Справочные материалы к письменному экзамену «Уравнения математической физики»

Автор заметок: Хоружий Кирилл

От: *29 мая 2022 г.*

Содержание

1 Эволюционные уравнения

Функция Грина. Для уравнений вида $\hat{L}x = \varphi$, бывает удобно найти G, как решение уравнения $\hat{L}G = \delta$:

$$\hat{L}\,x(t) = \varphi(t), \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-s)\varphi(s)\,ds, \qquad \hat{L}G = \delta(t), \tag{1.1}$$

если $\hat{L}$ – линейный оператор. И, если хочется добавить начальные условия, то для $\hat{L}$ второго порядка будет

$$x(t) = \dot{x}(0)G(t) + x(0)\dot{G}(t) + \int_0^t G(t-s)\varphi(s)\,ds.$$

Для уравнений первого порядка $\hat{L} = \partial_t + \gamma$:

$$\hat{L} = \partial_t + \gamma, \qquad \Rightarrow \qquad G(t) = \theta(t)\exp\left(-\gamma t\right).$$

Для осциллятора $\hat{L} = \partial_t^2 + \omega^2$, тогда

$$\hat{L} = \partial_t^2 + \omega^2, \qquad \Rightarrow \qquad G(t) = \theta(t)\frac{\sin(\omega t)}{\omega}.$$

В общем случае подстановка причинной функции Грина $G(t) = \theta(t)g(t)$ для $\hat{L}$: $L(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ приводит к условиям

$$\partial_t^{n-1} g(0) = 1, \qquad \partial_t^m g(0) = 0,\ m = 0, \ldots, n-2,$$

который позволяют методом неопределенных коэффициентов найти G из уравнения $\hat{L}G(t) = \delta(t)$. Проявляем аккуратность при наличии кратных корней у $L(z) = 0$, когда возникают секулярные члены. Нужен пример.

Матричное уравнение. Решение линейного уравнения для векторной величины $\boldsymbol{y}$

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} + \hat{\Gamma}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\chi},$$

может быть найдено, через функцию Грина, вида

$$\hat{G}(t) = \theta(t)\exp\left(-\hat{\Gamma}t\right), \qquad \boldsymbol{y}(t) = \int_{-\infty}^{t} \hat{G}(t-s)\boldsymbol{\chi}(s)\,ds. \tag{1.2}$$

Удобно $\hat{\Gamma}$ привести к ЖНФ, а потом вспомнить, что матричная экспонента от жордановой клетки $\hat{J}$ имеет вид

$$\exp\left(-\hat{J}t\right) = e^{-\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Функция Грина через преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа функциии $\Phi(t)$ определяется:

$$\tilde{\Phi}(p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt)\Phi(t)\,dt, \qquad \Phi(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i}\exp(pt)\tilde{\Phi}(p),$$

где далее c выбираем правее всех особенностей для причинности.

Решение уравнения $L(\partial_t)G(t) = \delta(t)$ может быть найдено, как

$$G(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i}\exp(pt)\tilde{G}(p), \qquad \tilde{G}(p) = \frac{1}{L(p)}, \qquad \Rightarrow \qquad G(t) = \sum_i \operatorname{res}_i \frac{\exp(pt)}{L(p)}, \tag{1.3}$$

где суммирование идёт по полюсам $1/L(p)$.

Бывает удобно сделать функции маленькими

$$\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \tilde{f}(p)e^{pt}\frac{dp}{2\pi i} = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \frac{\tilde{f}(p)}{p^n}e^{pt}\frac{dp}{2\pi i}.$$

2 Статические линейные поля

Задача Штурма-Лиувилля

Постановка задачи. Задача Штурма-Лиувилля:

$$\hat{L} = \partial_x^2 + Q(x)\partial_x + U(x), \qquad \hat{L}f(x) = \varphi(x), \qquad \begin{cases} \alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = 0 \\ \alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0, \end{cases}$$

где[1] $|\alpha_1| + |\beta_2| \neq 0$ и $|\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0$.

Граничные условия. С учетом того, что функция Грина G наследует граничные условия:

$$\alpha_1 G(a, y) + \beta_1 G'_x(a, y) = 0,$$
$$\alpha_2 G(b, y) + \beta_2 G'_x(b, y) = 0.$$

Запищем уравнение на $G(x, y)$:

$$\hat{L}G(x, y) = \delta(x - y).$$

Решение этого уравнение можем найти решая две системы на $u(x)$ при $x < y$ и $v(x)$ при $x > y$:

$$\begin{cases} \hat{L}u(x) = 0 \\ \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{L}v = 0 \\ \alpha_2 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0 \end{cases}$$

Теперь можем выписать ответ

$$G(x, y) = \frac{1}{W(y)} \begin{cases} v(y)u(x), & x < y, \\ v(x)u(y), & x > y, \end{cases} \qquad W[u, v](y) = \frac{v'(y)u(y) - v(y)u'(y)}{u(y)}.$$

Который существует и единственнен для $W \neq 0$. Для $W = \text{const}$ $G(x, y) = G(y, x)$, а значит $\hat{L}^{-1}$ – симметричный самосопряженный оператор, и у $\hat{L}$ есть ОНБ из собственных функций.

Вронскиан. Бывает удобно найти $W(x)$, записав формулу Лиувилля-Остроградского

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} = W(x_0) \exp\left(- \int_{x_0}^{x} Q(z)\, dz \right).$$

Def 2.1. *Специальной ФСР* называется решение уравнения $\hat{L}u = 0$ и $\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0$, и аналогичного уравнения по $v(x)$ с граничным условием в b, если $W[u, v] \neq 0$, то есть u и v линейной независимы.

Метод Фурье в задаче Штурма-Лиувилля

Допустим мы в $\mathcal{H}$, соответственно есть $\langle x|y \rangle$. Рассмотрим некоторый достаточно хороший самосопряженный компактный оператор $\hat{L}$, у которого есть ОНБ из собственных функций: $\hat{L}e_n = \lambda_n e_n$.

Thr 2.2 (thr Гильберта-Шмидта)**.** *Если $\hat{L}$ – компактный*[2] *ССО, то у A есть ОНБ из собственных функций.*

Вернемся к оператору Штурма-Лиувилля, который живет в $\mathcal{H} = L_2[a, b]$:

$$\hat{L} = A(x)\partial_x^2 + B(x)\partial_x + C(x), \qquad \langle f|g \rangle = \int_a^b f\bar{g}\, dx.$$

Для задачи Штурма-Лиувилля $\hat{L}$ симметричен, при $B(x) = A'(x)$.

