

# ЗАМЕТКИ СЕМИНАРОВ ПО КУРСУ «УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

---

Автор: Хоружий Кирилл

От: 16 октября 2021 г.

## 1 Семинар от 25.09.21 (Фурье и Лаплас)

**Про Фурье.** Как раньше нашли

$$L(\partial_t)G(t) = \delta(t), \quad \Rightarrow \quad \hat{x}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} x(t) dt, \quad x(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} \hat{x}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Для этого должно выполняться

$$\int |x(t)| dt < +\infty.$$

Например, для  $\partial_t + \gamma$ :

$$(\partial_t + \gamma)G(t) = \delta(t), \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\dots} e^{-i\omega t} dt = x(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty}, \quad \Rightarrow \quad (i\omega + \gamma)\hat{G}(\omega) = 1, \quad \Rightarrow \quad \hat{G}(\omega) = \frac{1}{i\omega + \gamma}.$$

Так приходим к уравнению

$$G(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\gamma} \frac{d\omega}{2\pi} = \begin{cases} e^{-\gamma t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \hat{G}(\omega) = \theta(t) e^{-|t|}.$$

Однако, при  $\hat{L} = \partial_t - \gamma$  мы бы получили

$$G_A(t) = \theta(-t) e^{\gamma t},$$

хотя вообще должно быть (если посчитать через неопределенные коэффициенты)

$$G_R(t) = \theta(t) e^{\gamma t},$$

которая растёт.

В методе с Фурье будут получаться функции Грина затухающие, но, возможно, без причинности. В методе неопределённых коэффициентов исходим из причинности, но может быть рост  $\sim e^{\gamma t}$ .

Кроме того, в Фурье всегда предполагается  $x(t \rightarrow -\infty) = 0$  и  $x(t \rightarrow +\infty) = 0$ . Также может случиться

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2)G(t) = \delta(t), \quad \Rightarrow \quad \hat{G}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2},$$

с особенностями на вещественной оси, что можно решить, сместив полюса в  $\mathbb{C}$ .

**Свёртка.** Рассмотрим уравнение

$$L(\partial_t)x(t) = f(t), \quad L(\partial_t)G(t) = \delta(t).$$

Фурье переводит

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_x^n x(t) e^{-i\omega t} dt = (i\omega)^n \hat{x}(\omega).$$

Тогда

$$L(i\omega)\hat{x}(\omega) = \hat{f}(\omega), \quad L(i\omega)\hat{G}(\omega) = 1, \quad \Rightarrow \quad \hat{G}(\omega) = \frac{1}{L(i\omega)}.$$

Также нашли, что

$$\hat{x}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{L(i\omega)} = \hat{f}(\omega)\hat{G}(\omega), \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)f(s) ds.$$

**Преобразование Лапласа.** Пусть есть некоторое преобразование

$$\tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

где подразумевается, что  $\operatorname{Re} p \geq 0$  и, вообще, в Фурье можно  $p \in \mathbb{C}$ .

Пусть  $p = i\omega$ , где  $\omega \in \mathbb{R}$ . Тогда

$$\tilde{f}(i\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t) dt = \hat{f}(\omega), \quad \Rightarrow \quad f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(i\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} \tilde{f}(p) \frac{dp}{2\pi}.$$

В вычислениях выше мы предполагали, что  $f(t \rightarrow \infty) = 0$ .

Обойдём это, пусть  $|f(t)| < Me^{st}$ , при  $s > 0$ . Возьмём  $p_0 > s$ , тогда

$$\tilde{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-p_0 t} e^{-(p-p_0)t} f(t) dt = \tilde{g}(p - p_0),$$

где вводе  $g(t) = e^{-ip_0 t} f(t)$ , которая уже убывает на бесконечности. Обратно:

$$g(t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \tilde{g}(p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi} = \int_{p_0-i\omega}^{p_0+i\omega} \tilde{g}(p - p_0) e^{-p_0 t} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}.$$

Так пришли к форме обращения

$$f(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \tilde{f}(p) \frac{dp}{2\pi i}, \quad \tilde{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-p_0 t} e^{-(p-p_0)t} f(t) dt = \tilde{g}(p - p_0), \quad (1)$$

где  $g(t) = e^{-ip_0 t} f(t)$ .

Забавный факт, из леммы Жордана: при  $t < 0$   $f(t < 0) = 9$ , по замыканию дуги по часовой стрелке (вправо). Выбирая  $p_0$  так, чтобы все особенности лежали левее  $p_0$ , можем получать причинные функции.

