Учёт многоуровневости ^{7}Li

Авторы: Хоружий Кирилл
Рузайкин Трофим

От: *19 февраля 2022 г.*

1 Кинетическое уравнение

Уравнение Лиувилля. Эволюцию матрицы плотности знаем из уравнения Лиувилля [1]:

$$i\hbar\,\partial_t\hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}]. \tag{1}$$

Далее будет феноменологически введено спонтанное излучение, также считаем неизменным излучение лазера, поэтому гамильтониан сводится к

$$H = H^{\mathrm{A}} + H^{\mathrm{I}},$$

где H^{A} – гамильтониан атома, H^{I} – взаимодейтвие атома с полем.

Атомарный гамильтониан. Матричное представление для $\hat{H}^A$ диагонально:

$$H^A_{\beta\alpha} = \hbar\omega_{\beta\gamma}\delta_{\beta\alpha},$$

где $|\gamma\rangle$ выбран за нижнее g-состояние. Можем найти

$$[H^A,\, \hat{\rho}]_{\beta\alpha} = \sum_a \langle\beta|\, \hat{H}^A|a\rangle\langle a|\hat{\rho}\,|\alpha\rangle - \sum_b \langle\beta|\,\hat{\rho}|b\rangle\langle b|\hat{H}^A\,|\alpha\rangle = \hbar\omega_{\beta\gamma}\rho_{\beta\alpha} - \hbar\omega_{\alpha\gamma}\rho_{\beta\alpha} = \hbar\rho_{\beta\alpha}\omega_{\beta\alpha}.$$

Гамильтониан взаимодействия. ... И получаем (для бегущей волны)

$$H^I_{\beta\alpha} = \hbar\Omega_{\beta\alpha}e^{i\omega t - ikz},$$

где $\Omega_{\beta\alpha} = 0$, z – положение атома относительно лазерного излучения.

В насыщенной спектроскопии мы работаем с атомарным газом, определяющим уширением в динамике будет зависимсоть $z(t)$. Действительно, считая что атом движется со скоростью v, под углом θ к пучку, находим

$$z(t) = vt\cos\theta, \qquad \Rightarrow \qquad i\omega t - ikz(t) = it\left(\omega - \frac{\omega}{c}v\cos\theta\right)$$

где для каждого атома считаем $z(0) = 0$. Получается, что для атома появляется доплеровский сдвиг:

$$\omega' = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right).$$

Далее будем расматривать распределение Максвелла по v_z, тогда $H^I_{\beta\alpha}$ перепишется в виде

$$H^I_{\beta\alpha} = \hbar\Omega_{\beta\alpha}e^{i\omega' t}, \qquad \omega' = \omega\left(1 - \frac{v_z}{c}\right).$$

Замена переменных. Жизнь станет лучше, если перейдём к новым недиагональным элементам [2] $\tilde{\rho}_{\beta\alpha}$:

$$\tilde{\rho}_{\beta\alpha} = \rho_{\beta\alpha}e^{i\omega t(1-\delta_{\alpha\beta})} = \begin{cases}\rho_{\beta\alpha}e^{i\omega t}, & \beta \neq \alpha,\\ \rho_{\beta\alpha}, & \beta = \alpha.\end{cases}$$

Тогда производная по времени перепишется в виде

$$\partial_t\rho_{\beta\alpha} = \left(\partial_t\tilde{\rho} - i\omega\tilde{\rho}_{\beta\alpha}\right)e^{-i\omega t}.$$

Тогда уравнение на $\partial_t\tilde{\rho}_{\beta\alpha}$:

$$i\hbar\,\partial_t\tilde{\rho}_{\beta\alpha} = \hbar(\omega_{\beta\alpha} - \omega)\tilde{\rho}_{\beta\alpha} + \sum_j\left(H^I_{\beta j}\tilde{\rho}_{j\alpha} - \tilde{\rho}_{\beta j}H^I_{j\alpha}\right).$$

Спонтанное излучение. К уравнению (1) мы добавляем релаксационное слагаемое для феноменологического описания [2, 3] спонтанного излучения:

$$i\hbar\partial_t\hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}] + i\hbar\mathcal{L}^{\mathrm{relax}}_{\beta\alpha}(\hat{\rho}).$$

