Заметки семинаров по курсу «Уравнения математической физики»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *6 декабря 2021 г.*

Содержание

1 Семинар от 25.09.21 (Фурье и Лаплас)

Про Фурье. Как раньше нашли

$$L(\partial_t)G(t) = \delta(t), \quad \Rightarrow \quad \hat{x}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} x(t)\, dt, \quad x(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} \hat{x}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Для этого должно выполняться

$$\int |x(t)|\, dd < +\infty.$$

Например, для $\partial_t + \gamma$:

$$(\partial_t + \gamma)G(t) = \delta(t), \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\ldots} e^{-i\omega t}\, dt = x(t)e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}, \quad \Rightarrow \quad (i\omega + \gamma)\hat{G}(\omega) = 1, \quad \Rightarrow \quad \hat{G}(\omega) = \frac{1}{i\omega + \gamma}.$$

Так приходим к уравнению

$$G(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\gamma} \frac{d\omega}{2\pi} = \left\{ e^{-\gamma t}, \quad t > 00, \quad t < 0 \right. \quad \Rightarrow \quad \hat{G}(\omega) = \theta(t)e^{-|t|}.$$

Однако, при $\hat{L} = \partial_t - \gamma$ мы бы получили

$$G_A(t) = \theta(-t)e^{\gamma t},$$

хотя вообще должно быть (если посчитать через неопределенные коэффициенты)

$$G_R(t) = \theta(t)e^{\gamma t},$$

которая растёт.

В методе с Фурье будут получаться функции Грина затухающие, но, возможно, без причинности. В методе неопределенных коэффициентов исходим из причинности, но может быть рост $\sim e^{\gamma t}$.

Кроме того, в Фурье всегда предполагается $x(t \to -\infty) = 0$ и $x(t \to +\infty) = 0$. Также может случиться

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2)G(t) = \delta(t), \quad \Rightarrow \quad \hat{G}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2},$$

с особенностями на вещественной оси, что можно решить, сместив полюса в $\mathbb{C}$.

Свёртка. Рассмотрим уравнение

$$L(\partial_t)x(t) = f(t), \quad L(\partial_t)G(t) = \delta(t).$$

Фурье переводит

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_x^n x(t)e^{-i\omega t}\, dt = (i\omega)^n \hat{x}(\omega).$$

Тогда

$$L(i\omega)\hat{x}(\omega) = \hat{f}(\omega), \quad L(i\omega)\hat{G}(\omega) = 1, \quad \Rightarrow \quad \hat{G}(\omega) = \frac{1}{L(i\omega)}.$$

Также нашли, что

$$\hat{x}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{L(i\omega)} = \hat{f}(\omega)\hat{G}(\omega), \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)f(s)\, ds.$$

Преобразование Лапласа. Пусть есть некоторое преобразование

$$\tilde{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt,$$

где подразумевается, что $\mathrm{Re}\, p \geqslant 0$ и, вообще, в Фурье можно $p \in \mathbb{C}$.

Пусть $p = i\omega$, где $\omega \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\tilde{f}(i\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} f(t)\, dt = \hat{f}(\omega), \quad \Rightarrow \quad f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(i\omega)e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} \tilde{f}(p) \frac{dp}{2\pi}.$$

В вычислениях выше мы предполагали, что $f(t \to \infty) = 0$.

Обойдём это, пусть $|f(t)| < Me^{st}$, при $s > 0$. Возьмём $p_0 > s$, тогда

$$\tilde{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-p_0 t} e^{-(p-p_0)t} f(t)\, dt = \tilde{g}(p - p_0),$$

где вводе $g(t) = e^{-ip_0 t} f(t)$, которая уже убывает на бесконечности. Обратно:

$$g(t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \tilde{g}(p)e^{pt} \frac{dp}{2\pi} = \int_{p_0 - i\omega}^{p_0 + i\omega} \tilde{g}(p - p_0)e^{-p_0 t}e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}.$$

Так пришли к форме обращения

$$f(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\omega} \tilde{f}(p) \frac{dp}{2\pi i}, \qquad \tilde{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-p_0 t} e^{-(p-p_0)t} f(t)\, dt = \tilde{g}(p - p_0), \tag{1}$$

где $g(t) = e^{-ip_0 t} f(t)$.

Забавный факт, из леммы Жордана: при $t < 0$ $f(t<0) = 9$, по замыканию дуги по часовой стрелке (вправо). Выбирая p_0 так, чтобы все особенности лежали левее p_0, можем получать причинные функции.

Производная. Найдём преобразование Лапласа для $\partial_t f(t)$:

$$\int_0^\infty \frac{df}{dt} e^{-pt}\, dt = f e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt = p\tilde{f}(p) - f(+0).$$

Но, для функции Грина $L(\partial_t) G(t) = \delta(t)$, тогда

$$L(\partial_t) G_\varepsilon(t) = \delta(t - \varepsilon), \qquad G_\varepsilon(t) = G(t-\varepsilon), \quad \Rightarrow \quad G_\varepsilon(0) = 0,$$

где $G_\varepsilon \to G(t)$ при $\varepsilon \to 0$.

Преобразуем[1] по Лапласу уравнения выше

$$L(p) G(p) = e^{p\varepsilon} = 1, \quad \Rightarrow \quad G_\varepsilon(p) = \frac{1}{L(p)}, \quad \overset{\varepsilon \to 0}{\Rightarrow} \quad G(p) = \frac{1}{L(p)}.$$

Так получаем

$$G(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\omega} \frac{e^{pt}}{\tilde{L}(p)} \frac{dp}{2\pi i}, \tag{2}$$

где p_0 правее всех особенностей.

Пример. Рассмотрим $L = \partial_t + \gamma$, тогда

$$(p + \gamma) G(p) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(p) = \frac{1}{p + \gamma}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{pt}}{p+\gamma} \frac{dp}{2\pi i} = \theta(t) e^{-\gamma t}.$$

Аналогично, пусть $L = \partial_t^2 + \omega^2$, тогда $LG(t) = \delta(t)$, и

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + \omega^2}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\omega} \frac{e^{pt}}{p^2 + \omega^2} \frac{dp}{2\pi i} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \ldots, & t > 0 \end{cases} = \theta(t) \left(\frac{e^{i\omega t}}{2i\omega} + \frac{e^{-i\omega t}}{-2i\omega} \right) = \theta(t) \frac{\sin \omega t}{\omega}.$$

В общем виде, пусть $L(\partial_t) G(t) = \delta(t)$, тогда

$$L(p) G(p) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(p) \frac{1}{L(p)}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\omega} \frac{e^{pt}}{L(p)} \frac{dp}{2\pi i}.$$

Поговорим про свёртку:

$$Lx = f, \quad \Rightarrow \quad L(p) x(p) = f(p), \quad L(p) G(p) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(p) = \frac{1}{L(p)}.$$

Тогда получается

$$x(p) = \frac{f(p)}{L(p)} = f(p) G(p), \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int_0^t G(t-s) f(s)\, ds.$$

Уравнение Вольтера. Иногда бывает уравнения на $x(s)$ вида

$$f(t) = \int_0^t x(s) K(t-s)\, ds. \tag{3}$$

Через преобразрвание Лапласа, находим

$$f(p) = x(p) K(p), \quad \Rightarrow \quad x(p) = \frac{f(p)}{K(p)}. \tag{4}$$

В общем виде тогда находим

$$x(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\omega} \frac{f(p)}{K(p)} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}.$$

Кстати, забавный факт:

$$\int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\omega} 1 \cdot e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = e^{p_0 t} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = e^{p_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \delta(t), \tag{5}$$

то есть преобразование Лапласа от константы – дельта функция.

