

# СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ К ПИСЬМЕННОМУ ЭКЗАМЕНУ «УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

---

Автор заметок: Хоружий Кирилл

От: 31 мая 2022 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>СТАТИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯ</b>	<b>2</b>
	Задача Штурма-Лиувилля . . . . .	2
	Метод Фурье в задаче Штурма-Лиувилля . . . . .	3
	Уравнения Пуассона и Лапласа . . . . .	4
	Двумерные гармонические функции . . . . .	4
<b>3</b>	<b>СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ</b>	<b>4</b>
	$\Gamma, \psi, B$ -функции . . . . .	4
	Функция Эйри . . . . .	5
	Функции Бесселя . . . . .	6
	Ортогональные полиномы . . . . .	6
<b>4</b>	<b>ДИНАМИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯ</b>	<b>7</b>
	Волновое уравнение . . . . .	7
	Уравнение Гельмгольца . . . . .	8
	Уравнение теплопроводности . . . . .	8
<b>5</b>	<b>ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ</b>	<b>8</b>
	Линейные интегральные уравнения . . . . .	9
	Нелинейные интегральные уравнения . . . . .	10
	Сингулярные интегральные уравнения . . . . .	11
<b>6</b>	<b>ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРУПП</b>	<b>12</b>
	Теория групп . . . . .	12
	Теория представлений . . . . .	12
	Таблицы неприводимых представлений . . . . .	13
<b>7</b>	<b>ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ</b>	<b>13</b>
	Автомодельные решения . . . . .	13
	Метод Боголюбова-Крылова . . . . .	13
	Уравнения Хопфа и Бюргерса . . . . .	14
<b>8</b>	<b>СПРАВОЧНИК</b>	<b>14</b>
	Вычеты . . . . .	14
	Интегралы . . . . .	15
	Преобразование Фурье . . . . .	15
	Преобразование Лапласа . . . . .	15
	Преобразование Меллина . . . . .	15

# 1 ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

**Функция Грина.** Для уравнений вида  $\hat{L}x = \varphi$ , бывает удобно найти  $G$ , как решение уравнения  $\hat{L}G = \delta$ :

$$\hat{L}x(t) = \varphi(t), \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s)\varphi(s)ds, \quad \hat{L}G = \delta(t), \quad (1.1)$$

если  $\hat{L}$  – линейный оператор. И, если хочется добавить начальные условия, то для  $\hat{L}$  второго порядка будет

$$x(t) = \dot{x}(0)G(t) + x(0)\dot{G}(t) + \int_0^t G(t-s)\varphi(s)ds.$$

Для уравнений первого порядка  $\hat{L} = \partial_t + \gamma$ :

$$\hat{L} = \partial_t + \gamma, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \theta(t) \exp(-\gamma t). \quad (1.2)$$

Для осциллятора  $\hat{L} = \partial_t^2 + \omega^2$ , тогда

$$\hat{L} = \partial_t^2 + \omega^2, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \theta(t) \frac{\sin(\omega t)}{\omega}. \quad (1.3)$$

В общем случае подстановка причинной функции Грина  $G(t) = \theta(t)g(t)$  для  $\hat{L}: L(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$  приводит к условиям

$$\partial_t^{n-1}g(0) = 1, \quad \partial_t^m g(0) = 0, \quad m = 0, \dots, n-2,$$

который позволяют методом неопределённых коэффициентов найти  $G$  из уравнения  $\hat{L}G(t) = \delta(t)$ . **Проявляем аккуратность при наличии кратных корней у  $L(z) = 0$ , когда возникают секулярные члены. Нужен пример.**

**Матричное уравнение.** Решение линейного уравнения для векторной величины  $\mathbf{y}$

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} + \hat{\Gamma}\mathbf{y} = \chi,$$

может быть найдено, через функцию Грина, вида

$$\hat{G}(t) = \theta(t) \exp(-\hat{\Gamma}t), \quad \mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^t \hat{G}(t-s)\chi(s)ds. \quad (1.4)$$

Удобно  $\hat{\Gamma}$  привести к ЖНФ, а потом вспомнить, что матричная экспонента от жордановой клетки  $\hat{J}$  имеет вид

$$\exp(-\hat{J}t) = e^{-\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Функция Грина через преобразование Лапласа.** Преобразование Лапласа функции  $\Phi(t)$  определяется:

$$\tilde{\Phi}(p) = \int_0^\infty \exp(-pt)\Phi(t)dt, \quad \Phi(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt)\tilde{\Phi}(p),$$

где далее  $c$  выбираем правее всех особенностей для причинности.

Решение уравнения  $L(\partial_t)G(t) = \delta(t)$  может быть найдено, как

$$G(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt)\tilde{G}(p), \quad \tilde{G}(p) = \frac{1}{L(p)}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \sum_i \text{res}_i \frac{\exp(pt)}{L(p)}, \quad (1.5)$$

где суммирование идёт по полюсам  $1/L(p)$ .

*Кстати.* Бывает удобно сделать функции маленькими

$$\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \tilde{f}(p)e^{pt} \frac{dp}{2\pi i} = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \frac{\tilde{f}(p)}{p^n} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}.$$

## 2 СТАТИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯ

### Задача Штурма-Лиувилля

**Постановка задачи.** Задача Штурма-Лиувилля:

$$\hat{L} = \partial_x^2 + Q(x)\partial_x + U(x), \quad \hat{L}f(x) = \varphi(x), \quad \begin{cases} \alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = 0 \\ \alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где<sup>1</sup>  $|\alpha_1| + |\beta_1| \neq 0$  и  $|\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0$ .

<sup>1</sup>Часто можно встретить нулевые граничные условия:  $f(a) = f(b) = 0$ .

**Граничные условия.** С учетом того, что функция Грина  $G$  наследует граничные условия:

$$\alpha_1 G(a, y) + \beta_1 G'_x(a, y) = 0,$$

$$\alpha_2 G(b, y) + \beta_2 G'_x(b, y) = 0.$$

Запишем уравнение на  $G(x, y)$ :

$$\hat{L}G(x, y) = \delta(x - y).$$

Решение этого уравнения можем найти решая две системы на  $u(x)$  при  $x < y$  и  $v(x)$  при  $x > y$ :

$$\begin{cases} \hat{L}u(x) = 0 \\ \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{L}v = 0 \\ \alpha_2 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0 \end{cases}$$

Теперь можем выписать ответ

$$G(x, y) = \frac{1}{W(y)} \begin{cases} v(y)u(x), & x < y, \\ v(x)u(y), & x > y, \end{cases} \quad W[u, v](y) = v'(y)u(y) - v(y)u'(y). \quad (2.2)$$

Который существует и единственен для  $W \neq 0$ . Для  $W = \text{const}$   $G(x, y) = G(y, x)$ , а значит  $\hat{L}^{-1}$  – симметричный самосопряженный оператор, и у  $\hat{L}$  есть ОНБ из собственных функций.