Тогда можем найти функцию Грина, как решение уравнения $\hat{L}G(x, y) = \delta(x - y)$

$$G(x, y) = \sum_n g_n(y) e_n(x), \qquad \delta(x - y) = \sum_n \delta_n(y) e_n(x).$$

Находим коэффициенты Фурье: нужен пример про собственные функции

$$\delta_n(y) = \frac{\bar{e}_n(y)}{\langle e_n|e_n \rangle}, \qquad \Rightarrow \qquad g_n(y) = \frac{1}{\lambda_n} \frac{\bar{e}_n(y)}{\langle e_n|e_n \rangle}.$$

Проблема возникает при $\lambda_n = 0$.

Решение. Наличие у оператора собственного числа $\lambda_n = 0$ называется нулевой модой. Рассмотрим оператор:

$$\hat{L} = \partial_x^2,$$

для которого $e_n(x) = e^{inx}$, где $\langle e_n|e_n \rangle = 2\pi$, где $e_0 = 1$ и $\lambda_0 = 0$. Пусть тогда

$$\delta(x) = \sum \frac{\bar{e}_n(0) e_n(x)}{\langle e_n|e_n \rangle} = \sum \frac{e^{inx}}{2\pi}, \qquad G(x) = \sum g_n e_n(x).$$

[1] Часто можно встретить нулевые граничные условия: $f(a) = f(b) = 0$.

[2] $\mathcal{D}(A)$ – компакт в гильбертовом пространстве.

но для $\hat{L}G = \delta(x)$ оказывается нет решений (справа e_0 есть, а слева нет). То есть

$$\ker \hat{L} \neq \{0\}, \qquad \ker \hat{L} + \operatorname{Im} \hat{L} = \mathcal{H},$$

поэтому всегда имеем ввиду, что $\hat{L}\hat{L}^{-1} = \mathbb{1}$, но только для $\operatorname{Im} \hat{L}$.

В общем, проблему уйдёт, если рассмотрим уравнение, вида

$$\hat{L}G(x) = \delta(x) - e_0(x) = \delta(x) - \frac{1}{2\pi},$$

то есть справа единичный оператор только на образе $\operatorname{Im} \hat{L}$.

Если в источнике есть нулевая мода, то уравнение не имеет решений.

Уравнение Лапласа (черновик)

Многомерие $\mathbb{R}^3$

Рассмотрим $\mathbb{R}^3$:

$$\nabla^2 f = \varphi,$$

где все линейно, всё хорошо. Как обычно будем искать функцию, виде

$$f(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\varphi(\boldsymbol{r})\, d^3 r.$$

Функцию Грина найдём в виде

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r}) = \delta(r^3) = \delta(x)\delta(y)\delta(z), \qquad \int f(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\, d^3\boldsymbol{r}' = f(\boldsymbol{r}').$$

Можем свести уравнение Лапласа, к уравнению Дебая:

$$(\nabla^2 - \varkappa^2)G(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}),$$

которое очень удобно раскладывать по Фурье:

$$\text{ПФ}: \qquad G(\boldsymbol{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r},$$

$$\text{ОПФ}: \qquad G(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{r}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}.$$

Также вспомним, что

$$\partial_m G(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r} = ik_m G(\boldsymbol{k}),$$

а значит

$$(-k^2 - \varkappa^2)G(\boldsymbol{k}) = 1, \quad \Rightarrow \quad G(\boldsymbol{k}) = -\frac{1}{k^2 + \varkappa^2}, \quad \Rightarrow \quad G(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{k^2 + \varkappa^2} \frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}.$$

Переходим в сферические координаты, получаем, что

$$G(\boldsymbol{r}) = -\frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{k^2}{k^2 + \varkappa^2} \int_0^\pi \sin\theta e^{ikr\cos\theta}\, d\theta\, dk = -\frac{e^{-\varkappa r}}{4\pi r}.$$

Устремляя $\varkappa \to 0$, находим

$$\nabla^2 G = \delta(\boldsymbol{r}), \quad \Rightarrow \quad G = -\frac{1}{4\pi r}.$$

Многомерие $\mathbb{R}^2$

Для Гаусса можно найти, что

$$G^{[\dim = n]}(x) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \frac{1}{r^{n-2}},$$

где σ_{n-1} – площадь $n-1$ мерной сферы.

Вообще часто задача формулируется в виде задачи Дирихле:

$$\nabla^2 f = 0, \qquad f'_{\partial D} = f_0(\boldsymbol{r}),$$

то есть функция задана на границе некоторой области. Пусть

$$f(z) = u(z) = iv(z), \qquad \nabla^2 u = \nabla^2 v = 0.$$

Пусть знаем комплексную функцию $f(z)$ такую, что $\operatorname{Re} f|_{\partial D} = f_0$, тогда $\operatorname{Re} f(z)$ решает задачу Дирихле. Далее конформным преобразованием переводим любое D в круг, в круге задача Дирихле решается, а дальше отображаем назад.

Пусть задана функция $u_0(x) = u(x, 0)$. Вообще можно было бы разложить по Фурье u, и записать

$$\nabla^2 u = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x).$$

Тогда

$$u(q,y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-iqx} u(x,y)\, dx, \qquad \Rightarrow \qquad \nabla^2 u = -q^2 u(q,y) = 0.$$

Так приходим к

$$u(q,y) = \exp\left(-|q|y\right) u(q,0), \qquad \Rightarrow \qquad u(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{2\pi} e^{iqx} \underbrace{e^{-|q|y}}_{h(q)} u(q,0).$$

Произведение Фурье образов – свёртка:

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}} d\xi h(x-\xi,\, y) u_0(\xi).$$

Найдём, что

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{2\pi} e^{iqx} e^{-|q|y} = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}.$$

Подставляем, и находим:

$$u(x,y) = \int_{\mathbb{R}} d\xi\, \frac{y/\pi}{(x-\xi)^2+y^2} u_0(\xi),$$

где

$$\frac{y/\pi}{(x-\xi)^2+y^2} = \operatorname{Im} \frac{-1}{x+iy-\xi}, \qquad \Rightarrow \qquad f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-\xi} u_0(\xi),$$

что в некотором смысле привело нас к интегралу Коши, так что и $\nabla^2 f = 0$ и гран. условия удовлетворяются.

Пример. Рассмотрим

$$u_0(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad u(x,y) = \int_{\mathbb{R}} d\xi \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2+(x-\xi)^2} \frac{1}{1+\xi^2} = \frac{1+y}{x^2+(1+y)^2}.$$

3 Специальные функции

Гамма-функция (черновик)

Γ-функция. Найдем некоторые интересные свойства:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt \overset{t=\tau x}{=} x^z \int_0^\infty \tau^{z-1} e^{-\tau x}\, d\tau, \qquad \frac{1}{x^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \tau^{z-1} e^{-\tau x}\, d\tau.$$

Также знаем $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(2n+1)$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ и т.д.

Аналитическое продолжение Γ-функции. Пусть есть две функции φ_1 и f_2, равные друг другу на сходящемся множестве точек $z_i \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$. Так и строим аналитическое продолжение для f_1 функуцией f_2.

