Упражнения

Первое

В общем и целом нужно найти A^* и A^{-1} для заданного A.

а) Оператор инверсии

И так, что же такое оператор инверсии, а это $I\psi(x) = \psi(-x)$. Обратный оператор должен по определению

$$I^{-1}I\psi(x) = \psi(x) \qquad \stackrel{x\mapsto -x}{\Longrightarrow} \qquad I^{-1}\psi(x) = \psi(-x) \qquad \Rightarrow \qquad I^{-1} = I.$$

По определению сопряженного оператора $(\langle\Phi|I\Psi\rangle)^* = \langle\Psi|I^*\Phi\rangle$[1]. Напомним $[I\Psi](x) = \Psi(-x)$, что означает уже для состояний $\langle x|I\Psi\rangle = \langle -x|\Psi\rangle$, с этим знанием

$$\langle\Phi|I\Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}}\langle\Phi|x\rangle\langle x|I\Psi\rangle dx = \int_{\mathbb{R}}\langle\Phi|x\rangle\langle -x|\Psi\rangle dx = /x\mapsto -x/ = \int_{\mathbb{R}}\langle\Phi|-x\rangle\langle x|\Psi\rangle dx = \langle I\Phi|\Psi\rangle = \langle\Phi|I^*\Psi\rangle \qquad \Rightarrow \qquad I^* = I.$$

То есть получили, что оператор инверсии унитарен $II^* = \mathbb{E}$ (единичный оператор).

б) Оператор трансляции

Оператор трансляции работает $\hat{T}_a\,|x\rangle = |x+a\rangle$ или так $\langle x|T_a\Psi\rangle = \Psi(x+a)$.

Вполне тривиально, что обратный к оператору трансляции это просто T_{-a}. Сопряженный же пойдём искать по той же схеме

$$\langle\Phi|T_a\Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}}\langle\Phi|x\rangle\langle x+a|\Psi\rangle dx = /x\mapsto x-a/ = \int_{\mathbb{R}}\langle\Phi|x-a\rangle\langle x|\Psi\rangle dx = \langle T_a^*\Phi|\Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}}\langle T_a^*\Phi|x\rangle\langle x|\Psi\rangle dx.$$

Где предпоследние равенство взято просто по определению сопряженного оператора, а последнее неравенство просто по представлению средней величины, тогда видим, что получается следующее

$$\langle x|T_a^*\Phi\rangle = \Phi(x-a) \qquad \Rightarrow \qquad T_a^* = T_{-a} = T_a^{-1}.$$

Мы вновь получили, что $T_a^*T_a = \mathbb{E}$ – унитарнвй оператор.

Второе

Теперь будем искать собственные значения и собственные числа для операторов, изученных в предыдущей задаче.

Очень удобно совпала, что и оператор трансляции и оператор инверсии являются унитарными. А для унитарного оператора $\hat{A}$ и его собственного состояния $\hat{A}\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle$ легко показать, что

$$\langle A\lambda|A\lambda\rangle = \langle\lambda|A^\dagger A\lambda\rangle = \langle\lambda|\lambda\rangle,$$

но в то же время, учитывая предыдущую выкладку

$$\langle A\lambda|A\lambda\rangle = \lambda\lambda^*\langle\lambda|\lambda\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \langle\lambda|\lambda\rangle = 1 = \lambda\lambda^*.$$

Тогда имеем $\lambda = e^{i\varphi}$, что приводит к самому виду оператора $\hat{A} = e^{i\hat{\varphi}}$.

а) Оператор инверсии

И так, когда мы поняли, что $\hat{I} = e^{i\hat{\varphi}}$, то уже всё просто

$$I\psi(x) = \psi(-x) = \lambda\psi(x).$$

Угадаем собственные функции, которые удовлетворяют соотношению выше

$$\begin{cases}\psi(x) = \psi(-x)\\ \lambda = 1\end{cases} \qquad\qquad \begin{cases}-\psi(x) = \psi(-x)\\ \lambda = -1\end{cases}$$

б) Оператор трансляции

И так, оператор трансляции у нас тоже в виде $\hat{T}_a = e^{i\hat{\varphi}}$, и оператор фазы записывают в виде $\hat{\varphi} = \frac{1}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}$, где $\hat{\boldsymbol{k}}$ – оператор квазиимпульса.

Собственные же волновые функции для $\hat{T}_a$ выразим в координатном представлении

$$\hat{T}_a\,|\Psi\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}}\,|\Psi\rangle \qquad \Rightarrow \qquad \langle\boldsymbol{r}|T_a|\Psi\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}}\,|\Psi\rangle\,.$$

[1] тут можно стать свидетелем замены строчной пси на заглавную

Они удовлетворяют уравнению

$$\Psi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}) = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}}\Psi(r) \qquad \Rightarrow \qquad \Psi(r) = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}}\Phi(r), \quad \Phi(r+a) = \Phi(r).$$

В конце мы представили эти функции в таком периодическом виде, они называются функциями Блоха, и позже мы ещё встретим их в действии.

Собственные значения значит выражаются в виде $\lambda = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}}$.