[1] Здесь и далее $f(t)$ – функция, $f(\omega) = \hat{f}(\omega)$ – Фурье образ, $f(p) = \tilde{f}(p)$ – преобразование Лапласа.

Рассмотрим, например

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{p+1-1}{p+1} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} - \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{pt}}{p+1} \frac{dp}{2\pi} = \delta(t) - \theta(t) e^{-t}.$$

Также верно, что

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} p e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \delta'(t).$$

Действительно,

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}\right) = \frac{d}{dt}\delta(t) = \delta'(t).$$

Важно, что можно делать функции маленькими

$$\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} f(p) e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \frac{f(p)}{p^n} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}. \tag{6}$$

Неоднородная релаксация. Рассмотрим уравнение

$$(\partial_t + \gamma(t)) G(t,s) = \delta(t-s), \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s) f(s)\, ds,$$

где продолжаем требовать причинность $G(t, s > t) = 0$. Для начала, рассмотрим $t > s$, тогда

$$(\partial_t + \gamma(t)) G(t) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dG}{G} = -\gamma(t)\, dt, \quad \Rightarrow \quad G(t,s) = A(s) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \gamma(t')\, dt'\right).$$

Также записываем граничные условия:

$$\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \ldots\, ds, \quad \Rightarrow \quad G(s+0, s) = 1.$$

Так можем найти

$$A(s) \exp\left(-\int_{t_0}^{s} \gamma(t')\, dt'\right) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(t,s) = \theta(t-s) \exp\left(-\int_{s}^{t} \gamma(t')\, dt'\right), \tag{7}$$

где мы разбили

$$\int_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{s} + \int_{s}^{t},$$

и получили, что хотели.

Комментарий про дельта функцию. Главное, нужно показать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x) = 1, \qquad \lim_{a\to 0} \delta_a(x) = 0, \text{ при } x \neq 0.$$

Вообще можем плодить дельтаобразные последовательности, взяв f с единичным интегралом и

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right).$$

Комментарий про преобразование Лапласа. Для функции вида

$$\frac{1}{\sqrt{p+\alpha}},$$

необходим аппарат разрезов, так что её можно сделать с шифтом на неделю.

На следующей недели будет контрольная. Необходим аппарат метода неопределенных коэффициентов, матричные экспоненты, решение диффуров через Фурье (не всегда причинный результат), а также преобразование Лапласа. Вычеты скорее всего в районе второго порядка и меньше. Ещё полезно вспонить, как записывать начальные условия: осцияллятор, осциллятор с затуханием.

2 Семинар от 12.09.21

Раннее решалась задача Коши, вида $L(\partial_t)x(t) = \varphi(t)$. Можо рассмотреть другой класс задач:

$$f(0) = f(\pi) = 0, \quad (\partial_x^2 + 1) f(x) = 0, \quad \Rightarrow \quad f(x) = A \sin x,$$

где A – любая, то есть решение не единственно. Более того, решение может не существовать.

Однако, покуда мы рассматриваем диффуры первого порядка, граничное условие всего одно: значение функции в точке: $x(0) = x_0$, что эквивалентно задаче Коши.

2.1 Задача Штурма-Лиувилля

Интереснее на диффурах II порядка, один из наиболее ярких примеров: *задача Штурма-Лиувилля*:

$$\hat{L} = \partial_x^2 + Q(x)\partial_x + U(x), \qquad \hat{L}f(x) = \varphi(x), \qquad \begin{cases} \alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = 0 \\ \alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0, \end{cases}$$

где[2] $|\alpha_1| + |\beta_2| \neq 0$ и $|\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0$.

Заметим, что уравнение линейно: если $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, то $f = f_1 + f_2$, а значит ответ можно найти в виде

$$f(x) \int_a^b G(x,y)\varphi(y)\, dy,$$

однако система теперь не является транслционно инвариантной.

Граничные условия на G:

$$\alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = \int_a^b \underbrace{(\alpha_1 G(a,y) + \beta_1 G'_x(a,y))}_{\text{непрерывен}} \varphi(y)\, dy = 0,$$

что верно $\forall \varphi$. По лемме Дюбуа-Реймона, можем свести уравнение к виду

$$\alpha_1 G(a,y) + \beta_1 G'_x(a,y) \equiv 0,$$

то есть функция Грина G наследует граничные условия. Аналогично,

$$\alpha_2 G(b,y) + \beta_2 G'_x(b,y) = 0.$$

Запищем уравнение на $G(x,y)$:

$$\varphi(y) = \delta(y - y'), \quad \Rightarrow \quad f(x) = \int_a^b G(x,y)\delta(y-y')\, dy = G(x,y'), \quad \Rightarrow \quad \hat{L}G(x,y) = \delta(x-y).$$

Решения имеет смысл разбить на $x \neq y$, и, в частности, рассмотрим $x < y$:

$$\begin{cases} \hat{L}G(x,y) = 0 \\ \alpha_1 G(a,y) + \beta_1 G'_x(a,y) = 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad G(x,y) = A(y)\cdot u(x), \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \hat{L}u(x) = 0 \\ \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0 \end{cases}$$

Более того, почему бы и не доопределить $u(a) = -\beta_1$ и $u'(a) = \alpha_1$, таким образом свели задачу к задаче Коши, решение которой существует и единственно.

Аналогично для $x > y$:

$$\hat{L}G(x,y) = 0, \quad \Rightarrow \quad G(x,y) = B(y)v(x), \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \hat{L}v = 0 \\ \alpha_2 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0 \end{cases}$$

где снова есть задача Коши, решение которой существует и единственно.

