

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ К ПИСЬМЕННОМУ ЭКЗАМЕНУ «УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

Автор заметок: Хоружий Кирилл

От: 31 мая 2022 г.

Содержание

1	ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ	2
2	СТАТИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯ	2
	Задача Штурма-Лиувилля	2
	Метод Фурье в задаче Штурма-Лиувилля	3
	Уравнения Пуассона и Лапласа	4
	Двумерные гармонические функции	4
3	СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ	4
	Γ, ψ, B -функции	4
	Функция Эйри	5
	Функции Бесселя	6
	Ортогональные полиномы	6
4	ДИНАМИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯ	7
	Волновое уравнение	7
	Уравнение Гельмгольца	8
	Уравнение теплопроводности	8
5	ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	8
	Линейные интегральные уравнения	9
	Нелинейные интегральные уравнения	10
	Сингулярные интегральные уравнения	11
6	ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРУПП	12
	Теория групп	12
	Теория представлений	12
	Таблицы неприводимых представлений	13
7	ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ	13
	Автомодельные решения	13
	Метод Боголюбова-Крылова	13
	Уравнения Хопфа и Бюргерса	14
8	СПРАВОЧНИК	14
	Вычеты	14
	Интегралы	15
	Преобразование Фурье	15
	Преобразование Лапласа	15
	Преобразование Меллина	15

1 ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Функция Грина. Для уравнений вида $\hat{L}x = \varphi$, бывает удобно найти G , как решение уравнения $\hat{L}G = \delta$:

$$\hat{L}x(t) = \varphi(t), \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s)\varphi(s)ds, \quad \hat{L}G = \delta(t), \quad (1.1)$$

если \hat{L} – линейный оператор. И, если хочется добавить начальные условия, то для \hat{L} второго порядка будет

$$x(t) = \dot{x}(0)G(t) + x(0)\dot{G}(t) + \int_0^t G(t-s)\varphi(s)ds.$$

Для уравнений первого порядка $\hat{L} = \partial_t + \gamma$:

$$\hat{L} = \partial_t + \gamma, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \theta(t) \exp(-\gamma t). \quad (1.2)$$

Для осциллятора $\hat{L} = \partial_t^2 + \omega^2$, тогда

$$\hat{L} = \partial_t^2 + \omega^2, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \theta(t) \frac{\sin(\omega t)}{\omega}. \quad (1.3)$$

В общем случае подстановка причинной функции Грина $G(t) = \theta(t)g(t)$ для $\hat{L}: L(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ приводит к условиям

$$\partial_t^{n-1}g(0) = 1, \quad \partial_t^m g(0) = 0, \quad m = 0, \dots, n-2,$$

который позволяют методом неопределённых коэффициентов найти G из уравнения $\hat{L}G(t) = \delta(t)$. **Проявляем аккуратность при наличии кратных корней у $L(z) = 0$, когда возникают секулярные члены. Нужен пример.**

Матричное уравнение. Решение линейного уравнения для векторной величины \mathbf{y}

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} + \hat{\Gamma}\mathbf{y} = \chi,$$

может быть найдено, через функцию Грина, вида

$$\hat{G}(t) = \theta(t) \exp(-\hat{\Gamma}t), \quad \mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^t \hat{G}(t-s)\chi(s)ds. \quad (1.4)$$

Удобно $\hat{\Gamma}$ привести к ЖНФ, а потом вспомнить, что матричная экспонента от жордановой клетки \hat{J} имеет вид

$$\exp(-\hat{J}t) = e^{-\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Функция Грина через преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа функции $\Phi(t)$ определяется:

$$\tilde{\Phi}(p) = \int_0^\infty \exp(-pt)\Phi(t)dt, \quad \Phi(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt)\tilde{\Phi}(p),$$

где далее c выбираем правее всех особенностей для причинности.

Решение уравнения $L(\partial_t)G(t) = \delta(t)$ может быть найдено, как

$$G(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt)\tilde{G}(p), \quad \tilde{G}(p) = \frac{1}{L(p)}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \sum_i \text{res}_i \frac{\exp(pt)}{L(p)}, \quad (1.5)$$

где суммирование идёт по полюсам $1/L(p)$.

Кстати. Бывает удобно сделать функции маленькими

$$\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \tilde{f}(p)e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \frac{\tilde{f}(p)}{p^n} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}.$$

2 СТАТИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯ

Задача Штурма-Лиувилля

Постановка задачи. Задача Штурма-Лиувилля:

$$\hat{L} = \partial_x^2 + Q(x)\partial_x + U(x), \quad \hat{L}f(x) = \varphi(x), \quad \begin{cases} \alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = 0 \\ \alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где¹ $|\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0$ и $|\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0$.

¹Часто можно встретить нулевые граничные условия: $f(a) = f(b) = 0$.

Граничные условия. С учетом того, что функция Грина G наследует граничные условия:

$$\alpha_1 G(a, y) + \beta_1 G'_x(a, y) = 0,$$

$$\alpha_2 G(b, y) + \beta_2 G'_x(b, y) = 0.$$

Запишем уравнение на $G(x, y)$:

$$\hat{L}G(x, y) = \delta(x - y).$$

Решение этого уравнения можем найти решая две системы на $u(x)$ при $x < y$ и $v(x)$ при $x > y$:

$$\begin{cases} \hat{L}u(x) = 0 \\ \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{L}v = 0 \\ \alpha_2 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0 \end{cases}$$

Теперь можем выписать ответ

$$G(x, y) = \frac{1}{W(y)} \begin{cases} v(y)u(x), & x < y, \\ v(x)u(y), & x > y, \end{cases} \quad W[u, v](y) = v'(y)u(y) - v(y)u'(y). \quad (2.2)$$

Который существует и единственен для $W \neq 0$. Для $W = \text{const}$ $G(x, y) = G(y, x)$, а значит \hat{L}^{-1} – симметричный самосопряженный оператор, и у \hat{L} есть ОНБ из собственных функций.

Кстати. Бывает удобно найти $W(x)$, записав формулу Лиувилля-Остроградского

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} = W(x_0) \exp \left(- \int_{x_0}^x Q(z) dz \right).$$

Def 2.1. *Специальной ФСП* называется решение уравнения $\hat{L}u = 0$ и $\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0$, и аналогичного уравнения по $v(x)$ с граничным условием в b , если $W[u, v] \neq 0$, то есть u и v линейно независимы.

