Упражнения

Первое

В общем и целом нужно найти A^* и A^{-1} для заданного A.

а) Оператор инверсии

И так, что же такое оператор инверсии, а это $I\psi(x) = \psi(-x)$. Обратный оператор должен по определению

$$I^{-1}I\psi(x) = \psi(x) \quad \xRightarrow{x\mapsto -x} \quad I^{-1}\psi(x) = \psi(-x) \quad \Rightarrow \quad I^{-1} = I.$$

По определению сопряженного оператора $(\langle\Phi|I\Psi\rangle)^* = \langle\Psi|I^*\Phi\rangle$[1]. Напомним $[I\Psi](x) = \Psi(-x)$, что означает уже для состояний $\langle x|I\Psi\rangle = \langle -x|\Psi\rangle$, с этим знанием

$$\langle\Phi|I\Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}}\langle\Phi|x\rangle\langle x|I\Psi\rangle dx = \int_{\mathbb{R}}\langle\Phi|x\rangle\langle -x|\Psi\rangle dx = /x\mapsto -x/ = \int_{\mathbb{R}}\langle\Phi|-x\rangle\langle x|\Psi\rangle dx = \langle I\Phi|\Psi\rangle = \langle\Phi|I^*\Psi\rangle \quad \Rightarrow \quad I^* = I.$$

То есть получили, что оператор инверсии унитарен $II^* = \mathbb{E}$ (единичный оператор).

б) Оператор трансляции

Оператор трансляции работает $\hat{T}_a\,|x\rangle = |x+a\rangle$ или так $\langle x|T_a\Psi\rangle = \Psi(x+a)$.

Вполне тривиально, что обратный к оператору трансляции это просто T_{-a}. Сопряженный же пойдём искать по той же схеме

$$\langle\Phi|T_a\Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}}\langle\Phi|x\rangle\langle x+a|\Psi\rangle dx = /x\mapsto x-a/ = \int_{\mathbb{R}}\langle\Phi|x-a\rangle\langle x|\Psi\rangle dx = \langle T_a^*\Phi|\Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}}\langle T_a^*\Phi|x\rangle\langle x|\Psi\rangle dx.$$

Где предпоследние равенство взято просто по определению сопряженного оператора, а последнее неравенство просто по представлению средней величины, тогда видим, что получается следующее

$$\langle x|T_a^*\Phi\rangle = \Phi(x-a) \quad \Rightarrow \quad T_a^* = T_{-a} = T_a^{-1}.$$

Мы вновь получили, что $T_a^*T_a = \mathbb{E}$ – унитарнвй оператор.

Второе

Теперь будем искать собственные значения и собственные числа для операторов, изученных в предыдущей задаче.

Очень удобно совпала, что и оператор трансляции и оператор инверсии являются унитарными. А для унитарного оператора $\hat{A}$ и его собственного состояния $\hat{A}\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle$ легко показать, что

$$\langle A\lambda|A\lambda\rangle = \langle\lambda|A^\dagger A\lambda\rangle = \langle\lambda|\lambda\rangle,$$

но в то же время, учитывая предыдущую выкладку

$$\langle A\lambda|A\lambda\rangle = \lambda\lambda^*\langle\lambda|\lambda\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\lambda|\lambda\rangle = 1 = \lambda\lambda^*.$$

Тогда имеем $\lambda = e^{i\varphi}$, что приводит к самому виду оператора $\hat{A} = e^{i\hat{\varphi}}$.

а) Оператор инверсии

И так, когда мы поняли, что $\hat{I} = e^{i\hat{\varphi}}$, то уже всё просто

$$I\psi(x) = \psi(-x) = \lambda\psi(x).$$

Угадаем собственные функции, которые удовлетворяют соотношению выше

$$\begin{cases}\psi(x) = \psi(-x)\\ \lambda = 1\end{cases} \qquad \begin{cases}-\psi(x) = \psi(-x)\\ \lambda = -1\end{cases}$$

б) Оператор трансляции

И так, оператор трансляции у нас тоже в виде $\hat{T}_a = e^{i\hat{\varphi}}$, и оператор фазы записывают в виде $\hat{\varphi} = \frac{1}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}$, где $\hat{\boldsymbol{k}}$ – оператор квазиимпульса.

