Задание по курсу
«Уравнения математической физики»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *28 марта 2022 г.*

Содержание

ТеорМин №1

Излучение. Волновое уравнение с источником:

$$(\partial_t^2 - c^2\nabla^2)u = \chi, \tag{1}$$

с законом дисперсии $\varpi = cq$.

Функция Грина оператора $\partial_t^2 - c^2\nabla^2$:

$$G(t, r) = \frac{\theta(t)}{4\pi cr}\delta(r - ct),$$

а значит выражение для поля:

$$u(t, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi c^2}\int \frac{d^3 r_1}{R}\ \chi(t - R/c, \boldsymbol{r}_1), \tag{2}$$

где $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|$.

Уравнение диффузии. Уравнение диффузии:

$$\left(\partial_t - \nabla^2\right) u = 0, \tag{3}$$

решение которого может быть найдено в виде:

$$u(t, \boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dy_1 \ldots dy_d}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^2}{4t}\right) u_0(\boldsymbol{y}). \tag{4}$$

Асимтотики могут быть найдены в виде

$$u(t, \boldsymbol{x}) \approx \frac{A}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{4t}\right), \qquad A = \int_{\mathbb{R}^d} dy_1 \ldots dy_d\ u_0(\boldsymbol{y}). \tag{5}$$

При $A = 0$ асимтотика будет соответствовать

$$u(t, \boldsymbol{x}) \approx \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{x}}{(4\pi t)^{d/2+1}} \exp\left(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{4t}\right), \qquad \bar{B} = 2\pi\int_{\mathbb{R}^d} dy_1 \ldots dy_d\ \boldsymbol{y}\, u_0(\boldsymbol{y}), \tag{6}$$

где асимтотики имеют место при $t \gg l^2$, l – масштаб на котором локализовано поле.

Уравнение диффузии (с накачкой). При наличии правой части:

$$(\partial_t - \nabla^2)u = \varphi,$$

можем найти функцию Грина для оператора $\partial_t - \nabla^2$

$$u(t, \boldsymbol{x}) = \int G(t - \tau, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\varphi(t, \boldsymbol{y})\, d\tau\, d^d\boldsymbol{y}, \qquad G(t, \boldsymbol{r}) = \frac{\theta(t)}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right).$$

Меленные переменные. Рассмотрим прозвольное возмущение гармонического осциллятора:

$$\left(\partial_t^2 + \omega_0^2\right) x(t) = \varepsilon f(t, x, \dot{x}). \tag{7}$$

Приближенно (до $o(\varepsilon)$) можем методом Боголюбова-Крылова найти решение в виде

$$x(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \tag{8}$$

где зависимость от времени амплитуды и фазы определяестся уравнениями

$$\partial_t A(t) = \frac{1}{2\pi\omega_0}\int_{\omega_0 t - \pi}^{\omega_0 t + \pi} f(\tau, x, \dot{x})\cos\left(\omega_0\tau + \varphi(t)\right)\ d(\omega_0\tau), \tag{9}$$

$$\partial_t \varphi(t) = \frac{-1}{2\pi A\omega_0}\int_{\omega_0 t - \pi}^{\omega_0 t + \pi} f(\tau, x, \dot{x})\sin(\omega_0\tau + \varphi(t))\, d(\omega_0\tau). \tag{10}$$

Уравнение Хопфа. В акустике естественно возникает уравнение Хопфа:

$$\partial_t u + u\,\partial_x u = 0.$$

Решение может быть найдено в виде

$$x(t) = x_0 + u_0(x_0)t, \qquad u(x(t), t) = c(x_0) = u_0(x_0).$$

где сначала разрешаем уравнение $c = u_0(x_0)$ относительно $c = c(x_0)$, а потом разрешаем уравнение на $x(t)$ относительно $c = c(x(t), t)$. Зная, что $u(x(t), t) = c(x(t), t)$, находим $u(x, t) = c(x, t)$.

Уравнение Хопфа (с накачкой). Добавим к уравнению накачку:

$$\partial_t u + u\,\partial_x u = f(x, t).$$

Система может быть сведена к

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, x(t)) \\ \dot{x} = u(t, x(t)) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} = f(x, t), \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(t, x_0, \dot{x}_0),$$

где $\dot{x}_0 = u_0(x_0)$. Сначала разрешаем уравнение $x(t)$ относительно $x_0 = x_0(t,x)$, а потом подставляем этот x_0 в $u(t,x) = \dot{x}(t, x_0(t,x))$, что и является решением исходной задачи.

