

ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ «УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

Автор: Хоружий Кирилл

От: 30 октября 2021 г.

Содержание

1	Неделя I	3
2	Неделя II	4
3	Неделя III	6
4	Неделя IV	9
5	Неделя V	12
6	Неделя VI	13

ТеорМин

Вычеты. Интеграл по дуге может быть найден, как

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= 2\pi i \sum_{z_j} \operatorname{res}_{z_j} f(z), \quad \operatorname{res}_{z_j} f(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i\varphi} f(z_j + \varepsilon e^{i\varphi}) \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_j} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_j)^m f(z) \right), \end{aligned}$$

где m – степень полюса.

Лем 1 (лемма Жордана). Пусть $f(z)$ непрерывна в замкнутой области $G = \{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R_0 > 0\}$. Обозначим через C_R полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ и пусть верно, что $\lim_{R \rightarrow \infty} \max |f(z)| = 0$. тогда при $a > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0,$$

аналогичное верно при C_R с $\operatorname{Im} z \leq 0$ и $a < 0$.

Функция Грина. Всегда и всюду, уравнение вида

$$Lx(t) = \varphi(t), \quad x(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s) \varphi(s) ds, \quad LG = \delta(t).$$

И, если хочется добавить начальные условия, то например, для $L = \partial_t^2$ будет

$$x(t) = \dot{x}(0)G(t) + x(0)\dot{G}(t) + \int_0^t G(t-s) \varphi(s) ds.$$

Матричное уравнение. Решение линейного уравнения для векторной величины \mathbf{y}

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} + \hat{\Gamma}\mathbf{y} = \chi,$$

может быть найдено, через функцию Грина, вида

$$\hat{G}(t) = \theta(t) \exp(-\hat{\Gamma}t), \quad \mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^t \hat{G}(t-s) \chi(s) ds.$$

Преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа функции $\Phi(t)$ определяется, как

$$\tilde{\Phi}(p) = \int_0^\infty \exp(-pt) \Phi(t) dt, \quad \Phi(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{\Phi}(p),$$

где далее c выбираем правее всех особенностей для причинности.

Решение уравнения $L(\partial_t)G(t) = \delta(t)$ может быть найдено, как

$$G(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{G}(p), \quad \tilde{G}(p) = \frac{1}{L(p)}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \sum_i \operatorname{res}_i \frac{\exp(pt)}{L(p)},$$

где суммирование идёт по полюсам $1/L(p)$.

Важно, что можно делать функциями маленькими

$$\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \tilde{f}(p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \frac{\tilde{f}(p)}{p^n} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}. \quad (1)$$

Уравнение Вольтерра. Интегральное уравнение Вольтерра первого рода с однородным ядром:

$$\int_0^t K(t-s) f(s) ds = \varphi(t).$$

Решение может быть найдено через обратное преобразование Лапласа

$$f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{f}(p), \quad \tilde{f}(p) = \frac{\tilde{\varphi}(p)}{\tilde{K}(p)}.$$

Но есть один нюанс. При $K(t)$, $\varphi(t) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} K_0$, φ_0 получается, что $\tilde{K}(p)$, $\tilde{\varphi}(p) \approx \frac{K_0}{p}$, $\frac{\varphi_0}{p}$, тогда

$$f(t) = \frac{\varphi_0}{K_0} \delta(t) + \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \left(\frac{\tilde{\varphi}}{\tilde{K}} - \frac{\varphi_0}{K_0} \right),$$

при этом в отсутствие аналитичности в нуле нет ничего страшного.

Неоднородная релаксация. Для одномерного случая

$$(\partial_t + \gamma(t))x(t) = \varphi(t), \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) \varphi(s) ds, \quad G(t,s) = \theta(t-s) \exp\left(-\int_s^t \gamma(\tau) d\tau\right),$$

где всё также $G(t, s > t) = 0$ в силу стремления к принципу причинности.

1 Неделя I

№1

Рассмотрим уравнение на $G(t)$

$$(\partial_t + \gamma)G(t) = \delta(t), \quad (2)$$

с учетом принципа причинности $g(t < 0) = 0$.

При $t > 0$ $\delta(t) = 0$, так что

$$\partial_t G(t) = -\gamma G(t), \quad \Rightarrow \quad G(t) = A \exp(-\gamma t).$$

Проинтегрируем уравнение (2) от $-\varepsilon$ до ε :

$$G(\varepsilon) - \cancel{G(-\varepsilon)} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \gamma G(t) dt = \int \delta(t) dt = 1, \quad \Rightarrow \quad G(\varepsilon) = 1, \quad \Rightarrow \quad A = 1.$$

Таким образом, искомая функция Грина $G(t)$:

$$G(t) = \theta(t) \cdot \exp(-\gamma t),$$

где $\theta(t)$ обеспечивает $G(t) = 0$ при $t < 0$.

№2

Рассмотрим уравнение, вида

$$(\partial_t^2 + \omega^2)\varphi(t) = g(t), \quad g(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [0, \tau]; \\ -\frac{v}{\tau l}, & t \in [0, \tau], \end{cases}$$

с нулевым начальным условием $\varphi(t < 0) = 0$. Функция Грина $G(t)$ для оператора $(\partial_t^2 + \omega^2)$ равна¹

$$G(t) = \theta(t) \frac{1}{\omega} \sin(\omega t), \quad (3)$$

Далее найдём вид $\varphi(t)$ при $t < \tau$ (красная линия рис. 1):

$$\varphi(t < \tau) = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^t \sin \omega(t-s) g(s) dt = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t-s) \frac{v}{2l} d(t-s) = \frac{v}{l\tau \omega^2} (\cos \omega t - 1).$$

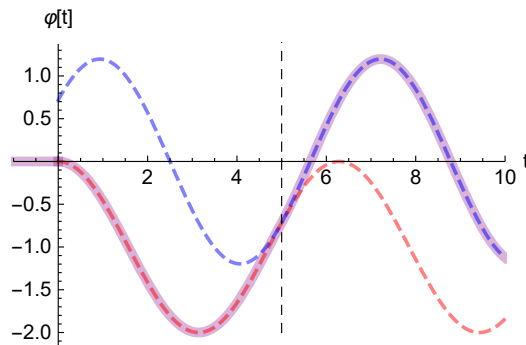


Рис. 1: Сшивка решений в I.2

Теперь решим² задачу Коши с начальным условием при $t = \tau$, введя переменную $T = t - \tau$:

$$\varphi(T) = \varphi(t - \tau) = \dot{\varphi}(\tau)G(t - \tau) + \varphi(\tau)\dot{G}(t - \tau) + 0 = \frac{v}{l\tau \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega(t - \tau)).$$

получая синюю кривую на рис. 1.

