

# ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ «УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

---

**Автор:** Хоружий Кирилл

**От:** 13 февраля 2022 г.

## Содержание

ТеорМин №1	2
1 Неделя I	2
2 Неделя II	4

## ТеорМин №1

**Излучение.** Волновое уравнение с источником:

$$(\partial_t^2 - c^2 \nabla^2) u = \chi, \quad (1)$$

с законом дисперсии  $\varpi = cq$ .

Функция Грина оператора  $\partial_t^2 - c^2 \nabla^2$ :

$$G(t, r) = \frac{\theta(t)}{4\pi c r} \delta(r - ct),$$

а значит выражение для поля:

$$u(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi c^2} \int \frac{d^3 r_1}{R} \chi(t - R/c, \mathbf{r}_1), \quad (2)$$

где  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ .

**Уравнение диффузии.** Уравнение диффузии:

$$(\partial_t - \nabla^2) u = 0, \quad (3)$$

решение которого может быть найдено в виде:

$$u(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dy_1 \dots dy_d}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t}\right) u_0(\mathbf{y}). \quad (4)$$

Асимптотики могут быть найдены в виде

$$u(t, \mathbf{x}) \approx \frac{A}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{4t}\right), \quad A = \int_{\mathbb{R}^d} dy_1 \dots dy_d u_0(\mathbf{y}). \quad (5)$$

При  $A = 0$  асимптотика будет соответствовать

$$u(t, \mathbf{x}) \approx \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{x}}{(4\pi t)^{d/2+1}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{4t}\right), \quad \bar{B} = 2\pi \int_{\mathbb{R}^d} dy_1 \dots dy_d \mathbf{y} u_0(\mathbf{y}), \quad (6)$$

где асимптотики имеют место при  $t \gg l^2$ ,  $l$  – масштаб на котором локализовано поле.

**Меленные переменные.** Рассмотрим произвольное возмущение гармонического осциллятора:

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2) x(t) = \varepsilon f(t, x, \dot{x}). \quad (7)$$

Приближенно (до  $o(\varepsilon)$ ) можем методом Боголюбова-Крылова найти решение в виде

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (8)$$

где зависимость от времени амплитуды и фазы определяется уравнениями

$$\partial_t A(t) = \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_{\omega_0 t - \pi}^{\omega_0 t + \pi} f(\tau, x, \dot{x}) \cos(\omega_0 \tau + \varphi(t)) d(\omega_0 \tau), \quad (9)$$

$$\partial_t \varphi(t) = \frac{-1}{2\pi A \omega_0} \int_{\omega_0 t - \pi}^{\omega_0 t + \pi} f(\tau, x, \dot{x}) \sin(\omega_0 \tau + \varphi(t)) d(\omega_0 \tau). \quad (10)$$

**Огибающая.** Уравнение на огибающую может быть найдено в виде решения уравнения

$$\partial_t \psi + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi = \frac{i\varepsilon}{\omega} e^{i\theta} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-i\varphi} f.$$

## 1 Неделя I

### № 4.1.6

Найдё решение волнового уравнения (1) для точечного гармонического источника

$$\chi = \cos(\omega t) \delta(\mathbf{r}).$$

Подставляя  $\xi$  в (2), находим

$$u(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi c^2} \int \frac{d^3 r_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \cos(\omega t - \omega |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c) \delta(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)}{r}.$$

### № 4.1.7

Найдём значение функции Грина при  $r = 0$  для оператора  $\partial_t^2 + \nabla^4$ . Для начала перейдём к Фурье образу

$$\tilde{G}(t, \mathbf{q}) = \int d^3 \mathbf{x} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} G(t, \mathbf{x}), \quad \Rightarrow \quad (\partial_t^2 + q^4) \tilde{G} = \delta(t).$$

Решение этого уравнение известно<sup>1</sup>:

$$\tilde{G}(t) = \theta(t) \frac{1}{q^2} \sin(q^2 t).$$

Осталось найти

$$G(t, 0) = \theta(t) \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{\sin(q^2 t)}{q^2} = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \sin(q^2 t) = \frac{1}{8\sqrt{2}\pi^{5/2}} \cdot \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}}.$$

### № 4.2.2

Найдём решение одномерного диффузионного уравнения для

$$(\partial_t - \partial_x^2) u = 0, \quad u_0(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right).$$