**Производная.** Найдём преобразование Лапласа для  $\partial_t f(t)$ :

$$\int_0^\infty \frac{df}{dt} e^{-pt} dt = f e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = p \tilde{f}(p) - f(+0).$$

Но, для функции Грина  $L(\partial_t)G(t) = \delta(t)$ , тогда

$$L(\partial_t)G_\varepsilon(t) = \delta(t - \varepsilon), \quad G_\varepsilon(t) = G(t - \varepsilon), \quad \Rightarrow \quad G_\varepsilon(0) = 0,$$

где  $G_\varepsilon \rightarrow G(t)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Преобразуем<sup>1</sup> по Лапласу уравнения выше

$$L(p)G(p) = e^{p\varepsilon} = 1, \quad \Rightarrow \quad G_\varepsilon(p) = \frac{1}{L(p)}, \quad \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \quad G(p) = \frac{1}{L(p)}.$$

Так получаем

$$G(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \frac{e^{pt}}{\tilde{L}(p)} \frac{dp}{2\pi i}, \quad (2)$$

где  $p_0$  правее всех особенностей.

**Пример.** Рассмотрим  $L = \partial_t + \gamma$ , тогда

$$(p + \gamma)G(p) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(p) = \frac{1}{p + \gamma}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{pt}}{p + \gamma} \frac{dp}{2\pi i} = \theta(t) e^{-\gamma t}.$$

Аналогично, пусть  $L = \partial_t^2 + \omega^2$ , тогда  $LG(t) = \delta(t)$ , и

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + \omega^2}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \frac{e^{pt}}{p^2 + \omega^2} \frac{dp}{2\pi i} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dots, & t > 0 \end{cases} = \theta(t) \left( \frac{e^{i\omega t}}{2i\omega} + \frac{e^{-i\omega t}}{-2i\omega} \right) = \theta(t) \frac{\sin \omega t}{\omega}.$$

В общем виде, пусть  $L(\partial_t)G(t) = \delta(t)$ , тогда

$$L(p)G(p) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(p) = \frac{1}{L(p)}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \frac{e^{pt}}{L(p)} \frac{dp}{2\pi i}.$$

Поговорим про свёртку:

$$Lx = f, \quad \Rightarrow \quad L(p)x(p) = f(p), \quad L(p)G(p) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(p) = \frac{1}{L(p)}.$$

Тогда получается

$$x(p) = \frac{f(p)}{L(p)} = f(p)G(p), \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int_0^t G(t-s)f(s) ds.$$

**Уравнение Вольтера.** Иногда бывает уравнения на  $x(s)$  вида

$$f(t) = \int_0^t x(s)K(t-s) ds. \quad (3)$$

Через преобразование Лапласа, находим

$$f(p) = x(p)K(p), \quad \Rightarrow \quad x(p) = \frac{f(p)}{K(p)}. \quad (4)$$

<sup>1</sup>Здесь и далее  $f(t)$  – функция,  $f(\omega) = \hat{f}(\omega)$  – Фурье образ,  $f(p) = \tilde{f}(p)$  – преобразование Лапласа.

В общем виде тогда находим

$$x(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \frac{f(p)}{K(p)} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}.$$

Кстати, забавный факт:

$$\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} 1 \cdot e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = e^{p_0 t} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = e^{p_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \delta(t), \quad (5)$$

то есть преобразование Лапласа от константы – дельта функция.

Рассмотрим, например

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{p+1-1}{p+1} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} - \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{pt}}{p+1} \frac{dp}{2\pi i} = \delta(t) - \theta(t)e^{-t}.$$

Также верно, что

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} p e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \delta'(t).$$

Действительно,

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} \right) = \frac{d}{dt} \delta(t) = \delta'(t).$$

Важно, что можно делать функции маленькими

$$\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} f(p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \frac{f(p)}{p^n} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}. \quad (6)$$

**Неоднородная релаксация.** Рассмотрим уравнение

$$(\partial_t + \gamma(t))G(t, s) = \delta(t - s), \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, s) f(s) ds,$$

где продолжаем требовать причинность  $G(t, s > t) = 0$ . Для начала, рассмотрим  $t > s$ , тогда

$$(\partial_t + \gamma(t))G(t) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dG}{G} = -\gamma(t) dt, \quad \Rightarrow \quad G(t, s) = A(s) \exp \left( - \int_{t_0}^t \gamma(t') dt' \right).$$

Также записываем граничные условия:

$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \dots ds, \quad \Rightarrow \quad G(s+0, s) = 1.$$

Так можем найти

$$A(s) \exp \left( - \int_{t_0}^s \gamma(t') dt' \right) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(t, s) = \theta(t - s) \exp \left( - \int_s^t \gamma(t') dt' \right), \quad (7)$$

где мы разбили

$$\int_{t_0}^t = \int_{t_0}^s + \int_s^t,$$

и получили, что хотели.

