

ЗАМЕТКИ ПО КУРСУ «УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

Семинарист: Александр Сергеевич Осин

Стенография: Хоружий Кирилл

От: 21 мая 2022 г.

Содержание

1	Медленные переменные	2
2	Нелинейные полевые уравнения	3
3	Интегральные линейные уравнения типа свертка	4
4	Интегральные нелинейные уравнения	6
5	Теория групп	7
5.1	Сводка по теории представлений	7
6	Группы и алгебры Ли	9

1 Медленные переменные

Секулярные члены. Пусть есть уравнение вида

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\varepsilon \omega_0^2 x, \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Решение может быть найдено в виде

$$x(t) = a \cos(\omega_0 \sqrt{1 + \varepsilon} t) \approx a \cos(\omega_0 (1 + \frac{\varepsilon}{2}) t) = a \cos \omega_0 t - \frac{a \varepsilon \omega_0 t}{2} \sin(\omega_0 t) + o(\varepsilon).$$

И вот видна беда, при $\varepsilon \omega_0 t \sim 1$ теория возмущений не работает. В большей части резонансных систем возникают секулярные члены.

Получим этот результат в терминах теории возмущений. Пусть есть тот же гармонический осциллятор, заданы начальные условия, и знаем решение в виде

$$x(t) = x(0) \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \int_0^t \frac{\sin \omega_0(t - \tau)}{\omega_0} f(\tau) d\tau.$$

Разложим это всё по ε и приравняем при степенях ε :

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : \quad & \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 & x_0(0) = a, \quad \dot{x}_0(0) = 0, \\ \varepsilon^1 : \quad & \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\omega_0^2 x_0 & x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \end{aligned}$$

так приходим к

$$x_1(t) = -a \omega_0 \int_0^t \sin(\omega_0(t - \tau)) \cos(\omega_0 \tau) d\tau = -\frac{a \omega_0}{2} \sin(\omega_0 t) \cdot t,$$

что получается даёт ответ только на конечном интервале времени.

Медленные переменные. Основная идея решения таких возмущений:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(x, \dot{x}, t),$$

где f содержит малость $\sim \varepsilon \ll 1$ – ввести медленно меняющиеся переменные:

$$x(t) = A(t) \sin(\omega_0 t + \varphi(t)).$$

Подставляем это в диффур

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{A} \sin(\omega_0 t + \varphi) + A \cos(\omega_0 t + \varphi)(\omega_0 + \dot{\varphi}) \\ \ddot{x} &= \ddot{A} \sin(\omega_0 t + \varphi) + 2\dot{A} \cos(\omega_0 t + \varphi)(\omega_0 + \dot{\varphi}) + A\ddot{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi) - A(\omega_0 + \dot{\varphi})^2 \sin(\omega_0 t + \varphi). \end{aligned}$$

Зафиксируем, что $\dot{A}(t) \ll \omega_0 A(t)$ и $\dot{\varphi} \ll \omega_0$. Оставим здесь только слагаемые до первого порядка малости:

$$\ddot{x} = 2\dot{A}\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) - 2A\omega_0 \dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi) = f(A \sin(\omega_0 t + \varphi), A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), t).$$

Домножим это уравнение на $\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$, также на $\sin \dots$ и проинтегрируем по периоду:

$$\int_{t-T/2}^{t+T/2} \left(2\dot{A}(\tau)\omega_0 \cos^2(\omega_0 \tau + \varphi(t)) - 2A(\tau)\omega_0 \dot{\varphi}(\tau) \sin(\omega_0 \tau + \varphi(t)) \cos(\omega_0 \tau + \varphi(t)) \right) d\tau.$$

Так как A и φ меняются медленно, то можем считать их на масштабе интегрирования $A(\tau) = A(t)$, $\varphi(\tau) = \varphi(t)$. Тогда уравнения перепишется в виде

$$\dot{A}\omega_0 = \langle f \cos(\omega_0 \tau + \varphi(t)) \rangle_\tau, \quad (1)$$

$$A\dot{\varphi}\omega_0 = -\langle f \sin(\omega_0 \tau + \varphi(t)) \rangle_\tau. \quad (2)$$

