Справочные материалы к письменному экзамену «Уравнения математической физики»

Автор заметок: Хоружий Кирилл

От: *31 мая 2022 г.*

Содержание

1 Эволюционные уравнения 2

2 Статические линейные поля 2
Задача Штурма-Лиувилля . . . 2
Метод Фурье в задаче Штурма-Лиувилля . . . 3
Уравнения Пуассона и Лапласа . . . 4
Двумерные гармонические функции . . . 4

3 Специальные функции 4
Γ, ψ, B-функции . . . 4
Функция Эйри . . . 5
Функции Бесселя . . . 6
Ортогональные полиномы . . . 6

4 Динамические линейные поля 7
Волновое уравнение . . . 7
Уравнение Гельмгольца . . . 8
Уравнение теплопроводности . . . 8

5 Интегральные уравнения 8
Линейные интегральные уравнения . . . 9
Нелинейные интегральные уравнения . . . 10
Сингулярные интегральные уравнения . . . 11

6 Элементы теории групп 11
Теория групп . . . 11
Теория представлений . . . 12
Таблицы неприводимых представлений . . . 12

7 Для любознательных 13
Автомодельные решения . . . 13
Метод Боголюбова-Крылова . . . 13
Уравнения Хопфа и Бюргерса . . . 14

8 x Справочник 14
Вычеты . . . 14
Интегралы . . . 14
Преобразование Фурье . . . 15
Преобразование Лапласа . . . 15
Преобразование Меллина . . . 15

1 Эволюционные уравнения

Функция Грина. Для уравнений вида $\hat{L}x = \varphi$, бывает удобно найти G, как решение уравнения $\hat{L}G = \delta$:

$$\hat{L}\,x(t) = \varphi(t), \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-s)\varphi(s)\,ds, \quad \hat{L}G = \delta(t), \tag{1.1}$$

если $\hat{L}$ – линейный оператор. И, если хочется добавить начальные условия, то для $\hat{L}$ второго порядка будет

$$x(t) = \dot{x}(0)G(t) + x(0)\dot{G}(t) + \int_0^t G(t-s)\varphi(s)\,ds.$$

Для уравнений первого порядка $\hat{L} = \partial_t + \gamma$:

$$\hat{L} = \partial_t + \gamma, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \theta(t)\exp\left(-\gamma t\right). \tag{1.2}$$

Для осциллятора $\hat{L} = \partial_t^2 + \omega^2$, тогда

$$\hat{L} = \partial_t^2 + \omega^2, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \theta(t)\frac{\sin(\omega t)}{\omega}. \tag{1.3}$$

В общем случае подстановка причинной функции Грина $G(t) = \theta(t)g(t)$ для $\hat{L}$: $L(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ приводит к условиям

$$\partial_t^{n-1}g(0) = 1, \quad \partial_t^m g(0) = 0, \ m = 0, \ldots, n-2,$$

который позволяют методом неопределенных коэффициентов найти G из уравнения $\hat{L}G(t) = \delta(t)$. Проявляем аккуратность при наличии кратных корней у $L(z) = 0$, когда возникают секулярные члены. Нужен пример.

Матричное уравнение. Решение линейного уравнения для векторной величины $\boldsymbol{y}$

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} + \hat{\Gamma}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\chi},$$

может быть найдено, через функцию Грина, вида

$$\hat{G}(t) = \theta(t)\exp\left(-\hat{\Gamma}t\right), \qquad \boldsymbol{y}(t) = \int_{-\infty}^{t} \hat{G}(t-s)\boldsymbol{\chi}(s)\,ds. \tag{1.4}$$

Удобно $\hat{\Gamma}$ привести к ЖНФ, а потом вспомнить, что матричная экспонента от жордановой клетки $\hat{J}$ имеет вид

$$\exp\left(-\hat{J}t\right) = e^{-\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Функция Грина через преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа функциии $\Phi(t)$ определяется:

$$\tilde{\Phi}(p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt)\Phi(t)\,dt, \qquad \Phi(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i}\exp(pt)\tilde{\Phi}(p),$$

где далее c выбираем правее всех особенностей для причинности.

Решение уравнения $L(\partial_t)G(t) = \delta(t)$ может быть найдено, как

$$G(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i}\exp(pt)\tilde{G}(p), \qquad \tilde{G}(p) = \frac{1}{L(p)}, \quad \Rightarrow \quad G(t) = \sum_i \operatorname{res}_i \frac{\exp(pt)}{L(p)}, \tag{1.5}$$

где суммирование идёт по полюсам $1/L(p)$.

Кстати. Бывает удобно сделать функции маленькими

$$\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \tilde{f}(p)e^{pt}\frac{dp}{2\pi i} = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \frac{\tilde{f}(p)}{p^n}e^{pt}\frac{dp}{2\pi i}.$$

2 Статические линейные поля

Задача Штурма-Лиувилля

Постановка задачи. Задача Штурма-Лиувилля:

$$\hat{L} = \partial_x^2 + Q(x)\partial_x + U(x), \quad \hat{L}f(x) = \varphi(x), \quad \begin{cases} \alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = 0 \\ \alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где[1] $|\alpha_1| + |\beta_2| \neq 0$ и $|\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0$.

[1] Часто можно встретить нулевые граничные условия: $f(a) = f(b) = 0$.

Граничные условия. С учетом того, что функция Грина G наследует граничные условия:

$$\alpha_1 G(a,y) + \beta_1 G'_x(a,y) = 0,$$
$$\alpha_2 G(b,y) + \beta_2 G'_x(b,y) = 0.$$

Запищем уравнение на $G(x,y)$:

$$\hat{L}G(x,y) = \delta(x-y).$$

Решение этого уравнение можем найти решая две системы на $u(x)$ при $x<y$ и $v(x)$ при $x>y$:

$$\begin{cases} \hat{L}u(x) = 0 \\ \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{L}v = 0 \\ \alpha_2 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0 \end{cases}$$

Теперь можем выписать ответ

$$G(x,y) = \frac{1}{W(y)} \begin{cases} v(y)u(x), & x<y, \\ v(x)u(y), & x>y, \end{cases} \qquad W[u,v](y) = v'(y)u(y) - v(y)u'(y). \tag{2.2}$$

Который существует и единственнен для $W \neq 0$. Для $W = \text{const}$ $G(x,y) = G(y,x)$, а значит $\hat{L}^{-1}$ – симметричный самосопряженный оператор, и у $\hat{L}$ есть ОНБ из собственных функций.