¹Конспект, уравнение (1.11).

²Конспект, уравнение (1.12).

Итого, решение уравнения (1) (фиолетовая кривая, рис 1):

$$\varphi(t) = \frac{v}{l\tau} \frac{1}{\omega^2} \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \cos \omega t - 1, & t \in [0, \tau]; \\ \cos \omega t - \cos \omega(t - \tau), & t > \tau. \end{cases}$$

№3

I. Найдём значение интеграла, вида

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx.$$

Заметим, что уравнение $z^2 + a^2 = 0$ имеет корни в $z_{1,2} = a^{\pm i\pi/2}$, тогда

$$I_1 = 2\pi i \cdot \text{res}_{z_1} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_1} \cdot \left(\frac{1}{(z - z_2)^2} \right)' = -4\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow z_1} \left(\frac{1}{(z - z_2)^3} \right) = -4\pi i \frac{1}{(2ia)^3} = \frac{\pi}{2a^3}.$$

II. Теперь найдём значение интеграла, вида

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipx}}{x^2 + a^2} dx \stackrel{p \geq 0}{=} 2\pi i \cdot \text{res}_{ia} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-ap}}{2ai} = \frac{\pi}{a} e^{-ap},$$

где мы считали $p > 0$. В случае $p < 0$:

$$I_2 \stackrel{p < 0}{=} -2\pi i \cdot \text{res}_{-ia} f(z) = -2\pi i \cdot \frac{e^{ap}}{-2ai} = \frac{\pi}{a} e^{ap}, \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{\pi}{a} e^{-a|p|}.$$

2 Неделя II

№1 (1.1.4)

Найдём функцию Грина $G(t)$ уравнения

$$L(\partial_t)x(t) = \varphi(t), \quad L(\partial_t) = \partial_t^4 + 4\nu^2 \partial_t^2 + 3\nu^4.$$

Функция Грина может быть найдена, как решение уравнения

$$L(\partial_t)G(t) = \delta(t), \quad \Rightarrow \quad G(t) = \theta(t) \cdot (b_1 e^{-\nu t} + b_2 e^{i\nu t} + b_3 e^{-i\sqrt{3}\nu t} + b_4 e^{i\sqrt{3}\nu t}),$$

где воспользовались разложением

$$L(z) = (z + i\nu)(z - i\nu)(z - i\sqrt{3}\nu)(z + i\sqrt{3}\nu).$$

Интегрируя от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$ уравнение на $G(t)$ находим, что

$$\partial_t^3 G(+0) = 1, \quad \partial_t^2 G(+0) = \partial_t^1 G(+0) = G(+0) = 0,$$

откуда получаем СЛУ на $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$:

$$\left. \begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 &= 0, \\ b_1 - b_2 + \sqrt{3}(b_3 - b_4) &= 0, \\ b_1 + b_2 + 3(b_3 + b_4) &= 0, \\ b_1 - b_2 + 3\sqrt{3}(b_3 - b_4) &= -\frac{i}{\nu^3}, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad b_1 = \frac{i}{4\nu^3}, \quad b_2 = -\frac{i}{4\nu^3}, \quad b_3 = -\frac{i}{4\sqrt{3}\nu^3}, \quad b_4 = \frac{i}{4\sqrt{3}\nu^3}.$$

Так получаем решение, вида

$$G(t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{3}\nu^3} \left(\sqrt{3} \sin(\nu t) - \sin(\sqrt{3}\nu t) \right).$$

№2 (1.1.5)

Найдём функцию Грина для уравнения, вида

$$(\partial_t^2 + \nu^2)^2 x(t) = \varphi(t).$$

Аналогично предыдущему номеру, сначала находим $G(t > 0)$:

$$G(t > 0) = b_1 e^{i\nu t} + b_2 t e^{i\nu} + b_3 e^{-i\nu t} + b_4 t e^{-i\nu t},$$

где секулярные члены возникли из-за кратности корней.

Также, интегрируя уравнение на $G(t)$ от $-\varepsilon$ до ε , получаем аналогичное условие

$$\partial_t^3 G(+0) = 1, \quad \partial_t^2 G(+0) = \partial_t^1 G(+0) = G(+0) = 0,$$

и приходим к СЛУ на коэффициенты $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$:

$$\left. \begin{aligned} b_1 + b_3 &= 0, \\ i(b_1 - b_3)\nu + b_2 + b_4 &= 0, \\ \nu((b_1 + b_3)\nu - 2i(b_2 - b_4)) &= 0, \\ \nu^2(-3(b_2 + b_4) - i(b_1 - b_3)\nu) &= 1, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad b_1 = -\frac{i}{4\nu^3}, \quad b_2 = -\frac{1}{4\nu^2}, \quad b_3 = \frac{i}{4\nu^3}, \quad b_4 = -\frac{1}{4\nu^2}.$$

Получаем решение, вида

$$G(t) = \frac{\theta(t)}{2\nu^3} \left(\sin(\nu t) - \nu t \cos(\nu t) \right).$$

№3 (1.1.8)

Для системы уравнений, вида

$$(\partial_t + \hat{\Gamma})\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\xi}(t), \quad \Gamma = \lambda\delta_{i,j} + \delta_{i,j-1},$$

найдём функцию Грина $G(t)$, как решение уравнения

$$(\partial_t + \hat{\Gamma})G(t) = \delta(t)\mathbb{E}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \theta(t) \exp(-\hat{\Gamma}t).$$

Осталось найти $\exp(-\hat{\Gamma}t)$, как матричную экспоненту, от жордановой клетки.

