Справочные материалы к письменному экзамену «Уравнения математической физики»

Автор заметок: Хоружий Кирилл

Автор заметок: Хоружий Кирилл
От: *1 июня 2022 г.*

Содержание

1 Эволюционные уравнения

Функция Грина. Для уравнений вида $\hat{L}x = \varphi$, бывает удобно найти G, как решение уравнения $\hat{L}G = \delta$:

$$\hat{L}\, x(t) = \varphi(t), \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-s)\varphi(s)\, ds, \qquad \hat{L}G = \delta(t), \tag{1.1}$$

если $\hat{L}$ – линейный оператор. И, если хочется добавить начальные условия, то для $\hat{L}$ второго порядка будет

$$x(t) = \dot{x}(0)G(t) + x(0)\dot{G}(t) + \int_0^t G(t-s)\varphi(s)\, ds.$$

Для уравнений первого порядка $\hat{L} = \partial_t + \gamma$:

$$\hat{L} = \partial_t + \gamma, \qquad \Rightarrow \qquad G(t) = \theta(t)\exp\left(-\gamma t\right). \tag{1.2}$$

Для осциллятора $\hat{L} = \partial_t^2 + \omega^2$, тогда

$$\hat{L} = \partial_t^2 + \omega^2, \qquad \Rightarrow \qquad G(t) = \theta(t)\frac{\sin(\omega t)}{\omega}. \tag{1.3}$$

В общем случае подстановка причинной функции Грина $G(t) = \theta(t)g(t)$ для $\hat{L}$: $L(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ приводит к условиям

$$\partial_t^{n-1} g(0) = 1, \qquad \partial_t^m g(0) = 0, \;\; m = 0, \ldots, n-2,$$

который позволяют методом неопределенных коэффициентов найти G из уравнения $\hat{L}G(t) = \delta(t)$. Проявляем аккуратность при наличии кратных корней у $L(z) = 0$, когда возникают секулярные члены. Нужен пример.

Матричное уравнение. Решение линейного уравнения для векторной величины $\boldsymbol{y}$

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} + \hat{\Gamma}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\chi},$$

может быть найдено, через функцию Грина, вида

$$\hat{G}(t) = \theta(t)\exp\left(-\hat{\Gamma}t\right), \qquad \boldsymbol{y}(t) = \int_{-\infty}^{t} \hat{G}(t-s)\boldsymbol{\chi}(s)\, ds. \tag{1.4}$$

Удобно $\hat{\Gamma}$ привести к ЖНФ, а потом вспомнить, что матричная экспонента от жордановой клетки $\hat{J}$ имеет вид

$$\exp\left(-\hat{J}t\right) = e^{-\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Функция Грина через преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа функциии $\Phi(t)$ определяется:

$$\tilde{\Phi}(p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt)\Phi(t)\, dt, \qquad \Phi(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i}\exp(pt)\tilde{\Phi}(p),$$

где далее c выбираем правее всех особенностей для причинности.

Решение уравнения $L(\partial_t)G(t) = \delta(t)$ может быть найдено, как

$$G(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i}\exp(pt)\tilde{G}(p), \qquad \tilde{G}(p) = \frac{1}{L(p)}, \qquad \Rightarrow \qquad G(t) = \sum_i \operatorname{res}_i \frac{\exp(pt)}{L(p)}, \tag{1.5}$$

где суммирование идёт по полюсам $1/L(p)$.

Кстати. Бывает удобно сделать функции маленькими

$$\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \tilde{f}(p)e^{pt}\frac{dp}{2\pi i} = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \frac{\tilde{f}(p)}{p^n}e^{pt}\frac{dp}{2\pi i}.$$

2 Статические линейные поля

Задача Штурма-Лиувилля

Постановка задачи. Задача Штурма-Лиувилля:

$$\hat{L} = \partial_x^2 + Q(x)\partial_x + U(x), \qquad \hat{L}f(x) = \varphi(x), \qquad \begin{cases} \alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = 0 \\ \alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где[1] $|\alpha_1| + |\beta_2| \neq 0$ и $|\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0$.

[1] Часто можно встретить нулевые граничные условия: $f(a) = f(b) = 0$.

Граничные условия. С учетом того, что функция Грина G наследует граничные условия:

$$\alpha_1 G(a,y) + \beta_1 G'_x(a,y) = 0,$$
$$\alpha_2 G(b,y) + \beta_2 G'_x(b,y) = 0.$$

Запищем уравнение на $G(x,y)$:

$$\hat{L}G(x,y) = \delta(x-y).$$

Решение этого уравнение можем найти решая две системы на $u(x)$ при $x<y$ и $v(x)$ при $x>y$:

$$\begin{cases} \hat{L}u(x) = 0 \\ \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{L}v = 0 \\ \alpha_2 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0 \end{cases}$$

Теперь можем выписать ответ

$$G(x,y) = \frac{1}{W(y)} \begin{cases} v(y)u(x), & x<y, \\ v(x)u(y), & x>y, \end{cases} \qquad W[u,v](y) = v'(y)u(y) - v(y)u'(y). \tag{2.2}$$

Который существует и единственнен для $W \neq 0$. Для $W = \mathrm{const}$ $G(x,y) = G(y,x)$, а значит $\hat{L}^{-1}$ – симметричный самосопряженный оператор, и у $\hat{L}$ есть ОНБ из собственных функций.

Кстати. Бывает удобно найти $W(x)$, записав формулу Лиувилля-Остроградского

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} = W(x_0) \exp\left(- \int_{x_0}^x Q(z)\, dz \right).$$

Def 2.1. *Специальной ФСР* называется решение уравнения $\hat{L}u = 0$ и $\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0$, и аналогичного уравнения по $v(x)$ с граничным условием в b, если $W[u,v] \neq 0$, то есть u и v линейной независимы.

Метод Фурье в задаче Штурма-Лиувилля

Допустим мы в $\mathcal{H}$, соответственно есть $\langle x|y\rangle$. Рассмотрим некоторый достаточно хороший самосопряженный компактный оператор $\hat{L}$, у которого есть ОНБ из собственных функций: $\hat{L}e_n = \lambda_n e_n$.

Thr 2.2 (thr Гильберта-Шмидта)**.** *Если $\hat{L}$ – компактный*[2] *ССО, то у A есть ОНБ из собственных функций.*

Вернемся к оператору Штурма-Лиувилля, который живет в $\mathcal{H} = L_2[a,b]$:

$$\hat{L} = A(x)\partial_x^2 + B(x)\partial_x + C(x), \qquad \langle f|g\rangle = \int_a^b f\bar{g}\, dx.$$

Для задачи Штурма-Лиувилля $\hat{L}$ симметричен, при $B(x) = A'(x)$.

