1 Квадратичные нелинейные явления

К этим явлениям относится:

- генерация второй оптической гармоники;
- оптическое выпрямление;
- генерация суммарной частоты, ГСЧ;
- генерация разностной частоты, ГРЧ;
- генерация параметрических волн.

1.1 Генерация параметрических волн

Стоит заметить, что генерация параметрических волн относится в том числе и к линейной оптике, точнее возникает из спонтанного ($\sim$ линейного) параметрического излучения.

Так сложилось, что только нелинейные среды проявляют в том числе и линейный эффект. Падающая волны с частотой ω_P, генерирует ω_1, $\omega_2 < \omega_P$ (примерно в два раза), однако $\omega_1 + \omega_2 = \omega_P$.

Можем записать уравнение нелинейной оптики

$$\frac{dA_1}{dz} = i\frac{2\pi\omega_1}{cn_1}\xi^{(2)}A_P A_2^* e^{ik\Delta z};$$
$$\frac{dA_2}{dz} = i\frac{2\pi\omega_2}{cn_2}\xi^{(2)}A_P A_1^* e^{ik\Delta z};$$
$$\frac{dA_P}{dz} = i\frac{2\pi\omega_P}{cn_P}\xi^{(2)}A_1 A_2^* e^{-ik\Delta z}.$$

Забавно, что эти уравнения не имеют решений, если $A_1(0) = A_2(0) = 0$, так что необходимое условие параметрической генерации:

$$A_1(0) \neq 0, \qquad A_2(0) \neq 0.$$

Стоит заметить, что генерация суммарной и разностной частоты, а также генерация второй гармоники не требовали специфических начальных условий (затравок).

Для формирования «тонкой» угловой струкутуры необходима фазовая синхронизация излучателей во всем объеме среды. О какой фазовой синхронизации двухчастотных пучков может идти речь? Суммарное поле двух волн разных частот и направлений:

$$A\cos(\omega_1 t - \boldsymbol{k}_1\boldsymbol{r}) + A\cos(\omega_2 t - \boldsymbol{k}_2\boldsymbol{r}) = 2A\cos\left(\tfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t - \tfrac{\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2}{2}\boldsymbol{r}\right)\cos\left(\tfrac{\omega_1-\omega_2}{2}t - \tfrac{\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_2}{2}\boldsymbol{r}\right),$$

где второй множитель соответствует «медленным» осцилляциям.

Рассмотрим, в частности, коллинейарное взаимодействие, и заданное поле накачки, также считаем $\Delta k = 0$, а тогда $e^{i\Delta kz} = 1$. Также считаем, что $A_1(0) \neq 0$ и $A_2(0) \neq 0$:

$$\frac{dA_1}{dz} = i\frac{2\pi\omega_1}{cn_1}\chi^{(2)}A_p A_2^*(z)$$
$$\frac{dA_2}{dz} = i\frac{2\pi\omega_2}{cn_2}\chi^{(2)}A_p A_1^*(z),$$

которые уже и модем решить.

Решение для «фотонных» амплитуд:

$$a_1(z) = \tfrac{1}{2}\left(a_{10} + ie^{i\varphi}a_{20}^*\right)e^{g|A_p|z} + \tfrac{1}{2}\left(a_{10} - ie^{i\varphi}a_{20}^*\right)e^{-g|A_p|z}$$
$$a_2(z) = \tfrac{1}{2}\left(ie^{i\varphi}a_{10} + a_{20}^*\right)e^{g|A_p|z} + \tfrac{1}{2}\left(-ie^{i\varphi}a_{10} + a_{20}^*\right)e^{-g|A_p|z}$$

где введено

$$a = \sqrt{\frac{8\pi}{cn}\hbar\omega}\; A, \qquad g = 4\sqrt{2\pi\hbar\frac{\pi^3\omega_1\omega_2\omega_P}{c^3 n_1 n_2 n_p}}\;\chi^{(2)}.$$

Стоит заметить, что можно явно выделить затухающие и возрастающие слагаемые.

Диффузия фазы. Допустим теперь, что нас интересует

$$f(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1(t)) + A\cos(\omega_2 t + \varphi_2(t)).$$

При чём должно выполняться $\dot\varphi_1 + \dot\varphi_2 = 0$, а тогда $\varphi_2 = -\varphi_1$, так получаем

$$f(t) = 2A\cos\left(\tfrac{\omega_P}{2}t\right)\cos\left(\ldots + \varphi(t)\right),$$

итого нули такой $f(t)$ будет строго периодично переходить через нули – будет носить строго монохроматический характер, но это не означает возникновение монохроматической волны.

1.2 Применение нелинейной оптики

Детектирование. Рассмотрим среду с $\chi^{(2)} \neq 0$, светим в нее ИК излучение $\omega_2 \ll \omega_1$, светим в видимом диапазоне, и на выходе получать что-то более подходящее для детектирования.

ТГц диапазон. Пускаем в анизотропную среду лазерный импульс, на выходе имеем разностные частоты. Спектр пучка – гаусс с границами на ω_1 и ω_2, где $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_{1,2}$.

Измерение числа фотонов. Аналогично пускаем лазерный импульс, и он проходит, почти не теряя в интенсивности, однако мы узнаем число фотонов: неразрушающее квантовое измерение числа фотонов с помощью оптческого выпрямления.

Вообще можно оргагнизовать аналогичную историю, просто посветив на зеркало – давление света.

