Задание по курсу
«Уравнения математической физики»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *12 апреля 2022 г.*

Содержание

ТеорМин №1

Вычеты. Интеграл по замкнутому контуру C может быть найден, как

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_j} \mathrm{res}_{z_j} f(z), \qquad \mathrm{res}_a f(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i\varphi} f(a+\varepsilon e^{i\varphi})$$
$$= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-a)^m f(z) \right),$$

где m – степень полюса.

Излучение. Волновое уравнение с источником:

$$(\partial_t^2 - c^2\nabla^2)u = \chi, \tag{1}$$

с законом дисперсии $\varpi = cq$.

Функция Грина оператора $\partial_t^2 - c^2\nabla^2$:

$$G(t,r) = \frac{\theta(t)}{4\pi c r}\delta(r-ct),$$

а значит выражение для поля:

$$u(t,\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi c^2} \int \frac{d^3 r_1}{R}\ \chi(t - R/c, \boldsymbol{r}_1), \tag{2}$$

где $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|$.

Уравнение диффузии. Уравнение диффузии:

$$\left(\partial_t - \nabla^2\right) u = 0, \tag{3}$$

решение которого может быть найдено в виде:

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dy_1 \dots dy_d}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2}{4t} \right) u_0(\boldsymbol{y}). \tag{4}$$

Асимтотики могут быть найдены в виде

$$u(t,\boldsymbol{x}) \approx \frac{A}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{4t}\right), \qquad A = \int_{\mathbb{R}^d} dy_1 \dots dy_d\ u_0(\boldsymbol{y}). \tag{5}$$

При $A = 0$ асимтотика будет соответствовать

$$u(t,\boldsymbol{x}) \approx \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{x}}{(4\pi t)^{d/2+1}} \exp\left(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{4t}\right), \qquad \bar{B} = 2\pi \int_{\mathbb{R}^d} dy_1 \dots dy_d\ \boldsymbol{y}\, u_0(\boldsymbol{y}), \tag{6}$$

где асимтотики имеют место при $t \gg l^2$, l – масштаб на котором локализовано поле.

Уравнение диффузии (с накачкой). При наличии правой части:

$$(\partial_t - \nabla^2)u = \varphi,$$

можем найти функцию Грина для оператора $\partial_t - \nabla^2$

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \int G(t-\tau, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\varphi(t,\boldsymbol{y})\,d\tau\, d^d\boldsymbol{y}, \qquad G(t,\boldsymbol{r}) = \frac{\theta(t)}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right).$$

Меленные переменные. Рассмотрим прозвольное возмущение гармонического осциллятора:

$$\left(\partial_t^2 + \omega_0^2\right) x(t) = \varepsilon f(t, x, \dot{x}). \tag{7}$$

Приближенно (до $o(\varepsilon)$) можем методом Боголюбова-Крылова найти решение в виде

$$x(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \tag{8}$$

где зависимость от времени амплитуды и фазы определяестся уравнениями

$$\partial_t A(t) = \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_{\omega_0 t - \pi}^{\omega_0 t + \pi} f(\tau, x, \dot{x}) \cos\left(\omega_0\tau + \varphi(t)\right)\ d(\omega_0\tau), \tag{9}$$

$$\partial_t \varphi(t) = \frac{-1}{2\pi A\omega_0} \int_{\omega_0 t - \pi}^{\omega_0 t + \pi} f(\tau, x, \dot{x}) \sin(\omega_0\tau + \varphi(t))\, d(\omega_0\tau). \tag{10}$$

Уравнение Хопфа. В акустике естественно возникает уравнение Хопфа:

$$\partial_t u + u\,\partial_x u = 0.$$

Решение может быть найдено в виде

$$x(t) = x_0 + u_0(x_0)t, \qquad u(x(t),t) = c(x_0) = u_0(x_0).$$

где сначала разрешаем уравнение $c = u_0(x_0)$ относительно $c = c(x_0)$, а потом разрешаем уравнение на $x(t)$ относительно $c = c(x(t),t)$. Зная, что $u(x(t),t) = c(x(t),t)$, находим $u(x,t) = c(x,t)$.

Уравнение Хопфа (с накачкой). Добавим к уравнению накачку:

$$\partial_t u + u\,\partial_x u = f(x,t).$$

Система может быть сведена к

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, x(t)) \\ \dot{x} = u(t, x(t)) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} = f(x,t), \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(t, x_0, \dot{x}_0),$$

где $\dot{x}_0 = u_0(x_0)$. Сначала разрешаем уравнение $x(t)$ относительно $x_0 = x_0(t,x)$, а потом подставляем этот x_0 в $u(t,x) = \dot{x}(t, x_0(t,x))$, что и является решением исходной задачи.