Кстати. Бывает удобно найти $W(x)$, записав формулу Лиувилля-Остроградского

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} Q(z)\,dz\right).$$

Def 2.1. *Специальной ФСР* называется решение уравнения $\hat{L}u = 0$ и $\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0$, и аналогичного уравнения по $v(x)$ с граничным условием в b, если $W[u,v] \neq 0$, то есть u и v линейной независимы.

Метод Фурье в задаче Штурма-Лиувилля

Допустим мы в $\mathcal{H}$, соответственно есть $\langle x|y\rangle$. Рассмотрим некоторый достаточно хороший самосопряженный компактный оператор $\hat{L}$, у которого есть ОНБ из собственных функций: $\hat{L}e_n = \lambda_n e_n$.

Thr 2.2 (thr Гильберта-Шмидта). *Если $\hat{L}$ – компактный*[2] *ССО, то у A есть ОНБ из собственных функций.*

Вернемся к оператору Штурма-Лиувилля, который живет в $\mathcal{H} = L_2[a,b]$:

$$\hat{L} = A(x)\partial_x^2 + B(x)\partial_x + C(x), \qquad \langle f|g\rangle = \int_a^b f\bar{g}\,dx.$$

Для задачи Штурма-Лиувилля $\hat{L}$ симметричен, при $B(x) = A'(x)$.

Тогда можем найти функцию Грина, как решение уравнения $\hat{L}G(x,y) = \delta(x-y)$

$$G(x,y) = \sum_n g_n(y)e_n(x), \qquad \delta(x-y) = \sum_n \delta_n(y)e_n(x).$$

Находим коэффициенты Фурье:

$$\delta_n(y) = \frac{\bar{e}_n(y)}{\langle e_n|e_n\rangle}, \qquad \Rightarrow \qquad g_n(y) = \frac{1}{\lambda_n}\frac{\bar{e}_n(y)}{\langle e_n|e_n\rangle}. \tag{2.3}$$

Проблема возникает при $\lambda_n = 0$.

Наличие у оператора собственного числа $\lambda_n = 0$ называется *нулевой модой.* Рассмотрим оператор:

$$\hat{L} = \partial_x^2,$$

для которого $e_n(x) = e^{inx}$, где $\langle e_n|e_n\rangle = 2\pi$, где $e_0 = 1$ и $\lambda_0 = 0$. Пусть тогда

$$\delta(x) = \sum \frac{\bar{e}_n(0)e_n(x)}{\langle e_n|e_n\rangle} = \sum \frac{e^{inx}}{2\pi}, \qquad G(x) = \sum g_n e_n(x).$$

но для $\hat{L}G = \delta(x)$ оказывается нет решений (справа e_0 есть, а слева нет).

В общем, проблема уйдёт, если рассмотрим уравнение, вида

$$\hat{L}G(x) = \delta(x) - e_0(x) = \delta(x) - \frac{1}{2\pi},$$

то есть справа единичный оператор только на образе $\operatorname{Im}\hat{L}$. Если в источнике есть нулевая мода, то уравнение не имеет решений.

[2] $\mathcal{D}(A)$ – компакт в гильбертовом пространстве.

Уравнения Пуассона и Лапласа

Научимся решать *уравнение Пуассона* $\nabla^2 f = \varphi$, которое при $\varphi = 0$ переходит в *уравнению Лапласа* $\nabla^2 f = 0$. Функции, удовлетворяющие уравнение Лапласа называют *гармоническими*, которые существуют только на некоторой ограниченной области. Иногда бывает проще решать *уравнение Дебая* $(\nabla^2 - \varkappa^2) f = \varphi$.

Функция Грина. Решение как обычно можем искать в виде

$$f(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \varphi(\boldsymbol{r})\, d^3 r.$$

В зависимости от размерности пространства n, функция Грина G_n будет равна

$$G_2(r) = \frac{\ln r}{2\pi}, \qquad G_3(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi r}, \qquad G_{n>2}(x) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \frac{1}{r^{n-2}}, \tag{2.4}$$

где S_n равно площади $n-1$ мерной единичной сферы.

Кстати. Для уравнения Дебая в $\mathbb{R}^3$ функция Грина с $\hat{L} = \nabla^2 - \varkappa^2$ будет равна

$$G(\boldsymbol{r}) = -\frac{e^{-\varkappa r}}{4\pi r}.$$

Для сферически симметричного потенциала $\varphi(\boldsymbol{r}) \equiv \varphi(r)$, решение уравнения Пуассона упростится до

$$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r} \int_0^r \varphi(\rho) \rho^2\, d\rho + \int_r^\infty \varphi(\rho) \rho\, d\rho.$$

(проверить)

Двумерные гармонические функции

Отдельно рассмотрим случай $n = 2$. Часто задача формулируется в виде *задачи Дирихле*:

$$\nabla^2 f = 0, \qquad f|_{\partial D} = f_0(\boldsymbol{r}),$$

то есть функция задана на границе некоторой области. Будем искать решение в виде

$$f(z) = u(z) + iv(z), \qquad \nabla^2 u = \nabla^2 v = 0.$$

Если знаем комплексную функцию $f(z)$ такую, что $\operatorname{Re} f|_{\partial D} = f_0$, тогда $\operatorname{Re} f(z)$ решает задачу Дирихле. Далее конформным преобразованием переводим любую область D в круг/полуплоскость, где задача Дирихле решается, а дальше отображаем назад.

Рассмотрим полуплоскость $D = \{(x, y) \mid y > 0\}$, с заданным значением $f(x, 0) = f_0(x)$. Тогда решением будет

$$f(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{\pi} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} f_0(\xi). \tag{2.5}$$

Для круга радиуса R с заданным граничным условием, вида $f(R\cos t,\, R\sin t) = f_0(t)$ решением будет

$$f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2} f_0(t). \tag{2.6}$$

3 Специальные функции

Γ, ψ, B-функции

Гамма-функция. Найдем некоторые интересные свойства:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\, dt \overset{t \to \tau x}{=} x^{z+1} \int_0^\infty \tau^z e^{-\tau x}\, d\tau, \qquad \frac{1}{x^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \tau^{z-1} e^{-\tau x}\, d\tau.$$

Существует аналитическое продолжение:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{1 - e^{2\pi i z}} \int_C t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

Видим, что у $\Gamma(z)$ есть особенности $z \in \mathbb{Z}$, где $z \in \mathbb{N}$ – УОТ, и $z \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$ – П1П:

$$\operatorname{res}_{-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}, \tag{3.1}$$

