

ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ «УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

Автор: Хоружий Кирилл

От: 27 мая 2022 г.

Содержание

ТеорМин №1	2
ТеорМин №2	3
ТеорМин №3	6
1 Неделя I	9
2 Неделя II	10
3 Неделя III	12
4 Неделя V	13
5 Неделя VI	14
6 Неделя IX	15

ТеорМин №1

Вычеты. Интеграл по замкнутому контуру C может быть найден, как

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= 2\pi i \sum_{z_j} \text{res}_{z_j} f(z), \quad \text{res}_a f(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i\varphi} f(a + \varepsilon e^{i\varphi}) \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-a)^m f(z) \right), \end{aligned}$$

где m – степень полюса.

Излучение. Волновое уравнение с источником:

$$(\partial_t^2 - c^2 \nabla^2) u = \chi, \quad (1)$$

с законом дисперсии $\varpi = cq$.

Функция Грина оператора $\partial_t^2 - c^2 \nabla^2$:

$$G(t, r) = \frac{\theta(t)}{4\pi c r} \delta(r - ct),$$

а значит выражение для поля:

$$u(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi c^2} \int \frac{d^3 r_1}{R} \chi(t - R/c, \mathbf{r}_1), \quad (2)$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$.

Уравнение диффузии. Уравнение диффузии:

$$(\partial_t - \nabla^2) u = 0, \quad (3)$$

решение которого может быть найдено в виде:

$$u(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dy_1 \dots dy_d}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t}\right) u_0(\mathbf{y}). \quad (4)$$

Асимптотики могут быть найдены в виде

$$u(t, \mathbf{x}) \approx \frac{A}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{4t}\right), \quad A = \int_{\mathbb{R}^d} dy_1 \dots dy_d u_0(\mathbf{y}). \quad (5)$$

При $A = 0$ асимптотика будет соответствовать

$$u(t, \mathbf{x}) \approx \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{x}}{(4\pi t)^{d/2+1}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{4t}\right), \quad \bar{B} = 2\pi \int_{\mathbb{R}^d} dy_1 \dots dy_d \mathbf{y} u_0(\mathbf{y}), \quad (6)$$

где асимптотики имеют место при $t \gg l^2$, l – масштаб на котором локализовано поле.

Уравнение диффузии (с накачкой). При наличии правой части:

$$(\partial_t - \nabla^2) u = \varphi,$$

можем найти функцию Грина для оператора $\partial_t - \nabla^2$

$$u(t, \mathbf{x}) = \int G(t - \tau, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\tau, \mathbf{y}) d\tau d^d \mathbf{y}, \quad G(t, \mathbf{r}) = \frac{\theta(t)}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right).$$

Меленные переменные. Рассмотрим произвольное возмущение гармонического осциллятора:

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2) x(t) = \varepsilon f(t, x, \dot{x}). \quad (7)$$

Приближенно (до $o(\varepsilon)$) можем методом Боголюбова-Крылова найти решение в виде

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (8)$$

где зависимость от времени амплитуды и фазы определяется уравнениями

$$\partial_t A(t) = \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_{\omega_0 t - \pi}^{\omega_0 t + \pi} f(\tau, x, \dot{x}) \cos(\omega_0 \tau + \varphi(t)) d(\omega_0 \tau), \quad (9)$$

$$\partial_t \varphi(t) = \frac{-1}{2\pi A \omega_0} \int_{\omega_0 t - \pi}^{\omega_0 t + \pi} f(\tau, x, \dot{x}) \sin(\omega_0 \tau + \varphi(t)) d(\omega_0 \tau). \quad (10)$$

Уравнение Хопфа. В акустике естественно возникает уравнение Хопфа:

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0.$$

Решение может быть найдено в виде

$$x(t) = x_0 + u_0(x_0)t, \quad u(x(t), t) = c(x_0) = u_0(x_0).$$

где сначала разрешаем уравнение $c = u_0(x_0)$ относительно $c = c(x_0)$, а потом разрешаем уравнение на $x(t)$ относительно $c = c(x(t), t)$. Зная, что $u(x(t), t) = c(x(t), t)$, находим $u(x, t) = c(x, t)$.

Уравнение Хопфа (с накачкой). Добавим к уравнению накачку:

$$\partial_t u + u \partial_x u = f(x, t).$$

Система может быть сведена к

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, x(t)) \\ \dot{x} = u(t, x(t)) \end{cases} \Leftrightarrow \ddot{x} = f(x, t), \Rightarrow x(t) = x(t, x_0, \dot{x}_0),$$

где $\dot{x}_0 = u_0(x_0)$. Сначала разрешаем уравнение $x(t)$ относительно $x_0 = x_0(t, x)$, а потом подставляем этот x_0 в $u(t, x) = \dot{x}(t, x_0(t, x))$, что и является решением исходной задачи.

Уравнение Бюргерса. Добавим диссипацию в уравнение Хопфа:

$$\partial_t u + u \partial_x u = \partial_x^2 u,$$

так получим уравнение Бюргерса.

Заметим, что преобразование Коула-Хопфа

$$\psi = \exp\left(-\frac{1}{2}h\right), \quad u = \partial_x h, \quad \Rightarrow \quad (\partial_t - \partial_x^2)\psi = 0.$$

Имея начальные условия для $\psi_0(x)$, можем найти

$$\psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \psi_0(y) \frac{\theta(t)}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) dy,$$

откуда находим решение

$$u(t, x) = -2\partial_x \ln \psi(t, x).$$

ТеорМин №2

Автомодельные решения. Если уравнения вида $\hat{L} u(\mathbf{r}, t) = \dots$ — однородно и изотропно, то может помочь автомодельная подстановка:

$$u(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{t^a} f\left(\frac{\mathbf{r}}{t^b}\right) \quad : \quad t \rightarrow \lambda t \Rightarrow u \rightarrow \lambda^{-a} u, \quad r \rightarrow \lambda^b r. \quad (11)$$

Восстановить a в общем виде нельзя, но требуя, например, локальности решения $\int_{\mathbb{R}^n} u dV = \text{const}$ можем иногда найти и a .

