ТеорМин №3

Теория групп. *Сопряженными* (из одного *класса сопряженности*) называть элементы $g \sim h$ такие, что $\exists r \in G$, $g = rhr^{-1}$. Далее классы сопряженности будем обозначать за $C_1, \ldots, C_k$, элементы в них за $h_i \in C_i$.

Циклическая группа C_n

$$C_n = \{\mathbb{1}, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}, \qquad r^n = \mathbb{1}.$$

Для C_n каждый элемент становился представителем класса сопряженности в силу того, что группа абелева.

Группа перестановок S_n

$$S_n = \left\{ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \right\},$$

разбивается на классы сопряженности с одинаковой циклической структурой:

$$S_2 \to \{\mathbb{1}\}, \{(a,b)\}, \quad S_3 \to \{\mathbb{1}\}, \{(a,b)\}, \{(a,b,c)\}, \quad S_4 \to \{\mathbb{1}\}, \{(a,b)\}, \{(a,b,c)\}, \{(a,b,c,d)\}, \{(a,b)(c,d)\}.$$

Также в S_n $\forall\sigma$ раскладывается в циклы, а циклы в транспозиции, определенной оказывается величина четность σ. Для неё выполняется

$$\operatorname{sign}(\sigma_1 \cdot \sigma_2) = \operatorname{sign}(\sigma_1) \cdot \operatorname{sign}(\sigma_2), \qquad \operatorname{sign}(a,b) = -1, \qquad \operatorname{sign}(i_1, i_2, \ldots, i_d) = \left[\begin{aligned} &+1, \quad d \not\vdots\, 2, \\ &-1, \quad d \,\vdots\, 2. \end{aligned} \right.$$

Четностью перестановки называют количество пар $i < j$ таких, что $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Группа D_n симметрий правильного n-угольника состоит из r – поворотов на $2\pi/n$ и s – отражений относительно какой-то выбранной оси. Для $n \,\vdots\, 2 = 0$ получатся классы сопряженности $\{r^b, r^{n-b}\}$, $\{s, sr^2, sr^4, \}$ и $\{sr, sr^3, sr^5, \ldots\}$. Для $n \not\vdots\, 2$ получится $\{r^b, r^{n-b}\}$ и $\{s, sr, sr^2, \ldots\}$.

Теория представлений. Далее работаем с конечными группами $|G| < +\infty$. Элемент группы обознаем за $g \in G$. *Представление* группы определяют как гомоморфизм $\rho\colon G \mapsto \mathrm{GL}(V, \mathbb{C})$ (невырожденные матрицы).

Характером представления ρ называют $\chi[V] = \operatorname{tr}\rho(g)$ для $g \in G$. Характеры изморфных представлений совпадают, а также

$$\chi[V](\mathbb{1}) = \dim V, \quad \chi[V_1 \oplus V_2] = \chi[V_1] + \chi[V_2], \quad \chi[V](g^{-1}) = \chi^*[V](g), \quad \chi[V_1 \otimes V_2] = \chi[V_1] \cdot \chi[V_2].$$

Стараемся решить задачу о разложение приводимого представления по неприводимым. Представление ρ называется *неприводимым*, если у него нет нетривиальных (отличных от $\{0\}$ и V) инвариантных подпространств. По теореме Машке $\forall\rho$ конечной группы G разбивается на сумму неприводимых представлений. Всякое представление *унитаризуемо*.

Для характеров определим скалярное произведение $\langle \chi^{(i)} | \chi^{(j)} \rangle$:

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \bar{\psi}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{k} |C_i| \varphi(h_i) \bar{\psi}(h_i).$$

Характеры ортогональны по строкам и столбцам:

$$\langle \chi^{(i)} | \chi^{(j)} \rangle = \delta_{ij}, \qquad \sum_{n=1}^{k} \chi^{(n)}(h_i) \bar{\chi}^{(n)}(n_j) = \delta_{ij} \frac{|G|}{|C_i|}.$$

Число неприводимых представлений равно числу классов сопряженности. Все неприводимые представления абелевой группы одномерны, что является следствием теоремы Бернсайда:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = |G|,$$

где d_i – размерность i-го представления. *Критерием неприводимости* является $\langle \chi | \chi \rangle = 1$, тогда разложение на неприводимые: $\chi = a_1 \chi^{(1)} + \ldots + a_n \chi^{(n)}$, где $a_i = \langle \chi | \chi^{(i)} \rangle$.

Таблицы неприводимых представлений Построение для C_n тривиально в силу абелевости группы. Каждый элемент представим в виде $\sqrt[n]{1}$. Построение производим с учетом свойства $\rho(r^k) = \rho(r)^k$.

Теперь для D_4 размера $|D_4| = 2 \times n = 8$, будут классы сопряженности $\{\mathbb{1}\}$, $\{r^2\}$, $\{r, r^3\}$ и $\{s, sr^2\}$, $\{sr, sr^3\}$.

