Заметки по курсу
«Уравнения математической физики»

Семинарист: Александр Сергеевич Осин

Стенография: Хоружий Кирилл

От: *27 марта 2022 г.*

Содержание

1 Медленные переменные

Секулярные члены. Пусть есть уравнение вида

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon\omega_0^2 x, \qquad x(0) = a, \qquad \dot{x}(0) = 0.$$

Решение может быть найдено в виде

$$x(t) = a\cos\left(\omega_0\sqrt{1+\varepsilon}t\right) \approx a\cos\left(\omega_0\left(1+\tfrac{\varepsilon}{2}\right)t\right) = a\cos\omega_0 t - \frac{a\varepsilon\omega_0 t}{2}\sin(\omega_0 t) + o(\varepsilon).$$

И вот видна беда, при $\varepsilon\omega_0 t \sim 1$ теория возмущений не работает. В большей части резонансных систем возникают секулярные члены.

Получим этот результат в терминах теории возмущений. Пусть есть тот же гармонический осциллятор, заданы начальные условия, и знаем решение в виде

$$x(t) = x(0)\cos\omega_0 t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}\sin\omega_0 t + \int_0^t \frac{\sin\omega_0(t-\tau)}{\omega_0} f(\tau)\,d\tau.$$

Разложим это всё по ε и приравняем при степенях ε:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^0: && \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 && x_0(0) = a, \quad \dot{x}_0(0) = 0, \\ &\varepsilon^1: && \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\omega_0^2 x_0 && x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \end{aligned}$$

так приходим к

$$x_1(t) = -a\omega_0 \int_0^t \sin\left(\omega_0(t-\tau)\right)\cos\left(\omega_0\tau\right)\,d\tau = -\frac{a\omega_0}{2}\sin(\omega_0 t)\cdot t,$$

что получается даёт ответ только на конечном интервале времени.

Медленные переменные. Основная идея решения таких возмущений:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(x, \dot{x}, t),$$

где f содержит малость $\sim \varepsilon \ll 1$ – ввести медленно меняющиеся переменные:

$$x(t) = A(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t)).$$

Подставляем это в диффур

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{A}\sin(\omega_0 t + \varphi) + A\cos(\omega_0 t + \varphi)(\omega_0 + \dot{\varphi}) \\ \ddot{x} &= \ddot{A}\sin(\omega_0 t + \varphi) + 2\dot{A}\cos(\omega_0 t + \varphi)(\omega_0 + \dot{\varphi}) + A\ddot{\varphi}\cos(\omega_0 t + \varphi) - A(\omega_0 + \dot{\varphi})^2\sin(\omega_0 t + \varphi). \end{aligned}$$

Зафиксируем, что $\dot{A}(t) \ll \omega_0 A(t)$ и $\dot{\varphi} \ll \omega_0$. Оставим здесь только слагаемые до первого порядка малости:

$$\ddot{x} = 2\dot{A}\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi) - 2A\omega_0\dot{\varphi}\sin(\omega_0 t + \varphi) = f\left(A\sin(\omega_0 t + \varphi),\ A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi),\ t\right).$$

Домножим это уравнение на $\cos(\omega_0\tau + \varphi(t))$, также на $\sin\ldots$ и проинтегрируем по периоду:

$$\int_{t-T/2}^{t+T/2} \Big(2\dot{A}(\tau)\omega_0\cos^2\left(\omega_0\tau + \varphi(t)\right) - 2A(\tau)\omega_0\dot{\varphi}(\tau)\sin(\omega_0\tau + \varphi(t))\cos(\omega_0\tau + \varphi(t))\Big)\,d\tau.$$

Так как A и φ меняются медленно, то можем считать их на масштабе интегрирования $A(\tau) = A(t)$, $\varphi(\tau) = \varphi(t)$. Тогда уравнения перепишется в виде

$$\dot{A}\omega_0 = \langle f\cos(\omega_0\tau + \varphi(t))\rangle_\tau, \tag{1}$$

$$A\dot{\varphi}\omega_0 = -\langle f\sin\left(\omega_0\tau + \varphi(t)\right)\rangle_\tau. \tag{2}$$

Пример №1. Рассмотрим осциллятор с затуханием, пусть $f = -2\gamma\dot{x}$:

$$\dot{A}\omega_0 = -\frac{2\gamma}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} A\omega_0\cos^2\left(\omega_0\tau + \varphi\right)\,d\tau = -\gamma A\omega_0, \qquad \Rightarrow \qquad A(t) = A(0)e^{-\gamma t}.$$

Для фазы:

$$A\dot{\varphi}\omega_0 = \frac{2\gamma}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} A\omega_0\sin(\ldots)\cos(\ldots)\,d\tau = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \mathrm{const} + 0(\gamma).$$

Пример №2. Пусть теперь $f = -\varepsilon x^3$, $\varepsilon \ll 1$:

$$\dot{A}\omega_0 = -\frac{\varepsilon}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} A^3\sin^3\xi\cos\xi\,d\tau = 0,$$

для фазы:

$$A\dot{\varphi}\omega_0 = +\frac{\varepsilon}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} A^3(t)\sin^4\xi\,d\tau = \frac{3\varepsilon A^3(t)}{8},$$

но так как $A = \mathrm{const}$, находим

$$\dot{\varphi} = \frac{3\varepsilon \dot{A}}{8\omega_0}, \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = A\sin\left(\omega_0 t + \frac{3\varepsilon A^2}{8\omega_0}t\right).$$

