

# ЗАМЕТКИ ПО КУРСУ «МАГНИТООПТИКА»

---

**Лектор:** Владимир Игоревич Белотелов

**Стенография:** Хоружий Кирилл

**От:** 17 февраля 2022 г.

## Содержание

## Лекция №2

**Классическая электродинамика.** Знаем, что

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{H}], \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t},$$

тогда в нулевом приближении

$$H = 0, \quad m\omega \mathbf{v}_0 = e\mathbf{E}, \quad \mathbf{p} = e\mathbf{r}, \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{(0)} = 1 - 4\pi \frac{Ne^2}{m\omega^2}.$$

Стоит уточнить, что под  $\mathbf{H}$  понимается постоянное внешнее магнитное поле, а  $\mathbf{E}$  – поле волны.

В первом приближении

$$m\mathbf{v}_1 = \frac{e}{c}[\mathbf{v}_0 \times \mathbf{H}], \quad \Rightarrow \quad m\mathbf{v}_1 = \frac{e^2}{c} \frac{1}{m\omega} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}].$$

Интегрируя, находим

$$\mathbf{r}_1 = \frac{-e^2 i}{cm^2 \omega^3} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}], \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_1 = -\frac{Ne^3 i}{m^2 c \omega^3} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}].$$

Собирая всё вместе, находим

$$\mathbf{D} = \left(1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}\right) \mathbf{E} - \frac{4\pi Ne^3 i}{m^2 c \omega^3} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}].$$

Таким образом пришли к тензору на  $\hat{\varepsilon}$ :

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{(0)} & ig_z & -ig_y \\ -ig_z & \varepsilon_0 & ig_x \\ ig_y & -ig_x & \omega_{(0)} \end{pmatrix},$$

иначе можем записать в виде

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} \delta_{ij} - i\epsilon_{ijk} g_k,$$

где  $\mathbf{g}$  – вектор гирации:

$$\mathbf{g} = f\mathbf{H}, \quad f = \frac{4\pi Ne^3}{m^2 c \omega^3},$$

где  $f$  указан для свободного электрона. В изотропном магнитном материале  $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$ . В общем виде  $\mathbf{g} = \hat{f}\mathbf{M}$ :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} - i\epsilon_{ijk} f_{kl} M_l.$$

**Дисперсия.** Вообще есть дисперсия,  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\omega)$ , работает причинность, есть некоторый нелокальный отклик, а тогда  $\varepsilon = \varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ .

Можем разложить

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \underbrace{\chi_{ijk}^{(2)} E_k}_{\text{Поккельс}} + \underbrace{\chi_{ijkl}^{(3)} E_k E_l}_{\text{Керр}} + \underbrace{\chi_{ijk}^{(2m)} B_k}_{\text{Фарадей}} + \underbrace{\chi_{ijkl}^{(3m)} B_k B_l}_{\text{Каттон-Мутон}} + \dots$$

**Эффект Фарадея.** Записываем уравнения Максвелла. Получаем уравнение<sup>1</sup>

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \frac{\omega}{c} \text{rot } \bar{\mathbf{B}}, \quad \Rightarrow \quad \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = \frac{\omega^2}{c} \hat{\varepsilon} \mathbf{E}.$$

Переходя к плоским монохроматическим волнам вида  $e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ , находим

$$n^2 \mathbf{E} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) = \hat{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad \mathbf{n} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k},$$

которое ещё называют *уравнением Френеля*.

Упростим себе жизнь  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{M} \parallel Oz$ :

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n \end{pmatrix}, \quad \hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & -ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} n^2 E_x &= \varepsilon_0 E_x + ig E_y, \\ n^2 E_y &= \varepsilon_0 E_y - ig E_x, \\ n^2 E_z &= \varepsilon_0 E_z + n^2 E_z. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Напомним, что  $\mu \approx 1$ , а значит  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ .

Приравнявая определитель к нулю, находим

$$\begin{vmatrix} n^2 - \varepsilon_0 & -ig \\ ig & n^2 - \varepsilon_0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow \quad (n^2 - \varepsilon_0)^2 - g^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad n^2 = \varepsilon_0 \pm g.$$

Так приходим к показателю преломления

$$n_{\pm} = \pm \sqrt{\varepsilon_0 \pm g}.$$

Подставляя  $n$ , находим волну

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \\ 0 \end{pmatrix} E_0 \exp(-i\omega t + ik_0 z \sqrt{\varepsilon_0 \pm g}).$$

то есть мы получили круговую поляризацию, с разной фазовой скоростью для правой и левой поляризации.

Угол Фарадея можем найти, рассмотрев плоскую поляризацию, как сумму двух круговых:

$$\mathbf{E} = E_0 \begin{pmatrix} \cos(k_0 \Delta n z) \\ \sin(k_0 \Delta n z) \end{pmatrix} e^{-i\omega t + ik_0 n_0 z}, \quad \Delta n = \frac{n_+ - n_-}{2}, \quad n_0 = \frac{n_+ + n_-}{2}.$$

Обычно  $\varepsilon_0 \gg g$ , а значит

$$\Delta n = \frac{g}{2\sqrt{\varepsilon_0}}, \quad \Rightarrow \quad \theta = k_0 \Delta n z = \frac{k_0 g}{2n_0} z.$$

- Эффект Каттона-Муттона. Вывести квадратичную поправку к  $\hat{\varepsilon}$ :  $v = v_0 + v_1 + v_2$ . Дедлайн – неделя.