

# 1 Квадратичные нелинейные явления

К этим явлениям относится:

- генерация второй оптической гармоники;
- оптическое выпрямление;
- генерация суммарной частоты, ГСЧ;
- генерация разностной частоты, ГРЧ;
- генерация параметрических волн.

## 1.1 Генерация параметрических волн

Стоит заметить, что генерация параметрических волн относится в том числе и к линейной оптике, точнее возникает из спонтанного ( $\sim$  линейного) параметрического излучения.

Так сложилось, что только нелинейные среды проявляют в том числе и линейный эффект. Падающая волны с частотой  $\omega_P$ , генерирует  $\omega_1, \omega_2 < \omega_P$  (примерно в два раза), однако  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_P$ .

Можем записать уравнение нелинейной оптики

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dz} &= i \frac{2\pi\omega_1}{cn_1} \xi^{(2)} A_P A_2^* e^{ik\Delta z}; \\ \frac{dA_2}{dz} &= i \frac{2\pi\omega_2}{cn_2} \xi^{(2)} A_P A_1^* e^{ik\Delta z}; \\ \frac{dA_P}{dz} &= i \frac{2\pi\omega_P}{cn_P} \xi^{(2)} A_1 A_2^* e^{-ik\Delta z}.\end{aligned}$$

Забавно, что эти уравнения не имеют решений, если  $A_1(0) = A_2(0) = 0$ , так что необходимое условие параметрической генерации:

$$A_1(0) \neq 0, \quad A_2(0) \neq 0.$$

Стоит заметить, что генерация суммарной и разностной частоты, а также генерация второй гармоники не требовали специфических начальных условий (затравок).

Для формирования «тонкой» угловой структуры необходима фазовая синхронизация излучателей во всем объеме среды. О какой фазовой синхронизации двухчастотных пучков может идти речь? Суммарное поле двух волн разных частот и направлений:

$$A \cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \mathbf{r}) + A \cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r}) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} \mathbf{r}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{2} \mathbf{r}\right),$$

где второй множитель соответствует «медленным» осцилляциям.

Рассмотрим, в частности, коллинейарное взаимодействие, и заданное поле накачки, также считаем  $\Delta k = 0$ , а тогда  $e^{i\Delta k z} = 1$ . Также считаем, что  $A_1(0) \neq 0$  и  $A_2(0) \neq 0$ :

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dz} &= i \frac{2\pi\omega_1}{cn_1} \chi^{(2)} A_P A_2^*(z) \\ \frac{dA_2}{dz} &= i \frac{2\pi\omega_2}{cn_2} \chi^{(2)} A_P A_1^*(z),\end{aligned}$$

которые уже и можем решить.

Решение для «фотонных» амплитуд:

$$\begin{aligned}a_1(z) &= \frac{1}{2} (a_{10} + i e^{i\varphi} a_{20}^*) e^{g|A_P|z} + \frac{1}{2} (a_{10} - i e^{i\varphi} a_{20}^*) e^{-g|A_P|z} \\ a_2(z) &= \frac{1}{2} (i e^{i\varphi} a_{10} + a_{20}^*) e^{g|A_P|z} + \frac{1}{2} (-i e^{i\varphi} a_{10} + a_{20}^*) e^{-g|A_P|z}\end{aligned}$$

где введено

$$a = \sqrt{\frac{8\pi}{cn}} \hbar \omega A, \quad g = 4 \sqrt{2\pi \hbar \frac{\pi^3 \omega_1 \omega_2 \omega_P}{c^3 n_1 n_2 n_p}} \chi^{(2)}.$$

Стоит заметить, что можно явно выделить затухающие и возрастающие слагаемые.

**Диффузия фазы.** Допустим теперь, что нас интересует

$$f(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1(t)) + A \cos(\omega_2 t + \varphi_2(t)).$$

При чём должно выполняться  $\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 = 0$ , а тогда  $\varphi_2 = -\varphi_1$ , так получаем

$$f(t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_P}{2} t\right) \cos(\dots + \varphi(t)),$$

итога нули такой  $f(t)$  будет строго периодически переходить через нули – будет носить строго монохроматический характер, но это не означает возникновение монохроматической волны.

## 1.2 Применение нелинейной оптики

**Детектирование.** Рассмотрим среду с  $\chi^{(2)} \neq 0$ , светим в нее ИК излучение  $\omega_2 \ll \omega_1$ , светим в видимом диапазоне, и на выходе получаем что-то более подходящее для детектирования.

**ТГц диапазон.** Пускаем в анизотропную среду лазерный импульс, на выходе имеем разностные частоты. Спектр пучка – гаусс с границами на  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , где  $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_{1,2}$ .

**Измерение числа фотонов.** Аналогично пускаем лазерный импульс, и он проходит, почти не теряя в интенсивности, однако мы узнаем число фотонов: неразрушающее квантовое измерение числа фотонов с помощью оптического выпрямления.

Вообще можно организовать аналогичную историю, просто посветив на зеркало – давление света.

**Измерение длительности пико- и фемтосекундных импульсов.** Строим коррелятор второй гармоники через неколлинеарный синхронизм. Делим короткие импульсы на два пучка, скрещиваем их под углом  $\varphi$ , тогда получается пучок, шириной  $\tau c/\varphi$ , что уже можно измерить при малых  $\varphi$ .

