

**Авторы:** Хоружий Кирилл  
Рузайкин Трофим

**От:** 18 февраля 2022 г.

## 1 Кинетическое уравнение

**Уравнение Лиувилля.** Эволюцию матрицы плотности знаем из уравнения Лиувилля [1]:

$$i\hbar \partial_t \hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (1)$$

Далее будет феноменологически введено спонтанное излучение, также считаем неизменным излучение лазера, поэтому гамильтониан сводится к

$$H = H^A + H^I,$$

где  $H^A$  – гамильтониан атома,  $H^I$  – взаимодействие атома с полем.

**Атомарный гамильтониан.** Матричное представление для  $\hat{H}^A$  диагонально:

$$H_{\beta\alpha}^A = \hbar\omega_{\beta\gamma}\delta_{\beta\alpha},$$

где  $|\gamma\rangle$  выбран за нижнее  $g$ -состояние. Можем найти

$$[H^A, \hat{\rho}]_{\alpha\beta} = \sum_a \langle \alpha | \hat{H}^A | a \rangle \langle a | \hat{\rho} | \beta \rangle - \sum_b \langle \alpha | \hat{\rho} | b \rangle \langle b | \hat{H}^A | \beta \rangle = \hbar\omega_{\beta\gamma}\rho_{\beta\alpha} - \hbar\omega_{\alpha\gamma}\rho_{\beta\alpha} = \hbar\rho_{\beta\alpha}\omega_{\beta\alpha}.$$

**Гамильтониан взаимодействия.** ... И получаем (для бегущей волны)

$$H_{\beta\alpha}^I = \hbar\Omega_{\beta\alpha}e^{i\omega t - ikz},$$

где  $\Omega_{\beta\alpha} = 0$ ,  $z$  – положение атома относительно лазерного излучения.

В насыщенной спектроскопии мы работаем с атомарным газом, определяющим уширением в динамике будет зависимость  $z(t)$ . Действительно, считая что атом движется со скоростью  $v$ , под углом  $\theta$  к пучку, находим

$$z(t) = vt \cos \theta, \quad \Rightarrow \quad i\omega t - ikz(t) = it \left( \omega - \frac{\omega}{c} v \cos \theta \right)$$

где для каждого атома считаем  $z(0) = 0$ . Получается, что для атома появляется доплеровский сдвиг:

$$\omega' = \omega \left( 1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right).$$

Далее будем рассматривать распределение Максвелла по  $v_z$ , тогда  $H_{\beta\alpha}^I$  переписывается в виде

$$H_{\beta\alpha}^I = \hbar\Omega_{\beta\alpha}e^{i\omega't}, \quad \omega' = \omega \left( 1 - \frac{v_z}{c} \right).$$

**Замена переменных.** Жизнь станет лучше, если перейдём к новым недиагональным элементам [2]  $\tilde{\rho}_{\beta\alpha}$ :

$$\tilde{\rho}_{\beta\alpha} = \rho_{\beta\alpha} e^{i\omega t (1 - \delta_{\alpha\beta})} = \begin{cases} \rho_{\beta\alpha} e^{i\omega t}, & \beta \neq \alpha, \\ \rho_{\beta\alpha}, & \beta = \alpha. \end{cases}$$

Тогда производная по времени переписывается в виде

$$\partial_t \rho_{\beta\alpha} = (\partial_t \tilde{\rho} - i\omega \tilde{\rho}_{\beta\alpha}) e^{-i\omega t}.$$

Тогда уравнение на  $\partial_t \tilde{\rho}_{\beta\alpha}$ :

$$i\hbar \partial_t \tilde{\rho}_{\beta\alpha} = \hbar(\omega_{\beta\alpha} - \omega) \tilde{\rho}_{\beta\alpha} + \sum_j (H_{\beta j}^I \tilde{\rho}_{j\alpha} - \tilde{\rho}_{\beta j} H_{j\alpha}^I).$$

**Спонтанное излучение.** К уравнению (1) мы добавляем релаксационное слагаемое для феноменологического описания [2,3] спонтанного излучения:

$$i\hbar \partial_t \hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}] + i\hbar \mathcal{L}_{\beta\alpha}^{\text{relax}}(\hat{\rho}).$$

Разделим уровни в системе на  $g$ -уровни  $\{g\}$  и  $e$ -уровни  $\{e\}$ . Тогда  $\mathcal{L}_{\beta\alpha}^{\text{relax}}(\hat{\rho})$  переписывается в виде

$$\mathcal{L}_{\beta\alpha}^{\text{relax}}(\hat{\rho}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\tau} \rho_{\beta\alpha}, & \beta \in \{e\}, \alpha \in \{g\}, \\ -\frac{1}{\tau} \rho_{\beta\beta}, & \beta = \alpha \in \{e\}, \\ +\frac{1}{\tau} \sum_{\gamma \in \{e\}} (C_{\gamma\alpha})^2 \rho_{\gamma\gamma}, & \beta = \alpha \in \{g\}. \end{cases}$$

## 2 Усреднение

Итак, для заданной скорости  $v_z$  (далее просто  $v$ ) можем найти  $\rho_v(t)$ . Далее будем работать с усредненным значением

$$\bar{\rho}_v = \frac{1}{n_t} \sum_{j=0}^{n_t} \rho(v, t_j),$$

где  $n_t$  – количество точек по которым происходит усреднение,  $t_j = j \cdot dt$ ,  $dt$  – шаг<sup>1</sup> усреднения по времени.

Зная распределение по  $v$ :

$$f(v) dv = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv,$$

можем найти среднее по атомам значение для  $\hat{\rho}$ :

$$\bar{\rho} = \sum_{i=1}^{n_v} \bar{\rho}_v(v) f(v),$$

где  $n_v \approx 200$ , скорости  $v$  берём до  $3v_Q = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$ .

## Список литературы

- [1] Leonard Mandel and Emil Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [2] L Maguire, R Bijnen, Emine Mese, and R Scholten. Theoretical calculation of saturated absorption spectra for multi-level atoms. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys*, 39:2709–2720, 06 2006.
- [3] Allen L and Eberly J H. *Optical Resonance and Two-Level Atoms*. New York: Wiley, 1975.

---

<sup>1</sup>По советам [2] возьмём  $dt \approx 0.2$  нс и  $n_t \cdot dt \approx 50\tau$ .