

ОТЧЁТ

Авторы заметок: Хоружий Кирилл

От: 4 января 2022 г.

Содержание

1	Вывод уравнения насыщенной спектроскопии	2
1.1	Оптическая глубина	2
1.2	Скоростные уравнения	2
1.3	Итоговая картина для двухуровневой системы	3
2	Численные теоретические и экспериментальные оценки	4
2.1	Теоретическая оценка значения \mathcal{K}	4
2.2	Количественная картинка	4
2.3	Оценка контрастности по наблюдаемой глубине доплеровского провала	5
2.4	Сравнение теоретической и экспериментальной оценки \mathcal{K}	5
3	Эксперимент	6

1 Вывод уравнения насыщенной спектроскопии

1.1 Оптическая глубина

Интенсивность слабого одиночного луча, проходящего через ячейку описывается законом Бэра:

$$dI/dx = -\alpha I, \quad \alpha = \alpha(\nu).$$

В хорошем приближении¹ $\alpha \neq \alpha(x)$. Введем оптическую длину $\tau(\nu) = l\alpha(\nu)$, тогда

$$I_{\text{out}} = I_{\text{in}} e^{-\alpha(\nu)l} = I_{\text{in}} e^{-\tau(\nu)}.$$

Вклад от группы атомов $(\nu, \nu + d\nu)$ в $\tau(\nu)$ можем быть записан, как

$$d\alpha(\nu, \nu) = \sigma(\nu, \nu) dn(\nu), \quad \Rightarrow \quad d\tau(\nu, \nu) = l\sigma(\nu, \nu) dn(\nu).$$

Коэффициент поглощения $\sigma(\nu, \nu)$ имеет Лоренцовский профиль с натуральной шириной Γ (?) и смещенной по Доплеру резонансной частотой

$$\sigma(\nu, \nu) = \sigma_0 \frac{\Gamma^2/4}{(\nu - \nu_0(1 - v/c))^2 + \Gamma^2/4}, \quad (1)$$

где σ_0 – резонансное сечение поглощения², зависящее от вида дипольного перехода и поляризации падающего света [1⇒4].

Часть атомов $dn(\nu)$ с определенной скорости можем найти из распределения Больцмана

$$dn(\nu) = n_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv,$$

где $n_0 = N/V$ – концентрация атомов в ячейке.

Собирая все вместе (?) приходим к выражению

$$d\tau(\nu, \nu) = \frac{2}{\pi} \frac{\tau_0}{\sigma_0 \Gamma} \frac{\nu_0}{c} \sigma(\nu, \nu) \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv, \quad (2)$$

где τ_0 – соответствующая нормировка такая, что для резонанса $\tau_0 = \int_v d\tau(\nu_0, \nu)$.

Для насыщенной спектроскопии нужно учесть эффект от дополнительного насыщающего лазерного луча. Из-за него значительная часть атомов в ячейке будут в возбужденном состоянии. Так как атомы могут поглощать свет только когда они в невозбужденном состоянии, к (2) добаваить фактор $(N_g - N_e)/N$, описывающей разницу между количеством атомов в возбужденном состоянии N_e и невозбужденном N_g .

1.2 Скоростные уравнения

Населенность в двух состояния описывается скоростными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{N}_g &= \Gamma N_e - \sigma\Phi(N_g - N_e), \\ \dot{N}_e &= -\Gamma N_e + \sigma\Phi(N_g - N_e), \end{aligned}$$

где первое слагаемое отвечает спонтанной эмиссии, и второе насыщению лазером. $\Phi = I/h\nu$ – насыщающий поток фотонов. Учитывая, что $N_g + N_e = N = \text{const}$, можем получить диффур первого порядка на N_e :

$$\dot{N}_e = -(\Gamma + 2\sigma\Phi)N_e + \sigma\Phi N.$$

Решение можем быть найдено в виде

$$N_e(t) = \left[N_e(0) - \frac{N\sigma\Phi}{\Gamma + 2\sigma\Phi} \right] e^{-(\Gamma + 2\sigma\Phi)t} + \frac{N\sigma\Phi}{\Gamma + 2\sigma\Phi}.$$

Заметим, что при $\Phi = 0$:

$$N_e(t) = N_e(0)e^{-\Gamma t},$$

а в случае слаогого насыщающего луча $\sigma\Phi \ll \Gamma$, и изначальной популяции в невозбужденном состоянии,

$$N_e(t) = \frac{N\sigma\Phi}{\Gamma} (1 - e^{-\Gamma t}),$$

достигающий стационарного состояния после Γ^{-1} с $N_e = N\sigma\Phi/\Gamma \ll N$. Наконец, при $\sigma\Phi \gg \Gamma$, получаем насыщенный переход

$$N_e(t) = [N_e(0) - N/2] e^{-2\sigma\Phi t} + N/2 \rightarrow N/2.$$

Под насыщением понимаем, что $N_e = N/2$, большие значения по понятным причинам невозможны $\forall \Phi$, по крайней мере для двухуровневых систем.