Пример №3. Рассмотрим генератор Ван-дер-Поля, $f = \varepsilon\dot{x}(1-x^2)$, $\varepsilon \ll 1$:

$$\dot{A}\omega_0 = \frac{\varepsilon}{T}\int_{t+T/2}^{t-T/2} A\omega_0 \cos(\xi)(1 - A^2\sin^2\xi)\cos\xi\, d\tau = \frac{\varepsilon A\omega_0}{2} - \frac{\varepsilon A^3\omega_0}{8} = \frac{\varepsilon A\omega_0}{2}\left(1 - \frac{A^2}{4}\right).$$

Теперь уравнение на фазу:

$$A\dot{\varphi}\omega_0 = -\frac{\varepsilon}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} A\omega_0 \sin\xi\cos\xi(1 - A^2\sin^2\xi)\, d\tau = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(t) = \mathrm{const}.$$

Найдём A, решая уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{\dot{A}}{A\left(1 - \frac{A^2}{4}\right)} = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \overset{A^2=\alpha}{=} \qquad \frac{\alpha}{4-\alpha} = Ce^{\varepsilon t}, \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{2C^{\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 + C^2 e^{\varepsilon t}}},$$

где $A \to 2$ при $t \to \infty$ – предельный цикл.

Пример №4. Рассмотрим параметрический резонанс:

$$\ddot{x} + \omega_0^2\left(1 + h\cos\left(2(\omega_0 + \delta\omega)t\right)\right)x(t) = 0,$$

что также гордо именуется уравнением Матье. Это аналогично наличию $f = -h\cos(2(\omega_0 + \delta\omega)t)x$. Введем параметр $\theta = \omega_0 t - \varphi(t)$, тогда

$$\dot{A}\omega_0 = -\frac{h}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} A\sin\xi\cos\xi\cos(2\xi + 2\theta)\, d\tau = -\frac{h\omega_0^2}{2T}A(t)\int_{t-/2}^{t+T/2}\sin(2\xi)\left(0 - \sin(2\xi)\sin(2\theta)\right)\, d\tau = \frac{\omega_0^2 h}{4}A\sin(2\theta).$$

Итого, окончательное уравнение

$$\dot{A} = \frac{\omega_0 h}{4}A\sin(2\theta).$$

Для фазы же

$$A\dot{\varphi}\omega_0 = -\frac{h\omega_0^2}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} A\sin^2\xi\left(\cos 2\xi\cos 2\theta - 0\right)\, d\tau = \frac{h\omega_0^2}{4}A\cos 2\theta, \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\varphi} = \frac{h\omega_0}{4}\cos 2\theta.$$

Но лучше решать уравнение на $\dot{\varphi} = \delta\omega - \dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \delta\omega - \frac{h\omega_0}{4}\cos 2\theta, \qquad \Rightarrow \qquad \Big/ |\delta\omega| < \left|\frac{h\omega_0}{4}\right| \Big/ \qquad \exists\theta_0\colon \theta(t) = \theta_0 = \mathrm{const},$$

а значит

$$A(t) = A_0\exp\left(\frac{\omega_0 h\sin 2\theta_0}{4}t\right).$$

Кстати, вроде $A^2\dot{\theta}$ – первый интеграл системы.

2 Нелинейные полевые уравнения

В линейных уравнениях обычно ищем функцию Грина.

Рассмотрим уравнение Хопфа

$$\partial)tu + u\partial_x u = 0,$$

которое описывает динамику плотности частиц газа.

Метод характеристик. Рассмотрим уравнение переноса

$$\partial_t + \boldsymbol{v}\partial_t\varphi = f(t, \boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{v} = \mathrm{const}.$$

Пока считаем $f = 0$. Заметим, что

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{r}} = 0.$$

Заметим, что $\frac{dt}{dt} = \boldsymbol{v}$ даст решение:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(t, \boldsymbol{r}(t)) = \mathrm{const}.$$

Давайте продолжать, пусть при $t = 0$ есть задача Коши $\varphi(t = 0,\, \boldsymbol{r}) = \varphi_0(\boldsymbol{r})$. Тогда

$$\varphi(0,\, \boldsymbol{r}(0)) = \varphi_0(\boldsymbol{r}(0)), \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{v}t + \boldsymbol{r}_0.$$

Таким образом на характеристиках

$$\varphi(t,\, \boldsymbol{r}(t)) = \varphi_0(\boldsymbol{r}_0) = \varphi_0(\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{v}t).$$

3 Автомодельные подстановки

Идея. Если уравнения вида $\hat{L}u(\boldsymbol{r}, t) = \ldots$ однородно по $\boldsymbol{r}$ и t, и изотропно, то может помочь автомодельная подстановка. Например для уравнения теплопроводности:

$$u(t, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{t^a} f\left(\tfrac{r}{t^b}\right) \quad : \quad t \to \lambda t \quad \Rightarrow \quad u \to \lambda^{-a} u,\ r \to \lambda^b r.$$

Требуя, чтобы λ сокращалась, получаем $b = \frac{1}{2}$. Восстановить a в общем виде нельзя, но считая, что $\int_{\mathbb{R}^n} u\, dV =$ const, получаем $\lambda^{bn}\lambda^{-a} = 1$, откуда $a = n/2$.

Асимптотика. На самом деле автомобедельные решения соответствуют асимптотикам на больших временах. Знаем, что для уравнения теплопроводности $\langle r^2 \rangle = 2Dt$.

апа