Задание по курсу «Уравнения математической физики»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *20 сентября 2021 г.*

1 Неделя I

№1

Рассмотрим уравнение на $G(t)$

$$(\partial_t + \gamma)G(t) = \delta(t), \tag{1}$$

с учетом принципа причинности $g(t<0)=0$.

При $t>0$ $\delta(t)=0$, так что

$$\partial_t G(t) = -\gamma G(t), \quad \Rightarrow \quad G(t) = A\exp(-\gamma t).$$

Проинтегрируем уравнение (1) от $-\varepsilon$ до ε:

$$G(\varepsilon) - \cancel{G(-\varepsilon)} + \cancel{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \gamma G(t)\, dt} = \int \delta(t)\, dt = 1, \quad \Rightarrow \quad G(\varepsilon) = 1, \quad \Rightarrow \quad A = 1.$$

Таким образом, искомая функция Грина $G(t)$:

$$G(t) = \theta(t)\cdot \exp\left(-\gamma t\right),$$

где $\theta(t)$ обеспечивает $G(t)=0$ при $t<0$.

№2

Рассмотрим уравнение, вида

$$(\partial_t^2 + \omega^2)\varphi(t) = g(t), \qquad g(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [0,\tau]; \\ -\frac{v}{\tau l}, & t \in [0, \tau], \end{cases}$$

с нулевым начальным условием $\varphi(t<0)=0$. Функция Грина $G(t)$ для оператора $(\partial_t^2+\omega^2)$ равна[1]

$$G(t) = \theta(t)\frac{1}{\omega}\sin(\omega t).$$

Далее найдём вид $\varphi(t)$ при $t<\tau$ (красная линия рис. 1):

$$\varphi(t<\tau) = \frac{1}{\omega}\int_{-\infty}^{t} \sin\omega(t-s)\ g(s)\, dt = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-s)\frac{v}{2l}\, d(t-s) = \frac{v}{l\tau}\frac{1}{\omega^2}\left(\cos(\omega t) - 1\right).$$

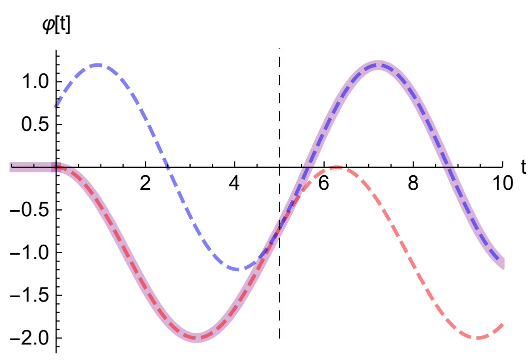

Рис. 1: Сшивка решений в I.2

[1] Конспект, уравнение (1.11).

Теперь решим[2] задачу Коши с начальным условием при $t = \tau$, введя переменную $T = t - \tau$:

$$\varphi(T) = \varphi(t-\tau) = \dot\varphi(\tau) G(t-\tau) + \varphi(\tau)\dot G(t-\tau) + 0 = \frac{v}{lt}\frac{1}{\omega^2}\left(\cos\omega t - \cos\omega(t-\tau)\right).$$

получая синюю кривую на рис. 1.

Итого, решение уравнения (1) (фиолетовая кривая, рис 1):

$$\varphi(t) = \frac{v}{l\tau}\frac{1}{\omega^2}\begin{cases} 0, & t<0; \\ \cos\omega t - 1, & t\in[0,\tau]; \\ \cos\omega t - \cos\omega(t-\tau), & t>\tau. \end{cases}$$

№3

Найдём значение интеграла, вида

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,dx.$$

Заметим, что уравнение $z^2 + a^2 = 0$ имеет корни в $z_{1,2} = a^{\pm i\pi/2}$, тогда

$$I_1 = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z_1} = 2\pi i \lim_{z\to z_1} \cdot \left(\frac{1}{(z-z_2)^2}\right)' = -4\pi i \cdot \lim_{z\to z_1}\left(\frac{1}{(z-z_2)^3}\right) = -4\pi i \frac{1}{(2ia)^3} = \frac{\pi}{2a^3}.$$

2 Неделя II

№1 (1.1.4)

Найдём функию Грина $G(t)$ уравнения

$$L(\partial_t)x(t) = \varphi(t), \qquad L(\partial_t) = \partial_t^4 + 4\nu^2\partial_t^2 + 3\nu^4.$$

Функция Грина может быть найдена, как решение уравнения

$$L(\partial_t)G(t) = \delta(t) l, \qquad \Rightarrow \qquad G(t) = \theta(t)\cdot\left(b_1 e^{-\nu t} + b_2 e^{i\nu t} + b_3 e^{-i\sqrt{3}\nu t} + b_4 e^{i\sqrt{3}\nu t}\right),$$

