# Заметки семинаров по курсу «Уравнения математической физики»

**Автор**: Хоружий Кирилл

**От**: *12 октября 2021 г.*

## 1 Семинар от 25.09.21 (Фурье и Лаплас)

**Про Фурье**. Как раньше нашли

$$L(\partial_t)G(t)=\delta(t),\quad\Rightarrow\quad \hat{x}(\omega)=\int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t}x(t)\,dt,\quad x(t)=\int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t}\hat{x}(\omega)\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Для этого должно выполняться

$$\int |x(t)|\,dd<+\infty.$$

*Например*, для $\partial_t+\gamma$:

$$(\partial_t+\gamma)G(t)=\delta(t),\quad\Rightarrow\quad \int_{\mathbb{R}}\frac{dt}{\cdots}e^{-i\omega t}\,dt=x(t)e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty},\quad\Rightarrow\quad (i\omega+\gamma)\hat{G}(\omega)=1,\quad\Rightarrow\quad \hat{G}(\omega)=\frac{1}{i\omega+\gamma}.$$

Так приходим к уравнению

$$G(t)=\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{i\omega t}}{\omega-i\gamma}\frac{d\omega}{2\pi}=\{e^{-\gamma t},\quad t>00,\quad t<0\quad\Rightarrow\quad \hat{G}(\omega)=\theta(t)e^{-|t|}.$$

Однако, при $\hat{L}=\partial_t-\gamma$ мы бы получили

$$G_A(t)=\theta(-t)e^{\gamma t},$$

хотя вообще должно быть (если посчитать через неопределенные коэффициенты)

$$G_R(t)=\theta(t)e^{\gamma t},$$

которая растёт.

В методе с Фурье будут получаться функции Грина затухающие, но, возможно, без причинности. В методе неопределенных коэффициентов исходим из причинности, но может быть рост $\sim e^{\gamma t}$.

Кроме того, в Фурье всегда предполагается $x(t\to-\infty)=0$ и $x(t\to+\infty)=0$. Также может случиться

$$(\partial_t^2+\omega_0^2)G(t)=\delta(t),\quad\Rightarrow\quad \hat{G}(\omega)=\frac{1}{\omega^2-\omega_0^2},$$

с особенностями на вещественной оси, что можно решить, сместив полюса в $\mathbb{C}$.

**Свёртка**. Рассмотрим уравнение

$$L(\partial_t)x(t)=f(t),\quad L(\partial_t)G(t)=\delta(t).$$

Фурье переводит

$$\int_{\mathbb{R}}\partial_x^n x(t)e^{-i\omega t}\,dt=(i\omega)^n\hat{x}(\omega).$$

Тогда

$$L(i\omega)\hat{x}(\omega)=\hat{f}(\omega),\quad L(i\omega)\hat{G}(\omega)=1,\quad\Rightarrow\quad \hat{G}(\omega)=\frac{1}{L(i\omega)}.$$

Также нашли, что

$$\hat{x}(\omega)=\frac{\hat{f}(\omega)}{L(i\omega)}=\hat{f}(\omega)\hat{G}(\omega),\quad\Rightarrow\quad x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(t-s)f(s)\,ds.$$

**Преобразование Лапласа**. Пусть есть некоторое преобразование

$$\tilde{f}(p)=\int_0^{\infty}e^{-pt}f(t)\,dt,$$

где подразумевается, что $\operatorname{Re}p\geqslant 0$ и, вообще, в Фурье можно $p\in\mathbb{C}$.

Пусть $p=i\omega$, где $\omega\in\mathbb{R}$. Тогда

$$\tilde{f}(i\omega)=\int_{\mathbb{R}}e^{-i\omega t}f(t)\,dt=\hat{f}(\omega),\quad\Rightarrow\quad f(t)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}=\int_{\mathbb{R}}\tilde{f}(i\omega)e^{i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}=\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{pt}\tilde{f}(p)\frac{dp}{2\pi}.$$

В вычислениях выше мы предполагали, что $f(t \to \infty) = 0$.