Собственные же волновые функции для $\hat{T}_a$ выразим в координатном представлении

$$\hat{T}_a\,|\Psi\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}}\,|\Psi\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle\boldsymbol{r}|T_a|\Psi\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}}\,|\Psi\rangle\,.$$

[1] тут можно стать свидетелем замены строчной пси на заглавную

Они удовлетворяют уравнению

$$\Psi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}) = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}}\Psi(r) \qquad \Rightarrow \qquad \Psi(r) = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{k}}\Phi(r), \quad \Phi(r+a) = \Phi(r).$$

В конце мы представили эти функции в таком периодическом виде, они называются функциями Блоха, и позже мы ещё встретим их в действии.

Собственные значения значит выражаются в виде $\lambda = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}}$.

Шестое

В этом упражнении казалось бы раскладываем экспоненты в ряд и радуемся жизни. При чем ну ладно даже до третьего члена, всё перемножаем, находим коммутаторы и радуемся жизни. Ведь никогда дальше второго члена всё равно рассkладывать не будем[2]

Конечено всегда можно устроить комбинаторные игрища, но кому оно надо?[3]

$$e^{\xi A}Be^{-i\xi} = \left(1+\xi A+\frac{\xi^2A^2}{2}+\frac{\xi^3A^3}{6}+\ldots\right)\cdot B\cdot\left(1-\xi A+\frac{\xi^2A^2}{2}-\frac{\xi^3A^3}{6}+\ldots\right) =$$

$$= B + \underbrace{\xi AB-\xi BA}_{\xi[A,B]} + \underbrace{\frac{\xi^2}{2}A^2B+\frac{\xi^2}{2}BA^2-\xi^2ABA}_{\frac{\xi^2}{2}(A[A,B]-[A,B]A)=\frac{\xi^2}{2}[A,[A,B]]} + \ldots = B+\xi[A,B]+\frac{\xi^2}{2!}[A,[A,B]]+\ldots$$

Что и хотелось показать.

Девятое

Вспомним, что оператор трансляции нам в принципе задавался как

$$\hat{T}_a = e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}.$$

Мы в таком случае в этом упражнении имеем просто оператор трансляции слева и обратной трансляции справа

$$e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}U(\boldsymbol{r})e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}} \quad \overset{\cdot\Psi(\boldsymbol{r})}{\Longrightarrow} \quad \hat{T}_\alpha U(\boldsymbol{r})\hat{T}_{-a}\Psi(\boldsymbol{r}) = \hat{T}_\alpha[U(\boldsymbol{r})\Psi(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})] = U(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a})\Psi(r).$$

Получили такую же домноженну на просто пси штуку, а значит есть соответсвие

$$\hat{T}_\alpha U(\boldsymbol{r})\hat{T}_{-a} = U(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{a}).$$

Т3

а)

Задан потенциал $U(x) = -\frac{\hbar^2}{m}\varkappa_0\delta(x)$, который представляет собой дельта-яму. Прежде чем как всегда решать стационарное уравнение шредингера сделаем замечание, что $E<0$, тогда получим

$$\hat{H}\psi = -|E|\psi, \qquad \varkappa^2 := \frac{2m|E|}{\hbar}.$$

С такой заменой получим вполне красивый диффур второго порядка:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' - \frac{\hbar^2}{m}\varkappa_0\delta(x)\psi + |E|\psi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \psi'' - (\varkappa - 2\varkappa_0\delta(x))\psi = 0.$$

Мы ожидаем непрерывности от волной функции на границах областей, а именно в точке дельта-ямы, то есть одним из граничных условий будет $\psi(-0) = \psi(+0)$.

Потребовав непрерывности ψ, из-за дельта функции, мы получаем разрыв для первой производной

$$\psi'' - (\varkappa - 2\varkappa_0\delta(x))\psi = 0 \qquad \overset{\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}}{\Longrightarrow} \qquad \psi'(+0) - \psi'(-0) = -2\varkappa_0\psi(0).$$

Вне ямы будем наблюдать спад по экспоненте, сама же яма – по сути точечна, значит такое же поведение будем ожидать и в связном состоянии, таким образом ищем волновую функцию как

$$\psi = \begin{cases} C_1e^{-\varkappa x} &, x>0 \\ C_2e^{\varkappa x} &, x<0 \end{cases}$$

[2] При чем не только в рамках этого курса, но и весьма вероятно по жизни в принципе.

