Задание по курсу
«Уравнения математической физики»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *25 сентября 2021 г.*

ТеорМин

Интеграл по дуге может быть найден, как

$$\int_C dz f(z) = 2\pi i \sum_{z_j} \operatorname{res}_{z_j} f(z), \qquad \operatorname{res}_{z_j} f(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i\varphi} f(z_j + \varepsilon e^{i\varphi})$$
$$= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_j} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_j)^m f(z) \right),$$

где m – степень полюса.

1 Неделя I

№1

Рассмотрим уравнение на $G(t)$

$$(\partial_t + \gamma) G(t) = \delta(t), \tag{1}$$

с учетом принципа причинности $g(t<0)=0$.

При $t>0$ $\delta(t)=0$, так что

$$\partial_t G(t) = -\gamma G(t), \quad \Rightarrow \quad G(t) = A\exp(-\gamma t).$$

Проинтегрируем уравнение (1) от $-\varepsilon$ до ε:

$$G(\varepsilon) - \cancel{G(-\varepsilon)} + \cancel{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \gamma G(t)\, dt} = \int \delta(t)\, dt = 1, \quad \Rightarrow \quad G(\varepsilon) = 1, \quad \Rightarrow \quad A = 1.$$

Таким образом, искомая функция Грина $G(t)$:

$$G(t) = \theta(t)\cdot \exp\left(-\gamma t\right),$$

где $\theta(t)$ обеспечивает $G(t)=0$ при $t<0$.

№2

Рассмотрим уравнение, вида

$$(\partial_t^2 + \omega^2)\varphi(t) = g(t), \qquad g(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [0,\tau]; \\ -\frac{v}{\tau l}, & t\in[0,\tau], \end{cases}$$

с нулевым начальным условием $\varphi(t<0)=0$. Функция Грина $G(t)$ для оператора $(\partial_t^2+\omega^2)$ равна[1]

$$G(t) = \theta(t)\frac{1}{\omega}\sin(\omega t), \tag{2}$$

Далее найдём вид $\varphi(t)$ при $t<\tau$ (красная линия рис. 1):

$$\varphi(t<\tau) = \frac{1}{\omega}\int_{-\infty}^t \sin\omega(t-s)\ g(s)\,dt = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-s)\frac{v}{2l}\,d(t-s) = \frac{v}{l\tau}\frac{1}{\omega^2}\left(\cos(\omega t) - 1\right).$$

Теперь решим[2] задачу Коши с начальным условием при $t=\tau$, введя переменную $T=t-\tau$:

$$\varphi(T) = \varphi(t-\tau) = \dot\varphi(\tau)G(t-\tau) + \varphi(\tau)\dot G(t-\tau) + 0 = \frac{v}{lt}\frac{1}{\omega^2}\left(\cos\omega t - \cos\omega(t-\tau)\right).$$

получая синюю кривую на рис. 1.

[1] Конспект, уравнение (1.11).
[2] Конспект, уравнение (1.12).

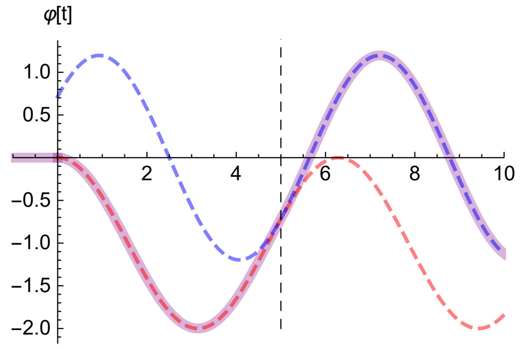

Рис. 1: Сшивка решений в I.2

Итого, решение уравнения (1) (фиолетовая кривая, рис 1):

$$\varphi(t)=\frac{v}{l\tau}\frac{1}{\omega^2}\begin{cases}0, & t<0;\\ \cos\omega t-1, & t\in[0,\tau];\\ \cos\omega t-\cos\omega(t-\tau), & t>\tau.\end{cases}$$

