Билеты по квантовой механике

Авторы заметок: Хоружий Кирилл
Примак Евгений

От: *22 декабря 2021 г.*

То, что остаётся после всех этих абстракций, не следует ли... считать тем реальным и неизменным содержанием, которое навязывается существам всех видов с одинаковой необходимостью, потому что оно не зависит ни от индивида, ни от момента времени, ни от точки зрения?

В. И. Ленин

Содержание

1 Задачи **3**
Задача №14 . . . 3

1 Задачи

Задача №14

> Вычислить в квазиклассическом приближении уровни энергии и собственные функции частицы для
> $$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & x > 0 \end{cases}$$

Нужно быть аккуратными, слева – бесконечная граница, что требует от нас наложения граничного условия

$$\psi(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{x\geqslant 0}(x=0) \sim \sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_{x=0}^{x_0} p(x)dx + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Таким образом запишем модифицированное правило квантования Бора-Зоммерфельда

$$\int_0^{x_0} p(x)dx = \pi\hbar\left(n + \frac{3}{4}\right).$$

Подставим импульс как $p(x) = \sqrt{2m(E_n - V(x))}$ возьмём интеграл от 0 до $x_0 = \sqrt{2E/(m\omega^2)}$ – то есть в классически разрешенной области

$$\int_0^{x_0} p(x)dx = \int_0^{x_0}\sqrt{2mE_n - m^2\omega^2x^2}dx = \frac{E_n}{\omega}\int_0^{\pi}\cos^2\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2\omega}E_n \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_n = \hbar\omega\left(2n + \frac{3}{2}\right)}$$

В квазиклассическом приближении $\psi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \cdot \exp[\frac{i}{\hbar}\int p(x)dx]$ тогда исходя из правила согласования квазиклассических решений при переходе из запрещенной (затухание) в разрешенную (осцилляция) область

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \dfrac{C}{\sqrt{p(x)}}\sin\left(\dfrac{1}{\hbar}\displaystyle\int_x^{x_0} p(\xi)d\xi\right), & 0 < x \leqslant x_0 \\ \dfrac{C}{2\sqrt{|p(x)|}}\exp\left(\dfrac{1}{\hbar}\displaystyle\int_{x_0}^{x} |p(\xi)|d\xi\right), & x_0 \leqslant x \end{cases}$$

Остается только найти константы из условия

$$C^2 = \frac{4m}{T} = 4\frac{1}{\int_0^{x_0} dx/p(x)} = \frac{2m\omega}{\pi}.$$