Уравнение Бюргерса. Добавим диссипацию в уравнение Хопфа:

$$\partial_t u + u\,\partial_x u = \partial_x^2 u,$$

так получим уравнение Бюргерса.

Заметим, что преобразование Коула-Хопфа

$$\psi = \exp\left(-\tfrac{1}{2}h\right), \qquad u = \partial_x h, \qquad \Rightarrow \qquad (\partial_t - \partial_x^2)\psi = 0.$$

Имея начальные условия для $\psi_0(x)$, можем найти

$$\psi(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \psi_0(y) \frac{\theta(t)}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) dy,$$

откуда находим решение

$$u(t,x) = -2\partial_x \ln\psi(t,x).$$

ТеорМин №2

Автомодельные решения. Если уравнения вида $\hat{L}\,u(\boldsymbol{r},t) = \ldots$ – однородно и изотропно, то может помочь автомодельная подстановка:

$$u(t,\boldsymbol{r}) = \frac{1}{t^a} f\left(\tfrac{r}{t^b}\right) \qquad : \qquad t \to \lambda t \quad \Rightarrow \quad u \to \lambda^{-a} u,\ r \to \lambda^b r. \tag{11}$$

Восстановить a в общем виде нельзя, но требуя, например, локальности решения $\int_{\mathbb{R}^n} u\,dV = \text{const}$ можем иногда найти и a.

Уравнение Фредгольма. Есть уравнение Фредгольма I рода:

$$\int_a^b ds\ K(t,s) f(s) = g(t),$$

и уравнение Фредгольма II рода:

$$f(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t,s) f(s), \qquad \Leftrightarrow \qquad f = g + \lambda \hat{K} f, \tag{12}$$

где мы ввели интегральный оператор $\hat{K} f = \int_a^b ds\ K(t,s) f(s)$. Решение можем найти в виде

$$f = \frac{1}{1 - \lambda\hat{K}}\, g = \left(\mathbb{1} + \lambda\hat{R}\right) g, \qquad \hat{R} \overset{\text{def}}{=} \hat{K} + \lambda\hat{K}^2 + \ldots$$

В терминах интегрирования резульвента $R(t,s)$ выражается, как

$$R(t,s) = K(t,s) + \lambda\int_a^b dp_1\ K(t,p_1)K(p_1,s) + \lambda^2\int_a^b dp_1 \int_a^b dp_2\ K(t,p_1)K(p_1,p_2)K(p_2,s) + \ldots \tag{13}$$

1 Неделя I

№ 4.1.6

Найдём решение волнового уравнения (1) для точечного гармонческого источника

$$\chi = \cos(\omega t)\delta(\boldsymbol{r}).$$

Подставляя ξ в (2), находим

$$u(t,\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi c^2}\int \frac{d^3 r_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}\cos(\omega t - \omega|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|/c)\delta(\boldsymbol{r}_1) = \frac{1}{4\pi c^2}\frac{\cos\left(\omega(t-\frac{r}{c})\right)}{r}.$$

№ 4.1.7

Найдём значение функции Грина при $r=0$ для оператора $\partial_t^2 + \nabla^4$. Для начала перейдём к Фурье образу

$$\tilde{G}(t,\boldsymbol{q}) = \int d^3\boldsymbol{x}\; e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} G(t,\boldsymbol{x}), \qquad \Rightarrow \qquad \left(\partial_t^2 + q^4\right)\tilde{G} = \delta(t).$$

Решение этого уравнение известно[1]:

$$\tilde{G}(t) = \theta(t)\frac{1}{q^2}\sin\left(q^2 t\right).$$

Осталось найти

$$G(t,0) = \theta(t)\int\frac{d^3\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\frac{\sin(q^2 t)}{q^2} = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^\infty \sin\left(q^2 t\right) = \frac{1}{8\sqrt{2}\pi^{5/2}}\cdot\frac{\theta(t)}{\sqrt{t}}.$$

№ 4.2.2

Найдём решение одномерного дифузионного уравнения для

$$\left(\partial_t - \partial_x^2\right)u = 0, \qquad u_0(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right).$$

Точное решение. Воспользуемся (4), тогда

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t} - \frac{y^2}{2l^2}\right)dy.$$

Выделяя полный квадрат, находим, что

$$\frac{(x-y)^2}{4t} + \frac{y^2}{2l^2} = \left(\sqrt{\frac{1}{2l^2}+\frac{1}{4t}}\,y - \frac{x}{4t\sqrt{\frac{1}{2l^2}+\frac{1}{4t}}}\right)^2 + \frac{x^2}{2l^2+4t},$$

а значит

$$u(t,x) = \frac{l}{\sqrt{l^2+2t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2l^2+4t}\right).$$

Асимптотика. Так как фунция u_0 симметрична, то через (5) находим

$$A = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx = l\sqrt{2\pi}, \qquad \Rightarrow \qquad u(t,x) \approx \frac{l}{\sqrt{2t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right),$$

что является асимптотикой точного решения при $t \gg l^2$.