Уравнение Бюргерса. Добавим диссипацию в уравнение Хопфа:

$$\partial_t u + u\,\partial_x u = \partial_x^2 u,$$

так получим уравнение Бюргерса.

Заметим, что преобразование Коула-Хопфа

$$\psi = \exp\left(-\tfrac{1}{2} h\right), \quad u = \partial_x h, \quad \Rightarrow \quad (\partial_t - \partial_x^2)\psi = 0.$$

Имея начальные условия для $\psi_0(x)$, можем найти

$$\psi(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \psi_0(y) \frac{\theta(t)}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) dy,$$

откуда находим решение

$$u(t,x) = -2\partial_x \ln \psi(t,x).$$

ТеорМин №2

Автомодельные решения. Если уравнения вида $\hat{L}\,u(\boldsymbol{r},t) = \ldots$ – однородно и изотропно, то может помочь автомодельная подстановка:

$$u(t,\boldsymbol{r}) = \frac{1}{t^a} f\left(\tfrac{r}{t^b}\right) \quad : \quad t \to \lambda t \quad \Rightarrow \quad u \to \lambda^{-a} u, \ r \to \lambda^b r. \tag{11}$$

Восстановить a в общем виде нельзя, но требуя, например, локальности решения $\int_{\mathbb{R}^n} u\,dV = \text{const}$ можем иногда найти и a.

Уравнение Фредгольма. Есть уравнение Фредгольма I рода:

$$\int_a^b ds\ K(t,s) f(s) = g(t),$$

и уравнение Фредгольма II рода:

$$f(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t,s) f(s), \quad \Leftrightarrow \quad f = g + \lambda \hat{K} f, \tag{12}$$

где мы ввели интегральный оператор $\hat{K} f = \int_a^b ds\ K(t,s) f(s)$. Решение можем найти в виде

$$f = \frac{1}{1 - \lambda \hat{K}}\, g = \left(\mathbb{1} + \lambda \hat{R}\right) g, \qquad \hat{R} \overset{\text{def}}{=} \hat{K} + \lambda \hat{K}^2 + \ldots$$

В терминах интегрирования резульвента $R(t,s)$ выражается, как

$$R(t,s) = K(t,s) + \lambda \int_a^b dp_1\ K(t,p_1) K(p_1,s) + \lambda^2 \int_a^b dp_1 \int_a^b dp_2\ K(t,p_1) K(p_1,p_2) K(p_2,s) + \ldots \tag{13}$$

Линейные интегральные уравнения

Свертка I. Рассмотрим уравнение на φ, вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) \varphi(y) = f(x), \tag{14}$$

то есть уравнение Фредгольма первого рода с $(a,b) = \mathbb{R}$ и $K(x,y) = K(x-y)$. Решение можем найти через преобразование Фурье

$$\tilde{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx}\,dx, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k) e^{ikx}\,dx,$$

которое переводит свёртку в произведение:

$$\tilde{\varphi}(k) = \frac{\tilde{f}(k)}{\tilde{K}(k)}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{f}(k)}{\tilde{K}(k)}. \tag{15}$$

Свертка II. Аналогично для уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{\mathbb{R}}dy\ K(x-y)\varphi(y),\tag{16}$$

для которого также

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_{\mathbb{R}}dy\ f(y)R(x-y),\qquad R(x)=\int_{\mathbb{R}}\frac{dk}{2\pi}e^{ikx}\frac{\tilde{K}(k)}{1-\lambda\tilde{K}(k)}.\tag{17}$$

Уравнение Вольтерра I. Рассмотрим интегральное уранвение Фредгольма I на $(a,b)=(0,t)$:

$$f(t)=\int_0^t ds\ K(t-s)\varphi(s).$$

Здесь хорошо работает преобразование Лапласа

$$f(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt,\qquad f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty}f(p)e^{pt}\,dp,$$

которое переводит свертку в произведение, а значит можем сразу написать решение

$$\varphi(t)=\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty}\frac{f(p)}{K(p)}e^{pt}\frac{dp}{2\pi i}.\tag{18}$$

Уравнение Вольтерра II. Аналогично для уравнения Фредгольма II:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^t K(x-y)\varphi(y)\,dy,\tag{19}$$

находим решение

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^t R(t-s)f(s)\,ds,\qquad R(t)=\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty}\frac{dp}{2\pi i}e^{pt}\frac{K(p)}{1-\lambda K(p)}.$$

