

# ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ «УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

---

**Автор:** Хоружий Кирилл

**От:** 24 октября 2021 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Неделя I</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Неделя II</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Неделя III</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Неделя IV</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Неделя V</b>	<b>12</b>

## ТеорМин

**Вычеты.** Интеграл по дуге может быть найден, как

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= 2\pi i \sum_{z_j} \operatorname{res}_{z_j} f(z), \quad \operatorname{res}_{z_j} f(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i\varphi} f(z_j + \varepsilon e^{i\varphi}) \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_j} \left( \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_j)^m f(z) \right), \end{aligned}$$

где  $m$  – степень полюса.

**Лем 1** (лемма Жордана). Пусть  $f(z)$  непрерывна в замкнутой области  $G = \{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R_0 > 0\}$ . Обозначим через  $C_R$  полуокружность  $|z| = R$ ,  $\operatorname{Im} z \geq 0$  и пусть верно, что  $\lim_{R \rightarrow \infty} \max |f(z)| = 0$ . тогда при  $a > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0,$$

аналогичное верно при  $C_R$  с  $\operatorname{Im} z \leq 0$  и  $a < 0$ .

**Функция Грина.** Всегда и всюду, уравнение вида

$$Lx(t) = \varphi(t), \quad x(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s) \varphi(s) ds, \quad LG = \delta(t).$$

И, если хочется добавить начальные условия, то например, для  $L = \partial_t^2$  будет

$$x(t) = \dot{x}(0)G(t) + x(0)\dot{G}(t) + \int_0^t G(t-s) \varphi(s) ds.$$

**Матричное уравнение.** Решение линейного уравнения для векторной величины  $\mathbf{y}$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} + \hat{\Gamma}\mathbf{y} = \chi,$$

может быть найдено, через функцию Грина, вида

$$\hat{G}(t) = \theta(t) \exp(-\hat{\Gamma}t), \quad \mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^t \hat{G}(t-s) \chi(s) ds.$$

**Преобразование Лапласа.** Преобразование Лапласа функции  $\Phi(t)$  определяется, как

$$\tilde{\Phi}(p) = \int_0^\infty \exp(-pt) \Phi(t) dt, \quad \Phi(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{\Phi}(p),$$

где далее  $c$  выбираем правее всех особенностей для причинности.

Решение уравнения  $L(\partial_t)G(t) = \delta(t)$  может быть найдено, как

$$G(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{G}(p), \quad \tilde{G}(p) = \frac{1}{L(p)}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \sum_i \operatorname{res}_i \frac{\exp(pt)}{L(p)},$$

где суммирование идёт по полюсам  $1/L(p)$ .

Важно, что можно делать функциями маленькими

$$\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \tilde{f}(p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \frac{\tilde{f}(p)}{p^n} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}. \quad (1)$$

**Уравнение Вольтерра.** Интегральное уравнение Вольтерра первого рода с однородным ядром:

$$\int_0^t K(t-s) f(s) ds = \varphi(t).$$

Решение может быть найдено через обратное преобразование Лапласа

$$f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{f}(p), \quad \tilde{f}(p) = \frac{\tilde{\varphi}(p)}{\tilde{K}(p)}.$$

Но есть один нюанс. При  $K(t)$ ,  $\varphi(t) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} K_0$ ,  $\varphi_0$  получается, что  $\tilde{K}(p)$ ,  $\tilde{\varphi}(p) \approx \frac{K_0}{p}$ ,  $\frac{\varphi_0}{p}$ , тогда

$$f(t) = \frac{\varphi_0}{K_0} \delta(t) + \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \left( \frac{\tilde{\varphi}}{\tilde{K}} - \frac{\varphi_0}{K_0} \right),$$

при этом в отсутствие аналитичности в нуле нет ничего страшного.

**Неоднородная релаксация.** Для одномерного случая

$$(\partial_t + \gamma(t))x(t) = \varphi(t), \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) \varphi(s) ds, \quad G(t,s) = \theta(t-s) \exp\left(-\int_s^t \gamma(\tau) d\tau\right),$$

где всё также  $G(t, s > t) = 0$  в силу стремления к принципу причинности.

## 1 Неделя I

### №1

Рассмотрим уравнение на  $G(t)$

$$(\partial_t + \gamma)G(t) = \delta(t), \quad (2)$$

с учетом принципа причинности  $g(t < 0) = 0$ .

При  $t > 0$   $\delta(t) = 0$ , так что

$$\partial_t G(t) = -\gamma G(t), \quad \Rightarrow \quad G(t) = A \exp(-\gamma t).$$

Проинтегрируем уравнение (2) от  $-\varepsilon$  до  $\varepsilon$ :

$$G(\varepsilon) - \cancel{G(-\varepsilon)} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \gamma G(t) dt = \int \delta(t) dt = 1, \quad \Rightarrow \quad G(\varepsilon) = 1, \quad \Rightarrow \quad A = 1.$$

Таким образом, искомая функция Грина  $G(t)$ :

$$G(t) = \theta(t) \cdot \exp(-\gamma t),$$

где  $\theta(t)$  обеспечивает  $G(t) = 0$  при  $t < 0$ .

