Задание по практике от 9 июля

Автор: Хоружий Кирилл
Соавтор: Примак Евгений

От: *11 июля 2021 г.*

Первая задача

Вероятность измерения $|S_x,+\rangle$ в базисе $\hat{S}_z$ равна 1/2, тогда

$$|\langle + \,|\, S_x,+\rangle|^2 = |\langle - \,|\, S_x,-\rangle|^2 = \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} |S_x,+\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \tfrac{e^{i\delta_1}}{\sqrt{2}}|-\rangle, \\ |S_x,-\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \tfrac{e^{i\delta_2}}{\sqrt{2}}|-\rangle, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} |S_x,+\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle, \\ \langle S_x \,|\, -\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \tfrac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle, \end{aligned}$$

где значение определены с точностью до глобальной фазы; можно показать, что $\delta_1 - \delta_2 = \pm\pi/2$. Теперь можем выразить $|\pm\rangle$ в базисе S_x и подставить в выражение для S_z:

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}|S_x,+\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}|S_x,-\rangle \\ |-\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}|S_x,+\rangle - \tfrac{1}{\sqrt{2}}|S_x,-\rangle \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\Big(|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|\Big) = \frac{\hbar}{2}\Big(|S_x,+\rangle\langle S_x,-| + |S_x,-\rangle\langle S_x,+|\Big).$$

Вторая задача

Известно, что

$$\langle p \,|\, \alpha\rangle = C \exp\left(-\frac{(p-p_0)^2}{(\hbar k)^2}\right), \qquad \langle \alpha \,|\, \alpha\rangle = 1.$$

Для начала воспользуемся разложением по базису $|p\rangle$, тогда нормировка запишется в виде

$$\int dp \langle \alpha \underbrace{|p\rangle\langle p|}_{\equiv \mathbb{1}} \alpha\rangle = 1, \quad \Rightarrow \quad |C|^2 \int dp \exp\left(-\frac{2(p-p_0)^2}{(\hbar k)^2}\right) = |C|^2 \hbar k \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1, \quad \Rightarrow \quad |C| = \sqrt{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\hbar k}}.$$

Таким же разложением можем найти $\langle x \,|\, \alpha\rangle$:

$$\langle x \,|\, \alpha\rangle = \int dp, \langle x \,|\, p\rangle\langle p \,|\, \alpha\rangle = \kappa \int \exp\left(\frac{ipx}{\hbar} - \frac{(p-p_0)^2}{(\hbar k)^2}\right), \qquad \kappa = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/4} \frac{1}{\pi\hbar\sqrt{k}}.$$

где воспользовались равенством $\langle x \,|\, p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ipx}{\hbar}}$. Выделяя полный квадрат

$$p^2 - 2p(p_0 + ix\hbar k^2) + p_0^2 == (p - p_0 - ix\hbar k^2/2)^2 - ix\hbar k^2 + x^2\hbar^2 k^4/4$$

, сводим интеграл к гауссову, и находим

$$\langle x \,|\, \alpha\rangle = \left(\frac{k^2}{2\pi}\right)^{1/4} \exp\left(\frac{-ixp_0\hbar k^2 + x^2\hbar^2 k^4/4}{(\hbar k)^2}\right).$$

Третья задача

По Сакураю (3.1.15) поворот в пространстве можем быть найден, как

$$D_z(\varphi) = \exp\left(-\frac{iJ_z\varphi}{\hbar}\right), \qquad J_x \to S_z.$$

Считая $|+\rangle\langle +| = a$, $|-\rangle\langle -| = b$, $\alpha = \frac{i\varphi}{2}$, находим:

$$-\frac{iS_z\varphi}{\hbar} = -\frac{i\varphi}{2}\Big(|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|\Big), \quad \begin{aligned} (a-b)^2 &= a+b \\ (a-b)^3 &= a-b \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad D_z(\varphi) = 1 + \alpha(a-b) + \frac{\alpha^2}{2}(a+b) + \frac{\alpha^3}{3!}(a-b) + \ldots,$$

немного перегруппируя члены, и пользуясь представлением $\mathbb{1} = \sum |n\rangle\langle n|$, получаем

$$D_z(\varphi) = (1 - (a+b)) + a\left(1 + \alpha\tfrac{\alpha^2}{2} + \ldots\right) + b\left(1 - \alpha + \tfrac{\alpha^2}{2} - \ldots\right) = ae^{\alpha} + be^{-\alpha}.$$

Рассмотрим измерения в базисе S_φ – направления в плоскости Oxy повернутого на φ относительно Ox, тогда

$$\langle \alpha | S_\varphi | \alpha\rangle = {}_{R_{-\varphi}}\langle \alpha | S_x | \alpha\rangle_{R_{-\varphi}} = \langle \alpha \,|\, D_z^\dagger(-\varphi) S_x D_z(-\varphi) \,|\, \rangle, \qquad |\alpha\rangle_{R_\varphi} = D_z(\varphi)|\alpha\rangle.$$

