Задание по курсу «Экспериментальная реализация концепций квантовой физики»

Автор заметок: Хоружий Кирилл

От: *23 февраля 2022 г.*

Содержание

1 Неделя №1 2

2 Неделя №2 3

1 Неделя №1

Задача 1

Рассмотрим эрмитов оператор $\hat{A}$. По определению
$$\hat{A}\left|a\right\rangle = a\left|a\right\rangle, \qquad \left\langle a\right|\hat{A}^\dagger = \left\langle a\right|\bar{a}.$$
Домножая на $|a\rangle$, находим
$$(a-\bar{a})\langle a|a\rangle = 0, \qquad \Rightarrow \qquad a = \bar{a}, \qquad \Rightarrow \qquad a \in \mathbb{R}.$$
Рассмотрим теперь
$$\langle a|\hat{A}\rangle b = b\langle a|b\rangle = a\langle a|b\rangle, \qquad \Rightarrow \qquad \langle a|b\rangle = 0,$$
при $a \neq b$.

Задача 2

Знаем магнитный момент
$$\mu = \frac{IS}{c} = \frac{1}{c}\frac{\omega e}{2\pi}\pi r^2 = \frac{e}{2mc}L = \mu_{\text{эл}}/2,$$
т.к. фактор Ланде для $s = 1/2$ равен $g = 2$.

Задача 3

Можем выписать операторы и найти коммутатор
$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \frac{\hbar}{2}|-\rangle\langle+|, \qquad \hat{S}_y = -\frac{i\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \frac{i\hbar}{2}|-\rangle\langle+|,$$
тогда
$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = \frac{i\hbar^2}{2}|+\rangle\langle+| - \frac{i\hbar^2}{2}|-\rangle\langle-| = i\hbar\hat{S}_z \neq 0,$$
что вполне логично.

Задача 4

Рассмотрм эрмитов оператор $\hat{A}$ с базисом $|a_i\rangle$, введем оператор $\hat{B}$:
$$\hat{B} = \prod_i(\hat{A} - a_i),$$
и докажем, что $\hat{B}\left|b\right\rangle = 0 \;\forall \left|b\right\rangle \in \mathcal{H}$.

Знаем, что
$$\left|b\right\rangle = \sum_i c_i\left|a_i\right\rangle, \qquad \Rightarrow \qquad \hat{B}\left|b\right\rangle = \sum_i c_i\hat{B}\left|a_i\right\rangle = \sum_i c_i\prod_k(a_i - a_k)\left|a_i\right\rangle = 0,$$
что и требовалось доказать.

Задача 5

Знаем, что
$$\left|S_x,+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|+\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|-\right\rangle, \qquad \left|S_x,-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|+\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|-\right\rangle.$$
Ну, выражаем в обратную сторону
$$\left|+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|S_x,+\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|S_x,-\right\rangle, \qquad \left|-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|S_x,+\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|S_x,-\right\rangle.$$
Подставляя, находим
$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\left(|S_x,+\rangle\langle S_x,-| + |S_x,-\rangle\langle S_x,+|\right).$$

Задача 6

Знаем оператор

$$\hat{S}_\varphi = \frac{\hbar}{2}\left(e^{-i\varphi}|+\rangle\langle-| + e^{i\varphi}|-\rangle\langle+|\right).$$

Найдём его собственный вектор

$$\hat{S}_\varphi\,|\kappa\rangle = \lambda\,|\kappa\rangle\,, \qquad \kappa = \alpha_+\,|+\rangle + \alpha_-\,|-\rangle\,, \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{\hbar}{2},$$

тогда собственные векторы

$$|S_\varphi, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|+\rangle + \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}\,|-\rangle\,, \qquad |S_\varphi, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|+\rangle - \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}\,|-\rangle\,.$$

2 Неделя №2

Задача 1

Рекуррентный путь. Для $\hat{F} = \hat{S} + \hat{I}$ найдём базис собственных функций в терминах $|S, m_S\rangle\,|I, m_I\rangle \overset{\text{def}}{=} |m_S, m_I\rangle_{SI}$. Всего векторов будет $(2S+1)(2I+1) = 6$. Два вектора нам известны из однозначного соответствия

$$\hat{F}_\pm = \hat{S}_\pm + \hat{I}_\pm, \quad (\hat{S}_+ + \hat{I}_+)\left|\tfrac{1}{2}, 1\right\rangle_{SI} = 0, \quad \Rightarrow \quad \left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right\rangle_F = \left|\tfrac{1}{2}, 1\right\rangle_{SI}.$$

Аналогично находим

$$\left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\right\rangle_F = \left|-\tfrac{1}{2}, -1\right\rangle_{SI}.$$

Далее понижающим оператором $\hat{F}_-$

$$\hat{J}_\pm\,|j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,|j, m\pm 1\rangle\,,$$

находим

$$F_-\left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right\rangle_F = \sqrt{3}\left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle_F = \left|-\tfrac{1}{2}, 1\right\rangle_{SI} + \sqrt{2}\left|\tfrac{1}{2}, 0\right\rangle_{SI}, \quad \Rightarrow \quad \left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle_F = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left|-\tfrac{1}{2}, 1\right\rangle_{SI} + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left|\tfrac{1}{2}, 0\right\rangle_{SI}.$$

