Заметки по курсу «Магнитооптика»

Лектор: Владимир Игоревич Белотелов
Стенография: Хоружий Кирилл

От: *17 февраля 2022 г.*

Содержание

Лекция №2

Классическая электродинамика. Знаем, что

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}], \qquad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t},$$

тогда в нулевом приближении

$$H = 0, \qquad m\omega\boldsymbol{v}_0 = e\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{p} = e\boldsymbol{r}, \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon_{(0)} = 1 - 4\pi\frac{Ne^2}{m\omega^2}.$$

Стоит уточнить, что под $\boldsymbol{H}$ понимается постоянное внешнее магнитное поле, а $\boldsymbol{E}$ – поле волны.

В первом приближении

$$m\boldsymbol{v}_1 = \frac{e}{c}\left[\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{H}\right], \qquad \Rightarrow \qquad m\boldsymbol{v}_1 = \frac{e^2}{c}\frac{1}{m\omega}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right].$$

Интегрруя, находим

$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{-e^2 i}{cm^2\omega^3}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right], \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{p}_1 = -\frac{Ne^3 i}{m^2 c\omega^3}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right].$$

Собирая всё вместе, находим

$$\boldsymbol{D} = \left(1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}\right)\boldsymbol{E} - \frac{4\pi N e^3 i}{m2c\omega^3}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right].$$

Таким образом пришли к тензору на $\hat{\varepsilon}$:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{(0)} & ig_z & -ig_y \\ -ig_z & \varepsilon_0 & ig_x \\ ig_y & -ig_x & \omega_{(0)} \end{pmatrix},$$

иначе можем записать в виде

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^{(0)}\delta_{ij} - i\epsilon_{ijk}g_k,$$

где $\boldsymbol{g}$ – вектор гирации:

$$\boldsymbol{g} = f\boldsymbol{H}, \qquad f = \frac{4\pi N e^3}{m^2 c\omega^3},$$

где f указан для свободного электрона. В изотропном магнитном материале $\boldsymbol{M} = \chi\boldsymbol{H}$. В общем виде $\boldsymbol{g} = \hat{f}\boldsymbol{M}$:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} - i\epsilon_{ijk}f_{kl}M_l.$$

Дисперсия. Вообще есть дисперсия, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\omega)$, работает причинность, есть некоторый нелокальный отклик, а тогда $\varepsilon = \varepsilon(\omega, \boldsymbol{k})$.

Можем разложить

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \underbrace{\chi_{ijk}^{(2)}E_k}_{\text{Поккельс}} + \underbrace{\chi_{ijkl}^{(3)}E_kE_l}_{\text{Керр}} + \underbrace{\chi_{ijk}^{(2m)}B_k}_{\text{Фарадей}} + \underbrace{\chi_{ijkl}^{(3m)}B_kB_l}_{\text{Каттон-Мутон}} + \ldots$$

Эффект Фарадея. Записываем уравнения Максвелла. Получаем уравнение[1]

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \frac{\omega}{c}\operatorname{rot}\bar{B}, \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} - \Delta E = \frac{\omega^2}{c}\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E}.$$

Переходя к плоским монохроматическим волнам вида $e^{-i\omega t + i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}$, находим

$$n^2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}) = \hat{\varepsilon}\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{c}{\omega}\boldsymbol{k},$$

которое ещё называют *уравнением Френеля*.

Упростим себе жизнь $\boldsymbol{k} \parallel \boldsymbol{M} \parallel Oz$:

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{pmatrix}, \qquad \hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & -ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так приходим к уравнениям

$$n^2E_x = \varepsilon_0 E_x + igE_y,$$
$$n^2E_y = \varepsilon_0 E_y - igE_x,$$
$$n^2E_z = \varepsilon_0 E_z + n^2E_z.$$

[1] Напомним, что $\mu \approx 1$, а значит $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}$.

Приравнивая определитель к нулю, находим
$$\begin{Vmatrix} n^2-\varepsilon_0 & -ig \\ ig & n^2-\varepsilon_0 \end{Vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \quad (n^2-\varepsilon_0)^2 - g^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad n^2 = \varepsilon_0 \pm g.$$
Так приходим к показателю преломления
$$n_\pm = \pm\sqrt{\varepsilon_0 \pm g}.$$

Подставляя n, находим волну
$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \\ 0 \end{pmatrix} E_0 \exp\left(-i\omega t + ik_0 z\sqrt{\varepsilon_0+g}z\right).$$
то есть мы получили круговую поляризацию, с разной фазовой скоротью для правой и левой поляризации.