МЕТОД ФУРЬЕ В ЗАДАЧЕ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Допустим мы в \mathcal{H} , соответственно есть $\langle x|y \rangle$. Рассмотрим некоторый достаточно хороший самосопряженный компактный оператор \hat{L} , у которого есть ОНБ из собственных функций: $\hat{L}e_n = \lambda_n e_n$.

Thr 2.2 (thг Гильберта-Шмидта). Если \hat{L} – компактный² ССО, то у A есть ОНБ из собственных функций.

Вернемся к оператору Штурма-Лиувилля, который живет в $\mathcal{H} = L_2[a, b]$:

$$\hat{L} = A(x)\partial_x^2 + B(x)\partial_x + C(x), \quad \langle f|g \rangle = \int_a^b f \bar{g} dx.$$

Для задачи Штурма-Лиувилля \hat{L} симметричен, при $B(x) = A'(x)$.

Тогда можем найти функцию Грина, как решение уравнения $\hat{L}G(x, y) = \delta(x - y)$

$$G(x, y) = \sum_n g_n(y) e_n(x), \quad \delta(x - y) = \sum_n \delta_n(y) e_n(x).$$

Находим коэффициенты Фурье:

$$\delta_n(y) = \frac{\bar{e}_n(y)}{\langle e_n | e_n \rangle}, \quad \Rightarrow \quad g_n(y) = \frac{1}{\lambda_n} \frac{\bar{e}_n(y)}{\langle e_n | e_n \rangle}. \quad (2.3)$$

Проблема возникает при $\lambda_n = 0$.

Наличие у оператора собственного числа $\lambda_n = 0$ называется *нулевой модой*. Рассмотрим оператор:

$$\hat{L} = \partial_x^2,$$

для которого $e_n(x) = e^{inx}$, где $\langle e_n | e_n \rangle = 2\pi$, где $e_0 = 1$ и $\lambda_0 = 0$. Пусть тогда

$$\delta(x) = \sum \frac{\bar{e}_n(0) e_n(x)}{\langle e_n | e_n \rangle} = \sum \frac{e^{inx}}{2\pi}, \quad G(x) = \sum g_n e_n(x).$$

но для $\hat{L}G = \delta(x)$ оказывается нет решений (справа e_0 есть, а слева нет).

В общем, проблема уйдёт, если рассмотрим уравнение, вида

$$\hat{L}G(x) = \delta(x) - e_0(x) = \delta(x) - \frac{1}{2\pi},$$

то есть справа единичный оператор только на образе $\text{Im } \hat{L}$. Если в источнике есть нулевая мода, то уравнение не имеет решений.

² $\mathcal{D}(A)$ – компакт в гильбертовом пространстве.

УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА И ЛАПЛАСА

Научимся решать *уравнение Пуассона* $\nabla^2 f = \varphi$, которое при $\varphi = 0$ переходит в *уравнение Лапласа* $\nabla^2 f = 0$. Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа называют *гармоническими*, которые существуют только на некоторой ограниченной области. Иногда бывает проще решать *уравнение Дебая* $(\nabla^2 - \kappa^2)f = \varphi$.

Функция Грина. Решение как обычно можем искать в виде

$$f(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}') d^3 r'.$$

В зависимости от размерности пространства n , функция Грина G_n будет равна

$$G_2(r) = \frac{\ln r}{2\pi}, \quad G_3(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi r}, \quad G_{n>2}(x) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \frac{1}{r^{n-2}}, \quad (2.4)$$

где S_n равно площади $n - 1$ мерной единичной сферы.

Кстати. Для уравнения Дебая в \mathbb{R}^3 функция Грина с $\hat{L} = \nabla^2 - \kappa^2$ будет равна

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{e^{-\kappa r}}{4\pi r}.$$

Для сферически симметричного потенциала $\varphi(\mathbf{r}) \equiv \varphi(r)$, решение уравнения Пуассона упростится до

$$f(r) = \frac{1}{r} \int_0^r \varphi(\rho) \rho^2 d\rho + \int_r^\infty \varphi(\rho) \rho d\rho.$$

(проверить)

ДВУМЕРНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Отдельно рассмотрим случай $n = 2$. Часто задача формулируется в виде *задачи Дирихле*:

$$\nabla^2 f = 0, \quad f|_{\partial D} = f_0(\mathbf{r}),$$

то есть функция задана на границе некоторой области. Будем искать решение в виде

$$f(z) = u(z) + iv(z), \quad \nabla^2 u = \nabla^2 v = 0.$$

Если знаем комплексную функцию $f(z)$ такую, что $\operatorname{Re} f|_{\partial D} = f_0$, тогда $\operatorname{Re} f(z)$ решает задачу Дирихле. Далее конформным преобразованием переводим любую область D в круг/полуплоскость, где задача Дирихле решается, а дальше отображаем назад.

Рассмотрим полуплоскость $D = \{(x, y) \mid y > 0\}$, с заданным значением $f(x, 0) = f_0(x)$. Тогда решением будет

$$f(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{\pi} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} f_0(\xi). \quad (2.5)$$

Для круга радиуса R с заданным граничным условием, вида $f(R \cos t, R \sin t) = f_0(t)$ решением будет

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t - \varphi) + r^2} f_0(t). \quad (2.6)$$

3 СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Γ, ψ, B-функции

Гамма-функция. Найдем некоторые интересные свойства:

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt \stackrel{t \rightarrow \tau x}{=} x^{z+1} \int_0^\infty \tau^z e^{-\tau x} d\tau, \quad \frac{1}{x^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \tau^{z-1} e^{-\tau x} d\tau.$$

Существует аналитическое продолжение:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{1 - e^{2\pi iz}} \int_C t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Видим, что у $\Gamma(z)$ есть особенности $z \in \mathbb{Z}$, где $z \in \mathbb{N} - \text{УОТ}$, и $z \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} - \text{П1П}$:

$$\operatorname{res}_{-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad (3.1)$$

Могут пригодиться следующие выражения для Γ -функции:

$$\Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}} \Gamma(2z), \quad \Gamma(z) \Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

А также формула Стирлинга, которую нетрудно получить методом перевода:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{z \ln t - t} dt \approx e^{z \ln z - z} \sqrt{2\pi z} = \sqrt{2\pi z} \left(\frac{z}{e}\right)^z. \quad (3.2)$$