Сшивка. Во-первых заметим, что G непрерывна, а G' испытыывает скачок:

$$G(y+0,y) = G(y-0,y), \quad \Rightarrow \quad A(y)u(y) = B(y)v(y).$$

Интегрируя, находим

$$G'_x(y+0,y) - G'_x(y-0,y) = 1, \quad \Rightarrow \quad B(y)v'(y) - A(y)u'(y) = 1.$$

Собирая уравнения вместе, находим, что

$$B(y)\underbrace{\left(\frac{v'(y)u(y) - v(y)u'(y)}{u(y)}\right)}_{W[u,v]} = 1, \quad \Rightarrow \quad B(y) = \frac{u(y)}{W}, \quad A(y) = \frac{v(y)}{W(y)},$$

где $W[u,v]$ – вронскиан. Итого, можем выписать ответ:

$$G(x,y) = \frac{1}{W(y)}\begin{cases} v(y)u(x), & x < y; \\ v(x)u(y), & x > y. \end{cases}$$

Можем записать, когда решение $\exists$ и !:

$$W \neq 0, \quad \Rightarrow \quad \text{Sol } \exists\&!.$$

Отсюда вытекает теорема Стеклова:

Thr 2.1 (теорема Стеклова). *Если u, v – спец. ФСР, то решение существует и единственно:*

$$f(x) = \int_a^b G(x,y)\varphi(y)\, dy, \qquad \hat{L}^{-1}\varphi = f.$$

[2] Часто можно встретить нулевые граничные условия: $f(a) = f(b) = 0$.

Если $W = \text{const}$, то $G(x,y) = G(y,x)$ – симметричное ядро, а значит L^{-1} – симметричный, самосапряженный оператор $\Rightarrow$ у $\hat{L}$ есть ОНБ из собственных функций.

Про вронскиан. Можно записать формулу Лиувилля-Остроградского

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} = W(x_0) \exp \left(- \int_{x_0}^{x} Q(z)\, dz \right).$$

Def 2.2. *Специальной ФСР* называется решение уравнении $\hat{L}u = 0$ и $\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0$, и аналогичного уравнения по $v(x)$ с граничным условием в b, если $W[u,v] \neq 0$, то есть u и v линейной независимы.

Пример I. Рассмотрим уравнения

$$\begin{cases} \partial_x^2 f(x) = \varphi(x) \\ f(a) = f(b) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u(x) = x - a, \quad v(x) = x - b, \quad \Rightarrow \quad W = \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} = b - a = \text{const},$$

а значит

$$G(x,y) = \frac{1}{b-a} \begin{cases} (y-b)(x-a), & x < y \\ (x-b)(y-a), & x > y. \end{cases}$$

Пример II. Рассмотрим двумерный цилиндр, радуса R, вне которого $\rho(r > R) = 0$, $\rho(\boldsymbol{r}) = \rho(r)$. Рассмотрим уравнения Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho, \quad \Rightarrow \quad (\partial_r^2 + \tfrac{1}{r}\partial_r)\varphi = -4\pi\rho.$$

Добавим граничные условия: потенциал определен с точностью до константы, так что пусть $\varphi(R) = 0$, также хотим конечность φ при $r = 0$, так что пусть $\varphi(0) = 1$.

Получили задачу, где при $r < r'$

$$\left\{ \left(\partial_r^2 + \tfrac{1}{r}\partial_r\right) u(r) = 0, \quad u(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{C}{r}, \quad \Rightarrow \quad u(r) = C \ln r + D = 1. \right.$$

Аналогично, рассмотрим $r > r'$:

$$\left\{ \left(\partial_r^2 + \tfrac{1}{r}\partial_r\right) v(r) = 0, \quad v(R) = 0, \quad \Rightarrow \quad v(R) = C' \ln r + D', \quad \Rightarrow \quad v = \ln\left(\frac{r}{R}\right). \right.$$

Сразу вычислим

$$W[u,\, v] = \det \begin{pmatrix} 1 & \ln r/R \\ 0 & 1/r \end{pmatrix} = \frac{1}{r}, \quad \Rightarrow \quad G(r,r') = r' \begin{cases} \ln \frac{r'}{R}, & r < r' \\ \ln \dfrac{r}{R}, & r > r' \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \varphi(r) = \int_0^R G(r,r')\,(-4\pi\rho(r'))\, dr'.$$

2.2 Задача с периодическими условиями

Рассмотрим такой же $\hat{L}$, и граничные условия в виде

$$\begin{cases} f(a) = f(b) \\ f'(a) = f'(b), \end{cases}$$

то есть решение периодично.

Пример. Рассмотрим задачу

$$\hat{L} = \partial_x^2 + \varkappa^2,$$

с условиями на $[-\pi, \pi]$.

При $x < y$:

$$G(x,y) = A_1(y) \sin \varkappa(x+\pi) + B_1(y) \cos \varkappa(x+\pi),$$

и аналогично для $x > y$:

$$G(x,y) = A_2 \sin \varkappa(x-\pi) + B_2(y) \cos \varkappa(x-\pi).$$

Запишем граничные условия:

$$G(-\pi,y) = G(\pi,y), \quad \Rightarrow \quad B_1(y) = B_2(y) \stackrel{\text{def}}{=} B(y)$$

$$G'_x(-\pi,y) = G'_x(\pi,y), \quad \Rightarrow \quad A_1(y) = A_2(y) \stackrel{\text{def}}{=} A(y).$$

Тогда нашли, что

$$G(x,y) = \begin{cases} A \sin \varkappa(x+\pi) + B \cos \varkappa(x+\pi) \\ A \sin \varkappa(x-\pi) + B \cos \varkappa(x-\pi) \end{cases}$$

Теперь запишем непрерывность:

$$A\sin\varkappa(x+\pi)+B\cos\varkappa(x+\pi)=A\sin\varkappa(x-\pi)+B\cos\varkappa(x-\pi).$$

А также скачок производной

$$G'_x(y+0,y)-G'_x(y-0,y)=1,\quad\Rightarrow\quad A\cos\varkappa(x-\pi)-B\sin\varkappa(x-\pi)-A\cos\varkappa(x+\pi)+B\cos\varkappa(x+\pi)=\varkappa^{-1}.$$

Решая эту систему находим, что

$$2\sin\pi\varkappa\begin{pmatrix}\cos\varkappa y & -\sin\varkappa y\\ \sin\xi y & \cos\varkappa y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1/\varkappa\end{pmatrix},\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\frac{1}{2\sin\pi\varkappa}\begin{pmatrix}\cos\varkappa y & \sin\varkappa y\\ \sin\varkappa y & \cos\varkappa y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1/\varkappa\end{pmatrix}=\frac{1}{2\varkappa\sin\pi\varkappa}\begin{pmatrix}\sin xy\\ \cos xy\end{pmatrix}.$$

Подставляя в $G(x,y)$, находим[3]

$$G(x,y)=\frac{1}{2\varkappa\sin\pi\varkappa}\begin{cases}\cos\left(\varkappa(x-y)+\varkappa\pi\right), & x<y\\ \cos(\varkappa(x-y)-\varkappa\pi), & x>y.\end{cases}$$

Всё это было, повторимся, для уравнения:

$$\left(\partial_x^2+\varkappa^2\right)f(x)=\varphi(x),\qquad\Rightarrow\qquad f(x)=\int_{-\pi}^{+\pi}G(x,y)\varphi(y)\,dy.$$

2.3 Другой способ

Дорустим мы $\mathcal{H}$, соответственно есть $\langle x|y\rangle$ – эрмитово. Допустим есть некоторый сопряженный оператор $\langle Ax|y\rangle=\langle x|A^*y\rangle$. При чём требуем, что $y\colon$ обе части непрерывны по x:

$$\mathcal{D}(A^*)=\{y\colon\langle Ax|y\rangle\text{ непр. по }x,\quad x\in\mathcal{D}A.\}$$

Получается, что было бы здорово, если бы выполнялось $\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}(A^*)$ и $A=A^*$, тогда $\langle Ax|y\rangle=\langle x|Ay\rangle$, и A – ССО.

