Оптическая глубина

Интенсивность слабого одиночного луча, проходящего через ячейку описывается законом Бэра:

$$dI/dx = -\alpha I, \qquad \alpha = \alpha(\nu).$$

В хорошем приближение[1] $\alpha \neq \alpha(x)$. Введем оптическую длину $\tau(\nu) = l\alpha(\nu)$, тогда

$$I_{\text{out}} = I_{\text{in}} e^{-\alpha(\nu) l} = I_{\text{in}} e^{-\tau(\nu)}.$$

Вклад от группы атомов $(v,\, v + dv)$ в $\tau(\nu)$ можем быть записан, как

$$d\alpha(\nu, v) = \sigma(\nu, v)\, dn(v), \quad \Rightarrow \quad d\tau(\nu, v) = l\sigma(\nu, v)\, dn(v).$$

Коэффициент поглощения $\sigma(\nu, v)$ имеет Лоренцовский профиль с натуральной шириной Γ (?) и смещенной по Допплеру резонансной частотой

$$\sigma(\nu, v) = \sigma_0 \frac{\Gamma^2/4}{(\nu - \nu_0(1 - v/c))^2 + \Gamma^2/4}, \tag{1}$$

где σ_0 – резонансное сечение поглощения[2] , зависящее от вида дипольного перехода и поляризации падающего света [1⇒4].

Часть атомов $dn(v)$ с определенной скорости можем найти из распределения Больцмана

$$dn(v) = n_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi k_{\text{B}} T}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_{\text{B}}T}\right) dv,$$

где $n_0 = N/V$ – концентрация атомов в ячейке.

Собирая все вместе (?) приходим к выражению

$$d\tau(\nu, v) = \frac{2}{\pi} \frac{\tau_0}{\sigma_0 \Gamma} \frac{\nu_0}{c} \sigma(\nu, v) \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_{\text{B}}T}\right) dv, \tag{2}$$

где τ_0 – сответствующая нормировка такая, что для резонанса $\tau_0 = \int_v d\tau(\nu_0,\, v)$.

Для насышенной спектроскопии нужно учесть эффект от дополнительного насыщающего лазерного луча. Из-за него значительная часть атомов в ячейке будут в возбужденном состоянии. Так как атомы могут поглощать свет только когда они в невозможденном состоянии, к (2) добаваить фактор $(N_{\text{g}} - N_{\text{e}})/N$, описывающей разницу между количеством атомов в возбужденном состоянии N_{e} и невозбужденном N_{g}.

Скоростные уравнения

Населенность в двух состояния описывается скоростными ураненеиями

$$\begin{aligned} \dot{N}_{\text{g}} &= \quad \Gamma N_e - \sigma\Phi(N_{\text{g}} - N_{\text{e}}), \\ \dot{N}_{\text{e}} &= -\Gamma N_e + \sigma\Phi(N_{\text{g}} - N_{\text{e}}), \end{aligned}$$

где первое слагаемое отвечает спонтанной эмиссии, и второе насыщению лазером. $\Phi = I/h\nu$ – насыщающий поток фотонов. Учитывая, что $N_{\text{g}} + N_{\text{e}} = N = \text{const}$, можем получить диффур первого порядка на N_{e}:

$$\dot{N}_{\text{e}} = -(\Gamma + 2\sigma\Phi) N_{\text{e}} + \sigma\Phi N.$$

Решение можем быть найдено в виде

$$N_{\text{e}}(t) = \left[N_{\text{e}}(0) - \frac{N\sigma\Phi}{\Gamma + 2\sigma\Phi}\right] e^{-(\Gamma + 2\sigma\Phi)t} + \frac{N\sigma\Phi}{\Gamma + 2\sigma\Phi}.$$

Заметим, что при $\Phi = 0$:

$$N_{\text{e}}(t) = N_{\text{e}}(0) e^{-\Gamma t},$$

а в случае слаюого насыщающего луча $\sigma\Phi \ll \Gamma$, и изначальной популяции в невозбужденном состоянии,

$$N_{\text{e}}(t) = \frac{N\sigma\Phi}{\Gamma}\left(1 - e^{-\Gamma t}\right),$$

достигающий стационарного состояния после Γ^{-1} с $N_{\text{e}} = N\sigma\Phi/\Gamma \ll N$. Наконец, при $\sigma\Phi \gg \Gamma$, получаем насыщенный переход

$$N_{\text{e}}(t) = \left[N_{\text{e}}(0) - N/2\right] e^{-2\sigma\Phi t} + N/2 \to N/2.$$

Под насыщением понимаем, что $N_{\text{e}} = N/2$, большие значения по понятным причинам невозможны $\forall\Phi$, по крайней мере для двухуровневых систем.

