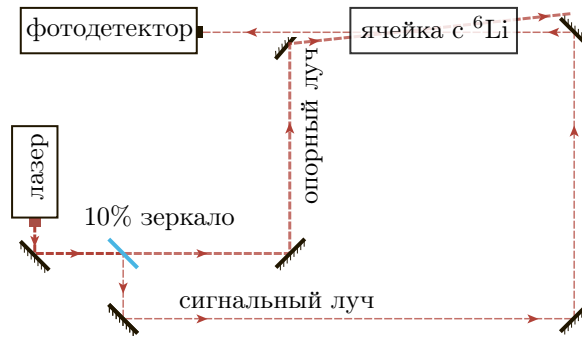


Рис. 2: Схема установки

2 Вывод уравнения насыщенной спектроскопии

2.1 Оптическая глубина

Интенсивность слабого одиночного луча, проходящего через ячейку описывается законом Бэра:

$$dI/dx = -\alpha I, \quad \alpha = \alpha(\nu).$$

В хорошем приближении¹ $\alpha \neq \alpha(x)$. Введем оптическую длину $\tau(\nu) = l\alpha(\nu)$, тогда

$$I_{\text{out}} = I_{\text{in}} e^{-\alpha(\nu)l} = I_{\text{in}} e^{-\tau(\nu)}.$$

Вклад от группы атомов $(\nu, \nu + d\nu)$ в $\tau(\nu)$ можем быть записан, как

$$d\alpha(\nu, \nu) = \sigma(\nu, \nu) dn(\nu), \quad \Rightarrow \quad d\tau(\nu, \nu) = l\sigma(\nu, \nu) dn(\nu).$$

Коэффициент поглощения $\sigma(\nu, \nu)$ имеет Лоренцовский профиль с натуральной шириной Γ (?) и смещенной по Допплеру резонансной частотой

$$\sigma(\nu, \nu) = \sigma_0 \frac{\Gamma^2/4}{(\nu - \nu_0(1 - v/c))^2 + \Gamma^2/4}, \quad (1)$$

где σ_0 – резонансное сечение поглощения², зависящее от вида дипольного перехода и поляризации падающего света [1⇒4].

Часть атомов $dn(\nu)$ с определенной скорости можем найти из распределения Больцмана

$$dn(\nu) = n_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv,$$

где $n_0 = N/V$ – концентрация атомов в ячейке.

Собирая все вместе (?) приходим к выражению

$$d\tau(\nu, \nu) = \frac{2}{\pi} \frac{\tau_0}{\sigma_0 \Gamma} \frac{\nu_0}{c} \sigma(\nu, \nu) \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv, \quad (2)$$

где τ_0 – соответствующая нормировка такая, что для резонанса $\tau_0 = \int_v d\tau(\nu_0, \nu)$.

Для насыщенной спектроскопии нужно учесть эффект от дополнительного насыщающего лазерного луча. Из-за него значительная часть атомов в ячейке будут в возбужденном состоянии. Так как атомы могут поглощать свет только когда они в невозбужденном состоянии, к (2) добаваить фактор $(N_g - N_e)/N$, описывающей разницу между количеством атомов в возбужденном состоянии N_e и невозбужденном N_g .

2.2 Скоростные уравнения

Населенность в двух состояния описывается скоростными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{N}_g &= \Gamma N_e - \sigma\Phi(N_g - N_e), \\ \dot{N}_e &= -\Gamma N_e + \sigma\Phi(N_g - N_e), \end{aligned}$$

где первое слагаемое отвечает спонтанной эмиссии, и второе насыщению лазером. $\Phi = I/h\nu$ – насыщающий поток фотонов. Учитывая, что $N_g + N_e = N = \text{const}$, можем получить диффур первого порядка на N_e :

$$\dot{N}_e = -(\Gamma + 2\sigma\Phi)N_e + \sigma\Phi N.$$

Решение можем быть найдено в виде

$$N_e(t) = \left[N_e(0) - \frac{N\sigma\Phi}{\Gamma + 2\sigma\Phi} \right] e^{-(\Gamma + 2\sigma\Phi)t} + \frac{N\sigma\Phi}{\Gamma + 2\sigma\Phi}.$$

Заметим, что при $\Phi = 0$:

$$N_e(t) = N_e(0)e^{-\Gamma t},$$

а в случае слаогого насыщающего луча $\sigma\Phi \ll \Gamma$, и изначальной популяции в невозбужденном состоянии,

$$N_e(t) = \frac{N\sigma\Phi}{\Gamma} (1 - e^{-\Gamma t}),$$

достигающий стационарного состояния после Γ^{-1} с $N_e = N\sigma\Phi/\Gamma \ll N$. Наконец, при $\sigma\Phi \gg \Gamma$, получаем насыщенный переход

$$N_e(t) = [N_e(0) - N/2] e^{-2\sigma\Phi t} + N/2 \rightarrow N/2.$$

Под насыщением понимаем, что $N_e = N/2$, большие значения по понятным причинам невозможны $\forall \Phi$, по крайней мере для двухуровневых систем.

