Задание по курсу «Экспериментальная реализация концепций квантовой физики»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *15 мая 2022 г.*

1 I задание

Задача 1

Рассмотрим эрмитов оператор $\hat{A}$. По определению

$$\hat{A}\left|a\right\rangle = a\left|a\right\rangle, \qquad \left\langle a\right|\hat{A}^\dagger = \left\langle a\right|\bar{a}.$$

Домножая на $|a\rangle$, находим

$$(a-\bar{a})\langle a|a\rangle = 0, \qquad \Rightarrow \qquad a = \bar{a}, \qquad \Rightarrow \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим теперь

$$\langle a|\hat{A}\rangle b = b\langle a|b\rangle = a\langle a|b\rangle, \qquad \Rightarrow \qquad \langle a|b\rangle = 0,$$

при $a \neq b$.

Задача 2

Знаем магнитный момент

$$\mu = \frac{IS}{c} = \frac{1}{c}\frac{\omega e}{2\pi}\pi r^2 = \frac{e}{2mc}L = \mu_{\text{эл}}/2,$$

т.к. фактор Ланде для $s = 1/2$ равен $g = 2$.

Задача 3

Можем выписать операторы и найти коммутатор

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}|+\rangle\langle -| + \frac{\hbar}{2}|-\rangle\langle +|, \qquad \hat{S}_y = -\frac{i\hbar}{2}|+\rangle\langle -| + \frac{i\hbar}{2}|-\rangle\langle +|,$$

тогда

$$[\hat{S}_x,\, \hat{S}_y] = \frac{i\hbar^2}{2}|+\rangle\langle +| - \frac{i\hbar^2}{2}|-\rangle\langle -| = i\hbar\hat{S}_z \neq 0,$$

что вполне логично.

Задача 4

Рассмотрм эрмитов оператор $\hat{A}$ с базисом $|a_i\rangle$, введем оператор $\hat{B}$:

$$\hat{B} = \prod_i (\hat{A} - a_i),$$

и докажем, что $\hat{B}\left|b\right\rangle = 0\ \forall \left|b\right\rangle \in \mathcal{H}$.

Знаем, что

$$\left|b\right\rangle = \sum_i c_i\left|a_i\right\rangle, \qquad \Rightarrow \qquad \hat{B}\left|b\right\rangle = \sum_i c_i\hat{B}\left|a_i\right\rangle = \sum_i c_i\prod_k(a_i - a_k)\left|a_i\right\rangle = 0,$$

что и требовалось доказать.

Задача 5

Знаем, что

$$\left|S_x, +\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|+\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|-\right\rangle, \qquad \left|S_x, -\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|+\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|-\right\rangle.$$

Ну, выражаем в обратную сторону
$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|S_x,+\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|S_x,-\right\rangle, \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|S_x,+\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|S_x,-\right\rangle.$$
Подставляя, находим
$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\left(|S_x,+\rangle\langle S_x,-| + |S_x,-\rangle\langle S_x,+|\right).$$

Задача 6

Знаем оператор
$$\hat{S}_\varphi = \frac{\hbar}{2}\left(e^{-i\varphi}|+\rangle\langle-| + e^{i\varphi}|-\rangle\langle+|\right).$$
Найдём его собственный вектор
$$\hat{S}_\varphi\left|\kappa\right\rangle = \lambda\left|\kappa\right\rangle, \qquad \kappa = \alpha_+\left|+\right\rangle + \alpha_-\left|-\right\rangle, \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{\hbar}{2},$$
тогда собственные векторы
$$|S_\varphi,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|+\right\rangle + \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}\left|-\right\rangle, \qquad |S_\varphi,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|+\right\rangle - \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}\left|-\right\rangle.$$

2 II задание

Задача 1

Рекуррентный путь. Для $\hat{F} = \hat{S} + \hat{I}$ найдём базис собственных функций в терминах $\left|S, m_S\right\rangle\left|I, m_I\right\rangle \overset{\text{def}}{=} \left|m_S, m_I\right\rangle_{SI}$. Всего векторов будет $(2S+1)(2I+1) = 6$. Два вектора нам известны из однозначного соответствия
$$\hat{F}_\pm = \hat{S}_\pm + \hat{I}_\pm, \quad (\hat{S}_+ + \hat{I}_+)\left|\tfrac{1}{2},1\right\rangle_{SI} = 0, \quad \Rightarrow \quad \left|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\right\rangle_F = \left|\tfrac{1}{2},1\right\rangle_{SI}.$$
Аналогично находим
$$\left|\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}\right\rangle_F = \left|-\tfrac{1}{2},-1\right\rangle_{SI}.$$
Далее понижающим оператором $\hat{F}_-$
$$\hat{J}_\pm\left|j,m\right\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm1)}\left|j,m\pm1\right\rangle,$$
находим
$$F_-\left|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\right\rangle_F = \sqrt{3}\left|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle_F = \left|-\tfrac{1}{2},1\right\rangle_{SI} + \sqrt{2}\left|\tfrac{1}{2},0\right\rangle_{SI}, \quad \Rightarrow \quad \left|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle_F = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left|-\tfrac{1}{2},1\right\rangle_{SI} + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left|\tfrac{1}{2},0\right\rangle_{SI}.$$
Единственный ортогональный вектор $|a\rangle$: $\hat{F}_+\left|a\right\rangle = 0$, а значит соответствует $\left|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle_F$:
$$\left|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle_F = -\sqrt{\tfrac{2}{3}}\left|-\tfrac{1}{2},1\right\rangle_{SI} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left|\tfrac{1}{2},0\right\rangle.$$
Осталось найти остальные векторы через F_-:
$$\left|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\right\rangle_F = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left|\tfrac{1}{2},-1\right\rangle_{SI} + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left|-\tfrac{1}{2},0\right\rangle_{SI},$$
$$\left|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right\rangle_F = -\sqrt{\tfrac{2}{3}}\left|\tfrac{1}{2},-1\right\rangle_{SI} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left|-\tfrac{1}{2},0\right\rangle_{SI}.$$

