Задание по курсу ТФКП

Авторы заметок: Хоружий Кирилл

От: *12 октября 2021 г.*

Содержание

3 Степенные ряды и элементарные функции

T15

Найдём радиус сходимости ряда, где

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}, \qquad \text{if } \exists \ \Rightarrow \ R = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

а). Для начала,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-in}{1+in}\right)^{n^2} z^n, \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1-in}{1+in}\right)^n = \left(\frac{1-n^2-2in}{1-n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{2in}{1-n^2}\right)^n,$$

где можно увидеть замечательный предел, тогда

$$\left|\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2i}{n}\right)^n\right| = 1, \quad \Rightarrow \quad R = 1.$$

б). Аналогично,

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (1+i^n)^n z^n, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1+i^n|^n} = \varlimsup_{n\to\infty} (1+i^n) = \varlimsup_{n\to\infty} (1+i^{4n}) = 2, \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{2}.$$

в). Здесь немного видоизменяется выражение для R:

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n!]{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2^{n/n!} = 1, \quad \Rightarrow \quad R = 1.$$

г). Здесь перейдем к записи через экспоненту

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \left((1+i)^n + (1-i)^n\right) z^n, \qquad (1+i)^n + (1-i)^n = 2^{n/2} e^{in\pi/4} + 2^{n/2} e^{-in\pi/4},$$

тогда выбирая $n = 4k$, получим

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{2})^{\frac{n+2}{n}}, \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

§3, №10

3). Покажем, что

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Разложим в ряд:

$$(\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z)(\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) = e^{-z} \cdot e^z = 1.$$

4). Покажем, что

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b.$$

Действительно,

$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{1}{4}\left(e^a + e^{-a}\right)\left(e^b + e^{-b}\right) + \frac{1}{4}(e^a - e^{-a})(e^b - e^{-b}) = \frac{1}{2}(e^{a+b} + e^{-a-b}) = \operatorname{ch}(a+b).$$

§3, №12 (1)

Найдём Re и Im от $\sin z$. Считая $z = x + iy$:

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}\right) = \sin(x)\operatorname{ch}(y) + i\cos(x)\operatorname{sh}(y).$$

§3, №13

1). Покажем, что

$$|\sin z|^2 = \sin^2(x)\operatorname{ch}^2(y) + \cos^2(x)\operatorname{sh}^2(y) = (1-\cos^2 x)\operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x(ch^2 y - 1) = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x.$$

3). Аналогично:

$$\begin{aligned} |\operatorname{sh} z|^2 &= |-i\sin iz|^2 = |\sin(-y+ix)|^2 = \sin^2(-y)\operatorname{ch}^2 x + \cos^2 y \operatorname{sh}^2 x = \\ &= (1-\cos^2 y)\operatorname{ch}^2 x + \cos^2 y(\operatorname{ch}^2 x - 1) = \operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y. \end{aligned}$$

§3, №17

3). Решим уравнение, вид

$$\cos z = \frac{3i}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos x \operatorname{ch} y = 0 \\ -\sin x \operatorname{sh} y = 3/4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow^* \quad \begin{cases} \cos x = 0 \\ \operatorname{sh} y = \pm 3/4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow^* \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ y = \pm \ln 2. \end{cases}$$

где в * подразумевалось соответствие знаков. Тогда находим

$$z = \pm\left(\tfrac{\pi}{2} + i \ln 2\right) + 2\pi k.$$

4). Аналогично,

$$\cos z = \frac{3}{4} + \frac{i}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos x \operatorname{ch} y = 3/4 \\ -\sin x \operatorname{sh} y = 1/4 \end{cases}$$

Из тригонометрии можем записать, что

$$\frac{9}{16}\frac{1}{\operatorname{ch}^2 y} + \frac{1}{16}\frac{1}{\operatorname{sh}^2 y} = 1, \quad \Rightarrow \quad 16\left(\operatorname{sh}^2 y + \frac{1}{2}\right)\left(\operatorname{sh}^2 y - \frac{1}{8}\right) = 0,$$

а тогда

$$\operatorname{sh} y = \pm\sqrt{\frac{1}{8}}, \quad \Rightarrow \quad y = \pm \ln\left(\sqrt{\frac{1}{8}} + \sqrt{1 + \frac{1}{8}}\right) = \pm\frac{1}{2}\ln 2.$$