Дигамма-функция. По определению дигамма-функция $\psi(z)$:

$$\psi(z) \stackrel{\text{def}}{=} (\ln \Gamma(z))' = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Заметим, что $\psi(1) = -\gamma$, где $\gamma \approx 0.58$ – постоянная Эйлера-Маскерони. Найдём

$$\psi(z+1) = (\ln z + \ln \Gamma(z))' = \frac{1}{z} + \psi(z), \quad \Rightarrow \quad \psi(N+1) = \frac{1}{N} + \psi(N) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + \psi(1).$$

Также бывает полезно

$$\psi(x+N+1) = \frac{1}{x+N} + \psi(x+N) = \frac{1}{x+N} + \dots + \frac{1}{x+1} + \psi(x+1).$$

Вспомним, что $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$. Тогда

$$\psi(-z) - \psi(z) = \pi \operatorname{ctg} \pi z.$$

Асимптотика для $\psi(z \rightarrow \infty)$:

$$\psi(z \rightarrow \infty) = (\ln \Gamma(z))' = \ln z + \frac{1}{2z} + o(1) = \ln z + o(1).$$

Бета-функция. Рассмотрим B -функцию:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt, \quad \operatorname{Re} \alpha, \beta > 0, \quad B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

которую бывает удобно доставать в интегралах.

Функция Эйри

Метод Лапласа. Рассмотрим дифференциальное уравнение, вида

$$(a_n z + b_n) f^{(n)} + \dots + (a_1 z + b_1) f^{(1)} + (a_0 z + b_0) f^{(0)} = 0, \quad f(z) = \int_C \tilde{f}(p) e^{pz} dp,$$

где $f(p) e^{pz} \big|_{\partial C}^{\forall z} = 0$. Тогда введем полиномы $A(p)$ и $B(p)$ такие, что

$$-\partial_p [A(p)f(p)] + B(p)f(p) = 0, \quad A(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0, \quad B(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0.$$

Решая, находим образ Лапласа

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{A(p)} \exp \left(\int_{p_0}^p \frac{B(t)}{A(t)} dt \right).$$

Метод перевала. Действительный метод перевала:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{f(x)} g(x) dx = g(x_0) e^{f(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}}.$$

Для стационарной фазы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{if(x)} g(x) dx = g(x_0) e^{if(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}} e^{\pm i\pi/4},$$

где \pm согласован с $\operatorname{sign} f''$. Для комплексного метода перевала

$$I = \int_C e^{f(z)} g(z) dz = g(z_0) e^{f(z_0)} e^{i\varphi} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''|}}, \quad \varphi = \frac{1}{2} (\pm\pi - \arg f''(z_0)).$$

Функция Эйри. Решаем уравнение, вида

$$\partial_x^2 f - x f = 0, \quad \Rightarrow \quad f(x) = \int_C e^{xt-t^3/3} dt.$$

Так приходим к

$$\operatorname{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{xt-t^3/3} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(xu + u^3/3) du.$$

Запишем асимптотики на бесконечности:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ai}(z) &\approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{z^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right), & z \rightarrow +\infty \\ \operatorname{Ai}(z) &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(-z)^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), & z \rightarrow -\infty.\end{aligned}$$

В качестве второго решения выбирается

$$\operatorname{Bi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[e^{xu-u^3/3} + \sin(xu+u^3/3) \right] du,$$

с асимптотиками, вида

$$\begin{aligned}\operatorname{Bi}(z) &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{z^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right), & z \rightarrow +\infty \\ \operatorname{Bi}(z) &\approx \frac{1}{\pi} \frac{1}{(-z)^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), & z \rightarrow -\infty.\end{aligned}$$

ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Уравнение Бесселя:

$$\partial_z^2 J_m + \frac{1}{z} J_m + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) J_m = 0,$$

где $J_m(0) \in \mathbb{R}$. Знаем, что

$$e^{iz \sin \varphi} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} J_m(z) e^{im\varphi}, \Rightarrow J_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{iz \sin \varphi} e^{-im\varphi} d\varphi, \Leftrightarrow J_m(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \varphi - m\varphi) d\varphi.$$

Умеем дифференцировать:

$$\frac{dJ_m}{dz} = \frac{J_{m-1}(z)}{2} - \frac{J_{m+1}(z)}{2}, \quad \frac{m}{z} J_m(z) = \frac{1}{2} (J_{m+1}(z) + J_{m-1}(z)), \quad \frac{d}{dz} (z^m J_m(z)) = J_{m-1}(z) z^m. \quad (3.3)$$

Откуда сразу находим

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{J_n(x)}{x^n} \right) = -\frac{J_{n+1}(x)}{x^n}, \quad J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z). \quad (3.4)$$

Умеем раскладывать в ряд и уходить на бесконечность:

$$J_m(z) = \frac{z^m}{2^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{4^k k! (m+k)!}, \quad J_m(z \rightarrow \infty) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

соответственно с нулями в $\frac{\pi}{2} + \pi m$.

Преобразование Фурье от функции:

$$F[J_m(z)](k) = \int_{-\infty}^{+\infty} J_m(z) e^{-ikz} dz = \frac{(-1)^m e^{im\varphi_0} + e^{-im\varphi_0}}{\sqrt{1-k^2}}, \quad \varphi_0 = \arcsin k.$$

В частности

$$F[J_0](k) = \frac{2}{\sqrt{1-k^2}} \theta(1-k^2), \quad F[J_1](k) = \frac{2ik}{\sqrt{1-k^2}} \theta(1-k^2).$$

Преобразование Лапласа:

$$\Lambda[J_m](p) = \int_0^\infty e^{-pz} J_m(z) dz = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}(p+\sqrt{p^2+1})^m}.$$

Например,

$$\int_0^\infty \frac{J_n(z)}{z^n} dz = \frac{1}{(2n-1)!!}.$$

Помним, что $J_m(0) = \delta_{m,0}$.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

Полиномы Лежандра. Дифференциальное уравнение $(a, b = -1, 1)$:

$$\sigma(x) = 1 - x^2, \quad \tau(x) = -2x = \sigma', \quad \rho = 1, \quad (1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0.$$

Формула Родрига:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \partial_x^n (1 - x^2)^n, \quad \alpha_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}, \quad a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.$$

