Задачи к экзамену «Квантовая механика II»

Авторы заметок: Хоружий Кирилл
Примак Евгений

От: *22 мая 2022 г.*

Содержание

№1. Линейный эффект Штарка в атоме водорода

Переписать интегралы в сферических гармониках. Теперь рассмотрим возмущение, вила

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + \hat{V}, \qquad \hat{V} = -eE\hat{z}$$

Известно, что $n = 2$, тогда вырождение $n^2 = 4$. Можем явно выписать несколько функций

$$|200\rangle = \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{z}{2a}\right)^{3/2} e^{-r/2a} \left(1 - \frac{r}{2a}\right),$$

$$|210\rangle = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \left(\frac{1}{2a}\right)^{3/2} e^{-r/2a} \frac{r}{\sqrt{3}a},$$

а для $|211\rangle$ и $|21-1\rangle$ важно только что есть фактор $e^{im\varphi}$.

Действительно,

$$\langle 21m|\hat{V}|21m'\rangle = 0, \qquad m,\, m' = \pm 1.$$

Осталось посчитать

$$\kappa \overset{\text{def}}{=} \langle 200|\hat{V}|210\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \ldots d^3\boldsymbol{r} = 3eE\frac{a}{z}.$$

Получилось матрица ненулевыми коэффициентами только в первом блоке 2 на 2:

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = \kappa, \qquad \lambda_2 = -\kappa, \qquad \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Решая секулярное уравнение, находим

$$E_2 = -\frac{\text{Ry}}{2^2}, \qquad \left[\hat{H} + \hat{V} - (E_2 \pm \kappa)\mathbb{1}\right]|\psi\rangle = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{c}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1,\, 1,\, 0,\, 0\right), \qquad \boldsymbol{c}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1,\, -1,\, 0,\, 0\right).$$

Энергии расщепления

$$E^+ = E_2^{(0)} + \kappa, \qquad E^- = E_2^{(0)} - \kappa.$$

№2. Матричный элемент оператора эволюции для свободной частицы

Матричный элемент. Найдём матричный элемент опратора эволюции для свободной частицы

$$Z[0] = \langle q_N|U(t'', t')|q_0\rangle = \int \mathcal{D}q\ \mathcal{D}p\ e^{\frac{i}{\hbar}S} = \lim_{N\to\infty} \int \frac{dp_N}{2\pi\hbar} \prod_{k=1}^{N-1} \frac{dq_k\ dp_k}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{N}\left(p_k\dot{q}_k\, dt - \frac{p_k^2}{2m}\, dt\right)\right).$$

Перепишем аргумент экспоненты в виде

$$\sum_{k=1}^{N} p_k\dot{q}_k\, dt - \frac{p_k^2}{2m}\, dt = \sum_{k=1}^{N-1} q_k(p_k - p_{k+1}) + q_N p_N - q_0 p_1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{p_k^2}{2m}\, dt$$

Вспоминая, что

$$\int_{\mathbb{R}} dt\ \delta(t) e^{i\omega t} = 1, \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} = \delta(t),$$

можем проинтегрировать по всем координатам и получить

$$\int \exp\left(\frac{i}{\hbar} q_k(p_k - p_{k+1})\right) = 2\pi\hbar\, \delta(p_k - p_{k+1}), \qquad k = 1, \ldots, N-1.$$

Теперь интегрирование по импульсу тривиально:

$$Z[0] = \lim_{N\to\infty} \int \frac{dp_N}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_N(q_N - q_0) - \frac{p_N^2}{2m}\underbrace{N\, dt}_{t''-t'}\right) = \sqrt{\frac{-im}{2\pi\hbar(t''-t')}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{(q''-q')^2}{t''-t'}\right),$$

где мы воспользовались

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2+bx}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a}, \qquad \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ix^2}\, dx = e^{\pm i\pi/4}\sqrt{\pi}.$$

Уравнение Шрёдингера. Убедимся, что $Z[0] = \langle q|U(t,t')|q'\rangle$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar\partial_t Z = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_q^2 Z.$$

Введем для удобства

$$\sqrt{\frac{-im}{2\pi\hbar(t''-t')}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{(q''-q')^2}{t''-t'}\right) \overset{\text{def}}{=} \alpha e^{\beta}.$$

Тогда

$$\partial_t Z = \alpha\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{t-t'} - \frac{im}{2\hbar}\frac{(q-q')^2}{(t-t')^2}\right)e^{\beta}, \qquad \partial_q Z = \alpha\frac{im}{\hbar}\frac{q-q'}{t-t'}e^{\beta}, \qquad \partial_q^2 Z = \frac{i\alpha m}{\hbar(t-t')}\left(1+\frac{im}{\hbar}\frac{(q-q')^2}{t-t'}\right)e^{\beta},$$

что и требовалось доказать.