№3

I. Найдём значение интеграла, вида

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,dx.$$

Заметим, что уравнение $z^2+a^2=0$ имеет корни в $z_{1,2}=a^{\pm i\pi/2}$, тогда

$$I_1=2\pi i\cdot\operatorname{res}_{z_1}=2\pi i\lim_{z\to z_1}\cdot\left(\frac{1}{(z-z_2)^2}\right)'=-4\pi i\cdot\lim_{z\to z_1}\left(\frac{1}{(z-z_2)^3}\right)=-4\pi i\frac{1}{(2ia)^3}=\frac{\pi}{2a^3}.$$

II. Теперь найдём значение интеграла, вида

$$I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ipx}}{x^2+a^2}\,dx\overset{p\geq 0}{=}2\pi i\cdot\operatorname{res}_{ia}f(z)=2\pi i\cdot\frac{e^{-ap}}{2ai}=\frac{\pi}{a}e^{-ap},$$

где мы считали $p>0$. В случае $p<0$:

$$I_2\overset{p\leq 0}{=}-2\pi i\cdot\operatorname{res}_{-ia}f(z)=-2\pi i\cdot\frac{e^{ap}}{-2ai}=\frac{\pi}{a}e^{ap},\qquad\Rightarrow\qquad I_2=\frac{\pi}{a}e^{-a|p|}.$$

2 Неделя II

№1 (1.1.4)

Найдём функию Грина $G(t)$ уравнения

$$L(\partial_t)x(t)=\varphi(t),\qquad L(\partial_t)=\partial_t^4+4\nu^2\partial_t^2+3\nu^4.$$

Функция Грина может быть найдена, как решение уравнения

$$L(\partial_t)G(t)=\delta(t)l,\qquad\Rightarrow\qquad G(t)=\theta(t)\cdot\left(b_1e^{-\nu t}+b_2e^{i\nu t}+b_3e^{-i\sqrt{3}\nu t}+b_4e^{i\sqrt{3}\nu t}\right),$$

где воспользовались разложением

$$L(z)=(z+i\nu)(z-i\nu)(z-i\sqrt{3}\nu)(z+i\sqrt{3}\nu).$$

Интегрируя от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$ уравнение на $G(t)$ находим, что

$$\partial_t^3G(+0)=1,\qquad\partial_t^2G(+0)=\partial_t^1G(+0)=G(+0)=0,$$

откуда получаем СЛУ на $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$:

$$\left.\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 &= 0, \\ b_1 - b_2 + \sqrt{3}\,(b_3 - b_4) &= 0, \\ b_1 + b_2 + 3\,(b_3 + b_4) &= 0, \\ b_1 - b_2 + 3\sqrt{3}\,(b_3 - b_4) &= -\tfrac{i}{\nu^3}, \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad b_1 = \frac{i}{4\nu^3}, \quad , b_2 = -\frac{i}{4\nu^3}, \quad , b_3 = -\frac{i}{4\sqrt{3}\nu^3}, \quad , b_4 = \frac{i}{4\sqrt{3}\nu^3}.$$

Так получаем решение, вида

$$G(t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{3}\,\nu^3}\left(\sqrt{3}\sin(\nu t) - \sin(\sqrt{3}\nu t)\right).$$

№2 (1.1.5)

Найдём функцию Грина для уравнения, вида

$$(\partial_t^2 + \nu^2)^2 x(t) = \varphi(t).$$

Аналогично предыдущему номеру, сначала находим $G(t > 0)$:

$$G(t > 0) = b_1 e^{i\nu t} + b_2 t e^{i\nu} + b_3 e^{-i\nu t} + b_4 t e^{-i\nu t},$$

где секулярные члены возникли из-за кратности корней.