Для начала заметим, что

$$\delta_{i,j-1}^2 = \delta_{i,j-1}\delta_{j,k} = \delta_{i+1,k-1} = \delta_{i,k-2},$$

и так далее, то есть $\delta_{i,j-1}$ – нильпотентный оператор, с $\delta_{i,j-1}^4 = 0$.

Посмотрим на степени $\hat{\Gamma}$:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^2 &= \delta_{i,j} + 2\delta_{i,j-1} + \delta_{i,j-2} \\ \hat{\Gamma}^3 &= \delta_{i,j} + 3\delta_{i,j-1} + 3\delta_{i,j-2} + \delta_{i,j-3} \\ \hat{\Gamma}^4 &= \delta_{i,j} + 4\delta_{i,j-1} + 6\delta_{i,j-2} + 4\delta_{i,j-3} + \delta_{i,j-4}, \end{aligned}$$

но $\delta_{i,j-4} = 0$, так что можем явно выделить на побочных диагоналях соответствующие экспоненты:

$$G(t) = \theta(t)e^{-\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{t^2}{2} & -\frac{t^3}{6} \\ 0 & 1 & -t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где появившиеся t^k – секулярные члены.

№4

В частотном представлении для оператора $\partial_t^2 + \omega_0^2$ можем «найти» функцию Грина, приводящую к

$$G(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{d\omega}{2\pi},$$

с особенностями на вещественной оси.

Регуляризуем интеграл, рассмотрением «затухающего» осциллятора, тогда

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{-i\omega t}}{(\omega_0 - \omega + i\varepsilon_1)(\omega_0 + \omega + i\varepsilon_2)}}_{F(\omega)} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Получилось два полюса:

$$\omega_1 = \omega_0 + i\varepsilon_1, \quad \omega_2 = -\omega_0 - i\varepsilon_2.$$

Соответственно, по лемме Жордана, наличие/отсутствие вклада от $\varepsilon_{1,2}$ будет зависеть от выбора знаков в $\varepsilon_{1,2} \rightarrow \pm 0$.

Для начала найдём вычеты по каждому полюсу:

$$2\pi i \cdot \operatorname{res}_{\omega_1} F(\omega) = i\varepsilon e^{i\varphi} F(\omega_1) = -i\varepsilon e^{i\varphi} \frac{e^{it\omega_0}}{2\omega_0 + i(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon e^{i\varphi}} \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx} -\frac{i}{2\omega_0} e^{-it\omega_0}.$$

Аналогично, для второго полюса:

$$2\pi i \cdot \operatorname{res}_{\omega_2} F(\omega) = \dots = \frac{i}{2\omega_0} e^{it\omega_0}.$$

Сразу заметим, что при вхождение только одного вычета невозможно выполнение условия о $G(0) = 0$, тогда рассмотрим $\varepsilon_1 \rightarrow +0$ и $\varepsilon_2 \rightarrow -0$, тогда оба полюса находятся в верхней полуплоскости, по которой и происходит обход по часовой стрелке:

$$G(t) = \theta(-t) \frac{1}{\omega_0} \sin(-\omega_0 t),$$

что соответствует опережающей функции Грина ($\partial_t G(t=0) = -1$).

Теперь найдём, что при $\varepsilon_1 \rightarrow -0$ и $\varepsilon_2 \rightarrow +0$ оба вычета в нижней полуплоскости, что приведет к смене знака:

$$G(t) = \theta(t) \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t),$$

что и соответствует запаздывающей функции Грина (см. ур. (3), $\partial_t G(t=0) = 1$), что не может не радовать.

Правка. При других $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ получаются и не причинные и не опережающие функции Грина:

$$\varepsilon_1 \rightarrow +0, \varepsilon_2 \rightarrow +0, \quad \Rightarrow \quad G(t) = -\frac{e^{i\omega t}}{2i\omega_0} (\theta(t) - \theta(-t)),$$

и аналогично для другой стороны:

$$\varepsilon_1 \rightarrow -0, \varepsilon_2 \rightarrow -0, \quad \Rightarrow \quad G(t) = -\frac{e^{-i\omega t}}{2i\omega_0} (\theta(-t) - \theta(t)).$$

3 Неделя III

№1 (1.3.4)

Найдём решение уравнения

$$\int_0^t K(t-s)f(s) ds = \varphi(t), \quad K(t) = t, \quad \varphi(t) = \sin(t).$$

Решение может быть найдено, как

$$\tilde{f}(p) = \frac{\tilde{\varphi}(p)}{\tilde{K}(p)}, \quad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{f}(p).$$

Для начала найдём, что

$$\tilde{\varphi}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} dt = \frac{-1}{2i} \left(\frac{1}{i-p} + \frac{1}{i+p} \right) = \frac{1}{1+p^2}.$$

А также изображение для возмущения

$$\tilde{K}(p) = - \left(\int_0^\infty \exp(-pt) \right)'_p = \left(\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^\infty \right)'_p = \frac{1}{p^2}.$$

Заметим, что $\lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{f}(p) = 1$, тогда

$$f(t) = \delta(t) + \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \left(\frac{p^2}{1+p^2} - 1 \right) = \delta(t) - \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \left(\frac{1}{1+p^2} \right) = \delta(t) - \sin(t),$$

где воспользовались уже известным значением изображения синуса.