*Кстати.* Бывает удобно найти  $W(x)$ , записав формулу Лиувилля-Остроградского

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} = W(x_0) \exp \left( - \int_{x_0}^x Q(z) dz \right).$$

**Def 2.1.** *Специальной ФСП* называется решение уравнения  $\hat{L}u = 0$  и  $\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0$ , и аналогичного уравнения по  $v(x)$  с граничным условием в  $b$ , если  $W[u, v] \neq 0$ , то есть  $u$  и  $v$  линейно независимы.

## МЕТОД ФУРЬЕ В ЗАДАЧЕ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Допустим мы в  $\mathcal{H}$ , соответственно есть  $\langle x|y \rangle$ . Рассмотрим некоторый достаточно хороший самосопряженный компактный оператор  $\hat{L}$ , у которого есть ОНБ из собственных функций:  $\hat{L}e_n = \lambda_n e_n$ .

**Thr 2.2** (thг Гильберта-Шмидта). Если  $\hat{L}$  – компактный<sup>2</sup> ССО, то у  $A$  есть ОНБ из собственных функций.

Вернемся к оператору Штурма-Лиувилля, который живет в  $\mathcal{H} = L_2[a, b]$ :

$$\hat{L} = A(x)\partial_x^2 + B(x)\partial_x + C(x), \quad \langle f|g \rangle = \int_a^b f \bar{g} dx.$$

Для задачи Штурма-Лиувилля  $\hat{L}$  симметричен, при  $B(x) = A'(x)$ .

Тогда можем найти функцию Грина, как решение уравнения  $\hat{L}G(x, y) = \delta(x - y)$

$$G(x, y) = \sum_n g_n(y) e_n(x), \quad \delta(x - y) = \sum_n \delta_n(y) e_n(x).$$

Находим коэффициенты Фурье:

$$\delta_n(y) = \frac{\bar{e}_n(y)}{\langle e_n | e_n \rangle}, \quad \Rightarrow \quad g_n(y) = \frac{1}{\lambda_n} \frac{\bar{e}_n(y)}{\langle e_n | e_n \rangle}. \quad (2.3)$$

Проблема возникает при  $\lambda_n = 0$ .

Наличие у оператора собственного числа  $\lambda_n = 0$  называется *нулевой модой*. Рассмотрим оператор:

$$\hat{L} = \partial_x^2,$$

для которого  $e_n(x) = e^{inx}$ , где  $\langle e_n | e_n \rangle = 2\pi$ , где  $e_0 = 1$  и  $\lambda_0 = 0$ . Пусть тогда

$$\delta(x) = \sum \frac{\bar{e}_n(0) e_n(x)}{\langle e_n | e_n \rangle} = \sum \frac{e^{inx}}{2\pi}, \quad G(x) = \sum g_n e_n(x).$$

но для  $\hat{L}G = \delta(x)$  оказывается нет решений (справа  $e_0$  есть, а слева нет).

В общем, проблема уйдёт, если рассмотрим уравнение, вида

$$\hat{L}G(x) = \delta(x) - e_0(x) = \delta(x) - \frac{1}{2\pi},$$

то есть справа единичный оператор только на образе  $\text{Im } \hat{L}$ . Если в источнике есть нулевая мода, то уравнение не имеет решений.

<sup>2</sup> $\mathcal{D}(A)$  – компакт в гильбертовом пространстве.

## УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА И ЛАПЛАСА

Научимся решать *уравнение Пуассона*  $\nabla^2 f = \varphi$ , которое при  $\varphi = 0$  переходит в *уравнение Лапласа*  $\nabla^2 f = 0$ . Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа называют *гармоническими*, которые существуют только на некоторой ограниченной области. Иногда бывает проще решать *уравнение Дебая*  $(\nabla^2 - \kappa^2)f = \varphi$ .

**Функция Грина.** Решение как обычно можем искать в виде

$$f(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}') d^3 r'.$$

В зависимости от размерности пространства  $n$ , функция Грина  $G_n$  будет равна

$$G_2(r) = \frac{\ln r}{2\pi}, \quad G_3(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi r}, \quad G_{n>2}(x) = \frac{1}{S_{n-1}} \frac{1}{r^{n-2}}, \quad (2.4)$$

где  $S_{n-1} = 2\pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2})$  – площадь  $n-1$  мерной единичной сферы.

*Кстати.* Для уравнения Дебая в  $\mathbb{R}^3$  функция Грина с  $\hat{L} = \nabla^2 - \kappa^2$  будет равна

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{e^{-\kappa r}}{4\pi r}.$$

Для сферически симметричного потенциала  $\varphi(\mathbf{r}) \equiv \varphi(r)$ , решение уравнения Пуассона упростится до

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \int_0^r \varphi(\rho) \rho^2 d\rho + \int_r^\infty \varphi(\rho) \rho d\rho.$$

(проверить)

## ДВУМЕРНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Отдельно рассмотрим случай  $n = 2$ . Часто задача формулируется в виде *задачи Дирихле*:

$$\nabla^2 f = 0, \quad f|_{\partial D} = f_0(\mathbf{r}),$$

то есть функция задана на границе некоторой области. Будем искать решение в виде

$$f(z) = u(z) + iv(z), \quad \nabla^2 u = \nabla^2 v = 0.$$

Если знаем комплексную функцию  $f(z)$  такую, что  $\operatorname{Re} f|_{\partial D} = f_0$ , тогда  $\operatorname{Re} f(z)$  решает задачу Дирихле. Далее конформным преобразованием переводим любую область  $D$  в круг/полуплоскость, где задача Дирихле решается, а дальше отображаем назад.