[1] Для слабого луча [1].

[2] [1], problem 1: $\sigma_0 \sim n$ атомов в ячейке.

Также наблюдается увеличение «мощности» ширины линии перехода, в пределе $(\Gamma + 2\sigma\Phi)t \gg 1$, получаем

$$\frac{N_{\rm e}(\infty)}{N} = \frac{\sigma\Phi}{\Gamma + 2\sigma\Phi}.$$

Вспоминая уранение (1) с $\Delta\nu = \nu - \nu_0(1 + v/c)$ (минус, т.к. допплеровский сдвиг в другую сторону), можем переписать уравнение в виде

$$\frac{N_{\rm e}(\infty)}{N} = \frac{\sigma_0\Phi\Gamma/4}{\Delta\nu^2 + \Gamma^2/4 + \sigma_0\Phi\Gamma/2}, \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{N_{\rm e}}{N} = \frac{s/2}{1 + s + 4\Delta\nu^2/\Gamma^2}}$$

, где ввели параметр насыщения $s = \Phi/\Phi_{\rm sat}$, $\Phi_{\rm sat} = \Gamma/2\sigma_0$.

Получился лоренцев профиль с уширением, полуширина (FWHM) которого зависит от Φ:

$$\text{FWHM} = \frac{\Gamma}{2}\sqrt{1 + \frac{2\sigma_0\Phi}{\Gamma}}.$$

Интенсивность насыщения $I_{\rm sat}$ может быть выражена, как $[1 \Rightarrow 4]$

$$I_{\rm sat} = 2\pi^2 hc\Gamma/3\lambda^3.$$

Например, для ^{87}Rb с натуральной шириной $\Gamma = 6$ МГц, $I_{\rm sat} = 1.65$ мВт/см^2.

Итоговая картина для двухуровнего атома

Собираем всё вместе, в зависимости от мощности насыщающего лазера некоторое количество атомов будет находиться в возбужденном состоянии:

$$\frac{N_{\rm e}}{N} = \frac{s/2}{1 + s + 4(\Delta_+\nu)^2/\Gamma^2}, \qquad \frac{\sigma(\nu, v)}{\sigma_0} = \frac{1}{4(\Delta_-\nu)^2/\Gamma^2 + 1}, \qquad \Delta_\pm\nu = \nu - \nu_0(1 \pm v/c).$$

Тогда

$$\frac{I_{\rm out}}{I_{\rm int}} = \exp\left[-\varkappa\int_{-\infty}^{\infty}\left(1 - 2\frac{N_{\rm e}(\nu, v)}{N}\right)\frac{\sigma(\nu, v)}{\sigma_0}\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_{\rm B}T}\right)\,dv\right], \tag{3}$$

где

$$s = \Phi/\Phi_{\rm sat}, \qquad \Phi_{\rm sat} = \Gamma/2\sigma_0, \qquad \varkappa = \sigma_0 nl\sqrt{\frac{m}{2\pi k_{\rm B}T}},$$

можно подставить, но пока не нужно:

$$\frac{I_{\rm out}}{I_{\rm int}} = \exp\left[-\varkappa\int_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{s}{1 + s + 4(\Delta_+\nu)^2/\Gamma^2}\right)\frac{1}{4(\Delta_-\nu)^2/\Gamma^2 + 1}\exp\left(-\frac{mv^2}{2k_{\rm B}T}\right)\,dv\right] = \exp\left[-\varkappa F(s, \nu)\right].$$

Оценка контрастности

В первом приближении, не зная значения $\varkappa$, можем оценить его, зная глубину доплеровского провала в резнансе ν_0. Введем для удобства приведенную интенсивность $\beta \overset{\text{def}}{=} I_{\text{out}}/I_{\text{in}}$, далее в этом разделе всегда полагаем $\nu = \nu_0$, тогда

$$\beta(s=0) \overset{\text{def}}{=} \beta_0 = e^{-\varkappa F(0)}, \quad \Rightarrow \quad \varkappa = \frac{\ln 1/\beta_0}{F(0)},$$

где $1 - \beta_0$ – глубина доплеровского провала.

Тогда контрастность спектроскопии K, определенную, как отношение высоты лэмбоского пика к глубине доплеровского провала, можем найти, как

$$K(s) = \frac{e^{-\varkappa F(s)} - e^{-\varkappa F(0)}}{1 - e^{-\varkappa F(0)}} = \frac{\beta_0^{F(s)/F(0)} - \beta_0}{1 - \beta_0}.$$

Ниже на рисунке приведены значения контрастности $K(s)$ для различных β.