Заметки по курсу
«Уравнения математической физики»

Семинарист: Александр Сергеевич Осин

Стенография: Хоружий Кирилл

От: *8 апреля 2022 г.*

Содержание

1 Медленные переменные

Секулярные члены. Пусть есть уравнение вида

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon\omega_0^2 x, \qquad x(0) = a, \qquad \dot{x}(0) = 0.$$

Решение может быть найдено в виде

$$x(t) = a\cos\left(\omega_0\sqrt{1+\varepsilon}t\right) \approx a\cos\left(\omega_0\left(1+\tfrac{\varepsilon}{2}\right)t\right) = a\cos\omega_0 t - \frac{a\varepsilon\omega_0 t}{2}\sin(\omega_0 t) + o(\varepsilon).$$

И вот видна беда, при $\varepsilon\omega_0 t \sim 1$ теория возмущений не работает. В большей части резонансных систем возникают секулярные члены.

Получим этот результат в терминах теории возмущений. Пусть есть тот же гармонический осциллятор, заданы начальные условия, и знаем решение в виде

$$x(t) = x(0)\cos\omega_0 t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}\sin\omega_0 t + \int_0^t \frac{\sin\omega_0(t-\tau)}{\omega_0} f(\tau)\, d\tau.$$

Разложим это всё по ε и приравняем при степенях ε:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^0: \qquad && \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \qquad && x_0(0) = a, \quad \dot{x}_0(0) = 0, \\ &\varepsilon^1: \qquad && \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\omega_0^2 x_0 \qquad && x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \end{aligned}$$

так приходим к

$$x_1(t) = -a\omega_0\int_0^t \sin\left(\omega_0(t-\tau)\right)\cos\left(\omega_0\tau\right)\, d\tau = -\frac{a\omega_0}{2}\sin(\omega_0 t)\cdot t,$$

что получается даёт ответ только на конечном интервале времени.

Медленные переменные. Основная идея решения таких возмущений:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(x, \dot{x}, t),$$

где f содержит малость $\sim \varepsilon \ll 1$ – ввести медленно меняющиеся переменные:

$$x(t) = A(t)\sin(\omega_0 t + \varphi(t)).$$

Подставляем это в диффур

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{A}\sin(\omega_0 t+\varphi) + A\cos(\omega_0 t+\varphi)(\omega_0+\dot{\varphi}) \\ \ddot{x} &= \ddot{A}\sin(\omega_0 t+\varphi) + 2\dot{A}\cos(\omega_0 t+\varphi)(\omega_0+\dot{\varphi}) + A\ddot{\varphi}\cos(\omega_0 t+\varphi) - A(\omega_0+\dot{\varphi})^2\sin(\omega_0 t+\varphi). \end{aligned}$$

Зафиксируем, что $\dot{A}(t) \ll \omega_0 A(t)$ и $\dot{\varphi} \ll \omega_0$. Оставим здесь только слагаемые до первого порядка малости:

$$\ddot{x} = 2\dot{A}\omega_0\cos(\omega_0 t+\varphi) - 2A\omega_0\dot{\varphi}\sin(\omega_0 t+\varphi) = f\left(A\sin(\omega_0 t+\varphi),\, A\omega_0\cos(\omega_0 t+\varphi),\, t\right).$$

Домножим это уравнение на $\cos(\omega_0\tau + \varphi(t))$, также на $\sin\ldots$ и проинтегрируем по периоду:

$$\int_{t-T/2}^{t+T/2}\Big(2\dot{A}(\tau)\omega_0\cos^2\left(\omega_0\tau+\varphi(t)\right) - 2A(\tau)\omega_0\dot{\varphi}(\tau)\sin(\omega_0\tau+\varphi(t))\cos(\omega_0\tau+\varphi(t))\Big)\, d\tau.$$

