Заметки по курсу «Экспериментальная реализация концепций квантовой физики»

Лектор: Андрей Вадимович Турлапов

Стенография: Хоружий Кирилл

От: *17 февраля 2022 г.*

Содержание

2 Лекция №2

2.1 Сверхтонкое расщепление

Уровень ^1S, 4 вырожденных состояния: $|S_z, I_z\rangle$:
$$|{-}{-}\rangle\,, |{-}{+}\rangle\,, |{+}{-}\rangle\,, |{+}{+}\rangle\,.$$
Знаем поле диполя:
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3} + \frac{3\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{x})}{r^5} + \frac{8\pi}{3}\boldsymbol{\mu}\delta(\boldsymbol{x}).$$
Так вот, есть магнитный момент ядра $\boldsymbol{\mu}_I$ и $\boldsymbol{\mu}_S$, которые взаимодействуют:
$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{g_S|e|\hbar}{2m_e c}\hat{\boldsymbol{S}}, \quad g_S = -2.0023, \qquad \hat{\boldsymbol{\mu}}_I = \frac{g_I|e|\hbar}{2m_p c}\hat{\boldsymbol{I}}, \quad g_I = 5.58.$$
Так строим слагаемое для возмущения гамильтониана
$$V(\hat{\boldsymbol{S}}, \hat{\boldsymbol{I}}, \hat{\boldsymbol{x}}) = \frac{\hat{\boldsymbol{\mu}}\cdot\hat{\boldsymbol{\mu}}_I}{\hat{r}^3} - \frac{3(\hat{\boldsymbol{\mu}}_S\cdot\hat{\boldsymbol{x}})\hat{\boldsymbol{\mu}}_I\cdot\hat{\boldsymbol{x}}}{r^5} + \frac{8\pi}{3}\hat{\boldsymbol{\mu}}_S\cdot\hat{\boldsymbol{\mu}}_I\delta(\hat{\boldsymbol{x}}).$$
Сам гамильтониан помним:
$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{e}{\hat{r}} + \hat{V}.$$
Можем посчитать
$$\hat{H}_{SI} = \langle 100|V|100\rangle = \hbar\nu_{\text{hf}}\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{I}}, \qquad \frac{\nu_{\text{hf}}}{2\pi} = 1.4\ \text{ГГц},$$
где
$$\langle\boldsymbol{x}|100\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{2}{a_{\text{B}}^{3/2}}e^{-r/a_{\text{B}}}.$$
Вводим оператор
$$\hat{\boldsymbol{F}} = \hat{\boldsymbol{S}} + \hat{\boldsymbol{I}}, \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{I}} = \frac{1}{2}\left(F(F+1)\right) - \frac{3}{4}.$$
Подставляя, находим
$$\hat{H}_{SI} = \hbar\nu_{\text{hf}}\left(\frac{F(F+1)}{2} - \frac{3}{4}\right).$$
Получается отступление от невозмущенного уровня на $\frac{1}{4}\hbar\nu_{\text{hf}}$ и на $-\frac{3}{4}\hbar\nu_{\text{hf}}$ для $F=0$, $F_z=0$.

Можем найти путь из старого базиса в новый:
$$|F, F_z\rangle = \sum |S_z,\, I_z\rangle\langle S_z,\, I_z|\,|F,\, F_z\rangle\,.$$
Знаем, что
$$|11\rangle_F = |{+}{+}\rangle_S\,|{+}{+}\rangle_I = \left|S_z = \tfrac{1}{2}, I_z = \tfrac{1}{2}\right\rangle.$$
Теперь действуем на $|11\rangle_F$ понижающим оператором $\hat{F}_- = \hat{S}_- + \hat{I}_-$. Помним, что
$$\hat{J}_-\,|j, j_z\rangle = \sqrt{(j+j_z)(j-j_z+1)}\,|j, j_z - 1\rangle\,.$$
Так находим ответ
$$|10\rangle_F = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|{+}{-}\rangle_{SI} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|{-}{+}\rangle\,,$$
а вообще это коэффициенты Клебша-Гордана.

2.2 Эффекты Зеемана

Вспомним добавку к энергии в магнитном поле:
$$\hat{H} = -\hat{\boldsymbol{\mu}}\cdot\boldsymbol{B} = -\mu_z B = \hbar\omega_L\hat{S}_z, \qquad \omega_L = \frac{|e|B}{m_e c}.$$
1s-орбиталь. Теперь работаем в гамильтониане
$$\hat{H} = \hbar\nu_{\text{hf}}\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{I}} - \hat{\boldsymbol{\mu}}\cdot\boldsymbol{B}.$$
Теперь при $B \approx 0$ можем найти свиг по энергиям:
$$\Delta E \approx \langle 11|_F\hat{H}|11\rangle = \hbar\omega_L\langle\hat{S}_z\rangle = \frac{\hbar\omega_L}{2}.$$

Знаем, что при $B \to \infty$:

$$\hat{H} \approx \hbar\omega_L \hat{S}_z, \quad \Rightarrow \quad E_\pm = \pm\frac{\hbar\omega_L}{2}.$$