Тогда можем найти функцию Грина, как решение уравнения $\hat{L}G(x,y) = \delta(x-y)$

$$G(x,y) = \sum_n g_n(y) e_n(x), \qquad \delta(x-y) = \sum_n \delta_n(y) e_n(x).$$

Находим коэффициенты Фурье:

$$\delta_n(y) = \frac{\bar{e}_n(y)}{\langle e_n|e_n\rangle}, \qquad \Rightarrow \qquad g_n(y) = \frac{1}{\lambda_n} \frac{\bar{e}_n(y)}{\langle e_n|e_n\rangle}. \tag{2.3}$$

Проблема возникает при $\lambda_n = 0$.

Наличие у оператора собственного числа $\lambda_n = 0$ называется *нулевой модой.* Рассмотрим оператор:

$$\hat{L} = \partial_x^2,$$

для которого $e_n(x) = e^{inx}$, где $\langle e_n|e_n\rangle = 2\pi$, где $e_0 = 1$ и $\lambda_0 = 0$. Пусть тогда

$$\delta(x) = \sum \frac{\bar{e}_n(0) e_n(x)}{\langle e_n|e_n\rangle} = \sum \frac{e^{inx}}{2\pi}, \qquad G(x) = \sum g_n e_n(x).$$

но для $\hat{L}G = \delta(x)$ оказывается нет решений (справа e_0 есть, а слева нет).

В общем, проблема уйдёт, если рассмотрим уравнение, вида

$$\hat{L}G(x) = \delta(x) - e_0(x) = \delta(x) - \frac{1}{2\pi},$$

то есть справа единичный оператор только на образе $\operatorname{Im}\hat{L}$. Если в источнике есть нулевая мода, то уравнение не имеет решений.

[2] $\mathcal{D}(A)$ – компакт в гильбертовом пространстве.

Уравнения Пуассона и Лапласа

Научимся решать *уравнение Пуассона* $\nabla^2 f = \varphi$, которое при $\varphi = 0$ переходит в *уравнению Лапласа* $\nabla^2 f = 0$. Функции, удовлетворяющие уравнение Лапласа называют *гармоническими*, которые существуют только на некоторой ограниченной области. Иногда бывает проще решать *уравнение Дебая* $(\nabla^2 - \varkappa^2)f = \varphi$.

Функция Грина. Решение как обычно можем искать в виде

$$f(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\varphi(\boldsymbol{r})\, d^3 r.$$

В зависимости от размерности пространства n, функция Грина G_n будет равна

$$G_2(r) = \frac{\ln r}{2\pi}, \qquad G_3(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi r}, \qquad G_{n>2}(x) = \frac{1}{S_{n-1}}\frac{1}{r^{n-2}}, \tag{2.4}$$

где $S_{n-1} = 2\pi^{n/2}/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ – площадь $n-1$ мерной единичной сферы.

Кстати. Для уравнения Дебая в $\mathbb{R}^3$ функция Грина с $\hat{L} = \nabla^2 - \varkappa^2$ будет равна

$$G(\boldsymbol{r}) = -\frac{e^{-\varkappa r}}{4\pi r}.$$

Для сферически симметричного потенциала $\varphi(\boldsymbol{r}) \equiv \varphi(r)$, решение уравнения Пуассона упростится до

$$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r}\int_0^r \varphi(\rho)\rho^2\, d\rho + \int_r^\infty \varphi(\rho)\rho\, d\rho.$$

(проверить)

Двумерные гармонические функции

Отдельно рассмотрим случай $n = 2$. Часто задача формулируется в виде *задачи Дирихле*:

$$\nabla^2 f = 0, \qquad f|_{\partial D} = f_0(\boldsymbol{r}),$$

то есть функция задана на границе некоторой области. Будем искать решение в виде

$$f(z) = u(z) + iv(z), \qquad \nabla^2 u = \nabla^2 v = 0.$$

Если знаем комплексную функцию $f(z)$ такую, что $\operatorname{Re} f|_{\partial D} = f_0$, тогда $\operatorname{Re} f(z)$ решает задачу Дирихле. Далее конформным преобразованием переводим любую область D в круг/полуплоскость, где задача Дирихле решается, а дальше отображаем назад.

Рассмотрим полуплоскость $D = \{(x, y) \mid y > 0\}$, с заданным значением $f(x, 0) = f_0(x)$. Тогда решением будет

$$f(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{\pi}\, \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} f_0(\xi). \tag{2.5}$$

Для круга радиуса R с заданным граничным условием, вида $f(R\cos t,\, R\sin t) = f_0(t)$ решением будет

$$f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi}\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2} f_0(t). \tag{2.6}$$

3 Специальные функции

Γ, ψ, B-функции

Гамма-функция. Найдем некоторые интересные свойства:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\, dt \overset{t\to\tau x}{=} x^{z+1}\int_0^\infty \tau^z e^{-\tau x}\, d\tau, \qquad \frac{1}{x^z} = \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty \tau^{z-1} e^{-\tau x}\, d\tau.$$

Существует аналитическое продолжение:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{1 - e^{2\pi i z}}\int_C t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

Видим, что у $\Gamma(z)$ есть особенности $z \in \mathbb{Z}$, где $z \in \mathbb{N}$ – УОТ, и $z \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$ – П1П:

$$\operatorname{res}_{-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}, \tag{3.1}$$

Могут пригодиться следущие выражения для Γ-функции:

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \tfrac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\Gamma(2z), \qquad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

А также *формула Стирлинга*, которую нетрудно получить методом перевада:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\,dt = \int_0^\infty e^{z\ln t - t}\,dt \approx e^{z\ln z - z}\sqrt{2\pi z} = \sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^z. \tag{3.2}$$

Дигамма-функция. По определнию дигамма-функция $\psi(z)$:

$$\psi(z) \overset{\text{def}}{=} (\ln\Gamma(z))' = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Заметим, что $\psi(1) = -\gamma$, где $\gamma \approx 0.58$ – постоянная Эйлера-Маскерони. Найдём

$$\psi(z+1) = (\ln z + \ln\Gamma(z)) = \frac{1}{z} + \psi(z), \quad \Rightarrow \quad \psi(N+1) = \frac{1}{N} + \psi(N) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + \psi(1).$$

Также бывает полезно

$$\psi(x+N+1) = \frac{1}{x+N} + \psi(x+N) = \frac{1}{x+N} + \ldots + \frac{1}{x+1} + \psi(x+1).$$

Вспомним, что $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$. Тогда

$$\psi(-z) - \psi(z) = \pi\operatorname{ctg}\pi z.$$

Асимптотика для $\psi(z\to\infty)$:

$$\psi(z\to\infty) = (\ln\Gamma(z))' = \ln z + \frac{1}{2z} + o(1) = \ln z + o(1).$$

Бета-функция. Рассмотрим B-функцию:

$$B(\alpha,\,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt, \quad \operatorname{Re}\alpha,\beta > 0, \qquad B(\alpha,\,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

которую бывает удобно доставать в интегралах.