Обойдём это, пусть $|f(t)| < Me^{st}$, при $s > 0$. Возьмём $p_0 > s$, тогда
$$\tilde{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-p_0 t} e^{-(p-p_0)t} f(t)\, dt = \tilde{g}(p - p_0),$$
где вводе $g(t) = e^{-ip_0 t} f(t)$, которая уже убывает на бесконечности. Обратно:
$$g(t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \tilde{g}(p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi} = \int_{p_0 - i\omega}^{p_0 + i\omega} \tilde{g}(p - p_0) e^{-p_0 t} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}.$$
Так пришли к форме обращения
$$f(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\omega} \tilde{f}(p) \frac{dp}{2\pi i}, \qquad \tilde{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-p_0 t} e^{-(p-p_0)t} f(t)\, dt = \tilde{g}(p - p_0), \tag{1}$$
где $g(t) = e^{-ip_0 t} f(t)$.

Забавный факт, из леммы Жордана: при $t < 0$ $f(t < 0) = 9$, по замыканию дуги по часовой стрелке (вправо). Выбирая $p_0$ так, чтобы все особенности лежали левее $p_0$, можем получать причинные функции.

**Производная**. Найдём преобразование Лапласа для $\partial_t f(t)$:
$$\int_0^\infty \frac{df}{dt} e^{-pt}\, dt = f e^{-pt}\Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt = p\tilde{f}(p) - f(+0).$$
Но, для функции Грина $L(\partial_t) G(t) = \delta(t)$, тогда
$$L(\partial_t) G_\varepsilon(t) = \delta(t - \varepsilon), \qquad G_\varepsilon(t) = G(t - \varepsilon), \quad \Rightarrow \quad G_\varepsilon(0) = 0,$$
где $G_\varepsilon \to G(t)$ при $\varepsilon \to 0$.

Преобразуем[1] по Лапласу уравнения выше
$$L(p) G(p) = e^{p\varepsilon} = 1, \quad \Rightarrow \quad G_\varepsilon(p) = \frac{1}{L(p)}, \quad \overset{\varepsilon \to 0}{\Rightarrow} \quad G(p) = \frac{1}{L(p)}.$$
Так получаем
$$G(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\omega} \frac{e^{pt}}{\tilde{L}(p)} \frac{dp}{2\pi i}, \tag{2}$$
где $p_0$ правее всех особенностей.

**Пример**. Рассмотрим $L = \partial_t + \gamma$, тогда
$$(p + \gamma) G(p) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(p) = \frac{1}{p + \gamma}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{pt}}{p + \gamma} \frac{dp}{2\pi i} = \theta(t) e^{-\gamma t}.$$
Аналогично, пусть $L = \partial_t^2 + \omega^2$, тогда $LG(t) = \delta(t)$, и
$$G(p) = \frac{1}{p^2 + \omega^2}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\omega} \frac{e^{pt}}{p^2 + \omega^2} \frac{dp}{2\pi i} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \ldots, & t > 0 \end{cases} = \theta(t) \left( \frac{e^{i\omega t}}{2i\omega} + \frac{e^{-i\omega t}}{-2i\omega} \right) = \theta(t) \frac{\sin \omega t}{\omega}.$$

В общем виде, пусть $L(\partial_t) G(t) = \delta(t)$, тогда
$$L(p) G(p) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(p) \frac{1}{L(p)}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\omega} \frac{e^{pt}}{L(p)} \frac{dp}{2\pi i}.$$

Поговорим про свёртку:
$$Lx = f, \quad \Rightarrow \quad L(p) x(p) = f(p), \quad L(p) G(p) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(p) = \frac{1}{L(p)}.$$
Тогда получается
$$x(p) = \frac{f(p)}{L(p)} = f(p) G(p), \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int_0^t G(t - s) f(s)\, ds.$$

**Уравнение Вольтера**. Иногда бывает уравнения на $x(s)$ вида
$$f(t) = \int_0^t x(s) K(t - s)\, ds. \tag{3}$$
Через преобразрвание Лапласа, находим
$$f(p) = x(p) K(p), \quad \Rightarrow \quad x(p) = \frac{f(p)}{K(p)}. \tag{4}$$

[1] Здесь и далее $f(t)$ – функция, $f(\omega) = \hat{f}(\omega)$ – Фурье образ, $f(p) = \tilde{f}(p)$ – преобразование Лапласа.

В общем виде тогда находим

$$x(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \frac{f(p)}{K(p)} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}.$$

Кстати, забавный факт:

$$\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} 1 \cdot e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = e^{p_0 t} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = e^{p_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \delta(t), \tag{5}$$

то есть преобразование Лапласа от константы – дельта функция.