Рассмотрим полуплоскость  $D = \{(x, y) \mid y > 0\}$ , с заданным значением  $f(x, 0) = f_0(x)$ . Тогда решением будет

$$f(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{\pi} \frac{y}{(x - \xi)^2 + y^2} f_0(\xi). \quad (2.5)$$

Для круга радиуса  $R$  с заданным граничным условием, вида  $f(R \cos t, R \sin t) = f_0(t)$  решением будет

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t - \varphi) + r^2} f_0(t). \quad (2.6)$$

## 3 СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

### $\Gamma, \psi, B$ -функции

**Гамма-функция.** Найдем некоторые интересные свойства:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt \stackrel{t \rightarrow \tau x}{=} x^{z+1} \int_0^\infty \tau^z e^{-\tau x} d\tau, \quad \frac{1}{x^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \tau^{z-1} e^{-\tau x} d\tau.$$

Существует аналитическое продолжение:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{1 - e^{2\pi i z}} \int_C t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Видим, что у  $\Gamma(z)$  есть особенности  $z \in \mathbb{Z}$ , где  $z \in \mathbb{N}$  – УОТ, и  $z \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$  – ПП:

$$\operatorname{res}_{-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad (3.1)$$

Могут пригодиться следующие выражения для  $\Gamma$ -функции:

$$\Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}} \Gamma(2z), \quad \Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

А также *формула Стирлинга*, которую нетрудно получить методом перевода:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{z \ln t - t} dt \approx e^{z \ln z - z} \sqrt{2\pi z} = \sqrt{2\pi z} \left(\frac{z}{e}\right)^z. \quad (3.2)$$

**Дигамма-функция.** По определению дигамма-функция  $\psi(z)$ :

$$\psi(z) \stackrel{\text{def}}{=} (\ln \Gamma(z))' = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Заметим, что  $\psi(1) = -\gamma$ , где  $\gamma \approx 0.58$  – постоянная Эйлера-Маскерони. Найдём

$$\psi(z+1) = (\ln z + \ln \Gamma(z))' = \frac{1}{z} + \psi(z), \quad \Rightarrow \quad \psi(N+1) = \frac{1}{N} + \psi(N) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + \psi(1).$$

Также бывает полезно

$$\psi(x+N+1) = \frac{1}{x+N} + \psi(x+N) = \frac{1}{x+N} + \dots + \frac{1}{x+1} + \psi(x+1).$$

Вспомним, что  $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$ . Тогда

$$\psi(-z) - \psi(z) = \pi \operatorname{ctg} \pi z.$$

Асимптотика для  $\psi(z \rightarrow \infty)$ :

$$\psi(z \rightarrow \infty) = (\ln \Gamma(z))' = \ln z + \frac{1}{2z} + o(1) = \ln z + o(1).$$

**Бета-функция.** Рассмотрим  $B$ -функцию:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt, \quad \operatorname{Re} \alpha, \beta > 0, \quad B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

которую бывает удобно доставать в интегралах.

## Функция Эйри

**Метод Лапласа.** Рассмотрим дифференциальное уравнение, вида

$$(a_n z + b_n) f^{(n)} + \dots + (a_1 z + b_1) f^{(1)} + (a_0 z + b_0) f^{(0)} = 0, \quad f(z) = \int_C \tilde{f}(p) e^{pz} dp,$$

где  $f(p) e^{pz} \big|_{\partial C}^{\forall z} = 0$ . Тогда введём полиномы  $A(p)$  и  $B(p)$  такие, что

$$-\partial_p [A(p) f(p)] + B(p) f(p) = 0, \quad A(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0, \quad B(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0.$$

Решая, находим образ Лапласа

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{A(p)} \exp \left( \int_{p_0}^p \frac{B(t)}{A(t)} dt \right).$$

**Метод перевала.** Действительный метод перевала:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{f(x)} g(x) dx = g(x_0) e^{f(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}}.$$

Для стационарной фазы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{if(x)} g(x) dx = g(x_0) e^{if(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}} e^{\pm i\pi/4},$$

где  $\pm$  согласован с  $\operatorname{sign} f''$ . Для комплексного метода перевала

$$I = \int_C e^{f(z)} g(z) dz = g(z_0) e^{f(z_0)} e^{i\varphi} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''|}}, \quad \varphi = \frac{1}{2} (\pm\pi - \arg f''(z_0)).$$

**Функция Эйри.** Решаем уравнение, вида

$$\partial_x^2 f - x f = 0, \quad \Rightarrow \quad f(x) = \int_C e^{xt-t^3/3} dt.$$

Так приходим к

$$\operatorname{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{xt-t^3/3} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(xu + u^3/3) du.$$

Запишем асимптотики на бесконечности:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ai}(z) &\approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{z^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right), & z \rightarrow +\infty \\ \operatorname{Ai}(z) &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(-z)^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), & z \rightarrow -\infty.\end{aligned}$$

В качестве второго решения выбирается

$$\operatorname{Bi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[ e^{xu-u^3/3} + \sin(xu + u^3/3) \right] du,$$

с асимптотиками, вида

$$\begin{aligned}\operatorname{Bi}(z) &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{z^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right), & z \rightarrow +\infty \\ \operatorname{Bi}(z) &\approx \frac{1}{\pi} \frac{1}{(-z)^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), & z \rightarrow -\infty.\end{aligned}$$

## ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Уравнение Бесселя:

$$\partial_z^2 J_m + \frac{1}{z} J_m + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) J_m = 0,$$

где  $J_m(0) \in \mathbb{R}$ . Знаем, что

$$e^{iz \sin \varphi} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} J_m(z) e^{im\varphi}, \Rightarrow J_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{iz \sin \varphi} e^{-im\varphi} d\varphi, \Leftrightarrow J_m(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \varphi - m\varphi) d\varphi.$$

Умеем дифференцировать:

$$\frac{dJ_m}{dz} = \frac{J_{m-1}(z)}{2} - \frac{J_{m+1}(z)}{2}, \quad \frac{m}{z} J_m(z) = \frac{1}{2} (J_{m+1}(z) + J_{m-1}(z)), \quad \frac{d}{dz} (z^m J_m(z)) = J_{m-1}(z) z^m. \quad (3.3)$$

Откуда сразу находим

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{J_n(x)}{x^n} \right) = -\frac{J_{n+1}(x)}{x^n}, \quad J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z). \quad (3.4)$$

Умеем раскладывать в ряд и уходить на бесконечность:

$$J_m(z) = \frac{z^m}{2^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{4^k k! (m+k)!}, \quad J_m(z \rightarrow \infty) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

соответственно с нулями в  $\frac{\pi}{2} + \pi m$ .

Преобразование Фурье от функции:

$$F[J_m(z)](k) = \int_{-\infty}^{+\infty} J_m(z) e^{-ikz} dz = \frac{(-1)^m e^{im\varphi_0} + e^{-im\varphi_0}}{\sqrt{1-k^2}}, \quad \varphi_0 = \arcsin k.$$

В частности

$$F[J_0](k) = \frac{2}{\sqrt{1-k^2}} \theta(1-k^2), \quad F[J_1](k) = \frac{2ik}{\sqrt{1-k^2}} \theta(1-k^2).$$

Преобразование Лапласа:

$$\Lambda[J_m](p) = \int_0^\infty e^{-pz} J_m(z) dz = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}(p+\sqrt{p^2+1})^m}.$$

Например,

$$\int_0^\infty \frac{J_n(z)}{z^n} dz = \frac{1}{(2n-1)!!}.$$

Помним, что  $J_m(0) = \delta_{m,0}$ .

## ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

**Полиномы Лежандра.** Дифференциальное уравнение  $(a, b = -1, 1)$ :

$$\sigma(x) = 1 - x^2, \quad \tau(x) = -2x = \sigma', \quad \rho = 1, \quad (1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0.$$

Формула Родрига:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \partial_x^n (1 - x^2)^n, \quad \alpha_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}, \quad a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.$$

Нормировка:

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

Рекуррентное соотношение:

$$A_n = \frac{\|p_n + 1\|^2}{\langle p_{n+1} | x p_n \rangle} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{n+1}, \quad B_n = 0, \quad C_n = -\frac{n}{n+1},$$

подставляя, приходим к

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n + nP_{n-1}(x) = 0.$$

Производящая функция:

$$\psi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 2zx + 1}}.$$

Умеем дифференцировать

$$(x^2 - 1) \frac{dP_n}{dx} = n(xP_n(x) - P_{n-1}(x)).$$

**Полиномы Эрмита.** Живут на  $(-\infty, +\infty)$ , дифференциальное уравнение

$$\sigma = 1, \quad \tau = -2x, \quad \rho(x) = e^{-x^2}, \quad H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0, \quad (e^{-x^2} H_n')' = -2ne^{-x^2} H_n.$$

Знаем, что формула Родрига примет вид

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \partial_x^n e^{-x^2}, \quad a_n = 2^n,$$

тогда

$$\|H_n\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Рекуррентное соотношение:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Производящая функция:

$$\psi(x, z) = e^{-z^2 + 2zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n.$$

**Полиномы Лаггера.** Живут на интервале от  $(0, +\infty)$ , с дифференциальным уравнением, вида

$$\hat{L} = x\partial_x^2 + (1 + \alpha - x)\partial_x, \quad \rho = x^\alpha e^{-x},$$

для  $\alpha > -1$ . Собственные числа  $\lambda_n = n$ , формула Родрига имеет вид

$$L_n^{(\alpha)} = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \partial_x^n [x^{n+\alpha} e^{-x}].$$

## 4 ДИНАМИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯ

**Граничные условия.** Вообще граничные условия можно вводить из разложения

$$u(t \rightarrow 0, \mathbf{r}) \approx \theta(t)u(t=0, \mathbf{r}) + t\theta(t)\partial_t u(t=0, \mathbf{r}) + \dots,$$

тогда действие оператора  $\partial_t^2$  на эти члены дает сингулярные слагаемые

$$(\partial_t^2 + \nabla^2)u(\mathbf{t}, \mathbf{r}) = \delta'(t)u(t=0, \mathbf{r}) + \delta(t)\partial_t u(t=0, \mathbf{r}),$$

которые можем воспринимать как источник.

### ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

**Общий подход.** Найдём функцию Грина для уравнения, вида

$$(\partial_t^2 + \varpi^2[-i\nabla])u = \chi.$$

Решение запишется в виде

$$(\partial_t^2 + \varpi^2[-i\nabla])G = \delta(t)\delta(\mathbf{r}), \quad u(t, \mathbf{r}) = \int dt_1 d^3r_1 G(t-t_1, \mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\chi(t_1, \mathbf{r}_1).$$

Переходя к пространственному Фурье-образу, приходим к уравнению с известной функцией Грина:

$$(\partial_t^2 + \varpi^2[\mathbf{q}]) \tilde{G} = \delta(t), \quad \Rightarrow \quad \tilde{G}(t) = \theta(t) \frac{\sin(\varpi t)}{\varpi}.$$

Тогда через обратное Фурье-преобразование находим

$$G(t, \mathbf{r}) = \theta(t) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\sin(\varpi t)}{\varphi} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \stackrel{*}{=} \frac{\theta(t)}{\pi r} \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} q \frac{\sin(\varpi[\mathbf{q}]t)}{\varpi[\mathbf{q}]} \sin(qr),$$

где  $\stackrel{*}{=}$  верно для  $\varpi[\mathbf{q}] \equiv \varpi[q]$ .

Например, для  $\varpi[\mathbf{q}] = qc$ , волновое уравнение с источником:

$$(\partial_t^2 - c^2 \nabla^2) u(t, \mathbf{r}) = \chi(t, \mathbf{r}), \quad G(t, r) = \frac{\theta(t)}{4\pi cr} \delta(r - ct). \quad (4.1)$$

а значит выражение для поля:

$$u(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi c^2} \int d^3 r_1 \frac{\chi(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c, \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}, \quad (4.2)$$

перейти к сферически симметричному случаю.

## УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Рассмотрим отдельно уравнение Гельмгольца

$$(\nabla^2 + \varkappa^2) f = \varphi(\mathbf{r}).$$

Как и раньше, запишем найдём решение в виде

$$(\nabla^2 + \varkappa^2) G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}), \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{r}) = f_0(\mathbf{r}) + \int d^3 r_1 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}_1),$$

где  $f_0$  – решение однородного уравнения Гельмгольца. Функция Грина:

$$G = -\frac{\exp(i\varkappa r)}{4\pi r},$$

для  $\omega > 0$  и  $G \rightarrow G^*$  при  $\omega < 0$ .

## УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Уравнение диффузии с известным  $u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x})$ :

$$(\partial_t - \nabla^2) u(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (4.3)$$

решение которого может быть найдено в виде:

$$u(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dy_1 \dots dy_d}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t}\right) u_0(\mathbf{y}). \quad (4.4)$$

Асимптотики могут быть найдены в виде

$$u(t, \mathbf{x}) \approx \frac{A}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{4t}\right), \quad A = \int_{\mathbb{R}^d} dy_1 \dots dy_d u_0(\mathbf{y}). \quad (4.5)$$

При  $A = 0$  асимптотика будет соответствовать

$$u(t, \mathbf{x}) \approx \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{x}}{(4\pi t)^{d/2+1}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{4t}\right), \quad \bar{B} = 2\pi \int_{\mathbb{R}^d} dy_1 \dots dy_d \mathbf{y} u_0(\mathbf{y}), \quad (4.6)$$

где асимптотики имеют место при  $t \gg l^2$ ,  $l$  – масштаб на котором локализовано поле.