Thr 2.3 (thr Гильберта-Шмидта)**.** *Если A – компактный*[4] *ССО, то у A есть ОНБ из собственных векторов.*

Далее верим, что базис счётный, есть условие ортогональности и $Ae_n=\lambda_n e_n$. Вернемся к оператору Штурма-Лиувилля:

$$\hat{L}=A(x)\partial_x^2+B(x)\partial_x+C(x),$$

и живем мы в $\mathcal{H}=L_2[a,b]$, со скалярным произведением, вида

$$\langle f|g\rangle=\int_a^b f\bar{g}\,dx.$$

Покажем, что для задачи[5] Штурма-Лиувилля $\hat{L}$ симметричен, при $B(x)=A'(x)$.

Действительно,

$$\langle\hat{L}f|g\rangle=\int_a^b\left(\partial_x(A\partial_x)+C\right)f\bar{g}\,dx,$$

где $\langle Cf|g\rangle=\langle f|Cg\rangle$, так что дальше опустим.

$$\langle\hat{L}f|g\rangle\sim\int_a^b\partial_x(A\partial_x f)g\,dx=\ldots+A\partial_x f\bar{g}\Big|_a^b-\int_a^b\frac{d\bar{g}}{dx}\,df=A\frac{df}{dx}g\Big|_a^b-Af\frac{d\bar{g}}{dx}\Big|_a^b+\langle f|\hat{L}g\rangle.$$

Задача Штурма-Лиувилля. Для f и g верно, что

$$\begin{aligned}\alpha_1 f(a)+\beta_1 f'(a)=0\\ \alpha_2 f(b)+\beta_2 f'(b)=0\end{aligned}\qquad A(b)\left[f'(b)\bar{g}(b)-f(b)\bar{g}'(b)\right]-A(a)\left[\ldots\right]\sim\det\begin{pmatrix}\bar{g} & f\\ \bar{g}' & f'\end{pmatrix}=0,$$

в силу граничных условий, а значит концов не будет:

$$\langle\hat{L}f|g\rangle=\langle f|\hat{L}g\rangle,$$

ура!)

Аналогично для периодических граничных условий:

$$\langle\hat{L}f|g\rangle=Af'\bar{g}\Big|_a^b-Af\bar{g}'\Big|_a^b+\langle f|\hat{L}g\rangle,$$

но из периодических граничных условий сразу получаем, что $\hat{L}$ симметричный, а значт, скорее всего, $\hat{L}$ – ССО.

[3] К дз будет полезно заметить, что $G(x,y)=G(x-y)$ – задача трансляционно инвариантна.

[4] $\mathcal{D}(A)$ – компакт в гильбертовом пространстве.

[5] с периодическими гран. усовиями?

А теперь внимание:

$$\hat{L}f = \varphi, \quad \Rightarrow \quad f = \underbrace{\int_a^b dt\, G(x,y)}_{\text{комп } \hat{L}^{-1}} \varphi(y) = \hat{L}^{-1}\varphi,$$

где

$$\hat{L} = A\partial_x^2 + A'\partial_x + C, \quad \Rightarrow \quad L^{-1} \text{ симметричный} \quad \Rightarrow \quad G(x,y) = G(y,x).$$

Итак, для операторов Штурма-Лиувилля ищем собственные функции:

$$\begin{cases} \hat{L}e_n(x) = \lambda_n e_n(x) \\ \text{гран. усл.} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sum_n f_n e_n(x),$$

домножая на e_m, находим, что

$$\langle f|e_m\rangle = f_m\langle e_m|e_n\rangle, \quad \Rightarrow \quad f_m = \frac{\langle f|e_m\rangle}{\langle e_m|e_n\rangle}, \qquad \langle f|e_m\rangle = \int_a^b f(x)\bar{e}_m(x)\,dx.$$

Метод Фурье решения краевых задач:

$$L(\partial_t)u(x,t) = \hat{A}_x u(x,t) + f(x,t),$$

плюс граничные условия. Раскладывая,

$$\hat{A}_x e_n = \lambda_n e_n, \qquad u = \sum_n u_n(t)e_n(x), \quad \Rightarrow \quad f(x,t) = \sum f_n(t)e_n(x),$$

а значит

$$\sum_n \left(L(\partial_t)u_n(t) - \lambda_n u_n(t) - f_n(t)\right)e_n(x) = 0,$$

откуда можем находить $u_n(t)$:

$$u(x,t) = \sum_n u_n(t)e_n(x).$$

Пример. Рассмотрим снова задачу, вида

$$(\partial_x^2 + \varkappa^2)G(x,y) = \delta(x-y)$$

и решим методом Фурье. Получим систему, вида

$$\begin{cases} \partial_x^2 e_n = \lambda_n e_n \\ e_n(-\pi) = e_n(\pi) \\ e_n'(-\pi) = e_n'(\pi) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad e = \alpha e^{iqx} + \beta e^{-iqx}, \quad \alpha e^{iq\pi} + \beta e^{-iq\pi} = \alpha e^{-iq\pi} + \beta e^{iq\pi}. \quad \Rightarrow \quad \alpha\sin\pi q = \beta\sin\pi q,$$

а значит $q = n$, $n \in \mathbb{Z}$, вот и дискретность:

$$\lambda^2 = -n^2, \quad \Rightarrow \quad e_n = e^{inx}, \quad e_{-n} = e^{-inx}.$$

3 Семинар от 16.10.21

Рассмотрим снова некоторую граничную задачу:

$$\hat{L}G(x,y) = \delta(x-y).$$

Запишем граничные условия:

$$\alpha_1 G(a.y) + \beta_1 G_x'(a,y) = 0, \qquad \alpha_2 G(b,y) + \beta_2 G_x'(b,y) = 0,$$

где $|\alpha_1| + |\beta_2| \neq 0$ и $|\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0$. Можем выписать ответ:

$$G(x,y) = \frac{1}{W(y)}\begin{cases} v(y)u(x), & x < y; \\ v(x)u(y), & x > y, \end{cases}$$

где Вронскиан можно запсиать, как

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^x Q(t)\,dt,\right)$$

где $Q(t)$ – из оператора Штурма-Лиувилля.