Периодическое ядро I. Рассмотрим $f(t)$ и $K(t)$ периодчиные с $T=b-a$, тогда и $\varphi(t)$ периодично по T. Решим уравнение, вида

$$\int_a^b K(t-s)\varphi(s)\,ds=f(t).\tag{20}$$

Раскладывая всё в ряд Фурье (вводя $\omega=\frac{2\pi}{T}$):

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-in\omega t}f_n,\qquad f_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{in\omega t}\,dt.$$

Решение находим в виде суммы

$$\varphi_n=\frac{f_n}{TK_n},\qquad\Rightarrow\qquad\varphi(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{f_n}{TK_n}e^{-in\omega t}.\tag{21}$$

Периодическое ядро II. Аналогично можем найти резольвенту для уравнения Фредгольма второго рода:

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_a^b ds\ K(t-s)\varphi(s).$$

Реше $\varphi(t)$

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_a^b ds\ R(t-s)f(s),\qquad R(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{K_n}{1-\lambda TK_n}e^{-in\omega t}.\tag{22}$$

Факторизуемое ядро. Рассмотрим случай, когда ядро вырожденное: $K(t,s)=\sum_i A_i(t)B_i(s)$. Тогда интегральное уравнение перепишется в виде

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\sum A_i(t)\int_a^b B_i(s)\varphi(s)\,ds.$$

Решение уравнения можем найти в виде

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\sum_i C_iA_i(t),\qquad(\mathbb{1}-\lambda\hat{M})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Phi},\qquad\Phi_i=\int_a^b B_i(t)f(t)\,dt,\qquad M_{ij}=\int_a^b B_i(t)A_j(t)\,dt.$$

Нелинейные интегральные уравнения

Уравнение типа свёртки. Рассмотрим уравнение вида
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t-s)\varphi(s) = f(t). \tag{23}$$
Аналогично смотрим на фурье-образ, откуда находим выражение для $\varphi(t)$:
$$\varphi(t) = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{f(\omega)} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \tag{24}$$

Обобщение. Обобщим происходящее, введя $L(s)$
$$L(s) = \sum_{n=0}^{N} a_n s^n, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} ds\ \varphi(t-s)L(s)\varphi(s) = f(t), \tag{25}$$
решим в виде
$$\varphi(\omega)L(i\partial_\omega)\varphi(\omega) = f(\omega), \tag{26}$$
то есть можем свести интегральное уравнение к дифференциальному.

Лаплас. Рассмотрим уравнение вида
$$\int_0^t ds\ \varphi(t-s)L(s)\varphi(s) = f(t),$$
решение которого также находится в виде
$$\varphi(p)L(-\partial_p)\varphi(p) = f(p).$$

Периодический сдучай. Аналогично линейному случаю рассмотрим
$$\int_{-\pi}^{+\pi} ds\ \varphi(t-s)\varphi(s) = f(t),$$
периодичное с $T = 2\pi$ и $\omega = 1$. Тогда решение находится в виде
$$\varphi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\pm) \sqrt{\frac{f_n}{2\pi}} e^{-int}.$$

Факторизуемое ядро. Для факторизуемого ядра уравнение примет вид
$$\varphi(t) = x(t) \int_a^b ds\ \varphi^n(s) y(s) + f(t),$$
решение которого можем найти в виде
$$\varphi(t) = \alpha x(t) + f(t), \qquad \alpha\colon \alpha = \int_a^b dt\ y(t) \left(\alpha x(t) + f(t)\right)^n,$$
где α задан неявно алгебраическим уравнением.

Факторизуемое ядро’. Для уравнения на интервале $[0,t]$ уравнение вида
$$\varphi(t) = f(t) + x(t) \int_0^t ds\ y(s)\varphi^n(s),$$
может быть сведено к дифференциальному уравнению по $z(t) \overset{\text{def}}{=} \varphi(t)/x(t)$:
$$z'(t) = y(t)x^n(t)z^n(t) + \frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{x(t)}\right), \qquad z(0) = \frac{f(0)}{x(0)}.$$

Сингулярные интегральные уравнения

Сингулярные интегральные уравнения. Основой решения станет *формула Сохоцкого*:
$$\text{v. p.} \int_a^b \frac{f(x)}{x-x_0}\, dx = \pm i\pi f(x_0) + \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0 \pm i\varepsilon}\, dx. \tag{27}$$
Полезно ввести преобразование Гильберта $\hat{H}$:
$$\hat{H}\varphi(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)\, dy}{2\pi} \left(\frac{1}{y-x+i\varepsilon} + \frac{1}{y-x-i\varepsilon}\right),$$
для которого верно, что $\hat{H}^2 = -\mathbb{1}$.