Могут пригодиться следущие выражения для Γ-функции:

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \tfrac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}} \Gamma(2z), \qquad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

А также *формула Стирлинга*, которую нетрудно получить методом перевада:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\,dt = \int_0^\infty e^{z\ln t - t}\,dt \approx e^{z\ln z - z}\sqrt{2\pi z} = \sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^z. \tag{3.2}$$

Дигамма-функция. По определнию дигамма-функция $\psi(z)$:

$$\psi(z) \overset{\text{def}}{=} (\ln\Gamma(z))' = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Заметим, что $\psi(1) = -\gamma$, где $\gamma \approx 0.58$ – постоянная Эйлера-Маскерони. Найдём

$$\psi(z+1) = (\ln z + \ln\Gamma(z)) = \frac{1}{z} + \psi(z), \quad \Rightarrow \quad \psi(N+1) = \frac{1}{N} + \psi(N) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + \psi(1).$$

Также бывает полезно

$$\psi(x+N+1) = \frac{1}{x+N} + \psi(x+N) = \frac{1}{x+N} + \ldots + \frac{1}{x+1} + \psi(x+1).$$

Вспомним, что $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$. Тогда

$$\psi(-z) - \psi(z) = \pi\operatorname{ctg}\pi z.$$

Асимптотика для $\psi(z\to\infty)$:

$$\psi(z\to\infty) = (\ln\Gamma(z))' = \ln z + \frac{1}{2z} + o(1) = \ln z + o(1).$$

Бета-функция. Рассмотрим B-функцию:

$$B(\alpha,\,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt, \quad \operatorname{Re}\alpha,\beta > 0, \qquad B(\alpha,\,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

которую бывает удобно доставать в интегралах.

Функция Эйри

Метод Лапласа. Рассмотрим дифференциральное уравнение, вида

$$(a_n z + b_n) f^{(n)} + \ldots + (a_1 z + b_1) f^{(1)} + (a_0 z + b_0) f^{(0)} = 0, \qquad f(z) = \int_C \tilde{f}(p) e^{pz}\,dp,$$

где $f(p)e^{pz}|_{\partial C}^{\forall z} = 0$. Тогда введем полиномы $A(p)$ и $B(p)$ такие, что

$$-\partial_p\left[A(p)f(p)\right] + B(p)f(p) = 0, \quad A(p) = a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0, \quad B(p) = b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0.$$

Решая, находим образ Лапласа

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{A(p)}\exp\left(\int_{p_0}^p \frac{B(t)}{A(t)}\,dt\right).$$

Метод перевала. Действительный метод перевала:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{f(x)} g(x)\,dx = g(x_0) e^{f(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}}.$$

Для стационарной фазы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{if(x)} g(x)\,dx = g(x_0) e^{if(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)}} e^{\pm i\pi/4},$$

где $\pm$ согласован с $\operatorname{sign} f''$. Для комплексного метода перевала

$$I = \int_C e^{f(z)} g(z)\,dz = g(z_0) e^{f(z_0)} e^{i\varphi}\sqrt{\frac{2\pi}{|f''|}}, \qquad \varphi = \frac{1}{2}\left(\pm\pi - \arg f''(z_0)\right).$$

Функция Эйри. Решаем уравнение, вида

$$\partial_x^2 f - xf = 0, \quad \Rightarrow \quad f(x) = \int_C e^{xt - t^3/3}\,dt.$$

Так приходим к

$$\operatorname{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{xt - t^3/3}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(xu + u^3/3)\,du.$$

В качетсве второго решения выбрается

$$\mathrm{Bi}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[e^{xu-u^3/3} + \sin(xu + u^3/3)\right]\,du.$$

Функции Бесселя

Уравнение Бесселя:

$$\partial_z^2 J_m + \frac{1}{z}J_m + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right)J_m = 0,$$

где $J_m(0) \in \mathbb{R}$. Знаем, что

$$e^{iz\sin\varphi} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} J_n(z)e^{in\varphi}, \quad \Rightarrow \quad J_m(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{iz\sin\varphi}e^{-im\varphi}\,d\varphi, \quad \Leftrightarrow \quad J_m(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\varphi - m\varphi)\,d\varphi.$$

Умеем дифференцировать:

$$\frac{dJ_m}{dz} = \frac{J_{m-1}(z)}{2} - \frac{J_{m+1}(z)}{2}, \qquad \frac{m}{z}J_m(z) = \frac{1}{2}\left(J_{m+1}(z) + J_{m-1}(z)\right), \qquad \frac{d}{dz}\left(z^m J_m(z)\right) = J_{m-1}(z)z^m.$$

Откуда сразу находим

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_n(x)}{x^n}\right) = -\frac{J_{n+1}(x)}{x^n}, \qquad J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z).$$

Умеем раскладывать в ряд и уходить на бесконечность:

$$J_m(z) = \frac{z^m}{2^m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{4^k k!(m+k)!}, \qquad J_m(z\to\infty) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\cos\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

соответственно с нулями в $\frac{\pi}{2} + \pi m$.

Преобразование Фурье от функции:

$$F[J_m(z)](k) = \int_{-\infty}^{+\infty} J_m(z)e^{-ikz}\,dz = \frac{(-1)^m e^{im\varphi_0} + e^{-im\varphi_0}}{\sqrt{1-k^2}}, \qquad \varphi_0 = \arcsin k.$$

В частности

$$F[J_0](k) = \frac{2}{\sqrt{1-k^2}}\theta(1-k^2), \qquad F[J_1](k) = \frac{2ik}{\sqrt{1-k^2}}\theta(1-k^2).$$

Преобразование Лапласа:

$$\Lambda[J_m](p) = \int_0^{\infty} e^{-pz}J_m(z)\,dz = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}(p+\sqrt{p^2+1})^m}.$$

Например,

$$\int_0^{\infty}\frac{J_n(z)}{z^n}\,dz = \frac{1}{(2n-1)!!}.$$

Помним, что $J_m(0) = \delta_{m,0}$.