Также, интегрируя уравнение на $G(t)$ от $-\varepsilon$ до ε, получаем аналогичное условие

$$\partial_t^3 G(+0) = 1, \qquad \partial_t^2 G(+0) = \partial_t^1 G(+0) = G(+0) = 0,$$

и приходим к СЛУ на коэффициенты $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$:

$$\left.\begin{aligned} b_1 + b_3 &= 0, \\ i\,(b_1 - b_3)\,\nu + b_2 + b_4 &= 0, \\ \nu\,((b_1 + b_3)\,\nu - 2i\,(b_2 - b_4)) &= 0, \\ \nu^2\,(-3\,(b_2 + b_4) - i\,(b_1 - b_3)\,\nu) &= 1, \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad b_1 = -\frac{i}{4\nu^3}, \quad b_2 = -\frac{1}{4\nu^2}, \quad b_3 = \frac{i}{4\nu^3}, \quad b_4 = -\frac{1}{4\nu^2}.$$

Получаем решение, вида

$$G(t) = \frac{\theta(t)}{2\nu^3}\left(\sin(\nu t) - \nu t\cos(\nu t)\right).$$

№3 (1.1.8)

Для системы уравнений, вида

$$(\partial_t + \hat{\Gamma})\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{\xi}(t), \qquad \Gamma = \lambda\delta_{i,j} + \delta_{i,j-1},$$

найдём функцию Грина $G(t)$, как решение уравнения

$$(\partial_t + \hat{\Gamma})G(t) = \delta(t)\mathbb{E}, \qquad \Rightarrow \qquad G(t) = \theta(t)\exp\left(-\hat{\Gamma}t\right).$$

Осталось найти $\exp(-\hat{\Gamma}t)$, как матричную экспоненту, от жордановой клетки.

Для начала заметим, что

$$\delta_{i,j-1}^2 = \delta_{i,j-1}\delta_{j,k} = \delta_{i+1,k-1} = \delta_{i,k-2},$$

и так далее, то есть $\delta_{i,j-1}$ – нильпотентный оператор, с $\delta_{i,j-1}^4 = 0$.

Посмотрим на степени $\hat{\Gamma}$:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^2 &= \delta_{i,j} + 2\delta_{i,j-1} + \delta_{i,j-2} \\ \hat{\Gamma}^3 &= \delta_{i,j} + 3\delta_{i,j-1} + 3\delta_{i,j-2} + \delta_{i,j-3} \\ \hat{\Gamma}^4 &= \delta_{i,j} + 4\delta_{i,j-1} + 6\delta_{i,j-2} + 4\delta_{i,j-3} + \delta_{i,j-4}, \end{aligned}$$

но $\delta_{i,j-4} = 0$, так что можем явно выделить на побочных диагоналях соответсвтующие экспоненты:

$$G(t) = \theta(t)e^{-\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{t^2}{2} & -\frac{t^3}{6} \\ 0 & 1 & -t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где появившиеся t^k – секулярные члены.

№4

В частотном представлении для оператора $\partial_t^2 + \omega_0^2$ можем «найти» функцию Грина, приводящую к

$$G(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{d\omega}{2\pi},$$

с особенностями на вещественной оси.

Регуляризуем интеграл, рассмотрением «затухающего» осцилятора, тогда

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{-i\omega t}}{(\omega_0 - \omega + i\varepsilon_1)(\omega_0 + \omega + i\varepsilon_2)}}_{F(w)} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Получилось два полюса:

$$\omega_1 = \omega_0 + i\varepsilon_1, \quad \omega_2 = -\omega_0 - i\varepsilon_2.$$

Соответсвенно, по лемме Жордана, наличие/отсутствие вклада от $\varepsilon_{1,2}$ будет зависеть от выбора знаков в $\varepsilon_{1,2} \to \pm 0$.

Для начала найдём вычеты по каждому полюсу:

$$2\pi i \cdot \mathrm{res}_{\omega_1} F(\omega) = i\varepsilon e^{i\varphi} F(\omega_1) = -i\varepsilon e^{i\varphi} \frac{e^{it\omega_0}}{2\omega_0 + i(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon e^{i\varphi}} \overset{\varepsilon \to 0}{\approx} -\frac{i}{2\omega_0} e^{-it\omega_0}.$$

Аналогично, для второго полюса:

$$2\pi i \cdot \mathrm{res}_{\omega_2} F(\omega) = \ldots = \frac{i}{2\omega_0} e^{it\omega_0}.$$

Сразу заметим, что при вхождение только отного вычета невозможно выполнение условия о $G(0) = 0$, тогда рассмотрим $\varepsilon_1 \to +0$ и $\varepsilon_2 \to -0$, тогда оба полюча находятся в верхней полуплоскости, по которой и происходит обход *по* часовой стрелке:

$$G(t) = \theta(-t) \frac{1}{\omega_0} \sin(-\omega_0 t),$$

что соответствует опережающей функции Грина ($\partial_t G(t=0) = -1$).