Отсуюда находим, что

$$\sin x = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \Rightarrow \quad x = \mp\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k.$$

Собирая всё вместе, находим

$$z = \pm\tfrac{1}{2}\left(\ln 2 - \pi\right) + \frac{\pi}{4} + 2\pi k.$$

4). Наконец, решим

$$\operatorname{tg} z = \frac{5i}{3}.$$

Так как синус и косинус расписывать уже умеем, рассмотрим

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2},$$

где $a = \sin x \operatorname{ch} y$, $b = \cos x \operatorname{sh} y$, $c = \cos x \operatorname{ch} y$, $d = -\sin x \operatorname{sh} y$, соответственно, приходим к системе

$$\begin{cases} \sin x \cos x = 0 \\ \operatorname{th} y = 3/5 \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ y = \ln 2, \end{cases}$$

где мы учли, что $\operatorname{th} x \in [-1, 1]\ \forall x \in \mathbb{R}$.

T16

Найдём несколько значений:

$$\sin i = i \sin(1), \qquad \cos i = \operatorname{ch} 1,$$

$$\operatorname{tg}(1+i) = \frac{i(e^{-1+i}) + e^{1-i}}{e^{-1+i}e^{1-i}} = \frac{2e^2 \sin 2 + i(e^4 - 1)}{1 + e^4 + 2e^2\cos(2)}.$$

T17

а). Докажем, что

$$\operatorname{sh} z = i\frac{2^{-iiz} - e^{iiz}}{2i} = -i\sin(iz),$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\left(e^{-iiz} + e^{iiz}\right) = \cos(iz).$$

б). Раскроем левую и правую части:

$2\,\mathrm{LHS} = e^{z_1} - e^{-z_1} + e^{z_2} - e^{-z_2}$,

$$2\,\mathrm{RHS} = \left(\exp\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{z_1+z_2}{2}\right)\right)\cdot\left(\exp\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right) + \exp\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)\right) = e^{z_1} - e^{-z_1} + e^{z_2} - e^{-z_2},$$

что и требовалось доказать: LHS = RHS.

в). Очень внимательно посмотрев на бином Ньютона, можно заметить, что равенство степеней будет достигаться в C_{2n}^n, остальные же слагаемые продублируются,тогда

$$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n}}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}}C_{2n}^n + \frac{2}{2^{2n}}\sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{n+k}\cos(2kz).$$

T18

Ну, посчитаем, что

$$2^i = e^{i(\ln 2 + 2\pi i n)} = e^{-2\pi n}\left[\cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2)\right], \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично

$$i^i = \exp\left(i(\tfrac{\pi}{2}+2\pi k)\right)^i = e^{-\pi/2}e^{-2\pi n}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично

$$(-1)^{2i} = \exp\left(i(\pi+2\pi k)\right)^{2i} = e^{-2p}2^{-4\pi n}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

T19

Пусть $\{a_n\}$ – последовательность ненулевых комплексных чисел такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L, \quad \overset{?}{\Rightarrow} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L.$$

$\triangle$. По определению,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N\colon \forall n \geqslant N \ \left|\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - L\right| < \varepsilon.$$

Занятный факт:

$$|a_n| = \underbrace{\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\cdot\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}\cdot\ldots\cdot\frac{|a_{N+1}|}{|a_N|}}_{n-N \text{ штук}}\cdot|a_N| < (L+\varepsilon)^{n-N}|a_N|.$$

А теперь получим два ограничения: при фиксированном N и $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} < L+\varepsilon,$$

и при фиксированном n и $N\to\infty$:

$$\left((L+\varepsilon)^{\frac{n+N}{n}}(a_n)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{N}} < \left(a_N^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{N}}, \quad \Rightarrow \quad (L+\varepsilon)^{1-\frac{n}{N}}\sqrt[N]{a_n} < \sqrt[N]{a_N}, \quad \Rightarrow \quad \lim_{N\to\infty}\sqrt[N]{a_N} \geqslant L-\varepsilon.$$

Таким образом, ограничив сверху и снизу, действительно находим, что

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = L.$$

$\square$

4 Комплексное интегрирование

T20

Вычислим интеграл, вида

$$\int_{\mathbb{T}}|z-1|\,|dz| = \int_0^{2\pi}|\cos\varphi - i\sin\varphi - 1|\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\sqrt{(\cos\varphi-1)^2+\sin^2\varphi}\,d\varphi = 4\int_0^{2\pi}|\cos\tfrac{\varphi}{2}|\,d\tfrac{\varphi}{2} = 4\int_0^{\pi}|\cos\varphi|\,d\varphi = 8,$$

где $\mathbb{T}$ – единичная окружность.

