Задание от 27 июля

Автор: Хоружий Кирилл
Соавтор: Примак Евгений

От: *4 сентября 2021 г.*

Первая задача

Зная состояние в $|l,\, l\rangle$

$$Y_{ll} = C_l e^{il\varphi} \sin^l \theta, \qquad c_l = \left[\frac{(-1)^l}{2^l l!}\right]\sqrt{\frac{(2l+1)(2l)!}{4\pi}},$$

с помощью понижающего оператора

$$\hat{L}_- = i\hbar e^{-i\varphi}\left(i\partial_\theta + \operatorname{ctg}\theta \partial_\varphi\right),$$

найдём состояния с $l=1$ и $m=-1,0,+1$. Для начала,

$$Y_{11} = \left(\frac{-1}{2}\right)\sqrt{\frac{3\cdot 2}{4\pi}} e^{i\varphi}\sin\theta = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}e^{i\varphi}\sin\theta.$$

Теперь вспомним, что

$$\hat{L}_-|l,m\rangle = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\hbar|l,m\rangle, \qquad \langle\theta,\varphi|\hat{L}_-|1,1\rangle = \hbar\sqrt{2}\langle\theta,\varphi\,|\,1,0\rangle = \hat{L}_-\langle\theta,\varphi\,|\,1,1\rangle = \hat{L}_- Y_{11},$$

теперь, с учётом нормировки, подставляем $\hat{L}_-$ и находим

$$Y_{10} = \hat{L}_-\frac{Y_{11}}{\hbar\sqrt{2}} = \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}\left(-\partial_\theta + i\operatorname{ctg}\theta\ \partial_\varphi\right)\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3}{2\pi}}e^{i\varphi}\sin\theta\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta.$$

Аналогично повторяем операцию понижения,

$$Y_{1,-1} = \hat{L}_-\frac{Y_{10}}{\hbar\sqrt{2}} = \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}\left(-\partial_\theta + i\operatorname{ctg}\theta\,\partial_\varphi\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}e^{-i\varphi}\sin\theta.$$

Вид орбиталей $YY^\dagger$ приведен на рисунке.

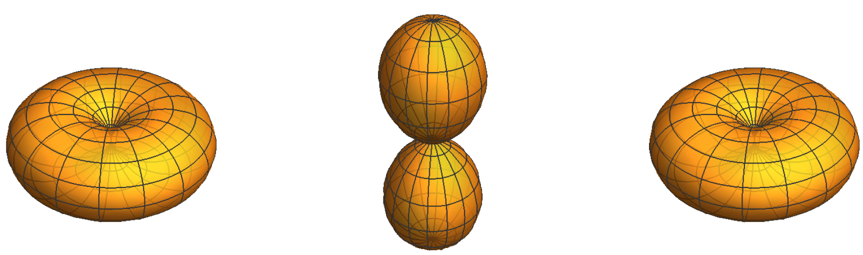

Рис. 1: Вид орбиталей типа $Y_{1,1}$, $Y_{1,0}$, $Y_{1,-1}$.

Вторая задача

Хотелось бы найти $\langle\theta,\varphi|\hat{L}_y|\alpha\rangle$, для этого рассмотрим инфинитизимальное вращение на угол $\delta\xi$ вокруг оси x:

$$\langle\boldsymbol{x}|\mathbb{1} - \tfrac{i}{\hbar}\delta\xi\hat{L}_y|\alpha\rangle = \langle x - z\delta\xi, y, z + x\delta\xi|\alpha\rangle.$$

Вспомним, что в сферических координатах

$$\begin{cases}\delta x = \cos\theta\cos\varphi\delta\theta - \sin\theta\sin\varphi\delta\varphi = -z\delta\xi\\ \delta y = \cos\theta\sin\varphi\delta\theta + \sin\theta\cos\varphi\delta\varphi = 0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\delta\theta = -\cos\varphi\,\delta\xi\\ \delta\varphi = \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\,\delta\xi\end{cases}$$

Подставим это выражение в выражение для малой трансляции в сферических координатах:

$$\langle\theta,\varphi|\mathbb{1} - \tfrac{i}{\hbar}\delta\xi\hat{L}_y|\alpha\rangle = \langle\theta,\varphi|\alpha\rangle + \partial_\theta(\langle\theta,\varphi|\alpha\rangle)\delta\theta + \partial_\varphi(\langle\theta,\varphi|\rangle)\delta\varphi,$$