$\mathbb{1}$| 1	r, r^3| 2	r^2| 1	s, sr^2| 2	sr, sr^3| 2
1	1	1	1	1
1	1	1	-1	-1
1	-1	1	1	-1
1	-1	1	-1	1
2	0	-2	0	0

Всегда есть тривиальное представление. Также из теоремы Бернсайда находим первый столбец.

По сохранению или смене ориентация базиса можем сопоставить ± 1 соответсвующием классам. Важно помнить, что $(sr^k)^2 = \mathbb{1}$ и $(r^k)^4 = \mathbb{1}$, откуда знаем одномерные представления $\rho(sr^k) = \pm 1$ и $\rho(r^k) = \sqrt[4]{1} = \pm i, \pm 1$, откуда достраиваем одномерные представления.

При построение D_7 будет важно вспомнить про сопоставление матриц поворота двухмерным представлениям, по которым найдём элементы таблицы характеров, как след соответсвующей матрицы.

Построим табличку характеров для S_3: $|S_3| = 3! = 6$. Также из теоремы Бернсайда находим первый столбец. Для второй строчки всегда есть *знаковое* представление.

$e\|$ 1	$(a,b)\|$ 3	$(a,b,c)\|$ 2
1	1	1
1	-1	1
2	0	-1

Построим табличку характеров для S_4: $|S_4| = 4! = 24$.

$e\|$ 1	$(a,b)\|$ 6	$(a,b,c)\|$ 8	$(a,b,c,d)\|$ 6	$(a,b)(c,d)\|$ 3
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
2	0	-1	0	2
3	-1	0	1	-1
3	1	0	-1	-1

Тут важно посмотреть на отображение $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, построив $\chi[\mathbb{C}^4]$, значениях характеров которой можем восстановить по количеству неподвижных точек (4, 2, 1, 0, 0). Неприводимое представление можем получить в виде $\chi[\mathbb{C}^4] - \chi^{(1)}$. Также может помочь тензорное произведение представлений.

Преобразование Меллина. Для функции $g(x)$ такую, что $g(x) = O(x^{-\alpha})$ при $x \to 0$ и $g(x) = x^{-\beta}$ при $x \to +\infty$ можем определить *преобразование Меллина*

$$G(\lambda) = \int_0^\infty g(x) x^{\lambda - 1}\, dx,$$

определенного в полосе $\alpha < \operatorname{Re}\lambda < \beta$. Обратное преобразование может быть найдено в виде

$$g(x) = \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} G(\lambda) x^{-\lambda} \frac{d\lambda}{2\pi i},$$

для $\alpha < C < \beta$.

Для вычисления инетгралов бывает удобно воспользоваться сверточным свойством преобразования Меллина

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) x^{\lambda-1}\, dx = \int_{C_f - i\infty}^{C_f + i\infty} F(\lambda_f) G(\lambda - \lambda_f) \frac{d\lambda_f}{2\pi i} = \int_{C_g - i\infty}^{C_g + i\infty} F(\lambda - \lambda_g) G(\lambda_g) \frac{d\lambda_g}{2\pi i},$$

где $\alpha_f + \alpha_g < \operatorname{Re}\lambda < \beta_f + \beta_g$. В частности, при допустимом $\lambda = 1$, получаем

$$\int_0^\infty f(x) g(x)\, dx = \int_{C_f - i\infty}^{C_f + i\infty} F(\lambda_f) G(1 - \lambda_f) \frac{d\lambda_f}{2\pi i}.$$

Приведем некоторый зоопарк по преобразованию Меллина:

$$e^{-x} \xrightarrow{M} \Gamma(\lambda), \qquad \frac{1}{1 + a x^n} \xrightarrow{M} \frac{\pi a^{-\frac{\lambda}{n}}}{n \sin\left(\frac{\pi\lambda}{n}\right)}, \qquad \frac{1}{\sqrt[m]{1 + x^n}} \xrightarrow{M} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m} - \frac{\lambda}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}, \qquad \frac{1}{1-x} \xrightarrow{M} \pi\cot(\pi\lambda),$$

$$\frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx}} \xrightarrow{M} \frac{\Gamma(1-\lambda)\Gamma\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2} - \lambda}}{\sqrt{\pi b}}, \qquad x^n \xrightarrow{M} 2\pi\delta(i(n+\lambda)), \qquad \frac{1}{1 + e^{\alpha x}} \xrightarrow{M} \left(1 - 2^{1-\lambda}\right)\alpha^{-\lambda}\Gamma(\lambda)\zeta(\lambda),$$

$$\sin x \xrightarrow{M} \sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\Gamma(\lambda), \qquad \cos x \xrightarrow{M} \cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\Gamma(\lambda).$$

Гамма функция. Полезно будет вспомнить, что

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt = \int_0^1 (-\ln x)^{z-1}\, dx = \frac{2^{z+1}}{z} \int_0^1 y(-\ln y)^z\, dy, \qquad \Gamma\left(\tfrac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

Для произведения бывает удобно

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right) \ldots \Gamma(z + \frac{n-1}{n}) = n^{\frac{1}{2} - nz} \cdot (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(nz), \qquad \Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

1 Неделя IX

№1

Найдём обратное преобразование Меллина от функции, вида

$$\Gamma(\lambda-\beta)\Gamma(\lambda).$$

Можем замкнуть дугу налево, так как $\Gamma(\lambda)\to 0$ при $\operatorname{Re}\lambda\to-\infty$, а также с учетом $\Gamma(\lambda)\to 0$ при $\operatorname{Im}\lambda\to\pm\infty$.