Для галочки можем посчитать оригинал напрямую. Тогда заметим, что полюса находятся в $p = \pm i$, соответственно возьмём $c = 1$ и сделаем замену $p = 1 + i\omega$, тогда придём к интегралу

$$-e^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i\omega t}}{[\omega - (1+i)][\omega - (-1+i)]} = -e^t \left(\frac{1}{2} i e^{(-1-i)t} - \frac{1}{2} i e^{(-1+i)t} \right) = \sin(t),$$

в общем, всё сходится.

№2 (1.4.2)

Найдём функцию Грина

$$G(t, s) = \theta(t-s) \exp \left(- \int_s^t \gamma(\tau) d\tau \right),$$

для $\gamma(t) = a/t$, где $a = \text{const}$. Нетрудно найти, что

$$G(t, s) = \theta(t - s) \exp\left(-a \ln \frac{t}{s}\right) = \theta(t - s) \left(\frac{s}{t}\right)^a.$$

№3 (1.5.1)

Общее замечание. Ограничимся здесь проверкой свойств δ -функции (обобщенной функции/функционала), а именно локализованность ($\delta(t) = 0 \ \forall t \neq 0$) и нормировку: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) = 1$.

I. Докажем, что

$$\frac{\pi}{2} \delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{t^2 \varepsilon}{(t^2 + \varepsilon^2)^2}.$$

Для начала проверим нормировку, полюса второй степени находятся в точках $\pm i\varepsilon$, замыкая дугу сверху, находим:

$$\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} = 2\pi i \varepsilon \cdot \lim_{t \rightarrow i\varepsilon} \left(\frac{d}{dt} \frac{t^2}{(t + i\varepsilon)^2} \right) = 2\pi i \varepsilon \cdot \lim_{t \rightarrow i\varepsilon} \frac{2it\varepsilon}{(t + i\varepsilon)^3} = 2\pi i \varepsilon \cdot \frac{1}{4i\varepsilon} = \frac{\pi}{2},$$

что доказывает нормировку δ -последовательности на единицу.

Теперь покажем локализованность:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{t^2 \varepsilon}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} \stackrel{t \neq 0}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} t^2 \varepsilon = 0, \quad \forall t \neq 0.$$

II. Аналогично, докажем, что

$$\sqrt{\pi} \delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(-\frac{t^2}{\varepsilon}\right).$$

Можно заметить, что нормировка выполняется, так как гауссов интеграл равен $\sqrt{\pi}$, осталось показать локализованность:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(-\frac{t^2}{\varepsilon}\right) \stackrel{t \neq 0}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{t^2 + \frac{1}{2}\varepsilon \ln \varepsilon}{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{t^2}{\varepsilon}\right) = 0, \quad \forall t \neq 0.$$

III. Наконец, покажем, что

$$\pi \delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(nt)}{nt^2}.$$

Начнём с нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(nt) - 1}{n} d\frac{1}{t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{t} dt = \pi,$$

как разность пределов на $\pm\infty$ интегрального синуса.

Проверяем локализованность:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(nt)}{nt^2} \leq \left| 1 - \cos(nt) \right| \leq 2 \left| \right| \leq \frac{2}{\pi nt^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(nt)}{nt^2} = 0.$$

№4 (1.5.8)

Найдём обратное преобразование Лапласа некоторых функций.

I. Первое изображение:

$$\tilde{f}(p) = \frac{\nu}{p^2 + \nu^2}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{f}(p) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \frac{\nu}{p^2 + \nu^2},$$

что выбором $c = 1$, заменой $p = \nu(i\omega + 1)$, сводится к уже рассмотренному интегралу (w3, №1), тогда

$$\mathcal{L}^{-1}(t) \left[\frac{\nu}{p^2 + \nu^2} \right] = \sin(\nu t).$$

II. Второе изображение:

$$\tilde{f}(p) = \frac{p}{p^2 + \nu^2}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \frac{p}{p^2 + \nu^2}.$$

Аналогично выбираем $c = 1$, делаем замену $p = \nu(i\omega + 1)$, так приходим к интегралу, вида

$$f(t) = -e^{\nu t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \exp(i\nu\omega t) \frac{1 + i\omega}{[\omega - (1 + i)][\omega - (-1 + i)]}$$

с полюсами в $\omega = i \pm 1$. Тогда, находим, что

$$\operatorname{res}_{\omega=i+1} f(t) = \frac{i}{4\pi} e^{(i-1)\nu t}, \quad \operatorname{res}_{\omega=i-1} f(t) = \frac{i}{4\pi} e^{(-i-1)\nu t}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = 2\pi i \sum_{\pm} \operatorname{res}_{i \pm 1} f(t) = \cos(\nu t).$$

III. Третье изображение:

$$\tilde{f}(p) = \frac{\nu}{p^2 - \nu^2}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \frac{\nu}{p^2 - \nu^2}.$$

Делая замену $p = i\nu\omega$, и выбирая $c = 0$ находим,

$$f(t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\nu\omega t} \frac{-1}{(\omega - i)(\omega + i)},$$

а тогда

$$\operatorname{res}_{\omega=-i} f(t) = \frac{e^{\nu t}}{4\pi i}, \quad \operatorname{res}_{\omega=i} f(t) = -\frac{e^{\nu(-t)}}{4\pi i}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = 2\pi i \sum_{\pm} \operatorname{res}_{\pm i} f(t) = \operatorname{sh}(\nu t).$$

IV. Четвертое изображение:

$$\tilde{f}(p) = \frac{p}{p^2 - \nu^2}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \frac{p}{p^2 - \nu^2}.$$

Делая замену $p = i\nu\omega$, и выбирая $c = 0$ находим,

$$f(t) = - \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\nu\omega t} \frac{i\omega}{(\omega - i)(\omega + i)},$$