где мы воспользовались аналитичностью. Тогда

$$\langle\theta,\varphi|\hat{L}_y|\alpha\rangle = i\hbar\left(-\cos\varphi\,\partial_\theta + \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\,\partial_\varphi\right)\langle\theta,\varphi|\alpha\rangle,$$

откуда и находим операторное равенство

$$\hat{L}_y = i\hbar\left(-\cos\varphi\,\partial_\theta + \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\,\partial_\varphi\right), \qquad \text{Q. E. D.}$$

1.1 Спин электрона в переменном B

Поместили атомы в переменное магнитное поле вида

$$\boldsymbol{B}(t) = B_0\boldsymbol{z}_0 + B_\perp \boldsymbol{x}_0\cos(\omega t) + B_\perp \boldsymbol{y}_0 \sin\omega t,$$

Тогда гамильтониан получился бы

$$\hat{V} = -\hat{\boldsymbol{\mu}}\cdot\boldsymbol{B} = \Big/ \hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{e}{m_e c}\hat{\boldsymbol{S}} \Big/ = -\left(\frac{e\hbar B_\perp}{2m_e c}\right)\Big[\cos(\omega t)(|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|) - i\sin(\omega t)(|+\rangle\langle -| - |-\rangle\langle +|\Big],$$

откуда и находим, что

$$\gamma = -\frac{e\hbar B_\perp}{2m_e c}.$$

1.2 Электронный парамагнитный резонанс

Теперь уже внешнее поле имеет вид

$$\boldsymbol{B}(t) = B_0\boldsymbol{z}_0\cos(\nu t),$$

с намильтонианом, вида

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t), \qquad \hat{V}(t) = \hbar\omega_L\hat{S}_z\cos(\nu t).$$

Выразим $\hat{S}_z$ и $\hat{S}_x$ (для второй части задания) через базисные состояния F_z, F^2, S^2, I^2:

$$\begin{aligned} \hat{S}_z = {}& \tfrac{1}{2}|1,0\rangle\langle 0,0| + \\ &+ \tfrac{1}{2}|0,0\rangle\langle 1,0| - \tfrac{1}{2}|1,0\rangle\langle 0,0||1,-1\rangle\langle 1,-1| + \tfrac{1}{2}|1,0\rangle\langle 0,0||1,1\rangle\langle 1,1|, \\ \hat{S}_x = {}& |1,-1\rangle\langle 0,0| + |1,1\rangle\langle 0,0| + \\ &+ |1,-1\rangle\langle 1,0| - |1,1\rangle\langle 1,0| - |0,0\rangle\langle 1,-1| - |1,0\rangle\langle 1,-1| - |0,0\rangle\langle 1,1| + |1,0\rangle\langle 1,1|, \end{aligned}$$

где только первые строчки будут влиять на $\langle F=1, F_z=\{1,0,-1\}|\hat{S}_{z,x}|F=0\rangle$. Отсюда сразу находим, что только при $|n\rangle = |F=1, F_z=0\rangle$ будет

$$\langle 1,0|\hat{S}_z|0,0\rangle \neq 0, \qquad \langle 1,\pm 1|\hat{S}_z|0,0\rangle = 0.$$

Также сразу видно, что если направить поле по $\boldsymbol{x}_0$: $\boldsymbol{B}(t) = B_0\boldsymbol{x}_0\cos(\nu t)$, то

$$\langle 1,0|\hat{S}_z|0,0\rangle = 0, \qquad \langle 1,\pm 1|\hat{S}_z|0,0\rangle \neq 0.$$

Также получили, что

$$\gamma = \frac{\omega_L}{2},$$

то есть нашли частоту Раби для резонанса.