Угол Фарадея можем найти, рассмотрев плоскую поляризацию, как сумму двух круговых:
$$\boldsymbol{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos(k_0\Delta n z) \\ \sin(k_0 \Delta n z) \end{pmatrix} e^{-i\omega t + ik_0 n_0 z}, \qquad \Delta n = \frac{n_+ - n_-}{2}, \quad n_0 = \frac{n_+ + n_-}{2}.$$

Обычно $\varepsilon_0 \gg g$, а значит
$$\Delta n = \frac{g}{2\sqrt{\varepsilon_0}}, \quad \Rightarrow \quad \theta = k_0 \Delta n z = \frac{k_0 g}{2 n_0} z.$$

- Эффект Каттона-Мутона. Вывести квадратичную поправку к $\hat{\varepsilon}$: $v = v_0 + v_1 + v_2$. Дедлайн – неделя.

Лекция №2

Уровень ^1S, 4 вырожденных состояния: $|S_z, I_z\rangle$:

$$|--\rangle\,,\ |-+\rangle\,,\ |+-\rangle\,,\ |++\rangle\,.$$

Знаем поле диполя:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3} + \frac{3\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{x})}{r^5} + \frac{8\pi}{3}\boldsymbol{\mu}\delta(\boldsymbol{x}).$$

Так вот, есть магнитный момент ядра $\boldsymbol{\mu}_I$ и $\boldsymbol{\mu}_S$, которые взаимодействуют:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{g_S|e|\hbar}{2m_ec}\hat{\boldsymbol{S}}, \quad g_S = -2.0023, \qquad \hat{\boldsymbol{\mu}}_I = \frac{g_I|e|\hbar}{2m_pc}\hat{\boldsymbol{I}}, \quad g_I = 5.58.$$

Так строим слагаемое для возмущения гамильтониана

$$V(\hat{\boldsymbol{S}}, \hat{\boldsymbol{I}}, \hat{\boldsymbol{x}}) = \frac{\hat{\boldsymbol{\mu}}\cdot\hat{\boldsymbol{\mu}}_I}{\hat{r}^3} - \frac{3(\hat{\boldsymbol{\mu}}_S\cdot\hat{\boldsymbol{x}})\hat{\boldsymbol{\mu}}_I\cdot\hat{\boldsymbol{x}}}{r^5} + \frac{8\pi}{3}\hat{\boldsymbol{\mu}}_S\cdot\hat{\boldsymbol{\mu}}_I\delta(\hat{\boldsymbol{x}}).$$

Сам гамильтониан помним:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{e}{\hat{r}} + \hat{V}.$$

Можем посчитать

$$\hat{H}_{SI} = \langle 100|V|100\rangle = \hbar\nu_{\text{hf}}\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{I}}, \qquad \frac{\nu_{\text{hf}}}{2\pi} = 1.4\ \text{ГГц},$$

где

$$\langle\boldsymbol{x}|100\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{2}{a_{\text{B}}^{3/2}}e^{-r/a_{\text{B}}}.$$

Вводим оператор

$$\hat{\boldsymbol{F}} = \hat{\boldsymbol{S}} + \hat{\boldsymbol{I}}, \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{I}} = \frac{1}{2}\left(F(F+1)\right) - \frac{3}{4}.$$

Подставляя, находим

$$\hat{H}_{SI} = \hbar\nu_{\text{hf}}\left(\frac{F(F+1)}{2} - \frac{3}{4}\right).$$

Получается отступление от невозмущенного уровня на $\frac{1}{4}\hbar\nu_{\text{hf}}$ и на $-\frac{3}{4}\hbar\nu_{\text{hf}}$ для $F=0$, $F_z=0$.

Можем найти путь из старого базиса в новый:

$$|F, F_z\rangle = \sum |S_z,\, I_z\rangle\,\langle S_z,\, I_z|\,|F,\, F_z\rangle\,.$$

Знаем, что

$$|11\rangle_F = |{++}\rangle_S\,|{++}\rangle_I = \left|S_z = \tfrac{1}{2}, I_z = \tfrac{1}{2}\right\rangle.$$

Теперь действуем на $|11\rangle_F$ понижающим оператором $\hat{F}_- = \hat{S}_- + \hat{I}_-$. Помним, что

$$\hat{J}_-\,|j, j_z\rangle = \sqrt{(j+j_z)(j-j_z+1)}\,|j, j_z-1\rangle\,.$$

Так находим ответ

$$|10\rangle_F = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|{+-}\rangle_{SI} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|{-+}\rangle\,,$$

а вообще это коэффициенты Клебша-Гордана.

Эффекты Зеемана. Вспомним добавку к энергии в магнитном поле:

$$\hat{H} = -\hat{\boldsymbol{\mu}}\cdot\boldsymbol{B} = -\mu_zB = \hbar\omega_L\hat{S}_z, \qquad \omega_L = \frac{|e|B}{m_ec}.$$

1s-орбиталь. Теперь работаем в гамильтониане

$$\hat{H} = \hbar\nu_{\text{hf}}\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{I}} - \hat{\boldsymbol{\mu}}\cdot\boldsymbol{B}.$$