*Комментарий про дельта функцию.* Главное, нужно показать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x) dx = 1, \quad \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x) = 0, \text{ при } x \neq 0.$$

Вообще можем плодить дельтаобразные последовательности, взяв  $f$  с единичным интегралом и

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a} f \left( \frac{x}{a} \right).$$

*Комментарий про преобразование Лапласа.* Для функции вида

$$\frac{1}{\sqrt{p + \alpha}},$$

необходим аппарат разрезов, так что её можно сделать с шифтом на неделю.

На следующей недели будет контрольная. Необходим аппарат метода неопределенных коэффициентов, матричные экспоненты, решение диффузов через Фурье (не всегда причинный результат), а также преобразование Лапласа. Вычеты скорее всего в районе второго порядка и меньше. Ещё полезно вспомнить, как записывать начальные условия: осциллятор, осциллятор с затуханием.

## 2 Семинар от 12.09.21

Ранее решалась задача Коши, вида  $L(\partial_t)x(t) = \varphi(t)$ . Можно рассмотреть другой класс задач:

$$f(0) = f(\pi) = 0, \quad (\partial_x^2 + 1)f(x) = 0, \quad \Rightarrow \quad f(x) = A \sin x,$$

где  $A$  – любая, то есть решение не единственно. Более того, решение может не существовать.

Однако, пока мы рассматриваем диффуры первого порядка, граничное условие всего одно: значение функции в точке:  $x(0) = x_0$ , что эквивалентно задаче Коши.

### 2.1 Задача Штурма-Лиувилля

Интереснее на диффурах II порядка, один из наиболее ярких примеров: *задача Штурма-Лиувилля*:

$$\hat{L} = \partial_x^2 + Q(x)\partial_x + U(x), \quad \hat{L}f(x) = \varphi(x), \quad \begin{cases} \alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = 0 \\ \alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0, \end{cases}$$

где<sup>2</sup>  $|\alpha_1| + |\beta_2| \neq 0$  и  $|\alpha_2| + |\beta_1| \neq 0$ .

Заметим, что уравнение линейно: если  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ , то  $f = f_1 + f_2$ , а значит ответ можно найти в виде

$$f(x) \int_a^b G(x, y) \varphi(y) dy,$$

однако система теперь не является транслационно инвариантной.

Граничные условия на  $G$ :

$$\alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = \int_a^b \underbrace{(\alpha_1 G(a, y) + \beta_1 G'_x(a, y))}_{\text{непрерывен}} \varphi(y) dy = 0,$$

что верно  $\forall \varphi$ . По лемме Дюбуа-Реймона, можем свести уравнение к виду

$$\alpha_1 G(a, y) + \beta_1 G'_x(a, y) \equiv 0,$$

то есть функция Грина  $G$  наследует граничные условия. Аналогично,

$$\alpha_2 G(b, y) + \beta_2 G'_x(b, y) = 0.$$

Запишем уравнение на  $G(x, y)$ :

$$\varphi(y) = \delta(y - y'), \quad \Rightarrow \quad f(x) = \int_a^b G(x, y) \delta(y - y') dy = G(x, y'), \quad \Rightarrow \quad \hat{L}G(x, y) = \delta(x - y).$$

Решения имеет смысл разбить на  $x \neq y$ , и, в частности, рассмотрим  $x < y$ :

$$\begin{cases} \hat{L}G(x, y) = 0 \\ \alpha_1 G(a, y) + \beta_1 G'_x(a, y) = 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad G(x, y) = A(y) \cdot u(x), \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \hat{L}u(x) = 0 \\ \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0 \end{cases}$$

Более того, почему бы и не доопределить  $u(a) = -\beta_1$  и  $u'(a) = \alpha_1$ , таким образом свели задачу к задаче Коши, решение которой существует и единственно.

Аналогично для  $x > y$ :

$$\hat{L}G(x, y) = 0, \quad \Rightarrow \quad G(x, y) = B(y)v(x), \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \hat{L}v = 0 \\ \alpha_2 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0 \end{cases}$$

где снова есть задача Коши, решение которой существует и единственно.