Единственный ортогональный вектор $|a\rangle$: $\hat{F}_+\,|a\rangle = 0$, а значит соответствует $\left|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle_F$:

$$\left|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle_F = -\sqrt{\tfrac{2}{3}}\left|-\tfrac{1}{2}, 1\right\rangle_{SI} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left|\tfrac{1}{2}, 0\right\rangle.$$

Осталось найти остальные векторы через F_-:

$$\left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle_F = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left|\tfrac{1}{2}, -1\right\rangle_{SI} + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left|-\tfrac{1}{2}, 0\right\rangle_{SI},$$
$$\left|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle_F = -\sqrt{\tfrac{2}{3}}\left|\tfrac{1}{2}, -1\right\rangle_{SI} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left|-\tfrac{1}{2}, 0\right\rangle_{SI}.$$

Явный вид. Вообще можем написать явное выражение для определения коэффициентов разложения:

$$|J, M\rangle = \sum_{m_A, m_B} |j_A, m_A\rangle\,|j_B, m_B\rangle\,C^{JM}_{j_A, m_A; j_B, m_B},$$

где $C^{JM}_{j_A, m_A; j_B, m_B}$ – коэффициенты Клебша-Гордана. Можем выразить их в виде

$$C^{JM}_{j_A, m_A; j_B, m_B} = \langle j_A, m_A; j_B; m_B | J, M\rangle = (-1)^{j_A + j_B + m}\sqrt{2J+1}\begin{pmatrix} j_A & j_B & J \\ m_A & m_B & -M \end{pmatrix},$$

где последний множитель – $3j$-символы Вигнера. Явный вид:

$$C^{JM}_{j_A, m_A; j_B, m_B} = \sqrt{2J+1}\sqrt{\Delta_{j_A j_B J}}\sqrt{\frac{(j_A + m_A)!(J-M)!}{(j_A - m_A)!(j_B + m_B)!(j_B - m_B)!(J+M)!}} \times$$
$$\times \sum_s^J \frac{(-1)^{j_A + m_B - s}(J+s)!(j_B + s - m_A)!}{(J-s)!(s - m_A - m_B)!(s - j_A + j_B)!(j_A + j_B + s + 1)!},$$

где суммирование идёт по $s = \max(m_A + m_B,\ j_A - j_B)$, а $\Delta_{j_A j_B j}$:

$$\Delta_{j_A j_B J} = \frac{(j_A + j_B - J)!(j_B + J - j_A)!(J + j_A + j_B + 1)!}{(j_A - j_B + J)!},$$

что при вычисление даёт то же самое, например:

$$C^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1, 1} = -\sqrt{\tfrac{2}{3}}, \qquad C^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 0} = \tfrac{1}{\sqrt{3}},$$

что восстанавливает $\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle_F$.

Энергетические сдвиги. Найдём добавку спин-спинового взаимодействия:

$$\hat{H}_{SI} = \hbar\omega_{\text{hf}}\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{I}} = \frac{\hbar\omega_{\text{hf}}}{2}\left(F^2 - S^2 - I^2\right) = \frac{\hbar\omega_{\text{hf}}}{2}\left(F(F+1) - \frac{11}{4}\right).$$

Значит состояния $\left|\frac{3}{2}, \ldots\right\rangle_F$ сдвинуты на $\frac{1}{2}\hbar\omega_{\text{SI}}$, а состояния $\left|\frac{1}{2}, \ldots\right\rangle_F$ сдвинуты на $-\hbar\omega_{\text{hf}}$ относительно невозмущенного состояния.

Задача 2

Знаем, что

$$\hat{H} = \hbar\omega_{\text{hf}}\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{I}} + \hbar\omega_{\text{L}}\hat{S}_z.$$

Найдём коммутаторы $[\hat{H}, \hat{F}^2]$ и $[\hat{H},\, \hat{F}_z]$:

$$\hat{F}^2 = S^2 + I^2 + 2\,\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{I}}, \quad \Rightarrow \quad [\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{I}}, \hat{F}^2] = 0.$$

Ненулевой вклад даст только $\hat{S}_z$:

$$[\hat{S}_z, \hat{F}^2] = 2[\hat{S}_z,\, \hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{I}}] = 2i\hbar\left(\hat{I}_x\hat{S}_y - \hat{I}_y\hat{S}_x\right), \quad \Rightarrow \quad [\hat{H},\, \hat{F}^2] = 2i\hbar^2\omega_{\text{L}}\left(\hat{I}_x\hat{S}_y - \hat{I}_y\hat{S}_x\right).$$

Для второго комутатора ненулевой вклад может быть только от $\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{I}}$:

$$[\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{I}}, \hat{S}_z + \hat{I}_z] = [\hat{S}_x\hat{I}_x + \hat{S}_y\hat{I}_y, \hat{S}_z + \hat{I}_z] = 0, \quad \Rightarrow \quad [\hat{H},\, \hat{F}_z] = 0,$$

где мы воспользовались коммутационным соотношением $[j_i, j_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}j_k$.