Задание от 28 июля

Автор: Хоружий Кирилл
Соавтор: Примак Евгений

От: *28 июля 2021 г.*

Первое задание

Нам нужно доказать, что
$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle\,.$$
Действительно (по 17 слайду презентации например)
$$\langle n|aa^\dagger|n\rangle = \langle n|[a,a^\dagger]+a^\dagger a|n\rangle = \langle n|N+1|n\rangle = n+1.$$
А значит
$$a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,,$$
наконец
$$|n\rangle = \frac{a^\dagger}{\sqrt{n}}\,|n-1\rangle = \frac{(a^\dagger)^2}{\sqrt{n(n-1)}}\,|n-2\rangle = \cdots = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle\,.$$

Второе задание

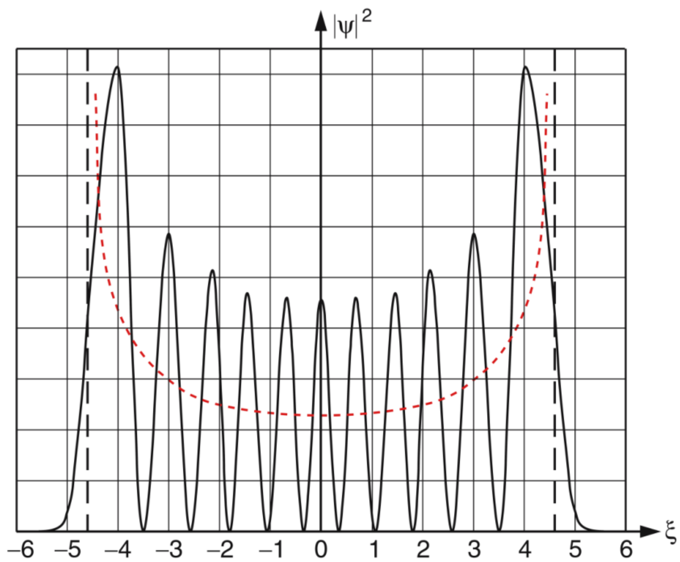

Рис. 1: Тут всё просто — $n = 10$.

Третье задание

И так мы знаем, что
$$a(t) = a(0)e^{i\omega t}, \qquad a^\dagger(t) = a^\dagger(0)e^{i\omega t}.$$
Знаем, уравнения эволюции системы:
$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}V(x), \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}.$$
Где V – возмущения в нашем гамильтониане:
$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2}.$$

То есть получаем:

$$\frac{dp}{dt} = -m\omega^2 x \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}.$$

Теперь заметим, что для a определенных как:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right), \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right).$$

Мы из наших уравнений на x и p как раз и имеем:

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}\left(\frac{p}{m} - i\omega x\right)} = -i\omega a \qquad \Rightarrow \qquad a(t) = a(0)e^{-i\omega t}$$

Аналогично для сопряженной $a^\dagger = a^\dagger(0)e^{i\omega t}$.

Тогда просто подставим a по определению через x и p:

$$\left.\begin{aligned} x(t) + \frac{ip(t)}{m\omega} &= x(0)\exp(-i\omega t) + i\left(\frac{p(0)}{m\omega}\right)e^{-i\omega t} \\ x(t) - \frac{ip(t)}{m\omega} &= x(0)\exp(-i\omega t) - i\left(\frac{p(0)}{m\omega}\right)e^{i\omega t} \end{aligned}\right\} + \quad \Rightarrow$$

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \left(\frac{p(0)}{m\omega}\right)\sin\omega t.$$

Что и требовалось вывести.