Нормировка:

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

Рекуррентное соотношение:

$$A_n = \frac{\|p_n + 1\|^2}{\langle p_{n+1} | x p_n \rangle} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{n+1}, \quad B_n = 0, \quad C_n = -\frac{n}{n+1},$$

подставляя, приходим к

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n + nP_{n-1}(x) = 0.$$

Производящая функция:

$$\psi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 2zx + 1}}.$$

Умеем дифференцировать

$$(x^2 - 1) \frac{dP_n}{dx} = n(xP_n(x) - P_{n-1}(x)).$$

Полиномы Эрмита. Живут на $(-\infty, +\infty)$, дифференциальное уравнение

$$\sigma = 1, \quad \tau = -2x, \quad \rho(x) = e^{-x^2}, \quad H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0, \quad (e^{-x^2} H_n')' = -2ne^{-x^2} H_n.$$

Знаем, что формула Родрига примет вид

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \partial_x^n e^{-x^2}, \quad a_n = 2^n,$$

тогда

$$\|H_n\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Рекуррентное соотношение:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Производящая функция:

$$\psi(x, z) = e^{-z^2 + 2zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n.$$

Полиномы Лаггера. Живут на интервале от $(0, +\infty)$, с дифференциальным уравнением, вида

$$\hat{L} = x\partial_x^2 + (1 + \alpha - x)\partial_x, \quad \rho = x^\alpha e^{-x},$$

для $\alpha > -1$. Собственные числа $\lambda_n = n$, формула Родрига имеет вид

$$L_n^{(\alpha)} = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \partial_x^n [x^{n+\alpha} e^{-x}].$$

4 ДИНАМИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯ

Граничные условия. Вообще граничные условия можно вводить из разложения

$$u(t \rightarrow 0, \mathbf{r}) \approx \theta(t)u(t=0, \mathbf{r}) + t\theta(t)\partial_t u(t=0, \mathbf{r}) + \dots,$$

тогда действие оператора ∂_t^2 на эти члены дает сингулярные слагаемые

$$(\partial_t^2 + \nabla^2)u(\mathbf{t}, \mathbf{r}) = \delta'(t)u(t=0, \mathbf{r}) + \delta(t)\partial_t u(t=0, \mathbf{r}),$$

которые можем воспринимать как источник.

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Общий подход. Найдём функцию Грина для уравнения, вида

$$(\partial_t^2 + \varpi^2[-i\nabla])u = \chi.$$

Решение запишется в виде

$$(\partial_t^2 + \varpi^2[-i\nabla])G = \delta(t)\delta(\mathbf{r}), \quad u(t, \mathbf{r}) = \int dt_1 d^3r_1 G(t-t_1, \mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\chi(t_1, \mathbf{r}_1).$$

Переходя к пространственному Фурье-образу, приходим к уравнению с известной функцией Грина:

$$(\partial_t^2 + \varpi^2[\mathbf{q}]) \tilde{G} = \delta(t), \quad \Rightarrow \quad \tilde{G}(t) = \theta(t) \frac{\sin(\varpi t)}{\varpi}.$$

Тогда через обратное Фурье-преобразование находим

$$G(t, \mathbf{r}) = \theta(t) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\sin(\varpi t)}{\varphi} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \stackrel{*}{=} \frac{\theta(t)}{\pi r} \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} q \frac{\sin(\varpi[\mathbf{q}]t)}{\varpi[\mathbf{q}]} \sin(qr),$$

где $\stackrel{*}{=}$ верно для $\varpi[\mathbf{q}] \equiv \varpi[q]$.

Например, для $\varpi[\mathbf{q}] = qc$, волновое уравнение с источником:

$$(\partial_t^2 - c^2 \nabla^2) u(t, \mathbf{r}) = \chi(t, \mathbf{r}), \quad G(t, r) = \frac{\theta(t)}{4\pi cr} \delta(r - ct). \quad (4.1)$$

а значит выражение для поля:

$$u(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi c^2} \int d^3 r_1 \frac{\chi(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c, \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}, \quad (4.2)$$

перейти к сферически симметричному случаю.

УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Рассмотрим отдельно уравнение Гельмгольца

$$(\nabla^2 + \varkappa^2) f = \varphi(\mathbf{r}).$$

Как и раньше, запишем найдём решение в виде

$$(\nabla^2 + \varkappa^2) G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}), \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{r}) = f_0(\mathbf{r}) + \int d^3 r_1 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_1),$$

где f_0 – решение однородного уравнения Гельмгольца. Функция Грина:

$$G = -\frac{\exp(i\varkappa r)}{4\pi r},$$

для $\omega > 0$ и $G \rightarrow G^*$ при $\omega < 0$.

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Уравнение диффузии с известным $u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x})$:

$$(\partial_t - \nabla^2) u(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (4.3)$$

решение которого может быть найдено в виде:

$$u(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dy_1 \dots dy_d}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t}\right) u_0(\mathbf{y}). \quad (4.4)$$

Асимптотики могут быть найдены в виде

$$u(t, \mathbf{x}) \approx \frac{A}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{4t}\right), \quad A = \int_{\mathbb{R}^d} dy_1 \dots dy_d u_0(\mathbf{y}). \quad (4.5)$$

При $A = 0$ асимптотика будет соответствовать

$$u(t, \mathbf{x}) \approx \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{x}}{(4\pi t)^{d/2+1}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{4t}\right), \quad \bar{B} = 2\pi \int_{\mathbb{R}^d} dy_1 \dots dy_d \mathbf{y} u_0(\mathbf{y}), \quad (4.6)$$

где асимптотики имеют место при $t \gg l^2$, l – масштаб на котором локализовано поле.

