# Задание по курсу вычислительной математики

**Автор**: Хоружий Кирилл

**От**: *20 сентября 2021 г.*

## Содержание

# 1 A2

## №5

Рассмотрим многомерное нормаьное распределение для $\tilde{y}_i$ с симметричной матрицей ковариации $\Sigma$:
$$\tilde{y} = \frac{1}{(2\pi)^{l/2}\sqrt{\det\Sigma}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(\tilde{y}-y)\Sigma^{-1}(\tilde{y}-y)\right).$$

**Нормировка**. В силу симметричности $\Sigma$ существует $S$ такая, что $S^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}S = E$, тогда $\det S = \sqrt{\det\Sigma}$. Тогда, в силу знания о линейной замене переменных в кратном интеграле, при замене $\tilde{y}-y = Sz$, верно:
$$\int \tilde{y}\, d^l\tilde{y} = \frac{\det S}{\sqrt{\det\Sigma}} \int \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^l} \exp\left(-\tfrac{1}{2} z^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1} S z\right)\, d^l\tilde{y},$$
что приводит к факторизации, и, по теореме Фубини, можем записать
$$\int \tilde{y}\, d^l\tilde{y} = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}z_1^2\right)\, dz_1 \;\cdot\; \ldots \;\cdot\; \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\tfrac{1}{2}z_l^2\right)\, dz_l = 1,$$
следовательное, указанное распределение нормировано.

**Парные корреляторы**. Вообще, говорят, что набор случайных величин $\xi$ имеет многомерноное нормальное распределение, если найдётся вектор $a$, невыроденная матрица $C$ и набор *независимых* стандартных нормальных величин $\eta$ такие, что
$$\xi = a + C\eta.$$
Так гораздо удобнее найти $\mathrm{cov}(\xi_i,\, \xi_k)$:
$$\langle\!\langle \xi_i,\, \xi_j\rangle\!\rangle = \langle\!\langle (a+C\eta)_i,\, (a+C\eta)_j\rangle\!\rangle = \sum_{\alpha=1}^{l}\sum_{\beta=1}^{l} c_{i\alpha}c_{j\beta} \underbrace{\langle\!\langle \eta_\alpha,\, \eta_\beta\rangle\!\rangle}_{\delta_{\alpha\beta}} = \sum_{\alpha=1}^{l} c_{i\alpha}c_{j\alpha} = \left(CC^{\mathrm{T}}\right)_{ij} = \Sigma_{ij},$$
где последнее равенство следует из факторизации распределения для $\eta$.

**Погрешности параметров**. Оценим погрешности парметров, аналогично расчёту с лекции:
$$\begin{aligned} w_\alpha &= Q_{\alpha i} y_i \\ \tilde{w}_\alpha &= Q_{\alpha i}\tilde{y}_i \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \langle\!\langle \tilde{w}_\alpha,\, \tilde{w}_\beta\rangle\!\rangle = \ldots = Q_{\alpha i}Q_{\beta j}\langle\!\langle \tilde{y}_i,\, \tilde{y}_j\rangle\!\rangle = Q_{\alpha i}Q_{\beta j}\Sigma_{ij} = (Q\Sigma Q^{\mathrm{T}})_{\alpha\beta},$$
что похоже на правду, по крайней мере формы совпадают.

**Погрешности в линейной регрессии**. Считая $A = \mathrm{diag}(A_1,\, \ldots,\, A_l)$, оценим погрешности $\mathrm{var}\, w_\alpha$. Рассмотрим, видимо, линейную регрессию, тогда, как и раньше
$$X = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \ldots & \ldots \\ x_l & 1 \end{pmatrix}, \qquad X^{\mathrm{T}}X = l\begin{pmatrix} \bar{x^2} & \bar{x} \\ \bar{x} & 1\end{pmatrix}, \qquad (X^{\mathrm{T}}X)^{-1} = \frac{1}{l\,\mathrm{var}\,x}\begin{pmatrix} 1 & -\bar{x} \\ -\bar{x} & \bar{x^2}\end{pmatrix}..$$
Здесь, наверное, будет удобнее сразу найти
$$Q = \left(X^{\mathrm{T}}X\right)^{-1}X^{\mathrm{T}} = \frac{1}{l\,\mathrm{var}\,x}\begin{pmatrix} x_1-\bar{x} & \ldots & x_l-\bar{x} \\ \overline{x^2}-\bar{x}x_1 & \ldots & \overline{x^2}-\bar{x}x_l\end{pmatrix}.$$
Тогда искомые погрешности могут быть найдены, как
$$\mathrm{var}\,w_1 = (Q\Sigma Q^{\mathrm{T}})_{11} = \frac{1}{l(\mathrm{var}\,x)^2}\left(\langle x_i^2\sigma_i^2\rangle - 2\bar{x}\langle x_i\sigma_i^2\rangle + \bar{x}^2\langle\sigma_i^2\rangle\right),$$
$$\mathrm{var}\,w_0 = (Q\Sigma Q^{\mathrm{T}})_{22} = \frac{1}{l(\mathrm{var}\,x)^2}\left((\overline{x^2})^2\langle\sigma_i^2\rangle - 2\bar{x}\cdot\overline{x^2}\langle x_i\sigma_i^2\rangle + \bar{x}^2\langle x_i^2\sigma_i^2\rangle\right).$$
где $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1,\ldots,\sigma_l)$, и $\mathrm{var}\,\tilde{y}_i \sim \sigma_i^2$. Действительно, при $\sigma_i^2 = s^2 = \mathrm{const}$ всё сходится.