1.3 Электродипольный переход 1s → 2p

Поместим атом водорода в поле $\boldsymbol{E}$ вида

$$\boldsymbol{E}(z,\,t) = E_0\boldsymbol{\sigma}_+ e^{-i\omega t + ikz} + \text{c. c.}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_+ = -\frac{\boldsymbol{x}_0 + i\boldsymbol{y}_0}{\sqrt{2}}, \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{E}(z,t) = -\frac{E_0}{\sqrt{2}}\Big(\boldsymbol{x}_0\cos(\omega t) + \boldsymbol{y}_0\sin(\omega t - kz)\Big).$$

Гамильтониан, описывающий динамику тогда

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} - \frac{e^2}{\hat{r}} - \hat{\boldsymbol{d}}\cdot\boldsymbol{E}(\hat{z},\,t) = H_0 + V(t),$$

где возмущение, зависящее от времени,

$$\hat{V}(t) = -\frac{eE_0}{\sqrt{2}}\Big(\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{x}_0\cos(\omega t - kz) + \hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{y}_0\sin(\omega t - kz)\Big).$$

Электродипольное приближение. Сразу перейдём к рассмотрению электродипольного приближения и перейдём к сферическим координатам:

$$\hat{V}(t) = -\frac{eE_0}{\sqrt{2}}\Big(\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{x}_0\cos(\omega t) + \hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{y}_0\sin(\omega t)\Big) = -\frac{eE_0}{\sqrt{2}}\Big(r\sin\theta\cos\varphi\cos\omega t + r\sin\theta\sin\varphi\sin\omega t\Big).$$

Систему полагаем при $t=0$ в состоянии $|i\rangle = |n=1, l=0, m=0\rangle$. Из нестационарной теории возмущений можем найти оценку (в первом приближении) для вероятности перехода в состояние $|n\rangle$:

$$c_n(t) = \frac{1}{i\hbar}\int_0^t e^{i(E_2-E_1)t/\hbar}\langle n|V|i\rangle\, dt.$$

Для состояний водорода знаем волновые функции, разложим их на сферический гармоники, и найдём матричные элементы $\hat{V}$:

$$\psi_{00} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \qquad \begin{aligned} \psi_{1,1} &= -\tfrac{1}{2}e^{i\varphi}\sqrt{\tfrac{3}{2\pi}}\sin\theta, \\ \psi_{1,1} &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{3}{\pi}}\cos\theta, \\ \psi_{1,-1} &= \tfrac{1}{2}e^{-i\varphi}\sqrt{\tfrac{3}{2\pi}}\sin\theta, \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \psi_{1,1}\hat{V}\psi_{00}^\dagger &= -\tfrac{1}{4\pi}\sqrt{\tfrac{3}{2}}e^{i\varphi}\cos(\varphi-\omega t)\sin^2(\theta). \\ \psi_{1,0}\hat{V}\psi_{00}^\dagger &= \tfrac{1}{4\pi}\sqrt{\tfrac{3}{4}}\cos(\varphi-\omega t)\sin(2\theta), \\ \psi_{1,-1}\hat{V}\psi_{00}^\dagger &= \tfrac{1}{4\pi}\sqrt{\tfrac{3}{2}}e^{-i\varphi}\cos(\varphi-\omega t)\sin^2(\theta). \end{aligned}$$

Осталось проинтегрировать, и получить

$$\begin{aligned} \langle\psi_{1,1}|\hat{V}|\psi_{00}\rangle &= -\tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{3}{2}}\pi e^{i\omega t}, \\ \langle\psi_{1,0}|\hat{V}|\psi_{00}\rangle &= 0 \\ \langle\psi_{1,-1}|\hat{V}|\psi_{00}\rangle &= \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{3}{2}}\pi e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

Подставим это в выражение для $c_n(t)$, и получим

$$\begin{aligned} c_{|2,1,1\rangle}(t) &= -\frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{3}{4}}\frac{eEf_r}{\Delta E+\omega\hbar}\left(1-\exp\left(\frac{it(\Delta E+\omega\hbar)}{\hbar}\right)\right), \\ c_{|2,1,-1\rangle}(t) &= \frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{3}{4}}\frac{eEf_r}{\Delta E-\omega\hbar}\left(1-\exp\left(\frac{it(\Delta E-\omega\hbar)}{\hbar}\right)\right) \end{aligned}$$

где f_r возникает из интегрирования по r, – некоторая размерная константа для этого перехода. Вероятности же перехода получаются равными

$$\begin{aligned} |c_{|2,1,1\rangle}(t)|^2 &= \frac{3\pi^2}{64}\left(\frac{Eef_r}{\Delta E+\omega\hbar}\right)^2\sin^2\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta E+\omega\hbar}{\hbar}t\right); \\ |c_{|2,1,-1\rangle}(t)|^2 &= \frac{3\pi^2}{64}\left(\frac{Eef_r}{\Delta E-\omega\hbar}\right)^2\sin^2\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta E-\omega\hbar}{\hbar}t\right). \end{aligned}$$

Получается, что в резонансе при $\omega = \Delta E/\hbar$ будет происходить переход в $|2,1,-1\rangle$, а при $\omega = -\Delta E/\hbar$ будет происходить переход в $|2,1,1\rangle$. Аналогично можно показать, что при $\boldsymbol{E} \parallel \boldsymbol{z}_0$ будет происходить переход в $|2,1,0\rangle$.