Накачка. При наличии правой части:

$$(\partial_t - \nabla^2) u = \varphi,$$

можем найти функцию Грина для оператора $\partial_t - \nabla^2$

$$u(t, \mathbf{x}) = \int G(t - \tau, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\tau, \mathbf{y}) d\tau d^d \mathbf{y}, \quad G(t, \mathbf{r}) = \frac{\theta(t)}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right).$$

5 ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение Фредгольма. Есть уравнение Фредгольма I рода:

$$\int_a^b ds K(t, s) f(s) = g(t),$$

и уравнение Фредгольма II рода:

$$f(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) f(s) ds, \quad \Leftrightarrow \quad f = g + \lambda \hat{K} f, \quad (5.1)$$

где мы ввели интегральный оператор $\hat{K} f = \int_a^b ds K(t, s) f(s)$. Решение можем найти в виде

$$f = \frac{1}{1 - \lambda \hat{K}} g = \left(\mathbb{1} + \lambda \hat{R} \right) g, \quad \hat{R} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{K} + \lambda \hat{K}^2 + \dots$$

В терминах интегрирования резольвента $R(t, s)$ выражается, как

$$R(t, s) = K(t, s) + \lambda \int_a^b dp_1 K(t, p_1) K(p_1, s) + \lambda^2 \int_a^b dp_1 \int_a^b dp_2 K(t, p_1) K(p_1, p_2) K(p_2, s) + \dots \quad (5.2)$$

Это всё интегрируем, суммируем, получаем $R(t, s)$, и сразу ответ в виде $f = g + \lambda \hat{R} g$.

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Свертка I. Рассмотрим уравнение на φ , вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x - y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (5.3)$$

то есть уравнение Фредгольма первого рода с $(a, b) = \mathbb{R}$ и $K(x, y) = K(x - y)$. Решение можем найти через преобразование Фурье

$$\tilde{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk,$$

которое переводит свёртку в произведение:

$$\tilde{\varphi}(k) = \frac{\tilde{f}(k)}{\tilde{K}(k)}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{f}(k)}{\tilde{K}(k)}. \quad (5.4)$$

Свертка II. Аналогично для уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} dy K(x - y) \varphi(y), \quad (5.5)$$

для которого также

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} dy f(y) R(x - y), \quad R(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{K}(k)}{1 - \lambda \tilde{K}(k)}. \quad (5.6)$$

Уравнение Вольтерра I. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма I на $(a, b) = (0, t)$:

$$f(t) = \int_0^t ds K(t - s) \varphi(s).$$

Здесь хорошо работает преобразование Лапласа

$$f(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} f(p) e^{pt} dp,$$

которое переводит свертку в произведение, а значит можем сразу написать решение

$$\varphi(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \frac{f(p)}{K(p)} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}. \quad (5.7)$$

Уравнение Вольтерра II. Аналогично для уравнения Фредгольма II:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^t K(x - y) \varphi(y) dy, \quad (5.8)$$

находим решение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^t R(t - s) f(s) ds, \quad R(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \frac{K(p)}{1 - \lambda K(p)}.$$

Периодическое ядро I. Рассмотрим $f(t)$ и $K(t)$ периодичные с $T = b - a$, тогда и $\varphi(t)$ периодически по T . Решим уравнение, вида

$$\int_a^b K(t - s) \varphi(s) ds = f(t). \quad (5.9)$$

Раскладывая всё в ряд Фурье (вводя $\omega = \frac{2\pi}{T}$):

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\omega t} f_n, \quad f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{in\omega t} dt.$$

Решение находим в виде суммы

$$\varphi_n = \frac{f_n}{TK_n}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f_n}{TK_n} e^{-in\omega t}. \quad (5.10)$$

Периодическое ядро II. Аналогично можем найти резольвенту для уравнения Фредгольма второго рода:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b ds K(t-s) \varphi(s).$$

Реша $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b ds R(t-s) f(s), \quad R(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{K_n}{1 - \lambda TK_n} e^{-in\omega t}. \quad (5.11)$$

Факторизуемое ядро. Рассмотрим случай, когда ядро вырожденное: $K(t, s) = \sum_i A_i(t) B_i(s)$. Тогда интегральное уравнение переписывается в виде

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum A_i(t) \int_a^b B_i(s) \varphi(s) ds.$$

Решение уравнения можем найти в виде

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum_i C_i A_i(t), \quad (\mathbb{1} - \lambda \hat{M}) \mathbf{C} = \mathbf{\Phi}, \quad \Phi_i = \int_a^b B_i(t) f(t) dt, \quad M_{ij} = \int_a^b B_i(t) A_j(t) dt.$$

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение типа свёртки. Рассмотрим уравнение вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t-s) \varphi(s) = f(t). \quad (5.12)$$

Аналогично смотрим на фурье-образ, откуда находим выражение для $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{f(\omega)} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (5.13)$$

Обобщение. Обобщим происходящее, введя $L(s)$

$$L(s) = \sum_{n=0}^N a_n s^n, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} ds \varphi(t-s) L(s) \varphi(s) = f(t), \quad (5.14)$$

решим в виде

$$\varphi(\omega) L(i\partial_\omega) \varphi(\omega) = f(\omega), \quad (5.15)$$

то есть можем свести интегральное уравнение к дифференциальному.

Лаплас. Рассмотрим уравнение вида

$$\int_0^t ds \varphi(t-s) L(s) \varphi(s) = f(t),$$

решение которого также находится в виде

$$\varphi(p) L(-\partial_p) \varphi(p) = f(p).$$

Периодический случай. Аналогично линейному случаю рассмотрим

$$\int_{-\pi}^{+\pi} ds \varphi(t-s) \varphi(s) = f(t),$$

периодическое с $T = 2\pi$ и $\omega = 1$. Тогда решение находится в виде

$$\varphi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\pm) \sqrt{\frac{f_n}{2\pi}} e^{-int}.$$

Факторизуемое ядро. Для факторизуемого ядра уравнение примет вид

$$\varphi(t) = x(t) \int_a^b ds \varphi^n(s) y(s) + f(t),$$

решение которого можем найти в виде

$$\varphi(t) = \alpha x(t) + f(t), \quad \alpha: \alpha = \int_a^b dt y(t) (\alpha x(t) + f(t))^n,$$

где α задан неявно алгебраическим уравнением.

Факторизуемое ядро на причинном интервале. Для уравнения на интервале $[0, t]$ уравнение вида

$$\varphi(t) = f(t) + x(t) \int_0^t ds y(s) \varphi^n(s),$$

может быть сведено к дифференциальному уравнению по $z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t)/x(t)$:

$$z'(t) = y(t)x^n(t)z^n(t) + \frac{d}{dt} \left(\frac{f(t)}{x(t)} \right), \quad z(0) = \frac{f(0)}{x(0)}.$$

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сингулярные интегральные уравнения. Основой решения станет *формула Соболевского*:

$$\text{v. p.} \int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0} dx = \pm i\pi f(x_0) + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0 \pm i\varepsilon} dx. \quad (5.16)$$

Полезно ввести преобразование Гильберта \hat{H} :

$$\hat{H}\varphi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y) dy}{2\pi} \left(\frac{1}{y - x + i\varepsilon} + \frac{1}{y - x - i\varepsilon} \right),$$

для которого верно, что $\hat{H}^2 = -\mathbb{1}$.