Функция Эйри

Метод Лапласа. Рассмотрим дифференциальное уравнение, вида

$$(a_n z + b_n) f^{(n)} + \ldots + (a_1 z + b_1) f^{(1)} + (a_0 z + b_0) f^{(0)} = 0, \qquad f(z) = \int_C \tilde{f}(p) e^{pz}\,dp,$$

где $f(p)e^{pz}|_{\partial C}^{\forall z} = 0$. Тогда введем полиномы $A(p)$ и $B(p)$ такие, что

$$-\partial_p\left[A(p)f(p)\right] + B(p)f(p) = 0, \quad A(p) = a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0, \quad B(p) = b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0.$$

Решая, находим образ Лапласа

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{A(p)}\exp\left(\int_{p_0}^{p}\frac{B(t)}{A(t)}\,dt\right).$$

Метод перевала. Действительный метод перевала:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{f(x)} g(x)\,dx = g(x_0) e^{f(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}}.$$

Для стационарной фазы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{if(x)} g(x)\,dx = g(x_0) e^{if(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)}} e^{\pm i\pi/4},$$

где $\pm$ согласован с $\operatorname{sign} f''$. Для комплексного метода перевала

$$I = \int_C e^{f(z)} g(z)\,dz = g(z_0) e^{f(z_0)} e^{i\varphi}\sqrt{\frac{2\pi}{|f''|}}, \qquad \varphi = \frac{1}{2}\left(\pm\pi - \arg f''(z_0)\right).$$

Функция Эйри. Решаем уравнение, вида

$$\partial_x^2 f - xf = 0, \quad \Rightarrow \quad f(x) = \int_C e^{xt - t^3/3}\,dt.$$

Так приходим к

$$\operatorname{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{xt - t^3/3}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(xu + u^3/3)\,du.$$

Запишем асимптотики на бесконечности:

$$\mathrm{Ai}(z) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{z^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right), \qquad z \to +\infty$$

$$\mathrm{Ai}(z) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(-z)^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), \qquad z \to -\infty.$$

В качетсве второго решения выбрается

$$\mathrm{Bi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[e^{xu - u^3/3} + \sin(xu + u^3/3)\right] du,$$

с асиматотиками, вида

$$\mathrm{Bi}(z) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{z^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right), \qquad z \to +\infty$$

$$\mathrm{Bi}(z) \approx \frac{1}{\pi} \frac{1}{(-z)^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), \qquad z \to -\infty.$$

Функции Бесселя

Уравнение Бесселя:

$$\partial_z^2 J_m + \frac{1}{z} J_m + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) J_m = 0,$$

где $J_m(0) \in \mathbb{R}$. Знаем, что

$$e^{iz\sin\varphi} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} J_n(z) e^{in\varphi}, \quad \Rightarrow \quad J_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{iz\sin\varphi} e^{-im\varphi}\, d\varphi, \quad \Leftrightarrow \quad J_m(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z\sin\varphi - m\varphi)\, d\varphi.$$

Умеем дифференцировать:

$$\frac{dJ_m}{dz} = \frac{J_{m-1}(z)}{2} - \frac{J_{m+1}(z)}{2}, \qquad \frac{m}{z} J_m(z) = \frac{1}{2}\left(J_{m+1}(z) + J_{m-1}(z)\right), \qquad \frac{d}{dz}\left(z^m J_m(z)\right) = J_{m-1}(z) z^m. \tag{3.3}$$

Откуда сразу находим

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_n(x)}{x^n}\right) = -\frac{J_{n+1}(x)}{x^n}, \qquad J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z). \tag{3.4}$$

Умеем раскладывать в ряд и уходить на бесконечность:

$$J_m(z) = \frac{z^m}{2^m} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k z^{2k}}{4^k k!(m+k)!}, \qquad J_m(z \to \infty) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

соответственно с нулями в $\frac{\pi}{2} + \pi m$.

Преобразование Фурье от функции:

$$F[J_m(z)](k) = \int_{-\infty}^{+\infty} J_m(z) e^{-ikz}\, dz = \frac{(-1)^m e^{im\varphi_0} + e^{-im\varphi_0}}{\sqrt{1-k^2}}, \qquad \varphi_0 = \arcsin k.$$

В частности

$$F[J_0](k) = \frac{2}{\sqrt{1-k^2}} \theta(1-k^2), \qquad F[J_1](k) = \frac{2ik}{\sqrt{1-k^2}} \theta(1-k^2).$$

Преобразование Лапласа:

$$\Lambda[J_m](p) = \int_0^\infty e^{-pz} J_m(z)\, dz = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}(p + \sqrt{p^2+1})^m}.$$

Например,

$$\int_0^\infty \frac{J_n(z)}{z^n}\, dz = \frac{1}{(2n-1)!!}.$$

Помним, что $J_m(0) = \delta_{m,0}$.

Ортогональные полиномы

Полиномы Лежандра. Дифференциральное уравнение (a, $b = -1$, 1):

$$\sigma(x) = 1 - x^2, \qquad \tau(x) = -2x = \sigma', \qquad \rho = 1, \qquad (1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0.$$

Формула Родрига:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\partial_x^n (1-x^2)^n, \qquad \alpha_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}, \qquad a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.$$

Нормировка:

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

Рекуррентное соотноешение:

$$A_n = \frac{\|p_n+1\|^2}{\langle p_{n+1}|xp_n\rangle} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{n+1}, \qquad B_n = 0, \qquad C_n = -\frac{n}{n+1},$$

подставляя, приходим к

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n + nP_{n-1}(x) = 0.$$

Производяшая функция:

$$\psi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 2zx + 1}}.$$

Умеем дифференцировать

$$(x^2-1)\frac{dP_n}{dx} = n(xP_n(x) - P_{n-1}(x)).$$

Полиномы Эрмита. Живут на $(-\infty, +\infty)$, дифференциральное уравнение

$$\sigma = 1, \qquad \tau = -2x, \qquad \rho(x) = e^{-x^2}, \qquad H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0, \qquad (e^{-x^2}H_n')' = -2ne^{-x^2}H_n.$$

Знаем, что формула Родрига примет вид

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\partial_x^n e^{-x^2}, \qquad a_n = 2^n,$$

тогда

$$\|H_n\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Рекуррентное соотношение:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Производящаяя функция:

$$\psi(x,z) = e^{-z^2+2zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n.$$

Полиномы Лаггера. Живут на интервале от $(0,\, +\infty)$, с дифференциальным уравнением, вида

$$\hat{L} = x\partial_x^2 + (1+\alpha-x)\partial_x, \qquad \rho = x^\alpha e^{-x},$$

для $\alpha > -1$. Собственные числа $\lambda_n = n$, формула Родрига имеет вид

$$L_n^{(\alpha)} = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \partial_x^n \left[x^{n+\alpha} e^{-x}\right].$$

4 Динамические линейные поля

Граничные условия. Вообще граничные условия можно вводить из разложения

$$u(t\to 0,\, \boldsymbol{r}) \approx \theta(t) u(t=0, \boldsymbol{r}) + t\theta(t)\partial_t u(t=0,\, \boldsymbol{r}) + \ldots,$$

тогда действие оператора ∂_t^2 на эти члены дает сингулярные слагаемые

$$(\partial_t^2 + \nabla^2) u(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{r}) = \delta'(t) u(t=0, \boldsymbol{r}) + \delta(t)\partial_t u(t=0, \boldsymbol{r}),$$

которые можем воспринимать как источник.