Уравнение Фредгольма. Есть уравнение Фредгольма I рода:

$$\int_a^b ds K(t, s) f(s) = g(t),$$

и уравнение Фредгольма II рода:

$$f(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) f(s), \quad \Leftrightarrow \quad f = g + \lambda \hat{K} f, \quad (12)$$

где мы ввели интегральный оператор $\hat{K} f = \int_a^b ds K(t, s) f(s)$. Решение можем найти в виде

$$f = \frac{1}{1 - \lambda \hat{K}} g = \left(\mathbb{1} + \lambda \hat{R} \right) g, \quad \hat{R} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{K} + \lambda \hat{K}^2 + \dots$$

В терминах интегрирования результента $R(t, s)$ выражается, как

$$R(t, s) = K(t, s) + \lambda \int_a^b dp_1 K(t, p_1) K(p_1, s) + \lambda^2 \int_a^b dp_1 \int_a^b dp_2 K(t, p_1) K(p_1, p_2) K(p_2, s) + \dots \quad (13)$$

Линейные интегральные уравнения

Свертка I. Рассмотрим уравнение на φ , вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (14)$$

то есть уравнение Фредгольма первого рода с $(a, b) = \mathbb{R}$ и $K(x, y) = K(x-y)$. Решение можем найти через преобразование Фурье

$$\tilde{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k) e^{ikx} dx,$$

которое переводит свёртку в произведение:

$$\tilde{\varphi}(k) = \frac{\tilde{f}(k)}{\tilde{K}(k)}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{f}(k)}{\tilde{K}(k)}. \quad (15)$$

Свертка II. Аналогично для уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} dy K(x-y)\varphi(y), \quad (16)$$

для которого также

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} dy f(y)R(x-y), \quad R(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{K}(k)}{1 - \lambda \tilde{K}(k)}. \quad (17)$$

Уравнение Вольтерра I. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма I на $(a, b) = (0, t)$:

$$f(t) = \int_0^t ds K(t-s)\varphi(s).$$

Здесь хорошо работает преобразование Лапласа

$$f(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} f(p)e^{pt} dp,$$

которое переводит свертку в произведение, а значит можем сразу написать решение

$$\varphi(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \frac{f(p)}{K(p)} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}. \quad (18)$$

Уравнение Вольтерра II. Аналогично для уравнения Фредгольма II:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^t K(x-y)\varphi(y) dy, \quad (19)$$

находим решение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^t R(t-s)f(s) ds, \quad R(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \frac{K(p)}{1 - \lambda K(p)}.$$

Периодическое ядро I. Рассмотрим $f(t)$ и $K(t)$ периодичные с $T = b - a$, тогда и $\varphi(t)$ периодически по T . Решим уравнение, вида

$$\int_a^b K(t-s)\varphi(s) ds = f(t). \quad (20)$$

Раскладывая всё в ряд Фурье (вводя $\omega = \frac{2\pi}{T}$):

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\omega t} f_n, \quad f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{in\omega t} dt.$$

Решение находим в виде суммы

$$\varphi_n = \frac{f_n}{TK_n}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f_n}{TK_n} e^{-in\omega t}. \quad (21)$$

Периодическое ядро II. Аналогично можем найти резольвенту для уравнения Фредгольма второго рода:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b ds K(t-s)\varphi(s).$$

Реша $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b ds R(t-s)f(s), \quad R(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{K_n}{1 - \lambda TK_n} e^{-in\omega t}. \quad (22)$$

Факторизуемое ядро. Рассмотрим случай, когда ядро вырожденное: $K(t, s) = \sum_i A_i(t)B_i(s)$. Тогда интегральное уравнение переписывается в виде

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum A_i(t) \int_a^b B_i(s)\varphi(s) ds.$$

Решение уравнения можем найти в виде

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum_i C_i A_i(t), \quad (1 - \lambda \hat{M})\mathbf{C} = \mathbf{\Phi}, \quad \Phi_i = \int_a^b B_i(t)f(t) dt, \quad M_{ij} = \int_a^b B_i(t)A_j(t) dt.$$

Нелинейные интегральные уравнения

Уравнение типа свёртки. Рассмотрим уравнение вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t-s)\varphi(s) = f(t). \quad (23)$$

Аналогично смотрим на фурье-образ, откуда находим выражение для $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{f(\omega)} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (24)$$

Обобщение. Обобщим происходящее, введя $L(s)$

$$L(s) = \sum_{n=0}^N a_n s^n, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} ds \varphi(t-s)L(s)\varphi(s) = f(t), \quad (25)$$

решим в виде

$$\varphi(\omega)L(i\partial_\omega)\varphi(\omega) = f(\omega), \quad (26)$$

то есть можем свести интегральное уравнение к дифференциальному.

Лаплас. Рассмотрим уравнение вида

$$\int_0^t ds \varphi(t-s)L(s)\varphi(s) = f(t),$$

решение которого также находится в виде

$$\varphi(p)L(-\partial_p)\varphi(p) = f(p).$$

Периодический случай. Аналогично линейному случаю рассмотрим

$$\int_{-\pi}^{+\pi} ds \varphi(t-s)\varphi(s) = f(t),$$

периодичное с $T = 2\pi$ и $\omega = 1$. Тогда решение находится в виде

$$\varphi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\pm) \sqrt{\frac{f_n}{2\pi}} e^{-int}.$$

Факторизуемое ядро. Для факторизуемого ядра уравнение примет вид

$$\varphi(t) = x(t) \int_a^b ds \varphi^n(s)y(s) + f(t),$$

решение которого можем найти в виде

$$\varphi(t) = \alpha x(t) + f(t), \quad \alpha: \alpha = \int_a^b dt y(t) (\alpha x(t) + f(t))^n,$$

где α задан неявно алгебраическим уравнением.