Теперь найдём, что при $\varepsilon_1 \to -0$ и $\varepsilon_2 \to +0$ оба вычета в нижней полуплоскости, что приведет к смене знака:

$$G(t) = \theta(t) \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t),$$

что и соответствует запаздывающей функции Грина (см. ур. (2), $\partial_t G(t=0) = 1$), что не может не радовать.

3 Семинар от 25.09.21

Про Фурье. Как раньше нашли

$$L(\partial_t) G(t) = \delta(t), \quad \Rightarrow \quad \hat{x}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} x(t)\, dt, \quad x(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} \hat{x}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Для этого должно выполняться

$$\int |x(t)|\, dd < +\infty.$$

Например, для $\partial_t + \gamma$:

$$(\partial_t + \gamma) G(t) = \delta(t), \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\ldots} e^{-i\omega t}\, dt = x(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty}, \quad \Rightarrow \quad (i\omega + \gamma) \hat{G}(\omega) = 1, \quad \Rightarrow \quad \hat{G}(\omega) = \frac{1}{i\omega + \gamma}.$$

Так приходим к уравнению

$$G(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\gamma} \frac{d\omega}{2\pi} = \{ e^{-\gamma t}, \quad t > 00, \quad t < 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{G}(\omega) = \theta(t) e^{-|t|}.$$

Однако, при $\hat{L} = \partial_t - \gamma$ мы бы получили

$$G_A(t) = \theta(-t) e^{\gamma t},$$

хотя вообще должно быть (если посчитать через неопределенные коэффициенты)

$$G_R(t) = \theta(t) e^{\gamma t},$$

которая растёт.

В методе с Фурье будут получаться функции Грина затухающие, но, возможно, без причинности. В методе неопределенных коэффициентов исходим из причинности, но может быть рост $\sim e^{\gamma t}$.

Кроме того, в Фурье всегда предполагается $x(t\to-\infty)=0$ и $x(t\to+\infty)=0$. Также может случиться

$$(\partial_t^2+\omega_0^2)G(t)=\delta(t),\qquad\Rightarrow\qquad \hat{G}(\omega)=\frac{1}{\omega^2-\omega_0^2},$$

с особенностями на вещественной оси, что можно решить, сместив полюса в $\mathbb{C}$.

Свёртка. Рассмотрим уравнение

$$L(\partial_t)x(t)=f(t),\qquad L(\partial_t)G(t)=\delta(t).$$

Фурье переводит

$$\int_{\mathbb{R}}\partial_x^n x(t)e^{-i\omega t}\,dt=(i\omega)^n\hat{x}(\omega).$$

Тогда

$$L(i\omega)\hat{x}(\omega)=\hat{f}(\omega),\qquad L(i\omega)\hat{G}(\omega)=1,\qquad\Rightarrow\qquad \hat{G}(\omega)=\frac{1}{L(i\omega)}.$$

Также нашли, что

$$\hat{x}(\omega)=\frac{\hat{f}(\omega)}{L(i\omega)}=\hat{f}(\omega)\hat{G}(\omega),\qquad\Rightarrow\qquad x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(t-s)f(s)\,ds.$$

Преобразование Лапласа. Пусть есть некоторое преобразование

$$\tilde{f}(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt,$$

где подразумевается, что $\operatorname{Re}p\geqslant 0$ и, вообще, в Фурье можно $p\in\mathbb{C}$.