¹Для слабого луча [1].

²[1], problem 1: $\sigma_0 \sim n$ атомов в ячейке.

Также наблюдается увеличение «мощности» ширины линии перехода, в пределе $(\Gamma + 2\sigma\Phi)t \gg 1$, получаем

$$\frac{N_e(\infty)}{N} = \frac{\sigma\Phi}{\Gamma + 2\sigma\Phi}.$$

Вспоминая уравнение (1) с $\Delta\nu = \nu - \nu_0(1 + v/c)$ (минус, т.к. доплеровский сдвиг в другую сторону), можем переписать уравнение в виде

$$\frac{N_e(\infty)}{N} = \frac{\sigma_0\Phi\Gamma/4}{\Delta\nu^2 + \Gamma^2/4 + \sigma_0\Phi\Gamma/2}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{N_e}{N} = \frac{s/2}{1 + s + 4\Delta\nu^2/\Gamma^2}}$$

, где ввели параметр насыщения $s = \Phi/\Phi_{\text{sat}}$, $\Phi_{\text{sat}} = \Gamma/2\sigma_0$.

Получился лоренцев профиль с уширением, полуширина (FWHM) которого зависит от Φ :

$$\text{FWHM} = \frac{\Gamma}{2} \sqrt{1 + \frac{2\sigma_0\Phi}{\Gamma}}.$$

Интенсивность насыщения I_{sat} может быть выражена, как $[1 \Rightarrow 4]$

$$I_{\text{sat}} = 2\pi^2\hbar c\Gamma/3\lambda^3.$$

Например, для ^{87}Rb с натуральной шириной $\Gamma = 6$ МГц, $I_{\text{sat}} = 1.65$ мВт/см².

1.3 Итоговая картина для двухуровневой системы

Собираем всё вместе, в зависимости от мощности насыщающего лазера некоторое количество атомов будет находиться в возбужденном состоянии:

$$\frac{N_e}{N} = \frac{s/2}{1 + s + 4(\Delta_+\nu)^2/\Gamma^2}, \quad \frac{\sigma(\nu, v)}{\sigma_0} = \frac{1}{4(\Delta_-\nu)^2/\Gamma^2 + 1}, \quad \Delta_{\pm}\nu = \nu - \nu_0(1 \pm v/c).$$

Тогда

$$\frac{I_{\text{out}}}{I_{\text{int}}} = \exp \left[-\kappa \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - 2 \frac{N_e(\nu, v)}{N} \right) \frac{\sigma(\nu, v)}{\sigma_0} \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) dv \right], \quad (3)$$

где

$$s = \Phi/\Phi_{\text{sat}}, \quad \Phi_{\text{sat}} = \Gamma/2\sigma_0, \quad \kappa = \sigma_0 n l \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}},$$

можно подставить, но пока не нужно:

$$\frac{I_{\text{out}}}{I_{\text{int}}} = \exp \left[-\kappa \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{1 + s + 4(\Delta_+\nu)^2/\Gamma^2} \right) \frac{1}{4(\Delta_-\nu)^2/\Gamma^2 + 1} \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) dv \right] = \exp [-\kappa F(s, \nu)]. \quad (4)$$

2 Численные теоретические и экспериментальные оценки

2.1 Теоретическая оценка значения \varkappa

Оценим значение параметра \varkappa :

$$\varkappa = \sigma_0 n l \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}},$$

или, можем переписать в виде

$$\varkappa = \frac{\sigma_0 n l}{v_0 \sqrt{\pi}}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}.$$

Концентрация. Концентрацию атомов лития ${}^7\text{Li}$ можем найти, зная зависимость [2] давления насыщенных паров P от температуры T :

$$P[T] = 133.32 \times \exp \left[\ln 10 \left(10.3354 - \frac{8345.57}{T} - 8.84 \times 10^{-5} T - 0.68106 \log_{10}[T] \right) \right].$$

