Билеты к государственному экзамену по курсу «общая физика»

Авторы заметок: Хоружий Кирилл
Примак Евгений

От: *18 октября 2021 г.*

Содержание

1 Квантовая механика

1.46 Излучение абсолютно черного тела

toc: *Излучение абсолютно черного тела. Формула Планка, законы Вина и Стефана-Больцмана.*

Введем лучистую энергию, раскладывая по частотам или длинам волн:

$$u = \int_0^\infty u_\omega \, d\omega = \int_0^\infty u_\lambda \, d\lambda,$$

где u_λ и u_ω – спектральные плотности лучистой энергии. При этом

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}, \qquad \frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{d\omega}{\omega}, \qquad u_\lambda = \frac{\omega}{\lambda} u_\omega, \qquad u_\omega = \frac{\lambda}{\omega} u_\lambda.$$

В теорфизе обычно u_ω, в эксперименте чаще u_λ (как удобно).

Поток лучистой энергии, проходящий за время dt через площадку ds в пределах телесного угла $d\Omega$, ось которого перпендикулярна к площадке ds, можно представить, как

$$d\Phi = I \, ds \, d\Omega \, dt, \qquad I = \int_0^\infty I_\omega \, d\omega,$$

где I – удельная интенсивность излучения, а I_ω – удельная интенсивность излучения частоты ω.

Для равновесного излучения несложно выписать связь:

$$u = \frac{4\pi}{c} I, \qquad u_\omega = \frac{4\pi}{c} I_\omega.$$

Закон Кирхгофа. Для непрозрачного и поглощающего тела верно, что поток лучистой энергии, излучаемый площадкой ds поверхности тела внутрь телесного угла $d\Omega$:

$$d\Phi = E_\omega \, ds \cos\varphi \, d\Omega \, d\omega \, dt,$$

где φ – угол между направлением излучения и нормалью к площадке ds. Велична E_ω – *излучаетльная способность* поверхности тела, в направлении угла φ.

Поглощательной способностью A_ω поверхности для излучения той же частоты, называется величина, показывающая, какая доля энергии падающего излучения, поглощается рассматриваемой поверхностью. Величины E_ω и A_ω – характеристики тела, определяемые только температурой.

Рассмотрев тело в ящике, можем получить *закон Кирхгофа*:

$$\frac{E_\omega}{A_\omega} = I_\omega, \tag{1.1}$$

таким образом $\frac{E_\omega}{A_\omega}$ – универсальная функция только частоты и температуры для каждого тела.

Def 1.1. *Абсолютно черным* называется тело : $A_\omega \equiv 1 \ \forall\omega$.

Далее излучательную способность АЧТ примем за $e_\omega \equiv I_\omega$. Излучение АЧТ изотропно, а значит подчиняется *закону Ламберта*:

$$\frac{d\Phi}{d\Omega \, ds \cos\theta} = B_\theta = \mathrm{const}(\theta).$$

Закон Стефана-Больцмана. Выведем этот закон, *методом циклов*. Пусть есть некоторая оболочка, при увеличении объема на dV за счёт давления света совершается работа $\mathcal{P}\, dV$, где $\mathcal{P} = \frac{1}{3}u$, а u –интегральная плотность лучистой энергии. Внутренняя энергия излучения в оболочке uV, откуда находим

$$\mathcal{P}\, dV = -d(uV), \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3} u \, dV + V \, du = 0, \quad \Rightarrow \quad uV^{4/3} = \mathrm{const}, \quad \mathcal{P}V^{4/3} = \mathrm{const},$$

так получили *уравнения адиабаты* для изотропного изучения, с постоянной адиабаты $\gamma = 4/3$.

В силу эффекта Дполера, при адиабатическом сжатии должен меняться спектральный состав, пусть $\omega \to \omega'$, при этом:

$$u_\omega \, d\omega \cdot V^{4/3} = u'_{\omega'} \, d\omega \cdot V'^{4/3} = \mathrm{const},$$

где V' и $u'_{\omega'}$ – объем и спектральная плотность энергии излучения частоты ω' в конце процесса.

Произведем теперь над излучением АЧТ *цикл Карно* (см. Сивухин, т. IV, §115). А можно этого и не делать, а подставить $U = Vu(T)$ и $\mathcal{P} = \frac{1}{3}u(T)$ в формулу

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial T}\right)_V - \mathcal{P}, \quad \Rightarrow \quad u/T^4 = \mathrm{const},$$

что и составляет закон Стефана-Больцмана.