**Сшивки.** Во-первых заметим, что  $G$  непрерывна, а  $G'$  испытывает скачок:

$$G(y + 0, y) = G(y - 0, y), \quad \Rightarrow \quad A(y)u(y) = B(y)v(y).$$

Интегрируя, находим

$$G'_x(y + 0, y) - G'_x(y - 0, y) = 1, \quad \Rightarrow \quad B(y)v'(y) - A(y)u'(y) = 1.$$

Собирая уравнения вместе, находим, что

$$B(y) \underbrace{\left( \frac{v'(y)u(y) - v(y)u'(y)}{u(y)} \right)}_{W[u, v]} = 1, \quad \Rightarrow \quad B(y) = \frac{u(y)}{W}, \quad A(y) = \frac{v(y)}{W(y)},$$

<sup>2</sup>Часто можно встретить нулевые граничные условия:  $f(a) = f(b) = 0$ .

где  $W[u, v]$  – вронскиан. Итого, можем выписать ответ:

$$G(x, y) = \frac{1}{W(y)} \begin{cases} v(y)u(x), & x < y; \\ v(x)u(y), & x > y. \end{cases}$$

Можем записать, когда решение  $\exists$  и !:

$$W \neq 0, \quad \Rightarrow \quad \text{Sol } \exists \& !.$$

Отсюда вытекает теорема Стеклова:

**Thr 2.1** (теорема Стеклова). Если  $u, v$  – спец. ФСР, то решение существует и единственно:

$$f(x) = \int_a^b G(x, y) \varphi(y) dy, \quad \hat{L}^{-1} \varphi = f.$$

Если  $W = \text{const}$ , то  $G(x, y) = G(y, x)$  – симметричное ядро, а значит  $L^{-1}$  – симметричный, самосопряженный оператор  $\Rightarrow$  у  $\hat{L}$  есть ОНБ из собственных функций.

**Про вронскиан.** Можно записать формулу Лиувилля-Остроградского

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} = W(x_0) \exp \left( - \int_{x_0}^x Q(z) dz \right).$$

**Def 2.2.** Специальной ФСР называется решение уравнению  $\hat{L}u = 0$  и  $\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0$ , и аналогичного уравнения по  $v(x)$  с граничным условием в  $b$ , если  $W[u, v] \neq 0$ , то есть  $u$  и  $v$  линейной независимы.

**Пример I.** Рассмотрим уравнения

$$\begin{cases} \partial_x^2 f(x) = \varphi(x) \\ f(a) = f(b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad u(x) = x - a, \quad v(x) = x - b, \quad \Rightarrow \quad W = \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} = b - a = \text{const},$$

а значит

$$G(x, y) = \frac{1}{b - a} \begin{cases} (y - b)(x - a), & x < y \\ (x - b)(y - a), & x > y. \end{cases}$$

**Пример II.** Рассмотрим двумерный цилиндр, радиуса  $R$ , вне которого  $\rho(r > R) = 0$ ,  $\rho(r) = \rho(r)$ . Рассмотрим уравнения Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho, \quad \Rightarrow \quad (\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r) \varphi = -4\pi\rho.$$

Добавим граничные условия: потенциал определен с точностью до константы, так что пусть  $\varphi(R) = 0$ , также хотим конечность  $\varphi$  при  $r = 0$ , так что пусть  $\varphi(0) = 1$ .

Получили задачу, где при  $r < r'$

$$\left\{ \left( \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r \right) u(r) = 0, \quad u(0) = 1 \right\} \Rightarrow \quad u' = \frac{C}{r}, \quad \Rightarrow \quad u(r) = C \ln r + D = 1.$$

Аналогично, рассмотрим  $r > r'$ :

$$\left\{ \left( \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r \right) v(r) = 0, \quad v(R) = 0, \right\} \Rightarrow \quad v(R) = C' \ln R + D', \quad \Rightarrow \quad v = \ln \left( \frac{r}{R} \right).$$

Сразу вычислим

$$W[u, v] = \det \begin{pmatrix} 1 & \ln r/R \\ 0 & 1/r \end{pmatrix} = \frac{1}{r}, \quad \Rightarrow \quad G(r, r') = r' \begin{cases} \ln \frac{r'}{R}, & r < r' \\ \ln \frac{r}{R}, & r > r' \end{cases} \Rightarrow \quad \varphi(r) = \int_0^R G(r, r') (-4\pi\rho(r')) dr'.$$

## 2.2 Задача с периодическими условиями

Рассмотрим такой же  $\hat{L}$ , и граничные условия в виде

$$\begin{cases} f(a) = f(b) \\ f'(a) = f'(b), \end{cases}$$

то есть решение периодически.

**Пример.** Рассмотрим задачу

$$\hat{L} = \partial_x^2 + \varkappa^2,$$

с условиями на  $[-\pi, \pi]$ .