Тогда *простейшее сингулярное уравнение* вида
$$\pi\hat{H}\varphi(x) + \lambda\varphi(x) = f(x) \tag{28}$$

будет иметь решение относительно $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{\lambda^2+\pi^2} f(x) - \frac{1}{\lambda^2+\pi^2}\hat{H}[f](x) = \frac{1}{\lambda+i\pi} f(x) - \frac{1}{\lambda^2+\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\ \frac{f(y)}{y-x+i\varepsilon}. \tag{29}$$

Сингулярные интегральные уравнения с полиномильными коэффициентами. Рассмотрим уравнение вида

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x}\, dy = x^2\varphi(x) + f(x).$$

Применяя оператор $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-z+i\varepsilon}$, приходим к уравнению

$$-\pi i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-z+i\varepsilon}\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2\varphi(y)}{y-z+i\varepsilon}\, dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y-z+i\varepsilon}\, dy.$$

Здесь можем провести следующие рассуждения:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(y-z+i\varepsilon+z-i\varepsilon)}{y-z+i\varepsilon}\varphi(y)\, dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(y)\, dy + z\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y-z+z}{y-z+i\varepsilon}\varphi(y)\, dy = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(y)\, dy}_{C_1} + z\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\, dy}_{C_2} + z^2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-z+i\varepsilon}\, dy,\end{aligned}$$

а значит исходное уравнение переписывается в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-z+i\varepsilon}\, dy = -\frac{-}{z^2+i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y-z+i\varepsilon}\, dy - \frac{C_1+C_2 z}{z^2+i\pi},$$

решение которого мы уже знаем:

$$\varphi(x) = -\frac{C_1+C_2x}{x^4+\pi^2} - \frac{f(x)}{x^2-i\pi} - \frac{1}{x^4+\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y-z+i\varepsilon}\, dy.$$

Сингулярные интегральные уравнения на отрезке. Рассмотрим уравнение на конечном отрезке

$$\text{v.p.}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(y)}{y-x}\, dy = f(x).$$

Решение можем найти при условии на f: $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 0$, тогда

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi i}\left(f(x) + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{f(y)\, dy}{\sqrt{1-y^2}(y-x+i\varepsilon)}\right).$$

1 Неделя I

№ 4.1.6

Найдём решение волнового уравнения (1) для точечного гармонческого источника
$$\chi = \cos(\omega t)\delta(\boldsymbol{r}).$$
Подставляя ξ в (2), находим
$$u(t,\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi c^2}\int \frac{d^3 r_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\cos(\omega t - \omega|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|/c)\delta(\boldsymbol{r}_1) = \frac{1}{4\pi c^2}\frac{\cos\left(\omega(t-\frac{r}{c})\right)}{r}.$$

№ 4.1.7

Найдём значение функции Грина при $r=0$ для оператора $\partial_t^2 + \nabla^4$. Для начала перейдём к Фурье образу
$$\tilde{G}(t,\boldsymbol{q}) = \int d^3\boldsymbol{x}\; e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} G(t,\boldsymbol{x}), \qquad \Rightarrow \qquad \left(\partial_t^2 + q^4\right)\tilde{G} = \delta(t).$$
Решение этого уравнение известно[1]:
$$\tilde{G}(t) = \theta(t)\frac{1}{q^2}\sin\left(q^2 t\right).$$
Осталось найти
$$G(t,0) = \theta(t)\int \frac{d^3\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\frac{\sin(q^2 t)}{q^2} = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^\infty \sin\left(q^2 t\right) = \frac{1}{8\sqrt{2}\pi^{5/2}}\cdot\frac{\theta(t)}{\sqrt{t}}.$$

№ 4.2.2

Найдём решение одномерного дифузионного уравнения для
$$\left(\partial_t - \partial_x^2\right)u = 0, \qquad u_0(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right).$$
Точное решение. Воспользуемся (4), тогда
$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t} - \frac{y^2}{2l^2}\right) dy.$$
Выделяя полный квадрат, находим, что
$$\frac{(x-y)^2}{4t} + \frac{y^2}{2l^2} = \left(\sqrt{\frac{1}{2l^2}+\frac{1}{4t}}\,y - \frac{x}{4t\sqrt{\frac{1}{2l^2}+\frac{1}{4t}}}\right)^2 + \frac{x^2}{2l^2+4t},$$
а значит
$$u(t,x) = \frac{l}{\sqrt{l^2+2t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2l^2+4t}\right).$$
Асимптотика. Так как фунция u_0 симметрична, то через (5) находим
$$A = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx = l\sqrt{2\pi}, \qquad \Rightarrow \qquad u(t,x) \approx \frac{l}{\sqrt{2t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right),$$
что является асимптотикой точного решения при $t \gg l^2$.