### №2

Рассмотрим уравнение, вида

$$(\partial_t^2 + \omega^2)\varphi(t) = g(t), \quad g(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [0, \tau]; \\ -\frac{v}{\tau l}, & t \in [0, \tau], \end{cases}$$

с нулевым начальным условием  $\varphi(t < 0) = 0$ . Функция Грина  $G(t)$  для оператора  $(\partial_t^2 + \omega^2)$  равна<sup>1</sup>

$$G(t) = \theta(t) \frac{1}{\omega} \sin(\omega t), \quad (3)$$

Далее найдём вид  $\varphi(t)$  при  $t < \tau$  (красная линия рис. 1):

$$\varphi(t < \tau) = \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^t \sin \omega(t-s) g(s) dt = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t-s) \frac{v}{2l} d(t-s) = \frac{v}{l\tau \omega^2} (\cos \omega t - 1).$$

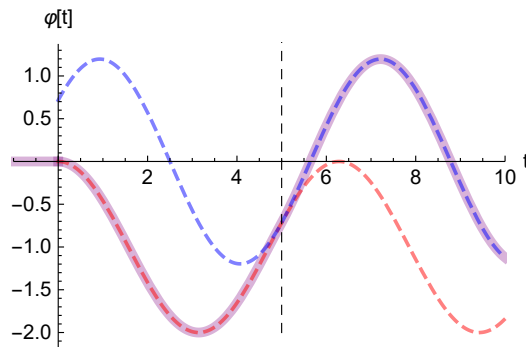


Рис. 1: Сшивка решений в I.2

Теперь решим<sup>2</sup> задачу Коши с начальным условием при  $t = \tau$ , введя переменную  $T = t - \tau$ :

$$\varphi(T) = \varphi(t - \tau) = \dot{\varphi}(\tau)G(t - \tau) + \varphi(\tau)\dot{G}(t - \tau) + 0 = \frac{v}{l\tau \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega(t - \tau)).$$

получая синюю кривую на рис. 1.

<sup>1</sup>Конспект, уравнение (1.11).

<sup>2</sup>Конспект, уравнение (1.12).

Итого, решение уравнения (1) (фиолетовая кривая, рис 1):

$$\varphi(t) = \frac{v}{l\tau} \frac{1}{\omega^2} \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \cos \omega t - 1, & t \in [0, \tau]; \\ \cos \omega t - \cos \omega(t - \tau), & t > \tau. \end{cases}$$

### №3

I. Найдём значение интеграла, вида

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx.$$

Заметим, что уравнение  $z^2 + a^2 = 0$  имеет корни в  $z_{1,2} = a^{\pm i\pi/2}$ , тогда

$$I_1 = 2\pi i \cdot \text{res}_{z_1} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_1} \cdot \left( \frac{1}{(z - z_2)^2} \right)' = -4\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow z_1} \left( \frac{1}{(z - z_2)^3} \right) = -4\pi i \frac{1}{(2ia)^3} = \frac{\pi}{2a^3}.$$

II. Теперь найдём значение интеграла, вида

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipx}}{x^2 + a^2} dx \stackrel{p \geq 0}{=} 2\pi i \cdot \text{res}_{ia} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-ap}}{2ai} = \frac{\pi}{a} e^{-ap},$$

где мы считали  $p > 0$ . В случае  $p < 0$ :

$$I_2 \stackrel{p < 0}{=} -2\pi i \cdot \text{res}_{-ia} f(z) = -2\pi i \cdot \frac{e^{ap}}{-2ai} = \frac{\pi}{a} e^{ap}, \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{\pi}{a} e^{-a|p|}.$$

## 2 Неделя II

### №1 (1.1.4)

Найдём функцию Грина  $G(t)$  уравнения

$$L(\partial_t)x(t) = \varphi(t), \quad L(\partial_t) = \partial_t^4 + 4\nu^2 \partial_t^2 + 3\nu^4.$$

Функция Грина может быть найдена, как решение уравнения

$$L(\partial_t)G(t) = \delta(t), \quad \Rightarrow \quad G(t) = \theta(t) \cdot (b_1 e^{-\nu t} + b_2 e^{i\nu t} + b_3 e^{-i\sqrt{3}\nu t} + b_4 e^{i\sqrt{3}\nu t}),$$

где воспользовались разложением

$$L(z) = (z + i\nu)(z - i\nu)(z - i\sqrt{3}\nu)(z + i\sqrt{3}\nu).$$

Интегрируя от  $-\varepsilon$  до  $+\varepsilon$  уравнение на  $G(t)$  находим, что

$$\partial_t^3 G(+0) = 1, \quad \partial_t^2 G(+0) = \partial_t^1 G(+0) = G(+0) = 0,$$

откуда получаем СЛУ на  $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ :

$$\left. \begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 + b_4 &= 0, \\ b_1 - b_2 + \sqrt{3}(b_3 - b_4) &= 0, \\ b_1 + b_2 + 3(b_3 + b_4) &= 0, \\ b_1 - b_2 + 3\sqrt{3}(b_3 - b_4) &= -\frac{i}{\nu^3}, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad b_1 = \frac{i}{4\nu^3}, \quad b_2 = -\frac{i}{4\nu^3}, \quad b_3 = -\frac{i}{4\sqrt{3}\nu^3}, \quad b_4 = \frac{i}{4\sqrt{3}\nu^3}.$$

Так получаем решение, вида

$$G(t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{3}\nu^3} \left( \sqrt{3} \sin(\nu t) - \sin(\sqrt{3}\nu t) \right).$$

### №2 (1.1.5)

Найдём функцию Грина для уравнения, вида

$$(\partial_t^2 + \nu^2)^2 x(t) = \varphi(t).$$

Аналогично предыдущему номеру, сначала находим  $G(t > 0)$ :

$$G(t > 0) = b_1 e^{i\nu t} + b_2 t e^{i\nu} + b_3 e^{-i\nu t} + b_4 t e^{-i\nu t},$$

где секулярные члены возникли из-за кратности корней.