Можно сказать, что

$$\Gamma(z-1) = \frac{\Gamma(z)}{z-1}, \qquad \operatorname{Re} z > 0.$$

Но давайте сыграем в чудеса. Изначально определяли

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt, \quad t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}.$$

Выберем такую связную область, чтобы точку $t = 0$ нельзя было бы обойти, и получим $\ln t = \ln|t| + i\varphi$.

Сверху $\ln(|t| + i0) = \ln|t| + 2\pi i$, и снизу $\ln(|t| + i0) = \ln|t| + 2\pi i$. Тогда верно, что

$$\int_0^\infty e^{(z-1)\ln t} e^{-t}\, dt, \qquad \text{up}: \ e^{(z-1)\ln|t|} e^{-|t|}, \qquad \text{down}: \ e^{(z-1)\ln|t|} e^{-|t|} e^{2\pi i z}.$$

Сложим интеграл поверху и понизу, получим

$$I = \int e^{(z-1)\ln t} e^{-t}\, dt = (1 - e^{2\pi i z})\Gamma(z) = \int_C e^{(z-1)\ln t} e^{-t}\, dt = \int_C t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

Особенность есть только в точке 0. Таким образом находим аналитическое продолжение:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{1 - e^{2\pi i z}} \int_C t^{z-1} e^{-t}\, dt. \tag{3.1}$$

Видим, что у $\Gamma(z)$ есть особенности $z \in \mathbb{Z}$, где $z \in \mathbb{N}$ – УОТ, и $z \in \mathbb{Z}\ \mathbb{N}$ – полюса первого порядка.

Рассмотрим $z = -n$, тогда интегрируем

$$\int_C t^{-n-1} e^{-t}\, dt = 2\pi i \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dt}\right)^n e^{-t} = -\frac{2\pi i (-1)^n}{n!}.$$

Итого находим, что

$$\operatorname{res}_{-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!},$$

что позволяет определить преобразование Мелина от $\Gamma(z)$:

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma(z) x^{-z}\, dx, \qquad M(f(z)) = \int_0^\infty t^{z-1} f(t)\, dt,$$

но это к слову.

Найдём теперь $\Gamma(n)$:

$$\Gamma(n) = \lim_{z\to n} \frac{1}{1 - e^{2\pi i z}} \int_C t^{z-1+n-n} e^{-t}\, dt = \Big/ t^{z-n} \approx 1 + (z-n)\ln t \Big/ \overset{\frac{a}{b} \to \frac{a'}{b'}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_C t^{n-1} \ln t e^{-t}\, dt.$$

Теперь делаем обратную интерацию, «сдувая» логарифм к $\operatorname{Re} t$. Здесь всё также $\ln(|t| + i0) = \ln|t|$ и $\ln(|t| - i0) = \ln|t| + 2\pi i$. Тогда

$$\left(\int_C = \int_{\text{up}} + \int_{\text{down}}\right) \frac{1}{1 - e^{2\pi i z}} \int_C t^{z-1} e^{-t}\, dt = -2\pi i \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t}\, dt = (n-1)!.$$

***B*-функция**. Рассмотрим функцию, вида

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}\, dt, \quad \operatorname{Re} \alpha, \beta > 0.$$

Сделаем замену переменных

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}\, dt \overset{t=y/s}{=} \int_0^s dy\ y^{\alpha-1} (s-y)^{\beta-1} / s^{\alpha+\beta-1}.$$

Нетрудно получить, что

$$B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)=\int_0^\infty ds\, e^{-s}\int_0^s dy\, y^{\alpha-1}(s-y)^{\beta-1}=\int_0^\infty dy\, y^{\alpha-1}\int_y^\infty ds\, e^{-s+y-y}(s-y)^{\beta-1}=\int_0^\infty dy\, y^{\alpha-1}e^{-y}\int_0^\infty dx\, e^{-x}x^{\beta-1},$$

а значит

$$B(\alpha,\,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \tag{3.2}$$

что и является аналитическим продолжением B-функции.

Например,

$$\int_0^{\pi/2}\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\varphi\, d\varphi=\frac{1}{2}B\left(\frac{a+1}{2},\,\frac{b+1}{2}\right).$$

Также верно, что

$$\int_0^\infty\frac{x^m}{(1+x^n)^k}\,dx=\Big/ t=\frac{1}{1+x^n}\Big/.$$

Аналогично можем получить, что

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\tfrac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\Gamma(2z). \tag{3.3}$$

Ну действительно, представим

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(z)^2}{B(z,\,\frac{1}{2})}=\frac{\sqrt{\pi}B(z,z)}{B(z,\,\frac{1}{2})}\Gamma(2z).$$

Осталось раскрыть

$$B(z,z)=2\int_0^{\pi/2}d\varphi\ \ (\sin\varphi\cos\varphi)^{2z-1}=\frac{2}{2^{2z-1}}\int_0^{\pi/2}d\varphi\ \ \sin^{2z-1}\varphi.$$

Теперь, уже интегрируя двойной угол, находим

$$B(z,z)=\frac{2}{2^{2z-1}}\frac{1}{2}B(z,\,\tfrac{1}{2})=\frac{1}{2^{2z-1}}B(z,\,\tfrac{1}{2}).$$

Ещё один забавный факт:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z},$$

что также совершает аналитическое продолжение. Действительно,

$$B(z,\,1-z)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\,dt=\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^z\frac{dt}{t}.$$

Тут логично ввести $x=\frac{t}{1-t}=-1+\frac{1}{1-t}$, а значит

$$t=\frac{x}{x+1},\qquad dt=\frac{dx}{(x+1)^2}.$$

Продолжая жонглировать переменными

$$B(z,\,1-z)=\int_0^\infty x^z\frac{x+1}{x}\frac{dx}{(x+1)^2}=\int_0^\infty\frac{x^{z-1}}{x+1}\,dx.$$

Который снова удобно посчитать через разрезы.

$$B(z,\,1-z)=\int_{\text{up}}\frac{x^{z-1}}{1+x}\,dx=\frac{1}{1-e^{2\pi iz}}\int_C\frac{x^{z-1}}{1+x}\,dx,$$

но тут уже можно замкнуть дугу на бесконечности, вклад от котрой нулевой. Осталось найти вычет в точке -1, тогда

$$\int_{\text{up}}\frac{x^{z-1}}{1+x}\,dx=\frac{1}{1-e^{2\pi iz}}\operatorname{res}_{-1}=\frac{2\pi i(-1)e^{\pi iz}}{1-e^{2\pi iz}}=\frac{2\pi i}{e^{\pi iz}-e^{-i\pi z}}=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

Дигамма-функция. По определнию $\psi(z)$:

$$\psi(z)\stackrel{\text{def}}{=}(\ln\Gamma(z))'=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Заметим, что $\psi(1)=-\gamma$, где γ – постоянная Эйлера-Маскерони. Найдём

$$\psi(z+1)=(\ln z+\ln\Gamma(z))=\frac{1}{z}+\psi(z)/$$

Забавный факт:

$$\psi(N+1) = \frac{1}{N} + \psi(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} + \psi(1),$$

где $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ – N-е гармоническое число.