№ 4.2.3

Найдём асимтотическое поведение решение одномерного диффузного уравнения (3) для различных начальных условий.

1. Рассмотрим
$$u_0(x) = x\exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right).$$
В силу нечетности функции, через (6), находим
$$B = 2\pi\int_{\mathbb{R}} x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right) = -4\pi l^2\;\partial_\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2/2l^2}\,dx = -4\pi l^2\sqrt{2\pi}l\;\partial_\alpha\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = l^3(2\pi)^{3/2},$$

[1] Конпект, (1.11).

а значит искомая асимптотика

$$u(t,x) \approx \left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^3 \frac{xe^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}.$$

2. Рассмотрим

$$u_0(x) = \exp\left(-\frac{|x|}{l}\right).$$

В силу четности функции, через (5), находим

$$A = 2\int_0^\infty e^{-x/l}\,dx = 2l.$$

Тогда искомая асимптотика

$$u(t,x) \approx \frac{l}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{t}}.$$

3. Рассмотрим

$$u_0(x) = x\exp\left(-\frac{|x|}{l}\right).$$

В силу нечетности функции, через (6), находим

$$B = 4\pi \int_0^\infty x^2 \exp\left(-\frac{|x|}{l}\right)\,dx = 4\pi l^2\ \partial_\alpha^2 \int_0^\infty e^{-\alpha x/l}\,dx = 2\pi l^2 \partial_\alpha^2 \left(\frac{l}{\alpha}\right) = 8\pi l^3,$$

а значит

$$u(t,x) \approx \frac{l^3}{\sqrt{\pi}} \frac{xe^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}.$$

4. Рассмотрим

$$u_0(x) = \frac{1}{x^2+l^2}.$$

В силу четности функции, через (5), находим

$$A = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+l^2}\,dx = 2\pi i \frac{1}{2il} = \frac{\pi}{l},$$

тогда искомая асимптотика

$$u(t,x) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2l} \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{t}}.$$

5. Рассмотрим

$$u_0(x) = \frac{x}{(x^2+l^2)^2}.$$

В силу четности функции, через (6), находим

$$B = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{(x^2+l^2)^2}\,dx = 4\pi i \lim_{x\to il} \left(\frac{x^2}{(x+il)^2}\right)' = \frac{\pi^2}{l}.$$

Тогда искомая асимптотика

$$u(t,x) = \frac{\sqrt{\pi}}{8l} \frac{xe^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}.$$

2 Неделя II

№1. 6.2.2

Решим уравнение (7) для $f(\dot{x}) = -\varepsilon \dot{x}^3$. Подставляя $f(t)$ в (9) и (10), находим уравнения на амплитуду и фазу:

$$\dot{A} = -\frac{3}{8}\varepsilon A^3 \omega_0^2, \qquad \dot{\varphi} = 0,$$

откуда сразу находим $\varphi(t) = \varphi_0$ и

$$\frac{dA}{A^3} = \left(-\frac{3}{8}\varepsilon\omega_0^2\right)dt, \quad \Rightarrow \quad A = \frac{A_0}{\sqrt{1+\frac{3}{4}A_0\varepsilon\omega_0^2 t}},$$

а значит искомое решение

$$x(t) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \frac{3}{4} A_0 \varepsilon t}} \sin(t + \varphi_0).$$

№2. 6.2.6

Решим уравнение (7) для $f(t) = \cos t$. Знаем, что точное решение

$$x(t) = A \sin(t + \varphi_0) + \frac{\varepsilon t}{2} \sin(t).$$

Однако решим методом медленных амплитуд.

Подставляя $f(t)$ в (9) и (10), находим уравнения на амплитуду и фазу:

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = \frac{\varepsilon}{2} \cos(\varphi(t)), \\ \dot{\varphi}(t) = \frac{-\varepsilon}{2A(t)} \sin(\varphi(t)), \end{cases}$$

которые приводят к двум случаям.

Нулевая фаза. При $\varphi(0) \overset{\text{def}}{=} \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ видим, что $\dot{\varphi} = 0$, а значит $\varphi(t) = \text{const}$. Тогда уравнение на амплитуду легко интегрируется, и находим (считая $A(0) \overset{\text{def}}{=} A_0$)

$$A(t) = A_0 + \frac{\varepsilon}{2} \cos(\varphi_0) t,$$

что прекрасно описывает резонанс:

$$x(t) = \left(A_0 + \frac{\varepsilon}{2} \cos(\varphi_0) t\right) \sin(t), \qquad \varphi_0 = 0.$$

Ненулевая фаза. Разделим два уравнения друг на друга:

$$\frac{dA}{d\varphi} = -\frac{A}{\operatorname{tg} \varphi}, \qquad \Rightarrow \qquad \log A = -\log \sin \varphi + \tilde{c}, \qquad \Rightarrow \qquad A = A_0 \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi},$$

таким образом нашли удобный первый интеграл системы.