Теперь вычислим интеграл, вида

$$\int_{\mathbb{T}}|z-1|\,dz = i\int_0^{2\pi}|e^{i\varphi}-1|e^{i\varphi}\,d\varphi = i\int_0^{2\pi}\sqrt{(\cos\varphi-1)^2+\sin^2\varphi}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \underbrace{2i\int_0^{2\pi}|\sin\tfrac{\varphi}{2}|\cos\varphi\,d\varphi}_{-4i\int_0^{\pi}|\cos\varphi|\cos 2\varphi\,d\varphi} - \underbrace{2i\int_0^{2\pi}|\sin\tfrac{\varphi}{2}|\sin\varphi\,d\varphi}_{\equiv 0} = -16i\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\,d\varphi + 8i\int_0^{\pi/2}|\cos\varphi|\,d\varphi = -\frac{8}{3}i,$$

где мы воспользовались выражением
$$\int_0^{\pi/2} \sin^a(x)\cos^b(x)\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(1+\frac{a+b}{2}\right)}.$$

T21

Пусть $P(z)$ – полином, а γ – положительно ориентированная окружность с центром в точке a и радиуса R. Докажем, что
$$\int_\gamma P(z)\,d\bar{z} = -2\pi i R^2 P'(a).$$

$\triangle$. Запишем $z = a + Re^{it}$, тогда $d\bar{z} = -itRe^{-it}\,dt$, тогда
$$-i\int_0^{2\pi} P(a+Re^{it})tRe^{-it}\,dt = -\int_\gamma P(z)e^{-2it}\,dz = -R^2\int_\gamma \frac{P(z)}{(z-a)^2}\,dz = -2\pi i P'(a)R^2.$$
Последнее равенство тут можно получить или из
$$\operatorname{res}_a P(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}f(z)(z-a)^2,$$
где $m=1$ – порядок полюса.

$\square$

T22

Вычислим интеграл, вида
$$I = \int_\gamma \cos^8 z\,dz, \qquad \gamma\colon z(t) = \pi + \pi e^{it}, \quad t\in[\pi, 2\pi].$$
Так как подынтегральная функция голоморфна, то можем стянуть контур интегрирования к вещественной оси:
$$I = \int_{-\pi}^{+\pi}\cos^8(z)\,dz = 4\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}{2\Gamma(5)} = 4\pi\frac{7\cdot5\cdot3}{16\cdot2\cdot4\cdot3\cdot2} = \frac{35}{64}\pi.$$

T23

Покажем, что
$$|e^{-z}-1| \leqslant |z|,$$
где $z\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z>0$. Представим через интеграл экспоненту:
$$|e^{-z}-1| = \left|\int_0^z e^{-t}\,dt\right| \leqslant \int_0^z |e^{-t}|\,|dt| \leqslant \int_0^z |dt| = |z|,$$
для $\operatorname{Re} z > 0$ и $t\in[0,z]$. Q.E.D.

T24

Докажем, что для $z\in\mathbb{C}$ и $|z|\leqslant 1$ выполняются неравенства:
$$\frac{1}{4}|z| \leqslant |e^z-1| \leqslant \frac{7}{4}|z|, \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{4}\leqslant\frac{|e^z-1|}{|z|}\leqslant\frac{7}{4}.$$

$\triangle$. Пусть $z = x+iy$, тогда наща задача равносильна
$$\frac{1}{16}\leqslant F(x,y)\leqslant\frac{49}{16}, \qquad F(x,y) = \frac{(e^x\cos y-1)^2+(e^x\sin y)^2}{x^2+y^2}.$$
Заметим, что
$$\partial_y F(x,y) = \frac{2e^x}{(x^2+y^2)^2}\left(2y\cos y - 2y\cosh x + (x^2+y^2)\sin y\right),$$
где уравнение $2y\cos y - 2y\cosh x + (x^2+y^2)\sin y = 0$ имеет единственный корень в $y=0$ при $x,y\colon x^2+y^2<1$. Более того, пусть $y=\varepsilon>0$, тогда
$$\partial_y F(x,\varepsilon) = \varepsilon(2+x^2-\cosh x) < 0,$$
$$\partial_y F(x,-\varepsilon) = -\varepsilon(2+x^2-\cosh x) > 0.$$

