

Авторы: Хоружий Кирилл
Рузайкин Трофим

От: 18 февраля 2022 г.

1 Кинетическое уравнение

Уравнение Лиувилля. Эволюцию матрицы плотности знаем из уравнения Лиувилля [1]:

$$i\hbar \partial_t \hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (1)$$

Далее будет феноменологически введено спонтанное излучение, также считаем неизменным излучение лазера, поэтому гамильтониан сводится к

$$H = H^A + H^I,$$

где H^A – гамильтониан атома, H^I – взаимодействие атома с полем.

Атомарный гамильтониан. Матричное представление для \hat{H}^A диагонально:

$$H_{\beta\alpha}^A = \hbar\omega_{\beta\gamma}\delta_{\beta\alpha},$$

где $|\gamma\rangle$ выбран за нижнее g -состояние. Можем найти

$$[H^A, \hat{\rho}]_{\alpha\beta} = \sum_a \langle \alpha | \hat{H}^A | a \rangle \langle a | \hat{\rho} | \beta \rangle - \sum_b \langle \alpha | \hat{\rho} | b \rangle \langle b | \hat{H}^A | \beta \rangle = \hbar\omega_{\beta\gamma}\rho_{\beta\alpha} - \hbar\omega_{\alpha\gamma}\rho_{\beta\alpha} = \hbar\rho_{\beta\alpha}\omega_{\beta\alpha}.$$

Гамильтониан взаимодействия. ... И получаем (для бегущей волны)

$$H_{\beta\alpha}^I = \hbar\Omega_{\beta\alpha}e^{i\omega t - ikz},$$

где $\Omega_{\beta\alpha} = 0$, z – положение атома относительно лазерного излучения.

В насыщенной спектроскопии мы работаем с атомарным газом, определяющим уширением в динамике будет зависимость $z(t)$. Действительно, считая что атом движется со скоростью v , под углом θ к пучку, находим

$$z(t) = vt \cos \theta, \quad \Rightarrow \quad i\omega t - ikz(t) = it \left(\omega - \frac{\omega}{c} v \cos \theta \right)$$

где для каждого атома считаем $z(0) = 0$. Получается, что для атома появляется доплеровский сдвиг:

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right).$$

Далее будем рассматривать распределение Максвелла по v_z , тогда $H_{\beta\alpha}^I$ переписывается в виде

$$H_{\beta\alpha}^I = \hbar\Omega_{\beta\alpha}e^{i\omega' t}, \quad \omega' = \omega \left(1 - \frac{v_z}{c} \right).$$

Замена переменных. Жизнь станет лучше, если перейдём к новым недиагональным элементам [2] $\tilde{\rho}_{\beta\alpha}$:

$$\tilde{\rho}_{\beta\alpha} = \rho_{\beta\alpha} e^{i\omega t (1 - \delta_{\alpha\beta})} = \begin{cases} \rho_{\beta\alpha} e^{i\omega t}, & \beta \neq \alpha, \\ \rho_{\beta\alpha}, & \beta = \alpha. \end{cases}$$

Тогда производная по времени переписывается в виде

$$\partial_t \rho_{\beta\alpha} = (\partial_t \tilde{\rho} - i\omega \tilde{\rho}_{\beta\alpha}) e^{-i\omega t}.$$

Тогда уравнение на $\partial_t \tilde{\rho}_{\beta\alpha}$:

$$i\hbar \partial_t \tilde{\rho}_{\beta\alpha} = \hbar(\omega_{\beta\alpha} - \omega) \tilde{\rho}_{\beta\alpha} + \sum_j (H_{\beta j}^I \tilde{\rho}_{j\alpha} - \tilde{\rho}_{\beta j} H_{j\alpha}^I).$$

Спонтанное излучение. К уравнению (1) мы добавляем релаксационное слагаемое для феноменологического описания [2,3] спонтанного излучения:

$$i\hbar \partial_t \hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}] + i\hbar \mathcal{L}_{\beta\alpha}^{\text{relax}}(\hat{\rho}).$$

Разделим уровни в системе на g -уровни $\{g\}$ и e -уровни $\{e\}$. Тогда $\mathcal{L}_{\beta\alpha}^{\text{relax}}(\hat{\rho})$ переписывается в виде

$$\mathcal{L}_{\beta\alpha}^{\text{relax}}(\hat{\rho}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\tau} \rho_{\beta\alpha}, & \beta \in \{e\}, \alpha \in \{g\}, \\ -\frac{1}{\tau} \rho_{\beta\beta}, & \beta = \alpha \in \{e\}, \\ +\frac{1}{\tau} \sum_{\gamma \in \{e\}} (C_{\gamma\alpha})^2 \rho_{\gamma\gamma}, & \beta = \alpha \in \{g\}. \end{cases}$$

2 Усреднение

Итак, для заданной скорости v_z (далее просто v) можем найти $\rho_v(t)$. Далее будем работать с усредненным значением

$$\bar{\rho}_v = \frac{1}{n_t} \sum_{j=0}^{n_t} \rho(v, t_j),$$

где n_t – количество точек по которым проходит усреднение, $t_j = j \cdot dt$, dt – шаг¹ усреднения по времени.

Зная распределение по v :

$$f(v) dv = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) dv,$$

можем найти среднее по атомам значение для $\hat{\rho}$:

$$\bar{\rho} = \sum_{i=1}^{n_v} \bar{\rho}_v(v) f(v),$$

где $n_v \approx 200$, скорости v берём до $3v_Q = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$.

¹По советам [2] возьмём $dt \approx 0.2$ нс и $n_t \cdot dt \approx 50\tau$.

3 Приложение

Двухуровневая система. В качестве тестового примера рассмотрим двухуровневую систему:

$$\{g\} = \{1\}, \quad \{e\} = \{2\}.$$

Трёхуровневая система. В качестве наглядного примера рассмотрим V -систему ($\{g\} = \{1\}$, $\{e\} = \{2, 3\}$) и Λ -систему ($\{g\} = \{1, 2\}$, $\{e\} = \{3\}$)

$$\mathcal{L}_{\beta\alpha}^V(\hat{\rho}) = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} C_{21}^2 \rho_{22} + C_{31}^2 \rho_{33} & \dots & \dots \\ -\frac{1}{2} \rho_{21} & -\rho_{22} & \dots \\ -\frac{1}{2} \rho_{31} & \dots & -\rho_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_{\beta\alpha}^\Lambda(\hat{\rho}) = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} C_{31}^2 \rho_{33} & \dots & \dots \\ \dots & C_{32}^2 \rho_{33} & \dots \\ -\frac{1}{2} \rho_{31} & -\frac{1}{2} \rho_{32} & -\rho_{33} \end{pmatrix},$$

где через \dots обозначены компоненты ρ , эволюция которых нам не интересна.

Список литературы

- [1] Leonard Mandel and Emil Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [2] L Maguire, R Bijnen, Emine Mese, and R Scholten. Theoretical calculation of saturated absorption spectra for multi-level atoms. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys*, 39:2709–2720, 06 2006.
- [3] Allen L and Eberly J H. *Optical Resonance and Two-Level Atoms*. New York: Wiley, 1975.