Гамильтониан системы

Рассмотрим систему фермионов в двух равнонаселенных спиновых состояниях $\uparrow, \downarrow$. Считаем возможным только парное взаимодествие в центрально-симметричном потенциале с частицами с разными спинами

$$V_{\text{ц}}(\hat{r}) = V_{\text{ц}}(\hat{r}) |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \text{c.c.}$$

Помещаем частицы в онородный резонатор объема Ω с периодическими граничными условиями. В силу однородности систему локальный и глобальный химические потенциалы совпадают $\nu_{\text{лок}} = \mu$ уточнить. Оператор $\hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow}$ рождает частицу в состоянии с волновой функцией $\frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$. Гамильтониан системы в наиболее общем случае имеет вид (ЛЛ9, §6):

$$\hat{H} = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}^2}{2m} \left(\hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} \hat{c}_{\boldsymbol{k}\uparrow} + \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k}\downarrow} \hat{c}_{\boldsymbol{k}\downarrow} \right) + \frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\boldsymbol{K}} g(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{K}/2,\uparrow} \hat{c}^\dagger_{-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{K}/2,\downarrow} \hat{c}_{-\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{K}/2,\downarrow} \hat{c}_{\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{K}/2,\uparrow},$$

где $g(\boldsymbol{q})$ – Фурье образ потенциала взаимодействия

$$g(\boldsymbol{q}) = \int_{\Omega} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} V_{\text{ц}}(r)\, d^3\boldsymbol{r}.$$

Модель уже содержит два упрощения. Во-первых, рассматриваются только парные взаимодействия. Во-вторых, в гамильтониане не учтено наличие

В качестве дальнейшего упрощения положим $\boldsymbol{K} = 0$, то есть взаимодействуют лишь частицы с равными противоположными импульсами. Это приближение обосновано при наличии сферы Ферми, то есть в пределе БКШ $-\varkappa_{\text{Ф}} a \ll 1$. Состояния с импульсом $< \varkappa_{\text{Ф}}$ в основном заняты, и поэтому частицы в них рассеиваться из-за запрета Паули. Добавив к запрету Паули законы сохранения энергии и импульса, видим, что наиболее вероятно рассеяние, при котором и в начальном и в конечном состоянии импульсы двух взаимодействующих частиц противоположны и лежат на поверхности Ферми.

Воспользуемся приближением $g(\boldsymbol{q}) = g_0$. Тогда упрщенный гамильтониан принимает вид

$$\hat{H} = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}^2}{2m} \left(\hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} \hat{c}_{\boldsymbol{k}\uparrow} + \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k}\downarrow} \hat{c}_{\boldsymbol{k}\downarrow} \right) + g_0 \sum_{\boldsymbol{k},\,\boldsymbol{k}'} c^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} \hat{c}^\dagger_{-\boldsymbol{k}'\downarrow} \hat{c}_{-\boldsymbol{k}'\downarrow} \hat{c}_{\boldsymbol{k}'\uparrow}.$$

Состояние

Предплоложим, что основное состояние имеет вид

$$|\text{БКШ}\rangle = \prod_{\boldsymbol{k}} \left(u_{\boldsymbol{k}} + v_{\boldsymbol{k}} \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} \hat{c}^\dagger_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \right) |0\rangle\,,$$

где $|0\rangle$ – вакуум. В этом приближении частицы появляются только в виде пар. Коэффициенты $u_{\boldsymbol{k}}$, $v_{\boldsymbol{k}}$ выбраны вещественными и связаны нормировоным соотношением

$$u^2_{\boldsymbol{k}} + v^2_{\boldsymbol{k}} = 1.$$

Из множества состояния $|\text{БКШ}\rangle$ выберем состояние с наименьшей энергие вариационным методом. Минимизируем ожидаемое значение

$$\langle \text{БКШ}|\, \hat{H} - \mu \hat{N}_\Sigma \,|\text{БКШ}\rangle\,,$$

варьируя коэффициенты $u_{\boldsymbol{k}}$, $v_{\boldsymbol{k}}$ с учетом нормировки. Оператор полного числа частиц $\hat{N}_\Sigma$

$$\hat{N}_\Sigma = \sum_{\boldsymbol{k}} \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k}\uparrow} \hat{c}_{\boldsymbol{k}\uparrow} + \hat{c}^\dagger_{\boldsymbol{k}\downarrow} \hat{c}_{\boldsymbol{k}\downarrow}.$$