**Точное решение.** Воспользуемся (4), тогда

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t} - \frac{y^2}{2l^2}\right) dy.$$

Выделяя полный квадрат, находим, что

$$\frac{(x-y)^2}{4t} + \frac{y^2}{2l^2} = \left(\sqrt{\frac{1}{2l^2} + \frac{1}{4t}} y - \frac{x}{4t\sqrt{\frac{1}{2l^2} + \frac{1}{4t}}}\right)^2 + \frac{x^2}{2l^2 + 4t},$$

а значит

$$u(t, x) = \frac{l}{\sqrt{l^2 + 2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2 + 4t}\right).$$

**Асимптотика.** Так как функция  $u_0$  симметрична, то через (5) находим

$$A = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx = l\sqrt{2\pi}, \quad \Rightarrow \quad u(t, x) \approx \frac{l}{\sqrt{2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right),$$

что является асимптотикой точного решения при  $t \gg l^2$ .

### № 4.2.3

Найдём асимптотическое поведение решение одномерного диффузного уравнения (3) для различных начальных условий.

1. Рассмотрим

$$u_0(x) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right).$$

В силу нечетности функции, через (6), находим

$$B = 2\pi \int_{\mathbb{R}} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right) = -4\pi l^2 \partial_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2/2l^2} dx = -4\pi l^2 \sqrt{2\pi} l \partial_\alpha \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = l^3 (2\pi)^{3/2},$$

а значит искомая асимптотика

$$u(t, x) \approx \left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^3 \frac{x e^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}.$$

2. Рассмотрим

$$u_0(x) = \exp\left(-\frac{|x|}{l}\right).$$

В силу четности функции, через (5), находим

$$A = 2 \int_0^\infty e^{-x/l} dx = 2l.$$

<sup>1</sup>Конспект, (1.11).

Тогда искомая асимптотика

$$u(t, x) \approx \frac{l}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{t}}.$$

**3. Рассмотрим**

$$u_0(x) = x \exp\left(-\frac{|x|}{l}\right).$$

В силу нечетности функции, через (6), находим

$$B = 4\pi \int_0^\infty x^2 \exp\left(-\frac{|x|}{l}\right) dx = 4\pi l^2 \partial_\alpha^2 \int_0^\infty e^{-\alpha x/l} dx = 2\pi l^2 \partial_\alpha^2 \left(\frac{l}{\alpha}\right) = 8\pi l^3,$$

а значит

$$u(t, x) \approx \frac{l^3}{\sqrt{\pi}} \frac{x e^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}.$$

**4. Рассмотрим**

$$u_0(x) = \frac{1}{x^2 + l^2}.$$

В силу четности функции, через (5), находим

$$A = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2 + l^2} dx = 2\pi i \frac{1}{2il} = \frac{\pi}{l},$$

тогда искомая асимптотика

$$u(t, x) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2l} \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{t}}.$$

**5. Рассмотрим**

$$u_0(x) = \frac{x}{(x^2 + l^2)^2}.$$

В силу четности функции, через (6), находим

$$B = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{(x^2 + l^2)^2} dx = 4\pi i \lim_{x \rightarrow il} \left( \frac{x^2}{(x + il)^2} \right)' = \frac{\pi^2}{l}.$$

Тогда искомая асимптотика

$$u(t, x) = \frac{\sqrt{\pi}}{8l} \frac{x e^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}.$$

## 2 Неделя II

### №1. 6.2.2

Решим уравнение (7) для  $f(\dot{x}) = -\varepsilon \dot{x}^3$ . Подставляя  $f(t)$  в (9) и (10), находим уравнения на амплитуду и фазу:

$$\dot{A} = -\frac{3}{8}\varepsilon A^3 \omega_0^2, \quad \dot{\varphi} = 0,$$

откуда сразу находим  $\varphi(t) = \varphi_0$  и

$$\frac{dA}{A^3} = \left(-\frac{3}{8}\varepsilon \omega_0^2\right) dt, \quad \Rightarrow \quad A = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \frac{3}{4}A_0\varepsilon \omega_0^2 t}},$$

а значит искомое решение

$$x(t) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \frac{3}{4}A_0\varepsilon t}} \sin(t + \varphi_0).$$

### №2. 6.2.6

Решим уравнение (7) для  $f(t) = \cos t$ . Знаем, что точное решение

$$x(t) = A \sin(t + \varphi_0) + \frac{\varepsilon t}{2} \sin(t).$$

Однако решим методом медленных амплитуд.