Подставляя в выражение для $\dot{\varphi}$ находим

$$\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{2} \sin^2(\varphi), \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} = -\frac{\varepsilon}{2}\, dt, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_0} + \frac{\varepsilon t}{2}}\right).$$

Теперь нужно подставить $\varphi(t)$ в выражение для $\dot{A}$ и разложить по ε:

$$\cos \operatorname{arctg} x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \qquad \Rightarrow \qquad \dot{A} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{t\varepsilon}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi_0)}\right)^2}} = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} + o(\varepsilon),$$

а значит искомая амплитуда

$$A(t) = A_0 + \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} \frac{\varepsilon}{2} t.$$

Итого находим (при $\varphi_0 \neq \pi/2$)

$$x(t) = \left(A_0 + \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} \frac{\varepsilon t}{2}\right) \sin\left(t + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_0} + \frac{\varepsilon t}{2}}\right)\right).$$

№3. 6.2.8

Решим уравнение (7) для $f(t) = \kappa \cos t + (1 - x^2)\dot{x}$. Подставляя $f(t)$ в (9) и (10), находим уравнения на амплитуду и фазу:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\varepsilon \left(\kappa \cos \varphi + A\left(1 - \frac{A^2}{4}\right)\right), \qquad \dot{\varphi} = -\frac{1}{2A} \varepsilon \kappa \sin(\varphi).$$

Считая κ тоже малым параметром, решаем, аналогично семинару, уравнение с разделяющимися переменными:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\varepsilon A \left(1 - \frac{A^2}{4}\right), \qquad \Rightarrow \qquad A(t) = 2\frac{A_0}{\sqrt{4e^{-\varepsilon t} + A_0^2\left(1 - e^{-\varepsilon t}\right)}},$$

что похоже на правду, так как всё также

$$\lim_{t \to \infty} A(t) = 2,$$

то есть сохраняется предельный цикл на плоскости $\{x, \dot{x}\}$.

Для фазы можем найти решение при $t \to \infty$:

$$\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon\kappa}{2}\sin(\varphi)\sqrt{\frac{4 + A_0^2(e^{\varepsilon t} - 1)}{4A_0^2 e^{\varepsilon t}}} \approx -\frac{\varepsilon\kappa}{4}\sin(\varphi), \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\varphi(t)\right) = \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\varphi_0\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon\kappa}{4}t\right).$$

Возможно даже корректным будет выражение

$$\varphi(t) = 2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\varphi_0\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon\kappa}{4}t\right)\right),$$

получается малая накачка определяет асимптотику на фазы на бесконечности.

Сама асимптотика будет иметь вид

$$\varphi(t \to \infty) = 2\operatorname{arcctg}\left(e^{\frac{\varepsilon\kappa}{4}t}\operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right).$$

3 Неделя III

№1. 7.1.2

Найдём решение уравнения Хопфа с начальными условиями $u = 0$ при $x < 0$ и $u = -c_1x + c_2x^2$ при $x > 0$. Для начала считаем

$$\begin{cases} c(x_0) = -c_1x_0 + c_2x_0^2 \\ x(t) = x_0(c) + ct \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x_0(c) = \frac{c_1 \pm \sqrt{c_1^2 + 4cc_2}}{2c_2},$$

где выбор знака не принципиален. Подставляя x_0 в уравнение на $x(t)$, выражаем c:

$$c = \frac{c_1}{2c_2^3t^2}\left(\pm\sqrt{c_1\left(c_1(c_2t-1)^2 + 4c_2^2tx\right)} - c_1c_2t + c_1 + 2c_2^2tx\right),$$

где $+$ не удоволетворяет $c(t = 0, x) = u_0(x)$, а значит

$$u(x,t) = \frac{c_1}{2c_2^3t^2}\left(-\sqrt{c_1\left(c_1(c_2t-1)^2 + 4c_2^2tx\right)} - c_1c_2t + c_1 + 2c_2^2tx\right).$$

Стоит заметить, что до точки $x^* = c_1/c_2$ верно $u_0'(x) < 0$, а значит решение существует только до некоторого t^*.

