Задача №2

В координатном представлении $\hat{x} = x$ и $\hat{p}_x = -i\hbar\partial_x$, тогда $\hat{p}_x^2 = -\hbar^2\partial_x^2$.

0) Начнём с нулевого примера, чтобы убедиться, что правильно смотрим на мир:

$$[\hat{x},\, \hat{p}]\psi(x) = x(-i\hbar)\partial_x\psi - (-i\hbar)\partial_x(x\psi) = i\hbar\psi + i\hbar x\partial_x\psi - i\hbar x\partial_x\psi = i\hbar\psi,$$
$$\Rightarrow \quad [\hat{x},\, \hat{p}] = i\hbar.$$

а) Аналогично, в смысле операторного равенства,

$$[\hat{x},\, \hat{p}^2]\psi(x) = x(-i\hbar)^2\partial_x^2\psi - (-i\hbar)^2\partial_x^2(x\psi) = -\hbar^2 x\partial_x^2\psi + \hbar^2\partial_x(\psi + x\partial_x\psi) =$$
$$= -\hbar^2 x\partial_x^2\psi + \hbar^2\partial_x\psi + \hbar^2\partial_x\psi + \hbar^2 x\partial_x^2\psi = 2i\hbar\hat{p}\psi,$$
$$\Rightarrow [\hat{x},\, \hat{p}^2] = 2i\hbar\hat{p}.$$

б) Теперь найдём коммутатор с некоторой функцией $U(x)$:

$$[U(\hat{x}),\, \hat{p}]\psi(x) = U(x)(-i\hbar\partial_x\psi) + i\hbar\partial_x(U\psi) = U(-i\hbar\partial_x\psi) + i\hbar(\psi\partial_x U + U\partial_x\psi) = i\hbar(\partial_x U)\psi,$$
$$\Rightarrow [U(\hat{x}),\, \hat{p}] = 2i\hbar\hat{p}.$$

в) Наконец,

$$[U(\hat{x}),\, \hat{p}^2]\psi(x) = U(-\hbar^2)\partial_x^2\psi + \hbar^2\partial_x^2 U\psi = U(-\hbar^2)\psi'' + \hbar^2(\psi U'' + 2U'\psi' + \psi'' U) =$$
$$= \hbar^2(\psi U'' + 2U'\psi') = (\hbar^2 U'' + \hbar 2iU'\hat{p})\psi,$$
$$\Rightarrow [U(\hat{x}),\, \hat{p}^2] = \hbar^2 U'' + 2i\hbar U'\hat{p}.$$

Задача №3

Докажем соотношение Фейнмана-Гелмана:

$$\partial_\lambda f_n(\lambda) = \langle n|\partial_\lambda \hat{f}(\lambda)|n\rangle,$$

где f_n – собственное значение $\hat{f}\,|n\rangle = f_n\,|n\rangle$, то есть $f_n = \langle n|\hat{f}|n\rangle$.

По формуле Лейбница:

$$\partial_\lambda f_n = \langle n|\partial_\lambda\hat{f}|n\rangle + \langle\partial_\lambda n|\hat{f}|n\rangle + \langle n|\hat{f}|\partial_\lambda n\rangle = \langle n|\partial_\lambda\hat{f}|n\rangle + \langle\partial_\lambda n|n\rangle f_n + \langle n|\partial_\lambda n\rangle f_n =$$
$$= \langle n|\partial_\lambda\hat{f}|n\rangle + f_n\partial_\lambda\langle n|n\rangle = \langle n|\partial_\lambda\hat{f}|n\rangle,$$

что и требовалось доказать.

Задача №4

Найдём операторы рождения и уничтожения для гармонического осцилляора в представлении Гейзенберга.

I. Запишем уравнение Гейзенберга

$$i\hbar\frac{d\hat{f}}{dt} = i\hbar\frac{\partial\hat{f}}{\partial t} + \left[\hat{f},\, \hat{H}\right].$$

Запищем гамильтониан системы

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right),$$

тогда можем найти

$$i\hbar\frac{d\hat{a}}{dt} = \hbar\omega\left[\hat{a},\, \hat{a}^\dagger\hat{a}\right] = \hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}\right) = \hbar\omega\left(\left[\hat{a},\, \hat{a}^\dagger\right]\hat{a}\right) = \hbar\omega\hat{a},$$

и, решая диффур, находим

$$i\hbar\frac{d\hat{a}}{dt} = \hbar\omega\hat{a}, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \hat{a}(t) = e^{-i\omega t}\hat{a}, \\ \hat{a}^\dagger(t) = e^{i\omega t}\hat{a}^\dagger. \end{cases}$$

II. Можно было напрямую, воспользоваться

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right), \qquad \Rightarrow \qquad \hat{a}(t) = \hat{a} + (i\omega t)[\hat{a}^\dagger\hat{a},\, \hat{a}] + (i\omega t)^2[\hat{a}^\dagger\hat{a},\, -\hat{a}] + \ldots = \exp(-i\omega t)\hat{a},$$

где мы воспользовались равенством, доказанным в У6:

$$e^{\xi A}Be^{-\xi A} = B + \xi[A, B] + \frac{1}{2!}\xi^2\left[A, [A, B]\right] + \ldots$$