Пользуясь формулой Планка, можем уточнить, что
$$u = \frac{h}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \frac{\omega^3\,d\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1} = \frac{k^4T^4}{\pi^2c^3\hbar^3}\int_0^\infty \frac{x^3e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx = \frac{8}{15}\frac{\pi^5k^4}{c^3h^3}T^4 = \frac{\pi^2k^4}{15c^3\hbar^3}.$$
На практике удобнее говорить про энергетическую светимость S для АЧТ, которая связана с яркостью B излучающей поверхности соотношением $S = \pi B = \pi I = cu/4$, а значит
$$S = \sigma T^4, \qquad \sigma = \frac{\pi^2k^4}{60c^2/\hbar^3} = \frac{2\pi^5k^4}{15c^2h^3} = 5.670\times10^{-8}\ \text{Вт}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{K}^{-4},$$
где σ – *постоянная Стефана-Больцмана.*

Теорема Вина. Рассмотрим сферически симметричную систему (вообще вроде можно показать что в общем случае изотропия излучения сохраняется), сожмем от V_1 до V_2, уравновесим (необратимый процесс), расщирим от V_2 до V_1, получим адиабатический *обратимый* круговой процесс, что невозможно, а значит верна следующая теорема:

Thr 1.2 (теорема Вина)**.** *Равновесное излучение, в оболочке с идеально отражающими стенками, остается равновесным при квазистатическом изменении объема системы.*

Рассмотрим сферическую оболочку с идеально зеркальными стенками. Рассмотрим луч, падающий под углом θ, тогда время между думя последовательными отражениями равно $\Delta t = (2r/c)\cos\theta$, за это время радиум оболочки получит приращение $\Delta r = r\delta\Delta t$. При При каждом отражении происходит доплеровское изменение частоты:
$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{2\dot r\cos\theta}{c} = -\frac{2\Delta r\cos\theta}{c\Delta t} = -\frac{\Delta r}{r}, \quad\Rightarrow\quad \frac{d\omega}{\omega}+\frac{dr}{r} = 0, \quad\Rightarrow\quad \omega r = \text{const}.$$
Так как $r\sim V^{1/3}$, то можно записать в чуть более общем виде:
$$\omega^3 V = \text{const},$$
что объединяя с другми адиабатическими инвариантами и законом Стефана-Больцмана, находим *закон смещения Вина* в наиболее общей форме:
$$\frac{\omega^4}{u} = \text{const}, \qquad \frac{\omega}{T} = \text{const}, \qquad \frac{u_\omega\,d\omega}{\omega^4} = \text{const}. \tag{1.2}$$
По теореме Вина излучение остается равновесным, так что можно было бы такж и нагревать/охлаждать стенки, да и вообще: полученные результаты – свойства только самого равновесного излучения, не связанные с процессами.