№6. Сумма по поляризациям спиноров Дирака

Для покоящихся спиноров сумму по поляризациям

$$\Pi(\mathbf{0}) = \sum_{\lambda} u_{\lambda}(\mathbf{0})\bar{u}_{\lambda}(\mathbf{0})$$

можем вычислить в явном виде, как прямое проивзедение

$$\Pi(\mathbf{0}) = mc\,(1,\,0,\,1,\,0)\otimes\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + mc\,(0,\,1,\,0,\,1)\otimes\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = mc\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

В ковариантном виде

$$\Pi(\mathbf{0}) = mc\,(\gamma_0 + \mathbb{1}) = (\not{k} + mc), \qquad k_{\mu} = (mc,\,\mathbf{0}).$$

Можем посчитать (посчитать), что $\Lambda\not{k}\Lambda^{-1} \to \not{p}$, откуда сразу находим

$$\Pi(\boldsymbol{p}) = (\not{p} + mc), \qquad \Pi^c(\boldsymbol{p}) = \sum_{\lambda} v_{\lambda}(\boldsymbol{p})\bar{v}_{\lambda}(\boldsymbol{p}) = (\not{p} - mc),$$

где $\not{p} = p_{\mu}\gamma^{\mu} = p_0\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}$.

№15. Эффект Рамзауэра

Найдём сечение рассеяния медленных частиц на глубокой сферической яме радиуса a_0. Потеницал

$$U(r) = \begin{cases} -U_0, & r \leqslant a_0,\\ 0, & r > a_0. \end{cases}$$

Теперь

$$R_{k0} = \frac{1}{r}u(r), \qquad u(0) = 0, \qquad -\frac{\hbar^2}{2m}u'' + Vu = Eu.$$

Для $r > a$ $u'' + k^2 u = 0$, тогда

$$u_{\text{II}} = A\sin(kr + \delta_0).$$

Для $r \leqslant a$

$$u'' + (k^2 + \varkappa^2)u = 0, \qquad k_u^2 \overset{\text{def}}{=} k^2 + \varkappa^2, \qquad U_0 = \frac{\hbar^2\varkappa^2}{2m}, \qquad \Rightarrow \qquad u_{\text{I}} = B\sin(k_u r).$$

Решение для радиальной волновой функции при $l = 0$ запишется в виде

$$R_{k0}(r) = \begin{cases} A\frac{1}{k_u r}\sin(k_u r), & k_u^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E + U_0), \quad r \leqslant a_0,\\ B\frac{1}{kr}\sin(kr + \delta_0) & k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E, \quad r > a_0, \end{cases}$$

где A, B определяются из непрерывности $R_{k0}(r)$. Фазу можем найти из

$$\left.\frac{R'_{k0}(r)}{R_{k0}(t)}\right|_{r=a_0-0} = \left.\frac{R'_{k0}(r)}{R_{k0}(t)}\right|_{r=a_0+0},$$

Из непрерывности лоагрифмической производной, находим

$$\operatorname{tg}(ka_0 + \delta_0) = \frac{k}{k_u}\operatorname{tg}(k_u a_0), \qquad \Rightarrow \qquad \delta_0 = -ka_0 + \operatorname{arctg}\left(\frac{k}{k_u}\operatorname{tg}(k_u a_0)\right).$$

Рассмотрим случай $\operatorname{tg}(k_u a) \to \pm\infty$. Тогда $\delta_0 \approx \operatorname{arctg}(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$, что ещё называют резонансным рассеянием, так как $\sin\delta_0 = \pm 1$. Также посмотрим на $\frac{\operatorname{tg}(\tilde{k}a)}{\tilde{k}a} \approx 1$, тогда $\delta_0 \approx 0$, и получается $k_u a \ll 1$ и $f_0 \to 0$ – эффект Рамзаура.

№16. Рассеяние тождественных частиц

Для двух тождественных частиц можем написать Ψ в виде
$$\Psi(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{r}_2,\, s_1,\, s_2) = \Phi(\boldsymbol{R})\psi(\boldsymbol{r})\chi(s_1,\, s_2),$$
для приведенной массы $\mu = m/2$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{R}$ – координанты центра масс.