№ 4.2.3

Найдём асимтотическое поведение решение одномерного диффузного уравнения (3) для различных начальных условий.

1. Рассмотрим

$$u_0(x) = x\exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right).$$

В силу нечетности функции, через (6), находим

$$B = 2\pi\int_{\mathbb{R}} x^2\exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right) = -4\pi l^2\;\partial_\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2/2l^2}\,dx = -4\pi l^2\sqrt{2\pi}l\;\partial_\alpha\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = l^3(2\pi)^{3/2},$$

[1] Конпект, (1.11).

а значит искомая асимптотика

$$u(t,x) \approx \left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^3 \frac{xe^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}.$$

2. Рассмотрим

$$u_0(x) = \exp\left(-\frac{|x|}{l}\right).$$

В силу четности функции, через (5), находим

$$A = 2\int_0^\infty e^{-x/l}\,dx = 2l.$$

Тогда искомая асимптотика

$$u(t,x) \approx \frac{l}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{t}}.$$

3. Рассмотрим

$$u_0(x) = x\exp\left(-\frac{|x|}{l}\right).$$

В силу нечетности функции, через (6), находим

$$B = 4\pi\int_0^\infty x^2 \exp\left(-\frac{|x|}{l}\right)\,dx = 4\pi l^2\ \partial_\alpha^2 \int_0^\infty e^{-\alpha x/l}\,dx = 2\pi l^2 \partial_\alpha^2\left(\frac{l}{\alpha}\right) = 8\pi l^3,$$

а значит

$$u(t,x) \approx \frac{l^3}{\sqrt{\pi}}\frac{xe^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}.$$

4. Рассмотрим

$$u_0(x) = \frac{1}{x^2+l^2}.$$

В силу четности функции, через (5), находим

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+l^2}\,dx = 2\pi i\frac{1}{2il} = \frac{\pi}{l},$$

тогда искомая асимптотика

$$u(t,x) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2l}\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{t}}.$$

5. Рассмотрим

$$u_0(x) = \frac{x}{(x^2+l^2)^2}.$$

В силу четности функции, через (6), находим

$$B = 2\pi\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{(x^2+l^2)^2}\,dx = 4\pi i\lim_{x\to il}\left(\frac{x^2}{(x+il)^2}\right)' = \frac{\pi^2}{l}.$$

Тогда искомая асимптотика

$$u(t,x) = \frac{\sqrt{\pi}}{8l}\frac{xe^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}.$$

2 Неделя II

№1. 6.2.2

Решим уравнение (7) для $f(\dot{x}) = -\varepsilon\dot{x}^3$. Подставляя $f(t)$ в (9) и (10), находим уравнения на амплитуду и фазу:

$$\dot{A} = -\frac{3}{8}\varepsilon A^3\omega_0^2, \qquad \dot{\varphi} = 0,$$

откуда сразу находим $\varphi(t) = \varphi_0$ и

$$\frac{dA}{A^3} = \left(-\frac{3}{8}\varepsilon\omega_0^2\right)\,dt, \quad \Rightarrow \quad A = \frac{A_0}{\sqrt{1+\frac{3}{4}A_0\varepsilon\omega_0^2 t}},$$

а значит искомое решение

$$x(t) = \frac{A_0}{\sqrt{1+\frac{3}{4}A_0\varepsilon t}}\sin(t+\varphi_0).$$

№2. 6.2.6

Решим уравнение (7) для $f(t) = \cos t$. Знаем, что точное решение

$$x(t) = A\sin(t+\varphi_0) + \frac{\varepsilon t}{2}\sin(t).$$

Однако решим методом медленных амплитуд.

Подставляя $f(t)$ в (9) и (10), находим уравнения на амплитуду и фазу:

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = \frac{\varepsilon}{2}\cos(\varphi(t)), \\ \dot{\varphi}(t) = \frac{-\varepsilon}{2A(t)}\sin(\varphi(t)), \end{cases}$$

которые приводят к двум случаям.