[3] Есть ещё вариант посмотреть как это сделал Валерий Валерьевич, что я сделаю завтра утром, то есть через три часа. Клянусь.

Из непрерывности получим автоматически, что
$$\psi(-0)=\psi(+0) \qquad\Rightarrow\qquad C_2=C_1=C.$$
Разрыв же первой производной позволит нам найти
$$\psi'(+0)-\psi'(-0)=-2\varkappa_0\psi(0) \quad\Rightarrow\quad -2\varkappa_0 C=C(-\varkappa-\varkappa) \quad\Rightarrow\quad \varkappa=\varkappa_0.$$
Таким образом энергия связного состояния:
$$\boxed{E=-\frac{\hbar^2\varkappa_0^2}{2m}}$$

Теперь, осталось проверить нормировку нашей волновой функции
$$\int_{\mathbb{R}}\psi\psi^* dx=1 \quad\Rightarrow\quad C^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\varkappa_0|x|}dx=\frac{C^2}{\varkappa_0}\int_0^{+\infty}e^{-2\varkappa_0 x}d2\varkappa_0 x=\frac{C^2}{\varkappa_0}=1 \quad\Rightarrow\quad \varkappa_0=C^2.$$
Таким образом собирая всё вместе получаем волновую функцию вида:
$$\boxed{\psi(x)=\sqrt{\varkappa_0}e^{-\varkappa_0|x|}}$$

Мы получили волновую функцию в координатном представлении для уровня энергии ноль $\psi(x)=\langle x|0\rangle$. Тогда в импульсном представлении
$$\psi(p)=\langle p|0\rangle=\int_{\mathbb{R}}dx\langle p|x\rangle\langle x|0\rangle=\Big/\langle p|x\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{i}{\hbar}px}\Big/=\frac{\sqrt{\varkappa_0}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\varkappa_0 x-\frac{i}{\hbar}px}dx=\frac{\sqrt{\varkappa_0}}{\sqrt{2\pi\hbar}}\cdot\frac{2\varkappa_0}{\varkappa_0^2+(p/\hbar)^2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(\varkappa_0\hbar)^{3/2}}{(\varkappa_0\hbar)^2+p^2}.$$

Дальше будет менее широко, честно, а ведь это ещё опущено наше любимое интегрирование по частям.
$$\boxed{\langle 0|\hat{p}|0\rangle=0}, \qquad \boxed{\langle 0|\hat{x}|0\rangle=0}.$$
По тому же определению теперь будем получать нечто сложнее чем ноль
$$\langle 0|\hat{x}^2|0\rangle=\int_{\mathbb{R}}\varkappa e^{-2\varkappa_0|x|}\hat{x}^2dx=\underbrace{2\varkappa_0}_{\alpha}\int_0^{+\infty}e^{-2\varkappa_0 x}x^2dx=\alpha\frac{d^2}{d\alpha^2}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}dx=\frac{2}{\alpha^2}=\boxed{\frac{1}{2\varkappa_0^2}}.$$
Красиво продифференцировали под знаком интеграла и получили ответ, осталось ещё немного, не зря же мы $\psi(p)$ считали, стоит, кстати, обратить внимание, что теперь именно по α^2 дифференцируем:
$$\langle 0|\hat{p}^2|0\rangle=\int_{\mathbb{R}}dp\ p^2\frac{2}{\pi}\frac{(\varkappa_0\hbar)^3}{((\hbar\varkappa_0)^2+p^2)^2}=\frac{2}{\pi}(\varkappa_0\hbar)^3(-\frac{d}{d\alpha^2})\int_{\mathbb{R}}\frac{p^2}{\alpha^2p^2}dp=\frac{2}{\pi}(\varkappa_0\hbar)^3(-\frac{d}{d\alpha^2})\frac{2\pi i(i\alpha)^2}{2i\alpha}\Big|_{\alpha=\varkappa_0\hbar}=\boxed{(\varkappa_0\hbar)^2}.$$
Из-за того, что средние от координаты и импульса нулевые – дисперсии совпадают с средними квадратами.