Также найдем, что

$$\psi(x+N+1) = \frac{1}{x+N} + \psi(x+N) = \frac{1}{x+N} + \ldots + \frac{1}{x+1} + \psi(x+1).$$

Вспомним, что $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$. Тогда

$$\psi(-z) - \psi(z) = \pi \operatorname{ctg} \pi z.$$

Найдём асимптотику

$$\Gamma(z \to \infty) = \sqrt{2\pi z} e^{z \ln z - z} = \sqrt{2\pi z} \left(\frac{z}{e}\right)^z,$$

что и составляет формулу Стирлинга.

Также для $\psi(z \to \infty)$:

$$\psi(z \to \infty) = (\ln \Gamma(z))' = \ln z + \frac{1}{2z} + o(1) = \ln z + o(1).$$

Метод перевала. Представим семейство интегралов с параметром λ:

$$I_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{\lambda f(x)}\, dx.$$

При этом предположим, что $f(x)$ такая, что существует единственный максимум в точке x_0. Тогда

$$I_\lambda \approx g(x_0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda f(x)}\, dx.$$

Теперь воспользуемся аналитичностью функции $f(x)$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o(x-x_0)^2.$$

Подставляя в интеграл, находим

$$I_\lambda = g(x_0) e^{\lambda f(x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda f'(x_0)(x-x_0)^2/2}\, dx = g(x_0) e^{\lambda f(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|\lambda f''(x_0)|}}.$$

Пусть λ нет. Тогда достаточно потребовать $|f''(x_0)|$ большой – максимум резкий. Тогда

$$|f''(x_0)(x-x_0)^2| \sim 1, \quad \Rightarrow \quad |x-x_0| \frac{1}{\sqrt{f'(x_0)}}, \quad \Rightarrow \quad |f'''(x_0)(x-x_0^3)| \ll 1, \quad \Rightarrow \quad (f'')^3 \gg (f''')^2.$$

Посмотрим на Г-функцию:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\, dt = \int_0^\infty e^{z \ln t - t}\, dt.$$

Тогда $f(t) = z \ln t - t$. Подставляем в критерий, видим что макимум у f резкий.

Подставляем, находим

$$\Gamma(z+1) \approx e^{z \ln z - z} \sqrt{2\pi z},$$

что и составляет формулу Стирлинга, верной на всей комплексной плоскости.

Функция Эйри

Метод Лапласа. Рассмотрим дифференциральное уравнение, вида

$$(a_n z + b_n) f^{(n)} + \ldots + (a_1 z + b_1) f^{(1)} + (a_0 z + b_0) f^{(0)} = 0, \qquad f(z) = \int_C \tilde{f}(p) e^{pz}\, dp,$$

где $f(p)e^{pz}|_{\partial C}^{\forall z} = 0$. Тогда

$$-\partial_p \left[A(p) f(p)\right] + B(p) f(p) = 0, \quad A(p) = a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0, \quad B(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0.$$

Решая, находим

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{A(p)} \exp\left(\int_{p_0}^{p} \frac{B(t)}{A(t)}\, dt\right).$$

Метод перевала. Действительный метод перевала:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{f(x)} g(x)\, dx = g(x_0) e^{f(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}}.$$

Для стационарной фазы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{if(x)} g(x)\, dx = g(x_0) e^{if(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)}} e^{\pm i\pi/4},$$

где $\pm$ согласован с $\operatorname{sign} f''$.

Для комплексного метода перевала

$$I = \int_C e^{f(z)} g(z)\, dz = g(z_0) e^{f(z_0)} e^{i\varphi} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''|}}, \qquad \varphi = \frac{1}{2}\left(\pm\pi - \arg f''(z_0)\right).$$

Функция Эйри. Решаем уравнение, вида

$$\partial_x^2 Y - xY = 0, \qquad \Rightarrow \qquad Y(x) = \int_C e^{xt - t^3/3}\, dt.$$

Так приходим к

$$\operatorname{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{xt - t^3/3}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(xu + u^3/3)\, du.$$

В качетсве второго решения выбрается

$$\operatorname{Bi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[e^{xu - u^3/3} + \sin(xu + u^3/3) \right] du.$$

Функции Бесселя

Уравнение Бесселя:

$$\partial_z^2 J_m + \frac{1}{z} J_m + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) J_m = 0,$$

где $J_m(0) \in \mathbb{R}$. Знаем, что

$$e^{iz\sin\varphi} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} J_n(z) e^{in\varphi}, \quad \Rightarrow \quad J_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{iz\sin\varphi} e^{-im\varphi}\, d\varphi, \quad \Leftrightarrow \quad J_m(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z\sin\varphi - m\varphi)\, d\varphi.$$

Умеем дифференцировать:

$$\frac{dJ_m}{dz} = \frac{J_{m-1}(z)}{2} - \frac{J_{m+1}(z)}{2}, \qquad \frac{m}{z} J_m(z) = \frac{1}{2}\left(J_{m+1}(z) + J_{m-1}(z)\right), \qquad \frac{d}{dz}\left(z^m J_m(z)\right) = J_{m-1}(z) z^m.$$

Откуда сразу находим

$$J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z).$$

Умеем раскладывать в ряд и уходить на бесконечность:

$$J_m(z) = \frac{z^m}{2^m} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k z^{2k}}{4^k k!(m+k)!}, \qquad J_m(z\to\infty) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \cos\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

соответственно с нулями в $\frac{\pi}{2} + \pi m$.

Преобразование Фурье от функции:

$$F[J_m(z)](k) = \int_{-\infty}^{+\infty} J_m(z) e^{-ikz}\, dz = \frac{(-1)^m e^{im\varphi_0} + e^{-im\varphi_0}}{\sqrt{1-k^2}}, \qquad \varphi_0 = \arcsin k.$$

В частности

$$F[J_0](k) = \frac{2}{\sqrt{1-k^2}} \theta(1-k^2), \qquad F[J_1](k) = \frac{2ik}{\sqrt{1-k^2}} \theta(1-k^2).$$

Преобразование Лапласа:

$$\Lambda[J_m](p) = \int_0^\infty e^{-pz} J_m(z)\, dz = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}(p + \sqrt{p^2+1})^m}.$$

Например,

$$\int_0^\infty \frac{J_n(z)}{z^n}\, dz = \frac{1}{(2n-1)!!}.$$

Ортогональные полиномы

Общий подход. Знаем, что

$$\begin{cases} (\sigma\rho f')' = -\lambda\rho f, \\ (\sigma\rho)' = \tau\rho, \end{cases} \qquad \rho(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \exp\left(\int^x \frac{\tau(y)}{\sigma(y)}\,dy\right), \qquad \langle f|g\rangle = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x)\,dx.$$

Для ортогональных полиномов обязательно $\deg\sigma \leqslant 2$, $\deg\tau \leqslant 1$, $|\sigma''| + |\tau'| \neq 0$. Тогда

$$f_n(x) = \frac{\alpha_n}{\rho(x)} \partial_x^n \left(\sigma^n(x) \times \rho(x)\right), \qquad \alpha_n = (-1)^n a_n n! \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda_n^{(k)}},$$

где

$$\lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'', \qquad \lambda_n^{(k)} = \lambda_n + k\tau' + \frac{k(k-1)}{2}\sigma'',$$

что гордо именуется обобщенной формулой Родрига.