№2. 7.1.3

Теперь решим уравнение Хопфа с накачкой:

$$\partial_t u + u\partial_x u = f, \qquad f = \alpha^2 x, \qquad u_0(x) = 0,$$

где сделали замену $\varphi = \alpha^2$. Сначала находим

$$\ddot{x} - \alpha^2 x = 0, \qquad \Rightarrow \qquad x = x_0\operatorname{ch}(\alpha t) + \frac{\dot{x}_0}{\alpha}\operatorname{sh}(\alpha t).$$

Находим, что $\dot{x}_0 = u_0(x_0) = 0$, а значит

$$\dot{x} = \alpha x_0 \operatorname{sh}(\alpha t) = \alpha x \operatorname{th}(\alpha t).$$

При $\varphi = -\alpha^2$ уравнение изменится на $\dot{x} = -\alpha x \operatorname{tg}(\alpha t)$. Итого, окончательный ответ

$$u(t,x) = \sqrt{|\varphi|}\operatorname{sign}(\varphi)\ x \cdot \begin{cases} \operatorname{th}(\sqrt{|\varphi|}\ t), & \varphi > 0; \\ \tan(\sqrt{|\varphi|}\ t), & \varphi < 0. \end{cases}$$

№3. 7.1.4

Аналогично решаем уравнение Хопфа с накачкой:

$$\partial_t u + u\partial_x u = f, \qquad f = f_0, \qquad u_0(x) = x.$$

Сначала находим

$$\ddot{x} = f_0, \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = \frac{1}{2}f_0t^2 + \dot{x}_0t + x_0,$$

где $\dot{x}_0 = u_0(x_0) = x_0$, а значит

$$x_0 = \frac{x - f_0t^2/2}{t+1}, \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x} = f_0t + \dot{x}_0 = \frac{\frac{1}{2}f_0t^2 + f_0t + x}{t+1},$$

таким образом искомый ответ

$$u(t,x)=\frac{\frac{1}{2}f_0t^2+f_0t+x}{t+1}.$$

№4. 7.1.5

Найдём решение уравнения Бюргерса с начальным условием

$$\psi_0=\operatorname{ch}(ax)+B\operatorname{ch}(bx),$$

где $a<b$ и $B\ll 1$.

Для начала находим ψ, как решение диффузного уравнения:

$$\psi(t,x)=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right)\psi_0(y)\,dy=e^{a^2t}\operatorname{ch}(ax)+Be^{b^2t}\operatorname{ch}(bx).$$

Теперь находим u

$$u=-2\partial_x\ln\psi=-\frac{2\left(ae^{a^2t}\operatorname{sh}(ax)+bBe^{b^2t}\operatorname{sh}(bx)\right)}{e^{a^2t}\operatorname{ch}(ax)+Be^{b^2t}\operatorname{ch}(bx)}.$$

Заметим, что при $x\to -0$ и $t\to\infty$, система будет определяться большим шоком:

$$u(x,t)\approx -2b^2x,\qquad t\to\infty,\ x\to 0;$$
$$u(x,t)\approx -2b,\qquad x\to 0,\ t\to\infty.$$

4 Неделя V

№ 8.1.5

Найдём локализованное автомодельное решение уравнения

$$\partial_t u=\partial_x(u^{-1}\partial_x u)+\partial_x u.$$

Подстановкой (11), получаем систему

$$-a-1=-b-a=-2b,\qquad\Rightarrow\qquad a=b=1,\qquad\Rightarrow\qquad u(t,x)=\frac{1}{t}f\left(\tfrac{r}{t}\right).$$

Условие локализованности можем записать в виде

$$\int_{\mathbb{R}}u(t,x)\,dx=\text{const},\qquad\Rightarrow\qquad a=b,$$

так что можем говорить о существование локализованного автомодельного решения.

Подставновка предполагаемого вида u в исходное уравнение даёт выражение, вида

$$f(\xi)^2+(\xi+1)f(\xi)f'(\xi)+f''(\xi)=\frac{f'(\xi)^2}{f(\xi)},$$

где заменили $\frac{r}{t}\overset{\text{def}}{=}\xi$.

Вроде бы неплохой выглядит идея посмотреть на $f(x)=1/g(x)$, тогда

$$g(x)g''(x)-g'(x)^2+xg'(x)+g'(x)-g(x)=0.$$

Если внимательно на уравнение посмотреть, то можно предположить

$$g(x)=e^{\alpha x}+ax+b,\qquad\Rightarrow\qquad a=-\frac{1}{\alpha},\quad b=-\frac{1+\alpha}{\alpha},$$

но это не выглядит как что-то осмысленное.