Также, интегрируя уравнение на  $G(t)$  от  $-\varepsilon$  до  $\varepsilon$ , получаем аналогичное условие

$$\partial_t^3 G(+0) = 1, \quad \partial_t^2 G(+0) = \partial_t^1 G(+0) = G(+0) = 0,$$

и приходим к СЛУ на коэффициенты  $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ :

$$\left. \begin{aligned} b_1 + b_3 &= 0, \\ i(b_1 - b_3)\nu + b_2 + b_4 &= 0, \\ \nu((b_1 + b_3)\nu - 2i(b_2 - b_4)) &= 0, \\ \nu^2(-3(b_2 + b_4) - i(b_1 - b_3)\nu) &= 1, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad b_1 = -\frac{i}{4\nu^3}, \quad b_2 = -\frac{1}{4\nu^2}, \quad b_3 = \frac{i}{4\nu^3}, \quad b_4 = -\frac{1}{4\nu^2}.$$

Получаем решение, вида

$$G(t) = \frac{\theta(t)}{2\nu^3} \left( \sin(\nu t) - \nu t \cos(\nu t) \right).$$

### №3 (1.1.8)

Для системы уравнений, вида

$$(\partial_t + \hat{\Gamma})\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\xi}(t), \quad \Gamma = \lambda\delta_{i,j} + \delta_{i,j-1},$$

найдём функцию Грина  $G(t)$ , как решение уравнения

$$(\partial_t + \hat{\Gamma})G(t) = \delta(t)\mathbb{E}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \theta(t) \exp(-\hat{\Gamma}t).$$

Осталось найти  $\exp(-\hat{\Gamma}t)$ , как матричную экспоненту, от жордановой клетки.

Для начала заметим, что

$$\delta_{i,j-1}^2 = \delta_{i,j-1}\delta_{j,k} = \delta_{i+1,k-1} = \delta_{i,k-2},$$

и так далее, то есть  $\delta_{i,j-1}$  – нильпотентный оператор, с  $\delta_{i,j-1}^4 = 0$ .

Посмотрим на степени  $\hat{\Gamma}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^2 &= \delta_{i,j} + 2\delta_{i,j-1} + \delta_{i,j-2} \\ \hat{\Gamma}^3 &= \delta_{i,j} + 3\delta_{i,j-1} + 3\delta_{i,j-2} + \delta_{i,j-3} \\ \hat{\Gamma}^4 &= \delta_{i,j} + 4\delta_{i,j-1} + 6\delta_{i,j-2} + 4\delta_{i,j-3} + \delta_{i,j-4}, \end{aligned}$$

но  $\delta_{i,j-4} = 0$ , так что можем явно выделить на побочных диагоналях соответствующие экспоненты:

$$G(t) = \theta(t)e^{-\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{t^2}{2} & -\frac{t^3}{6} \\ 0 & 1 & -t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где появившиеся  $t^k$  – секулярные члены.

### №4

В частотном представлении для оператора  $\partial_t^2 + \omega_0^2$  можем «найти» функцию Грина, приводящую к

$$G(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{d\omega}{2\pi},$$

с особенностями на вещественной оси.

Регуляризуем интеграл, рассмотрением «затухающего» осциллятора, тогда

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{-i\omega t}}{(\omega_0 - \omega + i\varepsilon_1)(\omega_0 + \omega + i\varepsilon_2)}}_{F(\omega)} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Получилось два полюса:

$$\omega_1 = \omega_0 + i\varepsilon_1, \quad \omega_2 = -\omega_0 - i\varepsilon_2.$$

Соответственно, по лемме Жордана, наличие/отсутствие вклада от  $\varepsilon_{1,2}$  будет зависеть от выбора знаков в  $\varepsilon_{1,2} \rightarrow \pm 0$ .

Для начала найдём вычеты по каждому полюсу:

$$2\pi i \cdot \operatorname{res}_{\omega_1} F(\omega) = i\varepsilon e^{i\varphi} F(\omega_1) = -i\varepsilon e^{i\varphi} \frac{e^{it\omega_0}}{2\omega_0 + i(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon e^{i\varphi}} \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx} -\frac{i}{2\omega_0} e^{-it\omega_0}.$$

Аналогично, для второго полюса:

$$2\pi i \cdot \operatorname{res}_{\omega_2} F(\omega) = \dots = \frac{i}{2\omega_0} e^{it\omega_0}.$$

Сразу заметим, что при вхождение только одного вычета невозможно выполнение условия о  $G(0) = 0$ , тогда рассмотрим  $\varepsilon_1 \rightarrow +0$  и  $\varepsilon_2 \rightarrow -0$ , тогда оба полюса находятся в верхней полуплоскости, по которой и происходит обход по часовой стрелке:

$$G(t) = \theta(-t) \frac{1}{\omega_0} \sin(-\omega_0 t),$$

что соответствует опережающей функции Грина ( $\partial_t G(t=0) = -1$ ).