Ортогональные полиномы

Полиномы Лежандра. Дифференцириальное уравнение $(a,\, b = -1,\, 1)$:

$$\sigma(x) = 1 - x^2, \qquad \tau(x) = -2x = \sigma', \qquad \rho = 1, \qquad (1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0.$$

Формула Родрига:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\partial_x^n(1-x^2)^n, \qquad \alpha_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}, \qquad a_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}.$$

Нормировка:

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

Рекуррентное соотноешение:

$$A_n = \frac{\|p_n+1\|^2}{\langle p_{n+1}|xp_n\rangle} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{n+1}, \qquad B_n = 0, \qquad C_n = -\frac{n}{n+1},$$

подставляя, приходим к

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n + nP_{n-1}(x) = 0.$$

Производяшая функция:

$$\psi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 2zx + 1}}.$$

Умеем дифференцировать

$$(x^2 - 1)\frac{dP_n}{dx} = n(xP_n(x) - P_{n-1}(x)).$$

Полиномы Эрмита. Дифференциральное уравнение

$$\sigma = 1, \qquad \tau = -2x, \qquad \rho(x) = e^{-x^2}, \qquad H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0, \qquad (e^{-x^2} H_n')' = -2ne^{-x^2} H_n.$$

Знаем, что формула Родрига примет вид

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \partial_x^n e^{-x^2}, \qquad a_n = 2^n,$$

тогда

$$\|H_n\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Рекуррентное соотношение:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Производящаяя функция:

$$\psi(x, z) = e^{-z^2 + 2zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n.$$

Полиномы Лаггера. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

4 Динамические линейные поля

Граничные условия. Вообще граничные условия можно вводить из разложения

$$u(t \to 0, \boldsymbol{r}) \approx \theta(t) u(t = 0, \boldsymbol{r}) + t\theta(t)\partial_t u(t = 0, \boldsymbol{r}) + \ldots,$$

тогда действие оператора ∂_t^2 на эти члены дает сингулярные слагаемые

$$(\partial_t^2 + \nabla^2) u(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{r}) = \delta'(t) u(t = 0, \boldsymbol{r}) + \delta(t)\partial_t u(t = 0, \boldsymbol{r}),$$

которые можем воспринимать как источник.

Волновое уравнение

Общий подход. Найдём функцию Грина для уравнения, вида

$$\left(\partial_t^2 + \varpi^2[-i\nabla]\right) u = \chi.$$

Решение запишется в виде

$$\left(\partial_t^2 + \varpi^2[-i\nabla]\right) G = \delta(t)\delta(\boldsymbol{r}), \qquad u(t, \boldsymbol{r}) = \int dt_1\, d^3 r_1\, G(t - t_1, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\chi(t_1, \boldsymbol{r}_1).$$

Переходя к пространственному Фурье-образу, приходим у уравнению с известной функцией Грина:

$$\left(\partial_t^2 + \varpi^2[\boldsymbol{q}]\right) \tilde{G} = \delta(t), \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{G}(t) = \theta(t)\frac{\sin(\varpi t)}{\varpi}.$$

Тогда через обратное Фурье-преобразование находим

$$G(t, \boldsymbol{r}) = \theta(t) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\sin(\varpi t)}{\varphi} \exp\left(i\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{r}\right) \stackrel{*}{=} \frac{\theta(t)}{\pi r} \int_0^{\infty} \frac{dq}{2\pi} q \frac{\sin(\varpi[q]t)}{\varpi[q]} \sin(qr),$$

где $\stackrel{*}{=}$ верно для $\varpi[\boldsymbol{q}] \equiv \varpi[q]$.

Например, для $\varpi[\boldsymbol{q}] = qc$, волновое уравнение с источником:

$$(\partial_t^2 - c^2\nabla^2) u(t, \boldsymbol{r}) = \chi(t, \boldsymbol{r}), \qquad G(t, r) = \frac{\theta(t)}{4\pi c r}\delta(r - ct). \tag{4.1}$$

а значит выражение для поля:

$$u(t, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi c^2} \int d^3 r_1 \; \frac{\chi(t - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|/c, \boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|}, \tag{4.2}$$

перейти к сферически симметричному случаю.

Уравнение Гельмгольца

Рассмотрим отдельно уравнение Гельмгольца

$$(\nabla^2 + \varkappa^2) f = \varphi(\boldsymbol{r}).$$

Как и раньше, запишем найдём решение в виде

$$(\nabla^2 + \varkappa^2) G(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}), \qquad \Rightarrow \qquad f(\boldsymbol{r}) = f_0(\boldsymbol{r}) + \int d^3 r_1 \; G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) \varphi(\boldsymbol{r}_1),$$

где f_0 – решение однородного уравнения Гельмгольца. Функция Грина:

$$G = -\frac{\exp(i\varkappa r)}{4\pi r},$$

для $\omega > 0$ и $G \to G^*$ при $\omega < 0$.

Уравнение теплопроводности

Уравнение диффузии с известным $u(0, \boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x})$:

$$\left(\partial_t - \nabla^2\right) u(t, \boldsymbol{x}) = 0, \tag{4.3}$$

решение которого может быть найдено в виде:

$$u(t, \boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dy_1 \ldots dy_d}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^2}{4t}\right) u_0(\boldsymbol{y}). \tag{4.4}$$

Асимтотики могут быть найдены в виде

$$u(t, \boldsymbol{x}) \approx \frac{A}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{4t}\right), \qquad A = \int_{\mathbb{R}^d} dy_1 \ldots dy_d \; u_0(\boldsymbol{y}). \tag{4.5}$$

При $A = 0$ асимтотика будет соответствовать

$$u(t, \boldsymbol{x}) \approx \frac{\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x}}{(4\pi t)^{d/2+1}} \exp\left(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{4t}\right), \qquad \bar{B} = 2\pi \int_{\mathbb{R}^d} dy_1 \ldots dy_d \; \boldsymbol{y}\, u_0(\boldsymbol{y}), \tag{4.6}$$

где асимтотики имеют место при $t \gg l^2$, l – масштаб на котором локализовано поле.