## 2 Кубичные нелинейные явления

К подходящим средам относятся все среды, включая изотропные:

$$P = \chi^{(1)}E + \chi^{(2)}E^2 + \chi^{(3)}E^3 + \dots,$$

так что рассмотрим некоторый, достаточно информативный список:

- генерация третьей оптической гармоники;
- нелинейный показатель преломления;
- четырехволновое смещение (самодифракция излучения, обращение волнового фронта)
- генерация «параметрических волн».

**Генерация третьей гармоники.** В модели гармонического осциллятора, можем заметить, что при добавке, вида  $U(x) \rightarrow U(x) + x^4 \Rightarrow \text{eq} \rightarrow \text{eq} + x^3$ , возникает *самовоздействие* (изменение показателя преломления), и генерация третьей гармоники.

Рассматривая сумму от синфазных источников, можно получить условие фазового синхронизма:  $3k_\omega = k_{3\omega}$ , что равносильно коллинеарности генерируемой волны и волны накачки, а также  $n_\omega = n_{3\omega}$ .

Заметим также, что самовоздействие не нуждается в фазовом синхронизме. Обычно вводят нелинейный показатель преломления ( $\varepsilon E = E + 4\pi P$ ):

$$n^2 = (n_0 + \Delta n(I))^2 = 1 + 4\pi\chi^{(1)} + 4\pi\chi^{(3)}|E|^2, \quad \Rightarrow \quad \Delta n = \frac{3\pi\chi^{(3)}}{2n_0}|E|^2 \stackrel{\text{def}}{=} n_2 I, \quad \Rightarrow \quad n_2 = \frac{12\pi^2\chi^{(3)}}{cn_0^2}.$$

Вообще, на возникновение  $\chi^{(3)}$  влияет стрикция, ориентация молекул, тепловая нелинейность, плазменная нелинейность и так далее.

В курсе общей физики описывается электрострикция, когда диэлектрическая жидкость поднимается. Эффект не зависит от знака заряда.

## Нелинейный показатель преломления

Проявляется в фазовой самомодуляции, самовращение эллипса поляризации, самофокусировке, самодефокусировке и т.д.

Методом медленных амплитуд, можем получить

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) \tilde{A} + 2ik \partial_z \tilde{A} = -2 \frac{k^2}{n_0} n_2 |\tilde{A}|^2 \tilde{A}, \quad |\tilde{A}|^2 = I.$$

И прийти к тому, что пороговая мощность не зависит от параметров пучка.

Также можем рассчитать расстояние фокусировки:

$$z = 2.5 \frac{r_0^2}{\lambda} \cdot \left( \sqrt{\frac{P}{P_{\text{крит}}}} - 0.85 \right)^{-1}.$$

Стоит сказать про особенности самофокусировки импульсного излучения: «бегущие» фокусы.

$$\Sigma\Theta\varpi\phi\beta\Pi\Lambda\Xi$$

### Задача по критерию Неймана-Пирсона

Производится однократно измерение количества сработавших ячеек SiPM. Известно, что оно распределено по закону Пуассона  $p(k, \lambda)$ . Нулевая гипотеза  $H_0$ :  $\lambda_{\text{dark}} = 14$ .

Найдём пороговое значение  $k_b$ :  $\alpha = 5 \times 10^{-6}$ :

$$\int_{k_b}^{\infty} \frac{\lambda_{\text{dark}}^k}{k!} e^{-\lambda_{\text{dark}}} dk = \begin{cases} 7.0 \times 10^{-6}, & k_b = 33; \\ 2.8 \times 10^{-6}, & k_b = 34, \end{cases}$$

откуда можем сказать, что  $k_b > 33$  – подходит. Более точное значение  $\alpha = 5.0 \times 10^{-6}$  будет достигаться при  $k_b = 33.375$ .

Найдём теперь подходящее для  $\beta = 0.9$  значение  $S$ :

$$\beta = \int_0^{k_b} p(k, \lambda_{\text{dark}} + S) dk, \quad \Rightarrow \quad 1 - \beta = \begin{cases} 0.91, & S = 28; \\ 0.89, & S = 27, \end{cases}$$

откуда находим  $S = 28$ .

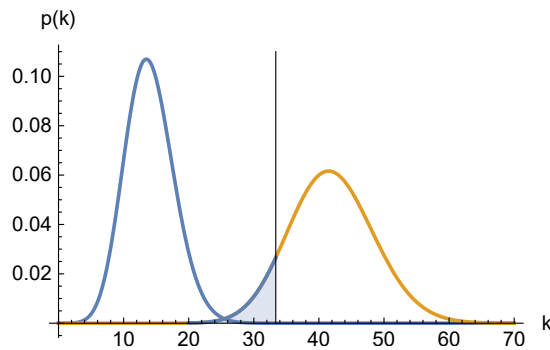


Рис. 1: Распределения для  $\lambda_{\text{dark}}$  и  $\lambda_{\text{dark}} + S$ .

### Задача про два пучка

Пучок расходится под углом  $\lambda/d$ , тогда эффективная мощность упадет в  $(\lambda/d)^2$ . Така как число квантов совпадает, то можем считать

$$N \sim \left(\frac{\lambda}{d}\right)^{-2} \frac{hc}{\lambda} \sim \frac{1}{\lambda^3}, \quad \Rightarrow \quad \frac{N_1}{N_2} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^3 = 10^{15},$$

где  $\lambda_2 = 10$  см,  $\lambda_1 = 1$   $\mu\text{м}$ .