Пример №1. Рассмотрим осциллятор с затуханием, пусть $f = -2\gamma\dot{x}$:

$$\dot{A}\omega_0 = -\frac{2\gamma}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} A\omega_0 \cos^2(\omega_0 \tau + \varphi) d\tau = -\gamma A\omega_0, \quad \Rightarrow \quad A(t) = A(0)e^{-\gamma t}.$$

Для фазы:

$$A\dot{\varphi}\omega_0 = \frac{2\gamma}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} A\omega_0 \sin(\dots) \cos(\dots) d\tau = 0, \quad \Rightarrow \quad \varphi = \text{const} + o(\gamma).$$

Пример №2. Пусть теперь $f = -\varepsilon x^3$, $\varepsilon \ll 1$:

$$\dot{A}\omega_0 = -\frac{\varepsilon}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} A^3 \sin^3 \xi \cos \xi d\tau = 0,$$

для фазы:

$$A\dot{\varphi}\omega_0 = +\frac{\varepsilon}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} A^3(t) \sin^4 \xi d\tau = \frac{3\varepsilon A^3(t)}{8},$$

но так как $A = \text{const}$, находим

$$\dot{\varphi} = \frac{3\varepsilon\dot{A}}{8\omega_0}, \quad \Rightarrow \quad x(t) = A \sin \left(\omega_0 t + \frac{3\varepsilon A^2}{8\omega_0} t \right).$$

Пример №3. Рассмотрим генератор Ван-дер-Поля, $f = \varepsilon \dot{x}(1 - x^2)$, $\varepsilon \ll 1$:

$$\dot{A}\omega_0 = \frac{\varepsilon}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} A\omega_0 \cos(\xi)(1 - A^2 \sin^2 \xi) \cos \xi d\tau = \frac{\varepsilon A\omega_0}{2} - \frac{\varepsilon A^3\omega_0}{8} = \frac{\varepsilon A\omega_0}{2} \left(1 - \frac{A^2}{4} \right).$$

Теперь уравнение на фазу:

$$A\dot{\varphi}\omega_0 = -\frac{\varepsilon}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} A\omega_0 \sin \xi \cos \xi (1 - A^2 \sin^2 \xi) d\tau = 0, \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \text{const}.$$

Найдём A , решая уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{\dot{A}}{A(1 - \frac{A^2}{4})} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad A^2 = \alpha \quad \frac{\alpha}{4 - \alpha} = C e^{\varepsilon t}, \quad \Rightarrow \quad A = \frac{2C e^{\varepsilon t/2}}{\sqrt{1 + C^2 e^{\varepsilon t}}},$$

где $A \rightarrow 2$ при $t \rightarrow \infty$ – предельный цикл.

Пример №4. Рассмотрим параметрический резонанс:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 (1 + h \cos(2(\omega_0 + \delta\omega)t)) x(t) = 0,$$

что также гордо именуется уравнением Матвея. Это аналогично наличию $f = -h \cos(2(\omega_0 + \delta\omega)t)x$. Введем параметр $\theta = \omega_0 t - \varphi(t)$, тогда

$$\dot{A}\omega_0 = -\frac{h}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} A \sin \xi \cos \xi \cos(2\xi + 2\theta) d\tau = -\frac{h\omega_0^2}{2T} A(t) \int_{t-T/2}^{t+T/2} \sin(2\xi) (0 - \sin(2\xi) \sin(2\theta)) d\tau = \frac{\omega_0^2 h}{4} A \sin(2\theta).$$

Итого, окончательное уравнение

$$\dot{A} = \frac{\omega_0 h}{4} A \sin(2\theta).$$

Для фазы же

$$A\dot{\varphi}\omega_0 = -\frac{h\omega_0^2}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} A \sin^2 \xi (\cos 2\xi \cos 2\theta - 0) d\tau = \frac{h\omega_0^2}{4} A \cos 2\theta, \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{h\omega_0}{4} \cos 2\theta.$$

Но лучше решать уравнение на $\dot{\varphi} = \delta\omega - \dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \delta\omega - \frac{h\omega_0}{4} \cos 2\theta, \quad \Rightarrow \quad \left/ |\delta\omega| < \left| \frac{h\omega_0}{4} \right| \right/ \quad \exists \theta_0: \theta(t) = \theta_0 = \text{const},$$

а значит

$$A(t) = A_0 \exp \left(\frac{\omega_0 h \sin 2\theta_0}{4} t \right).$$

Кстати, вроде $A^2 \dot{\theta}$ – первый интеграл системы.