а тогда

$$\operatorname{res}_{\omega=i} f(t) = \frac{e^{\nu t}}{4\pi i}, \quad \operatorname{res}_{\omega=-i} f(t) = \frac{e^{\nu(-t)}}{4\pi i}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = 2\pi i \sum_{\pm} \operatorname{res}_{\pm i} f(t) = \operatorname{ch}(\nu t).$$

V. Пятое изображение (оставлено на следующую неделю):

$$\mathcal{L}^{-1}(t) \left[\frac{1}{\sqrt{p + \alpha}} \right] = \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}}.$$

№5

Рассмотрим маятник, совершающий маленькие колебания под действием вынуждающей силы $f(t) = F e^{-t^2/\tau^2}$:

$$(\partial_t^2 + \omega^2) \varphi(t) = f(t),$$

где мы знаем, что при $t \rightarrow -\infty$:

$$\varphi(t) = A_- \sin(\omega t + \theta_-).$$

Функция Грина, как известно,

$$G(t) = \theta(t) \frac{1}{\omega} \sin(\omega t).$$

Тогда, после возмущения, при $t \rightarrow \infty$:

$$\varphi(t) = A_- \sin(\omega t + \theta_-) + \int_{T_-}^{T_+} \frac{F}{\omega} \sin[\omega(t-s)] \exp\left(-\frac{s^2}{\tau^2}\right) ds,$$

где $\omega T_- \ll 1$ и $\omega T_+ \gg 1$, так что экспонента там ноль. Раскрывая и группируя, находим

$$\varphi(t) - A_- \sin(\omega t + \theta_-) = \sin(\omega t) \int_{T_-}^{T_+} \frac{F}{\omega} \cos(\omega s) \exp\left(-\frac{s^2}{\tau^2}\right) ds,$$

где интеграл по $\sin \omega s$ опустили, так как интеграл о произведения четной и нечетной функции ноль. Далее,

$$\int \cos(\omega s) \exp\left(-\frac{s^2}{\tau^2}\right) ds = \frac{1}{2} \int \exp\left(-\frac{1}{4}\tau^2\omega^2 - \frac{(s + \frac{1}{2}i\tau^2\omega)^2}{\tau^2}\right) ds + \frac{1}{2} \int \exp\left(-\frac{1}{4}\tau^2\omega^2 - \frac{(s - \frac{1}{2}i\tau^2\omega)^2}{\tau^2}\right) ds,$$

раскрывая два гауссовых интеграла, находим

$$\int \cos(\omega s) \exp\left(-\frac{s^2}{\tau^2}\right) ds = \frac{1}{\omega} \sqrt{\pi} F \tau e^{-\frac{1}{4}\tau^2\omega^2}.$$

Тогда, искомое поведение при $t \rightarrow \infty$:

$$\varphi(t) = A_- \sin(\omega t + \theta_-) + \frac{1}{\omega} \sqrt{\pi} F \tau e^{-\frac{1}{4}\tau^2\omega^2} \sin(\omega t),$$

что осталось засунуть в один синус.

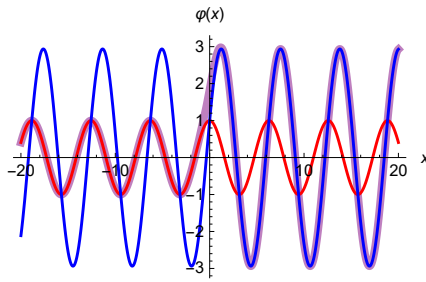


Рис. 2: Изменение амплитуды и фазы синуса в w3, №5

На 2 явно видно, как невозмущенный синус (красная линия) переходит в возмущенный синус (синяя линия), в итоге и получается наше решение (фиолетовая линия).

4 Неделя IV

№1

Рассмотрим сумму, вида

$$S(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}.$$

Будем считать, что в $n \in \mathbb{Z}$, у некоторой функции $g(z)$ случается полюс первого порядка, например у функции:

$$g(z) = \pi \operatorname{ctg}(\pi z), \quad \operatorname{res}_n g(z) = 1.$$

Тогда сумму $S(a)$ можно переписать через произведение $f(z)g(z)$, где

$$f(z) = \frac{1}{n^2 + a^2},$$

тогда

$$S(a) = \int \frac{dz}{2\pi i} \frac{\pi}{z^2 + a^2} \operatorname{ctg}(\pi z) = \left/ \operatorname{res}_{\pm ia} \right/ = \frac{\pi}{a} \operatorname{cth}(a\pi),$$

где воспользовались равенством $\operatorname{ctg} ix = -i \operatorname{cth} x$.

№2

Теперь рассмотрим сумму, вида

$$G(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{\varkappa^2 - n^2}, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Аналогично №1, представим $G(x)$ в виде интеграла:

$$G(x) = \int \frac{dz}{2\pi i} \frac{\pi e^{inx}}{\varkappa^2 - z^2} (\operatorname{ctg}(\pi z) + \tilde{g}),$$

где регулярную \tilde{g} выберем так, чтобы независимо от направления дуги в больших полуокружностях $e^{nx}g(z) \sim \operatorname{const}$, достаточно рассмотреть пределы и сдвинуть на них $\operatorname{ctg} z$:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{cth}(-iz) = i, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{cth}(iz) = -i, \quad \Rightarrow \quad \tilde{g}(x) = -i \operatorname{sign} x.$$

Тогда $G(x)$ можем найти, как

$$G(x) = \int \frac{dz}{2\pi i} \frac{\pi e^{inx}}{\varkappa^2 - z^2} (\operatorname{ctg}(\pi z) - i \operatorname{sign} x),$$

где такой интеграл будет равен сумме интегралов по полуокружностям (особенностей нет, $\equiv 0$), минус вычеты в точках $\pm k$:

$$G(x) = \frac{\pi}{\varkappa} \left(\operatorname{ctg} \pi \varkappa \cos \varkappa x + \operatorname{sign} x \sin \varkappa x \right)$$

№3 (2.1.3)

Найдём решение задачи

$$\hat{L}f = \varphi(x), \quad \hat{L} = \partial_x^2 + \varkappa^2, \quad \varphi(x) = \text{sign } x,$$

на классе периодических фнкций на интервале $(-\pi, \pi)$.