Условие резонанса. Для резонанса необходимо

$$\omega = \frac{E_2-E_1}{\hbar} \approx 1.5\times 10^{16}\ \text{Гц} \sim \lambda = 19\ \text{нм},$$

что соответствует сильно ультрафиолетовому свету.

Найдём частоту Раби, так как задача в резонансе сводится в системе с двумя состояниями, можем найти

$$\gamma = \frac{eE_0f_r}{\sqrt{2}} \approx eE_0a_0,$$

где a_0 – радиус Бора.

1.4 Теория возмущений

Дан гамильтониан двухуровневой системы

$$\hat{H} = \hbar\omega_{\text{L}}\,|+\rangle\,\langle+| + \overbrace{\frac{\hbar\gamma}{2}e^{i\omega_{\text{L}}}\,|+\rangle\,\langle-| + \frac{\hbar\gamma}{2}e^{-i\omega_{\text{L}}}\,|-\rangle\,\langle+|}^{\hat{V}}.$$

В начальный же момент времени система находится в состоянии $|-\rangle$, то есть $c_-(t=0)=1$. Посмотрим же как в зависимости от времени меняется вероятность системы находится в состоянии $|+\rangle$. Будем следить за $c_+(t)$ и надеяться, что $|c_+(t)| \ll 1$.

Константа при переходе из состояния $|-\rangle$ в $|+\rangle$ выражается интегралом:

$$c_+(t) \approx \frac{1}{i\hbar}\int_0^t e^{i\frac{E_+-E_-}{\hbar}\tau}\,\langle+|\,\hat{V}\,|-\rangle\, d\tau.$$

Свертка с базисными бра-кетами оставит нам только первое слагаемое в $\hat{V}$, а получившееся выражение уже не сложно проинтегрировать:

$$c_+(t) \approx \frac{1}{i\hbar}\int_0^t \frac{\hbar\gamma}{2} e^{i\left(\frac{E_+ - E_-}{\hbar} - \omega_\mathrm{L}\right)\tau} d\tau = \frac{\hbar\gamma}{2}\frac{1}{\hbar\omega_\mathrm{L} - \Delta E}\left(e^{i\frac{\Delta E - \hbar\omega_\mathrm{L}}{\hbar}t} - 1\right).$$

Её модуль:

$$c_+^2(t) = \frac{\hbar^2\gamma^2}{(\hbar\omega_\mathrm{L} - \Delta E)^2}\sin^2\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta E - \hbar\omega_\mathrm{L}}{\hbar}t\right) \qquad \Rightarrow \qquad |c_+(t)| = \frac{\hbar\gamma}{\Delta E - \hbar\omega_\mathrm{L}}\sin\left(\frac{\Delta E - \hbar\omega_\mathrm{L}}{2\hbar}t\right)$$

И оно действительно много меньше единицы, если коэффициент перед синусом мал.

Однако, в нашей задаче собственные числа $\hat{H}_0$ как раз и дают $\Delta E = \hbar\omega_\mathrm{L}$. При взятии интеграла мы и упустили эту точку, а именно, резонанс, то есть когда $\hbar\omega_\mathrm{L} = E_+ - E_-(= \Delta E)$, тогда интеграл просто расходится при $t \to \infty$:

$$c_+^2(t)\big|_{\hbar\omega_\mathrm{L}\to\Delta E} = \frac{\gamma^2 t^2}{4} \qquad \Rightarrow \qquad |c_+(t)| = \frac{\gamma t}{2} \ \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \ \infty.$$

Однако при небольших временах, то есть $t \ll \gamma\left(= \frac{e\hbar B_\perp}{2m_e c}\right)$, у нас всё ещё работает наша теория.

