Заметки по курсу «Квантовая оптика»

Автор заметок: Хоружий Кирилл

От: *24 февраля 2022 г.*

Содержание

Лекция №2. Вторичное квантование **2**

Лекция №3. Когерентные состояния **2**

Лекция №2. Вторичное квантование

Для одиночного фотона можно построить волновые функции[1], – это ЭМ поле, что является явным проявлением родства уравнения Шрёдингера и волнового уравнения оптики.

Вторичное квантование (П. Дирак, 1927) – введение нового объекта описания: осциллятора ЭМ поля или совокупность одинаковых фотоов в объеме когерентности. Ключевыми становятся числа заполнения.

Осциллятор. Пришли к новым операторам

$$\hat{a} = \frac{\omega\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{i\hbar\omega}}, \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{\omega\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar\omega}}.$$

Оператор поля:

$$\hat{E} = \sqrt{\frac{8\pi\hbar\omega}{V}}\frac{1}{2}\left(\hat{a}e^{-i\omega t + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right),$$

числа фотонов и Гамильтониан:

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger, \qquad \hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\right) = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right),$$

где V – объем когерентности и всё также верно, что $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

Добавка $\frac{1}{2}$ – непередаваемая часть гамильтониана, так что $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ более чем логично.

Как обычно живём в базисе $\hat{H}$: $|n\rangle$, которые допускают интерпретацию в виде n-фотонных состояниях ЭМ поля, Фоковских сотояний.

Свободная эволюция ЭМ поля:

$$i\hbar\partial_t|n\rangle = \hat{H}|n\rangle, \qquad \Rightarrow \qquad |n(t)\rangle = \exp\left(-\frac{it}{\hbar}\hat{H}\right)|n(0)\rangle = e^{-in\omega t}\left(e^{-i\omega t/2}|n(0)\rangle\right).$$

Лестничные операторы. Как и с осциллятором, приходим

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \qquad \hat{a}^\dagger = \sqrt{n+1}|n+1\rangle,$$

то есть имеем оператор рождения и уничтожения фотона.

Наблюдаемые. Дисперсия $\hat{n}$ в $|n\rangle$ нулевая. Для поля

$$\langle E\rangle = 0, \qquad \langle\Delta E^2\rangle = \langle n|\left(\tfrac{\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}}{2}\right)^2|n\rangle - \langle E\rangle^2 = \frac{1}{4}\langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = \frac{n}{2} + \frac{1}{4},$$

где для простоты опустили множитель $\varpi = \sqrt{\frac{8\pi\hbar\omega}{V}}$.

Плотности вероятности данных о поле может быть записано в виде

$$\chi(u) = \langle n|e^{iu\hat{E}}|n\rangle = \ldots = e^{-u^2/8}L_n\left(\tfrac{u^2}{4}\right),$$

$$p(E) = \frac{1}{2\pi}\int\chi(u)e^{-iuE}\,du = \ldots = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-2E^2}}{2^N n!}\left(H_n(\sqrt{2}E)\right)^2,$$

где L – полиномы Лагерра, H_n – полиномы Эрмита.

Получается, что нужны новые композиции n-фотонных состояний. Ими оказались когерентные состояния.

Лекция №3. Когерентные состояния

Нужны новые квантовые состояния. Можно задать $|x\rangle = \sum_n c_n|n\rangle$, собственное состояние оператора $\hat{A}|x\rangle = \alpha|x\rangle$, с помощью оператора сдвига $|x\rangle = \hat{S}|0\rangle$.

Когерентные состояния осциллятора ЭМ поля – собственные состояния полевого оператора $\hat{a}$:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

Также как и с осциллятором

$$\hat{a}\sum_n c_n|n\rangle = \sum_n c_n\sqrt{n}|n-1\rangle = \alpha\sum_{n'}c_{n'}|n'\rangle,$$

так получаем рекуррентное соотношение:

$$c_{n+1}\sqrt{n+1} = \alpha c_n, \qquad \Rightarrow \qquad c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}c_0, \qquad \Rightarrow \qquad |\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_n\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle,$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$.

[1] А.И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, «Квантовая электродинамика» – обязательно прочитать (§1, §2)!

Свойства когерентных состояний. Для начала заметим, что
$$|n\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha|^2.$$
Можем также посчтать дисперсию
$$\langle\Delta n^2\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle - \langle n\rangle^2 = |\alpha|^2.$$
Найдём распределение по n-фотонным состояниям:
$$p_n = |c_n|^2 = e^{-|\alpha|^2}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!},$$
что соответствует пуассоновскому распределению.

Поле. Для поля $\hat{E}$ (в единицах численного размерного коэффициента):
$$\langle E\rangle = \langle\alpha|\tfrac{1}{2}(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t})|\alpha\rangle = \tfrac{1}{2}\left(\alpha e^{-i\omega t} + \bar{\alpha}e^{i\omega t}\right).$$
Также флуктуации поля
$$\langle\Delta E^2\rangle = \frac{1}{4} = \text{const}.$$
Также квантовая характеристическая функция $\chi(u)$:
$$\chi(u) = \langle e^{iu\hat{E}}\rangle = e^{-u^2/8}\langle\alpha|\exp\left(\tfrac{iu}{2}\hat{a}^\dagger e^{i\omega t}\right)\times\exp\left(\tfrac{iu}{2}\hat{a}e^{-i\omega t}\right)|\alpha\rangle = e^{-u^2/8}\exp\left(\frac{iu}{2}\left(ae^{-i\omega t} + \bar{\alpha}e^{i\omega t}\right)\right),$$
где мы воспользовались соотношением Бейкера-Хаусдорфа. Так находим
$$p(E) = \frac{1}{2\pi}\int\xi(u)e^{-iuE}\,du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left(-2\left(E - \frac{1}{2}\left(\alpha e^{-i\omega t} + \bar{\alpha}e^{i\omega t}\right)\right)\right).$$

Оператор сдвига. Составим оператор сдвига по n-фотонным состояниям:
$$|n\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n}}|n-1\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n}}\frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n-1}} = \ldots = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle, \quad\Rightarrow\quad \hat{S}_n = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}.$$
На данный момент нет источников n-фотонных состояний. Таким образом находим
$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle,$$
но нюанс в том что когерентные состояния не ортогональны
$$|\langle\alpha_2|\alpha_1\rangle|^2 = \exp\left(-|\alpha_2 - \alpha_1|^2\right).$$
Можем сделать замену, точнее ввести
$$\hat{S}_c = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \bar{\alpha}\hat{a}},$$
который действует на $|0\rangle$ точно также.