Рассмотрим, например

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{p+1-1}{p+1} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} - \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{pt}}{p+1} \frac{dp}{2\pi} = \delta(t) - \theta(t) e^{-t}.$$

Также верно, что

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} p e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \delta'(t).$$

Действительно,

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} \right) = \frac{d}{dt} \delta(t) = \delta'(t).$$

Важно, что можно делать функции маленькими

$$\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} f(p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \frac{f(p)}{p^n} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}. \tag{6}$$

**Неоднородная релаксация**. Рассмотрим уравнение

$$(\partial_t + \gamma(t)) G(t,s) = \delta(t-s), \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) f(s)\, ds,$$

где продолжаем требовать причинность $G(t, s > t) = 0$. Для начала, рассмотрим $t > s$, тогда

$$(\partial_t + \gamma(t)) G(t) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dG}{G} = -\gamma(t)\, dt, \quad \Rightarrow \quad G(t,s) = A(s) \exp\left( - \int_{t_0}^{t} \gamma(t')\, dt' \right).$$

Также записываем граничные условия:

$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \ldots\, ds, \quad \Rightarrow \quad G(s+0, s) = 1.$$

Так можем найти

$$A(s) \exp\left( - \int_{t_0}^{s} \gamma(t')\, dt' \right) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(t,s) = \theta(t-s) \exp\left( - \int_{s}^{t} \gamma(t')\, dt' \right), \tag{7}$$

где мы разбили

$$\int_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{s} + \int_{s}^{t},$$

и получили, что хотели.

*Комментарий про дельта функцию.* Главное, нужно показать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x) = 1, \qquad \lim_{a\to 0} \delta_a(x) = 0, \text{ при } x \neq 0.$$

Вообще можем плодить дельтаобразные последовательности, взяв $f$ с единичным интегралом и

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right).$$

*Комментарий про преобразование Лапласа.* Для функции вида

$$\frac{1}{\sqrt{p+\alpha}},$$

необходим аппарат разрезов, так что её можно сделать с шифтом на неделю.

На следующей недели будет контрольная. Необходим аппарат метода неопределенных коэффициентов, матричные экспоненты, решение диффуров через Фурье (не всегда причинный результат), а также преобразование Лапласа. Вычеты скорее всего в районе второго порядка и меньше. Ещё полезно вспонить, как записывать начальные условия: осцияллятор, осциллятор с затуханием.

# 2 Семинар от 12.09.21

Раннее решалась задача Коши, вида $L(\partial_t)x(t) = \varphi(t)$. Можо рассмотреть другой класс задач:

$$f(0) = f(\pi) = 0, \qquad (\partial_x^2 + 1)f(x) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = A\sin x,$$

где $A$ – любая, то есть решение не единственно. Более того, решение может не существовать.

Однако, покуда мы рассматриваем диффуры первого порядка, граничное условие всего одно: значение функции в точке: $x(0) = x_0$, что эквивалентно задаче Коши.

## 2.1 Задача Штурма-Лиувилля

Интереснее на диффурах II порядка, один из наиболее ярких примеров: *задача Штурма-Лиувилля*:

$$\hat{L} = \partial_x^2 + Q(x)\partial_x + U(x), \qquad \hat{L}f(x) = \varphi(x), \qquad \begin{cases} \alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = 0 \\ \alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0, \end{cases}$$

где[2] $|\alpha_1| + |\beta_2| \neq 0$ и $|\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0$.

Заметим, что уравнение линейно: если $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, то $f = f_1 + f_2$, а значит ответ можно найти в виде

$$f(x) \int_a^b G(x,y)\varphi(y)\, dy,$$

однако система теперь не является транслционно инвариантной.

Граничные условия на $G$:

$$\alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = \int_a^b \underbrace{(\alpha_1 G(a,y) + \beta_1 G'_x(a,y))}_{\text{непрерывен}} \varphi(y)\, dy = 0,$$

что верно $\forall \varphi$. По лемме Дюбуа-Реймона, можем свести уравнение к виду

$$\alpha_1 G(a,y) + \beta_1 G'_x(a,y) \equiv 0,$$

то есть функция Грина $G$ наследует граничные условия. Аналогично,

$$\alpha_2 G(b,y) + \beta_2 G'_x(b,y) = 0.$$

Запищем уравнение на $G(x,y)$:

$$\varphi(y) = \delta(y-y'), \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = \int_a^b G(x,y)\delta(y-y')\, dy = G(x,y'), \qquad \Rightarrow \qquad \hat{L}G(x,y) = \delta(x-y).$$