Так как A и φ меняются медленно, то можем считать их на масштабе интегрирования $A(\tau) = A(t)$, $\varphi(\tau) = \varphi(t)$. Тогда уравнения перепишется в виде

$$\dot{A}\omega_0 = \langle f\cos(\omega_0\tau+\varphi(t))\rangle_\tau, \tag{1}$$

$$A\dot{\varphi}\omega_0 = -\langle f\sin\left(\omega_0\tau+\varphi(t)\right)\rangle_\tau. \tag{2}$$

Пример №1. Рассмотрим осциллятор с затуханием, пусть $f = -2\gamma\dot{x}$:

$$\dot{A}\omega_0 = -\frac{2\gamma}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} A\omega_0\cos^2\left(\omega_0\tau+\varphi\right)\, d\tau = -\gamma A\omega_0, \qquad \Rightarrow \qquad A(t) = A(0)e^{-\gamma t}.$$

Для фазы:

$$A\dot{\varphi}\omega_0 = \frac{2\gamma}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} A\omega_0\sin(\ldots)\cos(\ldots)\, d\tau = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \text{const} + 0(\gamma).$$

Пример №2. Пусть теперь $f = -\varepsilon x^3$, $\varepsilon \ll 1$:

$$\dot{A}\omega_0 = -\frac{\varepsilon}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} A^3\sin^3\xi\cos\xi\, d\tau = 0,$$

для фазы:

$$A\dot{\varphi}\omega_0 = +\frac{\varepsilon}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} A^3(t)\sin^4\xi\, d\tau = \frac{3\varepsilon A^3(t)}{8},$$

но так как $A = \text{const}$, находим

$$\dot{\varphi} = \frac{3\varepsilon \dot{A}}{8\omega_0}, \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = A\sin\left(\omega_0 t + \frac{3\varepsilon A^2}{8\omega_0}t\right).$$

Пример №3. Рассмотрим генератор Ван-дер-Поля, $f = \varepsilon\dot{x}(1-x^2)$, $\varepsilon \ll 1$:

$$\dot{A}\omega_0 = \frac{\varepsilon}{T}\int_{t+T/2}^{t-T/2} A\omega_0\cos(\xi)(1 - A^2\sin^2\xi)\cos\xi\, d\tau = \frac{\varepsilon A\omega_0}{2} - \frac{\varepsilon A^3\omega_0}{8} = \frac{\varepsilon A\omega_0}{2}\left(1 - \frac{A^2}{4}\right).$$

Теперь уравнение на фазу:

$$A\dot{\varphi}\omega_0 = -\frac{\varepsilon}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} A\omega_0\sin\xi\cos\xi(1 - A^2\sin^2\xi)\, d\tau = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(t) = \text{const}.$$

Найдём A, решая уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{\dot{A}}{A\left(1 - \frac{A^2}{4}\right)} = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \overset{A^2=\alpha}{=} \qquad \frac{\alpha}{4-\alpha} = Ce^{\varepsilon t}, \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{2C^{\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 + C^2e^{\varepsilon t}}},$$

где $A \to 2$ при $t \to \infty$ – предельный цикл.

Пример №4. Рассмотрим параметрический резонанс:

$$\ddot{x} + \omega_0^2\left(1 + h\cos\left(2(\omega_0 + \delta\omega)t\right)\right)x(t) = 0,$$

что также гордо именуется уравнением Матье. Это аналогично наличию $f = -h\cos(2(\omega_0 + \delta\omega)t)x$. Введем параметр $\theta = \omega_0 t - \varphi(t)$, тогда

$$\dot{A}\omega_0 = -\frac{h}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} A\sin\xi\cos\xi\cos(2\xi + 2\theta)\, d\tau = -\frac{h\omega_0^2}{2T}A(t)\int_{t-/2}^{t+T/2} \sin(2\xi)\left(0 - \sin(2\xi)\sin(2\theta)\right)\, d\tau = \frac{\omega_0^2 h}{4}A\sin(2\theta).$$