2 Квантовая электродинамика I

Рассмотрим эволюцию по Гейзенбергу: $\hat{A}^H(t) = \hat{U}^\dagger \hat{A}\hat{U}$, тогда

$$\frac{d}{dt}\hat{A}^H = \Big/ -i\hbar\frac{d\hat{U}^\dagger}{dt} = \hat{U}^\dagger\hat{H}\Big/ = \frac{d\hat{U}^\dagger}{dt}\hat{A}\hat{U} + \hat{U}^\dagger\hat{A}\frac{d\hat{U}}{dt} =$$
$$= -\frac{\hat{U}^\dagger\hat{H}\hat{U}}{i\hbar}\hat{U}^\dagger\hat{A}\hat{U} + \ldots = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}^H, \hat{U}^\dagger\hat{H}\hat{U}\right].$$

Так, например, при $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V(\hat{x})$, тогда

$$\frac{d}{dt}\hat{p}^H = -\frac{d}{d\hat{x}^H}V(\hat{x}^H),$$

где

$$\hat{x}^H = \exp\left(\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right)\hat{x}\exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right), \qquad \overset{?}{\Rightarrow} \qquad \hat{x}^H = \hat{x} + \frac{\hat{p}t}{m}, \ \text{при } \hat{V} = 0.$$

Движемся к квантовой электродинамике, хотим говорить про моды переменного электромагнитного поля. Квантуем только энергию одной выбранной моды. Форма мод есть из классической теории поля. Далее $\hat{H}$, $\hat{\boldsymbol{E}}$, $\hat{\boldsymbol{B}}$ – операторы на состояния заданной моды, а $\boldsymbol{x}$ и t – параметры.

$$\hat{H} = \int\frac{d^3x}{8\pi}\ \left(\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{B}^2(\boldsymbol{x},t)\right), \qquad \text{— оператор энергии моды.}$$

Пастулируем, что $\hat{\boldsymbol{E}}$ и $\hat{\boldsymbol{B}}$ удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\nabla^2\hat{\boldsymbol{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\hat{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2} = 0.$$

В наиболее общем виде, будем считать

$$\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x},t) = \hat{\alpha}(t)\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x}) + \hat{\alpha}^\dagger(t)\boldsymbol{E}_0^*(\boldsymbol{x}), \qquad \hat{\alpha}(t) = \hat{\alpha}(0)e^{-i\omega t}.$$

Пользуясь уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot}\hat{\boldsymbol{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{B}}}{\partial t}, \qquad \partial_t = \pm i\omega.$$

Тогда Гамильтониан получается равным

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{\alpha}^\dagger(t)\hat{\alpha}(t) + \frac{1}{2}\left[\hat{\alpha}(t),\, \hat{\alpha}^\dagger(t)\right]\right)\underbrace{\frac{2}{\hbar\omega}\int\frac{d^3x}{4\pi}|\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x})|^2}_{\equiv 1,\ \text{– нормировка.}}$$

Здесь получается $E_0 \sim V^{-1/2}$, что немного контринтуитивно, но позже с эти поработаем. Теперь

Пастулируем, что $[\hat{\alpha}(t),\, \hat{\alpha}^\dagger(t)] = 1$.

тогда

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{\alpha}^\dagger(t)\hat{\alpha}(t) + \tfrac{1}{2}\right).$$

Теперь и получаем, что

$$\hat{\alpha}^+\hat{\alpha}\left|n\right\rangle = n\left|n\right\rangle, \qquad \hat{H}\left|n\right\rangle = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right), \qquad \hat{\alpha}(t=0)\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle, \qquad \alpha\hbar^+(t=0)\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle.$$

Посмотрим, что происходит с полем:

$$\langle n|\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x},t)|n\rangle = 0, \qquad \langle n|\hat{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{x},t)|n\rangle = 0.$$

Перейдём к рассмотрению когерентных состояний (как у осциллятора)

$$\langle\lambda|\hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x},t)|\lambda\rangle = \hat{E}_0\lambda e^{-i\omega t} + \text{c. c.}$$

где $\left\langle\lambda\right|\hat{\alpha}^+(t=0) = \left\langle\lambda\right|\lambda^*$.

3 Самостоятельные проекты

3.1 Пучок атомов Li

Хочется получать сверхнизкие температуры, – хочется найти два новых перехода к сверхтекучести. Решить задачу (экспериментально) – фермионы в полухаотическом потенциале. Глобально – поработать с печкой (собрать).

3.2 Зеемановский замедлитель для Li

3.3 Пучок атомов Dy

Сделать аналогично первому проекту печку из Тантала. В диспрозии можно будет пронаблюдать необычную штуку – сверхтекучую фазу для очень плотного газа.