Разделим уровни в системе на g-уровни $\{\mathrm{g}\}$ и e-уровни $\{\mathrm{e}\}$. Тогда $\mathcal{L}_{\mathrm{relax}}(\hat{\rho})$ перепишется в виде

$$\mathcal{L}^{\mathrm{relax}}_{\beta\alpha}(\hat{\rho}) = \begin{cases}-\frac{1}{2\tau}\rho_{\beta\alpha}, & \beta\in\{\mathrm{e}\}, \alpha\in\{\mathrm{g}\},\\ -\frac{1}{\tau}\rho_{\beta\beta}, & \beta = \alpha \in\{\mathrm{e}\},\\ +\frac{1}{\tau}\sum\limits_{\gamma\in\{\mathrm{e}\}}(C_{\gamma\alpha})^2\rho_{\gamma\gamma}, & \beta = \alpha\in\{\mathrm{g}\}.\end{cases}$$

2 Усреднение

Итак, для заданной скорости v_z (далее просто v) можем найти $\rho_v(t)$. Далее будем работать с усредненным значением

$$\bar{\rho}_v = \frac{1}{n_t}\sum_{j=0}^{n_t}\rho\left(v,\, t_j\right),$$

где n_t – количество точек по которым проиходит усреднение, $t_j = j \cdot dt$, dt – шаг[1] усреднения по времени.

Зная распределение по v:

$$f(v)\, dv = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}} T}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_{\mathrm{B}}T}\right)\, dv,$$

можем найти среднее по атомам значение для $\hat{\rho}$:

$$\bar{\rho} = \sum_{i=1}^{n_v}\bar{\rho}_v(v)f(v),$$

где $n_v \approx 200$, скорости v берём до $3v_Q = \sqrt{\frac{k_{\mathrm{B}}T}{m}}$.

[1] По советам [2] возьмём $dt \approx 0.2$ нс и $n_t \cdot dt \approx 50\tau$.

Хочется научиться переходить от уравнений вида
$$\partial_t \boldsymbol{v} = M(t)\boldsymbol{v},$$
к уравнениям вида
$$\partial_t \boldsymbol{v} = \tilde{M}\boldsymbol{v}.$$
А именно систему
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\cos(\omega t) \\ 0 & -1 & -2\cos(\omega t) \\ -\cos(\omega t) & \cos(\omega t) & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$
хочется представить в виде
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\sigma(\omega) \\ 0 & -1 & -2\sigma(\omega) \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$
Нас интересует только предельные значения $\boldsymbol{v}$ при $t \to \infty$. По идее $\sigma(\omega)$ должна получиться в виде резонансного контура Лоренца.

$$\sigma(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$$

3 Приложение

Двухуровневая система. В качестве тестового примера рассмотрим двухуровневую систему:

$$\{\mathrm{g}\} = \{1\}, \qquad \{\mathrm{e}\} = \{2\}.$$

Трёхуровневая система. В качестве наглядного примера рассмотрим V-систему ($\{\mathrm{g}\} = \{1\}$, $\{\mathrm{e}\} = \{2,\, 3\}$) и Λ-систему($\{\mathrm{g}\} = \{1, 2\}$, $\{\mathrm{e}\} = \{3\}$)

$$\mathcal{L}^V_{\beta\alpha}(\hat{\rho}) = \frac{1}{\tau}\begin{pmatrix} C^2_{21}\rho_{22} + C^2_{31}\rho_{33} & \dots & \dots \\ -\frac{1}{2}\rho_{21} & -\rho_{22} & \dots \\ -\frac{1}{2}\rho_{31} & \dots & -\rho_{33} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{L}^\Lambda_{\beta\alpha}(\hat{\rho}) = \frac{1}{\tau}\begin{pmatrix} C^2_{31}\rho_{33} & \dots & \dots \\ \dots & C^2_{32}\rho_{33} & \dots \\ -\frac{1}{2}\rho_{31} & -\frac{1}{2}\rho_{32} & -\rho_{33} \end{pmatrix},$$

где через $\dots$ обозначены компоненты ρ, эволюция которых нам не интересна.

Список литературы

[1] Leonard Mandel and Emil Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995.

[2] L Maguire, R Bijnen, Emine Mese, and R Scholten. Theoretical calculation of saturated absorption spectra for multi-level atoms. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys*, 39:2709–2720, 06 2006.

[3] Allen L and Eberly J H. *Optical Resonance and Two-Level Atoms*. New York: Wiley, 1975.