Итого, окончательное уравнение

$$\dot{A} = \frac{\omega_0 h}{4}A\sin(2\theta).$$

Для фазы же

$$A\dot{\varphi}\omega_0 = -\frac{h\omega_0^2}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} A\sin^2\xi\left(\cos 2\xi\cos 2\theta - 0\right)\, d\tau = \frac{h\omega_0^2}{4}A\cos 2\theta, \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\varphi} = \frac{h\omega_0}{4}\cos 2\theta.$$

Но лучше решать уравнение на $\dot{\varphi} = \delta\omega - \dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \delta\omega - \frac{h\omega_0}{4}\cos 2\theta, \qquad \Rightarrow \qquad \Big/ |\delta\omega| < \left|\frac{h\omega_0}{4}\right| \Big/ \qquad \exists\theta_0 \colon \theta(t) = \theta_0 = \text{const},$$

а значит

$$A(t) = A_0\exp\left(\frac{\omega_0 h\sin 2\theta_0}{4}t\right).$$

Кстати, вроде $A^2\dot{\theta}$ – первый интеграл системы.

2 Нелинейные полевые уравнения

В линейных уравнениях обычно ищем функцию Грина.

Рассмотрим уравнение Хопфа

$$\partial)tu + u\partial_x u = 0,$$

которое описывает динамику плотности частиц газа.

Метод характеристик. Рассмотрим уравнение переноса

$$\partial_t + \boldsymbol{v}\partial_t\varphi = f(t, \boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{v} = \text{const}.$$

Пока считаем $f = 0$. Заметим, что

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{r}} = 0.$$

Заметим, что $\frac{dt}{dt} = \boldsymbol{v}$ даст решение:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(t, \boldsymbol{r}(t)) = \text{const}.$$

Давайте продолжать, пусть при $t = 0$ есть задача Коши $\varphi(t = 0,\, \boldsymbol{r}) = \varphi_0(\boldsymbol{r})$. Тогда

$$\varphi(0,\, \boldsymbol{r}(0)) = \varphi_0(\boldsymbol{r}(0)), \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{v}t + \boldsymbol{r}_0.$$

Таким образом на характеристиках

$$\varphi(t,\, \boldsymbol{r}(t)) = \varphi_0(\boldsymbol{r}_0) = \varphi_0(\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{v}t).$$

3 Интегральные линейные уравнения типа свертка

Свёртка

Свертка I. Рассмотрим уравнение на φ, вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\varphi(y) = f(x),$$

то есть уравнение Фредгольма первого рода с $(a,b) = \mathbb{R}$ и $K(x,y) = K(x-y)$.

Решение можем найти через преобразование Фурье:

$$\tilde{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx}\, dx,$$

тогда

$$\int_{\mathbb{R}} dx\ e^{-ikx} \int_{\mathbb{R}} dy\ K(x-y)\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}} dy\ \varphi(y) \int_{\mathbb{R}} dx\ e^{-ik(x-y+y)} K(x-y) = \tilde{K}(k) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) e^{-iky}\, dy = \tilde{K}(k)\tilde{\varphi}(k),$$

а значит можем найти

$$\tilde{\varphi}(k) = \frac{\tilde{f}(k)}{\tilde{K}(k)}, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{f}(k)}{\tilde{K}(k)}. \tag{3}$$

Свертка II. Аналогично для уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} dy\ K(x-y)\varphi(y),$$

для которого также

$$\tilde{\varphi}(k) = \tilde{f}(k) + \lambda \tilde{K}(k)\tilde{\varphi}(k), \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{\varphi}(k) = \tilde{f}(k) + \lambda \frac{\tilde{K}(k)}{1 - \lambda\tilde{K}(k)} \tilde{f}(k),$$

и находим

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{K}(k)}{1-\lambda\tilde{K}(k)} \tilde{f}(k).$$

Последний интеграл можно переписать в виде свёртки

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} dy\ f(y) R(x-y), \qquad R(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{K}(k)}{1 - \lambda\tilde{K}(k)}, \tag{4}$$