При  $x < y$ :

$$G(x, y) = A_1(y) \sin \varkappa(x + \pi) + B_1(y) \cos \varkappa(x + \pi),$$

и аналогично для  $x > y$ :

$$G(x, y) = A_2 \sin \kappa(x - \pi) + B_2(y) \cos \kappa(x - \pi).$$

Запишем граничные условия:

$$\begin{aligned} G(-\pi, y) = G(\pi, y), & \Rightarrow B_1(y) = B_2(y) \stackrel{\text{def}}{=} B(y) \\ G'_x(-\pi, y) = G'_x(\pi, y), & \Rightarrow A_1(y) = A_2(y) \stackrel{\text{def}}{=} A(y). \end{aligned}$$

Тогда нашли, что

$$G(x, y) = \begin{cases} A \sin \kappa(x + \pi) + B \cos \kappa(x + \pi) \\ A \sin \kappa(x - \pi) + B \cos \kappa(x - \pi) \end{cases}$$

Теперь запишем непрерывность:

$$A \sin \kappa(x + \pi) + B \cos \kappa(x + \pi) = A \sin \kappa(x - \pi) + B \cos \kappa(x - \pi).$$

А также скачок производной

$$G'_x(y + 0, y) - G'_x(y - 0, y) = 1, \Rightarrow A \cos \kappa(x - \pi) - B \sin \kappa(x - \pi) - A \cos \kappa(x + \pi) + B \cos \kappa(x + \pi) = \kappa^{-1}.$$

Решая эту систему находим, что

$$2 \sin \pi \kappa \begin{pmatrix} \cos \kappa y & -\sin \kappa y \\ \sin \kappa y & \cos \kappa y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\kappa \end{pmatrix}, \Rightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \sin \pi \kappa} \begin{pmatrix} \cos \kappa y & \sin \kappa y \\ \sin \kappa y & \cos \kappa y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\kappa \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \kappa \sin \pi \kappa} \begin{pmatrix} \sin \kappa y \\ \cos \kappa y \end{pmatrix}.$$

Подставляя в  $G(x, y)$ , находим<sup>3</sup>

$$G(x, y) = \frac{1}{2 \kappa \sin \pi \kappa} \begin{cases} \cos(\kappa(x - y) + \kappa \pi), & x < y \\ \cos(\kappa(x - y) - \kappa \pi), & x > y. \end{cases}$$

Всё это было, повторимся, для уравнения:

$$(\partial_x^2 + \kappa^2) f(x) = \varphi(x), \Rightarrow f(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} G(x, y) \varphi(y) dy.$$

## 2.3 Другой способ

Дорустим мы  $\mathcal{H}$ , соответственно есть  $\langle x|y \rangle$  – эрмитово. Допустим есть некоторый сопряженный оператор  $\langle Ax|y \rangle = \langle x|A^*y \rangle$ . При чём требуем, что  $y$ : обе части непрерывны по  $x$ :

$$\mathcal{D}(A^*) = \{y: \langle Ax|y \rangle \text{ непр. по } x, x \in \mathcal{D}A\}.$$

Получается, что было бы здорово, если бы выполнялось  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*)$  и  $A = A^*$ , тогда  $\langle Ax|y \rangle = \langle x|Ay \rangle$ , и  $A$  – ССО.

**Thr 2.3** (thr Гильберта-Шмидта). Если  $A$  – компактный<sup>4</sup> ССО, то у  $A$  есть ОНБ из собственных векторов.

Далее верим, что базис счётный, есть условие ортогональности и  $Ae_n = \lambda_n e_n$ . Вернемся к оператору Штурма-Лиувилля:

$$\hat{L} = A(x) \partial_x^2 + B(x) \partial_x + C(x),$$

и живем мы в  $\mathcal{H} = L_2[a, b]$ , со скалярным произведением, вида

$$\langle f|g \rangle = \int_a^b f \bar{g} dx.$$

Покажем, что для задачи<sup>5</sup> Штурма-Лиувилля  $\hat{L}$  симметричен, при  $B(x) = A'(x)$ .

Действительно,

$$\langle \hat{L}f|g \rangle = \int_a^b (\partial_x(A \partial_x f) + C) f \bar{g} dx,$$

где  $\langle Cf|g \rangle = \langle f|Cg \rangle$ , так что дальше опустим.

$$\langle \hat{L}f|g \rangle \sim \int_a^b \partial_x(A \partial_x f) g dx = \dots + A \partial_x f \bar{g} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d\bar{g}}{dx} df = A \frac{df}{dx} \bar{g} \Big|_a^b - A f \frac{d\bar{g}}{dx} \Big|_a^b + \langle f|\hat{L}g \rangle.$$

<sup>3</sup>К дз будет полезно заметить, что  $G(x, y) = G(x - y)$  – задача трансляционно инвариантна.

