Задачи к экзамену «Квантовая механика II»

Авторы заметок: Хоружий Кирилл
Примак Евгений

От: *14 июня 2022 г.*

Содержание

№1. Линейный эффект Штарка в атоме водорода

Переписать интегралы в сферических гармониках. Теперь рассмотрим возмущение, вила

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + \hat{V}, \qquad \hat{V} = -eE\hat{z}$$

Известно, что $n=2$, тогда вырождение $n^2=4$. Можем явно выписать несколько функций

$$|200\rangle = \frac{2}{\sqrt{4\pi}}\left(\frac{z}{2a}\right)^{3/2} e^{-r/2a}\left(1-\frac{r}{2a}\right),$$

$$|210\rangle = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\left(\frac{1}{2a}\right)^{3/2} e^{-r/2a}\frac{r}{\sqrt{3}a},$$

а для $|211\rangle$ и $|21-1\rangle$ важно только что есть фактор $e^{im\varphi}$.

Действительно,

$$\langle 21m|\hat{V}|21m'\rangle = 0, \qquad m,\, m' = \pm 1.$$

Осталось посчитать

$$\kappa \overset{\text{def}}{=} \langle 200|\hat{V}|210\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \ldots d^3\boldsymbol{r} = 3eEa.$$

Получилось матрица ненулевыми коэффициентами только в первом блоке 2 на 2:

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_1 = \kappa, \quad \lambda_2 = -\kappa, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Решая секулярное уравнение, находим

$$E_2 = -\frac{\mathrm{Ry}}{2^2}, \quad \left[\hat{H} + \hat{V} - (E_2 \pm \kappa)\mathbb{1}\right]|\psi\rangle = 0, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{c}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\,1,\,0,\,0), \quad \boldsymbol{c}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\,-1,\,0,\,0).$$

Энергии расщепления

$$E^+ = E_2^{(0)} + \kappa, \qquad E^- = E_2^{(0)} - \kappa.$$

№2. Матричный элемент оператора эволюции для свободной частицы

Матричный элемент. Найдём матричный элемент опратора эволюции для свободной частицы

$$Z[0] = \langle q_N|U(t'',t')|q_0\rangle = \int \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p\; e^{\frac{i}{\hbar}S} = \lim_{N\to\infty}\int \frac{dp_N}{2\pi\hbar}\prod_{k=1}^{N-1}\frac{dq_k\,dp_k}{2\pi\hbar}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{N}\left(p_k\dot{q}_k\,dt - \frac{p_k^2}{2m}\,dt\right)\right).$$

Перепишем аргумент экспоненты в виде

$$\sum_{k=1}^{N} p_k\dot{q}_k\,dt - \frac{p_k^2}{2m}\,dt = \sum_{k=1}^{N-1} q_k(p_k - p_{k+1}) + q_N p_N - q_0 p_1 - \sum_{k=1}^{N}\frac{p_k^2}{2m}\,dt$$

Вспоминая, что

$$\int_{\mathbb{R}} dt\;\delta(t)e^{i\omega t} = 1, \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\mathbb{R}}\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega t} = \delta(t),$$

можем проинтегрировать по всем координатам и получить

$$\int \exp\left(\frac{i}{\hbar}q_k(p_k - p_{k+1})\right) = 2\pi\hbar\,\delta(p_k - p_{k+1}), \qquad k = 1,\ldots,N-1.$$

Теперь интегрирование по импульсу тривиально:

$$Z[0] = \lim_{N\to\infty}\int\frac{dp_N}{2\pi\hbar}\exp\left(\frac{i}{\hbar}p_N(q_N - q_0) - \frac{p_N^2}{2m}\underbrace{N\,dt}_{t''-t'}\right) = \sqrt{\frac{-im}{2\pi\hbar(t''-t')}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{(q''-q')^2}{t''-t'}\right),$$

где мы воспользовались

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2+bx}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{b^2/4a}, \qquad \int_{\mathbb{R}} e^{\pm ix^2}\,dx = e^{\pm i\pi/4}\sqrt{\pi}.$$

