Заметки по курсу «Магнитооптика»

Лектор: Владимир Игоревич Белотелов

Стенография: Хоружий Кирилл

От: *24 февраля 2022 г.*

Содержание

Лекция №2

Классическая электродинамика. Знаем, что
$$m\dot{\boldsymbol{v}} = e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}], \qquad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t},$$
тогда в нулевом приближении
$$H = 0, \qquad m\omega\boldsymbol{v}_0 = e\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{p} = e\boldsymbol{r}, \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon_{(0)} = 1 - 4\pi\frac{Ne^2}{m\omega^2}.$$
Стоит уточнить, что под $\boldsymbol{H}$ понимается постоянное внешнее магнитное поле, а $\boldsymbol{E}$ – поле волны.

В первом приближении
$$m\boldsymbol{v}_1 = \frac{e}{c}\left[\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{H}\right], \qquad \Rightarrow \qquad m\boldsymbol{v}_1 = \frac{e^2}{c}\frac{1}{m\omega}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right].$$
Интегрруя, находим
$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{-e^2 i}{cm^2\omega^3}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right], \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{p}_1 = -\frac{Ne^3 i}{m^2 c\omega^3}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right].$$
Собирая всё вместе, находим
$$\boldsymbol{D} = \left(1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}\right)\boldsymbol{E} - \frac{4\pi N e^3 i}{m2c\omega^3}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\right].$$

Таким образом пришли к тензору на $\hat{\varepsilon}$:
$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{(0)} & ig_z & -ig_y \\ -ig_z & \varepsilon_0 & ig_x \\ ig_y & -ig_x & \omega_{(0)} \end{pmatrix},$$
иначе можем записать в виде
$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^{(0)}\delta_{ij} - i\epsilon_{ijk}g_k,$$
где $\boldsymbol{g}$ – вектор гирации:
$$\boldsymbol{g} = f\boldsymbol{H}, \qquad f = \frac{4\pi N e^3}{m^2 c\omega^3},$$
где f указан для свободного электрона. В изотропном магнитном материале $\boldsymbol{M} = \chi\boldsymbol{H}$. В общем виде $\boldsymbol{g} = \hat{f}\boldsymbol{M}$:
$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} - i\epsilon_{ijk}f_{kl}M_l.$$

Дисперсия. Вообще есть дисперсия, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\omega)$, работает причинность, есть некоторый нелокальный отклик, а тогда $\varepsilon = \varepsilon(\omega, \boldsymbol{k})$.

Можем разложить
$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \underbrace{\chi_{ijk}^{(2)}E_k}_{\text{Поккельс}} + \underbrace{\chi_{ijkl}^{(3)}E_kE_l}_{\text{Керр}} + \underbrace{\chi_{ijk}^{(2m)}B_k}_{\text{Фарадей}} + \underbrace{\chi_{ijkl}^{(3m)}B_kB_l}_{\text{Каттон-Мутон}} + \ldots$$

Эффект Фарадея. Записываем уравнения Максвелла. Получаем уравнение[1]
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \frac{\omega}{c}\operatorname{rot}\bar{B}, \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} - \Delta E = \frac{\omega^2}{c}\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E}.$$
Переходя к плоским монохроматическим волнам вида $e^{-i\omega t + i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}$, находим
$$n^2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}) = \hat{\varepsilon}\boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{c}{\omega}\boldsymbol{k},$$
которое ещё называют *уравнением Френеля.*

Упростим себе жизнь $\boldsymbol{k}\parallel\boldsymbol{M}\parallel Oz$:
$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{pmatrix}, \qquad \hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & -ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Так приходим к уравнениям
$$\begin{aligned} n^2E_x &= \varepsilon_0E_x + igE_y, \\ n^2E_y &= \varepsilon_0E_y - igE_x, \\ n^2E_z &= \varepsilon_0E_z + n^2E_z. \end{aligned}$$

[1] Напомним, что $\mu \approx 1$, а значит $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}$.

Приравнивая определитель к нулю, находим

$$\begin{Vmatrix} n^2-\varepsilon_0 & -ig \\ ig & n^2-\varepsilon_0 \end{Vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \quad (n^2-\varepsilon_0)^2 - g^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad n^2 = \varepsilon_0 \pm g.$$

Так приходим к показателю преломления

$$n_\pm = \pm\sqrt{\varepsilon_0 \pm g}.$$

Подставляя n, находим волну

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \\ 0 \end{pmatrix} E_0 \exp\left(-i\omega t + ik_0 z\sqrt{\varepsilon_0 + g} z\right).$$

то есть мы получили круговую поляризацию, с разной фазовой скоротью для правой и левой поляризации.

Угол Фарадея можем найти, рассмотрев плоскую поляризацию, как сумму двух круговых:

$$\boldsymbol{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos(k_0\Delta n z) \\ \sin(k_0 \Delta n z) \end{pmatrix} e^{-i\omega t + ik_0 n_0 z}, \qquad \Delta n = \frac{n_+ - n_-}{2}, \quad n_0 = \frac{n_+ + n_-}{2}.$$

Обычно $\varepsilon_0 \gg g$, а значит

$$\Delta n = \frac{g}{2\sqrt{\varepsilon_0}}, \quad \Rightarrow \quad \theta = k_0 \Delta n z = \frac{k_0 g}{2n_0} z.$$

- Эффект Каттона-Мутона. Вывести квадратичную поправку к $\hat{\varepsilon}$: $v = v_0 + v_1 + v_2$. Дедлайн – неделя.

Лекция №3

Из уравнений Максвелла можем получть волновое уравнение, перейти к монохроматическим волнам, получить уравнение Гельмгольца, рассмотреть плоские волны, а дальше потребуем наличия нетривиального решения:

$$\boldsymbol{k} \cdot [\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}] - \frac{\omega^2}{c^2}\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E} = 0, \quad \Rightarrow \quad \det\left(k_i k_j + \ldots\right) = 0,$$

таким образом приходим к двулучепреломлению.

Тут полезно ввести *оптическую индикатрису*:

$$\hat{\varepsilon} = \operatorname{diag} \varepsilon_x,\, \varepsilon_y,\, \varepsilon_z, \qquad \frac{x^2}{\varepsilon_x} + \frac{y^2}{\varepsilon_y} + \frac{z^2}{\varepsilon_z} = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Ещё удобнее ввести $\hat{B} = \hat{\varepsilon}^{-1}$, который называют тензором диэлектричекой непроницаемости.

Если падает волна с $\boldsymbol{k}_i$, то строя поскость $\perp \boldsymbol{k}_i$ переходим к эллепсоиду вращения.