Волновое уравнение

Общий подход. Найдём функцию Грина для уравнения, вида

$$\left(\partial_t^2 + \varpi^2[-i\nabla]\right) u = \chi.$$

Решение запишется в виде

$$\left(\partial_t^2 + \varpi^2[-i\nabla]\right) G = \delta(t)\delta(\boldsymbol{r}), \qquad u(t,\, \boldsymbol{r}) = \int dt_1\, d^3 r_1\; G(t-t_1,\, \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\chi(t_1,\, \boldsymbol{r}_1).$$

Переходя к пространственному Фурье-образу, приходим у уравнению с известной функцией Грина:

$$\left(\partial_t^2 + \varpi^2[\boldsymbol{q}]\right)\tilde{G} = \delta(t), \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{G}(t) = \theta(t)\frac{\sin(\varpi t)}{\varpi}.$$

Тогда через обратное Фурье-преобразование находим

$$G(t,\,\boldsymbol{r}) = \theta(t)\int_{\mathbb{R}^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{\sin(\varpi t)}{\varphi}\exp\left(i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}\right) \overset{*}{=} \frac{\theta(t)}{\pi r}\int_0^\infty \frac{dq}{2\pi}q\frac{\sin(\varpi[q]t)}{\varpi[q]}\sin(qr),$$

где $\overset{*}{=}$ верно для $\varpi[\boldsymbol{q}] \equiv \varpi[q]$.

Например, для $\varpi[\boldsymbol{q}] = qc$, волновое уравнение с источником:

$$(\partial_t^2 - c^2\nabla^2)u(t,\boldsymbol{r}) = \chi(t,\boldsymbol{r}), \qquad G(t,r) = \frac{\theta(t)}{4\pi cr}\delta(r-ct). \tag{4.1}$$

а значит выражение для поля:

$$u(t,\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi c^2}\int d^3r_1\;\frac{\chi(t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|/c,\boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|}, \tag{4.2}$$

перейти к сферически симметричному случаю.

Уравнение Гельмгольца

Рассмотрим отдельно уравнение Гельмгольца

$$(\nabla^2 + \varkappa^2)f = \varphi(\boldsymbol{r}).$$

Как и раньше, запишем найдём решение в виде

$$(\nabla^2+\varkappa^2)G(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}), \qquad \Rightarrow \qquad f(\boldsymbol{r}) = f_0(\boldsymbol{r}) + \int d^3r_1\;G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\varphi(\boldsymbol{r}_1),$$

где f_0 – решение однородного уравнения Гельмгольца. Функция Грина:

$$G = -\frac{\exp(i\varkappa r)}{4\pi r},$$

для $\omega > 0$ и $G \to G^*$ при $\omega < 0$.

Уравнение теплопроводности

Уравнение диффузии с известным $u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x})$:

$$\left(\partial_t - \nabla^2\right)u(t,\boldsymbol{x}) = 0, \tag{4.3}$$

решение которого может быть найдено в виде:

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d}\frac{dy_1\ldots dy_d}{(4\pi t)^{d/2}}\exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2}{4t}\right)u_0(\boldsymbol{y}). \tag{4.4}$$

Асимтотики могут быть найдены в виде

$$u(t,\boldsymbol{x}) \approx \frac{A}{(4\pi t)^{d/2}}\exp\left(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{4t}\right), \qquad A = \int_{\mathbb{R}^d} dy_1\ldots dy_d\;u_0(\boldsymbol{y}). \tag{4.5}$$

При $A=0$ асимтотика будет соответствовать

$$u(t,\boldsymbol{x}) \approx \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{x}}{(4\pi t)^{d/2+1}}\exp\left(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{4t}\right), \qquad \bar{B} = 2\pi\int_{\mathbb{R}^d} dy_1\ldots dy_d\;\boldsymbol{y}\,u_0(\boldsymbol{y}), \tag{4.6}$$

где асимтотики имеют место при $t \gg l^2$, l – масштаб на котором локализовано поле.

Накачка. При наличии правой части:

$$(\partial_t - \nabla^2)u = \varphi,$$

можем найти функцию Грина для оператора $\partial_t - \nabla^2$

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \int G(t-\tau,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\varphi(t,\boldsymbol{y})\,d\tau\,d^d\boldsymbol{y}, \qquad G(t,\boldsymbol{r}) = \frac{\theta(t)}{(4\pi t)^{d/2}}\exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right).$$

5 Интегральные уравнения

Уравнение Фредгольма. Есть уравнение Фредгольма I рода:

$$\int_a^b ds\;K(t,s)f(s) = g(t),$$

и уравнение Фредгольма II рода:

$$f(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t,s) f(s), \quad \Leftrightarrow \quad f = g + \lambda \hat{K} f, \tag{5.1}$$

где мы ввели интегральный оператор $\hat{K} f = \int_a^b ds\ K(t,s) f(s)$. Решение можем найти в виде

$$f = \frac{1}{1-\lambda\hat{K}}\, g = \left(\mathbb{1} + \lambda \hat{R}\right) g, \qquad \hat{R} \overset{\text{def}}{=} \hat{K} + \lambda \hat{K}^2 + \ldots$$

В терминах интегрирования резольвента $R(t,s)$ выражается, как

$$R(t,s) = K(t,s) + \lambda \int_a^b dp_1\ K(t,p_1) K(p_1,s) + \lambda^2 \int_a^b dp_1 \int_a^b dp_2\ K(t,p_1) K(p_1,p_2) K(p_2,s) + \ldots \tag{5.2}$$

Это всё интегрируем, суммируем, получаем $R(t,s)$, и сразу ответ в виде $f = g + \lambda \hat{R} g$.