Факторизуемое ядро'. Для уравнения на интервале $[0, t]$ уравнение вида

$$\varphi(t) = f(t) + x(t) \int_0^t ds y(s)\varphi^n(s),$$

может быть сведено к дифференциальному уравнению по $z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t)/x(t)$:

$$z'(t) = y(t)x^n(t)z^n(t) + \frac{d}{dt} \left(\frac{f(t)}{x(t)} \right), \quad z(0) = \frac{f(0)}{x(0)}.$$

Сингулярные интегральные уравнения

Сингулярные интегральные уравнения. Основой решения станет *формула Соболевского*:

$$\text{в. п. } \int_a^b \frac{f(x)}{x-x_0} dx = \pm i\pi f(x_0) + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^b \frac{f(x)}{x-x_0 \pm i\varepsilon} dx. \quad (27)$$

Полезно ввести преобразование Гильберта \hat{H} :

$$\hat{H}\varphi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y) dy}{2\pi} \left(\frac{1}{y-x+i\varepsilon} + \frac{1}{y-x-i\varepsilon} \right),$$

для которого верно, что $\hat{H}^2 = -1$.

Тогда *простейшее сингулярное уравнение* вида

$$\pi \hat{H}\varphi(x) + \lambda \varphi(x) = f(x) \quad (28)$$

будет иметь решение относительно $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \pi^2} f(x) - \frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} \hat{H}[f](x) = \frac{1}{\lambda + i\pi} f(x) - \frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{f(y)}{y - x + i\varepsilon}. \quad (29)$$

Сингулярные интегральные уравнения с полиномиальными коэффициентами. Рассмотрим уравнение вида

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(y)}{y - x} dy = x^2 \varphi(x) + f(x).$$

Применяя оператор $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x - z + i\varepsilon}$, приходим к уравнению

$$-\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y - z + i\varepsilon} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2 \varphi(y)}{y - z + i\varepsilon} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y - z + i\varepsilon} dy.$$

Здесь можем провести следующие рассуждения:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(y - z + i\varepsilon + z - i\varepsilon)}{y - z + i\varepsilon} \varphi(y) dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \varphi(y) dy + z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y - z + z}{y - z + i\varepsilon} \varphi(y) dy = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y \varphi(y) dy}_{C_1} + z \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy}_{C_2} + z^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y - z + i\varepsilon} dy, \end{aligned}$$

а значит исходное уравнение переписывается в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y - z + i\varepsilon} dy = -\frac{1}{z^2 + i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y - z + i\varepsilon} dy - \frac{C_1 + C_2 z}{z^2 + i\pi},$$

решение которого мы уже знаем:

$$\varphi(x) = -\frac{C_1 + C_2 x}{x^4 + \pi^2} - \frac{f(x)}{x^2 - i\pi} - \frac{1}{x^4 + \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y - z + i\varepsilon} dy.$$

Сингулярные интегральные уравнения на отрезке. Рассмотрим уравнение на конечном отрезке

$$\text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(y)}{y - x} dy = f(x).$$

Решение можем найти при условии на f : $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$, тогда

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi i} \left(f(x) + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(y) dy}{\sqrt{1-y^2}(y-x+i\varepsilon)} \right).$$

ТеорМин №3

Теория групп. *Сопряженными* (из одного класса сопряженности) называть элементы $g \sim h$ такие, что $\exists r \in G, g = rhr^{-1}$. Далее классы сопряженности будем обозначать за C_1, \dots, C_k , элементы в них за $h_i \in C_i$.

Циклическая группа C_n

$$C_n = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}, \quad r^n = 1.$$

Для C_n каждый элемент становился представителем класса сопряженности в силу того, что группа абелева.

Группа перестановок S_n

$$S_n = \left\{ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \right\},$$

разбивается на классы сопряженности с одинаковой циклической структурой:

$$S_2 \rightarrow \{1\}, \{(a, b)\}, \quad S_3 \rightarrow \{1\}, \{(a, b)\}, \{(a, b, c)\}, \quad S_4 \rightarrow \{1\}, \{(a, b)\}, \{(a, b, c)\}, \{(a, b, c, d)\}, \{(a, b)(c, d)\}.$$

Также в $S_n \forall \sigma$ раскладывается в циклы, а циклы в транспозиции, определенной оказывается величина четность σ . Для неё выполняется

$$\text{sign}(\sigma_1 \cdot \sigma_2) = \text{sign}(\sigma_1) \cdot \text{sign}(\sigma_2), \quad \text{sign}(a, b) = -1, \quad \text{sign}(i_1, i_2, \dots, i_d) = \begin{cases} +1, & d \not\equiv 2, \\ -1, & d \equiv 2. \end{cases}$$

Четностью перестановки называют количество пар $i < j$ таких, что $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Группа D_n симметрий правильного n -угольника состоит из r – поворотов на $2\pi/n$ и s – отражений относительно какой-то выбранной оси. Для $n:2 = 0$ получаются классы сопряженности $\{r^b, r^{n-b}\}, \{s, sr^2, sr^4, \dots\}$ и

$\{sr, sr^3, sr^5, \dots\}$. Для $n \not\equiv 2$ получится $\{r^b, r^{n-b}\}$ и $\{s, sr, sr^2, \dots\}$.

Теория представлений. Далее работаем с конечными группами $|G| < +\infty$. Элемент группы обозначим за $g \in G$. *Представление* группы определяют как гомоморфизм $\rho: G \mapsto \text{GL}(V, \mathbb{C})$ (невырожденные матрицы).

Характером представления ρ называют $\chi[V] = \text{tr } \rho(g)$ для $g \in G$. Характеры изоморфных представлений совпадают, а также

$$\chi[V](1) = \dim V, \quad \chi[V_1 \oplus V_2] = \chi[V_1] + \chi[V_2], \quad \chi[V](g^{-1}) = \chi^*[V](g), \quad \chi[V_1 \otimes V_2] = \chi[V_1] \cdot \chi[V_2].$$

Стараемся решить задачу о разложении приводимого представления по неприводимым. Представление ρ называется *неприводимым*, если у него нет нетривиальных (отличных от $\{0\}$ и V) инвариантных подпространств. По теореме Машке $\forall \rho$ конечной группы G разбивается на сумму неприводимых представлений. Всякое представление *унитаризуемо*.