2 Нелинейные полевые уравнения

В линейных уравнениях обычно ищем функцию Грина.

Рассмотрим уравнение Хопфа

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0,$$

которое описывает динамику плотности частиц газа.

Метод характеристик. Рассмотрим уравнение переноса

$$\partial_t \varphi + \mathbf{v} \partial_t \varphi = f(t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{v} = \text{const}.$$

Пока считаем $f = 0$. Заметим, что

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} = 0.$$

Заметим, что $\frac{dt}{dt} = \mathbf{v}$ даст решение:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \Rightarrow \quad \varphi(t, \mathbf{r}(t)) = \text{const}.$$

Давайте продолжать, пусть при $t = 0$ есть задача Коши $\varphi(t = 0, \mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r})$. Тогда

$$\varphi(0, \mathbf{r}(0)) = \varphi_0(\mathbf{r}(0)), \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t + \mathbf{r}_0.$$

Таким образом на характеристиках

$$\varphi(t, \mathbf{r}(t)) = \varphi_0(\mathbf{r}_0) = \varphi_0(\mathbf{r}(t) - \mathbf{v}t).$$

3 Интегральные линейные уравнения типа свертка

Свёртка

Свертка I. Рассмотрим уравнение на φ , вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\varphi(y) = f(x),$$

то есть уравнение Фредгольма первого рода с $(a, b) = \mathbb{R}$ и $K(x, y) = K(x - y)$.

Решение можем найти через преобразование Фурье:

$$\tilde{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx,$$

тогда

$$\int_{\mathbb{R}} dx e^{-ikx} \int_{\mathbb{R}} dy K(x-y)\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}} dy \varphi(y) \int_{\mathbb{R}} dx e^{-ik(x-y+y)} K(x-y) = \tilde{K}(k) \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) e^{-iky} dy = \tilde{K}(k) \tilde{\varphi}(k),$$

а значит можем найти

$$\tilde{\varphi}(k) = \frac{\tilde{f}(k)}{\tilde{K}(k)}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{f}(k)}{\tilde{K}(k)}. \quad (3)$$

Свертка II. Аналогично для уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} dy K(x-y)\varphi(y),$$

для которого также

$$\tilde{\varphi}(k) = \tilde{f}(k) + \lambda \tilde{K}(k) \tilde{\varphi}(k), \quad \Rightarrow \quad \tilde{\varphi}(k) = \tilde{f}(k) + \lambda \frac{\tilde{K}(k)}{1 - \lambda \tilde{K}(k)} \tilde{f}(k),$$

и находим

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{K}(k)}{1 - \lambda \tilde{K}(k)} \tilde{f}(k).$$

Последний интеграл можно переписать в виде свёртки

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} dy f(y) R(x-y), \quad R(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{K}(k)}{1 - \lambda \tilde{K}(k)}, \quad (4)$$

где мы как раз и переписали выражение для $\varphi(x)$, прямым выражением для ядра резольвенты.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\int_{\mathbb{R}} ds e^{-|t-s|} \varphi(s) = f(t),$$

для которого

$$\tilde{\varphi}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{F[e^{-|t|}]} = \frac{\tilde{f}(\omega)}{2} (1 + \omega^2).$$

А значит искомая функция

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i\omega t}}{2} (\tilde{f}(\omega) + \omega^2 \tilde{f}(\omega)) = \frac{1}{2} (f(t) - \ddot{f}(t)),$$

что формально является обращением истории с функцией Грина. \square

Пример. Найдём резольвенту для уравнения

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_{\mathbb{R}} e^{-|t-s|} \varphi(s) ds.$$

Как уже делали можем посчитать

$$R(\omega) = \frac{K(\omega)}{1 - \lambda K(\omega)} = \frac{2}{1 + \omega^2 - 2\lambda}.$$