Для интереса теперь ещё посмотрим на соотношение неопределенности
$$\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle=\frac{1}{2\varkappa_0^2}\varkappa_0^2\hbar^2=\frac{\hbar^2}{2},$$
что больше абсолютного минимума для когерентного состояния осциллятора $=h^2/4$.

б)

И казалось бы всё хорошо, всё изучили в связном состоянии, но теперь в той же задаче мы будем смотреть на области непрерывного спектра и решать задачу о рассеянии волны на потенциале.

Запишем тогда наиболее общую волновую функцию, в которой на нижней строчки стоят (условно) волны распространяющиеся левее ямы, а точнее подошедшая из $-\infty$ с амплитудой C, и ушедшая в $-\infty$ с амплитудой D. Аналогично правее потенциала будет ушедшая в $+\infty$ с амплитудой A и пришедшая из $+\infty$ с амплитудой B.
$$\psi=\begin{cases}Ae^{i\varkappa x}+Be^{-i\varkappa x} &, x>0\\ Ce^{i\varkappa x}+De^{-i\varkappa x} &, x<0\end{cases} \qquad\Rightarrow\qquad \psi=\begin{cases}Ae^{i\varkappa x} &, x>0\\ Ce^{i\varkappa x}+De^{-i\varkappa x} &, x<0\end{cases}$$
Мы сразу выберем, что волна падала слева, значит $B=0$, и пусть она это делала с $C=1$, так как в вопросах рассеивания нас будут интересовать относительные величины.

Тем не менее у нас всё так же должно быть непрерывно для волновой функции и скачкообразно для её производной в нуле:
$$\begin{matrix}A+B=C+D\\ i\varkappa(A-B)-i\varkappa(C-D)=-2\varkappa_0\psi(0)\end{matrix} \qquad\Rightarrow\qquad i\varkappa[(C-D)-(A-B)]=2\varkappa_0(A+B)$$
Теперь подставим наши допущения $(B=0,\ C=0)$ и выразим каппу
$$\varkappa=2i\varkappa_0\frac{A+B}{(A-B)-(C-D)}=2i\varkappa_0\frac{A}{A-(1-D)}=i\varkappa_0\frac{A}{A-1}.$$

Тут последнее равенство последовало из непрерывности в нуле: $A + 0 = 1 + D$. И чтобы научиться сравнивать амплитуды возьмём и выразим их все через $\varkappa$ и $\varkappa_0$, что мы уже можем сделать:

$$A = \frac{\varkappa}{\varkappa - i\varkappa_0}, \qquad D = \frac{i\varkappa_0}{\varkappa - i\varkappa_0}.$$

Теперь введем такое понятие как плотность потока вероятности, что, если грубо обобщать, является отголоском уравнения непрерывности из какой-нибудь механики сплошной среды или теории поля. И так по определению

$$j(x) = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi'\psi^* - \psi\psi'^*).$$

А так же коэффициенты прохождения и отражения соответственно

$$T_u = \left|\frac{j_{\text{out}}}{j_{\text{in}}}\right|, \qquad R_u = \left|\frac{j_{\text{back}}}{j_{\text{in}}}\right|.$$

Где подписи *in*, *out*, *back* соответствуют пришедшей, прошедшей, отразившейся волне, а в нашем случае коэффициентам потокам вероятности от волновой функции с коэффициентами $C,\ A,\ D$ соответственно.

$$\begin{aligned}
j_{in} = j[e^{i\varkappa x}] \qquad &= -\frac{i\hbar}{2m}(i\varkappa + i\varkappa) &&= \frac{\hbar\varkappa}{m} \\
j_{out} = j[Ae^{i\varkappa x}] \qquad &= -\frac{i\hbar}{2m}|A|^2(i\varkappa + i\varkappa) &&= \frac{\hbar\varkappa}{m\left(\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_0}\right)^2 + 1\right)} \\
j_{back} = j[De^{-i\varkappa x}] \qquad &= -\frac{i\hbar}{2m}|D|^2(-i\varkappa - i\varkappa) &&= -\frac{\hbar\varkappa}{m\left(\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_0}\right)^2 + 1\right)}
\end{aligned}$$