**Накачка.** При наличии правой части:

$$(\partial_t - \nabla^2) u = \varphi,$$

можем найти функцию Грина для оператора  $\partial_t - \nabla^2$

$$u(t, \mathbf{x}) = \int G(t - \tau, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\tau, \mathbf{y}) d\tau d^d \mathbf{y}, \quad G(t, \mathbf{r}) = \frac{\theta(t)}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right).$$

## 5 ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**Уравнение Фредгольма.** Есть уравнение Фредгольма I рода:

$$\int_a^b ds K(t, s) f(s) = g(t),$$



и уравнение Фредгольма II рода:

$$f(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) f(s) ds, \quad \Leftrightarrow \quad f = g + \lambda \hat{K} f, \quad (5.1)$$

где мы ввели интегральный оператор  $\hat{K} f = \int_a^b ds K(t, s) f(s)$ . Решение можем найти в виде

$$f = \frac{1}{1 - \lambda \hat{K}} g = \left( \mathbb{1} + \lambda \hat{R} \right) g, \quad \hat{R} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{K} + \lambda \hat{K}^2 + \dots$$

В терминах интегрирования резольвента  $R(t, s)$  выражается, как

$$R(t, s) = K(t, s) + \lambda \int_a^b dp_1 K(t, p_1) K(p_1, s) + \lambda^2 \int_a^b dp_1 \int_a^b dp_2 K(t, p_1) K(p_1, p_2) K(p_2, s) + \dots \quad (5.2)$$

Это всё интегрируем, суммируем, получаем  $R(t, s)$ , и сразу ответ в виде  $f = g + \lambda \hat{R} g$ .

## ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**Свертка I.** Рассмотрим уравнение на  $\varphi$ , вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x - y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (5.3)$$

то есть уравнение Фредгольма первого рода с  $(a, b) = \mathbb{R}$  и  $K(x, y) = K(x - y)$ . Решение можем найти через преобразование Фурье

$$\tilde{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk,$$

которое переводит свёртку в произведение:

$$\tilde{\varphi}(k) = \frac{\tilde{f}(k)}{\tilde{K}(k)}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{f}(k)}{\tilde{K}(k)}. \quad (5.4)$$

**Свертка II.** Аналогично для уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} dy K(x - y) \varphi(y), \quad (5.5)$$

для которого также

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} dy f(y) R(x - y), \quad R(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{K}(k)}{1 - \lambda \tilde{K}(k)}. \quad (5.6)$$

**Уравнение Вольтерра I.** Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма I на  $(a, b) = (0, t)$ :

$$f(t) = \int_0^t ds K(t - s) \varphi(s).$$

Здесь хорошо работает преобразование Лапласа

$$f(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} f(p) e^{pt} dp,$$

которое переводит свертку в произведение, а значит можем сразу написать решение

$$\varphi(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \frac{f(p)}{K(p)} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}. \quad (5.7)$$

**Уравнение Вольтерра II.** Аналогично для уравнения Фредгольма II:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^t K(x - y) \varphi(y) dy, \quad (5.8)$$

находим решение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^t R(t - s) f(s) ds, \quad R(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \frac{K(p)}{1 - \lambda K(p)}.$$

**Периодическое ядро I.** Рассмотрим  $f(t)$  и  $K(t)$  периодичные с  $T = b - a$ , тогда и  $\varphi(t)$  периодически по  $T$ . Решим уравнение, вида

$$\int_a^b K(t - s) \varphi(s) ds = f(t). \quad (5.9)$$

Раскладывая всё в ряд Фурье (вводя  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ):

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\omega t} f_n, \quad f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{in\omega t} dt.$$

Решение находим в виде суммы

$$\varphi_n = \frac{f_n}{TK_n}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f_n}{TK_n} e^{-in\omega t}. \quad (5.10)$$

**Периодическое ядро II.** Аналогично можем найти резольвенту для уравнения Фредгольма второго рода:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b ds K(t-s) \varphi(s).$$

Реша  $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b ds R(t-s) f(s), \quad R(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{K_n}{1 - \lambda TK_n} e^{-in\omega t}. \quad (5.11)$$

**Факторизуемое ядро.** Рассмотрим случай, когда ядро вырожденное:  $K(t, s) = \sum_i A_i(t) B_i(s)$ . Тогда интегральное уравнение переписывается в виде

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum A_i(t) \int_a^b B_i(s) \varphi(s) ds.$$

Решение уравнения можем найти в виде

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum_i C_i A_i(t), \quad (\mathbb{1} - \lambda \hat{M}) \mathbf{C} = \mathbf{\Phi}, \quad \Phi_i = \int_a^b B_i(t) f(t) dt, \quad M_{ij} = \int_a^b B_i(t) A_j(t) dt.$$

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**Уравнение типа свёртки.** Рассмотрим уравнение вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t-s) \varphi(s) = f(t). \quad (5.12)$$

Аналогично смотрим на фурье-образ, откуда находим выражение для  $\varphi(t)$ :

$$\varphi(t) = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{f(\omega)} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (5.13)$$

**Обобщение.** Обобщим происходящее, введя  $L(s)$

$$L(s) = \sum_{n=0}^N a_n s^n, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} ds \varphi(t-s) L(s) \varphi(s) = f(t), \quad (5.14)$$

решим в виде

$$\varphi(\omega) L(i\partial_\omega) \varphi(\omega) = f(\omega), \quad (5.15)$$

то есть можем свести интегральное уравнение к дифференциальному.

**Лаплас.** Рассмотрим уравнение вида

$$\int_0^t ds \varphi(t-s) L(s) \varphi(s) = f(t),$$

решение которого также находится в виде

$$\varphi(p) L(-\partial_p) \varphi(p) = f(p).$$

**Периодический случай.** Аналогично линейному случаю рассмотрим

$$\int_{-\pi}^{+\pi} ds \varphi(t-s) \varphi(s) = f(t),$$

периодическое с  $T = 2\pi$  и  $\omega = 1$ . Тогда решение находится в виде

$$\varphi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\pm) \sqrt{\frac{f_n}{2\pi}} e^{-int}.$$

**Факторизуемое ядро.** Для факторизуемого ядра уравнение примет вид

$$\varphi(t) = x(t) \int_a^b ds \varphi^n(s) y(s) + f(t),$$

решение которого можем найти в виде

$$\varphi(t) = \alpha x(t) + f(t), \quad \alpha: \alpha = \int_a^b dt y(t) (\alpha x(t) + f(t))^n,$$

где  $\alpha$  задан неявно алгебраическим уравнением.

**Факторизуемое ядро на причинном интервале.** Для уравнения на интервале  $[0, t]$  уравнение вида

$$\varphi(t) = f(t) + x(t) \int_0^t ds y(s) \varphi^n(s),$$

может быть сведено к дифференциальному уравнению по  $z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t)/x(t)$ :

$$z'(t) = y(t)x^n(t)z^n(t) + \frac{d}{dt} \left( \frac{f(t)}{x(t)} \right), \quad z(0) = \frac{f(0)}{x(0)}.$$

## СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**Сингулярные интегральные уравнения.** Основой решения станет *формула Соболевского*:

$$\text{v. p.} \int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0} dx = \pm i\pi f(x_0) + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0 \pm i\varepsilon} dx. \quad (5.16)$$

Полезно ввести преобразование Гильберта  $\hat{H}$ :

$$\hat{H}\varphi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y) dy}{2\pi} \left( \frac{1}{y - x + i\varepsilon} + \frac{1}{y - x - i\varepsilon} \right),$$

для которого верно, что  $\hat{H}^2 = -\mathbb{1}$ .