Тогда резольвента уравнения

$$R(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \frac{2}{\omega^2 + 1 - 2\lambda} = \left/ a^2 = 1 - 2\lambda > 0 \right/ = 2 \frac{2\pi i}{2\pi} \frac{e^{-at}}{2i\omega} = \frac{e^{-a|t|}}{a} = \frac{e^{-|t|\sqrt{1-2\lambda}}}{\sqrt{1-2\lambda}}.$$

□

Уравнение Вольтерра

Уравнение Вольтерра I. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма I на $(a, b) = (0, t)$:

$$f(t) = \int_0^t ds K(t-s)\varphi(s).$$

Здесь хорошо работает преобразование Лапласа:

$$f(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt = \Lambda[f](p).$$

Получаем

$$\Lambda[f](p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^t ds K(t-s)\varphi(s) = \int_0^\infty ds \varphi(s) \int_s^\infty dt e^{-p(t+s-s)} K(t-s) = \Lambda[\varphi](p)\Lambda[K](p),$$

откуда находим выражение для $\varphi(p) = f(p)/K(p)$, а значит

$$\varphi(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \frac{f(p)}{K(p)} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}, \quad (5)$$

где p_0 правее всех особенностей.

Уравнение Вольтерра II. Аналогично для уравнения Фредгольма II:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^t K(x-y)\varphi(y) dy, \quad \Rightarrow \quad \varphi(p) = f(p) + \lambda K(p)\varphi(p), \quad \Rightarrow \quad \varphi(p) = \frac{f(p)}{1 - \lambda K(p)} = f(p) + \lambda \frac{K(p)f(p)}{1 - \lambda K(p)},$$

а значит и сама функция $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \frac{K(p)f(p)}{1 - \lambda K(p)} = f(x) + \lambda \int_0^t R(t-s)f(s) ds, \quad R(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \frac{K(p)}{1 - \lambda K(p)},$$

где p_0 аналогично правее всех особенностей.

Периодическое ядро

Периодическое ядро I. Рассмотрим $f(t)$ и $K(t)$ периодичные с $T = b - a$, тогда и $\varphi(t)$ периодически по T . Решим уравнение, вида

$$\int_a^b K(t-s)\varphi(s) ds = f(t).$$

Раскладывая всё в ряд Фурье (вводя $\omega = \frac{2\pi}{T}$):

$$K(t) = \sum_n K_n e^{-in\omega t}, \quad \varphi(t) = \sum_m \varphi_m e^{-im\omega t}, \quad f(t) = \sum_n f_n e^{-in\omega t},$$

где коэффициенты выражаются в виде

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\omega t} f_n, \quad f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{in\omega t} dt.$$

Подставляя всё в уравнение, приходим к выражению на f_n :

$$\varphi_n = \frac{f_n}{TK_n}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f_n}{TK_n} e^{-in\omega t}. \quad (6)$$

Периодическое ядро II. Аналогично можем найти резольвенту для уравнения Фредгольма второго рода:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b ds K(t-s)\varphi(s).$$

Решение находим в виде

$$\varphi_n = f_n + \lambda TK_n \varphi_n, \quad \Rightarrow \quad \varphi_n = \frac{f_n}{1 - \lambda TK_n} = f_n + \lambda \frac{TK_n}{1 - \lambda TK_n} f_n.$$

А значит $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b ds R(t-s)f(s), \quad R(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{K_n}{1 - \lambda T K_n} e^{-in\omega t}. \quad (7)$$

4 Интегральные нелинейные уравнения

Уравнение типа свёртки. Рассмотрим уравнение вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t-s)\varphi(s) = f(t).$$

Аналогично смотрим на фурье-образ:

$$[\varphi(\omega)]^2 = f(\omega), \quad \Rightarrow \quad \varphi(\omega) = \pm \sqrt{f(\omega)},$$

откуда находим выражение для $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{f(\omega)} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Обобщение. Обобщим происходящее:

$$L(s) = \sum_{n=0}^N a_n s^n, \quad F[s^n \varphi(s)] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \varphi(t) e^{-i\omega t} dt = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-i\omega t} dt,$$

тогда

$$F[L(s)\varphi(s)] = L(i\partial_\omega)\varphi(\omega).$$

Значит уравнение вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds \varphi(t-s)L(s)\varphi(s) = f(t),$$

можем решить в виде

$$\varphi(\omega)L(i\partial_\omega)\varphi(\omega) = f(\omega),$$

то есть можем свести интегральное уравнение к дифференциальному.