Таким образом максимум/минимум $F(x,y)$ достигается при $y=0$:

$$F(x,0)=\frac{(e^x-1)^2}{x^2},\qquad \partial_x F(x,0)>0,$$

то есть минимум достигается в $F(-1,0)$ и максимум в $F(1,0)$, тогда

$$\frac{1}{16}<\underbrace{\left(1-\frac{1}{e}\right)^2}_{\approx 6/15}\leqslant F(x,y)=\frac{|e^z-1|^2}{|z|^2}\leqslant\underbrace{(e-1)^2}_{\approx 53/18}<\frac{49}{16},$$

что и требовалось доказать.

□

T25

Покажем, что формулу Стокса (Грина) можно записать в виде

$$\iint_D \frac{\partial f(z)}{\partial\bar z}\,dx\,dy=\frac{1}{2i}\int_{\partial D} f(z)\,dz.$$

△. Для начала распишем

$$df=\partial_x f dx+\partial_y f dy=\frac{1}{2}\partial_x f(dz+d\bar z)+\frac{1}{2i}\partial_y f(dz-d\bar z)=\underbrace{\frac{1}{2}(\partial_x f-i\partial_y f)}_{\partial_z f}dz+\underbrace{\frac{1}{2}(\partial_x f+i\partial_y f)}_{\partial_{\bar z} f}d\bar z.$$

Теперь можем подставить:

$$\frac{1}{2i}\int_{\partial D} f(z)\,dz=\frac{1}{2i}\iint_D df(z)\,dz=\frac{1}{2i}\iint_D \partial_{\bar z} f\,d\bar z\wedge\,dz=\frac{1}{2i}\iint_D \partial_{\bar z} f\,(\,dx\wedge i\,dy-i\,dy\wedge\,dx)=\iint\frac{\partial f}{\partial\bar z}\,dx\,dy.$$

□

5 Ряд Тейлора и теорема единственности

§7, №5

Разложим в ряд Тейлора функцию

$$f(z)=\frac{z^2+2z}{(z+1)^3},$$

в окрестности точки $z=1$.

Заметим, что

$$\left(\frac{1}{z+1}\right)'=-\frac{1}{(z+1)^2},\qquad\left(\frac{1}{(z+1)^2}\right)'=-\frac{2}{(z+1)^3},\qquad\Rightarrow\qquad\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}\right)''=\frac{1}{(z+1)^3}.$$

Тогда

$$f(z)=\frac{(z+1)^2-1}{(z+1)^3}=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}\right)''.$$

Вспомним, что

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n,\qquad\frac{1}{1+z}=\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{z-1}{2}+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n}.$$

Теперь можем найти

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n}-\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)\frac{(z-1)^{n-2}}{2^n}=\frac{3}{8}-\frac{1}{16}(z-1)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n\left(1-\frac{1}{8}(n+2)(n+1)\right),$$

то есть получили разложение по Тейлору.

§7, №6(2)

Разложим в ряд Тейлора в окрестности точки $z=0$ функции:

$$f(z)=\cos^3 z=\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n}\frac{(-1)^n}{4(2n)!}\left(3^{2n}+3\right).$$

§7, №11

Определим порядок нуля m функции $f(z)$ в точке a.

2). Во-первых рассмотрим

$$f(z) = (z^2 - \pi^2)^4 \sin^3 z, \qquad a = \pi.$$

Можем представить функции в виде

$$\begin{aligned} z^2 - \pi^2 &= (z-\pi)h_1(z), \qquad h_1(z) \neq 0, \\ \sin z &= (z-\pi)h_2(z), \qquad h_2(z) \neq 0, \end{aligned}$$

где h – голоморфная функция. Тогда

$$f(z) = (z-\pi)^{3+3} h_1(z)^3 h_2^3(z),$$

таким образом нашли, что $m = 6$.

3). Во-вторых рассмотрим

$$f(z) = (z^2 + \pi^2)^2 (e^{2z} - 1)^4, \qquad a = \pi i.$$

Аналогично раскрываем

$$\begin{aligned} z^2 + \pi^2 &= (z - i\pi)h_1(z), \qquad h_1(z) \neq 0, \\ e^{2z} - 1 &= (z - i\pi)h_2(z), \qquad h_2(z) \neq 0, \end{aligned}$$

и снова получаем $m = 6$.

