Уравнения движения. Рассмотрим ограниченную задачу трёх тел. Перейдём во вращающуюся систему отсчёта с координатами u, v, тогда функция Лагранжа перепишется в виде

$$L = T + V = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + \omega \sum_i m_i(x_i\dot{y}_i - \dot{x}_i y_i) + V_\omega,$$

где новая «силовая функция» имеет вид

$$V = V_G + \frac{I\omega^2}{2}, \qquad V_G = G\sum_{k<j}\frac{m_k m_j}{r_{kj}}, \qquad I = \sum_i m_i r_i^2.$$

В частности, для трёх тел, $M_1 > M_2 \gg M_3 = m$:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \omega m(x\dot{y} - \dot{x}y) + \frac{GM_1 m}{r_{13}} + \frac{GM_2 m}{r_{23}} + \frac{m}{2}\omega^2 r_3^2.$$

Далее будем считать

$$\boldsymbol{r}_1 = (-\alpha R,\, 0)\,, \qquad \boldsymbol{r}_2 = (R,\, 0)\,, \qquad \alpha = M_2/M_1, \qquad R^3 = \frac{GM_1}{(\alpha+1)^2\omega^2},$$

тогда

$$r_{13}^2 = (x + \alpha R)^2 + y^2, \qquad r_{23}^2 = (x - R)^2 + y^2, \qquad r_3^2 = x^2 + y^2.$$

Подставляя это всё в уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

находим уравнения движения

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 2m\dot{y}\omega + \partial_x V, \\ m\ddot{y} &= -2m\dot{x}\omega + \partial_y V, \end{aligned}$$

Область Хилла. Заметим, что уравнения движения имеют интеграл движения (сохранение энергии)

$$\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - V(x,\, y) = h,$$

который определяет *область Хилла*: $\{(x, y) \mid V(x, y) + h \geqslant 0\}$.

Относительные равновесия. Каждой критической точке V соответствует решение $x(t) = x_0$ и $y(t) = y_0$. Всего критических точек будет пять (при $M_1 > M_2$) – точки Лагранжа, которые соответствуют условию $\partial_x V = \partial_y V = 0$:

$$\begin{aligned} \partial_x V &= x\Phi - \frac{GmM_1}{r_{13}^3}\alpha R - \frac{GmM_2}{r_{23}^3}R, \\ \partial_y V &= y\Phi, \end{aligned} \qquad \Phi = m\omega^2 - \frac{GmM_1}{r_{13}^3} - \frac{GmM_2}{r_{23}^3}.$$

Легко видеть, что при $y \neq 0$, $\Phi = 0$:

$$\frac{GM_1}{r_{13}^3} + \frac{GM_2}{r_{23}^3} = \omega^2, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r_{13}^3} + \frac{\alpha}{r_{23}^3} = \frac{1}{R^3}\frac{1}{(\alpha+1)^2}, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r_{13}^3} + \frac{\alpha}{r_{23}^3} = \frac{1+\alpha}{[R(1+\alpha)]^3},$$

а значит $r_{13} = r_{23} = r_{12} = R(1+\alpha)$ – точки L_4 и L_5, вершины равностороннего треугольника, со стороной r_{12}, они называются *треугольными точками либрации.*

Коллинеарные точки либрации. Теперь пусть $y = 0$, так приходим к *коллинеарным точкам либрации*:

$$\frac{x}{(\alpha+1)^2R^3} - \alpha\frac{x - R}{|x - R|^3} - \frac{x + \alpha R}{|x + \alpha R|^3} = 0.$$

Считая $x = R \pm \alpha\rho$, получим уравнения

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\alpha\rho^2} + \frac{\alpha\rho + R}{(\alpha+1)^2R^3} - \frac{1}{(\alpha\rho + \alpha R + R)^2} &= 0 \\ \frac{1}{\alpha\rho^2} + \frac{R - \alpha\rho}{(\alpha+1)^2R^3} - \frac{1}{(-\alpha\rho + \alpha R + R)^2} &= 0. \end{aligned}$$

Раскладывая в ряд по α, находим в приближении $o(\alpha)$

$$x_{L_{1,2}} = R\left(1 \mp \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}}\right) = r_{12}\left(1 \mp \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}}\right).$$

Теперь найдём $x_{L_3} = -R - \alpha\rho$. Тогда, аналогично с точностью до $o(\alpha)$:

$$x_{L_3} = -R\left(1 + \frac{17}{12}\alpha\right) = -r_{12}\left(1 + \frac{5}{12}\alpha\right),$$

где $r_{12} = R(1+\alpha)$.