$\boldsymbol{\alpha}$-частицы. Спин α-частицы равен нулю, так что говорим про Ψ для бозонов, симметричную по перестановкам. Тогда асмиптотика на бесконечности имеет вид
$$\psi(\boldsymbol{r})|_{r\to\infty} \sim e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} + e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} + \left(f(\theta) + f(\pi-\theta)\right)\frac{e^{ikrsv}}{r}.$$
Тогда сечение рассеяние может быть записано в виде
$$d\sigma = |f(\theta) + f(\pi-\theta)|^2\, d\Omega.$$

№18. Фазы рассеяния

Изменить константу $\beta \to \frac{\hbar^2\beta^2}{2m}$. Для потенциала, вида
$$V(r) = \frac{\beta}{r^2}, \qquad \beta > 0,$$
найдём фазы рассеняи δ_l.

Запишем уравнение Шредингера для парциальной волны $u_l(r) = rR_l(r)$:
$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{1}{r^2}\left(l(l+1) + \frac{2m\beta}{\hbar^2}\right)\right)u_l(r) = 0.$$
Рассмотрим замену $u_l(r) = \sqrt{r}\varphi(r)$
$$\varphi'' + \frac{1}{r}\varphi' + \left(k^2 - \frac{1}{r^2}\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2m\beta}{\hbar^2}\right)\right)\varphi = 0,$$
решения которого знаем в виде функций Бесселя $J_{\pm\nu}(kr)$, где
$$\nu = \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2m\beta}{\hbar^2}}.$$
Требуя $u_l(0) = 0$, находим решение в виде
$$u_l(r) = c\sqrt{\frac{\pi kr}{2}}J_\nu(kr).$$
Полезно посмотреть асмиптотику на бесконечности, для которой
$$u_l(r) \sim c\sin\left(kr - \frac{\pi\nu}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = c\sin\left(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l\right),$$
откуда находим искомые фазы рассеяния
$$\delta_l = -\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2m\beta}{\hbar^2}} - \left(l+\frac{1}{2}\right)\right).$$

Предельный случай. В пределе $2m\beta/\hbar^2 \ll 1$ получаем
$$\delta_l \approx -\frac{\pi}{2}\frac{m\beta}{\hbar^2(l+\frac{1}{2})},$$
откуда также получаем $|\delta_l| \ll 1$.

В таком случае можем просуммировать ряд
$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left(e^{2i\delta_l}-1\right)P_l(\cos\theta) \approx \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\delta_l P_l(\cos\theta) \approx -\frac{\pi m\beta}{\hbar^2 k}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta).$$
Суммируя полиному Лежанда, находим
$$f(\theta) \approx -\frac{\pi m\beta}{2k\hbar^2\sin(\theta/2)},$$
аналогично тому, что получили бы в борновском приближении.

№19. Рассеяние в борновском приближении

Рассмотрим в борновском приближении два короткодейтсвующих потенциала. Амплитуда рассения может быть найдена в виде

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int V(r)e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}\,d^3\boldsymbol{r} = -\frac{2m}{\hbar^2 q}\int_0^\infty V(r)\sin(qr)r\,dr, \qquad \boldsymbol{q} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}, \qquad q = 2k\sin(\theta/2).$$

Полное сечение рассения находим интегрируя амплитуду рассеяния:

$$\sigma = \int |f(\theta)|^2\,d\Omega = 2\pi\int_0^\pi |f(\theta)|^2\sin\theta\,d\theta.$$

Условие применимости запишется в виде

$$\frac{m}{2\pi\hbar^2}\left|\int \frac{e^{ikr}}{r}V(r)e^{ikz}\,d^3r\right| \ll 1.$$

Потенциал Юкавы. Подставляя $V(r) = \frac{\alpha}{r}e^{-\kappa r}$, находим

$$f = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2(\kappa^2+q^2)}, \qquad \Rightarrow \qquad \sigma = \left(\frac{m\alpha}{\hbar^2\kappa}\right)^2\frac{4\pi}{4k^2+\kappa^2}, \qquad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

Условие применимости для любых энергий: $\alpha m/\kappa \ll \hbar^2$. Для быстрых частиц можем ослабить условие до $\alpha \ll \hbar \times \hbar k/m$.

В пределе $\kappa \to 0$ получить резерфодовское сечение на отталкивающем кулоновском центре.