¹Для слабого луча [1].

²[1], problem 1: $\sigma_0 \sim n$ атомов в ячейке.

Также наблюдается увеличение «мощности» ширины линии перехода, в пределе $(\Gamma + 2\sigma\Phi)t \gg 1$, получаем

$$\frac{N_e(\infty)}{N} = \frac{\sigma\Phi}{\Gamma + 2\sigma\Phi}.$$

Вспоминая уравнение (1) с $\Delta\nu = \nu - \nu_0(1 + v/c)$ (минус, т.к. доплеровский сдвиг в другую сторону), можем переписать уравнение в виде

$$\frac{N_e(\infty)}{N} = \frac{\sigma_0\Phi\Gamma/4}{\Delta\nu^2 + \Gamma^2/4 + \sigma_0\Phi\Gamma/2}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{N_e}{N} = \frac{s/2}{1 + s + 4\Delta\nu^2/\Gamma^2}}$$

, где ввели параметр насыщения $s = \Phi/\Phi_{\text{sat}}$, $\Phi_{\text{sat}} = \Gamma/2\sigma_0$.

Получился лоренцев профиль с уширением, полуширина (FWHM) которого зависит от Φ :

$$\text{FWHM} = \frac{\Gamma}{2} \sqrt{1 + \frac{2\sigma_0\Phi}{\Gamma}}.$$

Интенсивность насыщения I_{sat} может быть выражена, как $[1 \Rightarrow 4]$

$$I_{\text{sat}} = 2\pi^2\hbar c\Gamma/3\lambda^3.$$

Например, для ^{87}Rb с натуральной шириной $\Gamma = 6 \text{ МГц}$, $I_{\text{sat}} = 1.65 \text{ мВт/см}^2$.

2.3 Итоговая картина для двухуровневой системы

Собираем всё вместе, в зависимости от мощности насыщающего лазера некоторое количество атомов будет находиться в возбужденном состоянии:

$$\frac{N_e}{N} = \frac{s/2}{1 + s + 4(\Delta_+\nu)^2/\Gamma^2}, \quad \frac{\sigma(\nu, v)}{\sigma_0} = \frac{1}{4(\Delta_-\nu)^2/\Gamma^2 + 1}, \quad \Delta_{\pm}\nu = \nu - \nu_0(1 \pm v/c).$$

Тогда

$$\frac{I_{\text{out}}}{I_{\text{int}}} = \exp \left[-\varkappa \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - 2 \frac{N_e(\nu, v)}{N} \right) \frac{\sigma(\nu, v)}{\sigma_0} \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_{\text{B}}T} \right) dv \right], \quad (3)$$

где

$$s = \Phi/\Phi_{\text{sat}}, \quad \Phi_{\text{sat}} = \Gamma/2\sigma_0, \quad \varkappa = \sigma_0 n l \sqrt{\frac{m}{2\pi k_{\text{B}}T}},$$

можно подставить, но пока не нужно:

$$\frac{I_{\text{out}}}{I_{\text{int}}} = \exp \left[-\varkappa \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{1 + s + 4(\Delta_+\nu)^2/\Gamma^2} \right) \frac{1}{4(\Delta_-\nu)^2/\Gamma^2 + 1} \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_{\text{B}}T} \right) dv \right] = \exp [-\varkappa F(s, \nu)]. \quad (4)$$

3 Численные теоретические и экспериментальные оценки

3.1 Теоретическая оценка значения \varkappa

Оценим значение параметра \varkappa :

$$\varkappa = \sigma_0 n l \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}},$$

или, можем переписать в виде

$$\varkappa = \frac{\sigma_0 n l}{v_0 \sqrt{\pi}}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}.$$

Концентрация. Концентрацию атомов лития ${}^7\text{Li}$ можем найти, зная зависимость [2] давления насыщенных паров P от температуры T :

$$P[T] = 133.32 \times \exp \left[\ln 10 \left(10.3354 - \frac{8345.57}{T} - 8.84 \times 10^{-5} T - 0.68106 \log_{10}[T] \right) \right].$$

Тогда, например, при температуре $T = 300 + 273$ K,

$$P[573 \text{ K}] = 9.510^{-5} \text{ Па}, \quad \Rightarrow \quad n[573 \text{ K}] = \frac{P}{k_B T} = 1.2 \times 10^{-16} \text{ м}^{-3}.$$

Сечение. Сечение рассеяние для двухуровневой системы ($\lambda = 671$ нм)

$$\sigma_0^{\text{теор}} = \frac{3\pi}{8} \lambda^2 \approx 5.3 \times 10^{-13} \text{ м}^2,$$

уточнить, указать источник.