<sup>4</sup> $\mathcal{D}(A)$  – компакт в гильбертовом пространстве.

<sup>5</sup>с периодическими гран. условиями?

**Задача Штурма-Лиувилля.** Для  $f$  и  $g$  верно, что

$$\begin{aligned} \alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) &= 0 \\ \alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) &= 0 \end{aligned} \quad A(b) [f'(b)\bar{g}(b) - f(b)\bar{g}'(b)] - A(a) [\dots] \sim \det \begin{pmatrix} \bar{g} & f \\ \bar{g}' & f' \end{pmatrix} = 0,$$

в силу граничных условий, а значит концов не будет:

$$\langle \hat{L}f | g \rangle = \langle f | \hat{L}g \rangle,$$

ура!)

Аналогично для периодических граничных условий:

$$\langle \hat{L}f | g \rangle = Af'\bar{g} \Big|_a^b - Af\bar{g}' \Big|_a^b + \langle f | \hat{L}g \rangle,$$

но из периодических граничных условий сразу получаем, что  $\hat{L}$  симметричный, а значит, скорее всего,  $\hat{L}$  – ССО.

А теперь внимание:

$$\hat{L}f = \varphi, \quad \Rightarrow \quad f = \underbrace{\int_a^b dt G(x, y) \varphi(y)}_{\text{компл } \hat{L}^{-1}} = \hat{L}^{-1}\varphi,$$

где

$$\hat{L} = A\partial_x^2 + A'\partial_x + C, \quad \Rightarrow \quad L^{-1} \text{ симметричный} \quad \Rightarrow \quad G(x, y) = G(y, x).$$

Итак, для операторов Штурма-Лиувилля ищем собственные функции:

$$\begin{cases} \hat{L}e_n(x) = \lambda_n e_n(x) \\ \text{гран. усл.} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sum_n f_n e_n(x),$$

домножая на  $e_m$ , находим, что

$$\langle f | e_m \rangle = f_m \langle e_m | e_n \rangle, \quad \Rightarrow \quad f_m = \frac{\langle f | e_m \rangle}{\langle e_m | e_n \rangle}, \quad \langle f | e_m \rangle = \int_a^b f(x) \bar{e}_m(x) dx.$$

Метод Фурье решения краевых задач:

$$L(\partial_t)u(x, t) = \hat{A}_x u(x, t) + f(x, t),$$

плюс граничные условия. Раскладывая,

$$\hat{A}_x e_n = \lambda_n e_n, \quad u = \sum_n u_n(t) e_n(x), \quad \Rightarrow \quad f(x, t) = \sum_n f_n(t) e_n(x),$$

а значит

$$\sum_n (L(\partial_t)u_n(t) - \lambda_n u_n(t) - f_n(t)) e_n(x) = 0,$$

откуда можем находить  $u_n(t)$ :

$$u(x, t) = \sum_n u_n(t) e_n(x).$$

**Пример.** Рассмотрим снова задачу, вида

$$(\partial_x^2 + \varkappa^2)G(x, y) = \delta(x - y)$$

и решим методом Фурье. Получим систему, вида

$$\begin{cases} \partial_x^2 e_n = \lambda_n e_n \\ e_n(-\pi) = e_n(\pi) \\ e'_n(-\pi) = e'_n(\pi) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad e = \alpha e^{iqx} + \beta e^{-iqx}, \quad \alpha e^{iq\pi} + \beta e^{-iq\pi} = \alpha e^{-iq\pi} + \beta e^{iq\pi}. \quad \Rightarrow \quad \alpha \sin \pi q = \beta \sin \pi q,$$

а значит  $q = n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , вот и дискретность:

$$\lambda^2 = -n^2, \quad \Rightarrow \quad e_n = e^{inx}, \quad e_{-n} = e^{-inx}.$$

### 3 Семинар от 16.09.21

Рассмотрим снова некоторую граничную задачу:

$$\hat{L}G(x, y) = \delta(x - y).$$

Запишем граничные условия:

$$\alpha_1 G(a, y) + \beta_1 G'_x(a, y) = 0, \quad \alpha_2 G(b, y) + \beta_2 G'_x(b, y) = 0,$$

где  $|\alpha_1| + |\beta_2| \neq 0$  и  $|\alpha_2| + |\beta_1| \neq 0$ . Можем выписать ответ:

$$G(x, y) = \frac{1}{W(y)} \begin{cases} v(y)u(x), & x < y; \\ v(x)u(y), & x > y, \end{cases}$$

где Вронскиан можно записать, как

$$W(x) = W(x_0) \exp \left( - \int_{x_0}^x Q(t) dt, \right)$$

где  $Q(t)$  – из оператора Штурма-Лиувилля.