§7, №12 (3)

Найдем, какая же функция является решением для гармонического осциллятора, вида

$$f''(z) + \lambda^2 f(z) = 0, \qquad f(0) = 0, \quad f'(0) = \lambda.$$

Считая $f(z)$ голоморфной, запишем

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \qquad f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+1)(k+2)x^k.$$

Подставляя в уравнение, находим

$$(c_0\lambda^2 + 2c_2)z^0 + (c_1\lambda^2 + 6c_3)z^1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(c_{k+2}(k+2)(k+1) + \lambda^2 c_k\right) z^k = 0.$$

Приравнивая к 0 коэффициенты при всех степенях, находим

$$c_0 = c_2 = c_{2k} = 0, \quad c_1 = \lambda, \quad c_3 = -\frac{\lambda^3}{6}, \quad c_5 = \frac{\lambda^5}{5!}, \quad \ldots \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sin(\lambda z).$$

§9, №2

1). Покажем, что не существует голоморфной функции такой, что

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\frac{\pi n}{2}.$$

Действительно, рассмотрим $g = f - f(0)$, где $f(0) \in [-1, 1]$, тогда $g(0) = 0$ – не изолированный 0 функции, соответсвенно f не могла быть голоморфной.

2). Аналогично рассмотрим

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\cos(\pi n),$$

при чем при $n = 2k$ $f > 0$ и $n = 2k+1$ $f < 0$, тогда где-то между случается, что $f = 0$, а значит снова 0 – не изолированный 0 функции, соответственно f не может быть голоморфной.

3). Просто подберем нужную функцию

$$f(z) = \frac{z}{2+z}, \qquad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}.$$

4). Аналогичная функция подойдёт и здесь:

$$f(z) = \frac{z}{2+z}, \qquad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\cos^2 \pi n}{2n+1},$$

где $\cos^2 \pi n = \text{const}$, при $n \in \mathbb{N}$.

5). Рассмотрим функцию, вида
$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n+\cos\pi n}.$$
Заметим, что при $n_1=2k$ и при $n_2=2k+1$:
$$f\left(\frac{1}{n_1}\right)=\frac{1}{4k+1}.\qquad f\left(\frac{1}{n_2}\right)=\frac{1}{4k+1}.$$
Рассмотрим функцию $f(z)-\frac{z}{2}$, которая будет иметь не изолированный 0 в $z=0$, т.к. $z/2$ голоморфная функция, можем сделать вывод, что $f(z)$ не могла быть голоморфной.

6). Просто подберем подходящую функцию:
$$f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2},\qquad\Rightarrow\qquad f(z)=z^2.$$

7). Рассмотрим
$$f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n+1}.$$
С одной стороны, из (3), следует, что
$$g(z)=\frac{z}{2+z},$$
«подходит», но $g\left(-\frac{1}{n}\right)\neq g\left(\frac{1}{n}\right)$, так что существование такой голоморфной f противоречило бы теореме о единственности.

8) Немного по-другому покажем, что
$$f\left(\frac{1}{n}\right)=e^{-n},\qquad\overset{?}{\Rightarrow}\qquad f(z)=e^{-1/|z|},$$
но такая функция не аналитична в нуле, так что такой голоморфной f не существует.

9). Аналогично (7):
$$f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3}.$$
По теореме о единственности, если такая голоморфная f существует, то $f(z)=g(z)=z^3$, но $g(-z)\neq g(z)$, а значит такой голоморфной f не существует.

§9, №3

Пусть функции f_1 и f_2 регулярны в области D и удовлетворяют уравнения $f'(z)=P(z,\,f(z))$, где P – многочлен. Покажем, что если в некоторой точке $z_0\in D$ имеет место равенство $f_1(z_0)=f_2(z_0)$, то $f_1(z)\equiv f_2(z)$.