Тогда *простейшее сингулярное уравнение* вида

$$\pi \hat{H}\varphi(x) + \lambda \varphi(x) = f(x) \quad (5.17)$$

будет иметь решение относительно $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \pi^2} f(x) - \frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} \hat{H}[f](x) = \frac{1}{\lambda + i\pi} f(x) - \frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{f(y)}{y - x + i\varepsilon}. \quad (5.18)$$

Сингулярные интегральные уравнения с полиномиальными коэффициентами. Рассмотрим уравнение вида

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(y)}{y - x} dy = x^2 \varphi(x) + f(x).$$

Применяя оператор $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x - z + i\varepsilon}$, приходим к уравнению

$$-\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y - z + i\varepsilon} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2 \varphi(y)}{y - z + i\varepsilon} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y - z + i\varepsilon} dy.$$

Здесь можем провести следующие рассуждения:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(y - z + i\varepsilon + z - i\varepsilon)}{y - z + i\varepsilon} \varphi(y) dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \varphi(y) dy + z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y - z + z}{y - z + i\varepsilon} \varphi(y) dy = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y \varphi(y) dy}_{C_1} + z \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy}_{C_2} + z^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y - z + i\varepsilon} dy, \end{aligned}$$

а значит исходное уравнение переписывается в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y - z + i\varepsilon} dy = -\frac{1}{z^2 + i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y - z + i\varepsilon} dy - \frac{C_1 + C_2 z}{z^2 + i\pi},$$

решение которого мы уже знаем:

$$\varphi(x) = -\frac{C_1 + C_2 x}{x^4 + \pi^2} - \frac{f(x)}{x^2 - i\pi} - \frac{1}{x^4 + \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y - z + i\varepsilon} dy.$$

Сингулярные интегральные уравнения на отрезке. Рассмотрим уравнение на конечном отрезке

$$\text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(y)}{y - x} dy = f(x).$$

Решение можем найти при условии на f : $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$, тогда

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi i} \left(f(x) + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(y) dy}{\sqrt{1-y^2}(y-x+i\varepsilon)} \right).$$

6 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРУПП

ТЕОРИЯ ГРУПП

Сопряженными (из одного класса сопряженности) называть элементы $g \sim h$ такие, что $\exists r \in G, g = rhr^{-1}$. Далее классы сопряженности будем обозначать за C_1, \dots, C_k , элементы в них за $h_i \in C_i$.

Циклическая группа C_n

$$C_n = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}, \quad r^n = 1.$$

Для C_n каждый элемент становился представителем класса сопряженности в силу того, что группа абелева.

Группа перестановок S_n

$$S_n = \left\{ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \right\},$$

разбивается на классы сопряженности с одинаковой циклической структурой:

$$S_2 \rightarrow \{1\}, \{(a, b)\}, \quad S_3 \rightarrow \{1\}, \{(a, b)\}, \{(a, b, c)\}, \quad S_4 \rightarrow \{1\}, \{(a, b)\}, \{(a, b, c)\}, \{(a, b, c, d)\}, \{(a, b)(c, d)\}.$$

Также в $S_n \forall \sigma$ раскладывается в циклы, а циклы в транспозиции, определенной оказывается величина четность σ . Для неё выполняется

$$\text{sign}(\sigma_1 \cdot \sigma_2) = \text{sign}(\sigma_1) \cdot \text{sign}(\sigma_2), \quad \text{sign}(a, b) = -1, \quad \text{sign}(i_1, i_2, \dots, i_d) = \begin{cases} +1, & d \not\equiv 2, \\ -1, & d \equiv 2. \end{cases}$$

Четностью перестановки называют количество пар $i < j$ таких, что $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Группа D_n симметрий правильного n -угольника состоит из r – поворотов на $2\pi/n$ и s – отражений относительно какой-то выбранной оси. Для $n:2 = 0$ получаются классы сопряженности $\{r^b, r^{n-b}\}, \{s, sr^2, sr^4, \dots\}$ и $\{sr, sr^3, sr^5, \dots\}$. Для $n \not\equiv 2$ получится $\{r^b, r^{n-b}\}$ и $\{s, sr, sr^2, \dots\}$.

ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Далее работаем с конечными группами $|G| < +\infty$. Элемент группы обозначим за $g \in G$. *Представление* группы определяют как гомоморфизм $\rho: G \mapsto \text{GL}(V, \mathbb{C})$ (невырожденные матрицы).

Характером представления ρ называют $\chi[V] = \text{tr } \rho(g)$ для $g \in G$. Характеры изоморфных представлений совпадают, а также

$$\chi[V](1) = \dim V, \quad \chi[V_1 \oplus V_2] = \chi[V_1] + \chi[V_2], \quad \chi[V](g^{-1}) = \chi^*[V](g), \quad \chi[V_1 \otimes V_2] = \chi[V_1] \cdot \chi[V_2].$$

Стараемся решить задачу о разложении приводимого представления по неприводимым. Представление ρ называется *неприводимым*, если у него нет нетривиальных (отличных от $\{0\}$ и V) инвариантных подпространств. По теореме Машке $\forall \rho$ конечной группы G разбивается на сумму неприводимых представлений. Всякое представление *унитаризуемо*.

Для характеров определим скалярное произведение $\langle \chi^{(i)} | \chi^{(j)} \rangle$:

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \bar{\psi}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^k |C_i| \varphi(h_i) \bar{\psi}(h_i).$$

Характеры ортогональны по строкам и столбцам:

$$\langle \chi^{(i)} | \chi^{(j)} \rangle = \delta_{ij}, \quad \sum_{n=1}^k \chi^{(n)}(h_i) \bar{\chi}^{(n)}(h_j) = \delta_{ij} \frac{|G|}{|C_i|}.$$

Число неприводимых представлений равно числу классов сопряженности. Все неприводимые представления абелевой группы одномерны, что является следствием теоремы Бернсайда:

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 = |G|,$$

где d_i – размерность i -го представления. *Критерием неприводимости* является $\langle \chi | \chi \rangle = 1$, тогда разложение на неприводимые: $\chi = a_1 \chi^{(1)} + \dots + a_n \chi^{(n)}$, где $a_i = \langle \chi | \chi^{(i)} \rangle$.

