

# ЗАМЕТКИ ПО КУРСУ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

---

Автор заметок: Хоружий Кирилл

От: 8 февраля 2022 г.

## Содержание

1	C1. Численное дифференцирование и аппроксимация.	2
2	C2. Интерполяция	3

# 1 С1. Численное дифференцирование и аппроксимация.

**Простейший случай.** Пусть задана функция в виде пар точек  $x_i, u(x_i)$ . Тогда, в простейшем случае, можем найти производную  $u^{(1)}(x_j)$ , как

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x_j) &\stackrel{a)}{=} \frac{u_j - u_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \\ u^{(1)}(x_j) &\stackrel{b)}{=} \frac{u_{j+1} - u_j}{x_{j+1} - x_j} \\ u^{(1)}(x_j) &\stackrel{c)}{=} \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{x_{j+1} - x_{j-1}}. \end{aligned}$$

Хочется понять с какой точностью происходит аппроксимация. Для этого вспоминаем разложение по Тейлору

$$u(x_j + \Delta x) = \sum_{k=1}^n \frac{u^{(k)}(x_j)}{k!} \Delta x^k + O(\Delta x^{n+1}).$$

Далее будем считать, что значения даны однородна, тога  $x_j - x_{j-1} = h$ . Раскладывая по Тейлору, находим

$$u(x_{j-1}) = u_j - hu'_j + \frac{h^2}{2}u''_j - \frac{h^3}{6}u'''_j + O(h^4),$$

подставляя в выражение для производной, находим (для «а»)

$$\frac{1}{h} \left( u_j - u_j + hu'_j - \frac{h^2}{2}u''_j + \frac{h^3}{6}u'''_j \right) = u'_j - \frac{h}{2}u''_j + \frac{h^2}{6}u'''_j \approx u'_j + O(h).$$

Аналогично для «b»  $u'(x_j) = u'_j + O(h)$ .

Интересно посмотреть на «с»:

$$u'(x_j) = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} = u'_j + O(h^2),$$

что лучше предыдущего результата.

**Общий случай.** Пусть теперь нам нужно найти  $u^{(k)}(x_*) = u_*^{(k)}$ , которое может быть выражено в виде

$$u_*^{(k)} = \sum_{j=-l}^m \alpha_j u(x_* + \Delta x_j),$$

где  $n = m + l$  – количество узлов,  $x_* \in [x_j, x_{j+1}]$ ,  $\Delta x_j = x_j - x_*$ .

Снова раскладывая по Тейлору, найдём  $\alpha_i$ :

$$u(x_* + \Delta x_j) = u_* + \Delta x_j u'_* + \dots + \frac{\Delta x_j^n}{n!} u_*^{(n)},$$

домножая на  $\alpha_j$ , суммируя и группируя коэффициенты при  $u_*^{(k)}$

$$u^{(k)}(x_*) = u_* \sum_{j=-l}^m \alpha_j + u'_* \sum_{j=-l}^m \alpha_j \Delta x_j + \frac{u''_*}{2} \sum_{j=-l}^m \alpha_j \Delta x_j^2 + \dots + \frac{u_*^{(n)}}{n!} \sum_{j=-l}^m \alpha_j \Delta x_j^n.$$

Пусть мы хотим аппроксимировать при  $k = 0$ , а значит

$$\sum_{j=-l}^m \alpha_j = 1, \quad \sum_{j=-l}^m \Delta x_j \alpha_j = 0, \quad \dots \quad \sum_{j=-l}^m \Delta x_j^n \alpha_j = 0.$$

Всего узлов  $n$ , соответственно  $n$  неизвестных  $\alpha_j$ , а значит останавливаемся на аппроксимации с точностью до  $\frac{u_*^{(n)}}{n!} \Delta x_j^n$ .

Допустим теперь  $k = k$ , тогда мы бы требовали  $\sum_{j=-l}^m \Delta x_j^k \alpha_j = 1$ , а остальные суммы равны нулю. И так можем продолжать вплоть до  $k = n - 1$ .

**Решение СЛУ.** Перейдём к системе вида  $A\alpha = f$ , где  $\alpha = \{\alpha_{-l}, \alpha_{-l+1}, \dots, \alpha_{m-1}, \alpha_m\}$ , а  $f = \{1, 0, \dots, 0\}$  для  $k = 0$ . Осталось найти  $A$ , которое будет вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \Delta x_{-l} & \dots & \Delta x_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta x_{-l}^{n-1} & \dots & \Delta x_m^{n-1} \end{pmatrix},$$

которую ещё называют матрицей Вандермонда. Её замечательная особенность в её невырожденности, а значит решение можем найти в виде  $\alpha = A^{-1}f$ .

Если  $x_* = x_j$ , то решение даст  $\alpha_j = 1$  и  $\alpha_{j \pm i} = 0$ . А значит решение может быть представлено в виде

$$\alpha_j = \frac{(x_* - x_{-l})(x_* - x_{-l+1}) \dots (x_* - x_{j-1})(x_* - x_{j+1}) \dots (x_* - x_m)}{(x_j - x_{-l})(x_j - x_{-l+1}) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_m)},$$

которое вроде и является решением для  $k = 0$ .

Для общего вида  $k$  также можно получить рекуррентные соотношения чуть более сложного вида. Напомним, что для  $k$  производной точность аппроксимации будет  $O(\Delta x^{n-k})$ .

**Функция многих переменных.** Для начала вспомним, что дифференциал

$$d^k u(x_*, y_*) = (dx \partial_x + dy \partial_y)^k u(x_*, y_*) \approx (\Delta x_i \partial_x + \Delta y_i \partial_y)^k u(x_*, y_*).$$

Подставляя это в ряд Тейлора и представляя

$$u^{(k)}(x_*, y_*) = \sum_i \alpha_i u(x_* + \Delta x_i, y_* + \Delta y_i) = \dots$$

приходим к системе для  $\alpha_i$  (при  $k = 0$ ):

$$\sum_{i=0}^I \alpha_i = 1, \quad \sum_{i=0}^I \Delta x_i \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^I \Delta y_i \alpha_i = 0, \quad \dots$$

А дальше уже снова можем подставлять  $\neq 0$  часть  $\mathbf{f}$  при той производной, которая нам нужна.

## 2 С2. Интерполяция