

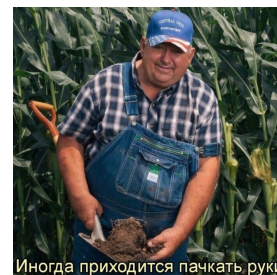
БИЛЕТЫ К ГОСУДАРСТВЕННОМУ ЭКЗАМЕНУ ПО КУРСУ «ОБЩАЯ ФИЗИКА»

Авторы заметок: Хоружий Кирилл
Примаков Евгений

От: 18 октября 2021 г.

Кельвин так характеризовал роль математики и теоретической работы в физике: он сравнивал экспериментальные данные с зерном, которое получается на полях экспериментальной физики, а математику — с жёрновами мельницы, которые перемалывают эти зёрна. ... Только если вкладывать вполне определённые экспериментальные данные, экспериментальный результат — математический аппарат, теоретическое мышление может дать вам конкретные, полезные, физические результаты.

П. Л. Капица



Содержание

1 Квантовая механика	2
1.46 Излучение абсолютно черного тела	2

1 Квантовая механика

1.46 Излучение абсолютно черного тела

тоc: Излучение абсолютно черного тела. Формула Планка, законы Вина и Стефана-Больцмана.

Введем лучистую энергию, раскладывая по частотам или длинам волн:

$$u = \int_0^\infty u_\omega d\omega = \int_0^\infty u_\lambda d\lambda,$$

где u_λ и u_ω – спектральные плотности лучистой энергии. При этом

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}, \quad \frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{d\omega}{\omega}, \quad u_\lambda = \frac{\omega}{\lambda} u_\omega, \quad u_\omega = \frac{\lambda}{\omega} u_\lambda.$$

В теорфизе обычно u_ω , в эксперименте чаще u_λ (как удобно).

Поток лучистой энергии, проходящий за время dt через площадку ds в пределах телесного угла $d\Omega$, ось которого перпендикулярна к площадке ds , можно представить, как

$$d\Phi = I ds d\Omega dt, \quad I = \int_0^\infty I_\omega d\omega,$$

где I – удельная интенсивность излучения, а I_ω – удельная интенсивность излучения частоты ω .

Для равновесного излучения несложно выписать связь:

$$u = \frac{4\pi}{c} I, \quad u_\omega = \frac{4\pi}{c} I_\omega.$$

Закон Кирхгофа. Для непрозрачного и поглощающего тела верно, что поток лучистой энергии, излучаемый площадкой ds поверхности тела внутрь телесного угла $d\Omega$:

$$d\Phi = E_\omega ds \cos \varphi d\Omega d\omega dt,$$

где φ – угол между направлением излучения и нормалью к площадке ds . Величина E_ω – *излучательная способность* поверхности тела, в направлении угла φ .

Поглощательной способностью A_ω поверхности для излучения той же частоты, называется величина, показывающая, какая доля энергии падающего излучения, поглощается рассматриваемой поверхностью. Величины E_ω и A_ω – характеристики тела, определяемые только температурой.

Рассмотрев тело в ящике, можем получить *закон Кирхгофа*:

$$\frac{E_\omega}{A_\omega} = I_\omega, \tag{1.1}$$

таким образом $\frac{E_\omega}{A_\omega}$ – универсальная функция только частоты и температуры для каждого тела.

Def 1.1. Абсолютно черным называется тело : $A_\omega \equiv 1 \forall \omega$.

Далее излучательную способность АЧТ примем за $e_\omega \equiv I_\omega$. Излучение АЧТ изотропно, а значит подчиняется *закону Ламберта*:

$$\frac{d\Phi}{d\Omega ds \cos \theta} = B_\theta = \text{const}(\theta).$$

Закон Стефана-Больцмана. Выведем этот закон, *методом циклов*. Пусть есть некоторая оболочка, при увеличении объема на dV за счёт давления света совершается работа $\mathcal{P} dV$, где $\mathcal{P} = \frac{1}{3}u$, а u – интегральная плотность лучистой энергии. Внутренняя энергия излучения в оболочке uV , откуда находим

$$\mathcal{P} dV = -d(uV), \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}u dV + V du = 0, \quad \Rightarrow \quad uV^{4/3} = \text{const}, \quad \mathcal{P}V^{4/3} = \text{const},$$

так получили *уравнения адиабаты* для изотропного излучения, с постоянной адиабаты $\gamma = 4/3$.