И тогда

$$\boxed{T = \left|\frac{j_{\text{out}}}{j_{\text{in}}}\right| = \frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 + \varkappa_0^2}} \qquad \boxed{R = \left|\frac{j_{\text{back}}}{j_{\text{in}}}\right| = \frac{\varkappa_0^2}{\varkappa^2 + \varkappa_0^2}}.$$

в)

Честно, трудно понять, что автор задания имеет в виду под вероятностью "ионизации". Самое правдоподобное, что нам удалось придумать — вылет электрона из ямы при таком её резком изменении, что по аналогии с отрыванием электрона от атома её ионизует. Однако посчитать что-то близкое по ответу к Белоусову так и не вышло, а потому по определению вероятность "ионизации":

$$W = 1 - \frac{4\varkappa_0\varkappa_1}{(\varkappa_0 + \varkappa_1)^2} = \left(\frac{\varkappa_0 - \varkappa_1}{\varkappa_0 + \varkappa_1}\right)^2.$$

T4

б) потенциальная яма

И так, зададим потенциальную яму и эволюцию нашей системы

$$U(x) = \begin{cases} -U_0\ ,\ |x| < a/2 \\ \quad 0\ ,\ |x| > a/2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} &\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + (U_0 + E)\psi(x) = 0\ , \quad &&|x| < a/2 \\ &\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + E\psi(x) = 0\ , &&|x| > a/2 \end{aligned}$$

Мы смотрим на энергию в несвязном состоянии, то есть $E > 0$, получаем волновую функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} 1\cdot e^{ik_1x} + Ae^{-ik_1x}\ ,\ x < a/2 \\ \ Be^{ik_2x} + Ce^{-ik_2x}\ ,\ |x| < a/2 \\ De^{ik_1x} + 0\cdot e^{-ik_1x}\ ,\ x > a/2 \end{cases} \qquad k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad k_2^2 = \frac{2m(E+U_0)^2}{\hbar^2}.$$

Где аналогично T3, мы выбираем волну падающую из $-\infty$ с единичной амплитудой, и соответсвенно из $+\infty$ к нам ничего не приходит.

Теперь на каждой границе нам нужно взять граничные условия

$$\begin{cases} \psi(\frac{a}{2}-\varepsilon)=\psi(\frac{a}{2}+\varepsilon) \\ \psi(-\frac{a}{2}-\varepsilon)=\psi(-\frac{a}{2}+\varepsilon) \\ \psi'(\frac{a}{2}-\varepsilon)=\psi'(\frac{a}{2}+\varepsilon) \\ \psi'(-\frac{a}{2}-\varepsilon)=\psi'(-\frac{a}{2}+\varepsilon) \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} Be^{ik_2a/2}+Ce^{-ik_2a/2}=De^{ik_1a/2} \\ e^{-ik_1a/2}+Ae^{ik_1a/2}=Be^{ik_2a/2}+Ce^{ik_2a/2} \\ k_1e^{-ik_1a/2}-k_1Ae^{ik_1a/2}=k_2Be^{-ik_2a/2}-k_2Ce^{ik_2a/2} \\ k_1De^{ik_1a/2}=k_2Be^{ik_2a/2}-k_2Ce^{-iak_2a/2} \end{cases}$$

В этот раз мы покажаем какие-то алгебраические выкладки, которые ведут к свету, но на самом деле *Wolfram Mathematica* нам в помощь. Удобно заменить экспоненты в сетпенях k_1 и k_2 на соответсвующие α_i, тогда каким-нибудь Гауссом, система решиться. Здесь приведем просто, что досчитать это реально

$$\begin{cases} B\alpha_2+\dfrac{C}{\alpha_2}=D\alpha_1 \\ \dfrac{1}{\alpha_1}+A\alpha_1=\dfrac{B}{\alpha_2}+C\alpha_2 \\ \dfrac{k_1}{\alpha_1}-Ak_1\alpha_1=\dfrac{k_2B}{\alpha_2}-k_2C\alpha_2 \\ D\alpha_1k_1=B\alpha_2k_2-\dfrac{Ck_2}{\alpha_2} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \ldots\text{(мы в вас верим)}$$