Тогда *простейшее сингулярное уравнение* вида

$$\pi \hat{H}\varphi(x) + \lambda \varphi(x) = f(x) \quad (5.17)$$

будет иметь решение относительно  $\varphi(x)$ :

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \pi^2} f(x) - \frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} \hat{H}[f](x) = \frac{1}{\lambda + i\pi} f(x) - \frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{f(y)}{y - x + i\varepsilon}. \quad (5.18)$$

**Сингулярные интегральные уравнения с полиномиальными коэффициентами.** Рассмотрим уравнение вида

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(y)}{y - x} dy = x^2 \varphi(x) + f(x).$$

Применяя оператор  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x - z + i\varepsilon}$ , приходим к уравнению

$$-\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y - z + i\varepsilon} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2 \varphi(y)}{y - z + i\varepsilon} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y - z + i\varepsilon} dy.$$

Здесь можем провести следующие рассуждения:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(y - z + i\varepsilon + z - i\varepsilon)}{y - z + i\varepsilon} \varphi(y) dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \varphi(y) dy + z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y - z + z}{y - z + i\varepsilon} \varphi(y) dy = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y \varphi(y) dy}_{C_1} + z \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy}_{C_2} + z^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y - z + i\varepsilon} dy, \end{aligned}$$

а значит исходное уравнение переписывается в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y - z + i\varepsilon} dy = -\frac{1}{z^2 + i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y - z + i\varepsilon} dy - \frac{C_1 + C_2 z}{z^2 + i\pi},$$

решение которого мы уже знаем:

$$\varphi(x) = -\frac{C_1 + C_2 x}{x^4 + \pi^2} - \frac{f(x)}{x^2 - i\pi} - \frac{1}{x^4 + \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y - z + i\varepsilon} dy.$$

**Сингулярные интегральные уравнения на отрезке.** Рассмотрим уравнение на конечном отрезке

$$\text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(y)}{y - x} dy = f(x).$$

Решение можем найти при условии на  $f$ :  $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$ , тогда

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi i} \left( f(x) + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(y) dy}{\sqrt{1-y^2}(y-x+i\varepsilon)} \right).$$

## 6 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРУПП

### ТЕОРИЯ ГРУПП

*Сопряженными* (из одного класса сопряженности) называть элементы  $g \sim h$  такие, что  $\exists r \in G, g = rhr^{-1}$ . Далее классы сопряженности будем обозначать за  $C_1, \dots, C_k$ , элементы в них за  $h_i \in C_i$ .

Циклическая группа  $C_n$

$$C_n = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}, \quad r^n = 1.$$

Для  $C_n$  каждый элемент становился представителем класса сопряженности в силу того, что группа абелева.

Группа перестановок  $S_n$

$$S_n = \left\{ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \right\},$$

разбивается на классы сопряженности с одинаковой циклической структурой:

$$S_2 \rightarrow \{1\}, \{(a, b)\}, \quad S_3 \rightarrow \{1\}, \{(a, b)\}, \{(a, b, c)\}, \quad S_4 \rightarrow \{1\}, \{(a, b)\}, \{(a, b, c)\}, \{(a, b, c, d)\}, \{(a, b)(c, d)\}.$$

Также в  $S_n \forall \sigma$  раскладывается в циклы, а циклы в транспозиции, определенной оказывается величина четность  $\sigma$ . Для неё выполняется

$$\text{sign}(\sigma_1 \cdot \sigma_2) = \text{sign}(\sigma_1) \cdot \text{sign}(\sigma_2), \quad \text{sign}(a, b) = -1, \quad \text{sign}(i_1, i_2, \dots, i_d) = \begin{cases} +1, & d \not\equiv 2, \\ -1, & d \equiv 2. \end{cases}$$

*Четностью* перестановки называют количество пар  $i < j$  таких, что  $\sigma(i) > \sigma(j)$ .

Группа  $D_n$  симметрий правильного  $n$ -угольника состоит из  $r$  – поворотов на  $2\pi/n$  и  $s$  – отражений относительно какой-то выбранной оси. Для  $n:2 = 0$  получаются классы сопряженности  $\{r^b, r^{n-b}\}, \{s, sr^2, sr^4, \dots\}$  и  $\{sr, sr^3, sr^5, \dots\}$ . Для  $n \not\equiv 2$  получится  $\{r^b, r^{n-b}\}$  и  $\{s, sr, sr^2, \dots\}$ .

### ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Далее работаем с конечными группами  $|G| < +\infty$ . Элемент группы обозначим за  $g \in G$ . *Представление* группы определяют как гомоморфизм  $\rho: G \mapsto \text{GL}(V, \mathbb{C})$  (невырожденные матрицы).

*Характером представления*  $\rho$  называют  $\chi[V] = \text{tr } \rho(g)$  для  $g \in G$ . Характеры изоморфных представлений совпадают, а также

$$\chi[V](1) = \dim V, \quad \chi[V_1 \oplus V_2] = \chi[V_1] + \chi[V_2], \quad \chi[V](g^{-1}) = \chi^*[V](g), \quad \chi[V_1 \otimes V_2] = \chi[V_1] \cdot \chi[V_2].$$

Стараемся решить задачу о разложении приводимого представления по неприводимым. Представление  $\rho$  называется *неприводимым*, если у него нет нетривиальных (отличных от  $\{0\}$  и  $V$ ) инвариантных подпространств. По теореме Машке  $\forall \rho$  конечной группы  $G$  разбивается на сумму неприводимых представлений. Всякое представление *унитаризуемо*.

Для характеров определим скалярное произведение  $\langle \chi^{(i)} | \chi^{(j)} \rangle$ :

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \bar{\psi}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^k |C_i| \varphi(h_i) \bar{\psi}(h_i).$$

Характеры ортогональны по строкам и столбцам:

$$\langle \chi^{(i)} | \chi^{(j)} \rangle = \delta_{ij}, \quad \sum_{n=1}^k \chi^{(n)}(h_i) \bar{\chi}^{(n)}(h_j) = \delta_{ij} \frac{|G|}{|C_i|}.$$

Число неприводимых представлений равно числу классов сопряженности. Все неприводимые представления абелевой группы одномерны, что является следствием теоремы Бернсайда:

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 = |G|,$$

где  $d_i$  – размерность  $i$ -го представления. *Критерием неприводимости* является  $\langle \chi | \chi \rangle = 1$ , тогда разложение на неприводимые:  $\chi = a_1 \chi^{(1)} + \dots + a_n \chi^{(n)}$ , где  $a_i = \langle \chi | \chi^{(i)} \rangle$ .