В силу эффекта Дполера, при адиабатическом сжатии должен меняться спектральный состав, пусть $\omega \rightarrow \omega'$, при этом:

$$u_\omega d\omega \cdot V^{4/3} = u'_{\omega'} d\omega' \cdot V'^{4/3} = \text{const},$$

где V' и $u'_{\omega'}$ – объем и спектральная плотность энергии излучения частоты ω' в конце процесса.

Произведем теперь над излучением АЧТ *цикл Карно* (см. Сивухин, т. IV, §115). А можно этого и не делать, а подставить $U = Vu(T)$ и $\mathcal{P} = \frac{1}{3}u(T)$ в формулу

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial T}\right)_V - \mathcal{P}, \quad \Rightarrow \quad u/T^4 = \text{const},$$

что и составляет закон Стефана-Больцмана.

Пользуясь формулой Планка, можем уточнить, что

$$u = \frac{h}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} = \frac{k^4 T^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^3 e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \frac{8}{15} \frac{\pi^5 k^4}{c^3 \hbar^3} T^4 = \frac{\pi^2 k^4}{15 c^3 \hbar^3}.$$

На практике удобнее говорить про энергетическую светимость S для АЧТ, которая связана с яркостью B излучающей поверхности соотношением $S = \pi B = \pi I = cu/4$, а значит

$$S = \sigma T^4, \quad \sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3} = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 \hbar^3} = 5.670 \times 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4},$$

где σ – постоянная Стефана-Больцмана.

Теорема Вина. Рассмотрим сферически симметричную систему (вообще вроде можно показать что в общем случае изотропия излучения сохраняется), сожмем от V_1 до V_2 , уравновесим (необратимый процесс), расцирим от V_2 до V_1 , получим адиабатический обратимый круговой процесс, что невозможно, а значит верна следующая теорема:

Thr 1.2 (теорема Вина). *Равновесное излучение, в оболочке с идеально отражающими стенками, остается равновесным при квазистатическом изменении объема системы.*

Рассмотрим сферическую оболочку с идеально зеркальными стенками. Рассмотрим луч, падающий под углом θ , тогда время между двумя последовательными отражениями равно $\Delta t = (2r/c) \cos \theta$, за это время радиус оболочки получит приращение $\Delta r = r \delta \Delta t$. При каждом отражении происходит доплеровское изменение частоты:

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = -\frac{2\dot{r} \cos \theta}{c} = -\frac{2\Delta r \cos \theta}{c \Delta t} = -\frac{\Delta r}{r}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{\omega} + \frac{dr}{r} = 0, \quad \Rightarrow \quad \omega r = \text{const}.$$

Так как $r \sim V^{1/3}$, то можно записать в чуть более общем виде:

$$\omega^3 V = \text{const},$$

что объединяя с другими адиабатическими инвариантами и законом Стефана-Больцмана, находим закон смещения Вина в наиболее общей форме:

$$\frac{\omega^4}{u} = \text{const}, \quad \frac{\omega}{T} = \text{const}, \quad \frac{u_\omega d\omega}{\omega^4} = \text{const}. \quad (1.2)$$

По теореме Вина излучение остается равновесным, так что можно было бы такж и нагревать/охлаждать стенки, да и вообще: полученные результаты – свойства только самого равновесного излучения, не связанные с процессами.

Максимумы спектральной плотности. Их последней формулы можем получить¹

$$u_\omega(\omega, T) = \frac{\omega^4}{\omega'^4} \frac{d\omega'}{d\omega} u'_{\omega'}(\omega', T) = \frac{T^3}{T'^3} u'_{\omega'} \left(\frac{T'}{T} \omega, T' \right) = \text{const}(T'), \quad \Rightarrow \quad u_\omega(\omega, T) = T^3 \cdot \varphi_1 \left(\frac{\omega}{T} \right) = \omega^3 f_1 \left(\frac{\omega}{T} \right),$$

где φ, f – универсальные функции. Аналогично можно переписать, в виде

$$u_\lambda = T^5 \varphi_2(\lambda T), \quad u_\lambda = \frac{1}{\lambda^5} f_2(\lambda T).$$