Тогда, например, при температуре $T = 300 + 273$ K,

$$P[573 \text{ K}] = 9.510^{-5} \text{ Па}, \quad \Rightarrow \quad n[573 \text{ K}] = \frac{P}{k_B T} = 1.2 \times 10^{-16} \text{ м}^{-3}.$$

Сечение. Сечение рассеяние для двухуровневой системы ($\lambda = 671$ нм)

$$\sigma_0^{\text{теор}} = \frac{3\pi}{8} \lambda^2 \approx 5.3 \times 10^{-13} \text{ м}^2,$$

уточнить, указать источник.

Итого, для $l = 10$ см, при температуре в 300 °C, для ${}^7\text{Li}$ находим

$$\varkappa = 0.31 \frac{1}{\text{м/с}}, \quad v_0 = 1.2 \times 10^3 \text{ м/с}, \quad \sigma_0 n l = 6.4 \times 10^2.$$

2.2 Количественная картинка

Подставляя найденное в предыдущем разделе значение \varkappa в формулу (4), получаем общий вид спектроскопии: рис. 1.

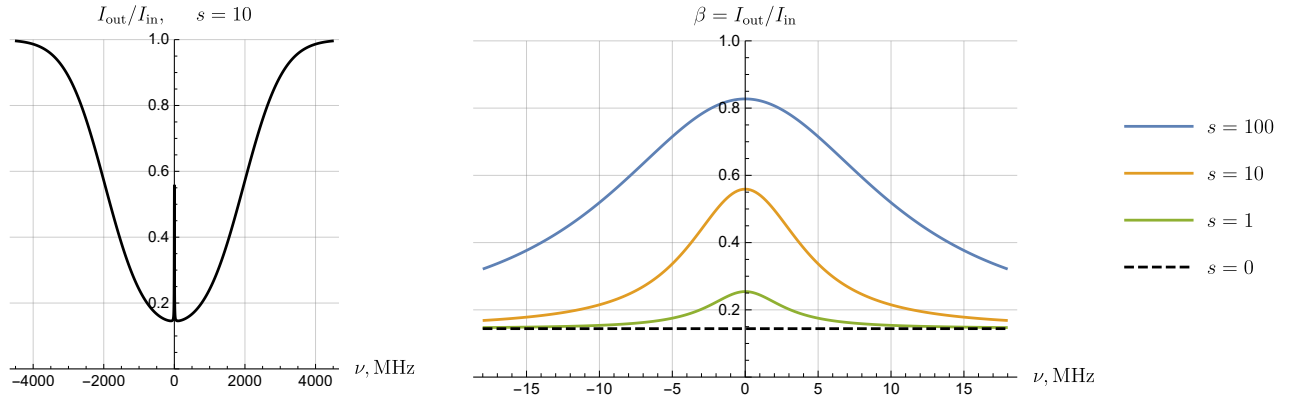


Рис. 1: Оценка β вблизи резонанса при температуре в 300 °C для $\sigma_0^{\text{теор}}$ и $l = 10$ см

Заметим, что указанные параметры системы приводят к значению β в резонансе при $s = 0$:

$$\beta[s = 0, \nu = \nu_0] = e^{-\varkappa F(0)} = 0.14,$$

что похоже на правду (см. раздел ...).

2.3 Оценка контрастности по наблюдаемой глубине доплеровского провала

В первом приближении, не зная значения \varkappa , можем оценить его, зная глубину доплеровского провала в резонансе ν_0 . Введем для удобства приведенную интенсивность $\beta \stackrel{\text{def}}{=} I_{\text{out}}/I_{\text{in}}$, далее в этом разделе всегда полагаем $\nu = \nu_0$, тогда

$$\beta(s=0) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_0 = e^{-\varkappa F(0)}, \quad \Rightarrow \quad \varkappa = \frac{\ln 1/\beta_0}{F(0)},$$

где $1 - \beta_0$ – глубина доплеровского провала.

Тогда контрастность спектроскопии K , определенную, как отношение высоты лэмбоского пика к глубине доплеровского провала, можем найти, как

$$K(s) = \frac{e^{-\varkappa F(s)} - e^{-\varkappa F(0)}}{1 - e^{-\varkappa F(0)}} = \frac{\beta_0^{F(s)/F(0)} - \beta_0}{1 - \beta_0}.$$

Ниже на рисунке приведены значения контрастности $K(s)$ для различных β .