Накачка. При наличии правой части:

$$(\partial_t - \nabla^2) u = \varphi,$$

можем найти функцию Грина для оператора $\partial_t - \nabla^2$

$$u(t, \boldsymbol{x}) = \int G(t - \tau, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \varphi(t, \boldsymbol{y}) \, d\tau \, d^d \boldsymbol{y}, \qquad G(t, \boldsymbol{r}) = \frac{\theta(t)}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right).$$

5 Интегральные уравнения

Уравнение Фредгольма. Есть уравнение Фредгольма I рода:

$$\int_a^b ds \; K(t, s) f(s) = g(t),$$

и уравнение Фредгольма II рода:

$$f(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) f(s), \qquad \Leftrightarrow \qquad f = g + \lambda \hat{K} f, \tag{5.1}$$

где мы ввели интегральный оператор $\hat{K} f = \int_a^b ds \; K(t, s) f(s)$. Решение можем найти в виде

$$f = \frac{1}{1 - \lambda \hat{K}} g = \left(\mathbb{1} + \lambda \hat{R}\right) g, \qquad \hat{R} \overset{\text{def}}{=} \hat{K} + \lambda \hat{K}^2 + \ldots$$

В терминах интегрирования резольвента $R(t, s)$ выражается, как

$$R(t, s) = K(t, s) + \lambda \int_a^b dp_1 \; K(t, p_1) K(p_1, s) + \lambda^2 \int_a^b dp_1 \int_a^b dp_2 \; K(t, p_1) K(p_1, p_2) K(p_2, s) + \ldots \tag{5.2}$$

Это всё интегрируем, суммируем, получаем $R(t,s)$, и сразу ответ в виде $f = g + \lambda \hat{R} g$.

Линейные интегральные уравнения

Свертка I. Рассмотрим уравнение на φ, вида
$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\varphi(y) = f(x), \tag{5.3}$$
то есть уравнение Фредгольма первого рода с $(a,b) = \mathbb{R}$ и $K(x,y) = K(x-y)$. Решение можем найти через преобразование Фурье
$$\tilde{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx}\, dx, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k) e^{ikx}\, dx,$$
которое переводит свёртку в произведение:
$$\tilde{\varphi}(k) = \frac{\tilde{f}(k)}{\tilde{K}(k)}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{f}(k)}{\tilde{K}(k)}. \tag{5.4}$$

Свертка II. Аналогично для уравнения Фредгольма второго рода
$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} dy\ K(x-y)\varphi(y), \tag{5.5}$$
для которого также
$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} dy\ f(y) R(x-y), \qquad R(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{K}(k)}{1 - \lambda \tilde{K}(k)}. \tag{5.6}$$

Уравнение Вольтерра I. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма I на $(a,b) = (0,t)$:
$$f(t) = \int_0^t ds\ K(t-s)\varphi(s).$$
Здесь хорошо работает преобразование Лапласа
$$f(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt}\, dt, \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} f(p) e^{pt}\, dp,$$
которое переводит свертку в произведение, а значит можем сразу написать решение
$$\varphi(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \frac{f(p)}{K(p)} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}. \tag{5.7}$$

Уравнение Вольтерра II. Аналогично для уравнения Фредгольма II:
$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^t K(x-y)\varphi(y)\, dy, \tag{5.8}$$
находим решение
$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^t R(t-s) f(s)\, ds, \qquad R(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \frac{K(p)}{1 - \lambda K(p)}.$$

Периодическое ядро I. Рассмотрим $f(t)$ и $K(t)$ периодчиные с $T = b - a$, тогда и $\varphi(t)$ периодично по T. Решим уравнение, вида
$$\int_a^b K(t-s)\varphi(s)\, ds = f(t). \tag{5.9}$$
Раскладывая всё в ряд Фурье (вводя $\omega = \frac{2\pi}{T}$):
$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\omega t} f_n, \qquad f_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{in\omega t}\, dt.$$
Решение находим в виде суммы
$$\varphi_n = \frac{f_n}{T K_n}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f_n}{T K_n} e^{-in\omega t}. \tag{5.10}$$

Периодическое ядро II. Аналогично можем найти резольвенту для уравнения Фредгольма второго рода:
$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b ds\ K(t-s)\varphi(s).$$

Реше $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b ds\ R(t-s) f(s), \qquad R(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{K_n}{1-\lambda T K_n} e^{-in\omega t}. \tag{5.11}$$

Факторизуемое ядро. Рассмотрим случай, когда ядро вырожденное: $K(t,s) = \sum_i A_i(t) B_i(s)$. Тогда интегральное уравнение перепишется в виде

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum A_i(t) \int_a^b B_i(s)\varphi(s)\, ds.$$

Решение уравнения можем найти в виде

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum_i C_i A_i(t), \qquad (\mathbb{1} - \lambda \hat{M})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\Phi}, \qquad \Phi_i = \int_a^b B_i(t) f(t)\, dt, \qquad M_{ij} = \int_a^b B_i(t) A_j(t)\, dt.$$

Нелинейные интегральные уравнения

Уравнение типа свёртки. Рассмотрим уравнение вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t-s)\varphi(s) = f(t). \tag{5.12}$$

Аналогично смотрим на фурье-образ, откуда находим выражение для $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{f(\omega)} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \tag{5.13}$$

Обобщение. Обобщим происходящее, введя $L(s)$

$$L(s) = \sum_{n=0}^{N} a_n s^n, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} ds\ \varphi(t-s) L(s) \varphi(s) = f(t), \tag{5.14}$$

решим в виде

$$\varphi(\omega) L(i\partial_\omega) \varphi(\omega) = f(\omega), \tag{5.15}$$

то есть можем свести интегральное уравнение к дифференциальному.

Лаплас. Рассмотрим уравнение вида

$$\int_0^t ds\ \varphi(t-s) L(s) \varphi(s) = f(t),$$

решение которого также находится в виде

$$\varphi(p) L(-\partial_p) \varphi(p) = f(p).$$

Периодический случай. Аналогично линейному случаю рассмотрим

$$\int_{-\pi}^{+\pi} ds\ \varphi(t-s)\varphi(s) = f(t),$$

периодичное с $T = 2\pi$ и $\omega = 1$. Тогда решение находится в виде

$$\varphi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\pm) \sqrt{\frac{f_n}{2\pi}} e^{-int}.$$

Факторизуемое ядро. Для факторизуемого ядра уравнение примет вид

$$\varphi(t) = x(t) \int_a^b ds\ \varphi^n(s) y(s) + f(t),$$

решение которого можем найти в виде

$$\varphi(t) = \alpha x(t) + f(t), \qquad \alpha\colon \alpha = \int_a^b dt\ y(t) \left(\alpha x(t) + f(t)\right)^n,$$

где α задан неявно алгебраическим уравнением.