Для характеров определим скалярное произведение $\langle \chi^{(i)} | \chi^{(j)} \rangle$:

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \bar{\psi}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^k |C_i| \varphi(h_i) \bar{\psi}(h_i).$$

Характеры ортогональны по строкам и столбцам:

$$\langle \chi^{(i)} | \chi^{(j)} \rangle = \delta_{ij}, \quad \sum_{n=1}^k \chi^{(n)}(h_i) \bar{\chi}^{(n)}(h_j) = \delta_{ij} \frac{|G|}{|C_i|}.$$

Число неприводимых представлений равно числу классов сопряженности. Все неприводимые представления абелевой группы одномерны, что является следствием теоремы Бернсайда:

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 = |G|,$$

где d_i – размерность i -го представления. *Критерием неприводимости* является $\langle \chi | \chi \rangle = 1$, тогда разложение на неприводимые: $\chi = a_1 \chi^{(1)} + \dots + a_n \chi^{(n)}$, где $a_i = \langle \chi | \chi^{(i)} \rangle$.

Таблицы неприводимых представлений Построение для C_n тривиально в силу абелевости группы. Каждый элемент представим в виде $\sqrt[n]{1}$. Построение производим с учетом свойства $\rho(r^k) = \rho(r)^k$.

Теперь для D_4 размера $|D_4| = 2 \times n = 8$, будут классы сопряженности $\{1\}$, $\{r, r^3\}$, $\{r^2\}$ и $\{s, sr^2\}$, $\{sr, sr^3\}$.

$1 1$	$r, r^3 2$	$r^2 1$	$s, sr^2 2$	$sr, sr^3 2$
1	1	1	1	1
1	1	1	-1	-1
1	-1	1	1	-1
1	-1	1	-1	1
2	0	-2	0	0

Всегда есть тривиальное представление. Также из теоремы Бернсайда находим первый столбец.

По сохранению или смене ориентации базиса можем сопоставить ± 1 соответствующим классам. Важно помнить, что $(sr^k)^2 = 1$ и $(r^k)^4 = 1$, откуда знаем одномерные представления $\rho(sr^k) = \pm 1$ и $\rho(r^k) = \sqrt[4]{1} = \pm i, \pm 1$, откуда достраиваем одномерные представления.

При построении D_7 будет важно вспомнить про сопоставление матриц поворота двумерным представлениям, по которым найдём элементы таблицы характеров, как след соответствующей матрицы.

Построим табличку характеров для S_3 : $|S_3| = 3! = 6$. Также из теоремы Бернсайда находим первый столбец. Для второй строчки всегда есть *знаковое* представление.

$e 1$	$(a, b) 3$	$(a, b, c) 2$
1	1	1
1	-1	1
2	0	-1

Построим табличку характеров для S_4 : $|S_4| = 4! = 24$.

$e 1$	$(a, b) 6$	$(a, b, c) 8$	$(a, b, c, d) 6$	$(a, b)(c, d) 3$
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
2	0	-1	0	2
3	-1	0	1	-1
3	1	0	-1	-1

Тут важно посмотреть на отображение $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, построив $\chi[\mathbb{C}^4]$, значениях характеров которой можем восстановить по количеству неподвижных точек $(4, 2, 1, 0, 0)$. Неприводимое представление можем получить в виде $\chi[\mathbb{C}^4] - \chi^{(1)}$. Также может помочь тензорное произведение представлений.

Преобразование Меллина. Для функции $g(x)$ такую, что $g(x) = O(x^{-\alpha})$ при $x \rightarrow 0$ и $g(x) = x^{-\beta}$ при $x \rightarrow +\infty$ можем определить преобразование Меллина

$$G(\lambda) = \int_0^\infty g(x)x^{\lambda-1} dx,$$

определенного в полосе $\alpha < \operatorname{Re} \lambda < \beta$. Обратное преобразование может быть найдено в виде

$$g(x) = \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} G(\lambda)x^{-\lambda} \frac{d\lambda}{2\pi i},$$

для $\alpha < C < \beta$.

Для вычисления интегралов бывает удобно воспользоваться сверточным свойством преобразования Меллина

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)x^{\lambda-1} dx = \int_{C_f-i\infty}^{C_f+i\infty} F(\lambda_f)G(\lambda-\lambda_f) \frac{d\lambda_f}{2\pi i} = \int_{C_g-i\infty}^{C_g+i\infty} F(\lambda-\lambda_g)G(\lambda_g) \frac{d\lambda_g}{2\pi i},$$

где $\alpha_f + \alpha_g < \operatorname{Re} \lambda < \beta_f + \beta_g$. В частности, при допустимом $\lambda = 1$, получаем

$$\int_0^\infty f(x)g(x) dx = \int_{C_f-i\infty}^{C_f+i\infty} F(\lambda_f)G(1-\lambda_f) \frac{d\lambda_f}{2\pi i}.$$

Приведем некоторый зоопарк по преобразованию Меллина:

$$\begin{aligned} e^{-x} &\xrightarrow{M} \Gamma(\lambda), & \frac{1}{1+ax^n} &\xrightarrow{M} \frac{\pi a^{-\frac{\lambda}{n}}}{n \sin\left(\frac{\pi\lambda}{n}\right)}, & \frac{1}{\sqrt[n]{1+x^n}} &\xrightarrow{M} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}-\frac{\lambda}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}, & \frac{1}{1-x} &\xrightarrow{M} \pi \cot(\pi\lambda), \\ \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx}} &\xrightarrow{M} \frac{\Gamma(1-\lambda)\Gamma\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}-\lambda}}{\sqrt{\pi b}}, & x^n &\xrightarrow{M} 2\pi\delta(i(n+\lambda)), & \frac{1}{1+e^{\alpha x}} &\xrightarrow{M} (1-2^{1-\lambda})\alpha^{-\lambda}\Gamma(\lambda)\zeta(\lambda), \\ \sin x &\xrightarrow{M} \sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\Gamma(\lambda), & \cos x &\xrightarrow{M} \cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\Gamma(\lambda). \end{aligned}$$

Гамма функция. Полезно будет вспомнить, что

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t} dt = \int_0^1 (-\ln x)^{z-1} dx = \frac{2^{z+1}}{z} \int_0^1 y(-\ln y)^z dy, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

Для произведения бывает удобно

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-nz} \cdot (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(nz), \quad \Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