Преобразование Лапласа

Теперь внимательно смотрим на уравнение вида

$$\int_0^t \varphi(t-s)L(s)\varphi(s) = f(t).$$

Смотрим на преобразование Лапласа:

$$f(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt,$$

для которого верно, что

$$\int_0^\infty t^n \varphi(t) e^{-pt} dt = (-1)^n \frac{d^n \varphi(p)}{dp^n}, \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty L(s)\varphi(s) e^{-ps} ds = L(-d_p)\varphi(p).$$

Таким образом исходное уравнение может быть сведено к дифференциальному уравнению

$$\varphi(p)L(-d_p)\varphi(p) = f(p).$$

Периодический случай

Рассмотрим теперь уравнение вида

$$\int_{-\pi}^{+\pi} ds \varphi(t-s)\varphi(s) = f(t).$$

Аналогично раскладываем всё по Фурье

$$\varphi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_n e^{-int}, \quad f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{-int}, \quad \Rightarrow \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2\pi(\varphi_n)^2 e^{-int} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{-int},$$

так приходим к уравнению вида

$$2\pi(\varphi_n)^2 = f_n, \quad \Rightarrow \quad \varphi_n = \pm \sqrt{\frac{f_n}{2\pi}}.$$

Факторизуемое ядро

Рассмотрим уравнение вида

$$\varphi(t) = \int_a^b ds \varphi^n(s) x(t) y(s) + f(t).$$

Заметим, что $x(t)$ можем вынести, тогда

$$\varphi(t) = f(t) + \alpha x(t), \quad \alpha = \int_a^b ds y(s) \varphi^n(s).$$

Найдём α , составляя аналогичный интеграл

$$\alpha = \int_a^b dt y(t) \varphi^n(t) = \int_a^b dt y(t) (\alpha x(t) + f(t))^n,$$

таким образом получилось алгебраическое уравнение на α . Для суммы мы в факторизованном ядре мы получили бы алгебраическую систему нелинейных уравнений.

Сингулярные уравнения

Основой решения станет *формула Сохоцкого*:

$$\text{v. p.} \int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0} dx = \pm i\pi f(x_0) + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0 \pm i\varepsilon} dx.$$

Сами уравнения могут появляться из соотношений Крамерса-Кронига

$$j(t) = \int_{-\infty}^t \sigma(t - t') E(t') dt'.$$

Получается уравнения типа свёртки.

5 Теория групп

Зоопарк. Можем выделить циклические группы C_n

$$C_n = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}, \quad r^n = 1,$$

группу перестановок S_n

$$S_n = \left\{ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \right\},$$

и группу симметрий правильного n -угольника D_n .

Def 5.1. *Сопряженными* будем называть элементы $g \sim h$ такие, что $\exists r \in G, g = rhr^{-1}$.

Группу могли разбивать на классы сопряженности. Для C_n каждый элемент становился представителем класса в силу того, что группа абелева. В S_n подобными классами стали перестановки с одинаковой циклической структурой. Также в $S_n \forall \sigma$ раскладывается в циклы, а циклы в транспозиции, определенной оказывается величина четность σ . Для неё выполняется

$$\text{sign}(\sigma_1 \cdot \sigma_2) = \text{sign}(\sigma_1) \cdot \text{sign}(\sigma_2), \quad \text{sign}(a, b) = -1, \quad \text{sign}(i_1, i_2, \dots, i_d) = \begin{cases} +1, & d \not\equiv 2, \\ -1, & d \equiv 2. \end{cases}$$

Def 5.2. *Четностью* перестановки называют количество пар $i < j$ таких, что $\sigma(i) > \sigma(j)$.

В группе D_n выделяются r – повороты на $2\pi/n$ и s – отражения относительно какой-то выбранной оси. Для $n:2 = 0$ получаются классы $\{r^b, r^{n-b}\}$, $\{s, sr^2, sr^4, \dots\}$ и $\{sr, sr^3, sr^5, \dots\}$. Для $n \not\equiv 2$ получится $\{r^b, r^{n-b}\}$ и $\{s, sr, sr^2, \dots\}$.

