

ЗАДАЧИ К ЭКЗАМЕНУ «КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА II»

Авторы заметок: Хоружий Кирилл
Примак Евгений

От: 22 мая 2022 г.

Содержание

№1. Линейный эффект Штарка в атоме водорода	2
№2. Матричный элемент оператора эволюции для свободной частицы	2
№6. Сумма по поляризациям спиноров Дирака	3
№16. Рассеяние тождественных частиц	3
№18. Фазы рассеяния	3
№19. Рассеяние в борновском приближении	4

№1. Линейный эффект Штарка в атоме водорода

Перепишем интегралы в сферических гармониках. Теперь рассмотрим возмущение, вида

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + \hat{V}, \quad \hat{V} = -eE\hat{z}$$

Известно, что $n = 2$, тогда вырождение $n^2 = 4$. Можем явно выписать несколько функций

$$|200\rangle = \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{z}{2a}\right)^{3/2} e^{-r/2a} \left(1 - \frac{r}{2a}\right),$$

$$|210\rangle = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \left(\frac{1}{2a}\right)^{3/2} e^{-r/2a} \frac{r}{\sqrt{3}a},$$

а для $|211\rangle$ и $|21-1\rangle$ важно только что есть фактор $e^{im\varphi}$.

Действительно,

$$\langle 21m|\hat{V}|21m'\rangle = 0, \quad m, m' = \pm 1.$$

Осталось посчитать

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \langle 200|\hat{V}|210\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \dots d^3\mathbf{r} = 3eE\frac{a}{z}.$$

Получилось матрица ненулевыми коэффициентами только в первом блоке 2 на 2:

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \kappa, \quad \lambda_2 = -\kappa, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Решая секулярное уравнение, находим

$$E_2 = -\frac{\text{Ry}}{2^2}, \quad \left[\hat{H} + \hat{V} - (E_2 \pm \kappa)\mathbb{1}\right]|\psi\rangle = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0), \quad \mathbf{c}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0).$$

Энергии расщепления

$$E^+ = E_2^{(0)} + \kappa, \quad E^- = E_2^{(0)} - \kappa.$$

№2. Матричный элемент оператора эволюции для свободной частицы

Матричный элемент. Найдём матричный элемент оператора эволюции для свободной частицы

$$Z[0] = \langle q_N|U(t'', t')|q_0\rangle = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar}S} = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \frac{dp_N}{2\pi\hbar} \prod_{k=1}^{N-1} \frac{dq_k dp_k}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sum_{k=1}^N \left(p_k \dot{q}_k dt - \frac{p_k^2}{2m} dt\right)\right).$$

Перепишем аргумент экспоненты в виде

$$\sum_{k=1}^N p_k \dot{q}_k dt - \frac{p_k^2}{2m} dt = \sum_{k=1}^{N-1} q_k(p_k - p_{k+1}) + q_N p_N - q_0 p_1 - \sum_{k=1}^N \frac{p_k^2}{2m} dt$$

Вспомяная, что

$$\int_{\mathbb{R}} dt \delta(t) e^{i\omega t} = 1, \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} = \delta(t),$$

можем проинтегрировать по всем координатам и получить

$$\int \exp\left(\frac{i}{\hbar} q_k(p_k - p_{k+1})\right) = 2\pi\hbar \delta(p_k - p_{k+1}), \quad k = 1, \dots, N-1.$$

Теперь интегрирование по импульсу тривиально:

$$Z[0] = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \frac{dp_N}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_N(q_N - q_0) - \frac{p_N^2}{2m} \underbrace{N dt}_{t''-t'}\right) = \sqrt{\frac{-im}{2\pi\hbar(t''-t')}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{(q''-q')^2}{t''-t'}\right),$$

где мы воспользовались

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2+bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a}, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ix^2} dx = e^{\pm i\pi/4} \sqrt{\pi}.$$

Уравнение Шрёдингера. Убедимся, что $Z[0] = \langle q|U(t, t')|q'\rangle$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$i\hbar\partial_t Z = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_q^2 Z.$$

Введем для удобства

$$\sqrt{\frac{-im}{2\pi\hbar(t''-t')}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{(q''-q')^2}{t''-t'}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha e^\beta.$$

Тогда

$$\partial_t Z = \alpha \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{t-t'} - \frac{im}{2\hbar} \frac{(q-q')^2}{(t-t')^2} \right) e^\beta, \quad \partial_q Z = \alpha \frac{im}{\hbar} \frac{q-q'}{t-t'} e^\beta, \quad \partial_q^2 Z = \frac{i\alpha m}{\hbar(t-t')} \left(1 + \frac{im}{\hbar} \frac{(q-q')^2}{t-t'} \right) e^\beta,$$

что и требовалось доказать.