Теперь найдём, что при  $\varepsilon_1 \rightarrow -0$  и  $\varepsilon_2 \rightarrow +0$  оба вычета в нижней полуплоскости, что приведет к смене знака:

$$G(t) = \theta(t) \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t),$$

что и соответствует запаздывающей функции Грина (см. ур. (3),  $\partial_t G(t=0) = 1$ ), что не может не радовать.

**Правка.** При других  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  получаются и не причинные и не опережающие функции Грина:

$$\varepsilon_1 \rightarrow +0, \varepsilon_2 \rightarrow +0, \quad \Rightarrow \quad G(t) = -\frac{e^{i\omega t}}{2i\omega_0} (\theta(t) - \theta(-t)),$$

и аналогично для другой стороны:

$$\varepsilon_1 \rightarrow -0, \varepsilon_2 \rightarrow -0, \quad \Rightarrow \quad G(t) = -\frac{e^{-i\omega t}}{2i\omega_0} (\theta(-t) - \theta(t)).$$

### 3 Неделя III

#### №1 (1.3.4)

Найдём решение уравнения

$$\int_0^t K(t-s)f(s) ds = \varphi(t), \quad K(t) = t, \quad \varphi(t) = \sin(t).$$

Решение может быть найдено, как

$$\tilde{f}(p) = \frac{\tilde{\varphi}(p)}{\tilde{K}(p)}, \quad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{f}(p).$$

Для начала найдём, что

$$\tilde{\varphi}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} dt = \frac{-1}{2i} \left( \frac{1}{i-p} + \frac{1}{i+p} \right) = \frac{1}{1+p^2}.$$

А также изображение для возмущения

$$\tilde{K}(p) = - \left( \int_0^\infty \exp(-pt) \right)'_p = \left( \frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^\infty \right)'_p = \frac{1}{p^2}.$$

Заметим, что  $\lim_{p \rightarrow \infty} \tilde{f}(p) = 1$ , тогда

$$f(t) = \delta(t) + \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \left( \frac{p^2}{1+p^2} - 1 \right) = \delta(t) - \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \left( \frac{1}{1+p^2} \right) = \delta(t) - \sin(t),$$

где воспользовались уже известным значением изображения синуса.

Для галочки можем посчитать оригинал напрямую. Тогда заметим, что полюса находятся в  $p = \pm i$ , соответственно возьмём  $c = 1$  и сделаем замену  $p = 1 + i\omega$ , тогда придём к интегралу

$$-e^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i\omega t}}{[\omega - (1+i)][\omega - (-1+i)]} = -e^t \left( \frac{1}{2} i e^{(-1-i)t} - \frac{1}{2} i e^{(-1+i)t} \right) = \sin(t),$$

в общем, всё сходится.

#### №2 (1.4.2)

Найдём функцию Грина

$$G(t, s) = \theta(t-s) \exp \left( - \int_s^t \gamma(\tau) d\tau \right),$$

для  $\gamma(t) = a/t$ , где  $a = \text{const}$ . Нетрудно найти, что

$$G(t, s) = \theta(t - s) \exp\left(-a \ln \frac{t}{s}\right) = \theta(t - s) \left(\frac{s}{t}\right)^a.$$

### №3 (1.5.1)

**Общее замечание.** Ограничимся здесь проверкой свойств  $\delta$ -функции (обобщенной функции/функционала), а именно локализованность ( $\delta(t) = 0 \ \forall t \neq 0$ ) и нормировку:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) = 1$ .

**I.** Докажем, что

$$\frac{\pi}{2} \delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{t^2 \varepsilon}{(t^2 + \varepsilon^2)^2}.$$

Для начала проверим нормировку, полюса второй степени находятся в точках  $\pm i\varepsilon$ , замыкая дугу сверху, находим:

$$\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} = 2\pi i \varepsilon \cdot \lim_{t \rightarrow i\varepsilon} \left( \frac{d}{dt} \frac{t^2}{(t + i\varepsilon)^2} \right) = 2\pi i \varepsilon \cdot \lim_{t \rightarrow i\varepsilon} \frac{2it\varepsilon}{(t + i\varepsilon)^3} = 2\pi i \varepsilon \cdot \frac{1}{4i\varepsilon} = \frac{\pi}{2},$$

что доказывает нормировку  $\delta$ -последовательности на единицу.

Теперь покажем локализованность:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{t^2 \varepsilon}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} \stackrel{t \neq 0}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} t^2 \varepsilon = 0, \quad \forall t \neq 0.$$

**II.** Аналогично, докажем, что

$$\sqrt{\pi} \delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(-\frac{t^2}{\varepsilon}\right).$$

Можно заметить, что нормировка выполняется, так как гауссов интеграл равен  $\sqrt{\pi}$ , осталось показать локализованность:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(-\frac{t^2}{\varepsilon}\right) \stackrel{t \neq 0}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{t^2 + \frac{1}{2}\varepsilon \ln \varepsilon}{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{t^2}{\varepsilon}\right) = 0, \quad \forall t \neq 0.$$

**III.** Наконец, покажем, что

$$\pi \delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(nt)}{nt^2}.$$

Начнём с нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(nt) - 1}{n} d\frac{1}{t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{t} dt = \pi,$$

как разность пределов на  $\pm\infty$  интегрального синуса.