Подставляя явное выражение для поворота и для S_x, находим

$$D_z^\dagger(\varphi)S_xD_z(\varphi) = \frac{\hbar}{2}e^{i\varphi} = \frac{\hbar}{2}\Big(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\Big)\cos\varphi - \frac{i\hbar}{2}\Big(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\Big)\sin\varphi = \cos(\varphi)S_x - \sin(\varphi)S_y.$$

Наконец, подставляя $\varphi \to -\varphi$, из операторного равенства, находим значение для S_φ:

$$S_\varphi = \cos(\varphi)S_x + \sin(\varphi)S_y = \frac{\hbar}{2}e^{-i\varphi}|+\rangle\langle-| + \frac{\hbar}{2}e^{i\varphi}|-\rangle\langle+|.$$

Четвертая задача

Рассмотрим, в частности, поворот на малый угол $d\varphi$ относительно оси Oz

$$D_z(d\varphi) = 1 - \frac{i\,d\varphi}{\hbar}S_z, \qquad |\alpha\rangle_{d\varphi} = |\tilde{\alpha}\rangle = D_z(d\varphi)|\alpha\rangle.$$

Для начала найдём с точки зрения операторного равенства $\tilde{S}_{x,y,z}$:

$$\langle\tilde{\alpha}|S_z|\tilde{\alpha}\rangle = \langle\alpha|\tilde{S}_z|\alpha\rangle, \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{S}_z = D\dagger_x(d\varphi)S_zD_z(d\varphi).$$

Подставляя выражения для S_z и для D_z, находим с точностью до членов порядка $d\varphi$

$$\tilde{S}_z = \left(1 + \frac{i\,d\varphi}{\hbar}S_z\right)S_z\left(1 - \frac{o\,d\varphi}{\hbar}S_z\right) = S_x - \frac{i\,d\varphi}{\hbar}S_z^2 + \frac{i\,d\varphi}{\hbar}S_z^2 + o(\,d\varphi), \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{S}_z = S_z,$$

таким образом поворот не затрагивает S_z, что действительно похоже на поворот. Аналогично находим

$$\tilde{S}_x = S_x + \frac{i\,d\varphi}{\hbar}\,[S_x,\,S_z] + o(d\varphi) = S_x + S_y\,d\varphi + o(d\varphi),$$

и аналогично $\tilde{S}_y = S_y - S_x\,d\varphi + o(d\varphi)$. Здесь мы воспользовались выражением для коммутатора $S_{x,y,z}$:

$$[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k.$$

Итого, с точностью до $o(d\varphi)$, находим преобразование «проекций», очень сильно похожих на инфинитезимальный поворот

$$\begin{aligned}\tilde{S}_x &= S_x + S_y\,d\varphi,\\ \tilde{S}_y &= S_y - S_x\,d\varphi,\\ \tilde{S}_z &= S_z.\end{aligned}$$

Пятая задача

В шестой задаче покажем, что

$$R_z(d\varphi) = 1 - \frac{i\,d\varphi}{\hbar}L_z = 1 - \frac{i\,d\varphi}{\hbar}(xp_y - yp_x),$$

где $\hat{L}_{x,y,z}$ удовлетворяет коммутативным свойствам и $\hat{L} = \hat{x}\times\hat{p}$.

Рассмотрим действие этого оператора на состояние $|x,y,z\rangle$, вспоминая, что $\hat{p}$ строился из оператора трансляции:

$$R_z(\,d\varphi)|x,y,z\rangle = \left(1 - \frac{i\,d\varphi}{\hbar}p_yx + \frac{i\,d\varphi}{\hbar}p_xy\right)|x,y,z\rangle = |x - y\,d\varphi,\, y + x\,d\varphi,\, z\rangle,$$

с точностью до $o(d\varphi)$. Можно заметить, что это и есть инфинитезимальный поворот вокруг Oz.

Шестая задача

Оператор $L = \hat{x}\times\hat{p}$ удовлетворяет $[L_i,\,L_j] = i\varepsilon_{ijk}\hbar L_k$, по Сакураю (3.6.2). Тогда

$$\begin{aligned}[L_x,\,L_y] &= [yp_z - zp_y,\, zp_x - xp_z] = [yp_z,\, zp_x] + [zp_y,\, xp_z] =\\ &= yp_x\,[p_z, z] + p_yx[z,\, p_z] = i\hbar\,(xp_y - yp_x) = i\hbar L_z,\end{aligned}$$

что и показывает корректность введения $\hat{L}$ через $\hat{x}$ и $\hat{p}$.