Также решали задачу с периодическими гран. условиями, где G наследовала гран. условия. Решать это всё умеем двумя способами: разделяя на $x > y$ и $x < y$, и через метод Фурье:

$$\hat{L}e_n = \lambda_n e_n, \qquad \langle e_n|e_m\rangle = \int_a^b e_n(x)\bar{e}_m(x)\,dx.$$

Тогда можем найти функцию Грина, как
$$G(x,y)=\sum_n g_n(y)e_n(x),\qquad \delta(x-y)=\sum_n \delta_n(y)e_n(x).$$
Находим коэффициенты Фурье:
$$g_n(y)=\frac{\langle G|e_n\rangle}{\langle e_n|e_n\rangle},\quad\Rightarrow\quad \delta_n(y)=\frac{\bar e_n(y)}{\langle e_n|e_n\rangle},\quad\Rightarrow\quad g_n(y)=\frac{1}{\lambda_n}\frac{\bar e_n(y)}{\langle e_n|e_n\rangle},$$
где мы решали уравнение, вида $\hat L G=\delta(x-y)$. Проблема возникает при $\lambda_n=0$.

Решение. Наличие у оператора собственного числа $\lambda_n=0$ называется нулевой модой. Рассмотрим оператор:
$$\hat L=\partial_x^2,$$
для которого $e_n(x)=e^{inx}$, где $\langle e_n|e_n\rangle=2\pi$, где $e_0=1$ и $\lambda_0=0$. Пусть тогда
$$\delta(x)=\sum\frac{\bar e_n(0)e_n(x)}{\langle e_n|e_n\rangle}=\sum\frac{e^{inx}}{2\pi},\qquad G(x)=\sum g_ne_n(x).$$
но для $\hat LG=\delta(x)$ оказывается нет решений (справа e_0 есть, а слева нет). То есть
$$\ker\hat L\neq\{0\},\qquad \ker\hat L+\operatorname{Im}\hat L=\mathcal H,$$
поэтому всегда имеем ввиду, что $\hat L\hat L^{-1}=\mathbb 1$, но только для $\operatorname{im}\hat L$.

В общем, проблему уйдёт, если рассмотрим уравнение, вида
$$\hat LG(x)=\delta(x)-e_0(x)=\delta(x)-\frac{1}{2\pi},$$
то есть справа единичный оператор только на образе $\operatorname{im}\hat L$.

Если в источнике есть нулевая мода, то уравнение не имеет решений.

Алгоритм (Фурье). Раскладываем
$$G(x)=\sum_{n\neq0}g_ne_n,\qquad \delta(x)=\sum\frac{e_n(x)}{2\pi},\quad\Rightarrow\quad \hat LG=\delta(x)-\frac{1}{2\pi}.$$
Знаем, что $\lambda_ng_n=\frac{1}{2\pi}$, а значит
$$g_n(x)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{-n^2},\quad\Rightarrow\quad G(x)=\sum_{n\neq0}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{-n^2}e^{inx},$$
и рассмотрим $0<x<\pi$, суммирая это через вычеты, записываем
$$f(z)=\frac{e^{zx}}{2\pi z^2},\quad\Rightarrow\quad G(x)=\sum\oint_{in}\frac{dz}{2\pi i}f(z)g(z).$$
Соответственно, выберем
$$g(z)=\frac{\pi e^{-\pi z}}{\operatorname{sh}(\pi z)}$$
тогда
$$f(z)g(z)=\frac{\pi}{z^2}\frac{e^{(x-\pi)z}}{\operatorname{sh}\pi z},$$
получаем, что интеграл по душам вправо/влево равен 0, и остается только вычет в $z=0$:
$$G(z)=-\operatorname{res}_0 f(z)g(z)=\ldots=-\frac{x^2}{4\pi}+\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}.$$

Алгоритм (сшивка). Решим задачу
$$\partial_x^2G(x)=\delta(x)-\frac{1}{2\pi}.$$
Разбиваем $x<0$ и $x>0$:
$$\begin{aligned}
&x<0, &&G=-\tfrac{x^2}{4\pi}+ax+b,\\
&x>0, &&G=-\tfrac{x^2}{4\pi}+cx+\varpi,
\end{aligned}$$
учитываем граничные условия:
$$G(-0)=G(+0),\quad G'(+0)-G'(-0)=1,\quad\Rightarrow\quad b=\varpi.$$
Также получаем, что $-a=b$.

Учтём, что e_0 не входит в G:
$$\langle G|e_0\rangle=0=\int_{-\pi}^{+\pi}G(x)\,dx=0,\quad\Rightarrow\quad b=-\frac{\pi}{6},$$

так и получаем все необходиме условия на $G(x,y)$.

3.1 Многомерие $\mathbb{R}^3$

Рассмотрим $\mathbb{R}^3$:

$$\nabla^2 f = \varphi,$$

где все линейно, всё хорошо. Как обычно будем искать функцию, виде

$$f(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\varphi(\boldsymbol{r})\, d^3 r.$$

Функцию Грина найдём в виде

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r}) = \delta(r^3) = \delta(x)\delta(y)\delta(z), \qquad \int f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, d^3\boldsymbol{r}' = f(\boldsymbol{r}').$$

Можем свести уравнение Лапласа, к уравнению Дебая:

$$(\nabla^2 - \varkappa^2)G(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}),$$

которое очень удобно раскладывать по Фурье:

$$\text{ПФ}: \qquad G(\boldsymbol{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r},$$

$$\text{ОПФ}: \qquad G(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{r}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}.$$

Также вспомним, что

$$\partial_m G(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r} = ik_m G(\boldsymbol{k}),$$

а значит

$$(-k^2 - \varkappa^2)G(\boldsymbol{k}) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{k^2+\varkappa^2}, \quad \Rightarrow \quad G(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{k^2+\varkappa^2}\frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}.$$

Переходим в сферические координаты, получаем, что

$$G(\boldsymbol{r}) = -\frac{2\pi}{(2\pi)^3}\int_0^\infty \frac{k^2}{k^2+\varkappa^2}\int_0^\pi \sin\theta e^{ikr\cos\theta}\, d\theta\, dk = -\frac{e^{-\varkappa r}}{4\pi r}.$$

Устремляя $\varkappa \to 0$, находим

$$\nabla^2 G = \delta(\boldsymbol{r}), \quad \Rightarrow \quad G = -\frac{1}{4\pi r}.$$

3.2 Многомерие $\mathbb{R}^2$

Для Гаусса можно найти, что

$$G^{[\dim = n]}(x) = \frac{1}{\sigma_{n-1}}\frac{1}{r^{n-2}},$$

где σ_{n-1} – площадь $n-1$ мерной сферы.

Вообще часто задача формулируется в виде задачи Дирихле:

$$\nabla^2 f = 0, \qquad f'_{\partial D} = f_0(\boldsymbol{r}),$$

то есть функция задана на границе некоторой области. Пусть

$$f(z) = u(z) = iv(z), \qquad \nabla^2 u = \nabla^2 v = 0.$$

Пусть знаем комплексную функцию $f(z)$ такую, что $\operatorname{Re} f|_{\partial D} = f_0$, тогда $\operatorname{Re} f(z)$ решает задачу Дирихле. Далее конформным преобразованием переводим любое D в круг, в круге задача Дирихле решается, а дальше отображаем назад.