Уравнение Шрёдингера. Убедимся, что $Z[0] = \langle q|U(t,t')|q'\rangle$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar\partial_t Z = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_q^2 Z.$$

Введем для удобства

$$\sqrt{\frac{-im}{2\pi\hbar(t''-t')}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{(q''-q')^2}{t''-t'}\right)\overset{\text{def}}{=}\alpha e^{\beta}.$$

Тогда

$$\partial_t Z=\alpha\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{t-t'}-\frac{im}{2\hbar}\frac{(q-q')^2}{(t-t')^2}\right)e^{\beta},\qquad \partial_q Z=\alpha\frac{im}{\hbar}\frac{q-q'}{t-t'}e^{\beta},\qquad \partial_q^2 Z=\frac{i\alpha m}{\hbar(t-t')}\left(1+\frac{im}{\hbar}\frac{(q-q')^2}{t-t'}\right)e^{\beta},$$

что и требовалось доказать.

№3. Функционал гармонического осциллятора

Рассмотрим действие, вида

$$S=\frac{1}{2}\int_{x'}^{x''}dt\ q(t)\hat{\Gamma}q(t)+\int_{x'}^{x''}dt\ j(t)q(t),$$

где верно, что $\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}^{\dagger}$.

Сделаем замену переменных в известном интеграле

$$Z[j]=\mathcal{N}\int\mathcal{D}q\ \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(t',t'',j)\right),\qquad q(t)\to\tilde{q}(t)=q(t)-\mathcal{G}^{(1)}(t),\quad \hat{\Gamma}\mathcal{G}^{(1)}(t)=0.$$

Нам поможет, что $\mathcal{G}^{(1)}(t)\hat{\Gamma}=\left(\hat{\Gamma}\mathcal{G}^{(1)}(t)\right)^{\dagger}$, тогда

$$S=\frac{1}{2}\int dt\ \left(\tilde{q}(t)+\mathcal{G}^{(1)}(t)\right)\Gamma\left(\tilde{q}(t)+\mathcal{G}^{(1)}(t)\right)+\int dt\ j(t)\left(\tilde{q}(t)+\mathcal{G}^{(1)}(t)\right).$$

Подставляя в Z, находим

$$Z[j]=\mathcal{N}\int\mathcal{D}q\ \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}dt\ \ldots\right)=\mathcal{N}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}dt\ j(t)\mathcal{G}^{(1)}(t)\right)\int\mathcal{D}\tilde{q}\ \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}dt\ \left(\frac{1}{2}\tilde{q}(t)\hat{\Gamma}\tilde{q}(t)+j(t)\tilde{q}(t)\right)\right).$$

Теперь делаем замену $\tilde{q}\to\bar{q}=\tilde{q}+\hat{\Gamma}^{-1}j(t)$. Тогда

$$frac12\tilde{q}(t)\hat{\Gamma}\tilde{q}(t)+j(t)\tilde{q}(t)=\frac{1}{2}\bar{q}\hat{\Gamma}\bar{q}-\frac{1}{2}j(t)\hat{\Gamma}^{-1}j(t),$$

тогда для функционального интеграла получаем

$$Z[j]=\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}dt\ \left(j(t)\mathcal{G}^{(1)}(t)-\frac{1}{2}j(t)\hat{\Gamma}^{-1}j(t)\right)\right)\times\mathcal{N}\int\mathcal{D}\bar{q}\ \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}dt\ \frac{1}{2}\bar{q}\hat{\Gamma}\bar{q}\right),$$

где последний множитель может быть представлен в виде $\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{G}_0\right)$:

$$Z[j]=\exp\left(\frac{i}{\hbar}\Big[\mathcal{G}_0+\ldots+\ldots\Big]\right)=\exp\left(\frac{i}{\hbar}G[j]\right),$$

что и требовалось доказать.