Нулевая фаза. При $\varphi(0) \overset{\text{def}}{=} \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ видим, что $\dot{\varphi} = 0$, а значит $\varphi(t) = \text{const}$. Тогда уравнение на амплитуду легко интегрируется, и находим (считая $A(0) \overset{\text{def}}{=} A_0$)

$$A(t) = A_0 + \frac{\varepsilon}{2}\cos(\varphi_0)t,$$

что прекрасно описывает резонанс:

$$x(t) = \left(A_0 + \frac{\varepsilon}{2}\cos(\varphi_0)t\right)\sin(t), \qquad \varphi_0 = 0.$$

Ненулевая фаза. Разделим два уравнения друг на друга:

$$\frac{dA}{d\varphi} = -\frac{A}{\operatorname{tg}\varphi}, \quad\Rightarrow\quad \log A = -\log\sin\varphi + \tilde{c}, \quad\Rightarrow\quad A = A_0\frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi},$$

таким образом нашли удобный первый интеграл системы.

Подставляя в выражение для $\dot{\varphi}$ находим

$$\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{2}\sin^2(\varphi), \quad\Rightarrow\quad \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = -\frac{\varepsilon}{2}\,dt, \quad\Rightarrow\quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_0} + \frac{\varepsilon t}{2}}\right).$$

Теперь нужно подставить $\varphi(t)$ в выражение для $\dot{A}$ и разложить по ε:

$$\cos\operatorname{arctg} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad\Rightarrow\quad \dot{A} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{t\varepsilon}{2}+\frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi_0)}\right)^2}} = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi_0}} + o(\varepsilon),$$

а значит искомая амплитуда

$$A(t) = A_0 + \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi_0}}\frac{\varepsilon}{2}t.$$

Итого находим (при $\varphi_0 \neq \pi/2$)

$$x(t) = \left(A_0 + \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi_0}}\frac{\varepsilon t}{2}\right)\sin\left(t + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_0}+\frac{\varepsilon t}{2}}\right)\right).$$

№3. 6.2.8

Решим уравнение (7) для $f(t) = \kappa\cos t + (1-x^2)\dot{x}$. Подставляя $f(t)$ в (9) и (10), находим уравнения на амплитуду и фазу:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\kappa\cos\varphi + A\left(1-\frac{A^2}{4}\right)\right), \qquad \dot{\varphi} = -\frac{1}{2A}\varepsilon\kappa\sin(\varphi).$$

Считая κ тоже малым параметром, решаем, аналогично семинару, уравнение с разделяющимися переменными:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\varepsilon A\left(1-\frac{A^2}{4}\right), \quad\Rightarrow\quad A(t) = 2\frac{A_0}{\sqrt{4e^{-\varepsilon t} + A_0^2\left(1-e^{-\varepsilon t}\right)}},$$

что похоже на правду, так как всё также

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = 2,$$

то есть сохраняется предельный цикл на плоскости $\{x, \dot{x}\}$.

Для фазы можем найти решение при $t \to \infty$:

$$\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon\kappa}{2}\sin(\varphi)\sqrt{\frac{4 + A_0^2(e^{\varepsilon t} - 1)}{4A_0^2 e^{\varepsilon t}}} \approx -\frac{\varepsilon\kappa}{4}\sin(\varphi), \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\varphi(t)\right) = \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\varphi_0\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon\kappa}{4}t\right).$$

Возможно даже корректным будет выражение

$$\varphi(t) = 2\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\varphi_0\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon\kappa}{4}t\right)\right),$$

получается малая накачка определяет асимптотику на фазы на бесконечности.

Сама асимптотика будет иметь вид

$$\varphi(t \to \infty) = 2\operatorname{arcctg}\left(e^{\frac{\varepsilon\kappa}{4}t}\operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right).$$

3 Неделя III

№1. 7.1.2

Найдём решение уравнения Хопфа с начальными условиями $u = 0$ при $x < 0$ и $u = -c_1 x + c_2 x^2$ при $x > 0$. Для начала считаем

$$\begin{cases} c(x_0) = -c_1 x_0 + c_2 x_0^2 \\ x(t) = x_0(c) + ct \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x_0(c) = \frac{c_1 \pm \sqrt{c_1^2 + 4cc_2}}{2c_2},$$