Измерение длительности пико- и фемтосекундных импульсов. Строим коррелятор второй гармоники через неколлинеарный синхронизм. Делим короткие импульсы на два пучка, скрещиваем их под углом φ, тогда получается пучок, шириной $\tau c/\varphi$, что уже можно измерить при малых φ.

2 Кубичные нелинейные явления

К подходящим средам относятся все среды, включаи изотропные:
$$P = \chi^{(1)}E + \chi^{(2)}E^2 + \chi^{(3)}E^3 + \ldots,$$
так что рассмотрим некоторый, достаточно информативный список:

- генерация третьей оптической гармоники;
- нелинейный показатель преломления;
- четырехволновое смещение (самодифракция излучения, обращение волнового фронта)
- генерация «параметрических волн».

Генераия третьей гармоники. В модели гармонического осциллятора, можем заметить, что при добавке, вида $U(x) \to U(X) + x^4 \;\Rightarrow\; \mathrm{eq} \to \mathrm{eq} + x^3$, возникает *самовоздействие* (изменение показателя преломления), и генерацич третьей гармоники.

Рассматривая сумму от синфазных источников, можно получить условие фазового синхронизма: $3\boldsymbol{k}_\omega = \boldsymbol{k}_{3\omega}$, что равносильно коллинеарности генерируемой волны и волны накачки, а также $n_\omega = n_{3\omega}$.

Заметим также, что самовоздействие не нуждается в фазовом синхронизме. Обычно вводят нелинейный покаатель преломления ($\varepsilon E = E + 4\pi P$):
$$n^2 = (n_0 + \Delta n(I))^2 = 1 + 4\pi\chi^{(1)} + 4\pi\chi^{(3)}|E|^2, \quad \Rightarrow \quad \Delta n = \frac{3\pi\chi^{(3)}}{2n_0}|E|^2 \overset{\text{def}}{=} n_2 I, \quad \Rightarrow \quad n_2 = \frac{12\pi^2\chi^{(3)}}{cn_0^2}.$$

Вообще, на возникновение $\chi^{(3)}$ влияет стрикция, ориентация молекул, тепловая нелинейность, плазменная нелинейность и так далее.

В курсе общеё физики описывается электрострикция, когда диэлектрическая жидкость поднимается. Эффект не зависит от знака заряда.

Нелинейный показатель преломления

Проялвяется в фазовой самомодуляции, самовращениие эллипса поляризации, самофокусировке, самодефокусировке и т.д.

Методом медленных амплитуд, можем получить
$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right)\tilde{A} + 2ik\,\partial_z\tilde{A} = -2\frac{k^2}{n_0}n_2|\tilde{A}|^2\tilde{A}, \qquad |\tilde{A}|^2 = I.$$
И прийти к тому, что пороговая мощность не зависит от параметров пучка.

Также можем рассчитать расстояние фокусировки:
$$z = 2.5\frac{r_0^2}{\lambda}\cdot\left(\sqrt{\frac{P}{P_{\text{крит}}}} - 0.85\right)^{-1}.$$

Стоит сказать про особенности самофокусировки импульсного излучения: «бегущие» фокусы.

Задача по критерию Неймана-Пирсона

Производится однократно измерение количества сработавших ячеек SiPM. Известно, что оно распределено по закону Пуассна $p(k,\lambda)$. Нулевая гипотеза H_0: $\lambda_{\text{dark}} = 14$.

Найдём пороговое значение k_b: $\alpha = 5 \times 10^{-6}$:

$$\int_{k_b}^{\infty} \frac{\lambda_{\text{dark}}^k}{k!} e^{-\lambda_{\text{dark}}}\, dk = \begin{cases} 7.0 \times 10^{-6}, & k_b = 33; \\ 2.8 \times 10^{-6}, & k_b = 34, \end{cases}$$

откуда можем сказать, что $k_b > 33$ – подходит. Более точное значение $\alpha = 5.0 \times 10^{-6}$будет достигаться при $k_b = 33.375$.

Найдём теперь подходящее для $\beta = 0.9$ значение S:

$$\beta = \int_0^{k_b} p(k,\, \lambda_{\text{dark}} + S)\, dk, \quad \Rightarrow \quad 1 - \beta = \begin{cases} 0.91, & S = 28; \\ 0.89, & S = 27, \end{cases}$$

откуда находим $S = 28$.

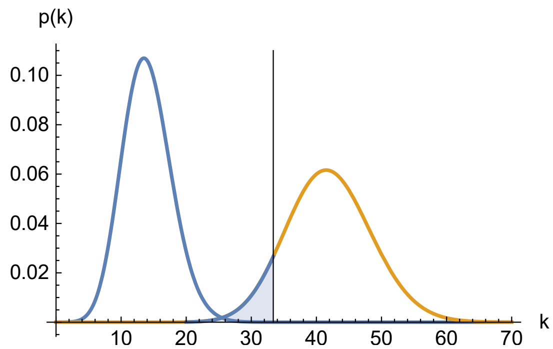

Рис. 1: Распределения для λ_{dark} и $\lambda_{\text{dark}} + S$.

Задача про два пучка

Пучок расходится под углом λ/d, тогда эффективная можность упадет в $(\lambda/d)^2$. Така как число квантов совпадает, то можем считать

$$N \sim \left(\frac{\lambda}{d}\right)^{-2} \frac{hc}{\lambda} \sim \frac{1}{\lambda^3}, \quad \Rightarrow \quad \frac{N_1}{N_2} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^3 = 10^{15},$$

где $\lambda_2 = 10$ см, $\lambda_1 = 1$ μм.