Задание по курсу «Экспериментальная реализация концепций квантовой физики»

Автор заметок: Хоружий Кирилл

От: *16 февраля 2022 г.*

Содержание

1 Неделя №1

Задача 1

Рассмотрим эрмитов оператор $\hat{A}$. По определению
$$\hat{A}\left|a\right\rangle = a\left|a\right\rangle, \qquad \left\langle a\right|\hat{A}^\dagger = \left\langle a\right|\bar{a}.$$
Домножая на $|a\rangle$, находим
$$(a-\bar{a})\langle a|a\rangle = 0, \qquad \Rightarrow \qquad a=\bar{a}, \qquad \Rightarrow \qquad a\in\mathbb{R}.$$
Рассмотрим теперь
$$\langle a|\hat{A}\rangle b = b\langle a|b\rangle = a\langle a|b\rangle, \qquad \Rightarrow \qquad \langle a|b\rangle = 0,$$
при $a\neq b$.

Задача 2

Знаем магнитный момент
$$\mu = \frac{IS}{c} = \frac{1}{c}\frac{\omega e}{2\pi}\pi r^2 = \frac{e}{2mc}L = \mu_{\text{эл}}/2,$$
т.к. фактор Ланде для $s=1/2$ равен $g=2$.

Задача 3

Можем выписать операторы и найти коммутатор
$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \frac{\hbar}{2}|-\rangle\langle+|, \qquad \hat{S}_y = -\frac{i\hbar}{2}|+\rangle\langle-| + \frac{i\hbar}{2}|-\rangle\langle+|,$$
тогда
$$[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = \frac{i\hbar^2}{2}|+\rangle\langle+| - \frac{i\hbar^2}{2}|-\rangle\langle-| = i\hbar\hat{S}_z \neq 0,$$
что вполне логично.

Задача 4

Рассмотрм эрмитов оператор $\hat{A}$ с базисом $|a_i\rangle$, введем оператор $\hat{B}$:
$$\hat{B} = \prod_i(\hat{A}-a_i),$$
и докажем, что $\hat{B}\left|b\right\rangle = 0\ \forall \left|b\right\rangle \in \mathcal{H}$.

Знаем, что
$$\left|b\right\rangle = \sum_i c_i\left|a_i\right\rangle, \qquad \Rightarrow \qquad \hat{B}\left|b\right\rangle = \sum_i c_i\hat{B}\left|a_i\right\rangle = \sum_i c_i\prod_k(a_i-a_k)\left|a_i\right\rangle = 0,$$
что и требовалось доказать.

Задача 5

Знаем, что
$$\left|S_x,+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|+\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|-\right\rangle, \qquad \left|S_x,-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|+\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|-\right\rangle.$$
Ну, выражаем в обратную сторону
$$\left|+\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|S_x,+\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|S_x,-\right\rangle, \qquad \left|-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|S_x,+\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|S_x,-\right\rangle.$$
Подставляя, находим
$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\left(|S_x,+\rangle\langle S_x,-| + |S_x,-\rangle\langle S_x,+|\right).$$

Задача 6

Знаем оператор

$$\hat{S}_\varphi = \frac{\hbar}{2}\left(e^{-i\varphi}|+\rangle\langle-| + e^{i\varphi}|-\rangle\langle+|\right).$$

Найдём его собственный вектор

$$\hat{S}_\varphi\,|\kappa\rangle = \lambda\,|\kappa\rangle\,, \qquad \kappa = \alpha_+\,|+\rangle + \alpha_-\,|-\rangle\,, \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{\hbar}{2},$$

тогда собственные векторы

$$|S_\varphi, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|+\rangle + \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}\,|-\rangle\,, \qquad |S_\varphi, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|+\rangle - \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}\,|-\rangle\,.$$