№ 9.1.2

На интервале $(0,\infty)$ найдём резольвенту ядра $K(t,s)=\exp(t-2s)$. Пользуясь (13), находим

$$\hat{K}^2=\int_0^\infty K(t,p_1)K(p_1,s)\,dp_1=e^{t-2s}\int_0^\infty e^{-p_1}=e^{t-2s},\qquad\Rightarrow\qquad R(t,s)=e^{t-2s}+\lambda e^{t-2s}+\ldots=\frac{e^{t-2s}}{1-\lambda},$$

что вполне соответствует факторизуемому ядру.

№ 9.1.4

Найдём решение (12) для $K = \exp\left(-t^2 - s^2\right)$ и $g(t) = t^2$. Для начала найдём резольвенту, как

$$\hat{R} = \hat{K} + \lambda \hat{K}^2 + \ldots = K(t,s) + \lambda K(t,s) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2p_1^2}\, dp_1 + \ldots = \frac{K(t,s)}{1 - \lambda\sqrt{\frac{\pi}{2}}}.$$

Тогда f можем найти в виде

$$f(t) = g(t) + \lambda \hat{R}\, g(t) = t^2 + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2-s^2}}{1-\lambda\sqrt{\frac{\pi}{2}}} s^2\, ds = t^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \lambda} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2}},$$

что и является искомым решением.

№ 9.1.7

Найдём решение (12) для $K = (1 + ts)e^{-2t-s}$ и $g(t) = e^{t/2}$. Для этого находим

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{27} \end{pmatrix}, \qquad \Phi = \{2, 4\}, \qquad (\mathbb{1} - \lambda\hat{M})^{-1} = \frac{1}{(\lambda - 33)\lambda + 81} \begin{pmatrix} 81 - 6\lambda & 9\lambda \\ 9\lambda & -27(\lambda - 3) \end{pmatrix},$$

а значит

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{(\lambda - 33)\lambda + 81} \left\{6(4\lambda + 27), 324 - 90\lambda\right\},$$

откуда находим выражение для $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = e^{t/2} + 6\lambda \frac{4\lambda + (54 - 15\lambda)t + 27}{(\lambda - 33)\lambda + 81} e^{-2t}.$$

№ 9.1.6

Найдём решение (12) для $K = (1 + ts)$ и $g(t) = t^2$. Для этого находим

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad \Phi = \{1/3, 1/4\}, \qquad (\mathbb{1} - \lambda\hat{M})^{-1} = \frac{1}{12 + \lambda(\lambda - 16)} \begin{pmatrix} -4(\lambda - 3) & 6\lambda \\ 6\lambda & -12(\lambda - 1) \end{pmatrix},$$

а значит

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{12 + \lambda(\lambda - 16)} \left\{\frac{\lambda}{6} + 4, 3 - \lambda\right\},$$

откуда находим выражение для $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = t^2 + \lambda\left(\frac{\lambda + 24}{6(\lambda - 16)\lambda + 72} - t\frac{\lambda - 3}{(\lambda - 16)\lambda + 12}\right).$$

5 Неделя VI

9.2.4

Решим уравнение, вида

$$\int_0^t \varphi(t - s) s \varphi(s) = f(t) = t, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(p)(-\partial_p)\varphi(p) = f(p).$$

Найдём некоторое решение (хотелось бы чтобы образ затухал к 0 на ∞)

$$-\varphi\varphi' = -\frac{1}{2}(\varphi^2)' = \frac{1}{p^2}, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi^2 = -2\int \frac{1}{p^2} = \frac{2}{p}, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(p) = \pm\sqrt{\frac{2}{p} + C},$$

где выбираем $C = 0$. Тогда

$$\varphi(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi t}}.$$

9.3.2

Рассмотрим сингулярное уравнение

$$\lambda\varphi(x) + \text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)\, dy}{y - x} = f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Решение уравнения знаем:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\lambda + i\pi} f(x) - \frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)\, dy}{y - x + i\varepsilon}.$$

Замыкая в верхней полуплоскости дугу, находим

$$\varphi(x) = \frac{\pi x + \lambda}{(1 + x^2)(\pi^2 + \lambda^2)}.$$

9.3.3

Рассмотрим сингулярное уравнение

$$\text{v.p.} \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(y)}{y - x}\, dy = f(x) = x,$$

для которого выполняется свойство ортогональности $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 0$. Тогда можем записать ответ

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi i} \left(f(x) + \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{f(y)\, dy}{\sqrt{1 - y^2}(y - x + i\varepsilon)} \right) = -\frac{\sqrt{1 - x^2}}{\pi},$$

что подходит.