Пусть задана функция $u_0(x) = u(x,0)$. Вообще можно было бы разложить по Фурье u, и записать

$$\nabla^2 u = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x).$$

Тогда

$$u(q,y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iqx} u(x,y)\, dx, \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 u = -q^2 u(q,y) = 0.$$

Так приходим к

$$u(q,y) = \exp\left(-|q|y\right) u(q,0), \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{2\pi} e^{iqx} \underbrace{e^{-|q|y}}_{h(q)} u(q,0).$$

Произведение Фурье образов – свёртка:

$$u(x,y)=\int_{\mathbb{R}} d\xi h(x-\xi,\,y)u_0(\xi).$$

Найдём, что

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{2\pi} e^{iqx}e^{-|q|y}=\frac{y}{\pi(x^2+y^2)}.$$

Подставляем, и находим:

$$u(x,y)=\int_{\mathbb{R}} d\xi\,\frac{y/\pi}{(x-\xi)^2+y^2}u_0(\xi),$$

где

$$\frac{y/\pi}{(x-\xi)^2+y^2}=\operatorname{Im}\frac{-1}{x+iy-\xi},\qquad\Rightarrow\qquad f(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{z-\xi}u_0(\xi),$$

что в некотором смысле привело нас к интегралу Коши, так что и $\nabla^2 f=0$ и гран. условия удовлетворяются.

Пример. Рассмотрим

$$u_0(x)=\frac{1}{1+x^2},\qquad u(x,y)=\int_{\mathbb{R}} d\xi\frac{1}{\pi}\frac{y}{y^2+(x-\xi)^2}\frac{1}{1+\xi^2}=\frac{1+y}{x^2+(1+y)^2}.$$

4 Семинар от 23.10.21

Г-функция. Найдем некоторые интересные свойства:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt\overset{t=\tau x}{=}x^z\int_0^\infty \tau^{z-1}e^{-\tau x}\,d\tau,\qquad \frac{1}{x^z}=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty \tau^{z-1}e^{-\tau x}\,d\tau.$$

Также знаем $\Gamma(n+1)=n!$, $\Gamma(2n+1)$, $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ и т.д.

Аналитическое продолжение Г-функции. Пусть есть две функции φ_1 и f_2, равные друг другу на сходящемся множестве точек $z_i\in\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2$. Так и строим аналитическое продолжение для f_1 функуцией f_2.

Можно сказать, что

$$\Gamma(z-1)=\frac{\Gamma(z)}{z-1},\qquad \operatorname{Re} z>0.$$

Но давайте сыграем в чудеса. Изначально определяли

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt,\qquad t^{z-1}=e^{(z-1)\ln t}.$$

Выберем такую связную область, чтобы точку $t=0$ нельзя было бы обойти, и получим $\ln t=\ln|t|+i\varphi$.

Сверху $\ln(|t|+i0)=\ln|t|+2\pi i$, и снизу $\ln(|t|+i0)=\ln|t|+2\pi i$. Тогда верно, что

$$\int_0^\infty e^{(z-1)\ln t}e^{-t}\,dt,\qquad \text{up}:\ \ e^{(z-1)\ln|t|}e^{-|t|},\qquad \text{down}:\ \ e^{(z-1)\ln|t|}e^{-|t|}e^{2\pi iz}.$$

Сложим интеграл поверху и понизу, получим

$$I=\int e^{(z-1)\ln t}e^{-t}\,dt=(1-e^{2\pi iz})\Gamma(z)=\int_C e^{(z-1)\ln t}e^{-t}\,dt=\int_C t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$

Особенность есть только в точке 0. Таким образом находим аналитическое продолжение:

$$\Gamma(z)=\frac{1}{1-e^{2\pi iz}}\int_C t^{z-1}e^{-t}\,dt.\tag{8}$$

Видим, что у $\Gamma(z)$ есть особенности $z\in\mathbb{Z}$, где $z\in\mathbb{N}$ – УОТ, и $z\in\mathbb{Z}\ \mathbb{N}$ – полюса первого порядка.

Рассмотрим $z=-n$, тогда интегрируем

$$\int_C t^{-n-1}e^{-t}\,dt=2\pi i\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dt}\right)^n e^{-t}=-\frac{2\pi i(-1)^n}{n!}.$$

Итого находим, что

$$\operatorname{res}_{-n}\Gamma(z)=\frac{(-1)^n}{n!},$$

что позволяет определить преобразование Мелина от $\Gamma(z)$:

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty}\Gamma(z)x^{-z}\,dx,\qquad M(f(z))=\int_0^\infty t^{z-1}f(t)\,dt,$$

но это к слову.

Найдём теперь $\Gamma(n)$:

$$\Gamma(n)=\lim_{z\to n}\frac{1}{1-e^{2\pi i z}}\int_C t^{z-1+n-n}e^{-t}\,dt=\Big/ t^{z-n}\approx 1+(z-n)\ln t\Big/ \overset{\frac{a}{b}\to\frac{a'}{b'}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_C t^{n-1}\ln t e^{-t}\,dt.$$

Теперь делаем обратную интерацию, «сдувая» логарифм к $\operatorname{Re} t$. Здесь всё также $\ln(|t|+i0)=\ln|t|$ и $\ln(|t|-i0)=\ln|t|+2\pi i$. Тогда

$$\left(\int_C=\int_{\text{up}}+\int_{\text{down}}\right)\frac{1}{1-e^{2\pi i z}}\int_C t^{z-1}e^{-t}\,dt=-2\pi i\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt=(n-1)!.$$

B**-функция**. Рассмотрим функцию, вида

$$B(\alpha,\,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt,\qquad \operatorname{Re}\alpha,\beta>0.$$

Сделаем замену переменных

$$B(\alpha,\,\beta)=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt\overset{t=y/s}{=}\int_0^s dy\; y^{\alpha-1}(s-y)^{\beta-1}/s^{\alpha+\beta-1}.$$

Нетрудно получить, что

$$B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)=\int_0^\infty ds\, e^{-s}\int_0^s dy\, y^{\alpha-1}(s-y)^{\beta-1}=\int_0^\infty dy\, y^{\alpha-1}\int_y^\infty ds\, e^{-s+y-y}(s-y)^{\beta-1}=\int_0^\infty dy\, y^{\alpha-1}e^{-y}\int_0^\infty dx\, e^{-x}x^{\beta-1},$$

а значит

$$B(\alpha,\,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},\tag{9}$$

что и является аналитическим продолжением B-функции.