Линейные интегральные уравнения

Свертка I. Рассмотрим уравнение на φ, вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) \varphi(y) = f(x), \tag{5.3}$$

то есть уравнение Фредгольма первого рода с $(a,b) = \mathbb{R}$ и $K(x,y) = K(x-y)$. Решение можем найти через преобразование Фурье

$$\tilde{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx}\, dx, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k) e^{ikx}\, dx,$$

которое переводит свёртку в произведение:

$$\tilde{\varphi}(k) = \frac{\tilde{f}(k)}{\tilde{K}(k)}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{f}(k)}{\tilde{K}(k)}. \tag{5.4}$$

Свертка II. Аналогично для уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} dy\ K(x-y) \varphi(y), \tag{5.5}$$

для которого также

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} dy\ f(y) R(x-y), \qquad R(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{K}(k)}{1 - \lambda \tilde{K}(k)}. \tag{5.6}$$

Уравнение Вольтерра I. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма I на $(a,b) = (0,t)$:

$$f(t) = \int_0^t ds\ K(t-s) \varphi(s).$$

Здесь хорошо работает преобразование Лапласа

$$f(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt, \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} f(p) e^{pt}\, dp,$$

которое переводит свертку в произведение, а значит можем сразу написать решение

$$\varphi(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \frac{f(p)}{K(p)} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}. \tag{5.7}$$

Уравнение Вольтерра II. Аналогично для уравнения Фредгольма II:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^t K(x-y) \varphi(y)\, dy, \tag{5.8}$$

находим решение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^t R(t-s) f(s)\, ds, \qquad R(t) = \int_{p_0 - i\infty}^{p_0 + i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \frac{K(p)}{1 - \lambda K(p)}.$$

Периодическое ядро I. Рассмотрим $f(t)$ и $K(t)$ периодчиные с $T = b - a$, тогда и $\varphi(t)$ периодично по T. Решим уравнение, вида

$$\int_a^b K(t-s) \varphi(s)\, ds = f(t). \tag{5.9}$$

Раскладывая всё в ряд Фурье (вводя $\omega = \frac{2\pi}{T}$):

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-in\omega t} f_n, \qquad f_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{in\omega t}\, dt.$$

Решение находим в виде суммы

$$\varphi_n = \frac{f_n}{TK_n}, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{f_n}{TK_n} e^{-in\omega t}. \tag{5.10}$$

Периодическое ядро II. Аналогично можем найти резольвенту для уравнения Фредгольма второго рода:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b ds\ K(t-s)\varphi(s).$$

Реше $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b ds\ R(t-s) f(s), \qquad R(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{K_n}{1-\lambda T K_n} e^{-in\omega t}. \tag{5.11}$$

Факторизуемое ядро. Рассмотрим случай, когда ядро вырожденное: $K(t,s) = \sum_i A_i(t) B_i(s)$. Тогда интегральное уравнение перепишется в виде

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum A_i(t) \int_a^b B_i(s)\varphi(s)\, ds.$$

Решение уравнения можем найти в виде

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum_i C_i A_i(t), \qquad (\mathbb{1} - \lambda \hat{M})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\Phi}, \qquad \Phi_i = \int_a^b B_i(t) f(t)\, dt, \qquad M_{ij} = \int_a^b B_i(t) A_j(t)\, dt.$$

Нелинейные интегральные уравнения

Уравнение типа свёртки. Рассмотрим уравнение вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t-s)\varphi(s) = f(t). \tag{5.12}$$

Аналогично смотрим на фурье-образ, откуда находим выражение для $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{f(\omega)} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \tag{5.13}$$

Обобщение. Обобщим происходящее, введя $L(s)$

$$L(s) = \sum_{n=0}^{N} a_n s^n, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} ds\ \varphi(t-s) L(s) \varphi(s) = f(t), \tag{5.14}$$

решим в виде

$$\varphi(\omega) L(i\partial_\omega) \varphi(\omega) = f(\omega), \tag{5.15}$$

то есть можем свести интегральное уравнение к дифференциальному.

Лаплас. Рассмотрим уравнение вида

$$\int_0^t ds\ \varphi(t-s) L(s) \varphi(s) = f(t),$$

решение которого также находится в виде

$$\varphi(p) L(-\partial_p) \varphi(p) = f(p).$$

Периодический случай. Аналогично линейному случаю рассмотрим

$$\int_{-\pi}^{+\pi} ds\ \varphi(t-s)\varphi(s) = f(t),$$

периодичное с $T = 2\pi$ и $\omega = 1$. Тогда решение находится в виде

$$\varphi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\pm) \sqrt{\frac{f_n}{2\pi}} e^{-int}.$$

Факторизуемое ядро. Для факторизуемого ядра уравнение примет вид

$$\varphi(t) = x(t) \int_a^b ds\ \varphi^n(s) y(s) + f(t),$$

решение которого можем найти в виде

$$\varphi(t) = \alpha x(t) + f(t), \qquad \alpha\colon \alpha = \int_a^b dt\ y(t) \left(\alpha x(t) + f(t)\right)^n,$$

где α задан неявно алгебраическим уравнением.

Факторизуемое ядро на причинном интервале. Для уравнения на интервале $[0,t]$ уравнение вида

$$\varphi(t) = f(t) + x(t) \int_0^t ds\ y(s) \varphi^n(s),$$

может быть сведено к дифференциальному уравнению по $z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t)/x(t)$:

$$z'(t) = y(t) x^n(t) z^n(t) + \frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{x(t)}\right), \qquad z(0) = \frac{f(0)}{x(0)}.$$

Сингулярные интегральные уравнения

Сингулярные интегральные уравнения. Основой решения станет *формула Сохоцкого*:

$$\text{v. p.} \int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0}\, dx = \pm i\pi f(x_0) + \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0 \pm i\varepsilon}\, dx. \tag{5.16}$$

Полезно ввести преобразование Гильберта $\hat{H}$:

$$\hat{H}\varphi(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)\, dy}{2\pi} \left(\frac{1}{y - x + i\varepsilon} + \frac{1}{y - x - i\varepsilon}\right),$$

для которого верно, что $\hat{H}^2 = -\mathbb{1}$.