№4, 5. Спиновые состояния

Два электрона. Для системы из двух электронов возможны конфигурации

$$\begin{aligned}
S=1,\qquad & |1,+1\rangle=|{+}{+}\rangle,\\
& |1,-1\rangle=|{-}{-}\rangle,\\
& |1,0\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|{+}{-}\rangle+|{-}{+}\rangle\right)\\
S=0,\qquad & |0,0\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|{+}{-}\rangle-|{-}{+}\rangle\right).
\end{aligned}$$

Для вывода полезно помнить, что

$$\hat{j}_{\pm}|j,m\rangle=\sqrt{j(j+1)\pm m(m\pm1)}\,|j,m-1\rangle,$$

и заметить, что $S=0$ нечетное по перестановкам, $S=1$ четно по перестановкам.

Гелий. Для двух протонов (фермионов) в основном состоянии $l=0$, откуда $(-1)^0=1$, а значит спиновая часть должна быть антисимметрична

$$|p\rangle=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|{+}{-}\rangle-|{-}{+}\rangle\right).$$

Аналогично верно для нейтронов (фермионов) $|n\rangle$.

В обще случае для $l \neq 0$ можем записать

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(|{+}{-}\rangle + (-1)^{l+1}\,|{-}{+}\rangle\right) \otimes \left(|{+}{-}\rangle + (-1)^{l+1}\,|{-}{+}\rangle\right).$$

№6. Сумма по поляризациям спиноров Дирака

Для покоящихся спиноров сумму по поляризациям

$$\Pi(\mathbf{0}) = \sum_\lambda u_\lambda(\mathbf{0})\bar{u}_\lambda(\mathbf{0})$$

можем вычислить в явном виде, как прямое проивзедение

$$\Pi(\mathbf{0}) = mc\,(1,\,0,\,1,\,0) \otimes \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + mc\,(0,\,1,\,0,\,1) \otimes \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = mc\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}.$$

В ковариантном виде

$$\Pi(\mathbf{0}) = mc\,(\gamma_0 + \mathbb{1}) = (\not{k} + mc), \qquad k_\mu = (mc,\,\mathbf{0}).$$

Можем посчитать (посчитать), что $\Lambda\not{k}\Lambda^{-1} \to \not{p}$, откуда сразу находим

$$\Pi(\boldsymbol{p}) = (\not{p} + mc), \qquad \Pi^c(\boldsymbol{p}) = \sum_\lambda v_\lambda(\boldsymbol{p})\bar{v}_\lambda(\boldsymbol{p}) = (\not{p} - mc),$$

где $\not{p} = p_\mu\gamma^\mu = p_0\gamma_0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}$.

№7, 8, 9. Термы оболочки

Кремний $2p^2$. По правилам Хунда конфигурация незаполненой части $2p^2$ будет вида: $\boxed{}\ \boxed{\upharpoonleft}\ \boxed{\upharpoonleft}$, а значит можем найти $J = |L - S| = 0$. Основное состояние $^3\mathrm{P}_0$.

Сера $2p^4$. Незполненной явлеется оболочка $2p^4$, для которой находим основное состояние $^3\mathrm{P}_0$ в силу конфигурации $\boxed{\upharpoonleft}\ \boxed{\upharpoonleft}\ \boxed{\upharpoonleft\downharpoonright}$.

Все термы. Найдём все термы для p^2, $l = 1$, тогда $L = \{0,\,1,\,2\}$ и $S = \{0,\,1\}$. Для $S = 1$ и $L = 1$ возможны конфигурации $^3\mathrm{P}_{0,1,2}$. Для $S = 0$ и $L = \{0, 2\}$ получим $^1\mathrm{S}_0$, $^1\mathrm{D}_2$, аналогичные рассуждения будут верны для p^4. SDP.

Фосфор $2p^3$. Для фосфора p^3 основным состоянием будет $^4\mathrm{S}_{3/2}$. Состоянию с $M_s = \frac{1}{2}$ соответсвует конфигурация $\boxed{}\ \boxed{\upharpoonleft}\ \boxed{\upharpoonleft\downharpoonright}$, и $^2\mathrm{D}_{3/2,5/2}$. Для $M_L = 1$ возможны конфигурации $\boxed{}\ \boxed{\upharpoonleft\downharpoonright}\ \boxed{\upharpoonleft}$ и $\boxed{\upharpoonleft}\ \boxed{}\ \boxed{\upharpoonleft\downharpoonright}$ с обозначениями $^2\mathrm{P}_{1/2,\,3/2}$. Наконец, для $M_L = 0$ возможны конфигурации $\boxed{\upharpoonleft}\ \boxed{\upharpoonleft}\ \boxed{\downharpoonright}$, $\boxed{\upharpoonleft}\ \boxed{\downharpoonright}\ \boxed{\upharpoonleft}$, $\boxed{\downharpoonright}\ \boxed{\upharpoonleft}\ \boxed{\upharpoonleft}$, не приводящие к новым независимым состояниям. SPD.