Например,

$$\int_0^{\pi/2}\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}B\left(\frac{a+1}{2},\,\frac{b+1}{2}\right).$$

Также верно, что

$$\int_0^\infty\frac{x^m}{(1+x^n)^k}\,dx=\Big/ t=\frac{1}{1+x^n}\Big/.$$

Аналогично можем получить, что

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\tfrac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\Gamma(2z).\tag{10}$$

Ну действительно, представим

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(z)^2}{B(z,\,\frac{1}{2})}=\frac{\sqrt{\pi}B(z,z)}{B(z,\,\frac{1}{2})}\Gamma(2z).$$

Осталось раскрыть

$$B(z,z)=2\int_0^{\pi/2}d\varphi\;\;(\sin\varphi\cos\varphi)^{2z-1}=\frac{2}{2^{2z-1}}\int_0^{\pi/2}d\varphi\;\;\sin^{2z-1}\varphi.$$

Теперь, уже интегрируя двойной угол, находим

$$B(z,z)=\frac{2}{2^{2z-1}}\frac{1}{2}B(z,\,\tfrac{1}{2})=\frac{1}{2^{2z-1}}B(z,\,\tfrac{1}{2}).$$

Ещё один забавный факт:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z},$$

что также совершает аналитическое продолжение. Действительно,

$$B(z,\,1-z)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\,dt=\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^z\frac{dt}{t}.$$

Тут логично ввести $x=\frac{t}{1-t}=-1+\frac{1}{1-t}$, а значит

$$t=\frac{x}{x+1},\qquad dt=\frac{dx}{(x+1)^2}.$$

Продолжая жонглировать переменными

$$B(z,\,1-z)=\int_0^\infty x^z\frac{x+1}{x}\frac{dx}{(x+1)^2}=\int_0^\infty\frac{x^{z-1}}{x+1}\,dx.$$

Который снова удобно посчитать через разрезы.

$$B(z,\,1-z)=\int_{\mathrm{up}}\frac{x^{z-1}}{1+x}\,dx=\frac{1}{1-e^{2\pi iz}}\int_C\frac{x^{z-1}}{1+x}\,dx,$$

но тут уже можно замкнуть дугу на бесконечности, вклад от котрой нулевой. Осталось найти вычет в точке -1, тогда

$$\int_{\mathrm{up}}\frac{x^{z-1}}{1+x}\,dx=\frac{1}{1-e^{2\pi iz}}\,\mathrm{res}_{-1}=\frac{2\pi i(-1)e^{\pi iz}}{1-e^{2\pi iz}}=\frac{2\pi i}{e^{\pi iz}-e^{-i\pi z}}=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

Дигамма-функция. По определнию $\psi(z)$:

$$\psi(z)\overset{\text{def}}{=}(\ln\Gamma(z))'=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Заметим, что $\psi(1)=-\gamma$, где γ – постоянная Эйлера-Маскерони. Найдём

$$\psi(z+1)=(\ln z+\ln\Gamma(z))=\frac{1}{z}+\psi(z)/$$

Забавный факт:

$$\psi(N+1)=\frac{1}{N}+\psi(N)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\psi(1),$$

где $\sum_{n=1}^N\frac{1}{n}$ – N-е гармоническое число.

Также найдем, что

$$\psi(x+N+1)=\frac{1}{x+N}+\psi(x+N)=\frac{1}{x+N}+\ldots+\frac{1}{x+1}+\psi(x+1).$$

Вспомним, что $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$. Тогда

$$\psi(-z)-\psi(z)=\pi\,\mathrm{ctg}\,\pi z.$$

Найдём асимптотику

$$\Gamma(z\to\infty)=\sqrt{2\pi z}e^{z\ln z-z}=\sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^z,$$

что и составляет формулу Стирлинга.

Также для $\psi(z\to\infty)$:

$$\psi(z\to\infty)=(\ln\Gamma(z))'=\ln z+\frac{1}{2z}+o(1)=\ln z+o(1).$$

Метод перевала. Представим семейство интегралов с параметром λ:

$$I_\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)e^{\lambda f(x)}\,dx.$$

При этом предположим, что $f(x)$ такая, что существует единственный максимум в точке x_0. Тогда

$$I_\lambda\approx g(x_0)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\lambda f(x)}\,dx.$$

Теперь воспользуемся аналитичностью функции $f(x)$:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o(x-x_0)^2.$$

Подставляя в интеграл, находим

$$I_\lambda=g(x_0)e^{\lambda f(x_0)}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\lambda f'(x_0)(x-x_0)^2/2}\,dx=g(x_0)e^{\lambda f(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda f''(x_0)|}}.$$

Пусть λ нет. Тогда достаточно потребовать $|f''(x_0)|$ большой – максимум резкий. Тогда

$$|f''(x_0)(x-x_0)^2|\sim 1,\qquad\Rightarrow\qquad|x-x_0|\frac{1}{\sqrt{f'(x_0)}},\qquad\Rightarrow\qquad|f'''(x_0)(x-x_0^3)|\ll 1,\qquad\Rightarrow\qquad(f'')^3\gg(f''')^2.$$

Посмотрим на Г-функцию:

$$\Gamma(z+1)=\int_0^\infty t^ze^{-t}\,dt=\int_0^\infty e^{z\ln t-t}\,dt.$$

Тогда $f(t)=z\ln t-t$. Подставляем в критерий, видим что макимум у f резкий.

Подставляем, находим

$$\Gamma(z+1)\approx e^{z\ln z-z}\sqrt{2\pi z},$$

что и составляет формулу Стирлинга, верной на всей комплексной плоскости.

5 ТеорМин 3

Всякое. Может быть полезно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm iz^2}\, dz = \sqrt{\pi} e^{\pm i\pi/4}.$$

Также полезно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos z^2\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin z^2\ z = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Метод Лапласа. Рассмотрим дифференциральное уравнение, вида

$$(a_n z + b_n) f^{(n)} + \ldots + (a_1 z + b_1) f^{(1)} + (a_0 z + b_0) f^{(0)} = 0, \qquad f(z) = \int_C \tilde{f}(p) e^{pz}\, dp,$$

где $f(p)e^{pz}|_{\partial C}^{\forall z} = 0$. Тогда

$$-\partial_p \left[A(p) f(p)\right] + B(p) f(p) = 0, \quad A(p) = a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0, \quad B(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0.$$

Решая, находим

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{A(p)} \exp\left(\int_{p_0}^{p} \frac{B(t)}{A(t)}\, dt\right).$$

Метод перевала. Действительный метод перевала:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{f(x)} g(x)\, dx = g(x_0) e^{f(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}}.$$

Для стационарной фазы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{if(x)} g(x)\, dx = g(x_0) e^{if(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)}} e^{\pm i\pi/4},$$

где $\pm$ согласован с $\operatorname{sign} f''$.