ТАБЛИЦЫ НЕПРОВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Построение для C_n тривиально в силу абелевости группы. Каждый элемент представим в виде $\sqrt[n]{1}$. Построение производим с учетом свойства $\rho(r^k) = \rho(r)^k$.

Теперь для D_4 размера $|D_4| = 2 \times n = 8$, будут классы сопряженности $\{1\}$, $\{r^2\}$, $\{r, r^3\}$ и $\{s, sr^2\}$, $\{sr, sr^3\}$.

$1 $	1	$r, r^3 $	2	$r^2 $	1	$s, sr^2 $	2	$sr, sr^3 $	2
1		1		1		1		1	
1		1		1		-1		-1	
1		-1		1		1		-1	
1		-1		1		-1		1	
2		0		-2		0		0	

Всегда есть тривиальное представление. Также из теоремы Бернсайда находим первый столбец.

По сохранению или смене ориентация базиса можем сопоставить ± 1 соответствующим классам. Важно помнить, что $(sr^k)^2 = 1$ и $(r^k)^4 = 1$, откуда знаем одномерные представления $\rho(sr^k) = \pm 1$ и $\rho(r^k) = \sqrt[4]{1} = \pm i, \pm 1$, откуда достраиваем одномерные представления.

При построении D_7 будет важно вспомнить про сопоставление матриц поворота двумерным представлениям, по которым найдём элементы таблицы характеров, как след соответствующей матрицы.

Построим табличку характеров для S_3 : $|S_3| = 3! = 6$. Также из теоремы Бернсайда находим первый столбец. Для второй строчки всегда есть *знаковое* представление.

$e $	1	$(a, b) $	3	$(a, b, c) $	2
1		1		1	
1		-1		1	
2		0		-1	

Построим табличку характеров для S_4 : $|S_4| = 4! = 24$.

$e $	1	$(a, b) $	6	$(a, b, c) $	8	$(a, b, c, d) $	6	$(a, b)(c, d) $	3
1		1		1		1		1	
1		1		1		1		1	
2		0		-1		0		2	
3		-1		0		1		-1	
3		1		0		-1		-1	

Тут важно посмотреть на отображение $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, построив $\chi[\mathbb{C}^4]$, значениях характеров которой можем восстановить по количеству неподвижных точек $(4, 2, 1, 0, 0)$. Неприводимое представление можем получить в виде $\chi[\mathbb{C}^4] - \chi^{(1)}$. Также может помочь тензорное произведение представлений.

7 ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Если уравнения вида $\hat{L}u(\mathbf{r}, t) = \dots$ — однородно и изотропно, то может помочь автомоделная подстановка:

$$u(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{t^a} f\left(\frac{\mathbf{r}}{t^b}\right) \quad : \quad t \rightarrow \lambda t \Rightarrow u \rightarrow \lambda^{-a} u, \quad r \rightarrow \lambda^b r. \quad (7.1)$$

Восстановить a в общем виде нельзя, но требуя, например, локальности решения $\int_{\mathbb{R}^n} u dV = \text{const}$ можем иногда найти и a .

МЕТОД БОГОЛЮБОВА-КРЫЛОВА

Рассмотрим произвольное возмущение гармонического осциллятора:

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2) x(t) = \varepsilon f(t, x, \dot{x}). \quad (7.2)$$

Приближенно (до $o(\varepsilon)$) можем методом Боголюбова-Крылова найти решение в виде

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (7.3)$$

где зависимость от времени амплитуды и фазы определяется уравнениями

$$\partial_t A(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_{\omega_0 t - \pi}^{\omega_0 t + \pi} f(\tau, x, \dot{x}) \sin(\omega_0 \tau + \varphi(t)) d(\omega_0 \tau), \quad (7.4)$$

$$\partial_t \varphi(t) = \frac{-\varepsilon}{2\pi A \omega_0} \int_{\omega_0 t - \pi}^{\omega_0 t + \pi} f(\tau, x, \dot{x}) \cos(\omega_0 \tau + \varphi(t)) d(\omega_0 \tau). \quad (7.5)$$

Упрощая себе жизнь с $\omega_0 = 1$, приходим к выражению

$$\begin{aligned} \partial_t A(t) &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau, x, \dot{x}) \sin(\tau + \varphi) d\tau, \\ \partial_t \varphi(t) &= \frac{-\varepsilon}{2\pi A} \int_0^{2\pi} f(\tau, x, \dot{x}) \cos(\tau + \varphi) d\tau, \end{aligned}$$

где $\dot{\varphi} = 0$ почти всегда и в интеграле для \dot{A} можно избавиться от φ .

УРАВНЕНИЯ ХОПФА И БЮРГЕРСА

Уравнение Хопфа. В акустике естественно возникает уравнение Хопфа:

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0.$$

Решение может быть найдено в виде

$$x(t) = x_0 + u_0(x_0)t, \quad u(x(t), t) = c(x_0) = u_0(x_0).$$

где сначала разрешаем уравнение $c = u_0(x_0)$ относительно $x_0 = x_0(c)$, а потом подставляя $x_0(c)$ в выражение для $x(t) = x_0(c) + ct$, разрешаем его относительно $c = c(x(t), t)$. Зная, что $u(x(t), t) = c(x(t), t)$, находим $u(x, t) = c(x, t)$.

Накачка. Добавим к уравнению накачку:

$$\partial_t u + u \partial_x u = f(x, t).$$

Система может быть сведена к

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, x(t)) \\ \dot{x} = u(t, x(t)) \end{cases} \Leftrightarrow \ddot{x} = f(x, t), \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(t, x_0, \dot{x}_0),$$

где $\dot{x}_0 = u_0(x_0)$. Сначала разрешаем уравнение $x(t)$ относительно $x_0 = x_0(t, x)$, а потом подставляем этот x_0 в $u(t, x) = \dot{x}(t, x_0(t, x))$, что и является решением исходной задачи.