Проверяем локализованность:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(nt)}{nt^2} \leq \left| 1 - \cos(nt) \right| \leq 2 \left| \right| \leq \frac{2}{\pi nt^2} = 0, \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(nt)}{nt^2} = 0.$$

### №4 (1.5.8)

Найдём обратное преобразование Лапласа некоторых функций.

**I.** Первое изображение:

$$\tilde{f}(p) = \frac{\nu}{p^2 + \nu^2}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{f}(p) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \frac{\nu}{p^2 + \nu^2},$$

что выбором  $c = 1$ , заменой  $p = \nu(i\omega + 1)$ , сводится к уже рассмотренному интегралу (w3, №1), тогда

$$\mathcal{L}^{-1}(t) \left[ \frac{\nu}{p^2 + \nu^2} \right] = \sin(\nu t).$$

**II.** Второе изображение:

$$\tilde{f}(p) = \frac{p}{p^2 + \nu^2}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \frac{p}{p^2 + \nu^2}.$$

Аналогично выбираем  $c = 1$ , делаем замену  $p = \nu(i\omega + 1)$ , так приходим к интегралу, вида

$$f(t) = -e^{\nu t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \exp(i\nu\omega t) \frac{1 + i\omega}{[\omega - (1 + i)][\omega - (-1 + i)]}$$

с полюсами в  $\omega = i \pm 1$ . Тогда, находим, что

$$\operatorname{res}_{\omega=i+1} f(t) = \frac{i}{4\pi} e^{(i-1)\nu t}, \quad \operatorname{res}_{\omega=i-1} f(t) = \frac{i}{4\pi} e^{(-i-1)\nu t}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = 2\pi i \sum_{\pm} \operatorname{res}_{i \pm 1} f(t) = \cos(\nu t).$$

III. Третье изображение:

$$\tilde{f}(p) = \frac{\nu}{p^2 - \nu^2}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \frac{\nu}{p^2 - \nu^2}.$$

Делая замену  $p = i\nu\omega$ , и выбирая  $c = 0$  находим,

$$f(t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\nu\omega t} \frac{-1}{(\omega - i)(\omega + i)},$$

а тогда

$$\operatorname{res}_{\omega=-i} f(t) = \frac{e^{\nu t}}{4\pi i}, \quad \operatorname{res}_{\omega=i} f(t) = -\frac{e^{\nu(-t)}}{4\pi i}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = 2\pi i \sum_{\pm} \operatorname{res}_{\pm i} f(t) = \operatorname{sh}(\nu t).$$

IV. Четвертое изображение:

$$\tilde{f}(p) = \frac{p}{p^2 - \nu^2}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \frac{p}{p^2 - \nu^2}.$$

Делая замену  $p = i\nu\omega$ , и выбирая  $c = 0$  находим,

$$f(t) = - \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\nu\omega t} \frac{i\omega}{(\omega - i)(\omega + i)},$$

а тогда

$$\operatorname{res}_{\omega=i} f(t) = \frac{e^{\nu t}}{4\pi i}, \quad \operatorname{res}_{\omega=-i} f(t) = \frac{e^{\nu(-t)}}{4\pi i}, \quad \Rightarrow \quad f(t) = 2\pi i \sum_{\pm} \operatorname{res}_{\pm i} f(t) = \operatorname{ch}(\nu t).$$

V. Пятое изображение (оставлено на следующую неделю):

$$\mathcal{L}^{-1}(t) \left[ \frac{1}{\sqrt{p + \alpha}} \right] = \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}}.$$

## №5

Рассмотрим маятник, совершающий маленькие колебания под действием вынуждающей силы  $f(t) = F e^{-t^2/\tau^2}$ :

$$(\partial_t^2 + \omega^2) \varphi(t) = f(t),$$

где мы знаем, что при  $t \rightarrow -\infty$ :

$$\varphi(t) = A_- \sin(\omega t + \theta_-).$$

Функция Грина, как известно,

$$G(t) = \theta(t) \frac{1}{\omega} \sin(\omega t).$$

Тогда, после возмущения, при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\varphi(t) = A_- \sin(\omega t + \theta_-) + \int_{T_-}^{T_+} \frac{F}{\omega} \sin[\omega(t-s)] \exp\left(-\frac{s^2}{\tau^2}\right) ds,$$

где  $\omega T_- \ll 1$  и  $\omega T_+ \gg 1$ , так что экспонента там ноль. Раскрывая и группируя, находим

$$\varphi(t) - A_- \sin(\omega t + \theta_-) = \sin(\omega t) \int_{T_-}^{T_+} \frac{F}{\omega} \cos(\omega s) \exp\left(-\frac{s^2}{\tau^2}\right) ds,$$

где интеграл по  $\sin \omega s$  опустили, так как интеграл о произведения четной и нечетной функции ноль. Далее,

$$\int \cos(\omega s) \exp\left(-\frac{s^2}{\tau^2}\right) ds = \frac{1}{2} \int \exp\left(-\frac{1}{4}\tau^2\omega^2 - \frac{(s + \frac{1}{2}i\tau^2\omega)^2}{\tau^2}\right) ds + \frac{1}{2} \int \exp\left(-\frac{1}{4}\tau^2\omega^2 - \frac{(s - \frac{1}{2}i\tau^2\omega)^2}{\tau^2}\right) ds,$$

раскрывая два гауссовых интеграла, находим

$$\int \cos(\omega s) \exp\left(-\frac{s^2}{\tau^2}\right) ds = \frac{1}{\omega} \sqrt{\pi} F \tau e^{-\frac{1}{4}\tau^2\omega^2}.$$

Тогда, искомое поведение при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\varphi(t) = A_- \sin(\omega t + \theta_-) + \frac{1}{\omega} \sqrt{\pi} F \tau e^{-\frac{1}{4}\tau^2\omega^2} \sin(\omega t),$$

что осталось засунуть в один синус.



