Проверка цитирование [1], [2], [3], [4].

Энергия задаётся выражением:

$$E = \langle \psi_G | \hat{H} - \mu \hat{N} | \psi_G \rangle = \sum_k \left( \xi_k - \frac{\xi_k^2}{E_k} \right) - \frac{\Delta^2}{V}$$

И отличие энергии в сверхпроводящем и нормальном состояниях при нулевой температуре, то есть $\Delta = 0$ даётся выражением

$$\langle E \rangle_S - \langle E \rangle_n = 2 \sum_{|\boldsymbol{k}| > k_F} \left( \xi_{\boldsymbol{k}} - \frac{\xi_{\boldsymbol{k}}^2}{E_{\boldsymbol{k}}} \right) - \frac{\Delta^2}{V} = \left( \int \ldots \right) = \underbrace{\left[ \frac{\Delta^2}{V} - \frac{1}{2} N(0) \Delta^2 \right]}_{\text{кинетическая}} - \underbrace{\frac{\Delta^2}{V}}_{\text{пот.}}$$

и для внутренней энергии

$$U_s(0) - U_n(0) = -\frac{1}{2} N(0) \Delta^2(0).$$

В отличии от обычного металла, из-за наличия когерентности

$$\langle \hat{c}_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \hat{c}_{\boldsymbol{k}\uparrow} \rangle = b_k \neq 0, \qquad \hat{c}_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \hat{c}_{\boldsymbol{k}\uparrow} = b_{\boldsymbol{k}} + (\hat{c}_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \hat{c}_{\boldsymbol{k}\uparrow} - b_k).$$

Подставив замену с точностью до флуктуаций второго порядка получим модельный гамильтониан

$$\hat{H}_M = \sum_{\boldsymbol{k}\sigma} \xi_{\boldsymbol{k}} \hat{c}_{\boldsymbol{k}\sigma}^\dagger \hat{c}_{\boldsymbol{k}\sigma} + \sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} V_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} (\hat{c}_{\boldsymbol{k}\uparrow}^\dagger \hat{c}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}^\dagger b_{\boldsymbol{k}'} + b_{\boldsymbol{k}}^* \hat{c}_{-\boldsymbol{k}'\downarrow} \hat{c}_{\boldsymbol{k}'\uparrow} - b_{\boldsymbol{k}}^* b_{\boldsymbol{k}'}).$$

Определив щель $\Delta_{\boldsymbol{k}} = -\sum_{\boldsymbol{k}'} V_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} b_{k'}$ получим

$$\hat{H}_M = \sum_{\boldsymbol{k}\sigma} \xi_{\boldsymbol{k}} \hat{c}_{\boldsymbol{k}\sigma}^\dagger \hat{c}_{\boldsymbol{k}\sigma} + \sum_{\boldsymbol{k}} \Delta_{\boldsymbol{k}} (\hat{c}_{\boldsymbol{k}\uparrow}^\dagger \hat{c}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}^\dagger + \Delta_{\boldsymbol{k}}^* \hat{c}_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \hat{c}_{\boldsymbol{k}\uparrow} - b_{\boldsymbol{k}}^* b_{\boldsymbol{k}'}).$$

Теперь произведём линейную замену с $|v_k|^2 + |u_k|^2 = 1$ на переменные Н.Н. Боголюбова

$$\begin{cases} \hat{c}_{\boldsymbol{k}\uparrow} & = & u_{\boldsymbol{k}}^* \hat{\gamma}_{\boldsymbol{k}0} + v_{\boldsymbol{k}} \hat{\gamma}_{\boldsymbol{k}1}^\dagger \\ \hat{c}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}^\dagger & = & -v_{\boldsymbol{k}}^* \hat{\gamma}_{\boldsymbol{k}0} + u_{\boldsymbol{k}} \hat{\gamma}_{\boldsymbol{k}1}^\dagger \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \hat{\gamma}_{\boldsymbol{k}0} = u_{\boldsymbol{k}} \hat{c}_{\boldsymbol{k}\uparrow} - v_{\boldsymbol{k}} \hat{c}_{-\boldsymbol{k}\downarrow}^\dagger \\ \hat{\gamma}_{\boldsymbol{k}1} = v_{\boldsymbol{k}} \hat{c}_{\boldsymbol{k}\uparrow}^\dagger - u_{\boldsymbol{k}} \hat{c}_{-\boldsymbol{k}\downarrow} \end{cases}$$

Получим большой гамильтониан, в котором подбором параметров $u_{\boldsymbol{k}}$, $v_{\boldsymbol{k}}$ добьёмся обнуления коэффициентов перед недиагональными слагаемыми $\hat{\gamma}_{\boldsymbol{k}0} \hat{\gamma}_{\boldsymbol{k}1}$

$$u_{\boldsymbol{k}} v_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta_{\boldsymbol{k}}}{E_{\boldsymbol{k}}}, \qquad |v_{\boldsymbol{k}}|^2 = 1 - |u_{\boldsymbol{k}}|^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi_{\boldsymbol{k}}}{E_{\boldsymbol{k}}} \right).$$

Получим тогда

$$\hat{H}_M = \sum_{\boldsymbol{k}} (\xi_{\boldsymbol{k}} - E_{\boldsymbol{k}} + \Delta_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}}^*) + \sum_{\boldsymbol{k}} E_{\boldsymbol{k}} (\hat{\gamma}_{\boldsymbol{k}0}^\dagger \hat{\gamma}_{\boldsymbol{k}0} + \hat{\gamma}_{\boldsymbol{k}1}^\dagger \hat{\gamma}_{\boldsymbol{k}1})$$

И тогда ширина щели задаётся

$$\Delta_{\boldsymbol{k}} = -\sum_{\boldsymbol{k}'} V_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \langle \hat{c}_{-\boldsymbol{k}'\downarrow} \hat{c}_{\boldsymbol{k}'\downarrow} \rangle = -\sum_{\boldsymbol{k}'} V_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} u_{\boldsymbol{k}'}^* v_{\boldsymbol{k}'} \langle 1 - \hat{\gamma}_{\boldsymbol{k}0}^\dagger \hat{\gamma}_{\boldsymbol{k}0} - \hat{\gamma}_{\boldsymbol{k}1}^\dagger \hat{\gamma}_{\boldsymbol{k}1} \rangle.$$

При $T = 0$ формула переходит в (**??**) в виду отсутствия квазичастиц.

## Список литературы

[1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Statistical Physics: Volume 5*. Elsevier, 2013.

[2] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii. *Statistical physics: Volume 9*. Elsevier, 2013.

[3] M. Tinkham. *Introduction to superconductivity*. Courier Corporation, 2004.

[4] L. N. Cooper. Bound electron pairs in a degenerate fermi gas. *Physical Review*, 104(4):1189, 1956.