

# ЗАМЕТКИ ПО КУРСУ «КВАНТОВАЯ ОПТИКА»

---

Автор заметок: Хоружий Кирилл

От: 24 февраля 2022 г.

## Содержание

Лекция №2. Вторичное квантование	2
Лекция №3. Когерентные состояния	2

## Лекция №2. Вторичное квантование

Для одиночного фотона можно построить волновые функции<sup>1</sup>, – это ЭМ поле, что является явным проявлением родства уравнения Шрёдингера и волнового уравнения оптики.

Вторичное квантование (П. Дирак, 1927) – введение нового объекта описания: осциллятора ЭМ поля или совокупность одинаковых фотонов в объеме когерентности. Ключевыми становятся числа заполнения.

**Осциллятор.** Пришли к новым операторам

$$\hat{a} = \frac{\omega \hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{i\hbar\omega}}, \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\omega \hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar\omega}}.$$

Оператор поля:

$$\hat{E} = \sqrt{\frac{8\pi\hbar\omega}{V}} \frac{1}{2} (\hat{a}e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}),$$

числа фотонов и Гамильтониан:

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad \hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right),$$

где  $V$  – объем когерентности и всё также верно, что  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ .

Добавка  $\frac{1}{2}$  – непередаваемая часть гамильтониана, так что  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  более чем логично.

Как обычно живём в базисе  $\hat{H}$ :  $|n\rangle$ , которые допускают интерпретацию в виде  $n$ -фотонных состояниях ЭМ поля, Фоковских состояний.

Свободная эволюция ЭМ поля:

$$i\hbar\partial_t |n\rangle = \hat{H} |n\rangle, \quad \Rightarrow \quad |n(t)\rangle = \exp\left(-\frac{it}{\hbar}\hat{H}\right) |n(0)\rangle = e^{-in\omega t} \left( e^{-i\omega t/2} |n(0)\rangle \right).$$

**Лестничные операторы.** Как и с осциллятором, приходим

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle,$$

то есть имеем оператор рождения и уничтожения фотона.

**Наблюдаемые.** Дисперсия  $\hat{n}$  в  $|n\rangle$  нулевая. Для поля

$$\langle E \rangle = 0, \quad \langle \Delta E^2 \rangle = \langle n | \left( \frac{\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}}{2} \right)^2 | n \rangle - \langle E \rangle^2 = \frac{1}{4} \langle n | \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} | n \rangle = \frac{n}{2} + \frac{1}{4},$$

где для простоты опустили множитель  $\varpi = \sqrt{\frac{8\pi\hbar\omega}{V}}$ .

Плотности вероятности данных о поле может быть записано в виде

$$\chi(u) = \langle n | e^{iu\hat{E}} | n \rangle = \dots = e^{-u^2/8} L_n \left( \frac{u^2}{4} \right),$$

$$p(E) = \frac{1}{2\pi} \int \chi(u) e^{-iuE} du = \dots = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-2E^2}}{2^n n!} \left( H_n(\sqrt{2}E) \right)^2,$$

где  $L$  – полиномы Лагерра,  $H_n$  – полиномы Эрмита.

Получается, что нужны новые композиции  $n$ -фотонных состояний. Ими оказались когерентные состояния.

## Лекция №3. Когерентные состояния

Нужны новые квантовые состояния. Можно задать  $|x\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$ , собственное состояние оператора  $\hat{A} |x\rangle = \alpha |x\rangle$ , с помощью оператора сдвига  $|x\rangle = \hat{S} |0\rangle$ .

Когерентные состояния осциллятора ЭМ поля – собственные состояния полевого оператора  $\hat{a}$ :

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle.$$

Также как и с осциллятором

$$\hat{a} \sum_n c_n |n\rangle = \sum_n c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \alpha \sum_{n'} c_{n'} |n'\rangle,$$

так получаем рекуррентное соотношение:

$$c_{n+1} \sqrt{n+1} = \alpha c_n, \quad \Rightarrow \quad c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0, \quad \Rightarrow \quad |\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle,$$

где  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

<sup>1</sup> А.И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, «Квантовая электродинамика» – обязательно прочитать (§1, §2)!

**Свойства когерентных состояний.** Для начала заметим, что

$$|n\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha|^2.$$

Можем также посчитать дисперсию

$$\langle\Delta n^2\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle - \langle n\rangle^2 = |\alpha|^2.$$

Найдём распределение по  $n$ -фотонным состояниям:

$$p_n = |c_n|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!},$$

что соответствует пуассоновскому распределению.

**Поле.** Для поля  $\hat{E}$  (в единицах численного размерного коэффициента):

$$\langle E\rangle = \langle\alpha|\frac{1}{2}(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t})|\alpha\rangle = \frac{1}{2}(\alpha e^{-i\omega t} + \bar{\alpha} e^{i\omega t}).$$

Также флуктуации поля

$$\langle\Delta E^2\rangle = \frac{1}{4} = \text{const.}$$

Также квантовая характеристическая функция  $\chi(u)$ :

$$\chi(u) = \langle e^{iu\hat{E}}\rangle = e^{-u^2/8} \langle\alpha|\exp\left(\frac{iu}{2}\hat{a}^\dagger e^{i\omega t}\right) \times \exp\left(\frac{iu}{2}\hat{a} e^{-i\omega t}\right)|\alpha\rangle = e^{-u^2/8} \exp\left(\frac{iu}{2}(\alpha e^{-i\omega t} + \bar{\alpha} e^{i\omega t})\right),$$

где мы воспользовались соотношением Бейкера-Хаусдорфа. Так находим

$$p(E) = \frac{1}{2\pi} \int \xi(u) e^{-iuE} du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-2\left(E - \frac{1}{2}(\alpha e^{-i\omega t} + \bar{\alpha} e^{i\omega t})\right)\right).$$

**Оператор сдвига.** Составим оператор сдвига по  $n$ -фотонным состояниям:

$$|n\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n}} |n-1\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n}} \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n-1}} = \dots = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad \Rightarrow \quad \hat{S}_n = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}.$$

На данный момент нет источников  $n$ -фотонных состояний. Таким образом находим

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} |0\rangle,$$

но нюанс в том что когерентные состояния не ортогональны

$$|\langle\alpha_2|\alpha_1\rangle|^2 = \exp(-|\alpha_2 - \alpha_1|^2).$$

Можем сделать замену, точнее ввести<sup>2</sup>

$$\hat{S}_c = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \bar{\alpha}\hat{a}},$$

который действует на  $|0\rangle$  точно также.

<sup>2</sup>При взаимодействии с возмущенным атомным диполем возникает очень похожий эволюционный оператор.