Итого, для $l = 10$ см, при температуре в 300 °C, для ${}^7\text{Li}$ находим

$$\varkappa = 0.31 \frac{1}{\text{м/с}}, \quad v_0 = 1.2 \times 10^3 \text{ м/с}, \quad \sigma_0 n l = 6.4 \times 10^2.$$

3.2 Количественная картинка

Подставляя найденное в предыдущем разделе значение \varkappa в формулу (4), получаем общий вид спектроскопии: рис. 3.

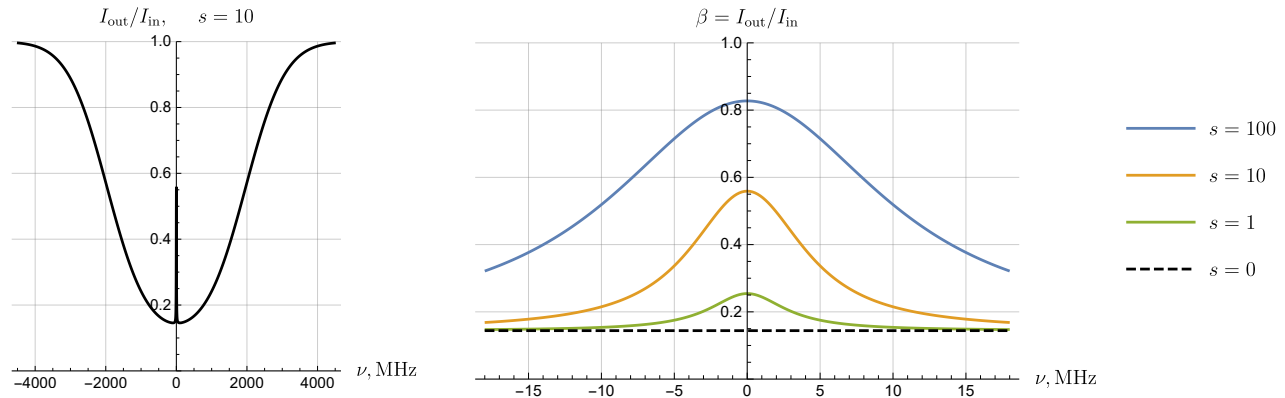


Рис. 3: Оценка β вблизи резонанса при температуре в 300 °C для $\sigma_0^{\text{теор}}$ и $l = 10$ см

Заметим, что указанные параметры системы приводят к значению β в резонансе при $s = 0$:

$$\beta[s = 0, \nu = \nu_0] = e^{-\varkappa F(0)} = 0.14,$$

что похоже на правду (см. раздел ...).

3.3 Оценка контрастности по наблюдаемой глубине доплеровского провала

В первом приближении, не зная значения \varkappa , можем оценить его, зная глубину доплеровского провала в резонансе ν_0 . Введем для удобства приведенную интенсивность $\beta \stackrel{\text{def}}{=} I_{\text{out}}/I_{\text{in}}$, далее в этом разделе всегда полагаем $\nu = \nu_0$, тогда

$$\beta(s=0) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_0 = e^{-\varkappa F(0)}, \quad \Rightarrow \quad \varkappa = \frac{\ln 1/\beta_0}{F(0)},$$

где $1 - \beta_0$ – глубина доплеровского провала.

Тогда контрастность спектроскопии K , определенную, как отношение высоты лэмбского пика к глубине доплеровского провала, можем найти, как

$$K(s) = \frac{e^{-\varkappa F(s)} - e^{-\varkappa F(0)}}{1 - e^{-\varkappa F(0)}} = \frac{\beta_0^{F(s)/F(0)} - \beta_0}{1 - \beta_0}.$$

Ниже на рисунке приведены значения контрастности $K(s)$ для различных β .

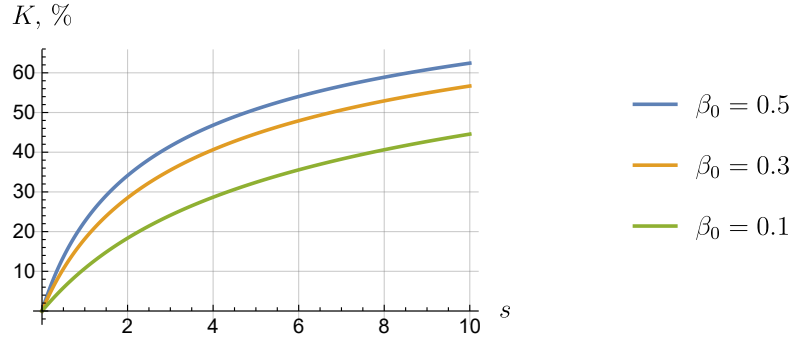


Рис. 4: Оценка контрастности при различных значениях β , как функция от s

3.4 Сравнение теоретической и экспериментальной оценки \varkappa

Пока что, в контексте выбранной модели, хуже всего можем оценить l , поэтому будем сравнивать теоретическую и экспериментальную оценку \varkappa по значению l при котором они бы сошлись:

$$l = \underbrace{\frac{\log 1/\beta_0}{F[0, \nu_0]}}_{\varkappa} \underbrace{\frac{\sqrt{\pi}}{n\sigma_0} \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}}_{v_0}.$$