Явный вид. Вообще можем написать явное выражение для определения коэффициентов разложения:
$$\left|J,M\right\rangle = \sum_{m_A,m_B}\left|j_A,m_A\right\rangle\left|j_B,m_B\right\rangle C^{JM}_{j_A,m_A;j_B,m_B},$$
где $C^{JM}_{j_A,m_A;j_B,m_B}$ – коэффициенты Клебша-Гордана. Можем выразить их в виде
$$C^{JM}_{j_A,m_A;j_B,m_B} = \langle j_A,m_A;j_B;m_B|J,M\rangle = (-1)^{j_A+j_B+m}\sqrt{2J+1}\begin{pmatrix} j_A & j_B & J \\ m_A & m_B & -M \end{pmatrix},$$
где последний множитель – $3j$-символы Вигнера. Явный вид:
$$C^{JM}_{j_A,m_A;j_B,m_B} = \sqrt{2J+1}\sqrt{\Delta_{j_A j_B J}}\sqrt{\frac{(j_A+m_A)!(J-M)!}{(j_A-m_A)!(j_B+m_B)!(j_B-m_B)!(J+M)!}}\times$$
$$\times\sum_s^J \frac{(-1)^{j_A+m_B-s}(J+s)!(j_B+s-m_A)!}{(J-s)!(s-m_A-m_B)!(s-j_A+j_B)!(j_A+j_B+s+1)!},$$

где суммирование идёт по $s = \max(m_A + m_B,\ j_A - j_B)$, а $\Delta_{j_A j_B j}$:

$$\Delta_{j_A j_B J} = \frac{(j_A + j_B - J)!(j_B + J - j_A)!(J + j_A + j_B + 1)!}{(j_A - j_B + J)!},$$

что при вычисление даёт то же самое, например:

$$C^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2};1,1} = -\sqrt{\frac{2}{3}}, \qquad C^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2};1,0} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

что восстанавливает $\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle_F$.

Энергетические сдвиги. Найдём добавку спин-спинового взаимодействия:

$$\hat{H}_{SI} = \hbar\omega_{\text{hf}} \hat{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{I}} = \frac{\hbar\omega_{\text{hf}}}{2}\left(F^2 - S^2 - I^2\right) = \frac{\hbar\omega_{\text{hf}}}{2}\left(F(F+1) - \frac{11}{4}\right).$$

Значит состояния $\left|\frac{3}{2}, \ldots\right\rangle_F$ сдвинуты на $\frac{1}{2}\hbar\omega_{\text{SI}}$, а состояния $\left|\frac{1}{2}, \ldots\right\rangle_F$ сдвинуты на $-\hbar\omega_{\text{hf}}$ относительно невозмущенного состояния.

Задача 2

Знаем, что

$$\hat{H} = \hbar\omega_{\text{hf}} \hat{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{I}} + \hbar\omega_{\text{L}} \hat{S}_z.$$

Найдём коммутаторы $[\hat{H}, \hat{F}^2]$ и $[\hat{H},\ \hat{F}_z]$:

$$\hat{F}^2 = S^2 + I^2 + 2\,\hat{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{I}}, \qquad \Rightarrow \qquad [\hat{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{I}}, \hat{F}^2] = 0.$$

Ненулевой вклад даст только $\hat{S}_z$:

$$[\hat{S}_z, \hat{F}^2] = 2[\hat{S}_z,\ \hat{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{I}}] = 2i\hbar\left(\hat{I}_x\hat{S}_y - \hat{I}_y\hat{S}_x\right), \qquad \Rightarrow \qquad [\hat{H},\ \hat{F}^2] = 2i\hbar^2\omega_{\text{L}}\left(\hat{I}_x\hat{S}_y - \hat{I}_y\hat{S}_x\right).$$

Для второго комутатора ненулевой вклад может быть только от $\hat{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{I}}$:

$$[\hat{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{I}}, \hat{S}_z + \hat{I}_z] = [\hat{S}_x\hat{I}_x + \hat{S}_y\hat{I}_y, \hat{S}_z + \hat{I}_z] = 0, \qquad \Rightarrow \qquad [\hat{H},\ \hat{F}_z] = 0,$$

где мы воспользовались коммутационным соотношением $[j_i, j_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}j_k$.