Максимумы спектральной плотности. Их последней формулы можем получить[1]
$$u_\omega(\omega,T) = \frac{\omega^4}{\omega'^4}\frac{d\omega'}{d\omega}u'_{\omega'}(\omega',T) = \frac{T^3}{T'^3}u'_{\omega'}\left(\frac{T'}{T}\omega,\,T'\right) = \text{const}(T'), \quad\Rightarrow\quad u_\omega(\omega,T) = T^3\cdot\varphi_1\left(\frac{\omega}{T}\right) = \omega^3 f_1\left(\frac{\omega}{T}\right),$$
где φ, f – универсальные функции. Аналогично можно переписать, в виде
$$u_\lambda = T^5\varphi_2(\lambda T), \qquad u_\lambda = \frac{1}{\lambda^5}f_2(\lambda T).$$
Найдём теперь максимумы u_λ обозначив, за $\lambda_{\max}$:
$$\frac{d\varphi_2}{d\lambda} = T\frac{d\varphi_2}{d(\lambda T)} = 0, \quad\Rightarrow\quad \frac{d\varphi_2}{d(\lambda T)} = 0.$$
Таким образом, при всех температурах максимум получается при одном и том же значении λT, а значит выполняется *закон смещения Вина*:
$$\lambda_{\max}\cdot T = b_\lambda = \text{const}, \qquad b_\lambda = 2.898\times10^6\ \text{нм}\cdot\text{K}$$
$$\nu_{\max}/T = b_\nu = \text{const}, \qquad b_\nu = 5.879\times10^{10}\,\text{Гц}\cdot\text{K}.$$
Введем $\beta = hc/\lambda kT$, тогда задача сводится к отысканию минимума:
$$\frac{1}{\beta^5}(e^\beta-1)\to\min, \quad\Rightarrow\quad e^{-\beta}+\frac{\beta}{5}-1 = 0, \quad\Rightarrow\quad \beta = 4.9651142, \qquad b_\lambda = \lambda_{\max}T = \frac{hc}{k\beta}.$$
При поиске β_ω уравнение получится, вида
$$(3-\beta_\omega)e^{\beta_\omega}-3 = 0, \quad \beta_\omega = \frac{\hbar\omega}{kT} = \frac{hc}{\lambda kT}, \quad\Rightarrow\quad \beta_\omega = 2.821, \quad \lambda_{\max}^{\text{по }\omega} = \frac{hc}{k\beta_\omega}\frac{1}{T}.$$
Стоит заметить, что $\lambda_{\max}^{\text{по }\omega}/\lambda_{\max} = \beta/\beta_\omega \approx 1.76$.

Формула Планка. опускаем кусок вывода про стоячие волны, формулу Рэлея-Джинса, ...
Итак, считая, что на каждую стоячую волну приходится $\bar{\mathcal{E}} = kT$, то записав энергию равновесного излучения в

[1] Интегрируя $u_\omega(\omega,T) = T^3\cdot\varphi_1\left(\frac{\omega}{T}\right)$, находим, что $u = \int_0^\infty u_\omega\,d\omega = T^4\int_0^\infty \varphi(\omega/T)\,d(\omega/T) = aT^4$.

полости в спектральном интервале $d\omega$ в виде $V u_\omega\, d\omega$, получаем:

$$u_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\bar{\mathcal{E}} \overset{*}{=} \frac{kT}{\pi^2 c^3}\omega^2, \tag{1.3}$$

где равенство со звёздочкой – формула Рэлея-Джинса, верная при малых ω.

Однако, считая, что существует минимальный квант энергии света, по теореме Больцмана, вероятности возбуждения энергетических уровней осциллятора пропорциональны

$$1,\ e^{-\mathcal{E}_0/kT}, e^{-2\mathcal{E}_0/kT}, \ldots, \qquad \Rightarrow \qquad \bar{\mathcal{E}} = \frac{\sum_{n=0}^\infty n\mathcal{E}_0 e^{-n\mathcal{E}_0/kT}}{\sum_{n=0}^\infty e^{-n\mathcal{E}_0/kT}} = \mathcal{E}_0 \frac{\sum_{n=0}^\infty n e^{-nx}}{\sum_{n=0}^\infty e^{-nx}},$$

где введено обозначение $x = \mathcal{E}_0/kT$. Вспоминая, что

$$\sum_{n=0}^\infty e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}, \qquad \sum_{n=0}^\infty n e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}, \qquad \Rightarrow \qquad \bar{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}_0}{e^{\mathcal{E}_0/kT}-1}.$$

Подставляя это в формулу (1.3), находим

$$u_\omega(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\frac{\mathcal{E}_0}{e^{\mathcal{E}_0/kT}-1}.$$

А теперь внимание, гений Планка предложил подобрать $\mathcal{E}_0$ так, чтобы выполнялся закон смещения Вина:

$$u_\omega(\omega, T) = \omega^3 f_1\left(\frac{\omega}{T}\right), \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\pi^2 c^3}\frac{\mathcal{E}_0/\omega}{e^{\mathcal{E}_0/kT}-1} = f\left(\frac{\omega}{T}\right),$$

но $\mathcal{E}_0$ – характеристика только самого осциллятора, а значит $\mathcal{E}_0 = \mathrm{const}(T)$, тогда $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0(\omega)$, откуда находим

$$\mathcal{E}_0 = \hbar\omega,$$

где $\hbar$ – постоянная Планка. Подставляя, находим

$$u_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT}-1}, \qquad u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}, \qquad u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}, \tag{1.4}$$

что и называют *формулой Планка.*