№10. Аномальный эффект Зеемана

Расщепление будет происходить на величину

$$E = \hbar\Omega g_{LSJ} M_j, \qquad g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}, \qquad \Omega = \frac{eH}{2mc}.$$

Вспомним правила отбора $|\Delta J| \leqslant 1$, $|\Delta M_s| \leqslant 1$, $\Delta S = 0$, а также про смену четности E1 перехода и запрет на $J = J' = 0$.

Для уровня $^2\mathrm{P}_{3/2}$ фактор Ланде равен $4/3$. Осталось отдельно рассмотреть переходы с $^2\mathrm{S}_{1/2}$ на $^2\mathrm{P}_{1/2}$ и с $^2\mathrm{S}_{1/2}$ на $^2\mathrm{P}_{3/2}$, что проще проделать руками, чем приводить здесь.

№11, 12, 13. Правила отбора

Спин. Справедливы следующие соотношения

$$[s_\alpha,\, d_\beta] = 0, \qquad [s^2,\, d_\beta] = 0.$$

А таком случае

$$\langle f|[s^2, d_\alpha]|i\rangle = [s_f(s_f+1) - s_i(s_i+1)]\,d_{fi} = 0.$$

Так как $d_{fi} \neq 0$, то $s_f = s_i$, а значит $\Delta s = 0$.

Аналогично раскрываем

$$\langle f|[s_z, \boldsymbol{d}]|i\rangle = [M_s'(M_s'+1) - M_s(M_s+1)]\,\boldsymbol{d}_{fi} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad \Delta M_s = 0.$$

А вообще помним про J и M_s по теореме Вигнера-Эккарта $\Delta J \leqslant 1$, $\Delta M_J \leqslant 1$, $1 \leqslant J_i + J_f$.

Четность E1. Важно помнить, что

$$\mathbb{P}\boldsymbol{d}\,|\psi\rangle = -\boldsymbol{d}\mathbb{P}\,|\psi\rangle\,, \quad \forall\psi, \qquad \Rightarrow \qquad \mathbb{P}\boldsymbol{d} = -\boldsymbol{d}\mathbb{P}.$$

Говорим про состояния с заданной четностью, а значит $\mathbb{P}\,|\psi\rangle = \Pi\,|\psi\rangle$, $\Pi = \pm 1$. Тогда

$$\langle f|\mathbb{P}\boldsymbol{d}|i\rangle = -\langle f|\boldsymbol{d}\mathbb{P}|i\rangle, \qquad \Rightarrow \qquad \Pi_f = -\Pi_i,$$

а значит четность меняется.

Четность M1. Немного иначе для M1 перехода:

$$\boldsymbol{r} \xrightarrow{\mathbb{P}} -\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{\mu} \xrightarrow{\mathbb{P}} \boldsymbol{\mu},$$

а значит для M1 перехода четность не меняется, возможны переходы в рамках одного терма.

№14. Время жизни уровня

Уже считали для атома водорода

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{3c^3}\omega_f^3|d_{fi}|^2\frac{1}{\hbar}.$$

Ион гелия – водородоподобный атом, с отличным радиусом Бора:

$$a_{\text{H}} = \frac{\hbar^2}{me^2}, \qquad a_{\text{He}} = \frac{\hbar^2}{me^2 Z} = \frac{\hbar^2}{me^2 2}, \qquad \Rightarrow \qquad d_{fi}^{\text{He}} = \frac{1}{Z}d_{fi}.$$

Аналогично для частоты

$$\omega_f \sim e^4 \sim \frac{1}{a^2}, \qquad \Rightarrow \qquad \omega_f^{\text{He}} \sim Z^2\omega_f.$$

