Задание по курсу «Экспериментальная реализация концепций квантовой физики»

Автор заметок: Хоружий Кирилл

От: *23 февраля 2022 г.*

Содержание

1 Неделя №1 **2**

2 Неделя №2 **3**

1 Неделя №1

Задача 1

Рассмотрим эрмитов оператор $\hat{A}$. По определению
$$\hat{A}\,|a\rangle = a\,|a\rangle\,, \qquad \langle a|\,\hat{A}^\dagger = \langle a|\,\bar{a}.$$
Домножая на $|a\rangle$, находим
$$(a-\bar{a})\langle a|a\rangle = 0, \qquad \Rightarrow \qquad a = \bar{a}, \qquad \Rightarrow \qquad a \in \mathbb{R}.$$
Рассмотрим теперь
$$\langle a|\hat{A}\rangle b = b\langle a|b\rangle = a\langle a|b\rangle, \qquad \Rightarrow \qquad \langle a|b\rangle = 0,$$
при $a \neq b$.

Задача 2

Знаем магнитный момент
$$\mu = \frac{IS}{c} = \frac{1}{c}\frac{\omega e}{2\pi}\pi r^2 = \frac{e}{2mc}L = \mu_{\text{эл}}/2,$$
т.к. фактор Ланде для $s = 1/2$ равен $g = 2$.

Задача 3

Можем выписать операторы и найти коммутатор
$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \frac{\hbar}{2}|-\rangle\langle+|, \qquad \hat{S}_y = -\frac{i\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \frac{i\hbar}{2}|-\rangle\langle+|,$$
тогда
$$[\hat{S}_x,\,\hat{S}_y] = \frac{i\hbar^2}{2}|+\rangle\langle+| - \frac{i\hbar^2}{2}|-\rangle\langle-| = i\hbar\hat{S}_z \neq 0,$$
что вполне логично.

Задача 4

Рассмотрм эрмитов оператор $\hat{A}$ с базисом $|a_i\rangle$, введем оператор $\hat{B}$:
$$\hat{B} = \prod_i(\hat{A} - a_i),$$
и докажем, что $\hat{B}\,|b\rangle = 0\;\forall\,|b\rangle \in \mathcal{H}$.

Знаем, что
$$|b\rangle = \sum_i c_i\,|a_i\rangle\,, \qquad \Rightarrow \qquad \hat{B}\,|b\rangle = \sum_i c_i\hat{B}\,|a_i\rangle = \sum_i c_i\prod_k(a_i - a_k)\,|a_i\rangle = 0,$$
что и требовалось доказать.

Задача 5

Знаем, что
$$|S_x,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|-\rangle\,, \qquad |S_x,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|-\rangle\,.$$
Ну, выражаем в обратную сторону
$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|S_x,+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|S_x,-\rangle\,, \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|S_x,+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|S_x,-\rangle\,.$$
Подставляя, находим
$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\left(|S_x,+\rangle\langle S_x,-| + |S_x,-\rangle\langle S_x,+|\right).$$

Задача 6

Знаем оператор
$$\hat{S}_\varphi = \frac{\hbar}{2}\left(e^{-i\varphi}|+\rangle\langle-| + e^{i\varphi}|-\rangle\langle+|\right).$$
Найдём его собственный вектор
$$\hat{S}_\varphi\,|\kappa\rangle = \lambda\,|\kappa\rangle, \qquad \kappa = \alpha_+\,|+\rangle + \alpha_-\,|-\rangle, \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{\hbar}{2},$$
тогда собственные векторы
$$|S_\varphi,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|+\rangle + \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}\,|-\rangle, \qquad |S_\varphi,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|+\rangle - \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}\,|-\rangle.$$

2 Неделя №2

Задача 1

Рекуррентный путь. Для $\hat{F} = \hat{S} + \hat{I}$ найдём базис собственных функций в терминах $|S,m_S\rangle\,|I,m_I\rangle \overset{\text{def}}{=} |m_S,m_I\rangle_{SI}$. Всего векторов будет $(2S+1)(2I+1) = 6$. Два вектора нам известны из однозначного соответствия
$$\hat{F}_\pm = \hat{S}_\pm + \hat{I}_\pm, \quad (\hat{S}_+ + \hat{I}_+)\left|\tfrac12,1\right\rangle_{SI} = 0, \quad \Rightarrow \quad \left|\tfrac32,\tfrac32\right\rangle_F = \left|\tfrac12,1\right\rangle_{SI}.$$
Аналогично находим
$$\left|\tfrac32,-\tfrac32\right\rangle_F = \left|-\tfrac12,-1\right\rangle_{SI}.$$
Далее понижающим оператором $\hat{F}_-$
$$\hat{J}_\pm\,|j,m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm1)}\,|j,m\pm1\rangle,$$
находим
$$F_-\left|\tfrac32,\tfrac32\right\rangle_F = \sqrt{3}\left|\tfrac32,\tfrac12\right\rangle_F = \left|-\tfrac12,1\right\rangle_{SI} + \sqrt{2}\left|\tfrac12,0\right\rangle_{SI}, \quad \Rightarrow \quad \left|\tfrac32,\tfrac12\right\rangle_F = \tfrac{1}{\sqrt3}\left|-\tfrac12,1\right\rangle_{SI} + \sqrt{\tfrac23}\left|\tfrac12,0\right\rangle_{SI}.$$
Единственный ортогональный вектор $|a\rangle$: $\hat{F}_+\,|a\rangle = 0$, а значит соответствует $\left|\tfrac12,\tfrac12\right\rangle_F$:
$$\left|\tfrac12,\tfrac12\right\rangle_F = -\sqrt{\tfrac23}\left|-\tfrac12,1\right\rangle_{SI} + \tfrac{1}{\sqrt3}\left|\tfrac12,0\right\rangle.$$
Осталось найти остальные векторы через F_-:
$$\left|\tfrac32,-\tfrac12\right\rangle_F = \tfrac{1}{\sqrt3}\left|\tfrac12,-1\right\rangle_{SI} + \sqrt{\tfrac23}\left|-\tfrac12,0\right\rangle_{SI},$$
$$\left|\tfrac12,-\tfrac12\right\rangle_F = -\sqrt{\tfrac23}\left|\tfrac12,-1\right\rangle_{SI} + \tfrac{1}{\sqrt3}\left|-\tfrac12,0\right\rangle_{SI}.$$