Пусть $p=i\omega$, где $\omega\in\mathbb{R}$. Тогда

$$\tilde{f}(i\omega)=\int_{\mathbb{R}}e^{-i\omega t}f(t)\,dt=\hat{f}(\omega),\qquad\Rightarrow\qquad f(t)=\int_{\mathbb{R}}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}=\int_{\mathbb{R}}\tilde{f}(i\omega)e^{i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}=\int_{-i\infty}^{i\infty}e^{pt}\tilde{f}(p)\frac{dp}{2\pi}.$$

В вычислениях выше мы предполагали, что $f(t\to\infty)=0$.

Обойдём это, пусть $|f(t)|<Me^{st}$, при $s>0$. Возьмём $p_0>s$, тогда

$$\tilde{f}(p)=\int_{\mathbb{R}}e^{-p_0t}e^{-(p-p_0)t}f(t)\,dt=\tilde{g}(p-p_0),$$

где вводе $g(t)=e^{-ip_0t}f(t)$, которая уже убывает на бесконечности. Обратно:

$$g(t)=\int_{-i\infty}^{+i\infty}\tilde{g}(p)e^{pt}\frac{dp}{2\pi}=\int_{p_0-i\omega}^{p_0+i\omega}\tilde{g}(p-p_0)e^{-p_0t}e^{pt}\frac{dp}{2\pi i}.$$

Так пришли к форме обращения

$$f(t)=\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega}\tilde{f}(p)\frac{dp}{2\pi i},\qquad \tilde{f}(p)=\int_{\mathbb{R}}e^{-p_0t}e^{-(p-p_0)t}f(t)\,dt=\tilde{g}(p-p_0),\tag{3}$$

где $g(t)=e^{-ip_0t}f(t)$.

Забавный факт, из леммы Жордана: при $t<0$ $f(t<0)=9$, по замыканию дуги по часовой стрелке (вправо). Выбирая p_0 так, чтобы все особенности лежали левее p_0, можем получать причинные функции.

Производная. Найдём преобразование Лапласа для $\partial_t f(t)$:

$$\int_0^\infty\frac{df}{dt}e^{-pt}\,dt=fe^{-pt}\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt=p\tilde{f}(p)-f(+0).$$

Но, для функции Грина $L(\partial_t)G(t)=\delta(t)$, тогда

$$L(\partial_t)G_\varepsilon(t)=\delta(t-\varepsilon),\qquad G_\varepsilon(t)=G(t-\varepsilon),\qquad\Rightarrow\qquad G_\varepsilon(0)=0,$$

где $G_\varepsilon\to G(t)$ при $\varepsilon\to 0$.

Преобразуем[3] по Лапласу уравнения выше

$$L(p)G(p)=e^{p\varepsilon}=1,\qquad\Rightarrow\qquad G_\varepsilon(p)=\frac{1}{L(p)},\qquad\overset{\varepsilon\to 0}{\Rightarrow}\qquad G(p)=\frac{1}{L(p)}.$$

Так получаем

$$G(t)=\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega}\frac{e^{pt}}{\tilde{L}(p)}\frac{dp}{2\pi i},\tag{4}$$

где p_0 правее всех особенностей.

[3]Здесь и далее $f(t)$ – функция, $f(\omega)=\hat{f}(\omega)$ – Фурье образ, $f(p)=\tilde{f}(p)$ – преобразование Лапласа.