Таким образом находим, что

$$\tau_{\text{He}} = \frac{1}{Z^4}\tau_{\text{H}} = 10^{-10}\ \text{с}.$$

№15. Эффект Рамзауэра

Найдём сечение рассеяния медленных частиц на глубокой сферической яме радиуса a_0. Потеницал

$$U(r) = \begin{cases} -U_0, & r \leqslant a_0, \\ \ \ 0, & r > a_0. \end{cases}$$

Теперь

$$R_{k0} = \frac{1}{r}u(r), \qquad u(0) = 0, \qquad\quad -\frac{\hbar^2}{2m}u'' + Vu = Eu.$$

Для $r > a$ $u'' + k^2 u = 0$, тогда

$$u_{\text{II}} = A\sin(kr + \delta_0).$$

Для $r \leqslant a$

$$u'' + (k^2 + \kappa^2)u = 0, \qquad k_u^2 \stackrel{\text{def}}{=} k^2 + \kappa^2, \qquad U_0 = \frac{\hbar^2\kappa^2}{2m}, \qquad \Rightarrow \qquad u_{\text{I}} = B\sin(k_u r).$$

Решение для радиальной волновой функции при $l = 0$ запишется в виде

$$R_{k0}(r) = \begin{cases} A\frac{1}{k_u r}\sin(k_u r), & k_u^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E + U_0), \quad r \leqslant a_0, \\ B\frac{1}{kr}\sin(kr + \delta_0) & \qquad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E, \quad r > a_0, \end{cases}$$

где A, B определяются из непрерывности $R_{k0}(r)$. Фазу можем найти из

$$\left.\frac{R'_{k0}(r)}{R_{k0}(t)}\right|_{r=a_0-0} = \left.\frac{R'_{k0}(r)}{R_{k0}(t)}\right|_{r=a_0+0},$$

Подставляя $R_{k0}(r)$, находим

$$\operatorname{tg}(ka_0 + \delta_0) = \frac{k}{k_u}\operatorname{tg}(k_u a_0), \qquad \Rightarrow \qquad \delta_0 = -ka_0 + \operatorname{arctg}\left(\frac{k}{k_u}\operatorname{tg}(k_u a_0)\right).$$

Рассмотрим случай $\operatorname{tg}(k_u a) \to \pm\infty$. Тогда $\delta_0 \approx \operatorname{arctg}(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$, что ещё называют резонансным рассеянием, так как $\sin\delta_0 = \pm 1$. Также посмотрим на $\frac{\operatorname{tg}(\tilde{k}a)}{\tilde{k}a} \approx 1$, тогда $\delta_0 \approx 0$, и получается $k_u a \ll 1$ и $f_0 \to 0$ – эффект Рамзаура.

№16. Рассеяние тождественных частиц

Для двух тождественных частиц можем написать Ψ в виде

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{r}_2,\, s_1,\, s_2) = \Phi(\boldsymbol{R})\psi(\boldsymbol{r})\chi(s_1,\, s_2),$$

для приведенной массы $\mu = m/2$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{R}$ – коордианты центра масс.

α-частицы. Спин α-частицы равен нулю, так что говорим про Ψ для бозонов, симметричную по перестановкам. Тогда асмиптотика на бесконечности имеет вид

$$\psi(\boldsymbol{r})|_{r\to\infty} \sim e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} + e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} + \left(f(\theta) + f(\pi-\theta)\right)\frac{e^{ikr}}{r}.$$

Тогда сечение рассеяние может быть записано в виде

$$d\sigma = |f(\theta) + f(\pi-\theta)|^2\, d\Omega.$$

№17. Рассеяние на сфере

Рассмотрим рассеяние медленных частиц на потенциале

$$U(r) = \begin{cases} U_0 \to +\infty, & r \leqslant a_0, \\ 0, & r > a_0, \end{cases}$$

где для $ka \ll 1$ существенным будет только $l = 0$, тогда

$$R_{k0}(r) = A\frac{\sin(kr+\delta_0)}{kr}, \qquad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \qquad A = \text{const}.$$

Из непрерывности волновой функции находим, что $\sin(ka_0 + \delta_0) = 0$, откуда

$$\delta_0 = -ka_0, \qquad f_0 \approx \frac{\delta_0}{k} - a_0,$$

что и обуславливает определение длины рассеяния.