Для комплексного метода перевала

$$I = \int_C e^{f(z)} g(z)\, dz = g(z_0) e^{f(z_0)} e^{i\varphi} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''|}}, \qquad \varphi = \frac{1}{2}\left(\pm\pi - \arg f''(z_0)\right).$$

Функция Эйри. Решаем уравнение, вида

$$\partial_x^2 Y - xY = 0, \quad \Rightarrow \quad Y(x) = \int_C e^{xt - t^3/3}\, dt.$$

Так приходим к

$$\operatorname{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{xt - t^3/3}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(xu + u^3/3)\, du.$$

В качетсве второго решения выбрается

$$\operatorname{Bi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[e^{xu - u^3/3} + \sin(xu + u^3/3)\right]\, du.$$

Функции Бесселя. Уравнение Бесселя:

$$\partial_z^2 J_m + \frac{1}{z} J_m + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) J_m = 0,$$

где $J_m(0) \in \mathbb{R}$. Знаем, что

$$e^{ipr\sin\varphi} = \sum_{m\in\mathbb{Z}}, \quad \Rightarrow \quad J_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{iz\sin\varphi} e^{-im\varphi}\, d\varphi, \quad \Leftrightarrow \quad J_m(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z\sin\varphi - m\varphi)\, d\varphi.$$

Умеем дифференцировать:

$$\frac{dJ_m}{dz} = \frac{J_{m-1}(z)}{2} - \frac{J_{m+1}(z)}{2}, \quad \frac{m}{z} J_m(z) = \frac{1}{2}\left(J_{m+1}(z) + J_{m-1}(z)\right), \quad \frac{d}{dz}\left(z^m J_m(z)\right) = J_{m-1}(z) z^m.$$

Откуда сразу находим

$$J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z).$$

Умеем раскладывать в ряд и уходить на бесконечность:
$$J_m(z)=\frac{z^m}{2^m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{4^k k!(m+k)!},\qquad J_m(z\to\infty)=\sqrt{\frac{2\pi}{z}}\cos\left(z-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$$
соответственно с нулями в $\frac{\pi}{2}+\pi m$.

Преобразование Фурье от функции:
$$F[J_m(z)](k)=\int_{-\infty}^{+\infty}J_m(z)e^{-ikz}\,dz=\frac{(-1)^m e^{im\varphi_0}+e^{-im\varphi_0}}{\sqrt{1-k^2}},\qquad \varphi_0=\arcsin k.$$
В частности
$$F[J_0](k)=\frac{2}{\sqrt{1-k^2}}\theta(1-k^2),\qquad F[J_1](k)=\frac{2ik}{\sqrt{1-k^2}}\theta(1-k^2).$$
Преобразование Лапласа:
$$\Lambda[J_m](p)=\int_0^{\infty}e^{-pz}J_m(z)\,dz=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}(p+\sqrt{p^2+1})^m}.$$
Например,
$$\int_0^{\infty}\frac{J_n(z)}{z^n}\,dz=\frac{1}{(2n-1)!!}.$$

Ортогональные полиномы. Знаем, что
$$\begin{cases}(\sigma\rho f')'=-\lambda\rho f,\\ (\sigma\rho)'=\tau\rho,\end{cases}\qquad \rho(x)=\frac{1}{\sigma(x)}\exp\left(\int^x\frac{\tau(y)}{\sigma(y)}\,dy\right),\qquad \langle f|g\rangle=\int_a^b\rho(x)f(x)g(x)\,dx.$$
Для ортогональных полиномов обязательно $\deg\sigma\leqslant 2$, $\deg\tau\leqslant 1$, $|\sigma''|+|\tau'|\neq 0$. Тогда
$$f_n(x)=\frac{\alpha_n}{\rho(x)}\partial_x^n\left(\sigma^n(x)\times\rho(x)\right),\qquad \alpha_n=(-1)^n a_n n!\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda_n^{(k)}},$$
где
$$\lambda_n=-n\tau'-\frac{n(n-1)}{2}\sigma'',\qquad \lambda_n^{(k)}=\lambda_n+k\tau'+\frac{k(k-1)}{2}\sigma'',$$
что гордо именуется обобщенной формулой Родрига.

Важно помнить, что $\forall$ клоп $\deg n\perp x^m$ при $m<n$. Можем составить рекуррентное соотношение:
$$p_{n+1}(x)=(A_nx+B_n)p_n(x)+X_np_{n-1}(x),\qquad A_n=\frac{\langle p_{n+1}|p_{n+1}\rangle}{\langle p_{n+1}|xp_n\rangle},\qquad B_n=-A_n\frac{\langle xp_n|p_n\rangle}{\langle p_n|p_n\rangle},\qquad C_n=-\frac{A_n}{A_{n-1}}\frac{\|p_n\|^2}{\|p_{n-1}\|^2}.$$
Нормировка может быть найдена, как
$$\|p_n\|^2=(-1)^n\alpha_na_nn!\int_a^b\sigma^n(x)\rho(x)\,dx.$$
Производящая функция может быть найдена, как
$$\Psi(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde p_n(\lambda)}{n!}z^n=\frac{\tau(t_0)/\rho(x)}{1-z\sigma'(t_0)},\qquad t_0-x-z\sigma(t_0)=0.$$
Обычно α_n такой, что
$$\Psi(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x)z^n.$$

Полиномы Лежандра. Дифференциральное уравнение (a, $b=-1$, 1):
$$\sigma(x)=1-x^2,\qquad \tau(x)=-2x=\sigma',\qquad \rho=1,\qquad (1-x^2)P_n''-2xP_n'+n(n+1)P_n=0.$$
Формула Родрига:
$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{2^nn!}\partial_x^n(1-x^2)^n,\qquad \alpha_n=\frac{(-1)^n}{2^nn!},\qquad a_n=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}.$$
Нормировка:
$$\|P_n\|^2=\frac{2}{2n+1}.$$
Рекуррентное соотноешение:
$$A_n=\frac{\|p_n+1\|^2}{\langle p_{n+1}|xp_n\rangle}=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+1}{n+1},\qquad B_n=0,\qquad C_n=-\frac{n}{n+1},$$

подставляя, приходим к

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n+nP_{n-1}(x)=0.$$

Производяшая функция:

$$\psi(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n=\frac{1}{\sqrt{z^2-2zx+1}}.$$

Умеем дифференцировать

$$(x^2-1)\frac{dP_n}{dx}=n(xP_n(x)-P_{n-1}(x)).$$

Полиномы Эрмита. Дифференциральное уравнение

$$\sigma=1,\qquad \tau=-2x,\qquad \rho(x)=e^{-x^2},\qquad H_n''-2xH_n'+2nH_n=0,\qquad (e^{-x^2}H_n')'=-2ne^{-x^2}H_n.$$

Знаем, что формула Родрига примет вид

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\partial_x^n e^{-x^2},\qquad a_n=2^n,$$

тогда

$$\|H_n\|^2=2^n n!\sqrt{\pi}.$$

Рекуррентное соотношение:

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x).$$

Производящаяя функция:

$$\psi(x,z)=e^{-z^2+2zx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}z^n.$$