

# ЗАМЕТКИ ПО КУРСУ «УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

---

**Семинарист:** Александр Сергеевич Осин

**Стенография:** Хоружий Кирилл

**От:** 12 февраля 2022 г.

## Содержание

**1** Семинар №2

**2**

# 1 Семинар №2

**Секулярные члены.** Пусть есть уравнение вида

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon \omega_0^2 x, \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Решение может быть найдено в виде

$$x(t) = a \cos(\omega_0 \sqrt{1 + \varepsilon} t) \approx a \cos(\omega_0 (1 + \frac{\varepsilon}{2}) t) = a \cos \omega_0 t - \frac{a \varepsilon \omega_0 t}{2} \sin(\omega_0 t) + o(\varepsilon).$$

И вот видна беда, при  $\varepsilon \omega_0 t \sim 1$  теория возмущений не работает. В большей части резонансных систем возникают секулярные члены.

Получим этот результат в терминах теории возмущений. Пусть есть тот же гармонический осциллятор, заданы начальные условия, и знаем решение в виде

$$x(t) = x(0) \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \int_0^t \frac{\sin \omega_0(t - \tau)}{\omega_0} f(\tau) d\tau.$$

Разложим это всё по  $\varepsilon$  и приравняем при степенях  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : \quad & \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 & x_0(0) = a, \quad \dot{x}_0(0) = 0, \\ \varepsilon^1 : \quad & \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\omega_0^2 x_0 & x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \end{aligned}$$

так приходим к

$$x_1(t) = -a \omega_0 \int_0^t \sin(\omega_0(t - \tau)) \cos(\omega_0 \tau) d\tau = -\frac{a \omega_0}{2} \sin(\omega_0 t) \cdot t,$$

что получается даёт ответ только на конечном интервале времени.

**Медленные переменные.** Основная идея решения таких возмущений:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(x, \dot{x}, t),$$

где  $f$  содержит малость  $\sim \varepsilon \ll 1$  – ввести медленно меняющиеся переменные:

$$x(t) = A(t) \sin(\omega_0 t + \varphi(t)).$$

Подставляем это в диффур

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{A} \sin(\omega_0 t + \varphi) + A \cos(\omega_0 t + \varphi)(\omega_0 + \dot{\varphi}) \\ \ddot{x} &= \ddot{A} \sin(\omega_0 t + \varphi) + 2\dot{A} \cos(\omega_0 t + \varphi)(\omega_0 + \dot{\varphi}) + A\ddot{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi) - A(\omega_0 + \dot{\varphi})^2 \sin(\omega_0 t + \varphi). \end{aligned}$$

Зафиксируем, что  $\dot{A}(t) \ll \omega_0 A(t)$  и  $\dot{\varphi} \ll \omega_0$ . Оставим здесь только слагаемые до первого порядка малости:

$$\ddot{x} = 2\dot{A}\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) - 2A\omega_0 \dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi) = f(A \sin(\omega_0 t + \varphi), A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), t).$$

Домножим это уравнение на  $\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$ , также на  $\sin \dots$  и проинтегрируем по периоду:

$$\int_{t-T/2}^{t+T/2} \left( 2\dot{A}(\tau)\omega_0 \cos^2(\omega_0 \tau + \varphi(t)) - 2A(\tau)\omega_0 \dot{\varphi}(\tau) \sin(\omega_0 \tau + \varphi(t)) \cos(\omega_0 \tau + \varphi(t)) \right) d\tau.$$

Так как  $A$  и  $\varphi$  меняются медленно, то можем считать их на масштабе интегрирования  $A(\tau) = A(t)$ ,  $\varphi(\tau) = \varphi(t)$ . Тогда уравнения перепишется в виде

$$\dot{A}\omega_0 = \langle f \cos(\omega_0 \tau + \varphi(t)) \rangle_\tau, \quad (1)$$

$$A\dot{\varphi}\omega_0 = -\langle f \sin(\omega_0 \tau + \varphi(t)) \rangle_\tau. \quad (2)$$

**Пример №1.** Рассмотрим осциллятор с затуханием, пусть  $f = -2\gamma\dot{x}$ :

$$\dot{A}\omega_0 = -\frac{2\gamma}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} A\omega_0 \cos^2(\omega_0 \tau + \varphi) d\tau = -\gamma A\omega_0, \quad \Rightarrow \quad A(t) = A(0)e^{-\gamma t}.$$