## ТАБЛИЦЫ НЕПРОВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Построение для  $C_n$  тривиально в силу абелевости группы. Каждый элемент представим в виде  $\sqrt[n]{1}$ . Построение производим с учетом свойства  $\rho(r^k) = \rho(r)^k$ .

Теперь для  $D_4$  размера  $|D_4| = 2 \times n = 8$ , будут классы сопряженности  $\{1\}$ ,  $\{r^2\}$ ,  $\{r, r^3\}$  и  $\{s, sr^2\}$ ,  $\{sr, sr^3\}$ .

$1 $	$1$	$r, r^3 $	$2$	$r^2 $	$1$	$s, sr^2 $	$2$	$sr, sr^3 $	$2$
$1$		$1$		$1$		$1$		$1$	
$1$		$1$		$1$		$-1$		$-1$	
$1$		$-1$		$1$		$1$		$-1$	
$1$		$-1$		$1$		$-1$		$1$	
$2$		$0$		$-2$		$0$		$0$	

Всегда есть тривиальное представление. Также из теоремы Бернсайда находим первый столбец.

По сохранению или смене ориентация базиса можем сопоставить  $\pm 1$  соответствующим классам. Важно помнить, что  $(sr^k)^2 = 1$  и  $(r^k)^4 = 1$ , откуда знаем одномерные представления  $\rho(sr^k) = \pm 1$  и  $\rho(r^k) = \sqrt[4]{1} = \pm i, \pm 1$ , откуда достраиваем одномерные представления.

При построении  $D_7$  будет важно вспомнить про сопоставление матриц поворота двумерным представлениям, по которым найдём элементы таблицы характеров, как след соответствующей матрицы.

Построим табличку характеров для  $S_3$ :  $|S_3| = 3! = 6$ . Также из теоремы Бернсайда находим первый столбец. Для второй строчки всегда есть *знаковое* представление.

$e $	$1$	$(a, b) $	$3$	$(a, b, c) $	$2$
$1$		$1$		$1$	
$1$		$-1$		$1$	
$2$		$0$		$-1$	

Построим табличку характеров для  $S_4$ :  $|S_4| = 4! = 24$ .

$e $	$1$	$(a, b) $	$6$	$(a, b, c) $	$8$	$(a, b, c, d) $	$6$	$(a, b)(c, d) $	$3$
$1$		$1$		$1$		$1$		$1$	
$1$		$1$		$1$		$1$		$1$	
$2$		$0$		$-1$		$0$		$2$	
$3$		$-1$		$0$		$1$		$-1$	
$3$		$1$		$0$		$-1$		$-1$	

Тут важно посмотреть на отображение  $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ , построив  $\chi[\mathbb{C}^4]$ , значениях характеров которой можем восстановить по количеству неподвижных точек  $(4, 2, 1, 0, 0)$ . Неприводимое представление можем получить в виде  $\chi[\mathbb{C}^4] - \chi^{(1)}$ . Также может помочь тензорное произведение представлений.

## 7 ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

### АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Если уравнения вида  $\hat{L}u(\mathbf{r}, t) = \dots$  — однородно и изотропно, то может помочь автомоделная подстановка:

$$u(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{t^a} f\left(\frac{\mathbf{r}}{t^b}\right) \quad : \quad t \rightarrow \lambda t \Rightarrow u \rightarrow \lambda^{-a} u, \quad r \rightarrow \lambda^b r. \quad (7.1)$$

Восстановить  $a$  в общем виде нельзя, но требуя, например, локальности решения  $\int_{\mathbb{R}^n} u dV = \text{const}$  можем иногда найти и  $a$ .

### МЕТОД БОГОЛЮБОВА-КРЫЛОВА

Рассмотрим произвольное возмущение гармонического осциллятора:

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2) x(t) = \varepsilon f(t, x, \dot{x}). \quad (7.2)$$

Приближенно (до  $o(\varepsilon)$ ) можем методом Боголюбова-Крылова найти решение в виде

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (7.3)$$

где зависимость от времени амплитуды и фазы определяется уравнениями

$$\partial_t A(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_{\omega_0 t - \pi}^{\omega_0 t + \pi} f(\tau, x, \dot{x}) \sin(\omega_0 \tau + \varphi(t)) d(\omega_0 \tau), \quad (7.4)$$

$$\partial_t \varphi(t) = \frac{-\varepsilon}{2\pi A \omega_0} \int_{\omega_0 t - \pi}^{\omega_0 t + \pi} f(\tau, x, \dot{x}) \cos(\omega_0 \tau + \varphi(t)) d(\omega_0 \tau). \quad (7.5)$$

Упрощая себе жизнь с  $\omega_0 = 1$ , приходим к выражению

$$\begin{aligned} \partial_t A(t) &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau, x, \dot{x}) \sin(\tau + \varphi) d\tau, \\ \partial_t \varphi(t) &= \frac{-\varepsilon}{2\pi A} \int_0^{2\pi} f(\tau, x, \dot{x}) \cos(\tau + \varphi) d\tau, \end{aligned}$$

где  $\dot{\varphi} = 0$  почти всегда и в интеграле для  $\dot{A}$  можно избавиться от  $\varphi$ .

## УРАВНЕНИЯ ХОПФА И БЮРГЕРСА

**Уравнение Хопфа.** В акустике естественно возникает уравнение Хопфа:

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0.$$

Решение может быть найдено в виде

$$x(t) = x_0 + u_0(x_0)t, \quad u(x(t), t) = c(x_0) = u_0(x_0).$$

где сначала разрешаем уравнение  $c = u_0(x_0)$  относительно  $x_0 = x_0(c)$ , а потом подставляя  $x_0(c)$  в выражение для  $x(t) = x_0(c) + ct$ , разрешаем его относительно  $c = c(x(t), t)$ . Зная, что  $u(x(t), t) = c(x(t), t)$ , находим  $u(x, t) = c(x, t)$ .

**Накачка.** Добавим к уравнению накачку:

$$\partial_t u + u \partial_x u = f(x, t).$$

Система может быть сведена к

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, x(t)) \\ \dot{x} = u(t, x(t)) \end{cases} \Leftrightarrow \ddot{x} = f(x, t), \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(t, x_0, \dot{x}_0),$$

где  $\dot{x}_0 = u_0(x_0)$ . Сначала разрешаем уравнение  $x(t)$  относительно  $x_0 = x_0(t, x)$ , а потом подставляем этот  $x_0$  в  $u(t, x) = \dot{x}(t, x_0(t, x))$ , что и является решением исходной задачи.