№6. Сумма по поляризациям спиноров Дирака

Для покоящихся спиноров сумму по поляризациям

$$\Pi(\mathbf{0}) = \sum_{\lambda} u_{\lambda}(\mathbf{0}) \bar{u}_{\lambda}(\mathbf{0})$$

можем вычислить в явном виде, как прямое произведение

$$\Pi(\mathbf{0}) = mc(1, 0, 1, 0) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + mc(0, 1, 0, 1) \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = mc \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В ковариантном виде

$$\Pi(\mathbf{0}) = mc(\gamma_0 + \mathbb{1}) = (\not{k} + mc), \quad k_{\mu} = (mc, \mathbf{0}).$$

Можем посчитать (посчитать), что $\Lambda \not{k} \Lambda^{-1} \rightarrow \not{p}$, откуда сразу находим

$$\Pi(\mathbf{p}) = (\not{p} + mc), \quad \Pi^c(\mathbf{p}) = \sum_{\lambda} v_{\lambda}(\mathbf{p}) \bar{v}_{\lambda}(\mathbf{p}) = (\not{p} - mc),$$

где $\not{p} = p_{\mu} \gamma^{\mu} = p_0 \gamma_0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}$.

№16. Рассеяние тождественных частиц

Для двух тождественных частиц можем написать Ψ в виде

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, s_1, s_2) = \Phi(\mathbf{R}) \psi(\mathbf{r}) \chi(s_1, s_2),$$

для приведенной массы $\mu = m/2$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, \mathbf{R} — координаты центра масс.

α -частицы. Спин α -частицы равен нулю, так что говорим про Ψ для бозонов, симметричную по перестановкам. Тогда асимптотика на бесконечности имеет вид

$$\psi(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty} \sim e^{ikr} + e^{-ikr} + (f(\theta) + f(\pi - \theta)) \frac{e^{ikrsv}}{r}.$$

Тогда сечение рассеяния может быть записано в виде

$$d\sigma = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 d\Omega.$$

№18. Фазы рассеяния

Изменить константу $\beta \rightarrow \frac{\hbar^2 \beta^2}{2m}$. Для потенциала, вида

$$V(r) = \frac{\beta}{r^2}, \quad \beta > 0,$$

найдем фазы рассеяния δ_l .

Запишем уравнение Шредингера для парциальной волны $u_l(r) = r R_l(r)$:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{1}{r^2} \left(l(l+1) + \frac{2m\beta}{\hbar^2} \right) \right) u_l(r) = 0.$$

Рассмотрим замену $u_l(r) = \sqrt{r} \varphi(r)$

$$\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' + \left(k^2 - \frac{1}{r^2} \left(\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2m\beta}{\hbar^2} \right) \right) \varphi = 0,$$

решения которого знаем в виде функций Бесселя $J_{\pm\nu}(kr)$, где

$$\nu = \sqrt{\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2m\beta}{\hbar^2}}.$$

Требуя $u_l(0) = 0$, находим решение в виде

$$u_l(r) = c \sqrt{\frac{\pi k r}{2}} J_\nu(kr).$$

Полезно посмотреть асимптотику на бесконечности, для которой

$$u_l(r) \sim c \sin \left(kr - \frac{\pi \nu}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = c \sin \left(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l \right),$$

откуда находим искомые фазы рассеяния

$$\delta_l = -\frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2m\beta}{\hbar^2}} - \left(l + \frac{1}{2} \right) \right).$$

Предельный случай. В пределе $2m\beta/\hbar^2 \ll 1$ получаем

$$\delta_l \approx -\frac{\pi}{2} \frac{m\beta}{\hbar^2(l + \frac{1}{2})},$$

откуда также получаем $|\delta_l| \ll 1$.

В таком случае можем просуммировать ряд

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta) \approx \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \delta_l P_l(\cos \theta) \approx -\frac{\pi m\beta}{\hbar^2 k} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta).$$

Суммируя полиному Лежанда, находим

$$f(\theta) \approx -\frac{\pi m\beta}{2k\hbar^2 \sin(\theta/2)},$$

аналогично тому, что получили бы в борновском приближении.

№19. Рассеяние в борновском приближении

Рассмотрим в борновском приближении два короткодействующих потенциала. Амплитуда рассеяния может быть найдена в виде

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(r) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} = -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty V(r) \sin(qr) r dr, \quad \mathbf{q} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{k}' - \mathbf{k}, \quad q = 2k \sin(\theta/2).$$

Полное сечение рассеяния находим интегрируя амплитуду рассеяния:

$$\sigma = \int |f(\theta)|^2 d\Omega = 2\pi \int_0^\pi |f(\theta)|^2 \sin \theta d\theta.$$

Условие применимости запишется в виде

$$\frac{m}{2\pi\hbar^2} \left| \int \frac{e^{ikr}}{r} V(r) e^{ikz} d^3\mathbf{r} \right| \ll 1.$$

Потенциал Юкавы. Подставляя $V(r) = \frac{\alpha}{r} e^{-\kappa r}$, находим

$$f = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2(\kappa^2 + q^2)}, \quad \Rightarrow \quad \sigma = \left(\frac{m\alpha}{\hbar^2\kappa} \right)^2 \frac{4\pi}{4k^2 + \kappa^2}, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

Условие применимости для любых энергий: $\alpha m/\kappa \ll \hbar^2$. Для быстрых частиц можем ослабить условие до $\alpha \ll \hbar \times \hbar k/m$.

В пределе $\kappa \rightarrow 0$ получить резерфодовское сечение на отталкивающем кулоновском центре.