Факторизуемое ядро на причинном интервале. Для уравнения на интервале $[0, t]$ уравнение вида

$$\varphi(t) = f(t) + x(t) \int_0^t ds\ y(s) \varphi^n(s),$$

может быть сведено к дифференциальному уравнению по $z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t)/x(t)$:

$$z'(t) = y(t) x^n(t) z^n(t) + \frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{x(t)}\right), \qquad z(0) = \frac{f(0)}{x(0)}.$$

Сингулярные интегральные уравнения

Сингулярные интегральные уравнения. Основой решения станет *формула Сохоцкого*:

$$\text{v. p.} \int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0}\, dx = \pm i\pi f(x_0) + \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0 \pm i\varepsilon}\, dx. \tag{5.16}$$

Полезно ввести преобразование Гильберта $\hat{H}$:

$$\hat{H}\varphi(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)\, dy}{2\pi} \left(\frac{1}{y - x + i\varepsilon} + \frac{1}{y - x - i\varepsilon} \right),$$

для которого верно, что $\hat{H}^2 = -\mathbb{1}$.

Тогда *простейшее сингулярное уравнение* вида

$$\pi\hat{H}\varphi(x) + \lambda\varphi(x) = f(x) \tag{5.17}$$

будет иметь решение относительно $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \pi^2} f(x) - \frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} \hat{H}[f](x) = \frac{1}{\lambda + i\pi} f(x) - \frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \frac{f(y)}{y - x + i\varepsilon}. \tag{5.18}$$

Сингулярные интегральные уравнения с полиномильными коэффициентами. Рассмотрим уравнение вида

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(y)}{y - x}\, dy = x^2\varphi(x) + f(x).$$

Применяя оператор $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x - z + i\varepsilon}$, приходим к уравнению

$$-\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y - z + i\varepsilon}\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2\varphi(y)}{y - z + i\varepsilon}\, dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y - z + i\varepsilon}\, dy.$$

Здесь можем провести следующие рассуждения:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(y - z + i\varepsilon + z - i\varepsilon)}{y - z + i\varepsilon}\varphi(y)\, dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(y)\, dy + z\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y - z + z}{y - z + i\varepsilon}\varphi(y)\, dy = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(y)\, dy}_{C_1} + z\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\, dy}_{C_2} + z^2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y - z + i\varepsilon}\, dy,\end{aligned}$$

а значит исходное уравнение переписывается в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y - z + i\varepsilon}\, dy = -\frac{1}{z^2 + i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y - z + i\varepsilon}\, dy - \frac{C_1 + C_2 z}{z^2 + i\pi},$$

решение которого мы уже знаем:

$$\varphi(x) = -\frac{C_1 + C_2 x}{x^4 + \pi^2} - \frac{f(x)}{x^2 - i\pi} - \frac{1}{x^4 + \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y - z + i\varepsilon}\, dy.$$

Сингулярные интегральные уравнения на отрезке. Рассмотрим уравнение на конечном отрезке

$$\text{v.p.}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(y)}{y - x}\, dy = f(x).$$

Решение можем найти при условии на f: $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 0$, тогда

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi i}\left(f(x) + \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\pi i} \int_{-1}^{1} \frac{f(y)\, dy}{\sqrt{1 - y^2}(y - x + i\varepsilon)} \right).$$

6 Элементы теории групп

Теория групп

Сопряженными (из одного *класса сопряженности*) называть элементы $g \sim h$ такие, что $\exists r \in G$, $g = rhr^{-1}$. Далее классы сопряженности будем обозначать за $C_1, \ldots, C_k$, элементы в них за $h_i \in C_i$.

Циклическая группа C_n

$$C_n = \{\mathbb{1}, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}, \qquad r^n = \mathbb{1}.$$

Для C_n каждый элемент становился представителем класса сопряженности в силу того, что группа абелева.

Группа перестановок S_n
$$S_n = \left\{ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \right\},$$
разбивается на классы сопряженности с одинаковой циклической структурой:
$$S_2 \to \{\mathbb{1}\}, \{(a,b)\}, \quad S_3 \to \{\mathbb{1}\}, \{(a,b)\}, \{(a,b,c)\}, \quad S_4 \to \{\mathbb{1}\}, \{(a,b)\}, \{(a,b,c)\}, \{(a,b,c,d)\}, \{(a,b)(c,d)\}.$$
Также в S_n $\forall\sigma$ раскладывается в циклы, а циклы в транспозиции, определенной оказывается величина четность σ. Для неё выполняется
$$\operatorname{sign}(\sigma_1 \cdot \sigma_2) = \operatorname{sign}(\sigma_1) \cdot \operatorname{sign}(\sigma_2), \quad \operatorname{sign}(a,b) = -1, \quad \operatorname{sign}(i_1, i_2, \dots, i_d) = \left[\begin{aligned} &+1, \quad d \not\vdots\, 2, \\ &-1, \quad d \,\vdots\, 2. \end{aligned} \right.$$
Четностью перестановки называют количество пар $i < j$ таких, что $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Группа D_n симметрий правильного n-угольника состоит из r – поворотов на $2\pi/n$ и s – отражений относительно какой-то выбранной оси. Для $n \,\vdots\, 2 = 0$ получатся классы сопряженности $\{r^b, r^{n-b}\}$, $\{s, sr^2, sr^4, \}$ и $\{sr, sr^3, sr^5, \dots\}$. Для $n \not\vdots\, 2$ получится $\{r^b, r^{n-b}\}$ и $\{s, sr, sr^2, \dots\}$.

Теория представлений

Далее работаем с конечными группами $|G| < +\infty$. Элемент группы обозначаем за $g \in G$. *Представление* группы определяют как гомоморфизм $\rho\colon G \mapsto \mathrm{GL}(V, \mathbb{C})$ (невырожденные матрицы).

Характером представления ρ называют $\chi[V] = \operatorname{tr}\rho(g)$ для $g \in G$. Характеры изморфных представлений совпадают, а также
$$\chi[V](\mathbb{1}) = \dim V, \quad \chi[V_1 \oplus V_2] = \chi[V_1] + \chi[V_2], \quad \chi[V](g^{-1}) = \chi^*[V](g), \quad \chi[V_1 \otimes V_2] = \chi[V_1] \cdot \chi[V_2].$$
Стараемся решить задачу о разложение приводимого представления по неприводимым. Представление ρ называется *неприводимым*, если у него нет нетривиальных (отличных от $\{0\}$ и V) инвариантных подпространств. По теореме Машке $\forall\rho$ конечной группы G разбивается на сумму неприводимых представлений. Всякое представление *унитаризуемо.*

Для характеров определим скалярное произведение $\langle\chi^{(i)}|\chi^{(j)}\rangle$:
$$\langle\varphi|\psi\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi(g)\bar{\psi}(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{k}|C_i|\varphi(h_i)\bar{\psi}(h_i).$$
Характеры ортогональны по строкам и столбцам:
$$\langle\chi^{(i)}|\chi^{(j)}\rangle = \delta_{ij}, \qquad \sum_{n=1}^{k}\chi^{(n)}(h_i)\bar{\chi}^{(n)}(n_j) = \delta_{ij}\frac{|G|}{|C_i|}.$$
Число неприводимых представлений равно числу классов сопряженности. Все неприводимые представления абелевой группы одномерны, что является следствием теоремы Бернсайда:
$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = |G|,$$
где d_i – размерность i-го представления. *Критерием неприводимости* является $\langle\chi|\chi\rangle = 1$, тогда разложение на неприводимые: $\chi = a_1\chi^{(1)} + \ldots + a_n\chi^{(n)}$, где $a_i = \langle\chi|\chi^{(i)}\rangle$.