Функция Грина. Повторю выкладку с семинара, а именно найдём функцию Грина, оператора \hat{L} с периодическими граничными условиями на $[-\pi, \pi]$.

При $x < y$:

$$G(x, y) = A_1(y) \sin \varkappa(x + \pi) + B_1(y) \cos \varkappa(x + \pi),$$

и аналогично для $x > y$:

$$G(x, y) = A_2 \sin \varkappa(x - \pi) + B_2(y) \cos \varkappa(x - \pi).$$

Запишем граничные условия:

$$\begin{aligned} G(-\pi, y) = G(\pi, y), & \Rightarrow B_1(y) = B_2(y) \stackrel{\text{def}}{=} B(y) \\ G'_x(-\pi, y) = G'_x(\pi, y), & \Rightarrow A_1(y) = A_2(y) \stackrel{\text{def}}{=} A(y). \end{aligned}$$

Тогда нашли, что

$$G(x, y) = \begin{cases} A \sin \varkappa(x + \pi) + B \cos \varkappa(x + \pi) \\ A \sin \varkappa(x - \pi) + B \cos \varkappa(x - \pi) \end{cases}$$

Теперь запишем непрерывность:

$$A \sin \varkappa(x + \pi) + B \cos \varkappa(x + \pi) = A \sin \varkappa(x - \pi) + B \cos \varkappa(x - \pi).$$

А также скачок производной

$$G'_x(y + 0, y) - G'_x(y - 0, y) = 1, \Rightarrow A \cos \varkappa(x - \pi) - B \sin \varkappa(x - \pi) - A \cos \varkappa(x + \pi) + B \cos \varkappa(x + \pi) = \varkappa^{-1}.$$

Решая эту систему находим, что

$$2 \sin \pi \varkappa \begin{pmatrix} \cos \varkappa y & -\sin \varkappa y \\ \sin \varkappa y & \cos \varkappa y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\varkappa \end{pmatrix}, \Rightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \sin \pi \varkappa} \begin{pmatrix} \cos \varkappa y & \sin \varkappa y \\ \sin \varkappa y & \cos \varkappa y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\varkappa \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \varkappa \sin \pi \varkappa} \begin{pmatrix} \sin \varkappa y \\ \cos \varkappa y \end{pmatrix}.$$

Подставляя в $G(x, y)$, находим

$$G(x, y) = \frac{1}{2 \varkappa \sin \pi \varkappa} \begin{cases} \cos(\varkappa(x - y) + \varkappa \pi), & x < y, \\ \cos(\varkappa(x - y) - \varkappa \pi), & x > y. \end{cases} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} G_1(x - y), & x < y, \\ G_2(x - y), & x > y. \end{cases}$$

Решение с возмущением. Подставим теперь возмущение, вида

$$\varphi(x) = \text{sign } x, \Rightarrow f(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} G(x, y) \varphi(y) dy,$$

а дальше разделим задачу на две части $x < 0$ и $x > 0$:

$$x < 0: \quad f(x) = \int_{-\pi}^x (-G_2) dy + \int_x^0 (-G_1) dy + \int_0^\pi G_1 dy,$$

$$x > 0: \quad f(x) = \int_{-\pi}^0 (-G_2) dy + \int_0^x G_2 dy + \int_x^\pi G_1 dy.$$

Осталось посчитать шесть интегралов, так находим:

$$f(x) = \frac{1}{\varkappa^2} \left(1 - \frac{\sin \varkappa(\pi - |x|)}{\sin \pi \varkappa} \right) \text{sign } x - \frac{\sin \varkappa x}{\varkappa^2 \sin \pi \varkappa}.$$

№4 (2.1.6)

Найдём поведение решения уравнения Бесселя

$$\hat{L}f(x) = 0, \quad \hat{L} = \partial_x^2 + Q(x)\partial_x - U(x), \quad Q(x) = \frac{1}{x}, \quad U(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x^2}.$$

Перейдём к уравнению, вида

$$x^2 \partial_x^2 u + x \partial_x u + x^2 u - \nu^2 u = 0.$$

Вблизи $x = 0$, приведенное уравнение имеет степенные решения $f \sim x^\alpha$, где

$$x^2 \alpha(\alpha - 1) x^{\alpha-2} + x \alpha x^{\alpha-1} - \nu^2 x^\alpha = 0, \Rightarrow \alpha = \pm \nu,$$

откуда находим $f \sim x^\nu$ – регулярное решение и $f \sim 1/x^\nu$ – нерегулярное решение.

При $\nu = 0$, регулярное решение вырождается в $f \sim \text{const}$ вблизи $x = 0$, а асимптотику нерегулярного найдём из:

$$x^2 u'' + x u' + x^2 u = 0, \quad \Rightarrow \quad x u'' + u' + x u = 0,$$

решение которого можно попробовать найти в виде $c \ln x$:

$$-\frac{c}{x} + \frac{c}{x} + x c \log x = 0,$$

ну, похоже на $\ln x$. Надо бы показать, что $c = 2/\pi$, но кроме как численно пока не придумал. По крайней мере не этим методом.

5 Неделя V

№1

Найдём функцию Грина оператора $\partial_x^2(\partial_x^2 + 1)$ для функций над $[-\pi, \pi]$, удовлетворяющих граничным условиям.

Подстановкой $e^{\lambda x}$, найдём, что нулевые моды удовлетворяют уравнению

$$\lambda^2(\lambda - i)(\lambda + i) = 0, \quad \Rightarrow \quad e_{1,2,3} = \frac{1}{2\pi} \{1, e^{ix}, e^{-ix}\},$$

где 2π – нормировка.