Решения имеет смысл разбить на $x \neq y$, и, в частности, рассмотрим $x < y$:

$$\begin{cases} \hat{L}G(x,y) = 0 \\ \alpha_1 G(a,y) + \beta_1 G'_x(a,y) = 0 \end{cases}, \qquad \Rightarrow \qquad G(x,y) = A(y)\cdot u(x), \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \hat{L}u(x) = 0 \\ \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0 \end{cases}$$

Более того, почему бы и не доопределить $u(a) = -\beta_1$ и $u'(a) = \alpha_1$, таким образом свели задачу к задаче Коши, решение которой существует и единственно.

Аналогично для $x > y$:

$$\hat{L}G(x,y) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad G(x,y) = B(y)v(x), \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \hat{L}v = 0 \\ \alpha_2 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0 \end{cases}$$

где снова есть задача Коши, решение которой существует и единственно.

**Сшивка**. Во-первых заметим, что $G$ непрерывна, а $G'$ испытыывает скачок:

$$G(y+0,y) = G(y-0,y), \qquad \Rightarrow \qquad A(y)u(y) = B(y)v(y).$$

Интегрируя, находим

$$G'_x(y+0,y) - G'_x(y-0,y) = 1, \qquad \Rightarrow \qquad B(y)v'(y) - A(y)u'(y) = 1.$$

Собирая уравнения вместе, находим, что

$$B(y)\underbrace{\left(\frac{v'(y)u(y) - v(y)u'(y)}{u(y)}\right)}_{W[u,v]} = 1, \qquad \Rightarrow \qquad B(y) = \frac{u(y)}{W}, \qquad A(y) = \frac{v(y)}{W(y)},$$

[2] Часто можно встретить нулевые граничные условия: $f(a) = f(b) = 0$.

где $W[u,v]$ – вронскиан. Итого, можем выписать ответ:

$$G(x,y) = \frac{1}{W(y)} \begin{cases} v(y)u(x), & x < y; \\ v(x)u(y), & x > y. \end{cases}$$

Можем записать, когда решение $\exists$ и !:

$$W \neq 0, \quad \Rightarrow \quad \text{Sol } \exists \& !.$$

Отсюда вытекает теорема Стеклова:

**Thr 2.1** (теорема Стеклова)**.** *Если $u$, $v$ – спец. ФСР, то решение существует и единственно:*

$$f(x) = \int_a^b G(x,y)\varphi(y)\,dy, \qquad \hat{L}^{-1}\varphi = f.$$

*Если $W = \text{const}$, то $G(x,y) = G(y,x)$ – симметричное ядро, а значит $L^{-1}$ – симметричный, самосапряженный оператор $\Rightarrow$ у $\hat{L}$ есть ОНБ из собственных функций.*

**Про вронскиан**. Можно записать формулу Лиувилля-Остроградского

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^x Q(z)\,dz\right).$$

**Def 2.2.** *Специальной ФСР* называется решение уравнении $\hat{L}u = 0$ и $\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0$, и аналогичного уравнения по $v(x)$ с граничным условием в $b$, если $W[u,v] \neq 0$, то есть $u$ и $v$ линейной независимы.

**Пример I**. Рассмотрим уравнения

$$\begin{cases} \partial_x^2 f(x) = \varphi(x) \\ f(a) = f(b) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u(x) = x - a, \quad v(x) = x - b, \quad \Rightarrow \quad W = \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} = b - a = \text{const},$$

а значит

$$G(x,y) = \frac{1}{b-a} \begin{cases} (y-b)(x-a), & x < y \\ (x-b)(y-a), & x > y. \end{cases}$$

**Пример II**. Рассмотрим двумерный цилиндр, радуса $R$, вне которого $\rho(r > R) = 0$, $\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(r)$. Рассмотрим уравнения Лапласа:

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho, \quad \Rightarrow \quad (\partial_r^2 + \tfrac{1}{r}\partial_r)\varphi = -4\pi\rho.$$

Добавим граничные условия: потенциал определен с точностью до константы, так что пусть $\varphi(R) = 0$, также хотим конечность $\varphi$ при $r = 0$, так что пусть $\varphi(0) = 1$.