Таблицы неприводимых представлений

Построение для C_n тривиально в силу абелевости группы. Каждый элемент представим в виде $\sqrt[n]{1}$. Построение производим с учетом свойства $\rho(r^k) = \rho(r)^k$.

Теперь для D_4 размера $|D_4| = 2 \times n = 8$, будут классы сопряженности $\{\mathbb{1}\}$, $\{r^2\}$, $\{r, r^3\}$ и $\{s, sr^2\}$, $\{sr, sr^3\}$.

$\mathbb{1}\vert\ 1$	$r, r^3\vert\ 2$	$r^2\vert\ 1$	$s, sr^2\vert\ 2$	$sr, sr^3\vert\ 2$
1	1	1	1	1
1	1	1	-1	-1
1	-1	1	1	-1
1	-1	1	-1	1
2	0	-2	0	0

Всегда есть тривиальное представление. Также из теоремы Бернсайда находим первый столбец.

По сохранению или смене ориентация базиса можем сопоставить ± 1 соответсвующием классам. Важно помнить, что $(sr^k)^2 = \mathbb{1}$ и $(r^k)^4 = \mathbb{1}$, откуда знаем одномерные представления $\rho(sr^k) = \pm 1$ и $\rho(r^k) = \sqrt[4]{1} = \pm i, \pm 1$, откуда достраиваем одномерные представления.

При построение D_7 будет важно вспомнить про сопоставление матриц поворота двухмерным представлениям, по которым найдём элементы таблицы характеров, как след соответсвующей матрицы.

Построим табличку характеров для $S_3\colon |S_3| = 3! = 6$. Также из теоремы Бернсайда находим первый столбец. Для второй строчки всегда есть *знаковое* представление.

$e\vert$ 1	$(a,b)\vert$ 3	$(a,b,c)\vert$ 2
1	1	1
1	-1	1
2	0	-1

Построим табличку характеров для $S_4\colon |S_4| = 4! = 24$.

$e\vert$ 1	$(a,b)\vert$ 6	$(a,b,c)\vert$ 8	$(a,b,c,d)\vert$ 6	$(a,b)(c,d)\vert$ 3
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
2	0	-1	0	2
3	-1	0	1	-1
3	1	0	-1	-1

Тут важно посмотреть на отображение $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, построив $\chi[\mathbb{C}^4]$, значениях характеров которой можем восстановить по количеству неподвижных точек $(4, 2, 1, 0, 0)$. Неприводимое представление можем получить в виде $\chi[\mathbb{C}^4] - \chi^{(1)}$. Также может помочь тензорное произведение представлений.

7 Для любознательных

Автомодельные решения

Если уравнения вида $\hat{L}\, u(\boldsymbol{r}, t) = \ldots$ – однородно и изотропно, то может помочь автомодельная подстановка:

$$u(t, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{t^a} f\left(\tfrac{r}{t^b}\right) \quad : \quad t \to \lambda t \quad \Rightarrow \quad u \to \lambda^{-a} u,\ r \to \lambda^b r. \tag{7.1}$$

Восстановить a в общем виде нельзя, но требуя, например, локальности решения $\int_{\mathbb{R}^n} u\, dV = \text{const}$ можем иногда найти и a.

Метод Боголюбова-Крылова

Рассмотрим прозвольное возмущение гармонического осциллятора:

$$\left(\partial_t^2 + \omega_0^2\right) x(t) = \varepsilon f(t, x, \dot{x}). \tag{7.2}$$

Приближенно (до $o(\varepsilon)$) можем методом Боголюбова-Крылова найти решение в виде

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \tag{7.3}$$

где зависимость от времени амплитуды и фазы определяестся уравнениями

$$\partial_t A(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_{\omega_0 t - \pi}^{\omega_0 t + \pi} f(\tau, x, \dot{x}) \sin\left(\omega_0 \tau + \varphi(t)\right)\, d(\omega_0 \tau), \tag{7.4}$$

$$\partial_t \varphi(t) = \frac{-\varepsilon}{2\pi A\omega_0} \int_{\omega_0 t - \pi}^{\omega_0 t + \pi} f(\tau, x, \dot{x}) \cos(\omega_0 \tau + \varphi(t))\, d(\omega_0 \tau). \tag{7.5}$$

Упрощая себе жизнь с $\omega_0 = 1$, приходим к выражению

$$\partial_t A(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau, x, \dot{x}) \sin\left(\tau + \varphi\right)\, d\tau,$$

$$\partial_t \varphi(t) = \frac{-\varepsilon}{2\pi A} \int_0^{2\pi} f(\tau, x, \dot{x}) \cos(\tau + \varphi)\, d\tau,$$

где $\dot{\varphi} = 0$ почти всегда и в интеграле для $\dot{A}$ можно избавиться от φ.

Уравнения Хопфа и Бюргерса

Уравнение Хопфа. В акустике естественно возникает уравнение Хопфа:
$$\partial_t u + u\,\partial_x u = 0.$$
Решение может быть найдено в виде
$$x(t) = x_0 + u_0(x_0)t, \qquad u(x(t), t) = c(x_0) = u_0(x_0).$$
где сначала разрешаем уравнение $c = u_0(x_0)$ относительно $x_0 = x_0(c)$, а потом подставляя $x_0(c)$ в выражение для $x(t) = x_0(c) + ct$, разрешаем его относительно $c = c(x(t), t)$. Зная, что $u(x(t), t) = c(x(t), t)$, находим $u(x, t) = c(x, t)$.