$\triangle$. Для начала заметим, что
$$f_1(z_0)=f_2(z_0),\qquad\Rightarrow\qquad f_1'(z_0)=P(z_0,f_1(z_0))=f_2'(z_0)=P(z_0,\,f_2(z_0)).$$
Также заметим, что
$$f'(z_0)=\sum_{k,\,m}^{n}c_{mk}z_0^kf(z_0)^m,\qquad\Rightarrow\qquad f''(z_0)=\sum_{k,m}^{n}c_{mk}\left(kz_0^{k-1}f^m(z_0)+z_0^kmf^{m-1}(z_0)f'(z_0)\right),\qquad\Rightarrow\qquad f_1^{(2)}(z_0)=f_2^{(2)}(z_0),$$
и аналогично для всех остальных производных: $f_1^{(n)}(z_0)=f_2^{(n)}(z_0)$, а значит, по аналитичности f_1 и f_2 можем сделать вывод, что $f_1\equiv f_2$.

$\square$

T26

Фунция $f(z)=\sum_{n=1}^\infty a_nz^n$. Выразим через f сумму ряда $\sum_{n=1}^\infty n^3a_nz^n$. Можем просто несколько раз продифференцировать:
$$zf'(z)=\sum_{n=0}^\infty na_nz^n,\qquad z(zf')'=\sum_{n=0}^\infty n^2a_nz^n,\qquad z(z(zf')')'=\sum_{n=0}^\infty n^3a_nz^n.$$
Тогда не сложно выразить
$$\sum_{n=0}^\infty n^3a_nz^n=z(z(zf')')'=(zf'+f''z^2)'=f'''z^3+3f''z^2+f'z.$$

T27

Пусть $f(z)$ – целая функция и для каждого $z_0 \in \mathbb{C}$ в разложении по Тейлору найдётся нулевой коэффициент. Покажем, что $f(z)$ – полином.

$\triangle$. Построим множество

$$E_n = \Big\{ z \in \mathbb{C} \mid f^{(n)}(z) = 0 \Big\}.$$

При чем множество всех $\{E_n\}$ счётно, $\mathbb{C}$ несчётно, и по условию $\forall z\ \exists n\colon z \in E_n$, а значит найдётся N такой, что E_N несчётно. Тогда, по теореме о единственности, $f^{(N)} \equiv 0$, а значит $f(z)$ – полином.

$\square$

T28

Пусть целая функция $f(z)$ удовлетворяет условию $\operatorname{Re} f'(z) > 0\ \forall z \in \mathbb{C}$. Докажем, что $f(z)$ – полином первой степени с положительным коэффициентом при z^1.

$\triangle$. Воспользуемся теоремой Пикара или теоремой Лиувилля (доказательство).

Thr 5.1 (теорема Пикара)**.** *Образ целовй функции* $\neq \text{const}$ *тождественно равен* $\mathbb{C}$*, без, быть может, одной точки.*

Thr 5.2 (теорема Лиувилля)**.** *Если целая функция* $f(z)$ *ограничен, то* $f(z)$ *константа.*

Построим функцию $g(z)$ вида

$$g(z) = \frac{1}{1 + f'(z)},$$

которая по условию ($\operatorname{Re} f' > 0$ и f – целая) является целой. Тогда

$$g(z) = \frac{1}{(x+1) + iy} = \underbrace{\frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}}_{<1} - i \underbrace{\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}}_{<1}, \qquad \Rightarrow \qquad |g(z)| \leqslant \sqrt{2},$$

а значит, по теореме Лиувилля:

$$g(z) = \text{const}, \qquad \Rightarrow \qquad f'(z) = \text{const}, \qquad \Rightarrow \qquad f(z) = az + b, \quad a > 0.$$

$\square$

6 Изолированныйе особые точки. Ряд Лорана.

§11, №3(4)

Разложим в ряд Лорана по степеням z в кольце $1 < |z| < 2$, функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)62(z+2)} = \frac{Az+B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z+2}, \qquad \begin{cases} 2B + C = 1 \\ C + A = 0 \\ 2A + B = 2C \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad f(z) = -\frac{z-4}{9(z-1)^2} + \frac{1}{9(z+2)},$$

где, выделяя удобные слагаемые, находим

$$f(z) = \frac{1}{3(1-z)^2} + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2(1+z/2)} + \frac{1}{1-z} \right), \qquad \frac{1}{z+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n, \qquad \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \frac{1}{z^n},$$

таким образом искомое разложение:

$$f(z) = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-3n-4}{9} \frac{1}{z^n}.$$

§11, №4(6)

Разложим в ряд Лорана по степеням $z - a$ в кольце D функцию, вида

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 2i}, \qquad a = 1, \qquad -1 \in D.$$