1 Неделя I

№ 4.1.6

Найдём решение волнового уравнения (1) для точечного гармонического источника

$$\chi = \cos(\omega t) \delta(\mathbf{r}).$$

Подставляя ξ в (2), находим

$$u(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi c^2} \int \frac{d^3 r_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \cos(\omega t - \omega |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c) \delta(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\cos(\omega(t - \frac{r}{c}))}{r}.$$

№ 4.1.7

Найдём значение функции Грина при $r = 0$ для оператора $\partial_t^2 + \nabla^4$. Для начала перейдём к Фурье образу

$$\tilde{G}(t, \mathbf{q}) = \int d^3 \mathbf{x} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} G(t, \mathbf{x}), \quad \Rightarrow \quad (\partial_t^2 + q^4) \tilde{G} = \delta(t).$$

Решение этого уравнение известно¹:

$$\tilde{G}(t) = \theta(t) \frac{1}{q^2} \sin(q^2 t).$$

Осталось найти

$$G(t, 0) = \theta(t) \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{\sin(q^2 t)}{q^2} = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \sin(q^2 t) = \frac{1}{8\sqrt{2}\pi^{5/2}} \cdot \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}}.$$

№ 4.2.2

Найдём решение одномерного диффузионного уравнения для

$$(\partial_t - \partial_x^2) u = 0, \quad u_0(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right).$$

Точное решение. Воспользуемся (4), тогда

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t} - \frac{y^2}{2l^2}\right) dy.$$

Выделяя полный квадрат, находим, что

$$\frac{(x-y)^2}{4t} + \frac{y^2}{2l^2} = \left(\sqrt{\frac{1}{2l^2} + \frac{1}{4t}} y - \frac{x}{4t \sqrt{\frac{1}{2l^2} + \frac{1}{4t}}} \right)^2 + \frac{x^2}{2l^2 + 4t},$$

а значит

$$u(t, x) = \frac{l}{\sqrt{l^2 + 2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2 + 4t}\right).$$

Асимптотика. Так как функция u_0 симметрична, то через (5) находим

$$A = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx = l\sqrt{2\pi}, \quad \Rightarrow \quad u(t, x) \approx \frac{l}{\sqrt{2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right),$$

что является асимптотикой точного решения при $t \gg l^2$.

№ 4.2.3

Найдём асимптотическое поведение решение одномерного диффузного уравнения (3) для различных начальных условий.

1. Рассмотрим

$$u_0(x) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right).$$

В силу нечетности функции, через (6), находим

$$B = 2\pi \int_{\mathbb{R}} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right) = -4\pi l^2 \partial_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2/2l^2} dx = -4\pi l^2 \sqrt{2\pi} l \partial_\alpha \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = l^3 (2\pi)^{3/2},$$

¹Конспект, (1.11).

а значит искомая асимптотика

$$u(t, x) \approx \left(\frac{l}{\sqrt{2}} \right)^3 \frac{x e^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}.$$

2. Рассмотрим

$$u_0(x) = \exp \left(-\frac{|x|}{l} \right).$$

В силу четности функции, через (5), находим

$$A = 2 \int_0^\infty e^{-x/l} dx = 2l.$$

Тогда искомая асимптотика

$$u(t, x) \approx \frac{l}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{t}}.$$

3. Рассмотрим

$$u_0(x) = x \exp \left(-\frac{|x|}{l} \right).$$

В силу нечетности функции, через (6), находим

$$B = 4\pi \int_0^\infty x^2 \exp \left(-\frac{|x|}{l} \right) dx = 4\pi l^2 \partial_\alpha^2 \int_0^\infty e^{-\alpha x/l} dx = 2\pi l^2 \partial_\alpha^2 \left(\frac{l}{\alpha} \right) = 8\pi l^3,$$

а значит

$$u(t, x) \approx \frac{l^3}{\sqrt{\pi}} \frac{x e^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}.$$

4. Рассмотрим

$$u_0(x) = \frac{1}{x^2 + l^2}.$$

В силу четности функции, через (5), находим

$$A = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2 + l^2} dx = 2\pi i \frac{1}{2il} = \frac{\pi}{l},$$

тогда искомая асимптотика

$$u(t, x) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2l} \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{t}}.$$

5. Рассмотрим

$$u_0(x) = \frac{x}{(x^2 + l^2)^2}.$$

В силу четности функции, через (6), находим

$$B = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{(x^2 + l^2)^2} dx = 4\pi i \lim_{x \rightarrow il} \left(\frac{x^2}{(x + il)^2} \right)' = \frac{\pi^2}{l}.$$

Тогда искомая асимптотика

$$u(t, x) = \frac{\sqrt{\pi}}{8l} \frac{x e^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}.$$

2 Неделя II

№1. 6.2.2

Решим уравнение (7) для $f(\dot{x}) = -\varepsilon \dot{x}^3$. Подставляя $f(t)$ в (9) и (10), находим уравнения на амплитуду и фазу:

$$\dot{A} = -\frac{3}{8}\varepsilon A^3 \omega_0^2, \quad \dot{\varphi} = 0,$$

откуда сразу находим $\varphi(t) = \varphi_0$ и

$$\frac{dA}{A^3} = \left(-\frac{3}{8}\varepsilon \omega_0^2 \right) dt, \quad \Rightarrow \quad A = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \frac{3}{4}A_0\varepsilon\omega_0^2 t}},$$

а значит искомое решение

$$x(t) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \frac{3}{4}A_0\epsilon t}} \sin(t + \varphi_0).$$

№2. 6.2.6

Решим уравнение (7) для $f(t) = \cos t$. Знаем, что точное решение

$$x(t) = A \sin(t + \varphi_0) + \frac{\epsilon t}{2} \sin(t).$$

Однако решим методом медленных амплитуд.

Подставляя $f(t)$ в (9) и (10), находим уравнения на амплитуду и фазу:

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = \frac{\epsilon}{2} \cos(\varphi(t)), \\ \dot{\varphi}(t) = \frac{-\epsilon}{2A(t)} \sin(\varphi(t)), \end{cases}$$

которые приводят к двум случаям.