Найдём теперь максимумы u_λ обозначив, за λ_{\max} :

$$\frac{d\varphi_2}{d\lambda} = T \frac{d\varphi_2}{d(\lambda T)} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi_2}{d(\lambda T)} = 0.$$

Таким образом, при всех температурах максимум получается при одном и том же значении λT , а значит выполняется закон смещения Вина:

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} \cdot T &= b_\lambda = \text{const}, & b_\lambda &= 2.898 \times 10^6 \text{ нм} \cdot \text{К} \\ \nu_{\max}/T &= b_\nu = \text{const}, & b_\nu &= 5.879 \times 10^{10} \text{ Гц} \cdot \text{К}. \end{aligned}$$

Введем $\beta = \hbar c / \lambda k T$, тогда задача сводится к отысканию минимума:

$$\frac{1}{\beta^5} (e^\beta - 1) \rightarrow \min, \quad \Rightarrow \quad e^{-\beta} + \frac{\beta}{5} - 1 = 0, \quad \Rightarrow \quad \beta = 4.9651142, \quad b_\lambda = \lambda_{\max} T = \frac{\hbar c}{k\beta}.$$

При поиске β_ω уравнение получится, вида

$$(3 - \beta_\omega) e^{\beta_\omega} - 3 = 0, \quad \beta_\omega = \frac{\hbar \omega}{k T} = \frac{\hbar c}{\lambda k T}, \quad \Rightarrow \quad \beta_\omega = 2.821, \quad \lambda_{\max}^\omega = \frac{\hbar c}{k \beta_\omega T}.$$

Стоит заметить, что $\lambda_{\max}^\omega / \lambda_{\max} = \beta / \beta_\omega \approx 1.76$.

Формула Планка. опускаем кусок вывода про стоячие волны, формулу Рэлея-Джинса, ...

Итак, считая, что на каждую стоячую волну приходится $\bar{\mathcal{E}} = kT$, то записав энергию равновесного излучения в

¹ Интегрируя $u_\omega(\omega, T) = T^3 \cdot \varphi_1 \left(\frac{\omega}{T} \right)$, находим, что $u = \int_0^\infty u_\omega d\omega = T^4 \int_0^\infty \varphi(\omega/T) d(\omega/T) = aT^4$.

полости в спектральном интервале $d\omega$ в виде $V u_\omega d\omega$, получаем:

$$u_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \bar{\mathcal{E}}^* = \frac{kT}{\pi^2 c^3} \omega^2, \quad (1.3)$$

где равенство со звёздочкой – формула Рэлея-Джинса, верная при малых ω .

Однако, считая, что существует минимальный квант энергии света, по теореме Больцмана, вероятности возбуждения энергетических уровней осциллятора пропорциональны

$$1, e^{-\mathcal{E}_0/kT}, e^{-2\mathcal{E}_0/kT}, \dots, \Rightarrow \bar{\mathcal{E}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \mathcal{E}_0 e^{-n\mathcal{E}_0/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\mathcal{E}_0/kT}} = \mathcal{E}_0 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}},$$

где введено обозначение $x = \mathcal{E}_0/kT$. Вспоминая, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}, \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}_0}{e^{\mathcal{E}_0/kT} - 1}.$$

Подставляя это в формулу (1.3), находим

$$u_\omega(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\mathcal{E}_0}{e^{\mathcal{E}_0/kT} - 1}.$$

А теперь внимание, гений Планка предложил подобрать \mathcal{E}_0 так, чтобы выполнялся закон смещения Вина:

$$u_\omega(\omega, T) = \omega^3 f_1\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\mathcal{E}_0/\omega}{e^{\mathcal{E}_0/kT} - 1} = f\left(\frac{\omega}{T}\right),$$

но \mathcal{E}_0 – характеристика только самого осциллятора, а значит $\mathcal{E}_0 = \text{const}(T)$, тогда $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0(\omega)$, откуда находим

$$\mathcal{E}_0 = \hbar\omega,$$

где \hbar – постоянная Планка. Подставляя, находим

$$u_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \quad u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad u_\lambda = \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}, \quad (1.4)$$

что и называют *формулой Планка*.