Также решали задачу с периодическими граничными условиями, где  $G$  наследовала граничные условия. Решать это всё умеем двумя способами: разделяя на  $x > y$  и  $x < y$ , и через метод Фурье:

$$\hat{L}e_n = \lambda_n e_n, \quad \langle e_n | e_m \rangle = \int_a^b e_n(x) \bar{e}_m(x) dx.$$

Тогда можем найти функцию Грина, как

$$G(x, y) = \sum_n g_n(y) e_n(x), \quad \delta(x - y) = \sum_n \delta_n(y) e_n(x).$$

Находим коэффициенты Фурье:

$$g_n(y) = \frac{\langle G | e_n \rangle}{\langle e_n | e_n \rangle}, \quad \Rightarrow \quad \delta_n(y) = \frac{\bar{e}_n(y)}{\langle e_n | e_n \rangle}, \quad \Rightarrow \quad g_n(y) = \frac{1}{\lambda_n} \frac{\bar{e}_n(y)}{\langle e_n | e_n \rangle},$$

где мы решали уравнение, вида  $\hat{L}G = \delta(x - y)$ . Проблема возникает при  $\lambda_n = 0$ .

**Решение.** Наличие у оператора собственного числа  $\lambda_n = 0$  называется нулевой модой. Рассмотрим оператор:

$$\hat{L} = \partial_x^2,$$

для которого  $e_n(x) = e^{inx}$ , где  $\langle e_n | e_n \rangle = 2\pi$ , где  $e_0 = 1$  и  $\lambda_0 = 0$ . Пусть тогда

$$\delta(x) = \sum \frac{\bar{e}_n(0) e_n(x)}{\langle e_n | e_n \rangle} = \sum \frac{e^{inx}}{2\pi}, \quad G(x) = \sum g_n e_n(x).$$

но для  $\hat{L}G = \delta(x)$  оказывается нет решений (справа  $e_0$  есть, а слева нет). То есть

$$\ker \hat{L} \neq \{0\}, \quad \ker \hat{L} + \text{Im } \hat{L} = \mathcal{H},$$

поэтому всегда имеем ввиду, что  $\hat{L}\hat{L}^{-1} = \mathbb{1}$ , но только для  $\text{im } \hat{L}$ .

В общем, проблему уйдёт, если рассмотрим уравнение, вида

$$\hat{L}G(x) = \delta(x) - e_0(x) = \delta(x) - \frac{1}{2\pi},$$

то есть справа единичный оператор только на образе  $\text{im } \hat{L}$ .

Если в источнике есть нулевая мода, то уравнение не имеет решений.

**Алгоритм (Фурье).** Раскладываем

$$G(x) = \sum_{n \neq 0} g_n e_n, \quad \delta(x) = \sum \frac{e_n(x)}{2\pi}, \quad \Rightarrow \quad \hat{L}G = \delta(x) - \frac{1}{2\pi}.$$

Знаем, что  $\lambda_n g_n = \frac{1}{2\pi}$ , а значит

$$g_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{-n^2}, \quad \Rightarrow \quad G(x) = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{-n^2} e^{inx},$$

и рассмотрим  $0 < x < \pi$ , суммируя это через вычеты, записываем

$$f(z) = \frac{e^{zx}}{2\pi z^2}, \quad \Rightarrow \quad G(x) = \sum \oint_{in} \frac{dz}{2\pi i} f(z) g(z).$$

Соответственно, выберем

$$g(z) = \frac{\pi e^{-\pi z}}{\text{sh}(\pi z)}$$

тогда

$$f(z)g(z) = \frac{\pi}{z^2} \frac{e^{(x-\pi)z}}{\text{sh } \pi z},$$

получаем, что интеграл по дунам вправо/влево равен 0, и остается только вычет в  $z = 0$ :

$$G(z) = -\text{res}_0 f(z)g(z) = \dots = -\frac{x^2}{4\pi} + \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}.$$



**Алгоритм (сшивки).** Решим задачу

$$\partial_x^2 G(x) = \delta(x) - \frac{1}{2\pi}.$$

Разбиваем  $x < 0$  и  $x > 0$ :

$$\begin{aligned} x < 0, & \quad G = -\frac{x^2}{4\pi} + ax + b, \\ x > 0, & \quad G = -\frac{x^2}{4\pi} + cx + \varpi, \end{aligned}$$

учитываем граничные условия:

$$G(-0) = G(+0), \quad G'(+0) - G'(-0) = 1, \quad \Rightarrow \quad b = \varpi.$$

Также получаем, что  $-a = b$ .