Важно помнить, что $\forall$ клоп $\deg n \perp x^m$ при $m < n$. Можем составить рекуррентное соотношение:

$$p_{n+1}(x) = (A_n x + B_n) p_n(x) + X_n p_{n-1}(x), \qquad A_n = \frac{\langle p_{n+1}|p_{n+1}\rangle}{\langle p_{n+1}|x p_n\rangle}, \qquad B_n = -A_n \frac{\langle x p_n|p_n\rangle}{\langle p_n|p_n\rangle}, \qquad C_n = -\frac{A_n}{A_{n-1}} \frac{\|p_n\|^2}{\|p_{n-1}\|^2}.$$

Нормировка может быть найдена, как

$$\|p_n\|^2 = (-1)^n \alpha_n a_n n! \int_a^b \sigma^n(x)\rho(x)\,dx.$$

Производящая функция может быть найдена, как

$$\Psi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{p}_n(\lambda)}{n!} z^n = \frac{\tau(t_0)/\rho(x)}{1 - z\sigma'(t_0)}, \qquad t_0 - x - z\sigma(t_0) = 0.$$

Обычно α_n такой, что

$$\Psi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) z^n.$$

Полиномы Лежандра. Дифференциральное уравнение (a, $b = -1$, 1):

$$\sigma(x) = 1 - x^2, \qquad \tau(x) = -2x = \sigma', \qquad \rho = 1, \qquad (1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0.$$

Формула Родрига:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \partial_x^n (1-x^2)^n, \qquad \alpha_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}, \qquad a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.$$

Нормировка:

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

Рекуррентное соотноешение:

$$A_n = \frac{\|p_n + 1\|^2}{\langle p_{n+1}|x p_n\rangle} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{n+1}, \qquad B_n = 0, \qquad C_n = -\frac{n}{n+1},$$

подставляя, приходим к

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n + nP_{n-1}(x) = 0.$$

Производяшая функция:

$$\psi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 2zx + 1}}.$$

Умеем дифференцировать

$$(x^2 - 1)\frac{dP_n}{dx} = n(xP_n(x) - P_{n-1}(x)).$$

Полиномы Эрмита. Дифференциральное уравнение

$$\sigma = 1, \qquad \tau = -2x, \qquad \rho(x) = e^{-x^2}, \qquad H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0, \qquad (e^{-x^2} H_n')' = -2ne^{-x^2} H_n.$$

Знаем, что формула Родрига примет вид

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \partial_x^n e^{-x^2}, \qquad a_n = 2^n,$$

тогда

$$\|H_n\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Рекуррентное соотношение:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Производящаяя функция:

$$\psi(x, z) = e^{-z^2+2zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n.$$

4 Динамические линейные поля

Волновое уравнение

(написать для дисперсии в общем виде, с. 53.)

Волновое уравнение с источником:

$$(\partial_t^2 - c^2\nabla^2)u = \chi. \tag{4.1}$$

Функция Грина оператора $\partial_t^2 - c^2\nabla^2$:

$$G(t,r) = \frac{\theta(t)}{4\pi cr}\delta(r-ct),$$

а значит выражение для поля:

$$u(t,\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi c^2}\int \frac{d^3r_1}{R}\ \chi(t-R/c,\boldsymbol{r}_1), \tag{4.2}$$

где $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|$.

Уравнение теплопроводности

Уравнение диффузии:

$$\left(\partial_t - \nabla^2\right)u = 0, \tag{4.3}$$

решение которого может быть найдено в виде:

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dy_1\dots dy_d}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2}{4t}\right) u_0(\boldsymbol{y}). \tag{4.4}$$

Асимтотики могут быть найдены в виде

$$u(t,\boldsymbol{x}) \approx \frac{A}{(4\pi t)^{d/2}}\exp\left(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{4t}\right), \qquad A = \int_{\mathbb{R}^d} dy_1\dots dy_d\ u_0(\boldsymbol{y}). \tag{4.5}$$

При $A = 0$ асимтотика будет соответствовать

$$u(t,\boldsymbol{x}) \approx \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{x}}{(4\pi t)^{d/2+1}}\exp\left(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{4t}\right), \qquad \bar{B} = 2\pi\int_{\mathbb{R}^d} dy_1\dots dy_d\ \boldsymbol{y}\,u_0(\boldsymbol{y}), \tag{4.6}$$

где асимтотики имеют место при $t \gg l^2$, l – масштаб на котором локализовано поле.

Накачка. При наличии правой части:

$$(\partial_t - \nabla^2)u = \varphi,$$

можем найти функцию Грина для оператора $\partial_t - \nabla^2$

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \int G(t-\tau,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\varphi(t,\boldsymbol{y})\,d\tau\,d^d\boldsymbol{y}, \qquad G(t,\boldsymbol{r}) = \frac{\theta(t)}{(4\pi t)^{d/2}}\exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right).$$

5 Интегральные уравнения

Уравнение Фредгольма. Есть уравнение Фредгольма I рода:

$$\int_a^b ds\ K(t,s)f(s) = g(t),$$

и уравнение Фредгольма II рода:

$$f(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)f(s), \qquad \Leftrightarrow \qquad f = g + \lambda \hat{K} f, \tag{5.1}$$

где мы ввели интегральный оператор $\hat{K}f = \int_a^b ds\ K(t,s)f(s)$. Решение можем найти в виде

$$f = \frac{1}{1-\lambda\hat{K}}\, g = \left(\mathbb{1} + \lambda\hat{R}\right) g, \qquad \hat{R} \overset{\text{def}}{=} \hat{K} + \lambda\hat{K}^2 + \ldots$$

В терминах интегрирования резольвента $R(t,s)$ выражается, как

$$R(t,s) = K(t,s) + \lambda \int_a^b dp_1\ K(t,p_1)K(p_1,s) + \lambda^2 \int_a^b dp_1 \int_a^b dp_2\ K(t,p_1)K(p_1,p_2)K(p_2,s) + \ldots \tag{5.2}$$

Линейные интегральные уравнения

Свертка I. Рассмотрим уравнение на φ, вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\varphi(y) = f(x), \tag{5.3}$$