Явный вид. Вообще можем написать явное выражение для определения коэффициентов разложения:
$$|J,M\rangle = \sum_{m_A,m_B} |j_A,m_A\rangle\,|j_B,m_B\rangle\,C^{JM}_{j_A,m_A;j_B,m_B},$$
где $C^{JM}_{j_A,m_A;j_B,m_B}$ – коэффициенты Клебша-Гордана. Можем выразить их в виде
$$C^{JM}_{j_A,m_A;j_B,m_B} = \langle j_A,m_A;j_B;m_B|J,M\rangle = (-1)^{j_A+j_B+m}\sqrt{2J+1}\begin{pmatrix} j_A & j_B & J \\ m_A & m_B & -M\end{pmatrix},$$
где последний множитель – $3j$-символы Вигнера. Явный вид:
$$C^{JM}_{j_A,m_A;j_B,m_B} = \sqrt{2J+1}\sqrt{\Delta_{j_Aj_BJ}}\sqrt{\frac{(j_A+m_A)!(J-M)!}{(j_A-m_A)!(j_B+m_B)!(j_B-m_B)!(J+M)!}}\times$$
$$\times\sum_s^J \frac{(-1)^{j_A+m_B-s}(J+s)!(j_B+s-m_A)!}{(J-s)!(s-m_A-m_B)!(s-j_A+j_B)!(j_A+j_B+s+1)!},$$
где суммирование идёт по $s = \max(m_A+m_B,\ j_A-j_B)$, а $\Delta_{j_Aj_Bj}$:
$$\Delta_{j_Aj_BJ} = \frac{(j_A+j_B-J)!(j_B+J-j_A)!(J+j_A+j_B+1)!}{(j_A-j_B+J)!},$$
что при вычисление даёт то же самое, например:
$$C^{\frac12,\frac12}_{\frac12,-\frac12;1,1} = -\sqrt{\tfrac23}, \qquad C^{\frac12,\frac12}_{\frac12,\frac12;1,0} = \tfrac{1}{\sqrt3},$$

что восстанавливает $\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle_F$.

Энергетические сдвиги. Найдём добавку спин-спинового взаимодействия:

$$\hat{H}_{SI} = \hbar\omega_{\text{hf}}\hat{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{I}} = \frac{\hbar\omega_{\text{hf}}}{2}\left(F^2 - S^2 - I^2\right) = \frac{\hbar\omega_{\text{hf}}}{2}\left(F(F+1) - \frac{11}{4}\right).$$

Значит состояния $\left|\frac{3}{2}, \ldots\right\rangle_F$ сдвинуты на $\frac{1}{2}\hbar\omega_{\text{SI}}$, а состояния $\left|\frac{1}{2}, \ldots\right\rangle_F$ сдвинуты на $-\hbar\omega_{\text{hf}}$ относительно невозмущенного состояния.

Задача 2

Знаем, что

$$\hat{H} = \hbar\omega_{\text{hf}}\hat{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{I}} + \hbar\omega_{\text{L}}\hat{S}_z.$$

Найдём коммутаторы $[\hat{H}, \hat{F}^2]$ и $[\hat{H},\, \hat{F}_z]$:

$$\hat{F}^2 = S^2 + I^2 + 2\,\hat{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{I}}, \quad \Rightarrow \quad [\hat{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{I}}, \hat{F}^2] = 0.$$

Ненулевой вклад даст только $\hat{S}_z$:

$$[\hat{S}_z, \hat{F}^2] = 2[\hat{S}_z,\, \hat{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{I}}] = 2i\hbar\left(\hat{I}_x\hat{S}_y - \hat{I}_y\hat{S}_x\right), \quad \Rightarrow \quad [\hat{H},\, \hat{F}^2] = 2i\hbar^2\omega_{\text{L}}\left(\hat{I}_x\hat{S}_y - \hat{I}_y\hat{S}_x\right).$$

Для второго комутатора ненулевой вклад может быть только от $\hat{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{I}}$:

$$[\hat{\boldsymbol{S}} \cdot \hat{\boldsymbol{I}}, \hat{S}_z + \hat{I}_z] = [\hat{S}_x\hat{I}_x + \hat{S}_y\hat{I}_y, \hat{S}_z + \hat{I}_z] = 0, \quad \Rightarrow \quad [\hat{H},\, \hat{F}_z] = 0,$$

где мы воспользовались коммутационным соотношением $[j_i, j_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}j_k$.