

ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ «УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

Автор: Хоружий Кирилл

От: 12 февраля 2022 г.

Содержание

ТеорМин №1	2
1 Неделя I	2

ТеорМин №1

Излучение. Волновое уравнение с источником:

$$(\partial_t^2 - c^2 \nabla^2) u = \chi, \quad (1)$$

с законом дисперсии $\varpi = cq$.

Функция Грина оператора $\partial_t^2 - c^2 \nabla^2$:

$$G(t, r) = \frac{\theta(t)}{4\pi cr} \delta(r - ct),$$

а значит выражение для поля:

$$u(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi c^2} \int \frac{d^3 r_1}{R} \chi(t - R/c, \mathbf{r}_1), \quad (2)$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$.

Уравнение диффузии. Уравнение диффузии:

$$(\partial_t - \nabla^2) u = 0, \quad (3)$$

решение которого может быть найдено в виде:

$$u(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dy_1 \dots dy_d}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t}\right) u_0(\mathbf{y}). \quad (4)$$

Асимптотики могут быть найдены в виде

$$u(t, \mathbf{x}) \approx \frac{A}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{4t}\right), \quad A = \int_{\mathbb{R}^d} dy_1 \dots dy_d u_0(\mathbf{y}). \quad (5)$$

При $A = 0$ асимптотика будет соответствовать

$$u(t, \mathbf{x}) \approx \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{x}}{(4\pi t)^{d/2+1}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{4t}\right), \quad \bar{B} = 2\pi \int_{\mathbb{R}^d} dy_1 \dots dy_d \mathbf{y} u_0(\mathbf{y}), \quad (6)$$

где асимптотики имеют место при $t \gg l^2$, l – масштаб на котором локализовано поле.

1 Неделя I

№ 4.1.6

Найдё решение волнового уравнения (1) для точечного гармонического источника

$$\chi = \cos(\omega t) \delta(\mathbf{r}).$$

Подставляя ξ в (2), находим

$$u(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi c^2} \int \frac{d^3 r_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \cos(\omega t - \omega |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c) \delta(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)}{r}.$$

№ 4.1.7

Найдём значение функции Грина при $r = 0$ для оператора $\partial_t^2 + \nabla^4$. Для начала перейдём к Фурье образу

$$\tilde{G}(t, \mathbf{q}) = \int d^3 \mathbf{x} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} G(t, \mathbf{x}), \quad \Rightarrow \quad (\partial_t^2 + q^4) \tilde{G} = \delta(t).$$

Решение этого уравнение известно¹:

$$\tilde{G}(t) = \theta(t) \frac{1}{q^2} \sin(q^2 t).$$

Осталось найти

$$G(t, 0) = \theta(t) \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{\sin(q^2 t)}{q^2} = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \sin(q^2 t) = \frac{1}{8\sqrt{2}\pi^{5/2}} \cdot \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}}.$$

№ 4.2.2

Найдём решение одномерного диффузионного уравнения для

$$(\partial_t - \partial_x^2) u = 0, \quad u_0(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right).$$

¹Конспект, (1.11).

Точное решение. Воспользуемся (4), тогда

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t} - \frac{y^2}{2l^2}\right) dy.$$

Выделяя полный квадрат, находим, что

$$\frac{(x-y)^2}{4t} + \frac{y^2}{2l^2} = \left(\sqrt{\frac{1}{2l^2} + \frac{1}{4t}}y - \frac{x}{4t\sqrt{\frac{1}{2l^2} + \frac{1}{4t}}}\right)^2 + \frac{x^2}{2l^2 + 4t},$$

а значит

$$u(t, x) = \frac{l}{\sqrt{l^2 + 2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2 + 4t}\right).$$

Асимптотика. Так как функция u_0 симметрична, то через (5) находим

$$A = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx = l\sqrt{2\pi}, \quad \Rightarrow \quad u(t, x) \approx \frac{l}{\sqrt{2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right),$$

что является асимптотикой точного решения при $t \gg l^2$.

№ 4.2.3

Найдём асимптотическое поведение решение одномерного диффузного уравнения (3) для различных начальных условий.

1. Рассмотрим

$$u_0(x) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right).$$

В силу нечетности функции, через (6), находим

$$B = 2\pi \int_{\mathbb{R}} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right) dx = -4\pi l^2 \partial_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2/2l^2} dx = -4\pi l^2 \sqrt{2\pi} l \partial_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = l^3 (2\pi)^{3/2},$$

а значит искомая асимптотика

$$u(t, x) \approx \left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^3 \frac{x e^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}.$$

2. Рассмотрим

$$u_0(x) = \exp\left(-\frac{|x|}{l}\right).$$

В силу четности функции, через (5), находим

$$A = 2 \int_0^{\infty} e^{-x/l} dx = 2l.$$

Тогда искомая асимптотика

$$u(t, x) \approx \frac{l}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{t}}.$$

3. Рассмотрим

$$u_0(x) = x \exp\left(-\frac{|x|}{l}\right).$$

В силу нечетности функции, через (6), находим

$$B = 4\pi \int_0^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{|x|}{l}\right) dx = 4\pi l^2 \partial_{\alpha}^2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha x/l} dx = 2\pi l^2 \partial_{\alpha}^2 \left(\frac{l}{\alpha}\right) = 8\pi l^3,$$

а значит

$$u(t, x) \approx \frac{l^3}{\sqrt{\pi}} \frac{x e^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}.$$

4. Рассмотрим

$$u_0(x) = \frac{1}{x^2 + l^2}.$$

В силу четности функции, через (5), находим

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + l^2} dx = 2\pi i \frac{1}{2il} = \frac{\pi}{l},$$

тогда искомая асимптотика

$$u(t, x) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2l} \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{t}}.$$

5. Рассмотрим

$$u_0(x) = \frac{x}{(x^2 + l^2)^2}.$$

В силу четности функции, через (6), находим

$$B = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{(x^2 + l^2)^2} dx = 4\pi i \lim_{x \rightarrow il} \left(\frac{x^2}{(x + il)^2} \right)' = \frac{\pi^2}{l}.$$

Тогда искомая асимптотика

$$u(t, x) = \frac{\sqrt{\pi}}{8l} \frac{x e^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}.$$