Тогда функция Грина удовлетворяет уравнению, вида

$$\hat{L}G(x) = \delta(x) - \frac{1 + 2 \cos x}{2\pi}.$$

При $x > 0$ общее решение может быть найдено в виде

$$G^{\text{gen}}(x) = -c_1 \cos x - c_2 \sin x + c_3 + xc_4.$$

Частное решение:

$$G^{\text{part}}(x) = -\frac{x^2}{4\pi} + \frac{4 \cos x}{2\pi} + \frac{x \sin x}{2\pi}.$$

Вклад от $\delta(x)$ можно записать, как

$$G^\delta(x) = \theta[x](x - \sin x).$$

Осталось подставить граничные условия, откуда находим:

$$G(\pi) = G(-\pi), \quad \Rightarrow \quad 1 + 2c_4 = 0.$$

Остальные граничные условия на G' , G'' , G''' выполняются автоматически.

Однако по постановке задачи $G(x)$ не содержит $e_{1,2,3}$, а значит

$$\begin{cases} \langle e_1 | G(x) \rangle = 0, & \pi(\pi + 6c_3) = 3 \\ \langle e_2 | G(x) \rangle = 0, & \Rightarrow \quad \pi(2i + 4c_1 + 4ic_2) = 1, \\ \langle e_3 | G(x) \rangle = 0, & 4\pi c_1 - 2i\pi - 4i\pi c_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1/4\pi, \\ c_2 = -1/2, \\ c_3 = (3 - \pi^2)/6\pi. \end{cases}$$

Таким образом, искомая функция Грина:

$$G(x) = (\theta[x] - \frac{1}{2})(x - \sin x) - \frac{x^2}{4\pi} + \frac{5 \cos x}{4\pi} + \frac{x \sin x}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} - \frac{\pi}{6}.$$

№1 (пример)

Рассмотрим, например, возмущение, вида

$$\varphi(x) = \text{sign}(x) \cos(x).$$

Стоит заметить, что $\varphi(x)$ не содержит в себе нулевых мод, так что задача корректна и имеет решение. Уже зная $G(x)$ для \hat{L} , нетрудно найти решение:

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} G(x-y)\varphi(y) dy = -\theta(x)(x \sin(x) + 2 \cos(x) - 2) + \frac{(2x + \pi)(\pi \sin(x) - 4)}{4\pi} + \cos(x).$$

Посмотрим на вид $G(x)$, $f(x)$ и также для наглядности построим все слагаемые $f(x)$, а то как-то больно хорошо $f(x)$ выглядит.

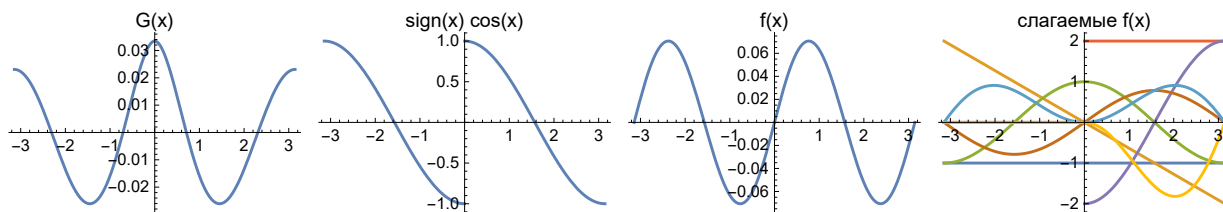


Рис. 3: Вид функций в w5, №1.

№2 (2.2.3)

Переѐдем в сферические координаты для интеграла, вида

$$f(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') dV', \quad G(\mathbf{r}) \equiv G(r) = -\frac{1}{4\pi r}, \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{r}) = - \int dV' \frac{\phi(\mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Считая, что $\phi(\mathbf{r}) \equiv \phi(r)$, находим:

$$f(r) = \frac{1}{r} \int_0^r \phi(r') r'^2 dr' + \int_r^\infty \phi(r') r' dr'.$$

№3 (2.2.10)

Найдѐм решение уравнения Лапласа f в полуплоскости $y > 0$, для $f(x, 0) = e^{ix}$. Искомая функция может быть найдена, как

$$f(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{y/\pi}{(x - \xi)^2 + y^2} e^{i\xi} d\xi.$$

У подынтегральной функции всего две особенности: $\xi = x \pm iy$ – полюса первого порядка. По лемме Жордана, замыкая функцию сверху, интегрируя против часовой стрелки, находим значение интеграла через вычет в точке $x + iy$:

$$f(x, y) = 2\pi i \frac{y}{p} \lim_{\xi \rightarrow x+iy} \frac{(\xi - x - iy)}{(x - \xi)^2 + y^2} e^{i\xi} = e^{ix-y},$$

таким образом нашли голоморфную функцию, удовлетворяющую граничному условию.

№4 (2.3.2)

Найдѐм радиальную функцию R связанного состояния атома водорода, соответствующего $n = 2$ и $l = 1$.

Вообще, волновая функция для атома водорода будет иметь вид

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n \cdot (n+l)!}} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{r}{n}\right) \cdot \left(\frac{2r}{n}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{n}\right) \cdot Y_{l,m}(\theta, \varphi),$$

где L – полиномы Лагерра. Так что ожидаем найти, что $R \sim r \cdot e^{-r/2}$.