Нулевая фаза. При $\varphi(0) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ видим, что $\dot{\varphi} = 0$, а значит $\varphi(t) = \text{const}$. Тогда уравнение на амплитуду легко интегрируется, и находим (считая $A(0) \stackrel{\text{def}}{=} A_0$)

$$A(t) = A_0 + \frac{\epsilon}{2} \cos(\varphi_0)t,$$

что прекрасно описывает резонанс:

$$x(t) = \left(A_0 + \frac{\epsilon}{2} \cos(\varphi_0)t \right) \sin(t), \quad \varphi_0 = 0.$$

Ненулевая фаза. Разделим два уравнения друг на друга:

$$\frac{dA}{d\varphi} = -\frac{A}{\operatorname{tg} \varphi}, \quad \Rightarrow \quad \log A = -\log \sin \varphi + \tilde{c}, \quad \Rightarrow \quad A = A_0 \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi},$$

таким образом нашли удобный первый интеграл системы.

Подставляя в выражение для $\dot{\varphi}$ находим

$$\dot{\varphi} = -\frac{\epsilon}{2} \sin^2(\varphi), \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} = -\frac{\epsilon}{2} dt, \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctg \left(\frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_0} + \frac{\epsilon t}{2}} \right).$$

Теперь нужно подставить $\varphi(t)$ в выражение для \dot{A} и разложить по ϵ :

$$\cos \arctg x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \Rightarrow \quad \dot{A} = \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{t\epsilon}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi_0)} \right)^2}} = \frac{\epsilon}{2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} + o(\epsilon),$$

а значит искомая амплитуда

$$A(t) = A_0 + \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} \frac{\epsilon}{2} t.$$

Итого находим (при $\varphi_0 \neq \pi/2$)

$$x(t) = \left(A_0 + \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} \frac{\epsilon t}{2} \right) \sin \left(t + \arctg \left(\frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_0} + \frac{\epsilon t}{2}} \right) \right).$$

№3. 6.2.8

Решим уравнение (7) для $f(t) = \kappa \cos t + (1 - x^2)\dot{x}$. Подставляя $f(t)$ в (9) и (10), находим уравнения на амплитуду и фазу:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\epsilon \left(\kappa \cos \varphi + A \left(1 - \frac{A^2}{4} \right) \right), \quad \dot{\varphi} = -\frac{1}{2A}\epsilon \kappa \sin(\varphi).$$

Считая κ тоже малым параметром, решаем, аналогично семинару, уравнение с разделяющимися переменными:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\epsilon A \left(1 - \frac{A^2}{4} \right), \quad \Rightarrow \quad A(t) = 2 \frac{A_0}{\sqrt{4e^{-\epsilon t} + A_0^2(1 - e^{-\epsilon t})}},$$

что похоже на правду, так как всё также

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 2,$$

то есть сохраняется предельный цикл на плоскости $\{x, \dot{x}\}$.

Для фазы можем найти решение при $t \rightarrow \infty$:

$$\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon\kappa}{2} \sin(\varphi) \sqrt{\frac{4 + A_0^2(e^{\varepsilon t} - 1)}{4A_0^2 e^{\varepsilon t}}} \approx -\frac{\varepsilon\kappa}{4} \sin(\varphi), \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\varphi(t)\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\varphi_0\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon\kappa}{4}t\right).$$

Возможно даже корректным будет выражение

$$\varphi(t) = 2 \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\varphi_0\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon\kappa}{4}t\right)\right),$$

получается малая накачка определяет асимптотику на фазы на бесконечности.

Сама асимптотика будет иметь вид

$$\varphi(t \rightarrow \infty) = 2 \operatorname{arcctg}\left(e^{\frac{\varepsilon\kappa}{4}t} \operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right).$$

3 Неделя III

№1. 7.1.2

Найдём решение уравнения Хопфа с начальными условиями $u = 0$ при $x < 0$ и $u = -c_1x + c_2x^2$ при $x > 0$. Для начала считаем

$$\begin{cases} c(x_0) = -c_1x_0 + c_2x_0^2 \\ x(t) = x_0(c) + ct \end{cases} \Rightarrow x_0(c) = \frac{c_1 \pm \sqrt{c_1^2 + 4c_2c}}{2c_2},$$

где выбор знака не принципиален. Подставляя x_0 в уравнение на $x(t)$, выражаем c :

$$c = \frac{c_1}{2c_2^3t^2} \left(\pm \sqrt{c_1(c_1(c_2t - 1)^2 + 4c_2^2tx) - c_1c_2t + c_1 + 2c_2^2tx} \right),$$

где $+$ не удовлетворяет $c(t = 0, x) = u_0(x)$, а значит

$$u(x, t) = \frac{c_1}{2c_2^3t^2} \left(-\sqrt{c_1(c_1(c_2t - 1)^2 + 4c_2^2tx) - c_1c_2t + c_1 + 2c_2^2tx} \right).$$

Стоит заметить, что до точки $x^* = c_1/c_2$ верно $u'_0(x) < 0$, а значит решение существует только до некоторого t^* .

№2. 7.1.3

Теперь решим уравнение Хопфа с накачкой:

$$\partial_t u + u \partial_x u = f, \quad f = \alpha^2 x, \quad u_0(x) = 0,$$

где сделали замену $\varphi = \alpha^2$. Сначала находим

$$\ddot{x} - \alpha^2 x = 0, \quad \Rightarrow \quad x = x_0 \operatorname{ch}(\alpha t) + \frac{\dot{x}_0}{\alpha} \operatorname{sh}(\alpha t).$$

Находим, что $\dot{x}_0 = u_0(x_0) = 0$, а значит

$$\dot{x} = \alpha x_0 \operatorname{sh}(\alpha t) = \alpha x \operatorname{th}(\alpha t).$$

При $\varphi = -\alpha^2$ уравнение изменится на $\dot{x} = -\alpha x \operatorname{tg}(\alpha t)$. Итого, окончательный ответ

$$u(t, x) = \sqrt{|\varphi|} \operatorname{sign}(\varphi) x \cdot \begin{cases} \operatorname{th}(\sqrt{|\varphi|} t), & \varphi > 0; \\ \tan(\sqrt{|\varphi|} t), & \varphi < 0. \end{cases}$$

№3. 7.1.4

Аналогично решаем уравнение Хопфа с накачкой:

$$\partial_t u + u \partial_x u = f, \quad f = f_0, \quad u_0(x) = x.$$

Сначала находим

$$\ddot{x} = f_0, \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2}f_0 t^2 + \dot{x}_0 t + x_0,$$

где $\dot{x}_0 = u_0(x_0) = x_0$, а значит

$$x_0 = \frac{x - f_0 t^2/2}{t + 1}, \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = f_0 t + \dot{x}_0 = \frac{\frac{1}{2}f_0 t^2 + f_0 t + x}{t + 1},$$

таким образом искомый ответ

$$u(t, x) = \frac{\frac{1}{2}f_0t^2 + f_0t + x}{t + 1}.$$

№4. 7.1.5

Найдём решение уравнения Бюргерса с начальным условием

$$\psi_0 = \text{ch}(ax) + B \text{ch}(bx),$$

где $a < b$ и $B \ll 1$.