где воспользовались разложением

$$L(z) = (z+i\nu)(z-i\nu)(z-i\sqrt{3}\nu)(z+i\sqrt{3}\nu).$$

Интегрируя от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$ уравнение на $G(t)$ находим, что

$$\partial_t^3 G(+0) = 1, \qquad \partial_t^2 G(+0) = \partial_t^1 G(+0) = G(+0) = 0,$$

откуда получаем СЛУ на $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$:

$$\left.\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 &= 0, \\ b_1 - b_2 + \sqrt{3}\,(b_3 - b_4) &= 0, \\ b_1 + b_2 + 3\,(b_3 + b_4) &= 0, \\ b_1 - b_2 + 3\sqrt{3}\,(b_3 - b_4) &= -\tfrac{i}{\nu^3}, \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad b_1 = \frac{i}{4\nu^3}, \quad , b_2 = -\frac{i}{4\nu^3}, \quad , b_3 = -\frac{i}{4\sqrt{3}\nu^3}, \quad , b_4 = \frac{i}{4\sqrt{3}\nu^3}.$$

Так получаем решение, вида

$$G(t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{3}\,\nu^3}\left(\sqrt{3}\sin(\nu t) - \sin(\sqrt{3}\nu t)\right).$$

№2 (1.1.5)

Найдём функцию Грина для уравнения, вида

$$(\partial_t^2 + \nu^2)^2 x(t) = \varphi(t).$$

Аналогично предыдущему номеру, сначала находим $G(t>0)$:

$$G(t>0) = b_1 e^{i\nu t} + b_2 t e^{i\nu} + b_3 e^{-i\nu t} + b_4 t e^{-i\nu t},$$

где секулярные члены возникли из-за кратности корней.

Также, интегрируя уравнение на $G(t)$ от $-\varepsilon$ до ε, получаем аналогичное условие

$$\partial_t^3 G(+0) = 1, \qquad \partial_t^2 G(+0) = \partial_t^1 G(+0) = G(+0) = 0,$$

[2] Конспект, уравнение (1.12).

и приходим к СЛУ на коэффициенты $\{b_1,\, b_2,\, b_3,\, b_4\}$:

$$\left.\begin{aligned} b_1 + b_3 = 0,\\ i\,(b_1 - b_3)\,\nu + b_2 + b_4 = 0,\\ \nu\,((b_1+b_3)\,\nu - 2i\,(b_2 - b_4)) = 0,\\ \nu^2\,(-3\,(b_2+b_4) - i\,(b_1 - b_3)\,\nu) = 1, \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad b_1 = -\frac{i}{4\nu^3},\quad b_2 = -\frac{1}{4\nu^2},\quad b_3 = \frac{i}{4\nu^3},\quad b_4 = -\frac{1}{4\nu^2}.$$

Получаем решение, вида

$$G(t) = \frac{\theta(t)}{2\nu^3}\left(\sin(\nu t) - \nu t\cos(\nu t)\right).$$

№3 (1.1.8)

Для системы уравнений, вида

$$(\partial_t + \hat\Gamma)\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{\xi}(t), \qquad \Gamma = \lambda\delta_{i,j} + \delta_{i,j-1},$$

найдём функцию Грина $G(t)$, как решение уравнения

$$(\partial_t + \hat\Gamma)G(t) = \delta(t)\mathbb{E}, \quad\Rightarrow\quad G(t) = \theta(t)\exp\left(-\hat\Gamma t\right).$$

Осталось найти $\exp(-\hat\Gamma t)$, как матричную экспоненту, от жордановой клетки.

Для начала заметим, что

$$\delta_{i,j-1}^2 = \delta_{i,j-1}\delta_{j,k} = \delta_{i+1,k-1} = \delta_{i,k-2},$$

и так далее, то есть $\delta_{i,j-1}$ – нильпотентный оператор, с $\delta_{i,j-1}^4 = 0$.

Посмотрим на степени $\hat\Gamma$:

$$\begin{aligned} \hat\Gamma^2 &= \delta_{i,j} + 2\delta_{i,j-1} + \delta_{i,j-2}\\ \hat\Gamma^3 &= \delta_{i,j} + 3\delta_{i,j-1} + 3\delta_{i,j-2} + \delta_{i,j-3}\\ \hat\Gamma^4 &= \delta_{i,j} + 4\delta_{i,j-1} + 6\delta_{i,j-2} + 4\delta_{i,j-3} + \delta_{i,j-4}, \end{aligned}$$

но $\delta_{i,j-4} = 0$, так что можем явно выделить на побочных диагоналях соответсвтующие экспоненты:

$$G(t) = \theta(t)e^{-\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{t^2}{2} & -\frac{t^3}{6}\\ 0 & 1 & -t & \frac{t^2}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -t\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где появившиеся t^k – секулярные члены.