то есть уравнение Фредгольма первого рода с $(a,b) = \mathbb{R}$ и $K(x,y) = K(x-y)$. Решение можем найти через преобразование Фурье

$$\tilde{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ikx}\,dx, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k)e^{ikx}\,dx,$$

которое переводит свёртку в произведение:

$$\tilde{\varphi}(k) = \frac{\tilde{f}(k)}{\tilde{K}(k)}, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{f}(k)}{\tilde{K}(k)}. \tag{5.4}$$

Свертка II. Аналогично для уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} dy\ K(x-y)\varphi(y), \tag{5.5}$$

для которого также

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} dy\ f(y)R(x-y), \qquad R(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{K}(k)}{1-\lambda\tilde{K}(k)}. \tag{5.6}$$

Уравнение Вольтерра I. Рассмотрим интегральное уранвение Фредгольма I на $(a,b) = (0,t)$:

$$f(t) = \int_0^t ds\ K(t-s)\varphi(s).$$

Здесь хорошо работает преобразование Лапласа

$$f(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt, \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} f(p)e^{pt}\,dp,$$

которое переводит свертку в произведение, а значит можем сразу написать решение

$$\varphi(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \frac{f(p)}{K(p)} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}. \tag{5.7}$$

Уравнение Вольтерра II. Аналогично для уравнения Фредгольма II:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^t K(x-y)\varphi(y)\,dy, \tag{5.8}$$

находим решение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^t R(t-s)f(s)\,ds, \qquad R(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \frac{K(p)}{1-\lambda K(p)}.$$

Периодическое ядро I. Рассмотрим $f(t)$ и $K(t)$ периодчиные с $T = b-a$, тогда и $\varphi(t)$ периодично по T.

Решим уравнение, вида

$$\int_a^b K(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t). \tag{5.9}$$

Раскладывая всё в ряд Фурье (вводя $\omega = \frac{2\pi}{T}$):

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-in\omega t} f_n, \qquad f_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{in\omega t}\,dt.$$

Решение находим в виде суммы

$$\varphi_n = \frac{f_n}{TK_n}, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{f_n}{TK_n} e^{-in\omega t}. \tag{5.10}$$

Периодическое ядро II. Аналогично можем найти резольвенту для уравнения Фредгольма второго рода:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b ds\ K(t-s)\varphi(s).$$

Реше $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b ds\ R(t-s) f(s), \qquad R(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{K_n}{1-\lambda T K_n} e^{-in\omega t}. \tag{5.11}$$

Факторизуемое ядро. Рассмотрим случай, когда ядро вырожденное: $K(t,s) = \sum_i A_i(t) B_i(s)$. Тогда интегральное уравнение перепишется в виде

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum A_i(t) \int_a^b B_i(s)\varphi(s)\,ds.$$

Решение уравнения можем найти в виде

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum_i C_i A_i(t), \qquad (\mathbb{1} - \lambda \hat{M})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\Phi}, \quad \Phi_i = \int_a^b B_i(t) f(t)\,dt, \quad M_{ij} = \int_a^b B_i(t) A_j(t)\,dt.$$

Нелинейные интегральные уравнения

Уравнение типа свёртки. Рассмотрим уравнение вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t-s)\varphi(s) = f(t). \tag{5.12}$$

Аналогично смотрим на фурье-образ, откуда находим выражение для $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{f(\omega)} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \tag{5.13}$$

Обобщение. Обобщим происходящее, введя $L(s)$

$$L(s) = \sum_{n=0}^{N} a_n s^n, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} ds\ \varphi(t-s) L(s) \varphi(s) = f(t), \tag{5.14}$$

решим в виде

$$\varphi(\omega) L(i\partial_\omega) \varphi(\omega) = f(\omega), \tag{5.15}$$

то есть можем свести интегральное уравнение к дифференциальному.

Лаплас. Рассмотрим уравнение вида

$$\int_0^t ds\ \varphi(t-s) L(s) \varphi(s) = f(t),$$

решение которого также находится в виде

$$\varphi(p) L(-\partial_p) \varphi(p) = f(p).$$

Периодический случай. Аналогично линейному случаю рассмотрим

$$\int_{-\pi}^{+\pi} ds\ \varphi(t-s)\varphi(s) = f(t),$$

периодичное с $T = 2\pi$ и $\omega = 1$. Тогда решение находится в виде

$$\varphi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\pm) \sqrt{\frac{f_n}{2\pi}} e^{-int}.$$

Факторизуемое ядро. Для факторизуемого ядра уравнение примет вид

$$\varphi(t) = x(t)\int_a^b ds\ \varphi^n(s)y(s) + f(t),$$

решение которого можем найти в виде

$$\varphi(t) = \alpha x(t) + f(t), \qquad \alpha\colon \alpha = \int_a^b dt\ y(t)\left(\alpha x(t) + f(t)\right)^n,$$

где α задан неявно алгебраическим уравнением.

Факторизуемое ядро на причинном интервале. Для уравнения на интервале $[0,t]$ уравнение вида

$$\varphi(t) = f(t) + x(t)\int_0^t ds\ y(s)\varphi^n(s),$$

может быть сведено к дифференциальному уравнению по $z(t) \overset{\text{def}}{=} \varphi(t)/x(t)$:

$$z'(t) = y(t)x^n(t)z^n(t) + \frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{x(t)}\right), \qquad z(0) = \frac{f(0)}{x(0)}.$$

Сингулярные интегральные уравнения

Сингулярные интегральные уравнения. Основой решения станет *формула Сохоцкого*:

$$\text{v. p.}\int_a^b \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx = \pm i\pi f(x_0) + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^b \frac{f(x)}{x-x_0\pm i\varepsilon}\,dx. \tag{5.16}$$

Полезно ввести преобразование Гильберта $\hat{H}$:

$$\hat{H}\varphi(x) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)\,dy}{2\pi}\left(\frac{1}{y-x+i\varepsilon} + \frac{1}{y-x-i\varepsilon}\right),$$

для которого верно, что $\hat{H}^2 = -\mathbb{1}$.