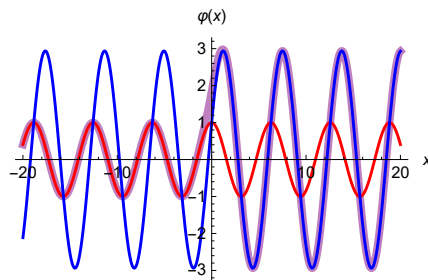


Рис. 2: Изменение амплитуды и фазы синуса в w3, №5

На 2 явно видно, как невозмущенный синус (красная линия) переходит в возмущенный синус (синяя линия), в итоге и получается наше решение (фиолетовая линия).

## 4 Неделя IV

### №1

Рассмотрим сумму, вида

$$S(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}.$$

Будем считать, что в  $n \in \mathbb{Z}$ , у некоторой функции  $g(z)$  случается полюс первого порядка, например у функции:

$$g(z) = \pi \operatorname{ctg}(\pi z), \quad \operatorname{res}_n g(z) = 1.$$

Тогда сумму  $S(a)$  можно переписать через произведение  $f(z)g(z)$ , где

$$f(z) = \frac{1}{n^2 + a^2},$$

тогда

$$S(a) = \int \frac{dz}{2\pi i} \frac{\pi}{z^2 + a^2} \operatorname{ctg}(\pi z) = \left/ \operatorname{res}_{\pm ia} \right/ = \frac{\pi}{a} \operatorname{cth}(a\pi),$$

где воспользовались равенством  $\operatorname{ctg} ix = -i \operatorname{cth} x$ .

### №2

Теперь рассмотрим сумму, вида

$$G(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{\varkappa^2 - n^2}, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Аналогично №1, представим  $G(x)$  в виде интеграла:

$$G(x) = \int \frac{dz}{2\pi i} \frac{\pi e^{inx}}{\varkappa^2 - z^2} (\operatorname{ctg}(\pi z) + \tilde{g}),$$

где регулярную  $\tilde{g}$  выберем так, чтобы независимо от направления дуги в больших полуокружностях  $e^{nx}g(z) \sim \operatorname{const}$ , достаточно рассмотреть пределы и сдвинуть на них  $\operatorname{ctg} z$ :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{cth}(-iz) = i, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{cth}(iz) = -i, \quad \Rightarrow \quad \tilde{g}(x) = -i \operatorname{sign} x.$$

Тогда  $G(x)$  можем найти, как

$$G(x) = \int \frac{dz}{2\pi i} \frac{\pi e^{inx}}{\varkappa^2 - z^2} (\operatorname{ctg}(\pi z) - i \operatorname{sign} x),$$

где такой интеграл будет равен сумме интегралов по полуокружностям (особенностей нет,  $\equiv 0$ ), минус вычеты в точках  $\pm k$ :

$$G(x) = \frac{\pi}{\varkappa} \left( \operatorname{ctg} \pi \varkappa \cos \varkappa x + \operatorname{sign} x \sin \varkappa x \right)$$

**№3 (2.1.3)**

Найдём решение задачи

$$\hat{L}f = \varphi(x), \quad \hat{L} = \partial_x^2 + \varkappa^2, \quad \varphi(x) = \text{sign } x,$$

на классе периодических фнкций на интервале  $(-\pi, \pi)$ .

**Функция Грина.** Повторю выкладку с семинара, а именно найдём функцию Грина, оператора  $\hat{L}$  с периодическими граничными условиями на  $[-\pi, \pi]$ .

При  $x < y$ :

$$G(x, y) = A_1(y) \sin \varkappa(x + \pi) + B_1(y) \cos \varkappa(x + \pi),$$

и аналогично для  $x > y$ :

$$G(x, y) = A_2 \sin \varkappa(x - \pi) + B_2(y) \cos \varkappa(x - \pi).$$

Запишем граничные условия:

$$\begin{aligned} G(-\pi, y) = G(\pi, y), & \Rightarrow B_1(y) = B_2(y) \stackrel{\text{def}}{=} B(y) \\ G'_x(-\pi, y) = G'_x(\pi, y), & \Rightarrow A_1(y) = A_2(y) \stackrel{\text{def}}{=} A(y). \end{aligned}$$

Тогда нашли, что

$$G(x, y) = \begin{cases} A \sin \varkappa(x + \pi) + B \cos \varkappa(x + \pi) \\ A \sin \varkappa(x - \pi) + B \cos \varkappa(x - \pi) \end{cases}$$

Теперь запишем непрерывность:

$$A \sin \varkappa(x + \pi) + B \cos \varkappa(x + \pi) = A \sin \varkappa(x - \pi) + B \cos \varkappa(x - \pi).$$

А также скачок производной

$$G'_x(y + 0, y) - G'_x(y - 0, y) = 1, \Rightarrow A \cos \varkappa(x - \pi) - B \sin \varkappa(x - \pi) - A \cos \varkappa(x + \pi) + B \cos \varkappa(x + \pi) = \varkappa^{-1}.$$