Пример. Рассмотрим $L = \partial_t + \gamma$, тогда
$$(p+\gamma)G(p) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(p) = \frac{1}{p+\gamma}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{pt}}{p+\gamma}\frac{dp}{2\pi i} = \theta(t)e^{-\gamma t}.$$
Аналогично, пусть $L = \partial_t^2 + \omega^2$, тогда $LG(t) = \delta(t)$, и
$$G(p) = \frac{1}{p^2+\omega^2}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \frac{e^{pt}}{p^2+\omega^2}\frac{dp}{2\pi i} = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \ldots, & t>0 \end{cases} = \theta(t)\left(\frac{e^{i\omega t}}{2i\omega} + \frac{e^{-i\omega t}}{-2i\omega t} = \theta(t)\frac{\sin\omega t}{\omega}.\right)$$
В общем виде, пусть $L(\partial_t)G(t) = \delta(t)$, тогда
$$L(p)G(p) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(p)\frac{1}{L(p)}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \frac{e^{pt}}{L(p)}\frac{dp}{2\pi i}.$$
Поговорим про свёртку:
$$Lx = f, \quad \Rightarrow \quad L(p)x(p) = f(p), \quad L(p)G(p) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(p) = \frac{1}{L(p)}.$$
Тогда получается
$$x(p) = \frac{f(p)}{L(p)} = f(p)G(p), \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int_0^t G(t-s)f(s)\,ds.$$
Уравнение Вольтера. Иногда бывает уравнения на $x(s)$ вида
$$f(t) = \int_0^t x(s)K(t-s)\,ds. \tag{5}$$
Через преобразрвание Лапласа, находим
$$f(p) = x(p)K(p), \quad \Rightarrow \quad x(p) = \frac{f(p)}{K(p)}. \tag{6}$$
В общем виде тогда находим
$$x(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \frac{f(p)}{K(p)}e^{pt}\frac{dp}{2\pi i}.$$
Кстати, забавный факт:
$$\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} 1\cdot e^{pt}\frac{dp}{2\pi i} = e^{p_0t}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt}\frac{dp}{2\pi i} = e^{p_0t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi} = \delta(t), \tag{7}$$
то есть преобразование Лапласа от константы – дельта функция.

Рассмотрим, например
$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{p+1-1}{p+1}e^{pt}\frac{dp}{2\pi i} = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt}\frac{dp}{2\pi i} - \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{pt}}{p+1}\frac{dp}{2\pi} = \delta(t) - \theta(t)e^{-t}.$$
Также верно, что
$$\int_{-i\infty}^{i\infty} pe^{pt}\frac{dp}{2\pi i} = \delta'(t).$$
Действительно,
$$\frac{d}{dt}\left(\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt}\frac{dp}{2\pi i}\right) = \frac{d}{dt}\delta(t) = \delta'(t).$$
Важно, что можно делать функции маленькими
$$\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} f(p)e^{pt}\frac{dp}{2\pi i} = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \frac{f(p)}{p^n}e^{pt}\frac{dp}{2\pi i}. \tag{8}$$
Неоднородная релаксация. Рассмотрим уравнение
$$(\partial_t + \gamma(t))G(t,s) = \delta(t-s), \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s)\,ds,$$
где продолжаем требовать причинность $G(t, s>t) = 0$. Для начала, рассмотрим $t>s$, тогда
$$(\partial_t + \gamma(t))G(t) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dG}{G} = -\gamma(t)\,dt, \quad \Rightarrow \quad G(t,s) = A(s)\exp\left(-\int_{t_0}^t \gamma(t')\,dt'\right).$$
Также записываем граничные условия:
$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \ldots\,ds, \quad \Rightarrow \quad G(s+0,s) = 1.$$

Так можем найти

$$A(s)\exp\left(-\int_{t_0}^{s}\gamma(t')\,dt'\right)=1, \qquad \Rightarrow \qquad G(t,s)=\theta(t-s)\exp\left(-\int_{s}^{t}\gamma(t')\,dt'\right), \tag{9}$$

где мы разбили

$$\int_{t_0}^{t}=\int_{t_0}^{s}+\int_{s}^{t},$$

и получили, что хотели.

Комментарий про дельта функцию. Главное, нужно показать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_a(x)=1, \qquad \lim_{a\to 0}\delta_a(x)=0, \text{ при } x\neq 0.$$

Вообще можем плодить дельтаобразные последовательности, взяв f с единичным интегралом и

$$\delta_a(x)=\frac{1}{a}f\left(\frac{x}{a}\right).$$

Комментарий про преобразование Лапласа. Для функции вида

$$\frac{1}{\sqrt{p+\alpha}},$$

необходим аппарат разрезов, так что её можно сделать с шифтом на неделю.

На следующей недели будет контрольная. Необходим аппарат метода неопределенных коэффициентов, матричные экспоненты, решение диффуров через Фурье (не всегда причинный результат), а также преобразование Лапласа. Вычеты скорее всего в районе второго порядка и меньше. Ещё полезно вспонить, как записывать начальные условия: осцияллятор, осциллятор с затуханием.