**Уравнение Бюргерса.** Добавим диссипацию в уравнение Хопфа:

$$\partial_t u + u \partial_x u = \partial_x^2 u,$$

так получим *уравнение Бюргерса*.

Заметим, что преобразование Коула-Хопфа

$$\psi = \exp\left(-\frac{1}{2}h\right), \quad u = \partial_x h, \quad \Rightarrow \quad (\partial_t - \partial_x^2)\psi = 0.$$

Имея начальные условия для  $\psi_0(x)$ , можем найти

$$\psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \psi_0(y) \frac{\theta(t)}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) dy,$$

откуда находим решение

$$u(t, x) = -2\partial_x \ln \psi(t, x).$$

## 8 СПРАВОЧНИК

### Вычеты

Интеграл по дуге может быть найден, как

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= 2\pi i \sum_{z_j} \operatorname{res}_{z_j} f(z), \quad \operatorname{res}_{z_j} f(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i\varphi} f(z_j + \varepsilon e^{i\varphi}) \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_j} \left( \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_j)^m f(z) \right), \end{aligned}$$

где  $m$  – степень полюса.

## ИНТЕГРАЛЫ

Например,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^a \varphi \cos^b \varphi d\varphi = \frac{1}{2} B\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(1 + \frac{a+b}{2}\right)},$$

для чего напомним несколько значений

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

Также для  $1 + m < kn$ , верно

$$\int_0^\infty \frac{x^m}{(1+x^n)^k} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} \frac{dx}{x} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \Gamma\left(k - \frac{m+1}{n}\right)}{n\Gamma(k)}.$$

Может быть полезно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm iz^2} dz = \sqrt{\pi} e^{\pm i\pi/4}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos z^2 dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin z^2 dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Чуть удобнее бывает пользоваться сразу формулой, вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm iax^2 + ibx} dx = \sqrt{\pi} e^{\pm i\pi/4} e^{\pm \frac{b^2}{4ai}}.$$

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

В  $n$ -мерии само преобразование имеет вид

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{r} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) f(\mathbf{r}), \quad f(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n \mathbf{k}}{(2\pi)^n} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \tilde{f}(\mathbf{k}).$$

Для преобразования Фурье полезно помнить

$$\mathcal{F}[f^{(n)}] = (i\omega)^n \mathcal{F}[f](\omega/a), \quad \mathcal{F}[f(x-x_0)] = e^{-i\omega x_0} \mathcal{F}[f](\omega/a), \quad \mathcal{F}[f(ax)] = |a|^{-1} \mathcal{F}[f](\omega/a),$$

то есть что происходит при растяжение, сдвигах и дифференцирование.

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Выпишем несколько пар оригинал-изображение:

$$\begin{aligned} t^n e^{\lambda t} &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}, & t^\alpha e^{\lambda t} &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}, & \frac{(1-e^{-t})}{t} &\xrightarrow{\mathcal{L}} \ln\left(1+\frac{1}{p}\right), & \frac{\sin t}{t} &\xrightarrow{\mathcal{L}} \arctg p \\ \sin(\nu t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\nu}{p^2+\nu^2}, & \cos(\nu t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{p}{p^2+\nu^2}, & t \sin(\nu t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2p\nu}{(p^2+\nu^2)^2}, & t \cos(\nu t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{p^2-\nu^2}{(p^2+\nu^2)^2}, \\ \operatorname{sh}(\nu t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\nu}{p^2-\nu^2}, & \operatorname{ch}(\nu t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{p}{p^2-\nu^2}, & e^{\lambda t} \sin(\nu t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\nu}{(p-\lambda)^2+\nu^2}, & e^{\lambda t} \cos(\nu t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\nu^2}, \end{aligned}$$

Также помним, что  $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ , и  $\mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-ap}$ , при  $a > 0$ .

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕЛЛИНА

Для функции  $g(x)$  такую, что  $g(x) = O(x^{-\alpha})$  при  $x \rightarrow 0$  и  $g(x) = x^{-\beta}$  при  $x \rightarrow +\infty$  можем определить преобразование Меллина

$$G(\lambda) = \int_0^\infty g(x) x^{\lambda-1} dx,$$

определенного в полосе  $\alpha < \operatorname{Re} \lambda < \beta$ . Обратное преобразование может быть найдено в виде

$$g(x) = \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} G(\lambda) x^{-\lambda} \frac{d\lambda}{2\pi i},$$

для  $\alpha < C < \beta$ .

Для вычисления интегралов бывает удобно воспользоваться сверточным свойством преобразования Меллина

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) x^{\lambda-1} dx = \int_{C_f-i\infty}^{C_f+i\infty} F(\lambda_f) G(\lambda - \lambda_f) \frac{d\lambda_f}{2\pi i} = \int_{C_g-i\infty}^{C_g+i\infty} F(\lambda - \lambda_g) G(\lambda_g) \frac{d\lambda_g}{2\pi i},$$

где  $\alpha_f + \alpha_g < \operatorname{Re} \lambda < \beta_f + \beta_g$ . В частности, при допустимом  $\lambda = 1$ , получаем

$$\int_0^\infty f(x)g(x) dx = \int_{C_f-i\infty}^{C_f+i\infty} F(\lambda_f)G(1-\lambda_f)\frac{d\lambda_f}{2\pi i}.$$

Приведем некоторый зоопарк по преобразованию Меллина:

$$\begin{aligned} e^{-x} &\xrightarrow{M} \Gamma(\lambda), & \frac{1}{1+ax^n} &\xrightarrow{M} \frac{\pi a^{-\frac{\lambda}{n}}}{n \sin\left(\frac{\pi\lambda}{n}\right)}, & \frac{1}{\sqrt[n]{1+x^n}} &\xrightarrow{M} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}-\frac{\lambda}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}, & \frac{1}{1-x} &\xrightarrow{M} \pi \cot(\pi\lambda), \\ \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx}} &\xrightarrow{M} \frac{\Gamma(1-\lambda)\Gamma\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}-\lambda}}{\sqrt{\pi b}}, & x^n &\xrightarrow{M} 2\pi\delta(i(n+\lambda)), & \frac{1}{1+e^{\alpha x}} &\xrightarrow{M} (1-2^{1-\lambda})\alpha^{-\lambda}\Gamma(\lambda)\zeta(\lambda), \\ \sin x &\xrightarrow{M} \sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\Gamma(\lambda), & \cos x &\xrightarrow{M} \cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\Gamma(\lambda). \end{aligned}$$