Задание по курсу
«Экспериментальная реализация концепций квантовой физики»

Автор: Хоружий Кирилл

От: *29 марта 2022 г.*

Задача №3,4. Электродипольный переход

Выбор состояния. Снова посмотрим на $\psi(\boldsymbol{r})$ атома водорода:

$$\psi_{100} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} e^{-\frac{r}{a}}}{\sqrt{\pi}}, \quad \psi_{21-1} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} \sin(\theta) e^{-\frac{r}{2a} - i\varphi}}{8\sqrt{\pi}}, \quad \psi_{210} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{3/2} e^{-\frac{r}{2a}} \cos(\theta)}{4\sqrt{2\pi}}, \quad \psi_{211} = \psi_{21-1}^\dagger.$$

Найдём матричные элементы для возмущения $\hat{H}_{\mathrm{I}} = -\hat{\boldsymbol{d}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}_+ E_0 e^{-i\omega t}$, где $\hat{\boldsymbol{d}} = -|e|\hat{\boldsymbol{r}}$ и $\boldsymbol{\sigma}_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\, i,\, 0)$. Также воспользовались электродипольным приближением, считая $\boldsymbol{E}(z) \approx \boldsymbol{E}(0)$. Тогда

$$\langle \psi_{100} | \hat{\boldsymbol{d}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_+ | \psi_{21-1} \rangle = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\ \frac{r^3 e^{-\frac{3r}{2a}} \sin^3(\theta)}{8\sqrt{2}\pi a^3} = \frac{16\sqrt{2}}{81} a|e|,$$

$$\langle \psi_{100} | \hat{\boldsymbol{d}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_+ | \psi_{210} \rangle = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\ \frac{r^3 \sin^2(\theta)\cos(\theta) e^{-\frac{3r}{2a} + i\varphi}}{8\pi a^3} = 0,$$

$$\langle \psi_{100} | \hat{\boldsymbol{d}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_+ | \psi_{211} \rangle = \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\ -\frac{r^3 \sin^3(\theta) e^{-\frac{3r}{2a} + 2i\varphi}}{8\sqrt{2}\pi a^3} = 0,$$

Таким образом переход происходит в $l_z = -1$.

Частота Раби. Теперь можем рассмотреть двухуровневую систему с $|0\rangle = |\psi_{100}\rangle$ и $|1\rangle = |21-1\rangle$, гамильтониан которой можем переписать в виде

$$\hat{H} = \hbar\omega |1\rangle\langle 1| + \frac{\hbar\gamma}{2} |1\rangle\langle 0| e^{-i\omega t} + \text{c.c.}$$

где перемешивание уровней как раз и обусловлено электродипольным переходом:

$$\hat{H}_{\mathrm{I}} = \sum_{k,j=0,1} |k\rangle \langle k | \hat{H}_I | j \rangle \langle j|\,,$$

откуда находим частоту Раби:

$$\gamma = -\frac{2^{11/2}}{3^4} \frac{aeE_0}{\hbar},$$

где a – радиус Бора.