Тогда *простейшее сингулярное уравнение* вида

$$\pi\hat{H}\varphi(x) + \lambda\varphi(x) = f(x) \tag{5.17}$$

будет иметь решение относительно $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{\lambda^2+\pi^2}f(x) - \frac{1}{\lambda^2+\pi^2}\hat{H}[f](x) = \frac{1}{\lambda+i\pi}f(x) - \frac{1}{\lambda^2+\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\ \frac{f(y)}{y-x+i\varepsilon}. \tag{5.18}$$

Сингулярные интегральные уравнения с полиномильными коэффициентами. Рассмотрим уравнение вида

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(y)}{y-x}\,dy = x^2\varphi(x) + f(x).$$

Применяя оператор $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x-z+i\varepsilon}$, приходим к уравнению

$$-\pi i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)}{y-z+i\varepsilon}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^2\varphi(y)}{y-z+i\varepsilon}\,dy + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(y)}{y-z+i\varepsilon}\,dy.$$

Здесь можем провести следующие рассуждения:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y(y-z+i\varepsilon+z-i\varepsilon)}{y-z+i\varepsilon}\varphi(y)\,dy &= \int_{-\infty}^{+\infty}y\varphi(y)\,dy + z\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y-z+z}{y-z+i\varepsilon}\varphi(y)\,dy = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}y\varphi(y)\,dy}_{C_1} + z\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\,dy}_{C_2} + z^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)}{y-z+i\varepsilon}\,dy,\end{aligned}$$

а значит исходное уравнение переписывается в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)}{y-z+i\varepsilon}\,dy = -\frac{-}{z^2+i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(y)}{y-z+i\varepsilon}\,dy - \frac{C_1+C_2z}{z^2+i\pi},$$

решение которого мы уже знаем:

$$\varphi(x) = -\frac{C_1+C_2x}{x^4+\pi^2} - \frac{f(x)}{x^2-i\pi} - \frac{1}{x^4+\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(y)}{y-z+i\varepsilon}\,dy.$$

Сингулярные интегральные уравнения на отрезке. Рассмотрим уравнение на конечном отрезке

$$\text{v.p.}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(y)}{y-x}\,dy = f(x).$$

Решение можем найти при условии на f: $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0$, тогда

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi i}\left(f(x) + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{f(y)\,dy}{\sqrt{1-y^2}(y-x+i\varepsilon)}\right).$$

6 Другое

Вычеты

Интеграл по дуге может быть найден, как

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_j} \mathrm{res}_{z_j} f(z), \qquad \mathrm{res}_{z_j} f(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i\varphi} f(z_j + \varepsilon e^{i\varphi}) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_j} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_j)^m f(z) \right),$$

где m – степень полюса.

Неоднородная релаксация

Для одномерного случая

$$\big(\partial_t + \gamma(t)\big) x(t) = \varphi(t), \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)\varphi(s)\,ds, \qquad G(t,\,s) = \theta(t-s) \exp\left(- \int_s^t \gamma(\tau)\,d\tau \right),$$

где всё также $G(t, s > t) = 0$ в силу стремления к принципу причинности.

Уравнение Вольтера

Уравнение Вольтерра. Интегральное уравнение Вольтерра первого рода с однородным ядром:

$$\int_0^t K(t-s) f(s)\,ds = \varphi(t).$$

Решение может быть найдено через обратное преобразование Лапласа

$$f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{f}(p), \qquad \tilde{f}(p) = \frac{\tilde{\varphi}(p)}{\tilde{K}(p)}.$$

Но есть один нюанс. При $K(t)$, $\varphi(t) \overset{p\to\infty}{\to} K_0$, φ_0 получается, что $\tilde{K}(p)$, $\tilde{\varphi}(p) \approx \frac{K_0}{p}$, $\frac{\varphi_0}{p}$, тогда

$$f(t) = \frac{\varphi_0}{K_0}\delta(t) + \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \left(\frac{\tilde{\varphi}}{\tilde{K}} - \frac{\varphi_0}{K_0} \right),$$

при этом в отсутствие аналитичности в нуле нет ничего страшного.

Задача Штурма-Лиувилля с периодическими граничными условиями

Рассмотрим такой же $\hat{L}$, и граничные условия в виде

$$\hat{L} = \partial_x^2 + Q(x)\partial_x + U(x), \qquad \begin{cases} f(a) = f(b), \\ f'(a) = f'(b), \end{cases}$$

которые приводят к периодичности решения.

Рассмотрим задачу

$$\hat{L} = \partial_x^2 + \varkappa^2,$$

с условиями на $[-\pi, \pi]$.

При $x < y$:

$$G(x,y) = A_1(y) \sin\varkappa(x+\pi) + B_1(y)\cos\varkappa(x+\pi),$$

и аналогично для $x > y$:

$$G(x,y) = A_2 \sin\varkappa(x-\pi) + B_2(y)\cos\varkappa(x-\pi).$$

Запишем граничные условия:

$$G(-\pi, y) = G(\pi, y), \qquad \Rightarrow \qquad B_1(y) = B_2(y) \overset{\mathrm{def}}{=} B(y)$$
$$G'_x(-\pi, y) = G'_x(\pi, y), \qquad \Rightarrow \qquad A_1(y) = A_2(y) \overset{\mathrm{def}}{=} A(y).$$

Тогда нашли, что

$$G(x,y) = \begin{cases} A\sin\varkappa(x+\pi) + B\cos\varkappa(x+\pi) \\ A\sin\varkappa(x-\pi) + B\cos\varkappa(x-\pi) \end{cases}$$

Теперь запишем непрерывность:

$$A\sin\varkappa(x+\pi)+B\cos\varkappa(x+\pi)=A\sin\varkappa(x-\pi)+B\cos\varkappa(x-\pi).$$

А также скачок производной

$$G'_x(y+0,y)-G'_x(y-0,y)=1,\quad\Rightarrow\quad A\cos\varkappa(x-\pi)-B\sin\varkappa(x-\pi)-A\cos\varkappa(x+\pi)+B\cos\varkappa(x+\pi)=\varkappa^{-1}.$$

Решая эту систему находим, что

$$2\sin\pi\varkappa\begin{pmatrix}\cos\varkappa y & -\sin\varkappa y\\ \sin\xi y & \cos\varkappa y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1/\varkappa\end{pmatrix},\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\frac{1}{2\sin\pi\varkappa}\begin{pmatrix}\cos\varkappa y & \sin\varkappa y\\ \sin\varkappa y & \cos\varkappa y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1/\varkappa\end{pmatrix}=\frac{1}{2\varkappa\sin\pi\varkappa}\begin{pmatrix}\sin xy\\ \cos xy\end{pmatrix}.$$

Подставляя в $G(x,y)$, находим[3]

$$G(x,y)=\frac{1}{2\varkappa\sin\pi\varkappa}\begin{cases}\cos\left(\varkappa(x-y)+\varkappa\pi\right), & x<y\\ \cos(\varkappa(x-y)-\varkappa\pi), & x>y.\end{cases}$$

Всё это было, повторимся, для уравнения:

$$\left(\partial_x^2+\varkappa^2\right)f(x)=\varphi(x),\qquad\Rightarrow\qquad f(x)=\int_{-\pi}^{+\pi}G(x,y)\varphi(y)\,dy.$$

Справочные интегралы

Может быть полезно:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\pm iz^2}\,dz=\sqrt{\pi}e^{\pm i\pi/4},\qquad\int_{-\infty}^{+\infty}\cos z^2\,dz=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin z^2\;z=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Автомодельные решения

Если уравнения вида $\hat{L}\,u(\boldsymbol{r},t)=\ldots$ – однородно и изотропно, то может помочь автомодельная подстановка:

$$u(t,\boldsymbol{r})=\frac{1}{t^a}f\left(\tfrac{r}{t^b}\right)\quad:\quad t\to\lambda t\quad\Rightarrow\quad u\to\lambda^{-a}u,\ r\to\lambda^b r. \tag{6.1}$$

Восстановить a в общем виде нельзя, но требуя, например, локальности решения $\int_{\mathbb{R}^n}u\,dV=\mathrm{const}$ можем иногда найти и a.