где выбор знака не принципиален. Подставляя x_0 в уравнение на $x(t)$, выражаем c:

$$c = \frac{c_1}{2c_2^3 t^2}\left(\pm\sqrt{c_1\left(c_1(c_2 t - 1)^2 + 4c_2^2 tx\right)} - c_1 c_2 t + c_1 + 2c_2^2 tx\right),$$

где $+$ не удоволетворяет $c(t = 0, x) = u_0(x)$, а значит

$$u(x,t) = \frac{c_1}{2c_2^3 t^2}\left(-\sqrt{c_1\left(c_1(c_2 t - 1)^2 + 4c_2^2 tx\right)} - c_1 c_2 t + c_1 + 2c_2^2 tx\right).$$

Стоит заметить, что до точки $x^* = c_1/c_2$ верно $u_0'(x) < 0$, а значит решение существует только до некоторого t^*.

№2. 7.1.3

Теперь решим уравнение Хопфа с накачкой:

$$\partial_t u + u\partial_x u = f, \qquad f = \alpha^2 x, \quad u_0(x) = 0,$$

где сделали замену $\varphi = \alpha^2$. Сначала находим

$$\ddot{x} - \alpha^2 x = 0, \qquad \Rightarrow \qquad x = x_0\operatorname{ch}(\alpha t) + \frac{\dot{x}_0}{\alpha}\operatorname{sh}(\alpha t).$$

Находим, что $\dot{x}_0 = u_0(x_0) = 0$, а значит

$$\dot{x} = \alpha x_0\operatorname{sh}(\alpha t) = \alpha x\operatorname{th}(\alpha t).$$

При $\varphi = -\alpha^2$ уравнение изменится на $\dot{x} = -\alpha x\operatorname{tg}(\alpha t)$. Итого, окончательный ответ

$$u(t,x) = \sqrt{|\varphi|}\operatorname{sign}(\varphi)\ x \cdot \begin{cases} \operatorname{th}(\sqrt{|\varphi|}\ t), & \varphi > 0; \\ \tan(\sqrt{|\varphi|}\ t), & \varphi < 0. \end{cases}$$

№3. 7.1.4

Аналогично решаем уравнение Хопфа с накачкой:

$$\partial_t u + u\partial_x u = f, \qquad f = f_0, \quad u_0(x) = x.$$

Сначала находим

$$\ddot{x} = f_0, \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = \frac{1}{2}f_0 t^2 + \dot{x}_0 t + x_0,$$

где $\dot{x}_0 = u_0(x_0) = x_0$, а значит

$$x_0 = \frac{x - f_0 t^2/2}{t+1}, \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x} = f_0 t + \dot{x}_0 = \frac{\frac{1}{2}f_0 t^2 + f_0 t + x}{t+1},$$

таким образом искомый ответ

$$u(t,x) = \frac{\frac{1}{2}f_0t^2 + f_0t + x}{t+1}.$$

№4. 7.1.5

Найдём решение уравнения Бюргерса с начальным условием

$$\psi_0 = \operatorname{ch}(ax) + B\operatorname{ch}(bx),$$

где $a < b$ и $B \ll 1$.

Для начала находим ψ, как решение диффузного уравнения:

$$\psi(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right)\psi_0(y)\,dy = e^{a^2t}\operatorname{ch}(ax) + Be^{b^2t}\operatorname{ch}(bx).$$

Теперь находим u

$$u = -2\partial_x \ln\psi = -\frac{2\left(ae^{a^2t}\operatorname{sh}(ax) + bBe^{b^2t}\operatorname{sh}(bx)\right)}{e^{a^2t}\operatorname{ch}(ax) + Be^{b^2t}\operatorname{ch}(bx)}.$$

Заметим, что при $x \to -0$ и $t \to \infty$, система будет определяться большим шоком:

$$u(x,t) \approx -2b^2x, \qquad t \to \infty,\ x \to 0;$$
$$u(x,t) \approx -2b, \qquad x \to 0,\ t \to \infty.$$

4 Неделя V

№ 8.1.5

Найдём локализованное автомодельное решение уравнения

$$\partial_t u = \partial_x(u^{-1}\partial_x u) + \partial_x u.$$

Подстановкой (11), получаем систему

$$-a-1 = -b-a = -2b, \qquad \Rightarrow \qquad a = b = 1, \qquad \Rightarrow \qquad u(t,x) = \frac{1}{t}f\left(\tfrac{r}{t}\right).$$

Условие локализованности можем записать в виде

$$\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\,dx = \text{const}, \qquad \Rightarrow \qquad a = b,$$

так что можем говорить о существование локализованного автомодельного решения.