Уравнение Бюргерса. Добавим диссипацию в уравнение Хопфа:

$$\partial_t u + u \partial_x u = \partial_x^2 u,$$

так получим *уравнение Бюргерса*.

Заметим, что преобразование Коула-Хопфа

$$\psi = \exp\left(-\frac{1}{2}h\right), \quad u = \partial_x h, \quad \Rightarrow \quad (\partial_t - \partial_x^2)\psi = 0.$$

Имея начальные условия для $\psi_0(x)$, можем найти

$$\psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \psi_0(y) \frac{\theta(t)}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) dy,$$

откуда находим решение

$$u(t, x) = -2\partial_x \ln \psi(t, x).$$

8 СПРАВОЧНИК

Вычеты

Интеграл по дуге может быть найден, как

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= 2\pi i \sum_{z_j} \operatorname{res}_{z_j} f(z), \quad \operatorname{res}_{z_j} f(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i\varphi} f(z_j + \varepsilon e^{i\varphi}) \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_j} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_j)^m f(z) \right), \end{aligned}$$

где m – степень полюса.

ИНТЕГРАЛЫ

Например,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^a \varphi \cos^b \varphi d\varphi = \frac{1}{2} B\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(1 + \frac{a+b}{2}\right)},$$

для чего напомним несколько значений

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

Также для $1 + m < kn$, верно

$$\int_0^\infty \frac{x^m}{(1+x^n)^k} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} \frac{dx}{t} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \Gamma\left(k - \frac{m+1}{n}\right)}{n\Gamma(k)}.$$

Может быть полезно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm iz^2} dz = \sqrt{\pi} e^{\pm i\pi/4}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos z^2 dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin z^2 dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Чуть удобнее бывает пользоваться сразу формулой, вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm iax^2 + ibx} dx = \sqrt{\pi} e^{\pm i\pi/4} e^{\pm \frac{b^2}{4ai}}.$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

В n -мерии само преобразование имеет вид

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{r} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) f(\mathbf{r}), \quad f(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n \mathbf{k}}{(2\pi)^n} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \tilde{f}(\mathbf{k}).$$

Для преобразования Фурье полезно помнить

$$\mathcal{F}[f^{(n)}] = (i\omega)^n \mathcal{F}[f](\omega/a), \quad \mathcal{F}[f(x-x_0)] = e^{-i\omega x_0} \mathcal{F}[f](\omega/a), \quad \mathcal{F}[f(ax)] = |a|^{-1} \mathcal{F}[f](\omega/a),$$

то есть что происходит при растяжение, сдвигах и дифференцирование.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Выпишем несколько пар оригинал-изображение:

$$\begin{aligned} t^n e^{\lambda t} &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}, & t^\alpha e^{\lambda t} &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}, & \frac{(1-e^{-t})}{t} &\xrightarrow{\mathcal{L}} \ln\left(1+\frac{1}{p}\right), & \frac{\sin t}{t} &\xrightarrow{\mathcal{L}} \operatorname{arctg} p \\ \sin(\nu t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\nu}{p^2+\nu^2}, & \cos(\nu t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{p}{p^2+\nu^2}, & t \sin(\nu t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2p\nu}{(p^2+\nu^2)^2}, & t \cos(\nu t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{p^2-\nu^2}{(p^2+\nu^2)^2}, \\ \operatorname{sh}(\nu t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\nu}{p^2-\nu^2}, & \operatorname{ch}(\nu t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{p}{p^2-\nu^2}, & e^{\lambda t} \sin(\nu t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\nu}{(p-\lambda)^2+\nu^2}, & e^{\lambda t} \cos(\nu t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\nu^2}, \end{aligned}$$

Также помним, что $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$, и $\mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-ap}$, при $a > 0$.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЛИНА

Для функции $g(x)$ такую, что $g(x) = O(x^{-\alpha})$ при $x \rightarrow 0$ и $g(x) = x^{-\beta}$ при $x \rightarrow +\infty$ можем определить преобразование Меллина

$$G(\lambda) = \int_0^\infty g(x) x^{\lambda-1} dx,$$

определенного в полосе $\alpha < \operatorname{Re} \lambda < \beta$. Обратное преобразование может быть найдено в виде

$$g(x) = \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} G(\lambda) x^{-\lambda} \frac{d\lambda}{2\pi i},$$

для $\alpha < C < \beta$.

Для вычисления интегралов бывает удобно воспользоваться сверточным свойством преобразования Меллина

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) x^{\lambda-1} dx = \int_{C_f-i\infty}^{C_f+i\infty} F(\lambda_f) G(\lambda - \lambda_f) \frac{d\lambda_f}{2\pi i} = \int_{C_g-i\infty}^{C_g+i\infty} F(\lambda - \lambda_g) G(\lambda_g) \frac{d\lambda_g}{2\pi i},$$

где $\alpha_f + \alpha_g < \operatorname{Re} \lambda < \beta_f + \beta_g$. В частности, при допустимом $\lambda = 1$, получаем

$$\int_0^\infty f(x)g(x) dx = \int_{C_f-i\infty}^{C_f+i\infty} F(\lambda_f)G(1-\lambda_f)\frac{d\lambda_f}{2\pi i}.$$

Приведем некоторый зоопарк по преобразованию Меллина:

$$\begin{aligned} e^{-x} &\xrightarrow{M} \Gamma(\lambda), & \frac{1}{1+ax^n} &\xrightarrow{M} \frac{\pi a^{-\frac{\lambda}{n}}}{n \sin\left(\frac{\pi\lambda}{n}\right)}, & \frac{1}{\sqrt[n]{1+x^n}} &\xrightarrow{M} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}-\frac{\lambda}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}, & \frac{1}{1-x} &\xrightarrow{M} \pi \cot(\pi\lambda), \\ \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx}} &\xrightarrow{M} \frac{\Gamma(1-\lambda)\Gamma\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}-\lambda}}{\sqrt{\pi b}}, & x^n &\xrightarrow{M} 2\pi\delta(i(n+\lambda)), & \frac{1}{1+e^{\alpha x}} &\xrightarrow{M} (1-2^{1-\lambda})\alpha^{-\lambda}\Gamma(\lambda)\zeta(\lambda), \\ \sin x &\xrightarrow{M} \sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\Gamma(\lambda), & \cos x &\xrightarrow{M} \cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\Gamma(\lambda). \end{aligned}$$