Для начала подставим $t = z - 1$:

$$f(t) = \frac{1}{2+i}\frac{1}{1+\frac{t}{2+i}} + \frac{i}{1-\frac{t}{i}}, \qquad \frac{i}{1+t/i} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^{n+1}}{(z-1)^n}, \qquad \frac{1}{1+\frac{t}{2+i}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2+i)^n}t^n.$$

Собирая все вместе, находим

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2+i)^{n+1}}(z-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1}(z-1)^n.$$

§11, №7(3)

Разложим в ряд Лорана по степеням $z-a$ в кольце D функцию, вида

$$f(z) = \frac{5-4z}{(z+1)(z^2-1)^2}, \qquad a = 1, \qquad z_0 = 0.$$

Сделаем подстановку $t = z - 1$, тогда

$$f(t) = \frac{1-4t}{t^2(t+2)^3} = \frac{-\frac{11}{16}t + \frac{1}{8}}{t^2} + \frac{\frac{11}{16}t^2 + 4t + \frac{15}{2}}{(t+2)^3},$$

где разложение было получено, как решение

$$A + C = 0, \qquad 6A + D + B = 0, \qquad 8A + 12B = -4, \qquad 8B = 1,$$

решая которую, нашли, что

$$A = -\frac{11}{16}, \qquad B = \frac{1}{8}, \qquad C = \frac{11}{16}, \qquad D = 4, \qquad E = \frac{15}{2}.$$

Раскрывая, до удобного вида, находим

$$f(t) = -\frac{11}{16t} + \frac{1}{8t^2} + \frac{1}{(t+2)^3}\left(\frac{11}{16}t^2 + 44t + \frac{15}{2}\right).$$

Вспоним, что

$$\frac{1}{1+t/2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{2}\right)^n, \qquad \left|\frac{t}{2}\right| < 1, \qquad \frac{1}{2}\frac{1}{(1+t/2)^3} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}n(n-1)t^{n-2}.$$

Собирая всё вместе находим, что

$$f(t) = \frac{1}{8t^2} - \frac{11}{16t} + \frac{1}{64}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^n}{2^n}(3+n)(20+9n), \qquad 0 < |t| < 2,$$

или, возвращаясь к z:

$$f(z) = \frac{1}{8(z-1)^2} - \frac{11}{16(z-1)} + \frac{1}{64}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n}(3+n)(20+9n), \qquad 0 < |z-1| < 2.$$

§11, №10(6)

Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - 2i$, считая, что 0 принадлежит кольцу, где $f(z)$ вида

$$f(z) = \frac{z-1-5i}{z^2-2z+2} + \frac{3z-1-3i}{z^2-z(1+2i)-1+1}.$$

Для начла перейдём к переменной $t = z - 2i$:

$$f(t) = \frac{t-1-3i}{(t-1+i)(t-1+3i)} + \frac{3t-1+3i}{(t+i)(t-1+i)} = \underbrace{\frac{1}{i+t}}_{\text{по Лорану}} + \underbrace{\frac{3}{t+(1+3i)}}_{\text{по Тейлору}}.$$

В частности:

$$\frac{1}{t(1+i/t)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}i^{n-1}t^n, \qquad \frac{3}{-\left(\frac{t}{1-3i}\right)+1} = 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-3i)^{n+1}}t^n,$$

собирая всё вместе, находим

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-i)^{n-1}\frac{1}{t^n} - 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-3i)^{n+1}}t^n, \qquad 1 < |t| < \sqrt{10},$$

где ограничения продиктованы сходимостью указанных разложений по Лорану и по Тейлору. Возвращаясь к z:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-i)^{n-1}\frac{1}{(z-2i)^n} - 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-3i)^{n+1}}(z-2i)^n, \qquad 1 < |z-2i| < \sqrt{10}.$$

§12, №2(7)

Покажем, что $z = \pi i$ – полюс функции

$$f(z) = \frac{z}{(e^z+1)^2}.$$

Действительно,

$$\lim_{z\to\pi i} f(z)(z-\pi i)^2 = \pi i \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^2}{(\cos(\pi+\varepsilon)+1+i\sin(\pi+\varepsilon))^2} = \pi i \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^2}{(-i\varepsilon)^2} = \pi i,$$

а значит $z = \pi i$ – полюс второго порядка.