T3

a)

Задан потенциал $U(x) = -\frac{\hbar^2}{m}\varkappa_0\delta(x)$, который представляет собой дельта-яму. Прежде чем как всегда решать стационарное уравнение шредингера сделаем замечание, что $E<0$, тогда получим

$$\hat{H}\psi = -|E|\psi, \qquad \varkappa^2 := \frac{2m|E|}{\hbar}.$$

С такой заменой получим вполне красивый диффур второго порядка:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' - \frac{\hbar^2}{m}\varkappa_0\delta(x)\psi + |E|\psi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \psi'' - (\varkappa - 2\varkappa_0\delta(x))\psi = 0.$$

Мы ожидаем непрерывности от волной функции на границах областей, а именно в точке дельта-ямы, то есть одним из граничных условий будет $\psi(-0)=\psi(+0)$.

Потребовав непрерывности ψ, из-за дельта функции, мы получаем разрыв для первой производной

$$\psi'' - (\varkappa - 2\varkappa_0\delta(x))\psi = 0 \qquad \xRightarrow{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}} \qquad \psi'(+0) - \psi'(-0) = -2\varkappa_0\psi(0).$$

Вне ямы будем наблюдать спад по экспоненте, сама же яма – по сути точечна, значит такое же поведение будем ожидать и в связном состоянии, таким образом ищем волновую функцию как

$$\psi = \begin{cases} C_1 e^{-\varkappa x}, & x>0 \\ C_2 e^{\varkappa x}, & x<0 \end{cases}$$

Из непрерывности получим автоматически, что

$$\psi(-0) = \psi(+0) \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = C_1 = C.$$

Разрыв же первой производной позволит нам найти

$$\psi'(+0) - \psi'(-0) = -2\varkappa_0\psi(0) \quad \Rightarrow \quad -2\varkappa_0 C = C(-\varkappa-\varkappa) \quad \Rightarrow \quad \varkappa = \varkappa_0.$$

Таким образом энергия связного состояния:

$$\boxed{E = -\frac{\hbar^2\varkappa_0^2}{2m}}$$

Теперь, осталось проверить нормировку нашей волновой функции

$$\int_{\mathbb{R}}\psi\psi^* dx = 1 \quad \Rightarrow \quad C^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\varkappa_0|x|}dx = \frac{C^2}{\varkappa_0}\int_0^{+\infty} e^{-2\varkappa_0 x}d2\varkappa_0 x = \frac{C^2}{\varkappa_0} = 1 \quad \Rightarrow \quad \varkappa_0 = C^2.$$

Таким образом собирая всё вместе получаем волновую функцию вида:

$$\boxed{\psi(x) = \sqrt{\varkappa_0}e^{-\varkappa_0|x|}}$$

Мы получили волновую функцию в координатном представлении для уровня энергии ноль $\psi(x) = \langle x|0\rangle$. Тогда в импульсном представлении

$$\psi(p) = \langle p|0\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx\langle p|x\rangle\langle x|0\rangle = \Big/ \langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}px} \Big/ = \frac{\sqrt{\varkappa_0}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\varkappa_0 x - \frac{i}{\hbar}px}dx = \frac{\sqrt{\varkappa_0}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\cdot\frac{2\varkappa_0}{\varkappa_0^2 + (p/\hbar)^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(\varkappa_0\hbar)^{3/2}}{(\varkappa_0\hbar)^2+p^2}.$$

Дальше будет менее широко, честно, а ведь это ещё опущено наше любимое интегрирование по частям.

$$\boxed{\langle 0|\hat{p}|0\rangle = 0}, \qquad \boxed{\langle 0|\hat{x}|0\rangle = 0}.$$

По тому же определению теперь будем получать нечто сложнее чем ноль

$$\langle 0|\hat{x}^2|0\rangle = \int_{\mathbb{R}}\varkappa e^{-2\varkappa_0|x|}\hat{x}^2 dx = \underbrace{2\varkappa_0}_{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-2\varkappa_0 x}x^2 dx = \alpha\frac{d^2}{d\alpha^2}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx = \frac{2}{\alpha^2} = \boxed{\frac{1}{2\varkappa_0^2}}.$$

Красиво продифференцировали под знаком интеграла и получили ответ, осталось ещё немного, не зря же мы $\psi(p)$ считали, стоит, кстати, обратить внимание, что теперь именно по α^2 дифференцируем:

$$\langle 0|\hat{p}^2|0\rangle = \int_{\mathbb{R}} dp\ p^2 \frac{2}{\pi}\frac{(\varkappa_0\hbar)^3}{((\hbar\varkappa_0)^2+p^2)^2} = \frac{2}{\pi}(\varkappa_0\hbar)^3(-\frac{d}{d\alpha^2})\int_{\mathbb{R}}\frac{p^2}{\alpha^2p^2}dp = \frac{2}{\pi}(\varkappa_0\hbar)^3(-\frac{d}{d\alpha^2})\frac{2\pi i(i\alpha)^2}{2i\alpha}\Big|_{\alpha=\varkappa_0\hbar} = \boxed{(\varkappa_0\hbar)^2}.$$

Из-за того, что средние от координаты и импульса нулевые – дисперсии совпадают с средними квадратами.