Для фазы:

$$A\dot{\varphi}\omega_0 = \frac{2\gamma}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} A\omega_0 \sin(\dots) \cos(\dots) d\tau = 0, \quad \Rightarrow \quad \varphi = \text{const} + o(\gamma).$$

**Пример №2.** Пусть теперь  $f = -\varepsilon x^3$ ,  $\varepsilon \ll 1$ :

$$\dot{A}\omega_0 = -\frac{\varepsilon}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} A^3 \sin^3 \xi \cos \xi d\tau = 0,$$

для фазы:

$$A\dot{\varphi}\omega_0 = +\frac{\varepsilon}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} A^3(t) \sin^4 \xi d\tau = \frac{3\varepsilon A^3(t)}{8},$$

но так как  $A = \text{const}$ , находим

$$\dot{\varphi} = \frac{3\varepsilon\dot{A}}{8\omega_0}, \quad \Rightarrow \quad x(t) = A \sin \left( \omega_0 t + \frac{3\varepsilon A^2}{8\omega_0} t \right).$$

**Пример №3.** Рассмотрим генератор Ван-дер-Поля,  $f = \varepsilon \dot{x}(1 - x^2)$ ,  $\varepsilon \ll 1$ :

$$\dot{A}\omega_0 = \frac{\varepsilon}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} A\omega_0 \cos(\xi)(1 - A^2 \sin^2 \xi) \cos \xi d\tau = \frac{\varepsilon A\omega_0}{2} - \frac{\varepsilon A^3\omega_0}{8} = \frac{\varepsilon A\omega_0}{2} \left( 1 - \frac{A^2}{4} \right).$$

Теперь уравнение на фазу:

$$A\dot{\varphi}\omega_0 = -\frac{\varepsilon}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} A\omega_0 \sin \xi \cos \xi (1 - A^2 \sin^2 \xi) d\tau = 0, \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \text{const}.$$

Найдём  $A$ , решая уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{\dot{A}}{A(1 - \frac{A^2}{4})} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad A^2 = \alpha \quad \frac{\alpha}{4 - \alpha} = C e^{\varepsilon t}, \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2C^{\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 + C^2 e^{\varepsilon t}}},$$

где  $A \rightarrow 2$  при  $t \rightarrow \infty$  – предельный цикл.

**Пример №4.** Рассмотрим параметрический резонанс:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 (1 + h \cos(2(\omega_0 + \delta\omega)t)) x(t) = 0,$$

что также гордо именуется уравнением Матвея. Это аналогично наличию  $f = -h \cos(2(\omega_0 + \delta\omega)t)x$ . Введем параметр  $\theta = \omega_0 t - \varphi(t)$ , тогда

$$\dot{A}\omega_0 = -\frac{h}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} A \sin \xi \cos \xi \cos(2\xi + 2\theta) d\tau = -\frac{h\omega_0^2}{2T} A(t) \int_{t-T/2}^{t+T/2} \sin(2\xi) (0 - \sin(2\xi) \sin(2\theta)) d\tau = \frac{\omega_0^2 h}{4} A \sin(2\theta).$$

Итого, окончательное уравнение

$$\dot{A} = \frac{\omega_0 h}{4} A \sin(2\theta).$$

Для фазы же

$$A\dot{\varphi}\omega_0 = -\frac{h\omega_0^2}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} A \sin^2 \xi (\cos 2\xi \cos 2\theta - 0) d\tau = \frac{h\omega_0^2}{4} A \cos 2\theta, \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{h\omega_0}{4} \cos 2\theta.$$

Но лучше решать уравнение на  $\dot{\varphi} = \delta\omega - \dot{\theta}$ :

$$\dot{\theta} = \delta\omega - \frac{h\omega_0}{4} \cos 2\theta, \quad \Rightarrow \quad \left/ |\delta\omega| < \left| \frac{h\omega_0}{4} \right| \right/ \quad \exists \theta_0: \theta(t) = \theta_0 = \text{const},$$

а значит

$$A(t) = A_0 \exp \left( \frac{\omega_0 h \sin 2\theta_0}{4} t \right).$$

Кстати, вроде  $A^2 \dot{\theta}$  – первый интеграл системы.