Подставляя  $f(t)$  в (9) и (10), находим уравнения на амплитуду и фазу:

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = \frac{\varepsilon}{2} \cos(\varphi(t)), \\ \dot{\varphi}(t) = \frac{-\varepsilon}{2A(t)} \sin(\varphi(t)), \end{cases}$$

которые приводят к двум случаям.

**Нулевая фаза.** При  $\varphi(0) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$  видим, что  $\dot{\varphi} = 0$ , а значит  $\varphi(t) = \text{const}$ . Тогда уравнение на амплитуду легко интегрируется, и находим (считая  $A(0) \stackrel{\text{def}}{=} A_0$ )

$$A(t) = A_0 + \frac{\varepsilon}{2} \cos(\varphi_0)t,$$

что прекрасно описывает резонанс:

$$x(t) = \left( A_0 + \frac{\varepsilon}{2} \cos(\varphi_0)t \right) \sin(t), \quad \varphi_0 = 0.$$

**Ненулевая фаза.** Разделим два уравнения друг на друга:

$$\frac{dA}{d\varphi} = -\frac{A}{\operatorname{tg} \varphi}, \quad \Rightarrow \quad \log A = -\log \sin \varphi + \tilde{c}, \quad \Rightarrow \quad A = A_0 \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi},$$

таким образом нашли удобный первый интеграл системы.

Подставляя в выражение для  $\dot{\varphi}$  находим

$$\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{2} \sin^2(\varphi), \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} = -\frac{\varepsilon}{2} dt, \quad \Rightarrow \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_0} + \frac{\varepsilon t}{2}} \right).$$

Теперь нужно подставить  $\varphi(t)$  в выражение для  $\dot{A}$  и разложить по  $\varepsilon$ :

$$\cos \operatorname{arctg} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \Rightarrow \quad \dot{A} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{t\varepsilon}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi_0)} \right)^2}} = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} + o(\varepsilon),$$

а значит искомая амплитуда

$$A(t) = A_0 + \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} \frac{\varepsilon}{2} t.$$

Итого находим (при  $\varphi_0 \neq \pi/2$ )

$$x(t) = \left( A_0 + \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} \frac{\varepsilon t}{2} \right) \sin \left( t + \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_0} + \frac{\varepsilon t}{2}} \right) \right).$$

### №3. 6.2.8

Решим уравнение (7) для  $f(t) = \kappa \cos t + (1 - x^2)\dot{x}$ . Подставляя  $f(t)$  в (9) и (10), находим уравнения на амплитуду и фазу:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\varepsilon \left( \kappa \cos \varphi + A \left( 1 - \frac{A^2}{4} \right) \right), \quad \dot{\varphi} = -\frac{1}{2A}\varepsilon \kappa \sin(\varphi).$$

Считая  $\kappa$  тоже малым параметром, решаем, аналогично семинару, уравнение с разделяющимися переменными:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\varepsilon A \left( 1 - \frac{A^2}{4} \right), \quad \Rightarrow \quad A(t) = 2 \frac{A_0}{\sqrt{4e^{-\varepsilon t} + A_0^2(1 - e^{-\varepsilon t})}},$$

что похоже на правду, так как всё также

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 2,$$

то есть сохраняется предельный цикл на плоскости  $\{x, \dot{x}\}$ .

Для фазы можем найти решение при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon \kappa}{2} \sin(\varphi) \sqrt{\frac{4 + A_0^2(e^{\varepsilon t} - 1)}{4A_0^2 e^{\varepsilon t}}} \approx -\frac{\varepsilon \kappa}{4} \sin(\varphi), \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2}\varphi(t) \right) = \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2}\varphi_0 \right) \exp \left( -\frac{\varepsilon \kappa}{4} t \right).$$

Возможно даже корректным будет выражение

$$\varphi(t) = 2 \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2}\varphi_0 \right) \exp \left( -\frac{\varepsilon \kappa}{4} t \right) \right),$$

получается малая накачка определяет асимптотику на фазы на бесконечности.

№4. 6.2.11