Получили задачу, где при $r < r'$

$$\left\{ \left(\partial_r^2 + \tfrac{1}{r}\partial_r\right) u(r) = 0, \quad u(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{C}{r}, \quad \Rightarrow \quad u(r) = C\ln r + D = 1.\right.$$

Аналогично, рассмотрим $r > r'$:

$$\left\{ \left(\partial_r^2 + \tfrac{1}{r}\partial_r\right) v(r) = 0, \quad v(R) = 0, \quad \Rightarrow \quad v(R) = C'\ln r + D', \quad \Rightarrow \quad v = \ln\left(\frac{r}{R}\right).\right.$$

Сразу вычислим

$$W[u,\, v] = \det\begin{pmatrix} 1 & \ln r/R \\ 0 & 1/r \end{pmatrix} = \frac{1}{r}, \quad \Rightarrow \quad G(r,r') = r' \left\{ \ln\tfrac{r'}{R}, \quad r < r' \ln\frac{r}{R}, \quad r > r' \right. \quad \Rightarrow \quad \varphi(r) = \int_0^R G(r,r')\left(-4\pi\rho(r')\right)\,dr'.$$

## 2.2 Задача с периодическими условиями

Рассмотрим такой же $\hat{L}$, и граничные условия в виде

$$\begin{cases} f(a) = f(b) \\ f'(a) = f'(b), \end{cases}$$

то есть решение периодично.

**Пример**. Рассмотрим задачу

$$\hat{L} = \partial_x^2 + \varkappa^2,$$

с условиями на $[-\pi, \pi]$.

При $x < y$:

$$G(x,y) = A_1(y)\sin\varkappa(x+\pi) + B_1(y)\cos\varkappa(x+\pi),$$

и аналогично для $x > y$:

$$G(x,y) = A_2 \sin \varkappa(x-\pi) + B_2(y) \cos \varkappa(x-\pi).$$

Запишем граничные условия:

$$G(-\pi, y) = G(\pi, y), \quad \Rightarrow \quad B_1(y) = B_2(y) \overset{\text{def}}{=} B(y)$$
$$G'_x(-\pi, y) = G'_x(\pi, y), \quad \Rightarrow \quad A_1(y) = A_2(y) \overset{\text{def}}{=} A(y).$$

Тогда нашли, что

$$G(x,y) = \begin{cases} A \sin \varkappa(x+\pi) + B \cos \varkappa(x+\pi) \\ A \sin \varkappa(x-\pi) + B \cos \varkappa(x-\pi) \end{cases}$$

Теперь запишем непрерывность:

$$A \sin \varkappa(x+\pi) + B \cos \varkappa(x+\pi) = A \sin \varkappa(x-\pi) + B \cos \varkappa(x-\pi).$$

А также скачок производной

$$G'_x(y+0,y) - G'_x(y-0,y) = 1, \quad \Rightarrow \quad A \cos \varkappa(x-\pi) - B \sin \varkappa(x-\pi) - A \cos \varkappa(x+\pi) + B \cos \varkappa(x+\pi) = \varkappa^{-1}.$$

Решая эту систему находим, что

$$2 \sin \pi\varkappa \begin{pmatrix} \cos \varkappa y & -\sin \varkappa y \\ \sin \xi y & \cos \varkappa y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\varkappa \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \sin \pi\varkappa} \begin{pmatrix} \cos \varkappa y & \sin \varkappa y \\ \sin \varkappa y & \cos \varkappa y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\varkappa \end{pmatrix} = \frac{1}{2\varkappa \sin \pi\varkappa} \begin{pmatrix} \sin xy \\ \cos xy \end{pmatrix}.$$

Подставляя в $G(x,y)$, находим[3]

$$G(x,y) = \frac{1}{2\varkappa \sin \pi\varkappa} \begin{cases} \cos\left(\varkappa(x-y) + \varkappa\pi\right), & x < y \\ \cos(\varkappa(x-y) - \varkappa\pi), & x > y. \end{cases}$$

Всё это было, повторимся, для уравнения:

$$\left(\partial_x^2 + \varkappa^2\right) f(x) = \varphi(x), \quad \Rightarrow \quad f(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} G(x,y)\varphi(y)\, dy.$$

[3]К дз будет полезно заметить, что $G(x,y) = G(x-y)$ – задача трансляционно инвариантна.