Для начала находим ψ , как решение диффузного уравнения:

$$\psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) \psi_0(y) dy = e^{a^2t} \text{ch}(ax) + Be^{b^2t} \text{ch}(bx).$$

Теперь находим u

$$u = -2\partial_x \ln \psi = -\frac{2\left(ae^{a^2t} \text{sh}(ax) + bBe^{b^2t} \text{sh}(bx)\right)}{e^{a^2t} \text{ch}(ax) + Be^{b^2t} \text{ch}(bx)}.$$

Заметим, что при $x \rightarrow -0$ и $t \rightarrow \infty$, система будет определяться большим шоком:

$$\begin{aligned} u(x, t) &\approx -2b^2x, & t \rightarrow \infty, x \rightarrow 0; \\ u(x, t) &\approx -2b, & x \rightarrow 0, t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

4 Неделя V

№ 8.1.5

Найдём локализованное автомодельное решение уравнения

$$\partial_t u = \partial_x(u^{-1} \partial_x u) + \partial_x u.$$

Подстановкой (11), получаем систему

$$-a - 1 = -b - a = -2b, \quad \Rightarrow \quad a = b = 1, \quad \Rightarrow \quad u(t, x) = \frac{1}{t} f\left(\frac{r}{t}\right).$$

Условие локализованности можем записать в виде

$$\int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx = \text{const}, \quad \Rightarrow \quad a = b,$$

так что можем говорить о существовании локализованного автомодельного решения.

Подстановка предполагаемого вида u в исходное уравнение даёт выражение, вида

$$f(\xi)^2 + (\xi + 1)f(\xi)f'(\xi) + f''(\xi) = \frac{f'(\xi)^2}{f(\xi)},$$

где заменили $\frac{r}{t} \stackrel{\text{def}}{=} \xi$.

Вроде бы неплохой выглядит идея посмотреть на $f(x) = 1/g(x)$, тогда

$$g(x)g''(x) - g'(x)^2 + xg'(x) + g'(x) - g(x) = 0.$$

Если внимательно на уравнение посмотреть, то можно предположить

$$g(x) = e^{\alpha x} + ax + b, \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{\alpha}, \quad b = -\frac{1 + \alpha}{\alpha},$$

но это не выглядит как что-то осмысленное.

№ 9.1.2

На интервале $(0, \infty)$ найдём резольвенту ядра $K(t, s) = \exp(t - 2s)$. Пользуясь (13), находим

$$\hat{K}^2 = \int_0^\infty K(t, p_1) K(p_1, s) dp_1 = e^{t-2s} \int_0^\infty e^{-p_1} dp_1 = e^{t-2s}, \quad \Rightarrow \quad R(t, s) = e^{t-2s} + \lambda e^{t-2s} + \dots = \frac{e^{t-2s}}{1 - \lambda},$$

что вполне соответствует факторизуемому ядру.

№ 9.1.4

Найдём решение (12) для $K = \exp(-t^2 - s^2)$ и $g(t) = t^2$. Для начала найдём резольвенту, как

$$\hat{R} = \hat{K} + \lambda \hat{K}^2 + \dots = K(t, s) + \lambda K(t, s) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2p_1^2} dp_1 + \dots = \frac{K(t, s)}{1 - \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}}}.$$

Тогда f можем найти в виде

$$f(t) = g(t) + \lambda \hat{R} g(t) = t^2 + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2 - s^2}}{1 - \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}}} s^2 ds = t^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \lambda} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2}},$$

что и является искомым решением.

№ 9.1.7

Найдём решение (12) для $K = (1 + ts)e^{-2t-s}$ и $g(t) = e^{t/2}$. Для этого находим

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{27} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{27} \end{pmatrix}, \quad \Phi = \{2, 4\}, \quad (\mathbb{1} - \lambda \hat{M})^{-1} = \frac{1}{(\lambda - 33)\lambda + 81} \begin{pmatrix} 81 - 6\lambda & 9\lambda \\ 9\lambda & -27(\lambda - 3) \end{pmatrix},$$

а значит

$$C = \frac{1}{(\lambda - 33)\lambda + 81} \{6(4\lambda + 27), 324 - 90\lambda\},$$

откуда находим выражение для $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = e^{t/2} + 6\lambda \frac{4\lambda + (54 - 15\lambda)t + 27}{(\lambda - 33)\lambda + 81} e^{-2t}.$$

№ 9.1.6

Найдём решение (12) для $K = (1 + ts)$ и $g(t) = t^2$. Для этого находим

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \Phi = \{1/3, 1/4\}, \quad (\mathbb{1} - \lambda \hat{M})^{-1} = \frac{1}{12 + \lambda(\lambda - 16)} \begin{pmatrix} -4(\lambda - 3) & 6\lambda \\ 6\lambda & -12(\lambda - 1) \end{pmatrix},$$

а значит

$$C = \frac{1}{12 + \lambda(\lambda - 16)} \left\{ \frac{\lambda}{6} + 4, 3 - \lambda \right\},$$

откуда находим выражение для $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = t^2 + \lambda \left(\frac{\lambda + 24}{6(\lambda - 16)\lambda + 72} - t \frac{\lambda - 3}{(\lambda - 16)\lambda + 12} \right).$$

5 Неделя VI**9.2.4**

Решим уравнение, вида

$$\int_0^t \varphi(t-s)s\varphi(s) ds = f(t) = t, \quad \Rightarrow \quad \varphi(p)(-\partial_p)\varphi(p) = f(p).$$