где мы как раз и переписали выражение для $\varphi(x)$, прямым выражением для ядра резовльвенты.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\int_{\mathbb{R}} ds\ e^{-|t-s|}\varphi(s) = f(t),$$

для которого

$$\tilde{\varphi}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{F\left[e^{-|t|}\right]} = \frac{\tilde{f}(\omega)}{2}(1+\omega^2).$$

А значит искомая функция

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i\omega t}}{2} \left(\tilde{f}(\omega) + \omega^2 \tilde{f}(\omega)\right) = \frac{1}{2}\left(f(t) - \ddot{f}(t)\right),$$

что формально является обращением истории с функцией Грина. □

Пример. Найдём резольвенту для уравнения

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_{\mathbb{R}} e^{-|t-s|}\varphi(s)\, ds.$$

Как уже делали можем посчитать

$$R(\omega) = \frac{K(\omega)}{1 - \lambda K(\omega)} = \frac{2}{1 + \omega^2 - 2\lambda}.$$

Тогда резольвента уравнения

$$R(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \frac{2}{\omega^2 + 1 - 2\lambda} = \Big/ a^2 = 1 - 2\lambda > 0 \Big/ = 2\frac{2\pi i}{2\pi}\frac{e^{-at}}{2i\omega} = \frac{e^{-a|t|}}{a} = \frac{e^{-|t|\sqrt{1-2\lambda}}}{\sqrt{1-2\lambda}}.$$

□

Уравнение Вольтерра

Уравнение Вольтерра I. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма I на $(a, b) = (0, t)$:

$$f(t) = \int_0^t ds\ K(t-s)\varphi(s).$$

Здесь хорошо работает преобразование Лапласа:

$$f(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt = \Lambda[f](p).$$

Получаем

$$\Lambda[f](p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, dt \int_0^t ds\ K(t-s)\varphi(s) = \int_0^\infty ds\ \varphi(s) \int_s^\infty dt\ e^{-p(t+s-s)} K(t-s) = \Lambda[\varphi](p)\Lambda[K](p),$$

откуда находим выражение для $\varphi(p) = f(p)/K(p)$, а значит

$$\varphi(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \frac{f(p)}{K(p)} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}, \tag{5}$$

где p_0 правее всех особенностей.

Уравнение Вольтерра II. Аналогично для уравнения Фредгольма II:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^t K(x-y)\varphi(y)\, dy, \quad \Rightarrow \quad \varphi(p) = f(p) + \lambda K(p)\varphi(p), \quad \Rightarrow \quad \varphi(p) = \frac{f(p)}{1 - \lambda K(p)} = f(p) + \lambda \frac{K(p)f(p)}{1-\lambda K(p)},$$

а значит и сама функция $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \frac{K(p)f(p)}{1 - \lambda K(p)} = f(x) + \lambda \int_0^t R(t-s) f(s)\, ds, \qquad R(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \frac{K(p)}{1 - \lambda K(p)},$$

где p_0 аналогично правее всех особенностей.

Периодическое ядро

Периодическое ядро I. Рассмотрим $f(t)$ и $K(t)$ периодчиные с $T = b - a$, тогда и $\varphi(t)$ периодично по T. Решим уравнение, вида

$$\int_a^b K(t-s)\varphi(s)\, ds = f(t).$$

Раскладывая всё в ряд Фурье (вводя $\omega = \frac{2\pi}{T}$):

$$K(t) = \sum_n K_n e^{-in\omega t}, \qquad \varphi(t) = \sum_m \varphi_m e^{-im\omega t}, \qquad f(t) = \sum_n f_n e^{-in\omega t},$$

где коэффициенты выражаются в виде

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\omega t} f_n, \qquad f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{in\omega t}\, dt.$$

Подставляя всё в уравнение, приходим к выржению на f_n:

$$\varphi_n = \frac{f_n}{TK_n}, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{f_n}{TK_n} e^{-in\omega t}. \tag{6}$$