№18. Фазы рассеяния

Изменить константу $\beta \to \frac{\hbar^2\beta^2}{2m}$. Для потенциала, вида

$$V(r) = \frac{\beta}{r^2}, \qquad \beta > 0,$$

найдём фазы рассеняи δ_l.

Запишем уравнение Шредингера для парциальной волны $u_l(r) = rR_l(r)$:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{1}{r^2}\left(l(l+1) + \frac{2m\beta}{\hbar^2}\right)\right)u_l(r) = 0.$$

Рассмотрим замену $u_l(r) = \sqrt{r}\varphi(r)$

$$\varphi'' + \frac{1}{r}\varphi' + \left(k^2 - \frac{1}{r^2}\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2m\beta}{\hbar^2}\right)\right)\varphi = 0,$$

решения которого знаем в виде функций Бесселя $J_{\pm\nu}(kr)$, где

$$\nu = \sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2m\beta}{\hbar^2}}.$$

Требуя $u_l(0) = 0$, находим решение в виде

$$u_l(r) = c\sqrt{\frac{\pi kr}{2}}J_\nu(kr).$$

Полезно посмотреть асмиптотику на бесконечности, для которой

$$u_l(r) \sim c\sin\left(kr - \frac{\pi\nu}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = c\sin\left(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l\right),$$

откуда находим искомые фазы рассеяния

$$\delta_l = -\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2m\beta}{\hbar^2}} - \left(l+\frac{1}{2}\right)\right).$$

Предельный случай. В пределе $2m\beta/\hbar^2 \ll 1$ получаем

$$\delta_l \approx -\frac{\pi}{2}\frac{m\beta}{\hbar^2(l+\frac{1}{2})},$$

откуда также получаем $|\delta_l| \ll 1$.

В таком случае можем просуммировать ряд

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\left(e^{2i\delta_l}-1\right)P_l(\cos\theta) \approx \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\delta_l P_l(\cos\theta) \approx -\frac{\pi m\beta}{\hbar^2 k}\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta).$$

Суммируя полиному Лежанда, находим

$$f(\theta) \approx -\frac{\pi m\beta}{2k\hbar^2\sin(\theta/2)},$$

аналогично тому, что получили бы в борновском приближении.

№19. Рассеяние в борновском приближении

Рассмотрим в борновском приближении два короткодейтсвующих потенциала. Амплитуда рассения может быть найдена в виде

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int V(r)e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}\,d^3\boldsymbol{r} = -\frac{2m}{\hbar^2 q}\int_0^{\infty}V(r)\sin(qr)r\,dr, \qquad \boldsymbol{q} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}, \quad q = 2k\sin(\theta/2).$$

Полное сечение рассения находим интегрируя амплитуду рассеяния:

$$\sigma = \int |f(\theta)|^2\,d\Omega = 2\pi\int_0^{\pi}|f(\theta)|^2\sin\theta\,d\theta.$$

Условие применимости запишется в виде

$$\frac{m}{2\pi\hbar^2}\left|\int\frac{e^{ikr}}{r}V(r)e^{ikz}\,d^3r\right| \ll 1.$$

Потенциал Юкавы. Подставляя $V(r) = \frac{\alpha}{r}e^{-\kappa r}$, находим

$$f = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2(\kappa^2+q^2)}, \quad\Rightarrow\quad \sigma = \left(\frac{m\alpha}{\hbar^2\kappa}\right)^2\frac{4\pi}{4k^2+\kappa^2}, \qquad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

Условие применимости для любых энергий: $\alpha m/\kappa \ll \hbar^2$. Для быстрых частиц можем ослабить условие до $\alpha \ll \hbar\times\hbar k/m$.

В пределе $\kappa \to 0$ можем получить резерфодовское сечение на отталкивающем кулоновском центре:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{4E^2}\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}.$$