Образ функции $\Phi = R \cdot r^{l+1}$, может быть записан, как

$$\tilde{\Phi}(p) \sim \frac{(p-1/n)^{n-l-1}}{(p+1/n)^{n+l+1}} = \frac{1}{(p+\frac{1}{2})^4}.$$

Делая замену $p = i\nu$, переходим к интегралу

$$\Phi(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu t} \frac{1}{(i\nu + \frac{1}{2})^4} \frac{d\nu}{2\pi},$$

с полюсом 4 порядка в $\nu = i/2$. Тогда, считая вычет в этой точке, находим

$$\Phi(r) = i \lim_{\nu \rightarrow i/2} \frac{d^4}{d\nu^4} \left(\nu - \frac{1}{2}i\right)^4 \frac{e^{i\nu r}}{(i\nu - \frac{1}{2})^4} = r^3 e^{-r/2}, \quad \Rightarrow \quad R = r \cdot e^{-r/2},$$

как и ожидалось. Если бы нам хотелось иметь нормированную $R(r)$, то

$$\int_0^\infty r e^{-r/2} dr = 2 \int_0^\infty e^{-r/2} dr = 4, \quad \Rightarrow \quad R^{\text{norm}} = \frac{r}{4} e^{-r/2}.$$

6 Неделя VI**№1 (3.1.1)**

Найдѐм объѐм d -мерного единичного шара B_n . Для этого рассмотрим интеграл от $f(\mathbf{x}) = e^{-|\mathbf{x}|^2}$:

$$I^n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\mathbf{x}|^2} d\mathbf{x} = \int_0^1 \mu \left[e^{-|\mathbf{x}|^2} \leq y \right] dy = \int_0^1 \mu \left[|\mathbf{x}|^2 \leq -\ln y \right] dy.$$

Заметим, что справа стоит объѐм шара, радиуса $r = \sqrt{-\ln y}$, равный $r^n B_n$. Тогда

$$I^n = B_n \int_0^1 (-\ln y)^{n/2} dy.$$

Заменяя $-\ln y = t$, находим

$$I^n = B_n \int_0^\infty t^{n/2} e^{-t} dt = B_n \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right), \quad \Rightarrow \quad B_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)},$$

где I – гауссов интеграл: $I = \sqrt{\pi}$. Нетрудно от объема шара перейти к площади сферы, дифференцируя $B_n r^n$ по r :

$$S_n = \frac{n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

№2 (3.1.3)

Найдём значение

$$I_c = \int_0^\infty u^{z-1} \cos u \, du = \frac{1}{2} \int_0^\infty u^{z-1} (e^{iu} + e^{-iu}) \, du.$$

Для этого вычислим интегралы, вида

$$I_1 = \int_0^\infty u^{z-1} e^{iu} \, du = \left/ u = i\alpha \right/ = i^z \int_0^\infty \alpha^{z-1} e^{-\alpha} \, d\alpha = i^z \Gamma(z).$$

Аналогично находим

$$I_2 = \int_0^\infty u^{z-1} e^{-iu} \, du = \left/ u = -i\alpha \right/ = (-i)^z \int_0^\infty \alpha^{z-1} e^{-\alpha} \, d\alpha = (-i)^z \Gamma(z).$$

Вспомяная, что

$$i^z = e^{z \ln i} = e^{i\pi z/2}, \quad (-i)^z = e^{z \ln -i} = e^{-i\pi z/2}.$$

Тогда

$$I_c = \frac{1}{2} (I_1 + I_2) = \frac{1}{2} \Gamma(z) \left(e^{i\pi z/2} + e^{-i\pi z/2} \right) = \Gamma(z) \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right).$$

Аналогично находим, что

$$I_s = \int_0^\infty u^{z-1} \sin u \, du = \frac{1}{2i} (I_1 - I_2) = \Gamma(z) \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right).$$

№4 (3.1.7)

Найдём значение интеграла, вида

$$I = \int_0^1 \ln \Gamma(z) \, dz.$$

Делая замену $z = 1 - z$, находим, что

$$I = - \int_1^0 \ln \Gamma(1 - z) \, dz = \int_0^1 \ln \Gamma(1 - z) \, dz.$$

Вспомяная, что

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

и складывая два представления, находим:

$$2I = \int_0^1 dz \ln [\Gamma(z)\Gamma(1-z)] \, dz = \ln \pi - \int_0^1 \ln \sin \pi z \, dz = \ln \pi - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln \sin z \, dz.$$

Введем $I_1 = \int_0^{\pi/2} \ln \sin z \, dz$, тогда

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \ln \sin z \, dz = \int_0^{\pi/2} \ln \cos z \, dz, \quad \Rightarrow \quad 2I_1 = \int_0^{\pi/2} \ln \left[\frac{\sin 2z}{2} \right] \, dz = \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2z \, dz - \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Заметим, что

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin 2z \, dz = \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln \sin z \, dz = I_1,$$

а значит мы нашли значения для I_1 :

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \ln \sin z \, dz = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Подставляя I_1 в выражение для I , находим

$$2I = \ln \pi - \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2} \ln 2 \right) = \ln \pi + \ln 2 = \ln 2\pi, \quad \Rightarrow \quad I = \int_0^1 \ln \Gamma(z) dz = \frac{1}{2} \ln 2\pi.$$

№5

Найдём значение функции $S(z)$, вида

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z} \right).$$

Для этого рассмотрим только сумму до некоторого N следующих рядов:

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n} = -\psi(1) + \psi(N+2),$$

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{n+z} \stackrel{*}{=} -\psi(z) + \psi(N+1+z),$$

где $\psi(z)$ – дигамма функция: $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$. Равенство со звёздочкой можно получить из следующих соотношений:

$$\psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z), \quad \Rightarrow \quad \psi(N+z+1) = \frac{1}{N+z} + \psi(N+z) = \dots = \psi(z) + \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+z}.$$

Также заметим, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\psi(N+2) - \psi(N+1+z)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N} + \psi(N) - \frac{1}{N+z} - \psi(N+z) \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} (\psi(N) - \psi(N+z)),$$

и так далее вплоть до поиска предела разницы $\psi(N) - \psi(N+\alpha)$, где $\alpha \in (0, 1)$. Асимптотикой $\psi(z)$ является $\ln z$, так что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\psi(N) - \psi(N+\alpha)) = 0,$$

а значит искомое значение $S(z)$:

$$S(z) = \psi(z) - \psi(1).$$