3.4 Динамическое управление дипольной ловушкй при промощи SLM

SLM – special light modulator.

3.5 Управление спектром при помощи электро-оптического модулятора

3.6 Когерентное пленеие населенности в Li, Na или Rb

Дифференцируемость

Проверим дифференцируемость

$$\alpha + i\beta = \partial - x + i\partial_x v,$$

откуда находим

$$\begin{cases} \alpha = \partial_x u \\ \beta = 1\partial_x v \end{cases}$$

При этом

$$-\beta + i\alpha = \partial_y u + i\partial_y v.$$

Так получаем условия Коши-Римана (критерий):

$$\begin{cases} \partial_y u = -\partial_x v \\ \partial_y v = \partial_x u \end{cases}$$

Какие функии дифференцируемы? Например полиномы вида z^n, иногда бесконченые

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \qquad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

который сходится внутри некоторого ряда. Так, например, экспонента

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \qquad R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} \to \infty.$$

Можно показать, что

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Отсутствие дифференцируемости в точке

Устранимая особая точка. Устранимый выколотый разрыв с конечным значением, например $\frac{\sin z}{z}$,.

Полюса. $\lim_{z\to a} f(z) \to \infty$, например $\frac{1}{z}$.

Существенная особая точка (гадость). Случай, когда предела не существует: $\sin(1/z)$, или $e^{1/z}$.

Интегрируемость

Давайте, как и в Римане, интегрировать по некоторой кривой, параметризованной отрезком $z = z(t)$, $t \in [a, b]$. Определим интеграл первого рода

$$\sum f(z_i)|\Delta z_i| \to \int f(z)|dz|,$$

который встречается достаточно редко. Аналогично определим интеграл второго рода

$$\sum_i f(z_i)\Delta z_i \to \int_\gamma f(x)\, dz,$$

где $f(x) = u + iv$ и $dz = dx + i\, dy$.

Интегрируем по областям

Пусть есть некоторая область D, против часовой опоясываем кривой γ, введем некоторые области внутри и окружим их по часовой стрелке, введем Γ, как

$$\Gamma = \gamma + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots$$

Докажем теорему Коши:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0.$$

если особенностей нет.

$\triangle$. Рассмотрим интеграл

$$\int_\Gamma (u + iv)(\, dx + i\, dy) = \int_\Gamma (u\, dx - v\, dy) + i \int_\Gamma (v\, dx + u\, dy).$$

Воспользуемся условием Коши-Римана и свойством

$$\int_\Gamma P\, dx + Q\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\, dx\, dy,$$

тогда

$$\int \ldots = 0$$

$\square$

В частности можно показать, что для дифференцируемой функции интегрирование от z_1 до z_2 не зависит от пути интегрирования – контур можно гнуть.

Если есть особенности:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_n \operatorname{res}_{z=a_n} f(z), \qquad \operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi i} \oint f(z)\, dz.$$

Частности

Первая мысль. Если a – УОТ, то $\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = 0$. Вторая мысль, рассмотрим интеграл от $f(z)/z$:

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z}\, dz = \oint \frac{f(0) + \ldots}{z}\, dz = \oint f(0)\frac{dz}{z} = f(0) \int_0^\pi \frac{rie^{i\varphi}\, d\varphi}{re^{i\varphi}} = 2\pi i f(0),$$

где воспользовались $z = re^{i\varphi}$, откуда

$$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{f(z)}{z} = f(0).$$

Посмотрим теперь на

$$\oint \frac{f(z)}{z^2}\, dz = \oint \frac{f(0) + f'(0)z + \ldots}{z^2}\, dz = \oint \left(\frac{f(0)}{z^2} + \frac{f'(0)}{z}\, dz\right),$$

но, так как наличие первообразной гарантирует равенство нулю интеграла, $1/z^2$ выпадает, тогда

$$\oint \frac{f(z)}{z^2}\, dz = \oint \frac{f'(0)}{z}\, dz = 2\pi i f'(0), \qquad \operatorname*{res}_{z=0} \frac{f(z)}{z^2} = f'(0).$$

Ряд Лорана

Определим ряд вида

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Если найти разложение до -1 члена, то можно получить, что

$$\int f(z)\, dz = \oint \frac{c_{-1}}{z - z_0}\, dz = 2\pi i c_{-1}.$$