Задание по квантовой механике I

Авторы заметок: Хоружий Кирилл
Примак Евгений
Гурьева Соня

От: *10 сентября 2021 г.*

Содержание

1 Задачи

T5

I. Найдём уровни энергии и волновые функции связанных состояний ($E < 0$) частицы в поле

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \varkappa_0}{m}\Big(\delta(x+a) + \delta(x-a)\Big).$$

Гамильтониан системы и стационарное уравнение Шрёдингера:

$$H = -\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} + U(x), \qquad -\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m}\psi(x) + U(x)\psi(x) = -|E|\psi(x),$$

далее считая $E = -E$, будем решать уравнение

$$\psi''(x) - \frac{2m}{\hbar^2}(U(x) + E)\psi(x) = 0.$$

В местах, где не происходит скачков производной подходит в качестве решения экспонента, так что будем искать решение в виде

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{\varkappa(x+a)}, & x < -a \\ Be^{-\varkappa(x+a)} + Ce^{\varkappa(x-a)}, & |x| < a \\ De^{-\varkappa(x-a)}, & x > a. \end{cases}$$

где введено $\varkappa^2 = 2mE/\hbar^2$.

Можно было бы заметить, что потенциал симметричен, а значит можно искать решение уравнения Шредингера, как собственные функции оператора инверсии: четные и нечетные решения ($A = D$, $B = C$ и $A = -D$, $B = -C$), но мы пойдём другим путём, чтобы посмотреть, как из уравнений вылезет симметрия задачи.

Чтобы найти $\psi(x)$ запишем условия непрерывности и, интегрируя стационарное уравнение Шредингера, уравнение на скачок производной:

$$\left.\begin{aligned} \psi(-a+\varepsilon) &= \psi(-a-\varepsilon), \\ \psi(a+\varepsilon) &= \psi(a-\varepsilon), \\ \psi'(-a+\varepsilon) - \psi'(-a-\varepsilon) &= -2\varkappa_0\psi(-a) \\ \psi'(a+\varepsilon) - \psi'(a-\varepsilon) &= -2\varkappa_0\psi(a) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} A - C - Be^{2a\varkappa} &= 0 \\ B - D + Ce^{2a\varkappa} &= 0 \\ -A + C - Be^{2a\varkappa} + 2A\varkappa_0/\varkappa &= 0 \\ B - D - Ce^{2a\varkappa} + 2d\varkappa_0/\varkappa &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Для удобства введем $X = e^{2a\varkappa}$, и выразив из первого уравнения A, из второго B, из третьего C подставим и получим уравнение вида

$$\frac{D\varkappa(\varkappa - \varkappa_0)}{(\varkappa - \varkappa_0) + \varkappa_0 X^{-2}} = d\varkappa_0, \quad \Rightarrow \quad \varkappa^2 - 2\varkappa\varkappa 0 + \varkappa 0^2 - \frac{\varkappa 0^2}{X^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varkappa_\pm = (1 \pm e^{-2A\varkappa})\varkappa_0}, \tag{1}$$

что составляет условие совместности полученной СЛУ,

Забавный факт: составим матричку для СЛУ и найдём определитель

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -X & -1 & 0 \\ 0 & 1 & X & -1 \\ \varkappa - 2\varkappa 0 & \varkappa X & -\varkappa & 0 \\ 0 & \varkappa & -\varkappa X & 2\varkappa 0 - \varkappa \end{pmatrix}, \qquad \det M = 4(X^2(\varkappa - \varkappa_0)^2 - \varkappa_0^2).$$

Решение уравнения $\det M = 0$ относительно $\varkappa$ приводит к тем же корням, что и уравнение (1): $\varkappa = (1 \pm e^{-2A\varkappa})\varkappa_0$, таким образом СЛУ будет совместна, если вырождена.

Стоит заметить, что $\mathrm{rg}\, M(\varkappa_\pm) = 3$, тогда, решая уравнение относительно A, B, C, находим

$$\varkappa_+: \qquad A = D,\ B = C = \frac{A}{1 + e^{2a\varkappa}}, \qquad \text{четное решение}$$

$$\varkappa_-: \qquad A = -D,\ B = -C = -\frac{A}{-1 + e^{2a\varkappa}}, \qquad \text{нечетное решение}$$

Для наглядности можем их построить.

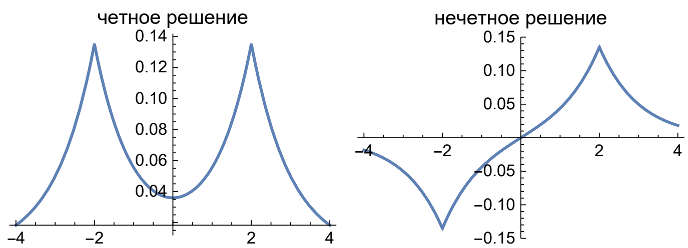

Рис. 1: Четное и нечётное решение к T5

Стоит вспомнить, что уравнение (1) – трансцендентное уравнение, где $\varkappa = \varkappa(E)$, то есть уравнение на уровни энергии. Как мы показали, $\varkappa_+$ соответствует четному решению и $\varkappa_-$ нечётному.

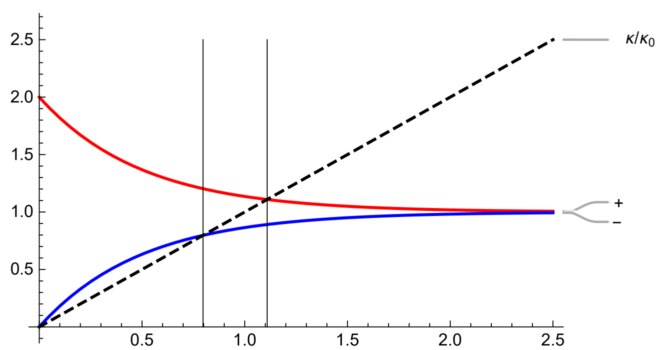

Рис. 2: Решение трансцендентного уравнения к T5