Решая эту систему находим, что

$$2 \sin \pi \varkappa \begin{pmatrix} \cos \varkappa y & -\sin \varkappa y \\ \sin \varkappa y & \cos \varkappa y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\varkappa \end{pmatrix}, \Rightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \sin \pi \varkappa} \begin{pmatrix} \cos \varkappa y & \sin \varkappa y \\ \sin \varkappa y & \cos \varkappa y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\varkappa \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \varkappa \sin \pi \varkappa} \begin{pmatrix} \sin \varkappa y \\ \cos \varkappa y \end{pmatrix}.$$

Подставляя в  $G(x, y)$ , находим

$$G(x, y) = \frac{1}{2 \varkappa \sin \pi \varkappa} \begin{cases} \cos(\varkappa(x - y) + \varkappa \pi), & x < y, \\ \cos(\varkappa(x - y) - \varkappa \pi), & x > y. \end{cases} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} G_1(x - y), & x < y, \\ G_2(x - y), & x > y. \end{cases}$$

**Решение с возмущением.** Подставим теперь возмущение, вида

$$\varphi(x) = \text{sign } x, \Rightarrow f(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} G(x, y) \varphi(y) dy,$$

а дальше разделим задачу на две части  $x < 0$  и  $x > 0$ :

$$x < 0: \quad f(x) = \int_{-\pi}^x (-G_2) dy + \int_x^0 (-G_1) dy + \int_0^\pi G_1 dy,$$

$$x > 0: \quad f(x) = \int_{-\pi}^0 (-G_2) dy + \int_0^x G_2 dy + \int_x^\pi G_1 dy.$$

Осталось посчитать шесть интегралов, так находим:

$$f(x) = \frac{1}{\varkappa^2} \left( 1 - \frac{\sin \varkappa(\pi - |x|)}{\sin \pi \varkappa} \right) \text{sign } x - \frac{\sin \varkappa x}{\varkappa^2 \sin \pi \varkappa}.$$

**№4 (2.1.6)**

Найдём поведение решения уравнения Бесселя

$$\hat{L}f(x) = 0, \quad \hat{L} = \partial_x^2 + Q(x)\partial_x - U(x), \quad Q(x) = \frac{1}{x}, \quad U(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x^2}.$$

Перейдём к уравнению, вида

$$x^2 \partial_x^2 u + x \partial_x u + x^2 u - \nu^2 u = 0.$$

Вблизи  $x = 0$ , приведенное уравнение имеет степенные решения  $f \sim x^\alpha$ , где

$$x^2 \alpha(\alpha - 1) x^{\alpha-2} + x \alpha x^{\alpha-1} - \nu^2 x^\alpha = 0, \Rightarrow \alpha = \pm \nu,$$

откуда находим  $f \sim x^\nu$  – регулярное решение и  $f \sim 1/x^\nu$  – нерегулярное решение.

При  $\nu = 0$ , регулярное решение вырождается в  $f \sim \text{const}$  вблизи  $x = 0$ , а асимптотику нерегулярного найдём из:

$$x^2 u'' + x u' + x^2 u = 0, \quad \Rightarrow \quad x u'' + u' + x u = 0,$$

решение которого можно попробовать найти в виде  $c \ln x$ :

$$-\frac{c}{x} + \frac{c}{x} + x c \log x = 0,$$

ну, похоже на  $\ln x$ . Надо бы показать, что  $c = 2/\pi$ , но кроме как численно пока не придумал.

## 5 Неделя V

### №1

Найдём функцию Грина оператора  $\partial_x^2(\partial_x^2 + 1)$  для функций над  $[-\pi, \pi]$ , удовлетворяющих граничным условиям.

Подстановкой  $e^{\lambda x}$ , найдём, что нулевые моды удовлетворяют уравнению

$$\lambda^2(\lambda - i)(\lambda + i) = 0, \quad \Rightarrow \quad e_{1,2,3} = \frac{1}{2\pi} \{1, e^{ix}, e^{-ix}\},$$

где  $2\pi$  – нормировка.

Тогда функция Грина удовлетворяет уравнению, вида

$$\hat{L}G(x) = \delta(x) - \frac{1 + 2 \cos x}{2\pi}.$$

При  $x > 0$  общее решение может быть найдено в виде

$$G^{\text{gen}}(x) = -c_1 \cos x - c_2 \sin x + c_3 + xc_4.$$

Частное решение:

$$G^{\text{part}}(x) = -\frac{x^2}{4\pi} + \frac{4 \cos x}{2\pi} + \frac{x \sin x}{2\pi}.$$

Вклад от  $\delta(x)$  можно записать, как

$$G^\delta(x) = \theta[x](x - \sin x).$$

Осталось подставить граничные условия, откуда находим:

$$G(\pi) = G(-\pi), \quad \Rightarrow \quad 1 + 2c_4 = 0.$$

Остальные граничные условия на  $G'$ ,  $G''$ ,  $G'''$  выполняются автоматически.