Тогда *простейшее сингулярное уравнение* вида

$$\pi\hat{H}\varphi(x) + \lambda\varphi(x) = f(x) \tag{5.17}$$

будет иметь решение относительно $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \pi^2} f(x) - \frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} \hat{H}[f](x) = \frac{1}{\lambda + i\pi} f(x) - \frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\ \frac{f(y)}{y - x + i\varepsilon}. \tag{5.18}$$

Сингулярные интегральные уравнения с полиномильными коэффициентами. Рассмотрим уравнение вида

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(y)}{y - x}\, dy = x^2\varphi(x) + f(x).$$

Применяя оператор $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x - z + i\varepsilon}$, приходим к уравнению

$$-\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y - z + i\varepsilon}\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2\varphi(y)}{y - z + i\varepsilon}\, dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y - z + i\varepsilon}\, dy.$$

Здесь можем провести следующие рассуждения:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(y - z + i\varepsilon + z - i\varepsilon)}{y - z + i\varepsilon} \varphi(y)\, dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(y)\, dy + z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y - z + z}{y - z + i\varepsilon} \varphi(y)\, dy = \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(y)\, dy}_{C_1} + z \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\, dy}_{C_2} + z^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y - z + i\varepsilon}\, dy,
\end{aligned}$$

а значит исходное уравнение переписывается в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y - z + i\varepsilon}\, dy = -\frac{1}{z^2 + i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y - z + i\varepsilon}\, dy - \frac{C_1 + C_2 z}{z^2 + i\pi},$$

решение которого мы уже знаем:

$$\varphi(x) = -\frac{C_1 + C_2 x}{x^4 + \pi^2} - \frac{f(x)}{x^2 - i\pi} - \frac{1}{x^4 + \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y - z + i\varepsilon}\, dy.$$

Сингулярные интегральные уравнения на отрезке. Рассмотрим уравнение на конечном отрезке

$$\text{v.p.}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(y)}{y - x}\, dy = f(x).$$

Решение можем найти при условии на f: $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0$, тогда

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi i}\left(f(x) + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{f(y)\,dy}{\sqrt{1-y^2}(y-x+i\varepsilon)}\right).$$

6 Элементы теории групп

Теория групп

Сопряженными (из одного *класса сопряженности*) называть элементы $g \sim h$ такие, что $\exists r \in G$, $g = rhr^{-1}$. Далее классы сопряженности будем обозначать за $C_1, \ldots, C_k$, элементы в них за $h_i \in C_i$.

Циклическая группа C_n

$$C_n = \{\mathbb{1}, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}, \qquad r^n = \mathbb{1}.$$

Для C_n каждый элемент становился представителем класса сопряженности в силу того, что группа абелева.

Группа перестановок S_n

$$S_n = \left\{\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(n)\end{pmatrix}\right\},$$

разбивается на классы сопряженности с одинаковой циклической структурой:

$$S_2 \to \{\mathbb{1}\}, \{(a,b)\}, \qquad S_3 \to \{\mathbb{1}\}, \{(a,b)\}, \{(a,b,c)\}, \qquad S_4 \to \{\mathbb{1}\}, \{(a,b)\}, \{(a,b,c)\}, \{(a,b,c,d)\}, \{(a,b)(c,d)\}.$$

Также в S_n $\forall\sigma$ раскладывается в циклы, а циклы в транспозиции, определенной оказывается величина четность σ. Для неё выполняется

$$\operatorname{sign}(\sigma_1\cdot\sigma_2) = \operatorname{sign}(\sigma_1)\cdot\operatorname{sign}(\sigma_2), \qquad \operatorname{sign}(a,b) = -1, \qquad \operatorname{sign}(i_1, i_2, \ldots, i_d) = \left[\begin{array}{ll} +1, & d \not\vdots\, 2, \\ -1, & d \,\vdots\, 2. \end{array}\right.$$

Четностью перестановки называют количество пар $i < j$ таких, что $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Группа D_n симметрий правильного n-угольника состоит из r – поворотов на $2\pi/n$ и s – отражений относительно какой-то выбранной оси. Для $n \,\vdots\, 2 = 0$ получатся классы сопряженности $\{r^b, r^{n-b}\}$, $\{s, sr^2, sr^4, \}$ и $\{sr, sr^3, sr^5, \ldots\}$. Для $n \not\vdots\, 2$ получится $\{r^b, r^{n-b}\}$ и $\{s, sr, sr^2, \ldots\}$.

Теория представлений

Далее работаем с конечными группами $|G| < +\infty$. Элемент группы обозначаем за $g \in G$. *Представление* группы определяют как гомоморфизм $\rho\colon G \mapsto \mathrm{GL}(V, \mathbb{C})$ (невырожденные матрицы).

Характером представления ρ называют $\chi[V] = \operatorname{tr}\rho(g)$ для $g \in G$. Характеры изморфных представлений совпадают, а также

$$\chi[V](\mathbb{1}) = \dim V, \qquad \chi[V_1 \oplus V_2] = \chi[V_1] + \chi[V_2], \qquad \chi[V](g^{-1}) = \chi^*[V](g), \qquad \chi[V_1 \otimes V_2] = \chi[V_1]\cdot\chi[V_2].$$

Стараемся решить задачу о разложение приводимого представления по неприводимым. Представление ρ называется *неприводимым*, если у него нет нетривиальных (отличных от $\{0\}$ и V) инвариантных подпространств. По теореме Машке $\forall\rho$ конечной группы G разбивается на сумму неприводимых представлений. Всякое представление *унитаризуемо*.

Для характеров определим скалярное произведение $\langle\chi^{(i)}|\chi^{(j)}\rangle$:

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi(g)\bar{\psi}(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{k}|C_i|\varphi(h_i)\bar{\psi}(h_i).$$

Характеры ортогональны по строкам и столбцам:

$$\langle\chi^{(i)}|\chi^{(j)}\rangle = \delta_{ij}, \qquad \sum_{n=1}^{k}\chi^{(n)}(h_i)\bar{\chi}^{(n)}(n_j) = \delta_{ij}\frac{|G|}{|C_i|}.$$

Число неприводимых представлений равно числу классов сопряженности. Все неприводимые представления абелевой группы одномерны, что является следствием теоремы Бернсайда:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = |G|,$$

где d_i – размерность i-го представления. *Критерием неприводимости* является $\langle\chi|\chi\rangle = 1$, тогда разложение на неприводимые: $\chi = a_1\chi^{(1)} + \ldots + a_n\chi^{(n)}$, где $a_i = \langle\chi|\chi^{(i)}\rangle$.

Таблицы неприводимых представлений

Построение для C_n тривиально в силу абелевости группы. Каждый элемент представим в виде $\sqrt[n]{1}$. Построение производим с учетом свойства $\rho(r^k) = \rho(r)^k$.

Теперь для D_4 размера $|D_4| = 2 \times n = 8$, будут классы сопряженности $\{\mathbb{1}\}$, $\{r^2\}$, $\{r,\, r^3\}$ и $\{s,\, sr^2\}$, $\{sr,\, sr^3\}$.

$\mathbb{1}$| 1	$r,\, r^3$| 2	r^2| 1	$s,\, sr^2$| 2	$sr,\, sr^3$| 2
1	1	1	1	1
1	1	1	-1	-1
1	-1	1	1	-1
1	-1	1	-1	1
2	0	-2	0	0

Всегда есть тривиальное представление. Также из теоремы Бернсайда находим первый столбец.