Куда полезней, сейчас понять, что если помучиться и решить данную систему, то мы по сути и найдём ответ на задачу, ведь

$$j_{\text{in}}[e^{ik_1x}]=-\frac{i\hbar}{2m}(ik_1+ik_1)=\frac{\hbar k_1}{m},\qquad j_{\text{out}}[De^{ik_1x}]=|D|^2\frac{\hbar k_1}{m},\qquad j_{\text{back}}[Ae^{-ik_1x}]=|A|^2\frac{-\hbar k_1}{m},$$

То есть in – падающая волна, амплитуду которой мы выбрали единицей, out – ушедшая в $+\infty$ с амплитудой D и *back* отразившаяся обратно в $-\infty$.

Поверим, что коэффициенты из той системы получаются и соответственно

$$R=\left|\frac{j_{\text{back}}}{j_{\text{in}}}\right|=|A|^2=\frac{(k_1^2-k_2^2)^2\sin k_1a}{4k_2^2k_1^2+(k_1^2+k_2^2)^2\sin^2k_1a},$$

$$T=\left|\frac{j_{\text{out}}}{j_{\text{in}}}\right|=|D|^2=\frac{4k_1^2k_2^2}{4k_1^2k_2^2+(k_1^2-k_2^2)^2\sin^2k_1a}.$$

а) потенциальный барьер

Всё остаётся почти таким же, только сейчас проследим за сменой знаков кое-где

$$U(x)=\begin{cases} U_0\ ,\ |x|<a/2 \\ 0\ ,\ |x|>a/2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} \dfrac{\hbar^2}{2m}\psi''(x)+(E-U_0)\psi(x)=0\ , & |x|<a/2 \\ \dfrac{\hbar^2}{2m}\psi''(x)+E\psi(x)=0\ , & |x|>a/2 \end{matrix}$$

Теперь если аналогично предыдущему пункту начать решать задачу, то заметим, что нужно лишь заменить одну! переменную $k_1\mapsto\varkappa_1=\frac{2m}{\hbar^2}(U_0-E)$. При чем, $0<E<U_0$. И тогда по аналогии $k_1=i\varkappa_1$ получаем:

$$R=\frac{(\varkappa_1^2+k_2^2)^2sh^2\varkappa_1a}{4\varkappa_1^2k_2^2+(\varkappa_1+k_2^2)^2sh^2\varkappa_1a},\qquad T=\frac{4\varkappa_1^2k_2^2}{4\varkappa_1^2k_2^2+(\varkappa_1^2+k_2^2)^2sh^2\varkappa_1a}.$$

И главное что в прошлом пункте, что сейчас мы получаем сумму $R+T=1$ что и ожидается.

Т6

Возьмём операторы импульса $\hat{p}=-i\hbar\partial/\partial x$ и координаты $\hat{x}$. Сразу найдём их средние и коммутатор

$$\bar{x}=\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle,\qquad \bar{p}=\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle,\qquad [\hat{x},\hat{p}]=i\hbar\mathbb{E}.$$

Если сейчас ввести такие величины, у которых ещё и оказывается коммутатор тот же

$$\hat{\varkappa}=\hat{x}-\bar{x},\qquad \hat{\varpi}=\hat{p}-\bar{p}\qquad [\hat{\varkappa},\hat{\varpi}]=i\hbar\mathbb{E}.$$

Это ещё что[4], самое главное ещё и что помимо $\bar{\varpi}=\bar{\varkappa}=0$, так ещё

$$(\Delta\varkappa)^2=\langle\psi|(\hat{\varkappa}-\bar{\varkappa})|\psi\rangle=\langle\psi|(\hat{x}-\bar{x})|\psi\rangle=(\Delta x)^2,\qquad (\Delta\varpi)^2=(\Delta p)^2.$$