Меленные переменные

Рассмотрим прозвольное возмущение гармонического осциллятора:

$$\left(\partial_t^2+\omega_0^2\right)x(t)=\varepsilon f(t,x,\dot{x}). \tag{6.2}$$

Приближенно (до $o(\varepsilon)$) можем методом Боголюбова-Крылова найти решение в виде

$$x(t)=A(t)\cos(\omega_0 t+\varphi(t)), \tag{6.3}$$

где зависимость от времени амплитуды и фазы определяестся уравнениями

$$\partial_t A(t)=\frac{1}{2\pi\omega_0}\int_{\omega_0 t-\pi}^{\omega_0 t+\pi}f(\tau,x,\dot{x})\cos\left(\omega_0\tau+\varphi(t)\right)\,d(\omega_0\tau), \tag{6.4}$$

$$\partial_t\varphi(t)=\frac{-1}{2\pi A\omega_0}\int_{\omega_0 t-\pi}^{\omega_0 t+\pi}f(\tau,x,\dot{x})\sin(\omega_0\tau+\varphi(t))\,d(\omega_0\tau). \tag{6.5}$$

Уравнение Хопфа

В акустике естественно возникает уравнение Хопфа:

$$\partial_t u+u\,\partial_x u=0.$$

Решение может быть найдено в виде

$$x(t)=x_0+u_0(x_0)t,\qquad u(x(t),t)=c(x_0)=u_0(x_0).$$

где сначала разрешаем уравнение $c=u_0(x_0)$ относительно $c=c(x_0)$, а потом разрешаем уравнение на $x(t)$ относительно $c=c(x(t),t)$. Зная, что $u(x(t),t)=c(x(t),t)$, находим $u(x,t)=c(x,t)$.

Добавим к уравнению накачку:

$$\partial_t u+u\,\partial_x u=f(x,t).$$

[3] К дз будет полезно заметить, что $G(x,y)=G(x-y)$ – задача трансляционно инвариантна.

Система может быть сведена к

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, x(t)) \\ \dot{x} = u(t, x(t)) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} = f(x,t), \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(t, x_0, \dot{x}_0),$$

где $\dot{x}_0 = u_0(x_0)$. Сначала разрешаем уравнение $x(t)$ относительно $x_0 = x_0(t,x)$, а потом подставляем этот x_0 в $u(t,x) = \dot{x}(t, x_0(t,x))$, что и является решением исходной задачи.

Уравнение Бюргерса

Добавим диссипацию в уравнение Хопфа:

$$\partial_t u + u\,\partial_x u = \partial_x^2 u,$$

так получим уравнение Бюргерса.

Заметим, что преобразование Коула-Хопфа

$$\psi = \exp\left(-\tfrac{1}{2}h\right), \quad u = \partial_x h, \quad \Rightarrow \quad (\partial_t - \partial_x^2)\psi = 0.$$

Имея начальные условия для $\psi_0(x)$, можем найти

$$\psi(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \psi_0(y) \frac{\theta(t)}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) dy,$$

откуда находим решение

$$u(t,x) = -2\partial_x \ln \psi(t,x).$$

7 Примеры

Задача Штурма-Лиувилля

Алгоритм (Фурье). Раскладываем

$$G(x) = \sum_{n\neq 0} g_n e_n, \qquad \delta(x) = \sum \frac{e_n(x)}{2\pi}, \quad \Rightarrow \quad \hat{L}G = \delta(x) - \frac{1}{2\pi}.$$

Знаем, что $\lambda_n g_n = \frac{1}{2\pi}$, а значит

$$g_n(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{-n^2}, \quad \Rightarrow \quad G(x) = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{2\pi}\frac{1}{-n^2} e^{inx},$$

и рассмотрим $0 < x < \pi$, суммирая это через вычеты, записываем

$$f(z) = \frac{e^{zx}}{2\pi z^2}, \quad \Rightarrow \quad G(x) = \sum \oint_{in} \frac{dz}{2\pi i} f(z) g(z).$$

Соответственно, выберем

$$g(z) = \frac{\pi e^{-\pi z}}{\operatorname{sh}(\pi z)}$$

тогда

$$f(z)g(z) = \frac{\pi}{z^2}\frac{e^{(x-\pi)z}}{\operatorname{sh}\pi z},$$

получаем, что интеграл по душам вправо/влево равен 0, и остается только вычет в $z = 0$:

$$G(z) = -\operatorname{res}_0 f(z)g(z) = \ldots = -\frac{x^2}{4\pi} + \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}.$$

Алгоритм (сшивка). Решим задачу

$$\partial_x^2 G(x) = \delta(x) - \frac{1}{2\pi}.$$

Разбиваем $x < 0$ и $x > 0$:

$$\begin{aligned} &x < 0, && G = -\tfrac{x^2}{4\pi} + ax + b, \\ &x > 0, && G = -\tfrac{x^2}{4\pi} + cx + \varpi, \end{aligned}$$

учитываем граничные условия:

$$G(-0) = G(+0), \quad G'(+0) - G'(-0) = 1, \quad \Rightarrow \quad b = \varpi.$$

Также получаем, что $-a = b$.

Учтём, что e_0 не входит в G:

$$\langle G|e_0\rangle = 0 = \int_{-\pi}^{+\pi} G(x)\,dx = 0, \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{\pi}{6},$$

так и получаем все необходиме условия на $G(x, y)$.

Пример. Рассмотрим снова задачу, вида

$$(\partial_x^2 + \varkappa^2) G(x, y) = \delta(x - y)$$

и решим методом Фурье. Получим систему, вида

$$\begin{cases} \partial_x^2 e_n = \lambda_n e_n \\ e_n(-\pi) = e_n(\pi) \\ e_n'(-\pi) = e_n'(\pi) \end{cases} \Rightarrow \quad e = \alpha e^{iqx} + \beta e^{-iqx}, \quad \alpha e^{iq\pi} + \beta e^{-iq\pi} = \alpha e^{-iq\pi} + \beta e^{iq\pi}. \quad \Rightarrow \quad \alpha \sin \pi q = \beta \sin \pi q,$$

а значит $q = n$, $n \in \mathbb{Z}$, вот и дискретность:

$$\lambda^2 = -n^2, \quad \Rightarrow \quad e_n = e^{inx}, \quad e_{-n} = e^{-inx}.$$