5.1 Сводка по теории представлений

Def 5.3. Пусть $|G| < +\infty$, V – конечномерное линейное пространство над \mathbb{C} . Гомоморфизм $\rho: G \mapsto \text{GL}(V, \mathbb{C})$ – *представление*¹. Гомоморфизм – операция уважающая произведение в группе: $\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \cdot \rho(g_2)$ с обязательным условием $\rho(1) = \mathbb{E}$. При этом $\dim V$ – размерность представления.

¹ $\text{GL}(V, \mathbb{C})$ – невырожденные матрицы.

Def 5.4. Пусть есть два представления группы G ρ_1 и ρ_2 . Тогда *изоморфизм представления* называют изоморфизм φ векторных пространств $V_1 \mapsto V_2$, коммутирующий с действием группы.

Сопоставляя φ матрицу A , можем записать условие коммутативности в виде $A\rho_1(g) = \rho_2(g)A$ или $\rho_1(g) = A^{-1}\rho_2(g)A$, то есть $\rho_1(g)$ получается из $\rho_2(g)$ заменой базиса:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_2 \\ \rho_1 \downarrow & & \downarrow \rho_2 \\ V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_2 \end{array}$$

Def 5.5. Пусть для G есть два представления $\rho_1[V_1]$ и $\rho_2[V_2]$. Тогда для $V = V_1 \oplus V_2$ отображение вида $\rho[V](g) = \text{diag}(\rho_1(g), \rho_2(g))$ тоже представление.

Def 5.6. Представление ρ называется *неприводимым*, если у него нет нетривиальных² инвариантных подпространств.

Thr 5.7 (теорема Машке). Пусть $|G| < +\infty$, ρ – представление, тогда ρ разбивается в сумму неприводимых представлений.

Lem 5.8. Для конечной группы $|G| < +\infty$ представление ρ унитаризуемо³.

Def 5.9. Пусть ρ представление G : $|G| < +\infty$. Характером представления называется $\chi_V = \text{tr } \rho(g)$. Характеры изоморфных представлений совпадают⁴.

Def 5.10. Пусть U, V – векторные пространства, тогда $V \otimes U$ называют $\{v \otimes u\}$.

Характеры представлений сопряженных элементов

Для сопряженных элементов верно, что их характеры равны! Таким образом характер представления – функция (g) постоянная на классе сопряженности. Пространство таких функций называется $\mathbb{C}_{\text{class}}(G)$. Классы сопряженности будем обозначать за C_1, \dots, C_k . Базис пространство легко построить

$$\gamma_i = \begin{cases} 1, & g \in C_i \\ 0, & g \notin C_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, k.$$

Логично ввести скалярное произведение над $\mathbb{C}_{\text{class}}(G)$:

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \psi(g)^* = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^k |C_i| \varphi(h_i) \psi^*(h_i), \quad h_i \in C_i.$$

Lem 5.11. Пусть у группы G существуют $\rho_1(g), \dots, \rho_m(g)$ – неприводимые представления группы G , размерности d_1, \dots, d_m и характерами⁵ $\chi^{(1)}(g), \dots, \chi^{(m)}(g)$. Тогда $\langle \chi^{(i)} | \chi^{(j)} \rangle = \delta_{ij}$.

	C_1	C_2	...	C_n
γ_1	1	0	...	0
γ_2	0	1	...	0
$\chi^{(i)}$	$\#_1$	$\#_2$...	$\#_n$

²Отличных от $\{0\}$ и V .

³Существует базис в котром $\rho(g)$ унитарна $\forall g \in G$.

⁴Также знаем, что $\chi_V(\mathbb{1}) = \dim V$, $\chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_{V_1} + \chi_{V_2}$, $\chi_V(g^{-1}) = \chi_V^*(g)$, $\chi_{V_1 \otimes V_2} = \chi_{V_1} \cdot \chi_{V_2}$.

⁵Где каждый характер $\chi^{(i)}(g) \in \mathbb{C}_{\text{class}}(G)$.

6 Группы и алгебры Ли