[4] это \varpi, классно выглядит же

Теперь введем функции по методу Вейля
$$|\Phi\rangle = (\hat{\varkappa} - i\gamma\hat{\varpi})\,|\Psi\rangle\,.$$
И так как по определению нормы $\langle\Phi|\Phi\rangle \geqslant 0$ получим
$$\langle\psi|(\hat{\varkappa} - i\gamma\hat{\varpi})^\dagger(\hat{\varkappa} - i\gamma\hat{\varpi})|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{\varkappa}^2 - i\gamma(\hat{\varkappa}\hat{\varpi} - \hat{\varpi}\hat{\varkappa}) + \gamma^2\hat{\varpi}^2|\psi\rangle \geqslant 0.$$
А значит неотрицательной должно быть и выражение
$$(\Delta x)^2 + \hbar\gamma\langle\mathbb{E}\rangle + \gamma^2(\Delta p)^2) \geqslant 0 \qquad \Rightarrow \qquad \hbar^2 - 4(\Delta p)^2(\Delta x)^2 \leqslant 0,$$
что получилось просто из условия на дискриминант для квадратного уравнения на γ, тогда минимум достигнется просто при нулевом дискриминанте
$$(\Delta p)^2(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{4}, \qquad \gamma = -2\frac{(\Delta x)^2}{\hbar}.$$
Таким образом и нашли волновую функцию, которая удовлетворяет минимизации соотношения неопределенности, что мы четко и показали
$$|\Phi\rangle = [\hat{x} - \bar{x} + i\frac{2}{\hbar}(\Delta x)^2(\hat{p} - \bar{p})]\,|\Psi\rangle\,.$$

T10

В нашем гармоническом осцилляторе посмотрим на коммутатор оператора уничтожения с гамильтонианом
$$[\hat{H}, \hat{a}] = [\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right), \hat{a}] = \hbar\omega[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}] = -\hbar\omega[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\hat{a} = -\hbar\omega\hat{a}.$$
Как видим, этот коммутатор не обращается в нуль, если собственное значение $\hat{a}$ – не ноль. То есть энергия такого состояния $|\alpha\rangle$ флуктуирует вокруг своего среднего значения[5]. Разложим это состояния по базису стационарных состояний
$$|\alpha\rangle = \sum_n C_n(\alpha)\,|n\rangle\,.$$
Найдём C_n из уравнения на собственные значения
$$C_n(\alpha) = \langle n|\alpha\rangle = \frac{1}{\alpha}\langle n|\hat{a}\alpha\rangle = \frac{1}{\alpha}\langle\hat{a}^\dagger n|\alpha\rangle$$
Сопряженный оператор уничтожения работает как
$$\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,, \qquad (\hat{a}^\dagger\,|n\rangle)^\dagger = \langle n|\,\hat{a} = \left\langle\hat{a}^\dagger n\right|.$$
То есть получили рекурентную формулу с помощью которой C_n уже вычисляется
$$\alpha C_n(\alpha) = \sqrt{n+1}\langle n+1|\alpha\rangle = \sqrt{n+1}C_{n+1}(\alpha) \qquad \Rightarrow \qquad C_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}C_0(\alpha).$$
Теперь посмотрим на вид нашего разложения
$$|\alpha\rangle = C_0(\alpha)\sum_n\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle = C_0(\alpha)\sum_n\frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle = C_0(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\,|0\rangle\,.$$
Теперь по условию единично нормировки находим $C_0(\alpha)$ и ликуем
$$\langle\alpha|\alpha\rangle = |C_0(\alpha)|^2\langle 0|e^{\alpha^*\hat{a}}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle = |C_0(\alpha)|^2\sum_n\frac{(\alpha^*\alpha)^n}{n!} = 1,$$
и тут под суммой снова удобный ряд
$$|C_0(\alpha)|^2e^{|\alpha|^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad C_0(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2}.$$
Окончательно получили
$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}\,|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_n\frac{\alpha^2}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle\,.$$
Теперь мы готовы искать распределение по числу квантов, ведь вероятность, что в $|\alpha\rangle$ найдётся n квантов это
$$P_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}e^{-|\alpha|^2} = \frac{\langle N\rangle^n}{n!}e^{-\langle N\rangle}.$$
Получили распределение Пуассона для числа квантов со средним значением $\langle N\rangle$.

[5] Эта энергия определена как $\langle E\rangle = \hbar\omega(\langle N\rangle + 1/2)$. А вот $\langle N\rangle = |\alpha|^2$