Учтём, что  $e_0$  не входит в  $G$ :

$$\langle G | e_0 \rangle = 0 = \int_{-\pi}^{+\pi} G(x) dx = 0, \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{\pi}{6},$$

так и получаем все необходимые условия на  $G(x, y)$ .

### 3.1 Многомерие $\mathbb{R}^3$

Рассмотрим  $\mathbb{R}^3$ :

$$\nabla^2 f = \varphi,$$

где все линейно, всё хорошо. Как обычно будем искать функцию, виде

$$f(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}') d^3 r'.$$

Функцию Грина найдём в виде

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z), \quad \int f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = f(\mathbf{r}').$$

Можем свести уравнение Лапласа, к уравнению Дебая:

$$(\nabla^2 - \varkappa^2)G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}),$$

которое очень удобно раскладывать по Фурье:

$$\begin{aligned} \text{ПФ :} \quad G(\mathbf{k}) &= \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}, \\ \text{ОПФ :} \quad G(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}. \end{aligned}$$

Также вспомним, что

$$\partial_m G(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} = i k_m G(\mathbf{k}),$$

а значит

$$(-k^2 - \varkappa^2)G(\mathbf{k}) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(\mathbf{k}) = -\frac{1}{k^2 + \varkappa^2}, \quad \Rightarrow \quad G(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{k^2 + \varkappa^2} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}.$$

Переходим в сферические координаты, получаем, что

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{k^2}{k^2 + \varkappa^2} \int_0^\pi \sin \theta e^{i k r \cos \theta} d\theta dk = -\frac{e^{-\varkappa r}}{4\pi r}.$$

Устремляя  $\varkappa \rightarrow 0$ , находим

$$\nabla^2 G = \delta(\mathbf{r}), \quad \Rightarrow \quad G = -\frac{1}{4\pi r}.$$

### 3.2 Многомерие $\mathbb{R}^2$

Для Гаусса можно найти, что

$$G^{[\dim=n]}(x) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \frac{1}{r^{n-2}},$$

где  $\sigma_{n-1}$  – площадь  $n-1$  мерной сферы.

Вообще часто задача формулируется в виде задачи Дирихле:

$$\nabla^2 f = 0, \quad f'_{\partial D} = f_0(\mathbf{r}),$$

то есть функция задана на границе некоторой области. Пусть

$$f(z) = u(z) = iv(z), \quad \nabla^2 u = \nabla^2 v = 0.$$

Пусть знаем комплексную функцию  $f(z)$  такую, что  $\operatorname{Re} f|_{\partial D} = f_0$ , тогда  $\operatorname{Re} f(z)$  решает задачу Дирихле. Далее конформным преобразованием переводим любое  $D$  в круг, в круге задача Дирихле решается, а дальше отображаем назад.

Пусть задана функция  $u_0(x) = u(x, 0)$ . Вообще можно было бы разложить по Фурье  $u$ , и записать

$$\nabla^2 u = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Тогда

$$u(q, y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iqx} u(x, y) dx, \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 u = -q^2 u(q, y) = 0.$$

Так приходим к

$$u(q, y) = \exp(-|q|y) u(q, 0), \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{2\pi} e^{iqx} \underbrace{e^{-|q|y}}_{h(q)} u(q, 0).$$

Произведение Фурье образов – свёртка:

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} d\xi h(x - \xi, y) u_0(\xi).$$

Найдём, что

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{2\pi} e^{iqx} e^{-|q|y} = \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)}.$$

Подставляем, и находим:

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} d\xi \frac{y/\pi}{(x - \xi)^2 + y^2} u_0(\xi),$$

где

$$\frac{y/\pi}{(x - \xi)^2 + y^2} = \operatorname{Im} \frac{-1}{x + iy - \xi}, \quad \Rightarrow \quad f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z - \xi} u_0(\xi),$$

что в некотором смысле привело нас к интегралу Коши, так что и  $\nabla^2 f = 0$  и гран. условия удовлетворяются.

**Пример.** Рассмотрим

$$u_0(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} d\xi \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + (x - \xi)^2} \frac{1}{1 + \xi^2} = \frac{1 + y}{x^2 + (1 + y)^2}.$$