Подставновка предполагаемого вида u в исходное уравнение даёт выражение, вида

$$f(\xi)^2 + (\xi+1)f(\xi)f'(\xi) + f''(\xi) = \frac{f'(\xi)^2}{f(\xi)},$$

где заменили $\frac{r}{t} \overset{\text{def}}{=} \xi$.

Вроде бы неплохой выглядит идея посмотреть на $f(x) = 1/g(x)$, тогда

$$g(x)g''(x) - g'(x)^2 + xg'(x) + g'(x) - g(x) = 0.$$

Если внимательно на уравнение посмотреть, то можно предположить

$$g(x) = e^{\alpha x} + ax + b, \qquad \Rightarrow \qquad a = -\frac{1}{\alpha}, \quad b = -\frac{1+\alpha}{\alpha},$$

но это не выглядит как что-то осмысленное.

№ 9.1.2

На интервале $(0,\infty)$ найдём резольвенту ядра $K(t,s) = \exp(t-2s)$. Пользуясь (13), находим

$$\hat{K}^2 = \int_0^\infty K(t,p_1)K(p_1,s)\,dp_1 = e^{t-2s}\int_0^\infty e^{-p_1} = e^{t-2s}, \qquad \Rightarrow \qquad R(t,s) = e^{t-2s} + \lambda e^{t-2s} + \ldots = \frac{e^{t-2s}}{1-\lambda},$$

что вполне соответствует факторизуемому ядру.

№ 9.1.4

Найдём решение (12) для $K = \exp\left(-t^2 - s^2\right)$ и $g(t) = t^2$. Для начала найдём резольвенту, как

$$\hat{R} = \hat{K} + \lambda \hat{K}^2 + \ldots = K(t,s) + \lambda K(t,s) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2p_1^2}\, dp_1 + \ldots = \frac{K(t,s)}{1 - \lambda\sqrt{\frac{\pi}{2}}}.$$

Тогда f можем найти в виде

$$f(t) = g(t) + \lambda \hat{R}\, g(t) = t^2 + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2-s^2}}{1-\lambda\sqrt{\frac{\pi}{2}}} s^2\, ds = t^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \lambda} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2}},$$

что и является искомым решением.

№ 9.1.7

Найдём решение (12) для $K = (1+ts)e^{-2t-s}$ и $g(t) = e^{t/2}$. Для начала найдём резольвенту:

$$\int_0^{\infty} K(t,p_1)K(p_1,s)\, dp_1 = \sum_i K_i(t,s) \int_0^{\infty} K_i(p_1,p_1)\, dp_1 = \alpha\, e^{-2t-s} + \beta ts\, e^{-2t-s},$$

где $K(t,s) = e^{-2t}e^{-s} + (te^{-2t})(se^{-s})$ – факторизуемо, и коэффициенты

$$\alpha = \int_0^{\infty} e^{-3p_1}\, dp_1 = \frac{1}{3}, \qquad \beta = \int_0^{\infty} p_1^2 e^{-3p_1}\, dp_1 = \frac{2}{27}.$$

Аналогично последующие слагамые

$$\hat{K}^3 = \alpha^2\, e^{-2t-s} + \beta^2 ts\, e^{-2t-s}.$$

Суммируя, находим

$$R(t,s) = e^{-2t-s}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}\lambda} + \frac{ts}{1-\frac{2}{27}\lambda}\right).$$

Осталось найти f в виде

$$f(t) = e^{t/2} + \int_0^{\infty} R(t,s)g(s)\, ds = e^{t/2} + 6\lambda e^{-2t}\left(\frac{1}{3-\lambda} + \frac{18t}{27-2\lambda}\right).$$

№ 9.1.6

Найдём решение (12) для $K = (1+ts)e^{-2t-s}$ и $g(t) = e^{t/2}$. Для начала найдём резольвенту, аналогично двум предыдущим номерам

$$R(t,s) = \frac{1}{1-\lambda} + \frac{t^2 s^2}{1-\frac{1}{5}\lambda}.$$

Теперь можем найти $f(t)$:

$$f(t) = g(t) + \lambda \int_0^1 R(t,s)\, ds = t^2 + \lambda\left(\frac{1}{3}\frac{1}{1-\lambda} + \frac{t^2}{5-\lambda}\right) = \frac{t^2}{1-\frac{1}{5}\lambda} + \frac{\lambda/3}{1-\lambda},$$

где уже добавка не затухает со временем, в отличии от предыдущих задач.