Считая $\sigma_0 = \sigma_0^{\text{теор}}$, построим зависимость $l[\beta]$, рис. 5.

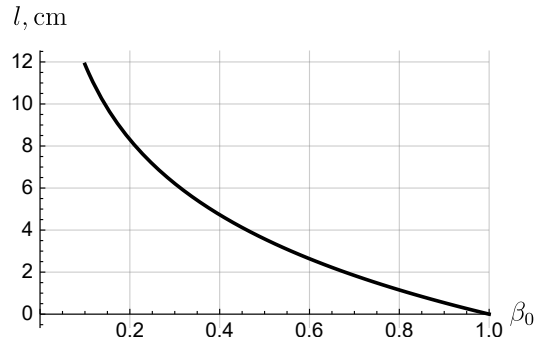


Рис. 5: Оценка длины взаимодействия лазера с литием при температуре в 300 °С

4 Эксперимент

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

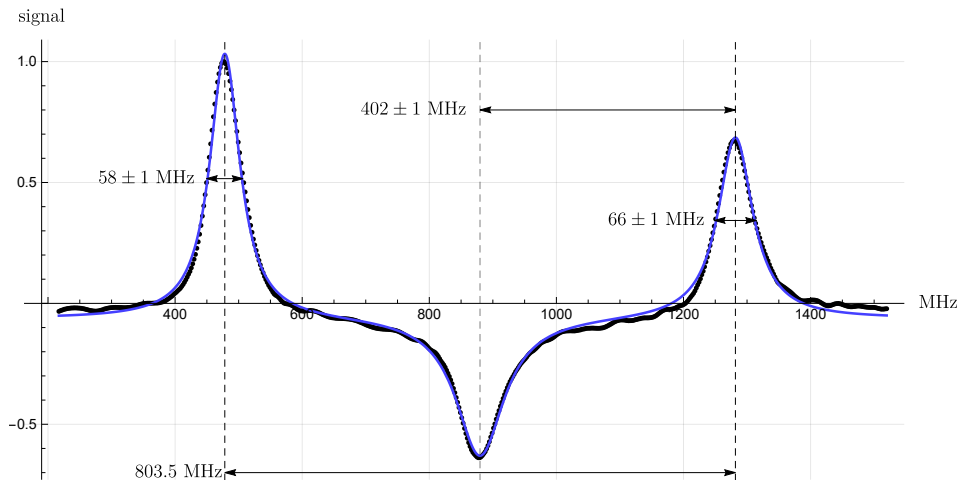


Рис. 6: Полученное уширение линий для D2

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

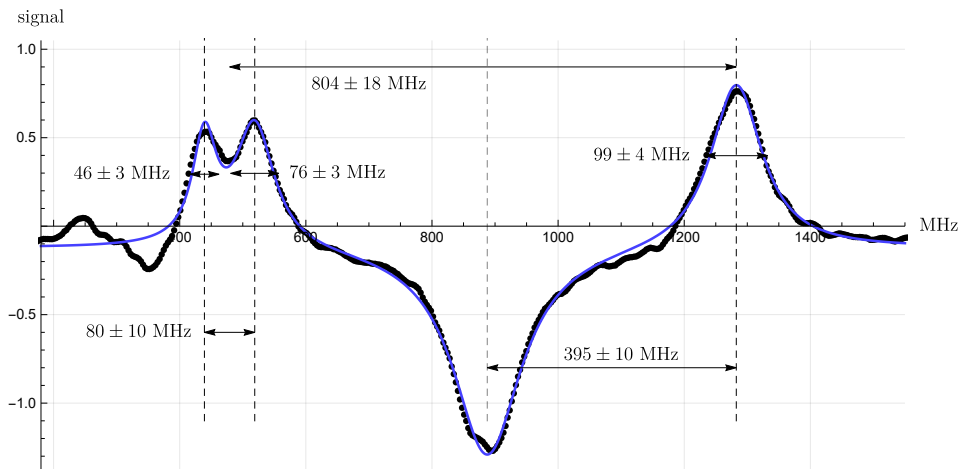


Рис. 7: Полученное уширение линий для D1