Периодическое ядро II. Аналогично можем найти резольвенту для уравнения Фредгольма второго рода:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b ds\ K(t-s)\varphi(s).$$

Решение находим в виде

$$\varphi_n = f_n + \lambda T K_n \varphi_n, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_n = \frac{f_n}{1 - \lambda T K_n} = f_n + \lambda \frac{TK_n}{1 - \lambda T K_n} f_n.$$

А значит $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b ds\ R(t-s) f(s), \qquad R(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{K_n}{1-\lambda T K_n} e^{-in\omega t}. \tag{7}$$

4 Интегральные нелинейные уравнения

Уравнение типа свёртки. Рассмотрим уравнение вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t-s)\varphi(s) = f(t).$$

Аналогично смотрим на фурье-образ:

$$[\varphi(\omega)]^2 = f(\omega), \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(\omega) = \pm\sqrt{f(\omega)},$$

откуда находим выражение для $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{f(\omega)} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Обобщение. Обобщим происходящее:

$$L(s) = \sum_{n=0}^{N} a_n s^n, \qquad F[s^n \varphi(s)] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \varphi(t) e^{-i\omega t}\, dt = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-i\omega t},$$

тогда

$$F[L(s)\varphi(s)] = L(i\partial_\omega)\varphi(\omega).$$

Значит уравнение вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds\ \varphi(t-s) L(s) \varphi(s) = f(t),$$

можем решить в виде

$$\varphi(\omega) L(i\partial_\omega)\varphi(\omega) = f(\omega),$$

то есть можем свести интегральное уравнение к дифференциальному.

Преобразование Лапласа

Теперь внимательно смотрим на уравнение вида

$$\int_0^t \varphi(t-s) L(s) \varphi(s) = f(t).$$

Смотрим на преобразование Лапласа:

$$f(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt,$$

для которого верно, что

$$\int_0^\infty t^n \varphi(t) e^{-pt}\, dt = (-1)^n \frac{d^n \varphi(p)}{dp^n}, \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^\infty L(s)\varphi(s) e^{-ps}\, ds = L(-d_p)\varphi(p).$$

Таким образом исходное уравнение может быть сведено к дифференциальному уравнению

$$\varphi(p) L(-d_p) \varphi(p) = f(p).$$

Периодический случай

Рассмотрим теперь уравнение вида

$$\int_{-\pi}^{+\pi} ds\ \varphi(t-s)\varphi(s) = f(t).$$

Аналогично раскладываем всё по Фурье

$$\varphi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi_n e^{-int}, \qquad f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{-int}, \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2\pi(\varphi_n)^2 e^{-int} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{-int},$$

так приходим к уравнению вида

$$2\pi(\varphi_n)^2 = f_n, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_n = \pm\sqrt{\frac{f_n}{\alpha\pi}}.$$

Факторизумое ядро

Рассмотрим уравнение вида

$$\varphi(t) = \int_a^b ds\ \varphi^n(s)x(t)y(s) + f(t).$$

Заметим, что $x(t)$ можем вынести, тогда

$$\varphi(t) = f(t) + \alpha x(t), \qquad \alpha = \int_a^b dsy(s)\varphi^n(s).$$

Найдём α, составляя аналогичный интеграл

$$\alpha = \int_a^b dt\ y(t)\varphi^n(t) = \int_a^b dt\ y(t)\left(\alpha x(t) + f(t)\right)^n,$$

таким образом получилось алгебраическое уравнение на α. Для суммы мы в факторизованном ядре мы получили бы алгебраическую систему нелинейных уравнений.

Сингулярные уравнения

Основой решения станет *формула Сохоцкого*:

$$\text{v. p.} \int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0}\, dx = \pm i\pi f(x_0) + \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0 \pm i\varepsilon}\, dx.$$

Сами уравнения могут появляться из соотношений Крамерса-Кронига

$$j(t) = \int_{-\infty}^t \sigma(t - t')E(t')\, dt'.$$

Получается уравнения типа свёртки.