Однако по постановке задачи  $G(x)$  не содержит  $e_{1,2,3}$ , а значит

$$\begin{cases} \langle e_1 | G(x) \rangle = 0, & \pi(\pi + 6c_3) = 3 \\ \langle e_2 | G(x) \rangle = 0, & \Rightarrow \quad \pi(2i + 4c_1 + 4ic_2) = 1, \\ \langle e_3 | G(x) \rangle = 0, & 4\pi c_1 - 2i\pi - 4i\pi c_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1/4\pi, \\ c_2 = -1/2, \\ c_3 = (3 - \pi^2)/6\pi. \end{cases}$$

Таким образом, искомая функция Грина:

$$G(x) = (\theta[x] - \frac{1}{2})(x - \sin x) - \frac{x^2}{4\pi} + \frac{5 \cos x}{2\pi} + \frac{x \sin x}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} - \frac{\pi}{6}.$$

### №1 (пример)

Рассмотрим, например, возмущение, вида

$$\varphi(x) = \text{sign}(x) \cos(x).$$

Стоит заметить, что  $\varphi(x)$  не содержит в себе нулевых мод, так что задача корректна и имеет решение. Уже зная  $G(x)$  для  $\hat{L}$ , нетрудно найти решение:

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} G(x-y)\varphi(y) dy = -\theta(x)(x \sin(x) + 2 \cos(x) - 2) + \frac{(2x + \pi)(\pi \sin(x) - 4)}{4\pi} + \cos(x).$$

Посмотрим на вид  $G(x)$ ,  $f(x)$  и также для наглядности построим все слагаемые  $f(x)$ , а то как-то больно хорошо  $f(x)$  выглядит.

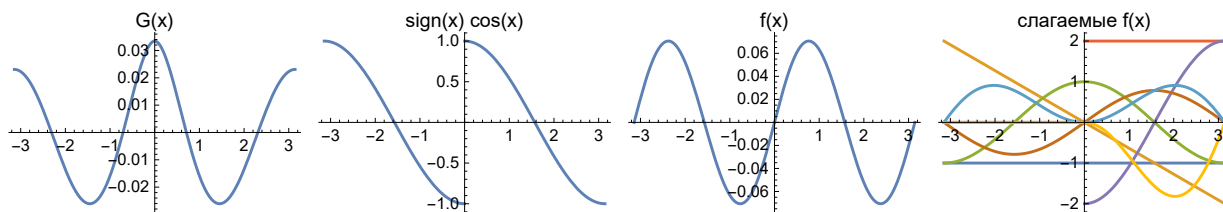


Рис. 3: Вид функций в w5, №1.

**№2 (2.2.3)**

Переѐдем в сферические координаты для интеграла, вида

$$f(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}') dV', \quad G(\mathbf{r}) \equiv G(r) = -\frac{1}{4\pi r}, \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{r}) = - \int dV' \frac{\phi(\mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Считая, что  $\phi(\mathbf{r}) \equiv \phi(r)$ , находим:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{r} \int_0^r \phi(r') r'^2 dr' + \int_r^\infty \phi(r') r' dr'.$$

**№3 (2.2.10)**

Найдѐм решение уравнения Лапласа  $f$  в полуплоскости  $y > 0$ , для  $f(x, 0) = e^{ix}$ . Искомая функция может быть найдена, как

$$f(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{y/\pi}{(x - \xi)^2 + y^2} e^{i\xi} d\xi.$$

У подынтегральной функции всего две особенности:  $\xi = x \pm iy$  – полюса первого порядка. По лемме Жордана, замыкая функцию сверху, интегрируя против часовой стрелки, находим значение интеграла через вычет в точке  $x + iy$ :

$$f(x, y) = 2\pi i \frac{y}{p} \lim_{\xi \rightarrow x+iy} \frac{(\xi - x - iy)}{(x - \xi)^2 + y^2} e^{i\xi} = e^{ix-y},$$

таким образом нашли голоморфную функцию, удовлетворяющую граничному условию.

**№4 (2.3.2)**

Найдѐм радиальную функцию  $R$  связанного состояния атома водорода, соответствующего  $n = 2$  и  $l = 1$ .

Вообще, волновая функция для атома водорода будет иметь вид

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n \cdot (n+l)!}} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{r}{n}\right) \cdot \left(\frac{2r}{n}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{n}\right) \cdot Y_{l,m}(\theta, \varphi),$$

где  $L$  – полиномы Лагерра. Так что ожидаем найти, что  $R \sim r \cdot e^{-r/2}$ .

Образ функции  $\Phi = R \cdot r^{l+1}$ , может быть записан, как

$$\tilde{\Phi}(p) \sim \frac{(p - 1/n)^{n-l-1}}{(p + 1/n)^{n+l+1}} = \frac{1}{(p + \frac{1}{2})^4}.$$

Делая замену  $p = i\nu$ , переходим к интегралу

$$\Phi(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu t} \frac{1}{(i\nu + \frac{1}{2})^4} \frac{d\nu}{2\pi},$$

с полюсом 4 порядка в  $\nu = i/2$ . Тогда, считая вычет в этой точке, находим

$$\Phi(r) = i \lim_{\nu \rightarrow i/2} \frac{d^4}{dx^4} \left( \nu - \frac{1}{2}i \right)^4 \frac{e^{i\nu r}}{(i\nu - \frac{1}{2})^4} = r^3 e^{-r/2}, \quad \Rightarrow \quad R = r \cdot e^{-r/2},$$

как и ожидалось. Если бы нам хотелось иметь нормированную  $R(r)$ , то

$$\int_0^\infty r e^{-r/2} dr = 2 \int_0^\infty e^{-r/2} dr = 4, \quad \Rightarrow \quad R^{\text{norm}} = \frac{r}{4} e^{-r/2}.$$