Для интереса теперь ещё посмотрим на соотношение неопределенности

$$\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle = \frac{1}{2\varkappa_0^2}\varkappa_0^2\hbar^2 = \frac{\hbar^2}{2},$$

что больше абсолютного минимума для когерентного состояния осциллятора $= h^2/4$.

б)

И казалось бы всё хорошо, всё изучили в связном состоянии, но теперь в той же задаче мы будем смотреть на области непрерывного спектра и решать задачу о рассеянии волны на потенциале.

Запишем тогда наиболее общую волновую функцию, в которой на нижней строчки стоят (условно) волны распространяющиеся левее ямы, а точнее подошедшая из $-\infty$ с амплитудой C, и ушедшая в $-\infty$ с амплитудой D. Аналогично правее потенциала будет ушедшая в $+\infty$ с амплитудой A и пришедшая из $+\infty$ с амплитудой B.

$$\psi = \begin{cases} Ae^{i\varkappa x}+Be^{-i\varkappa x} &, x>0 \\ Ce^{i\varkappa x}+De^{-i\varkappa x} &, x<0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \psi = \begin{cases} Ae^{i\varkappa x} &, x>0 \\ Ce^{i\varkappa x}+De^{-i\varkappa x} &, x<0 \end{cases}$$

Мы сразу выберем, что волна падала слева, значит $B=0$, и пусть она это делала с $C=1$, так как в вопросах рассеивания нас будут интересовать относительные величины.

Тем не менее у нас всё так же должно быть непрерывно для волновой функции и скачкообразно для её производной в нуле:

$$\begin{matrix} A+B=C+D \\ i\varkappa(A-B)-i\varkappa(C-D)=-2\varkappa_0\psi(0) \end{matrix} \qquad \Rightarrow \qquad i\varkappa[(C-D)-(A-B)] = 2\varkappa_0(A+B)$$

Теперь подставим наши допущения $(B=0,\ C=0)$ и выразим каппу

$$\varkappa = 2i\varkappa_0\frac{A+B}{(A-B)-(C-D)} = 2i\varkappa_0\frac{A}{A-(1-D)} = i\varkappa_0\frac{A}{A-1}.$$

Тут последнее равенство последовало из непрерывности в нуле: $A+0=1+D$. И чтобы научиться сравнивать амплитуды возьмём и выразим их все через $\varkappa$ и $\varkappa_0$, что мы уже можем сделать:

$$A = \frac{\varkappa}{\varkappa - i\varkappa_0}, \qquad D = \frac{i\varkappa_0}{\varkappa - i\varkappa_0}.$$

Теперь введем такое понятие как плотность потока вероятности, что, если грубо обобщать, является отголоском уравнения непрерывности из какой-нибудь механики сплошной среды или теории поля. И так по определению

$$j(x) = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi'\psi^* - \psi\psi'^*).$$

А так же коэффициенты прохождения и отражения соответственно

$$T_u = \left|\frac{j_{\text{out}}}{j_{\text{in}}}\right|, \qquad R_u = \left|\frac{j_{\text{back}}}{j_{\text{in}}}\right|.$$

Где подписи *in*, *out*, *back* соответствуют пришедшей, прошедшей, отразившейся волне, а в нашем случае коэффициентам потокам вероятности от волновой функции с коэффициентами $C,\ A,\ D$ соответственно.

$$\begin{aligned} j_{in} = j[e^{i\varkappa x}] \quad &= -\frac{i\hbar}{2m}(i\varkappa+i\varkappa) &&= \frac{\hbar\varkappa}{m} \\ j_{out} = j[Ae^{i\varkappa x}] \quad &= -\frac{i\hbar}{2m}|A|^2(i\varkappa+i\varkappa) &&= \frac{\hbar\varkappa}{m\left(\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_0}\right)^2+1\right)} \\ j_{back} = j[De^{-i\varkappa x}] \quad &= -\frac{i\hbar}{2m}|D|^2(-i\varkappa-i\varkappa) &&= -\frac{\hbar\varkappa}{m\left(\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_0}\right)^2+1\right)} \end{aligned}$$

И тогда

$$\boxed{T = \left|\frac{j_{\text{out}}}{j_{\text{in}}}\right| = \frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 + \varkappa_0^2}} \qquad \boxed{R = \left|\frac{j_{\text{back}}}{j_{\text{in}}}\right| = \frac{\varkappa_0^2}{\varkappa^2 + \varkappa_0^2}}.$$

в)

Честно, трудно понять, что автор задания имеет в виду под вероятностью "ионизации". Самое правдоподобное, что нам удалось придумать — вылет электрона из ямы при таком её резком изменении, что по аналогии с отрыванием электрона от атома её ионизует. Однако посчитать что-то близкое по ответу к Белоусову так и не вышло, а потому по определению вероятность "ионизации":

$$W = 1 - \frac{4\varkappa_0\varkappa_1}{(\varkappa_0 + \varkappa_1)^2} = \left(\frac{\varkappa_0 - \varkappa_1}{\varkappa_0 + \varkappa_1}\right)^2.$$