§12, №8

3). Найдём все изолированные особые точки однозначного характера для $f(z)$, вида

$$f(z) = z^2 \sin\frac{z}{z+1}.$$

Для начала заметим, что $z = -1$: $\nexists \lim$, $(\lim_{z\to -1+0} \neq \lim_{z\to -1-0})$, а значит $z = -1$ – существенная особая точка.

Также можем найти, что

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z^2} = \sin 1,$$

а значит $z = \infty$ – полюс II порядка.

7). Теперь рассмотрим функцию, вида

$$f(z) = e^{\operatorname{ctg}\pi/z}.$$

Во-первых, $z = 1/k$, $k \in \mathbb{Z}\ \{0\}$ – СОТ, т.к.

$$\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0} f\left(\frac{\pi}{\pi+\varepsilon}\right)}_{-\infty} \neq \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0} f\left(\frac{\pi}{\pi-\varepsilon}\right)}_{+\infty}.$$

Точка $z = 0$ не является изолированной, а $z = \infty$ – СОТ, т.к. $\operatorname{ctg} t$ испытывает разрыв в $t = 0$.

§12, №17(9)

Рассмотрим функцию, вида

$$f(z) = \frac{e^{1/(z-2i)}}{1-\cos i\pi z}.$$

Для начала заметим, что $z = 2i$ – СОТ ($1/x$ разрывна в 0).

Рассмотрим точки такие, что $\cos i\pi z = 1$:

$$\lim_{z\to 2ik}\frac{(z-2ik)^2}{1-\cos(i\pi z)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^2}{1-\cos\varepsilon} = 2 = \text{const} \neq 0,$$

а значит $z = 2ik$, где $k \in \mathbb{Z}$ – полюса II порядка. Точка $z = \infty$ не является изолированной.

§12, №20(5)

Повторим указанную выше процедуру для функции, вида

$$f(z) = \frac{\sin\pi z - \operatorname{ch}\pi/z}{(i - e^{\pi/z})^2}.$$

Стоит обратить внимание на точки $e^{\pi/z} = i \;\Leftrightarrow\; \frac{\pi}{z} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $z = 0$ и $z = \infty$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Для начала заметим, что

$$z_k = -i\left(\frac{1}{2}+2k\right)^{-1}, \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} f(z_k+\varepsilon)\varepsilon^2 = (\sin\pi z_k - \operatorname{ch}\pi/z_k)\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^2}{-\frac{1}{16}(1+4k)^4\pi^2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)} = \text{const} \neq 0,$$

а значит z_k – полюса II порядка. Сразу получаем, что $z = 0$ не является изолированным.

Осталось показать, что $z = \infty$ – СОТ. Действительно, при $z \to \infty$ из $f(z)$ можно выделить $\sin z$, который является целой трансцендентной функцией, а значит $z = \infty$ – СОТ.

T29

Пусть функция f голоморфна в проколотом единичном круге $0 < |z| < 1$, и при некоторых $A > 0$и $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$|f(z)| \leqslant \frac{A}{|z|^\alpha}.$$

Логично выделить случаи $\alpha = 1$ и $\alpha \in [0, 1)$.

При $\alpha = 1$, a – устранимая особая точка или полюс первого порядка, т.к.

$$\lim_{z \to 0} f(z) \cdot z^1 \leqslant A,$$

а значит в разложении $c_{k \leqslant -2} = 0$, и c_{-1} может быть не равно 0.

При $\alpha \in [0, 1)$ верно, что $c_{k \leqslant -1} = 0$, а значит $z = 0$ не более, чем УОТ.

T30

Найдём главную часть ряда Лорана, функции

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}.$$

Представим функцию, виде

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{z}{\sin z},$$

и воспользуемся методом неопределенных коэффициентов для нахождения разложения $z/\sin z$:

$$\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)}_{\sin z} \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right)}_{z/\sin z} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k}_{\equiv z}.$$

Само собой, выбираем кольцо, не содержащее точек, вида $z = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Вспоним, что

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1},$$

тогда получаем набор уравнений на b_k, из которых нас интересует только b_0 (ищем главную часть $f(z)$):

$$\left\{ a_0 b_0 = c_0 a_1 b_0 + a_0 b_1 \quad = c_1 \qquad \Rightarrow \qquad b_0 = 1, \right.$$

т.к. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и $c_0 = 0$, $c_1 = 1$. А значит искомая главная часть $f(z)$:

$$f(z) = \boxed{\frac{1}{z}} + \text{TheilorSeries}[f](z).$$