3 III задание

Задача №1. Частота Раби

Рассмотрим переменное поле, вида

$$\boldsymbol{B}(t) = B_0\boldsymbol{z}_0 + B_\perp\boldsymbol{x}_0\cos(\omega t) + B_\perp\boldsymbol{y}_)\sin\omega t,$$

тогда гамильтониан взаимодействия

$$\hat{V} = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{B} = \Big/\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{g|e|\hbar}{2m_e c}\hat{\boldsymbol{s}}\Big/, \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = -\frac{g}{2}\frac{eB_\perp}{m_e c}.$$

Задача №2. Время жизни

Рассмотрим состояние $|\psi_{210}\rangle$. Время жизни можем найти через Γ:

$$\Gamma = |\boldsymbol{d}_{\text{eg}}|^2 \frac{\omega^3}{\hbar c^3}\frac{4}{3} = \frac{4}{3}\frac{\alpha E_{\text{eg}}^3}{\hbar^3 c^2} a^2 |\varkappa|^2, \qquad \varkappa = \langle\psi_{100}|\tfrac{z}{a}|\psi_{210}\rangle.$$

так как для x и для y соответствующие матричные элементы равны нулю.

Знаем волновые функции состояний, тогда

$$\psi_{100} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} e^{-\frac{r}{a}}}{\sqrt{\pi}}, \qquad \psi_{210} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} e^{-\frac{r}{2a}}\cos(\theta)}{4\sqrt{2\pi}}, \qquad \Rightarrow \qquad \varkappa = \iiint \frac{r^3 e^{-\frac{3r}{2a}}\sin(\theta)\cos^2(\theta)}{4\sqrt{2}\pi a^4}\,dr\,d\theta\,d\varphi = \frac{16\sqrt{2}}{81}.$$

Так как рассматриваем переход с $n=2$ к $n=1$, то $E_{\text{eg}} = -\text{Ry}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \hbar\omega = 10.2$ эВ, что и определяет длину волны перехода $\lambda = 121.6$ нм, серия Лаймана.

Собирая всё вместе, находим

$$\frac{1}{2\pi\Gamma} = 1.5 \text{ нс},$$

что и является временем жизни уровня.

Задача №3,4. Электродипольный переход

Выбор состояния. Снова посмотрим на $\psi(\boldsymbol{r})$ атома водорода:

$$\psi_{100} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} e^{-\frac{r}{a}}}{\sqrt{\pi}}, \quad \psi_{21-1} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} \sin(\theta) e^{-\frac{r}{2a} - i\varphi}}{8\sqrt{\pi}}, \quad \psi_{210} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} e^{-\frac{r}{2a}} \cos(\theta)}{4\sqrt{2\pi}}, \quad \psi_{211} = \psi_{21-1}^{\dagger}.$$

Найдём матричные элементы для возмущения $\hat{H}_\mathrm{I} = -\hat{\boldsymbol{d}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_+ E_0 e^{-i\omega t}$, где $\hat{\boldsymbol{d}} = -|e|\hat{\boldsymbol{r}}$ и $\boldsymbol{\sigma}_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\, i,\, 0)$. Также воспользовались электродипольным приближением, считая $\boldsymbol{E}(z) \approx \boldsymbol{E}(0)$. Тогда

$$\langle \psi_{100} | \hat{\boldsymbol{d}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_+ | \psi_{211} \rangle = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; \frac{r^3 e^{-\frac{3r}{2a}} \sin^3(\theta)}{8\sqrt{2}\pi a^3} = \frac{16\sqrt{2}}{81} a|e|,$$

$$\langle \psi_{100} | \hat{\boldsymbol{d}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_+ | \psi_{210} \rangle = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; \frac{r^3 \sin^2(\theta) \cos(\theta) e^{-\frac{3r}{2a} + i\varphi}}{8\pi a^3} = 0,$$

$$\langle \psi_{100} | \hat{\boldsymbol{d}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_+ | \psi_{21-1} \rangle = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; -\frac{r^3 \sin^3(\theta) e^{-\frac{3r}{2a} + 2i\varphi}}{8\sqrt{2}\pi a^3} = 0,$$

Таким образом переход происходит в $l_z = 1$.

Частота Раби. Теперь можем рассмотреть двухуровневую систему с $|0\rangle = |\psi_{100}\rangle$ и $|1\rangle = |211\rangle$, гамильтониан которой можем переписать в виде

$$\hat{H} = \hbar\omega |1\rangle\langle 1| + \frac{\hbar\gamma}{2} |1\rangle\langle 0| e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$$

где перемешивание уровней как раз и обусловлено электродипольным переходом:

$$\hat{H}_\mathrm{I} = \sum_{k,j=0,1} |k\rangle \langle k | \hat{H}_I | j\rangle \langle j|\,,$$

откуда находим частоту Раби:

$$\gamma = -\frac{2^{11/2}}{3^4} \frac{aeE_0}{\hbar},$$

где a – радиус Бора.