Найдём некоторое решение (хотелось бы чтобы образ затухал к 0 на ∞)

$$-\varphi\varphi' = -\frac{1}{2}(\varphi^2)' = \frac{1}{p^2}, \quad \Rightarrow \quad \varphi^2 = -2 \int \frac{1}{p^2} = \frac{2}{p}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(p) = \pm \sqrt{\frac{2}{p} + C},$$

где выбираем $C = 0$. Тогда

$$\varphi(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi t}}.$$

9.3.2

Рассмотрим сингулярное уравнение

$$\lambda\varphi(x) + \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y) dy}{y-x} = f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Решение уравнения знаем:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\lambda + i\pi} f(x) - \frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y) dy}{y - x + i\varepsilon}.$$

Замыкая в верхней полуплоскости дугу, находим

$$\varphi(x) = \frac{\pi x + \lambda}{(1 + x^2)(\pi^2 + \lambda^2)}.$$

9.3.3

Рассмотрим сингулярное уравнение

$$\text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(y)}{y - x} dy = f(x) = x,$$

для которого выполняется свойство ортогональности $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$. Тогда можем записать ответ

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi i} \left(f(x) + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(y) dy}{\sqrt{1-y^2}(y-x+i\varepsilon)} \right) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi},$$

что подходит.

6 Неделя IX

№1

Найдём обратное преобразование Меллина от функции, вида

$$\Gamma(\lambda - \beta)\Gamma(\lambda).$$

Можем замкнуть дугу налево, так как $\Gamma(\lambda) \rightarrow 0$ при $\text{Re } \lambda \rightarrow -\infty$, а также с учетом $\Gamma(\lambda) \rightarrow 0$ при $\text{Im } \lambda \rightarrow \pm\infty$.

Тогда интеграл

$$I = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(\lambda - \beta)\Gamma(\lambda)x^{-\lambda} \frac{d\lambda}{2\pi i} = \frac{2\pi i}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x^n \Gamma(-n - \beta) + x^n x^{-\beta} \Gamma(-n + \beta)),$$

сведется к сумме вычетов для $\Gamma(\lambda)$ и $\Gamma(\lambda - \beta)$, где мы учли, что

$$\text{res}_{-n} \Gamma(x) = \frac{(-1)^n}{n!},$$

это полюса первого порядка.

Немного переписывая сумму и пристально в нее вглядываясь, находим

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{\beta/2} \left(\Gamma(\beta - n) x^{\frac{\beta}{2} + n} + \Gamma(-n - \beta) x^{n - \frac{\beta}{2}} \right)}{n!} = 2x^{-\frac{\beta}{2}} K_{\beta}(2\sqrt{x}),$$

что при малых β и достаточно больших x можно переписать в виде $\frac{2\beta}{\sqrt{x}} \exp(-\sqrt{x})$.

№2

Рассмотрим обратное преобразование Меллина от функции

$$\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda + \beta)}.$$

При $\lambda \rightarrow \pm i\infty$ всё хорошо, осталось понять в какую сторону замыкать квадратик.

$$I = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda + \beta)} x^{-\lambda} \frac{d\lambda}{2\pi i}.$$

При $\lambda \rightarrow +\infty$ можем оценить выражение, как $\Gamma(\lambda + \beta) \sim \Gamma(\lambda)\lambda^{\beta}$, а значит необходимо рассмотреть

$$\frac{1}{\lambda^{\beta}} \frac{1}{x^{\lambda}} = \exp(-\lambda \ln x - \beta \ln \lambda).$$

При $x > 1$ получаем возможность замкнуть вправо, то есть вокруг области без вычетов, а значит $I = 0$ при $x > 1$.

При $x < 1$ $\ln x < 0$, а значит необходимо замыкать влево. Так получаем сумму, вида

$$I(x < 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(-n + \beta)} x^n = \frac{1}{(1-x)^{1-\beta}}.$$

№3

Найдём первые два члена в разложение по u для интеграла

$$I(u) = \int_u^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - u^2}} e^{-x}.$$

Сведем задачу к известной подстановкой $x \rightarrow x + u$, тогда

$$I(u) = e^{-u} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2ux}} e^{-x} \approx (1 - u + \frac{1}{2}u^2) \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2ux}} e^{-x} + o(u^2).$$

Знаем преобразование Меллина от e^{-x} :

$$M[e^{-x}](\lambda) = \Gamma(\lambda).$$

Аналогично находим образ $(x^2 + 2ux)^{-1/2}$:

$$M[(x^2 + 2ux)^{-1/2}](\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda-1} dx}{\sqrt{x^2 + 2ux}} = \frac{2^{\lambda-1} \Gamma(1-\lambda) \Gamma(\lambda - \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} u^{\lambda-1},$$

для $\lambda \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Тогда искомое подинтегральное произведение сведется к интегралу, вида

$$e^u I(u) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{2^{-\lambda} \Gamma(\frac{1}{2} - \lambda) \Gamma(\lambda)^2 u^{-\lambda}}{\sqrt{\pi}} \frac{d\lambda}{2\pi i} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(\lambda) \frac{d\lambda}{2\pi i},$$

который сводится к сумме вычетов (полюса второго порядка) в $\lambda = -n$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Каждый следующий вычет будет содержать фактор u^n , так что достаточно вычислить первые три вычета $n \in \{0, 1, 2\}$.

Таким образом находим

$$\begin{aligned} \text{res}_0 F(\lambda) &= -\ln(u) - \gamma + \ln(2), \\ \text{res}_{-1} F(\lambda) &= -u \left(\ln\left(\frac{1}{2}u\right) + \gamma \right), \\ \text{res}_{-2} F(\lambda) &= -\frac{3}{4}u^2 \left(\ln\left(\frac{1}{2}u\right) - \frac{1}{3} + \gamma \right). \end{aligned}$$

Собирая все вместе получаем, что сокращается первый порядок по u и тогда первые два члена разложения, дают

$$I(u) = \ln\left(\frac{2}{u}\right) - \gamma + \frac{1}{4}u^2 \left(\ln\left(\frac{2}{u}\right) - \gamma + 1 \right) + o(u^2).$$