По сохранению или смене ориентация базиса можем сопоставить ± 1 соответсвующием классам. Важно помнить, что $(sr^k)^2 = \mathbb{1}$ и $(r^k)^4 = \mathbb{1}$, откуда знаем одномерные представления $\rho(sr^k) = \pm 1$ и $\rho(r^k) = \sqrt[4]{1} = \pm i, \pm 1$, откуда достраиваем одномерные представления.

При построение D_7 будет важно вспомнить про сопоставление матриц поворота двухмерным представлениям, по которым найдём элементы таблицы характеров, как след соответсвующей матрицы.

Построим табличку характеров для S_3: $|S_3| = 3! = 6$. Также из теоремы Бернсайда находим первый столбец. Для второй строчки всегда есть *знаковое* представление.

e| 1	(a,b)| 3	(a,b,c)| 2
1	1	1
1	-1	1
2	0	-1

Построим табличку характеров для S_4: $|S_4| = 4! = 24$.

e| 1	(a,b)| 6	(a,b,c)| 8	(a,b,c,d)| 6	$(a,b)(c,d)$| 3
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
2	0	-1	0	2
3	-1	0	1	-1
3	1	0	-1	-1

Тут важно посмотреть на отображение $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, построив $\chi[\mathbb{C}^4]$, значениях характеров которой можем восстановить по количеству неподвижных точек (4, 2, 1, 0, 0). Неприводимое представление можем получить в виде $\chi[\mathbb{C}^4] - \chi^{(1)}$. Также может помочь тензорное произведение представлений.

7 Для любознательных

Автомодельные решения

Если уравнения вида $\hat{L}\, u(\boldsymbol{r}, t) = \ldots$ – однородно и изотропно, то может помочь автомодельная подстановка:

$$u(t, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{t^a} f\left(\tfrac{r}{t^b}\right) \quad : \quad t \to \lambda t \quad \Rightarrow \quad u \to \lambda^{-a} u,\ r \to \lambda^b r. \tag{7.1}$$

Восстановить a в общем виде нельзя, но требуя, например, локальности решения $\int_{\mathbb{R}^n} u\, dV = \text{const}$ можем иногда найти и a.

Метод Боголюбова-Крылова

Рассмотрим прозвольное возмущение гармонического осциллятора:

$$\left(\partial_t^2 + \omega_0^2\right) x(t) = \varepsilon f(t, x, \dot{x}). \tag{7.2}$$

Приближенно (до $o(\varepsilon)$) можем методом Боголюбова-Крылова найти решение в виде

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \tag{7.3}$$

где зависимость от времени амплитуды и фазы определяестся уравнениями

$$\partial_t A(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0}\int_{\omega_0 t-\pi}^{\omega_0 t+\pi} f(\tau,x,\dot{x})\sin\left(\omega_0\tau+\varphi(t)\right)\,d(\omega_0\tau), \tag{7.4}$$

$$\partial_t \varphi(t) = \frac{-\varepsilon}{2\pi A\omega_0}\int_{\omega_0 t-\pi}^{\omega_0 t+\pi} f(\tau,x,\dot{x})\cos(\omega_0\tau+\varphi(t))\,d(\omega_0\tau). \tag{7.5}$$

Упрощая себе жизнь с $\omega_0=1$, приходим к выражению

$$\partial_t A(t) = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau,x,\dot{x})\sin\left(\tau+\varphi\right)\,d\tau,$$

$$\partial_t \varphi(t) = \frac{-\varepsilon}{2\pi A}\int_0^{2\pi} f(\tau,x,\dot{x})\cos(\tau+\varphi)\,d\tau,$$

где $\dot{\varphi}=0$ почти всегда и в интеграле для $\dot{A}$ можно избавиться от φ.

Уравнения Хопфа и Бюргерса

Уравнение Хопфа. В акустике естественно возникает уравнение Хопфа:

$$\partial_t u + u\,\partial_x u = 0.$$

Решение может быть найдено в виде

$$x(t) = x_0 + u_0(x_0)t, \qquad u(x(t),t) = c(x_0) = u_0(x_0).$$

где сначала разрешаем уравнение $c=u_0(x_0)$ относительно $x_0=x_0(c)$, а потом подставляя $x_0(c)$ в выражение для $x(t)=x_0(c)+ct$, разрешаем его относительно $c=c(x(t),t)$. Зная, что $u(x(t),t)=c(x(t),t)$, находим $u(x,t)=c(x,t)$.

Накачка. Добавим к уравнению накачку:

$$\partial_t u + u\,\partial_x u = f(x,t).$$

Система может быть сведена к

$$\begin{cases}\dot{u} = f(t,x(t))\\ \dot{x} = u(t,x(t))\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \ddot{x} = f(x,t), \quad\Rightarrow\quad x(t) = x(t,x_0,\dot{x}_0),$$

где $\dot{x}_0=u_0(x_0)$. Сначала разрешаем уравнение $x(t)$ относительно $x_0=x_0(t,x)$, а потом подставляем этот x_0 в $u(t,x)=\dot{x}(t,x_0(t,x))$, что и является решением исходной задачи.

Уравнение Бюргерса. Добавим диссипацию в уравнение Хопфа:

$$\partial_t u + u\,\partial_x u = \partial_x^2 u,$$

так получим *уравнение Бюргерса*.

Заметим, что преобразование Коула-Хопфа

$$\psi = \exp\left(-\tfrac{1}{2}h\right), \qquad u=\partial_x h, \qquad\Rightarrow\qquad (\partial_t-\partial_x^2)\psi = 0.$$

Имея начальные условия для $\psi_0(x)$, можем найти

$$\psi(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \psi_0(y)\frac{\theta(t)}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right)\,dy,$$

откуда находим решение

$$u(t,x) = -2\partial_x \ln\psi(t,x).$$

8 Справочник

Вычеты

Интеграл по дуге может быть найден, как

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{z_j}\operatorname{res}_{z_j} f(z), \qquad \operatorname{res}_{z_j} f(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}e^{i\varphi}f(z_j+\varepsilon e^{i\varphi})$$
$$= \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_j}\left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_j)^m f(z)\right),$$

где m – степень полюса.