Накачка. Добавим к уравнению накачку:
$$\partial_t u + u\,\partial_x u = f(x, t).$$
Система может быть сведена к
$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, x(t)) \\ \dot{x} = u(t, x(t)) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} = f(x, t), \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(t, x_0, \dot{x}_0),$$
где $\dot{x}_0 = u_0(x_0)$. Сначала разрешаем уравнение $x(t)$ относительно $x_0 = x_0(t, x)$, а потом подставляем этот x_0 в $u(t, x) = \dot{x}(t, x_0(t, x))$, что и является решением исходной задачи.

Уравнение Бюргерса. Добавим диссипацию в уравнение Хопфа:
$$\partial_t u + u\,\partial_x u = \partial_x^2 u,$$
так получим *уравнение Бюргерса*.

Заметим, что преобразование Коула-Хопфа
$$\psi = \exp\left(-\tfrac{1}{2}h\right), \qquad u = \partial_x h, \qquad \Rightarrow \qquad (\partial_t - \partial_x^2)\psi = 0.$$
Имея начальные условия для $\psi_0(x)$, можем найти
$$\psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \psi_0(y) \frac{\theta(t)}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) dy,$$
откуда находим решение
$$u(t, x) = -2\partial_x \ln \psi(t, x).$$

8 х Справочник

Вычеты

Интеграл по дуге может быть найден, как
$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_j} \operatorname{res}_{z_j} f(z), \qquad \operatorname{res}_{z_j} f(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i\varphi} f(z_j + \varepsilon e^{i\varphi})$$
$$= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_j} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_j)^m f(z)\right),$$
где m – степень полюса.

Интегралы

Например,
$$\int_0^{\pi/2} \sin^a \varphi \cos^b \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} B\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(1 + \frac{a+b}{2}\right)}.$$
Также для $1 + m < kn$, верно
$$\int_0^\infty \frac{x^m}{(1+x^n)^k}\, dx = \bigg/ t = \frac{1}{1+x^n} \bigg/ = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)\Gamma\left(k - \frac{m+1}{n}\right)}{n\Gamma(k)}.$$
Может быть полезно:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm i z^2}\, dz = \sqrt{\pi} e^{\pm i\pi/4}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos z^2 \, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin z^2 \ z = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Преобразование Фурье

Для преобразования Фурье полезно помнить
$$\mathcal{F}[f^{(n)}] = (i\omega)^n \mathcal{F}[f](\omega/a), \qquad \mathcal{F}[f(x-x_0)] = e^{-i\omega x_0}\mathcal{F}[f](\omega/a), \qquad \mathcal{F}[f(ax)] = |a|^{-1}\mathcal{F}[f](\omega/a),$$
то есть что происходит при растяжение, сдвигах и дифференцирование.

Преобразование Лапласа

Выпишем несколько пар оригинал-изображение:
$$t^n e^{\lambda t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}, \qquad t^\alpha e^{\lambda t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{n+1}}, \qquad \frac{(1-e^{-t})}{t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \ln\left(1+\frac{1}{p}\right), \qquad \frac{\sin t}{t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \operatorname{arctg} p$$
$$\sin(\nu t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\nu}{p^2+\nu^2}, \qquad \cos(\nu t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{p}{p^2+\nu^2}, \qquad t\sin(\nu t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2p\nu}{(p^2+\nu^2)^2}, \qquad t\cos(\nu t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{p^2-\nu^2}{(p^2+\nu^2)^2},$$
$$\operatorname{sh}(\nu t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\nu}{p^2-\nu^2}, \qquad \operatorname{ch}(\nu t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{p}{p^2-\nu^2}, \qquad e^{\lambda t}\sin(\nu t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\nu}{(p-\lambda)^2+\nu^2}, \qquad e^{\lambda t}\cos(\nu t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\nu^2},$$
Также помним, что $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$, и $L[\delta(t-a)] = e^{-ap}$, при $a > 0$.

Преобразование Меллина

Для функции $g(x)$ такую, что $g(x) = O(x^{-\alpha})$ при $x \to 0$ и $g(x) = x^{-\beta}$ при $x \to +\infty$ можем определить *преобразование Меллина*
$$G(\lambda) = \int_0^\infty g(x)x^{\lambda-1}\,dx,$$
определенного в полосе $\alpha < \operatorname{Re}\lambda < \beta$. Обратное преобразование может быть найдено в виде
$$g(x) = \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} G(\lambda)x^{-\lambda}\frac{d\lambda}{2\pi i},$$
для $\alpha < C < \beta$.

Для вычисления инетгралов бывает удобно воспользоваться сверточным свойством преобразования Меллина
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)x^{\lambda-1}\,dx = \int_{C_f-i\infty}^{C_f+i\infty} F(\lambda_f)G(\lambda-\lambda_f)\frac{d\lambda_f}{2\pi i} = \int_{C_g-i\infty}^{C_g+i\infty} F(\lambda-\lambda_g)G(\lambda_g)\frac{d\lambda_g}{2\pi i},$$
где $\alpha_f + \alpha_g < \operatorname{Re}\lambda < \beta_f + \beta_g$. В частности, при допустимом $\lambda = 1$, получаем
$$\int_0^\infty f(x)g(x)\,dx = \int_{C_f-i\infty}^{C_f+i\infty} F(\lambda_f)G(1-\lambda_f)\frac{d\lambda_f}{2\pi i}.$$

Приведем некоторый зоопарк по преобразованию Меллина:
$$e^{-x} \xrightarrow{M} \Gamma(\lambda), \qquad \frac{1}{1+ax^n} \xrightarrow{M} \frac{\pi a^{-\frac{\lambda}{n}}}{n\sin\left(\frac{\pi\lambda}{n}\right)}, \qquad \frac{1}{\sqrt[m]{1+x^n}} \xrightarrow{M} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m}-\frac{\lambda}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}, \qquad \frac{1}{1-x} \xrightarrow{M} \pi\cot(\pi\lambda),$$
$$\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx}} \xrightarrow{M} \frac{\Gamma(1-\lambda)\Gamma\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}-\lambda}}{\sqrt{\pi b}}, \qquad x^n \xrightarrow{M} 2\pi\delta(i(n+\lambda)), \qquad \frac{1}{1+e^{\alpha x}} \xrightarrow{M} \left(1-2^{1-\lambda}\right)\alpha^{-\lambda}\Gamma(\lambda)\zeta(\lambda),$$
$$\sin x \xrightarrow{M} \sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\Gamma(\lambda), \qquad \cos x \xrightarrow{M} \cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\Gamma(\lambda).$$