

**Уравнения движения.** Рассмотрим ограниченную задачу трёх тел. Перейдём во вращающуюся систему отсчёта с координатами  $u, v$ , тогда функция Лагранжа переписывается в виде

$$L = T + V = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) + \omega \sum_i m_i (x_i \dot{y}_i - \dot{x}_i y_i) + V_\omega,$$

где новая «силовая функция» имеет вид

$$V = V_G + \frac{I\omega^2}{2}, \quad V_G = G \sum_{k < j} \frac{m_k m_j}{r_{kj}}, \quad I = \sum_i m_i r_i^2.$$

В частности, для трёх тел,  $M_1 > M_2 \gg M_3 = m$ :

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \omega m (x \dot{y} - \dot{x} y) + \frac{GM_1 m}{r_{13}} + \frac{GM_2 m}{r_{23}} + \frac{m}{2} \omega^2 r_3^2.$$

Далее будем считать

$$\mathbf{r}_1 = (-\alpha R, 0), \quad \mathbf{r}_2 = (R, 0), \quad \alpha = M_2/M_1, \quad R^3 = \frac{GM_1}{(\alpha + 1)^2 \omega^2},$$

тогда

$$r_{13}^2 = (x + \alpha R)^2 + y^2, \quad r_{23}^2 = (x - R)^2 + y^2, \quad r_3^2 = x^2 + y^2.$$

Подставляя это всё в уравнений Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

находим уравнения движения

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -2m\dot{y}\omega + \partial_x V, \\ m\ddot{y} &= 2m\dot{x}\omega + \partial_y V, \end{aligned}$$

**Область Хилла.** Заметим, что уравнения движения имеют интеграл движения (сохранение энергии)

$$\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - V(x, y) = h,$$

который определяет *область Хилла*:  $\{(x, y) \mid V(x, y) + h \geq 0\}$ .

**Относительные равновесия.** Каждой критической точке  $V$  соответствует решение  $x(t) = x_0$  и  $y(t) = y_0$ . Всего критических точек будет пять (при  $M_1 > M_2$ ) – точки Лагранжа, которые соответствуют условию  $\partial_x V = \partial_y V = 0$ :

$$\begin{aligned} \partial_x V &= x\Phi - \frac{GmM_1}{r_{13}^3} \alpha R - \frac{GmM_2}{r_{23}^3} R, & \Phi &= m\omega^2 - \frac{GmM_1}{r_{13}^3} - \frac{GmM_2}{r_{23}^3}. \\ \partial_y V &= y\Phi, \end{aligned}$$

Легко видеть, что при  $y \neq 0$ ,  $\Phi = 0$ :

$$\frac{GM_1}{r_{13}^3} + \frac{GM_2}{r_{23}^3} = \omega^2, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r_{13}^3} + \frac{\alpha}{r_{23}^3} = \frac{1}{R^3} \frac{1}{(\alpha + 1)^2}, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r_{13}^3} + \frac{\alpha}{r_{23}^3} = \frac{1 + \alpha}{[R(1 + \alpha)]^3},$$

а значит  $r_{13} = r_{23} = r_{12} = R(1 + \alpha)$  – точки  $L_4$  и  $L_5$ , вершины равностороннего треугольника, со стороной  $r_{12}$ , они называются *треугольными точками либрации*.

**Коллинеарные точки либрации.** Теперь пусть  $y = 0$ , так приходим к *коллинеарным точкам либрации*:

$$\frac{x}{(\alpha + 1)^2 R^3} - \alpha \frac{x - R}{|x - R|^3} - \frac{x + \alpha R}{|x + \alpha R|^3} = 0.$$

Считая  $x = R \pm \alpha\rho$ , получим уравнения

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\alpha\rho^2} + \frac{\alpha\rho + R}{(\alpha + 1)^2 R^3} - \frac{1}{(\alpha\rho + \alpha R + R)^2} &= 0 \\ \frac{1}{\alpha\rho^2} + \frac{R - \alpha\rho}{(\alpha + 1)^2 R^3} - \frac{1}{(-\alpha\rho + \alpha R + R)^2} &= 0. \end{aligned}$$

Раскладывая в ряд по  $\alpha$ , находим в приближении  $o(\alpha)$

$$x_{L_{1,2}} = R \left( 1 \mp \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}} \right) = r_{12} \left( 1 \mp \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}} \right).$$

Теперь найдём  $x_{L_3} = -R - \alpha\rho$ . Тогда, аналогично с точностью до  $o(\alpha)$ :

$$x_{L_3} = -R \left( 1 + \frac{17}{12}\alpha \right) = -r_{12} \left( 1 + \frac{5}{12}\alpha \right),$$

где  $r_{12} = R(1 + \alpha)$ .