Тогда интеграл

$$I=\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(\lambda-\beta)\Gamma(\lambda)x^{-\lambda}\frac{d\lambda}{2\pi i}=\frac{2\pi i}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(x^n\Gamma(-n-\beta)+x^nx^{-\beta}\Gamma(-n+\beta)\right),$$

сведется к сумме вычетов для $\Gamma(\lambda)$ и $\Gamma(\lambda-\beta)$, где мы учли, что

$$\operatorname{res}_{-n}\Gamma(x)=\frac{(-1)^n}{n!},$$

это полюса первого порядка.

Немного переписывая сумму и пристально в нее вглядываясь, находим

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{\beta/2}\left(\Gamma(\beta-n)x^{\frac{\beta}{2}+n}+\Gamma(-n-\beta)x^{n-\frac{\beta}{2}}\right)}{n!}=2x^{-\frac{\beta}{2}}K_\beta\left(2\sqrt{x}\right),$$

что при малых β и достаточно больших x можно переписать в виде $\frac{2\beta}{\sqrt[4]{x}}\exp\left(-\sqrt{x}\right)$.

№2

Рассмотрим обратное преобразование Меллина от функции

$$\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\beta)}.$$

При $\lambda\to\pm i\infty$ всё хорошо, осталось понять в какую сторону замыкать квадратик.

$$I=\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+\beta)}x^{-\lambda}\frac{d\lambda}{2\pi i}.$$

При $\lambda\to+\infty$ можем оценить выражение, как $\Gamma(\lambda+\beta)\sim\Gamma(\lambda)\lambda^\beta$, а значит необходимо рассмотреть

$$\frac{1}{\lambda^\beta}\frac{1}{x^\lambda}=\exp\left(-\lambda\ln x-\beta\ln\lambda\right).$$

При $x>1$ получаем возможность замкнуть вправо, то есть вокруг области без вычетов, а значит $I=0$ при $x>1$.

При $x<1$ $\ln x<0$, а значит необходимо замыкать влево. Так получаем сумму, вида

$$I(x<1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(-n+\beta)}x^n=\frac{1}{(1-x)^{1-\beta}}.$$

№3

Найдём первые два члена в разложение по u для интеграла

$$I(u)=\int_u^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^2-u^2}}e^{-x}.$$

Сведем задачу к известной подстановкой $x\to x+u$, тогда

$$I(u)=e^{-u}\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^2+2ux}}e^{-x}\approx(1-u+\tfrac{1}{2}u^2)\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^2+2ux}}e^{-x}+o(u^2).$$

Знаем преобразование Меллина от e^{-x}:

$$M[e^{-x}](\lambda)=\Gamma(\lambda).$$

Аналогично находим образ $(x^2+2ux)^{-1/2}$:

$$M[(x^2+2ux)^{-1/2}](\lambda)=\int_0^\infty\frac{x^{\lambda-1}\,dx}{\sqrt{x^2+2ux}}=\frac{2^{\lambda-1}\Gamma(1-\lambda)\Gamma\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)u^{\lambda-1}}{\sqrt{\pi}},$$

для $\lambda\in[\frac{1}{2},1]$.

Тогда искомое подинтегральное произведение сведется к интегралу, вида
$$e^u I(u) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{2^{-\lambda}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\Gamma(\lambda)^2 u^{-\lambda}}{\sqrt{\pi}}\frac{d\lambda}{2\pi i} \overset{\text{def}}{=} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(\lambda)\frac{d\lambda}{2\pi i},$$
который сводится к сумме вычетов (полюса второго порядка) в $\lambda = -n,\ n \in \mathbb{Z}^+$. Каждый следущий вычет будет содержать фактор u^n, так что достаточно вычислить первые три вычета $n \in \{0,\, 1,\, 2\}$.

Таким образом находим
$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_0 F(\lambda) &= -\ln(u) - \gamma + \ln(2),\\
\operatorname{res}_{-1} F(\lambda) &= -u\left(\ln\left(\tfrac{1}{2}u\right) + \gamma\right),\\
\operatorname{res}_{-2} F(\lambda) &= -\frac{3}{4}u^2\left(\ln\left(\tfrac{1}{2}u\right) - \frac{1}{3} + \gamma\right).
\end{aligned}$$
Собирая все вместе получаем, что сокращается первый порядок по u и тогда первые два члена разложения, дают
$$I(u) = \ln\left(\tfrac{2}{u}\right) - \gamma + \frac{1}{4}u^2(\ln\left(\tfrac{2}{u}\right) - \gamma + 1) + o(u^2).$$