Интегралы

Например,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^a \varphi \cos^b \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} B\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(1+\frac{a+b}{2}\right)},$$

для чего напомним несколько значений

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \qquad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

Также для $1+m<kn$, верно

$$\int_0^\infty \frac{x^m}{(1+x^n)^k}\, dx = \Big/ t = \frac{1}{1+x^n} \Big/ = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)\Gamma\left(k-\frac{m+1}{n}\right)}{n\Gamma(k)}.$$

Может быть полезно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm iz^2}\, dz = \sqrt{\pi} e^{\pm i\pi/4}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos z^2 \, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin z^2 \;\, z = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Чуть удобнее бывает пользоваться сразу формулой, вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm iax^2+ibx}\, dx = \sqrt{\pi} e^{\pm i\pi/4} e^{\pm\frac{b^2}{4ai}}.$$

Преобразование Фурье

В n-мерии само преобразование имеет вид

$$\tilde{f}(\boldsymbol{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n\boldsymbol{r}\; \exp\left(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right) f(\boldsymbol{r}), \qquad f(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n\boldsymbol{k}}{(2\pi)^n}\; \exp\left(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\right)\tilde{f}(\boldsymbol{k}).$$

Для преобразования Фурье полезно помнить

$$\mathcal{F}[f^{(n)}] = (i\omega)^n \mathcal{F}[f](\omega/a), \qquad \mathcal{F}[f(x-x_0)] = e^{-i\omega x_0}\mathcal{F}[f](\omega/a), \qquad \mathcal{F}[f(ax)] = |a|^{-1}\mathcal{F}[f](\omega/a),$$

то есть что происходит при растяжение, сдвигах и дифференцирование.

Преобразование Лапласа

Выпишем несколько пар оригинал-изображение:

$$t^n e^{\lambda t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}, \qquad t^\alpha e^{\lambda t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{n+1}}, \qquad \frac{(1-e^{-t})}{t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \ln\left(1+\frac{1}{p}\right), \qquad \frac{\sin t}{t} \xrightarrow{\mathcal{L}} \operatorname{arctg} p$$

$$\sin(\nu t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\nu}{p^2+\nu^2}, \qquad \cos(\nu t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{p}{p^2+\nu^2}, \qquad t\sin(\nu t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2p\nu}{(p^2+\nu^2)^2}, \qquad t\cos(\nu t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{p^2-\nu^2}{(p^2+\nu^2)^2},$$

$$\operatorname{sh}(\nu t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\nu}{p^2-\nu^2}, \qquad \operatorname{ch}(\nu t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{p}{p^2-\nu^2}, \qquad e^{\lambda t}\sin(\nu t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\nu}{(p-\lambda)^2+\nu^2}, \qquad e^{\lambda t}\cos(\nu t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\nu^2},$$

Также помним, что $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$, и $L[\delta(t-a)] = e^{-ap}$, при $a>0$.

Преобразование Меллина

Для функции $g(x)$ такую, что $g(x) = O(x^{-\alpha})$ при $x\to 0$ и $g(x) = x^{-\beta}$ при $x\to+\infty$ можем определить *преобразование Меллина*

$$G(\lambda) = \int_0^\infty g(x)x^{\lambda-1}\, dx,$$

определенного в полосе $\alpha < \operatorname{Re}\lambda < \beta$. Обратное преобразование может быть найдено в виде

$$g(x) = \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} G(\lambda)x^{-\lambda}\frac{d\lambda}{2\pi i},$$

для $\alpha < C < \beta$.

Для вычисления инетгралов бывает удобно воспользоваться сверточным свойством преобразования Меллина

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)x^{\lambda-1}\, dx = \int_{C_f-i\infty}^{C_f+i\infty} F(\lambda_f)G(\lambda-\lambda_f)\frac{d\lambda_f}{2\pi i} = \int_{C_g-i\infty}^{C_g+i\infty} F(\lambda-\lambda_g)G(\lambda_g)\frac{d\lambda_g}{2\pi i},$$

где $\alpha_f + \alpha_g < \operatorname{Re}\lambda < \beta_f + \beta_g$. В частности, при допустимом $\lambda = 1$, получаем

$$\int_0^\infty f(x)g(x)\,dx = \int_{C_f - i\infty}^{C_f + i\infty} F(\lambda_f)G(1-\lambda_f)\frac{d\lambda_f}{2\pi i}.$$

Приведем некоторый зоопарк по преобразованию Меллина:

$$e^{-x} \overset{M}{\to} \Gamma(\lambda), \qquad \frac{1}{1+ax^n} \overset{M}{\to} \frac{\pi a^{-\frac{\lambda}{n}}}{n\sin\left(\frac{\pi\lambda}{n}\right)}, \qquad \frac{1}{\sqrt[m]{1+x^n}} \overset{M}{\to} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m}-\frac{\lambda}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}, \qquad \frac{1}{1-x} \overset{M}{\to} \pi\cot(\pi\lambda),$$

$$\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx}} \overset{M}{\to} \frac{\Gamma(1-\lambda)\Gamma\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}-\lambda}}{\sqrt{\pi b}}, \qquad x^n \overset{M}{\to} 2\pi\delta(i(n+\lambda)), \qquad \frac{1}{1+e^{\alpha x}} \overset{M}{\to} \left(1-2^{1-\lambda}\right)\alpha^{-\lambda}\Gamma(\lambda)\zeta(\lambda),$$

$$\sin x \overset{M}{\to} \sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\Gamma(\lambda), \qquad \cos x \overset{M}{\to} \cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\Gamma(\lambda).$$

Суммирование по мацубаровским частотам

Общая идея. Когда нужно посчитать какую-нибудь сумму вида $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n$, то может быть удобно представить f_n как вычет некотрой функции $f(z)g(z)$ с $\operatorname{res}_n(z) = 1$ и $f(n) = f_n$. Тогда сумма сводится к интегралу, который легко берется. Функцию $g(z)$ имеет смысл выбирать таким образом, чтобы $\lim_{z\to\pm i\infty} f(z)g(z)$ был равен нулю.

Пример №1. Рассмотрим сумму, вида $S(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$. Будем считать, что в $n \in \mathbb{Z}$, у некоторой функции $g(z)$ случается полюс первого порядка, например у функции:

$$g(z) = \pi\operatorname{ctg}(\pi z), \qquad \operatorname{res}_n g(z) = 1.$$

Тогда сумму $S(a)$ можно переписать через произведение $f(z)g(z)$, где

$$f(z) = \frac{1}{n^2+a^2}, \qquad \Rightarrow \qquad S(a) = \int \frac{dz}{2\pi i}\frac{\pi}{z^2+a^2}\operatorname{ctg}(\pi z) = \Big/ \operatorname{res}_{\pm ia} \Big/ = \frac{\pi}{a}\operatorname{cth}(a\pi),$$

где воспользовались равенством $\operatorname{ctg} ix = -i\operatorname{cth} x$.

Пример №2. Теперь рассмотрим сумму с $f_n = e^{inx}(n^2-\varkappa^2)^{-2}$. Здесь в качестве $g(z)$ подойдет

$$g(z) = \frac{\pi e^{-i\pi z}}{\sin\pi z}, \qquad \operatorname{res}_n g(z) = 1,$$

тогда для $|x| < \pi$ асимптотика будет хорошей.