Задание по курсу
«Уравнения математической физики»

Авторы заметок: Хоружий Кирилл

От: *8 февраля 2022 г.*

Содержание

ТеорМин №1 **2**

1 Неделя I **2**

ТеорМин №1

Излучение. Волновое уравнение с источником:

$$(\partial_t^2 - c^2\nabla^2)u = \chi, \tag{1}$$

с законом дисперсии $\varpi = cq$.

Функция Грина оператора $\partial_t^2 - c^2\nabla^2$:

$$G(t,r) = \frac{\theta(t)}{4\pi c r}\delta(r - ct),$$

а значит выражение для поля:

$$u(t,\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi c^2}\int \frac{d^3 r_1}{R}\ \chi(t - R/c, \boldsymbol{r}_1), \tag{2}$$

где $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|$.

Уравнение диффузии. Уравнение диффузии:

$$\left(\partial_t - \nabla^2\right) u = 0, \tag{3}$$

решение которого может быть найдено в виде:

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dy_1 \ldots dy_d}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2}{4t}\right) u_0(\boldsymbol{y}). \tag{4}$$

Асимтотики могут быть найдены в виде

$$u(t,\boldsymbol{x}) \approx \frac{A}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{4t}\right), \qquad A = \int_{\mathbb{R}^d} dy_1 \ldots dy_d\ u_0(\boldsymbol{y}). \tag{5}$$

При $A = 0$ асимтотика будет соответствовать

$$u(t,\boldsymbol{x}) \approx \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{x}}{(4\pi t)^{d/2+1}} \exp\left(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{4t}\right), \qquad \bar{B} = 2\pi\int_{\mathbb{R}^d} dy_1 \ldots dy_d\ \boldsymbol{y}\, u_0(\boldsymbol{y}), \tag{6}$$

где асимтотики имеют место при $t \gg l^2$, l – масштаб на котором локализовано поле.

1 Неделя I

№ 4.1.6

Найдё решение волнового уравнения (1) для точечного гармонческого источника

$$\chi = \cos(\omega t)\delta(\boldsymbol{r}).$$

Подставляя ξ в (2), находим

$$u(t,\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi c^2}\int \frac{d^3 r_1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|}\cos(\omega t - \omega|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|/c)\delta(\boldsymbol{r}_1) = \frac{1}{4\pi c^2}\frac{\cos\left(\omega(t - \frac{r}{c})\right)}{r}.$$

№ 4.1.7

Найдём значение функции Грина при $r = 0$ для оператора $\partial_t^2 + \nabla^4$. Для начала перейдём к Фурье образу

$$\tilde{G}(t,\boldsymbol{q}) = \int d^3\boldsymbol{x}\ e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}} G(t,\boldsymbol{x}), \qquad \Rightarrow \qquad \left(\partial_t^2 + q^4\right)\tilde{G} = \delta(t).$$

Решение этого уравнение известно[1]:

$$\tilde{G}(t) = \theta(t)\frac{1}{q^2}\sin\left(q^2 t\right).$$

Осталось найти

$$G(t,0) = \theta(t)\int \frac{d^3\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3}\frac{\sin(q^2 t)}{q^2} = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \sin\left(q^2 t\right) = \frac{1}{8\sqrt{2}\pi^{5/2}}\cdot\frac{\theta(t)}{\sqrt{t}}.$$

№ 4.2.2

Найдём решение одномерного дифузионного уравнения для

$$\left(\partial_t - \partial_x^2\right) u = 0, \qquad u_0(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right).$$

[1] Конпект, (1.11).

Точное решение. Воспользуемся (4), тогда
$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t} - \frac{y^2}{2l^2}\right)\, dy.$$
Выделяя полный квадрат, находим, что
$$\frac{(x-y)^2}{4t} + \frac{y^2}{2l^2} = \left(\sqrt{\frac{1}{2l^2}+\frac{1}{4t}}\,y - \frac{x}{4t\sqrt{\frac{1}{2l^2}+\frac{1}{4t}}}\right)^2 + \frac{x^2}{2l^2+4t},$$
а значит
$$u(t,x) = \frac{l}{\sqrt{l^2+2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2+4t}\right).$$
Асимптотика. Так как фунция u_0 симметрична, то через (5) находим
$$A = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\, dx = l\sqrt{2\pi}, \quad \Rightarrow \quad u(t,x) \approx \frac{l}{\sqrt{2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right),$$
что является асимптотикой точного решения при $t \gg l^2$.

№ 4.2.3

Найдём асимтотическое поведение решение одномерного диффузного уравнения (3) для различных начальных условий.

1. Рассмотрим
$$u_0(x) = x\exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right).$$
В силу нечетности функции, через (6), находим
$$B = 2\pi \int_{\mathbb{R}} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right) = -4\pi l^2\ \partial_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2/2l^2}\, dx = -4\pi l^2 \sqrt{2\pi} l\ \partial_\alpha \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = l^3 (2\pi)^{3/2},$$
а значит искомая асимптотика
$$u(t,x) \approx \left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^3 \frac{x e^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}.$$
2. Рассмотрим
$$u_0(x) = \exp\left(-\frac{|x|}{l}\right).$$
В силу четности функции, через (5), находим
$$A = 2\int_0^\infty e^{-x/l}\, dx = 2l.$$
Тогда искомая асимптотика
$$u(t,x) \approx \frac{l}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{t}}.$$
3. Рассмотрим
$$u_0(x) = x\exp\left(-\frac{|x|}{l}\right).$$
В силу нечетности функции, через (6), находим
$$B = 4\pi \int_0^\infty x^2 \exp\left(-\frac{|x|}{l}\right)\, dx = 4\pi l^2\ \partial_\alpha^2 \int_0^\infty e^{-\alpha x/l}\, dx = 2\pi l^2 \partial_\alpha^2 \left(\frac{l}{\alpha}\right) = 8\pi l^3,$$
а значит
$$u(t,x) \approx \frac{l^3}{\sqrt{\pi}} \frac{x e^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}.$$
4. Рассмотрим
$$u_0(x) = \frac{1}{x^2+l^2}.$$
В силу четности функции, через (5), находим
$$A = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+l^2}\, dx = 2\pi i \frac{1}{2il} = \frac{\pi}{l},$$

тогда искомая асимптотика

$$u(t,x) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2l}\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{t}}.$$

5. Рассмотрим

$$u_0(x) = \frac{x}{(x^2+l^2)^2}.$$

В силу четности функции, через (6), находим

$$B = 2\pi\int_{\mathbb{R}}\frac{x}{(x^2+l^2)^2}\,dx = 4\pi i\lim_{x\to il}\left(\frac{x^2}{(x+il)^2}\right)' = \frac{\pi^2}{l}.$$

Тогда искомая асимптотика

$$u(t,x) = \frac{\sqrt{\pi}}{8l}\frac{xe^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}.$$