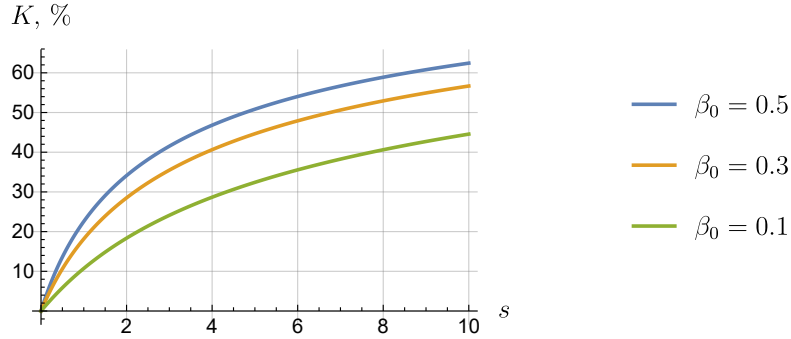


Рис. 2: Оценка контрастности при различных значениях β , как функция от s

2.4 Сравнение теоретической и экспериментальной оценки \varkappa

Пока что, в контексте выбранной модели, хуже всего можем оценить l , поэтому будем сравнивать теоретическую и экспериментальную оценку \varkappa по значению l при котором они бы сошлись:

$$l = \underbrace{\frac{\log 1/\beta_0}{F[0, \nu_0]}}_{\varkappa} \underbrace{\frac{\sqrt{\pi}}{n\sigma_0} \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}}_{v_0}.$$

Считая $\sigma_0 = \sigma_0^{\text{теор}}$, построим зависимость $l[\beta]$, рис. 3.

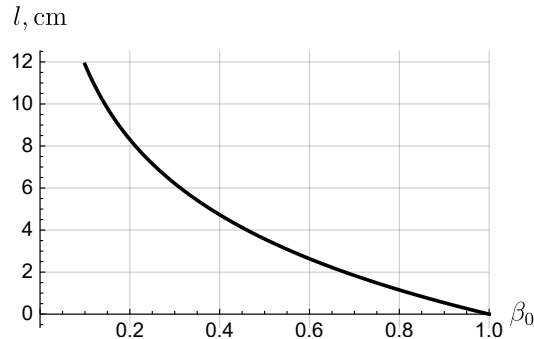


Рис. 3: Оценка длины взаимодействия лазера с литием при температуре в 300 °С

3 Эксперимент

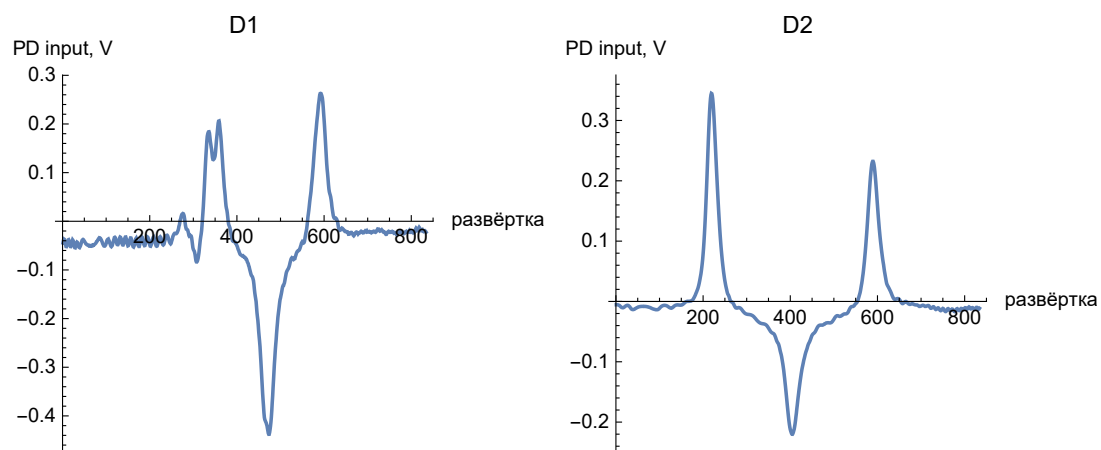


Рис. 4: Разность сигналов с насыщающим пучком и без