Задание по курсу «Уравнения математической физики»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *18 сентября 2021 г.*

1 Неделя I

№1

Рассмотрим уравнение на $G(t)$

$$(\partial_t + \gamma)G(t) = \delta(t), \tag{1}$$

с учетом принципа причинности $g(t<0) = 0$.

При $t > 0$ $\delta(t) = 0$, так что

$$\partial_t G(t) = -\gamma G(t), \quad \Rightarrow \quad G(t) = A\exp(-\gamma t).$$

Проинтегрируем уравнение (1) от $-\varepsilon$ до ε:

$$G'(\varepsilon) - \cancel{G'(-\varepsilon)} + \cancel{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \gamma G(t)\, dt} = \int \delta(t)\, dt = 1, \quad \Rightarrow \quad G'(\varepsilon) = 1, \quad \Rightarrow \quad A = 1.$$

Таким образом, искомая функция Грина $G(t)$:

$$G(t) = \theta(t) \cdot \exp\left(-\gamma t\right),$$

где $\theta(t)$ обеспечивает $G(t) = 0$ при $t < 0$.

№2

Рассмотрим уравнение, вида

$$(\partial_t^2 + \omega^2)\varphi(t) = g(t), \qquad g(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [0,\tau]; \\ -\frac{v}{\tau l}, & t \in [0,\tau], \end{cases}$$

с нулевым начальным условием $\varphi(t<0) = 0$. Функция Грина $G(t)$ для оператора $(\partial_t^2 + \omega^2)$ равна[1]

$$G(t) = \theta(t)\frac{1}{\omega}\sin(\omega t).$$

Далее найдём вид $\varphi(t)$ при $t < \tau$ (красная линия рис. 1):

$$\varphi(t<\tau) = \frac{1}{\omega}\int_{-\infty}^{t} \sin\omega(t-s)\ g(s)\, dt = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-s)\frac{v}{2l}\, d(t-s) = \frac{v}{l\tau}\frac{1}{\omega^2}\left(\cos(\omega t) - 1\right).$$

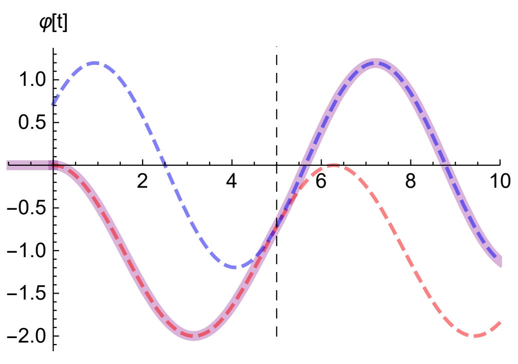

Рис. 1: Сшивка решений в I.2

[1] Конспект, уравнение (1.11).

Теперь решим[2] задачу Коши с начальным условием при $t = \tau$, введя переменную $T = t - \tau$:

$$\varphi(T) = \varphi(t-\tau) = \dot{\varphi}(\tau)G(t-\tau) + \varphi(\tau)\dot{G}(t-\tau) + 0 = \frac{v}{lt}\frac{1}{\omega^2}\left(\cos\omega t - \cos\omega(t-\tau)\right).$$

получая синюю кривую на рис. 1.

Итого, решение уравнения (1) (фиолетовая кривая, рис 1):

$$\varphi(t) = \frac{v}{l\tau}\frac{1}{\omega^2}\begin{cases} 0, & t < 0; \\ \cos\omega t - 1, & t \in [0, \tau]; \\ \cos\omega t - \cos\omega(t-\tau), & t > \tau. \end{cases}$$

№3

Найдём значение интеграла, вида

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,dx.$$

Заметим, что уравнение $z^2 + a^2 = 0$ имеет корни в $z_{1,2} = a^{\pm i\pi/2}$, тогда

$$I_1 = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z_1} = 2\pi i \lim_{z\to z_1} \cdot \left(\frac{1}{(z-z_2)^2}\right)' = -4\pi i \cdot \lim_{z\to z_1}\left(\frac{1}{(z-z_2)^3}\right) = -4\pi i \frac{1}{(2ia)^3} = \frac{\pi}{2a^3}.$$

[2] Конспект, уравнение (1.12).