ТеорМин №3

Теория групп. *Сопряженными* (из одного *класса сопряженности*) называть элементы $g \sim h$ такие, что $\exists r \in G$, $g = rhr^{-1}$. Далее классы сопряженности будем обозначать за $C_1, \ldots, C_k$, элементы в них за $h_i \in C_i$.

Циклическая группа C_n

$$C_n = \{\mathbb{1}, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}, \qquad r^n = \mathbb{1}.$$

Для C_n каждый элемент становился представителем класса сопряженности в силу того, что группа абелева.

Группа перестановок S_n

$$S_n = \left\{\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}\right\},$$

разбивается на классы сопряженности с одинаковой циклической структурой:

$$S_2 \to \{\mathbb{1}\}, \{(a,b)\}, \quad S_3 \to \{\mathbb{1}\}, \{(a,b)\}, \{(a,b,c)\}, \quad S_4 \to \{\mathbb{1}\}, \{(a,b)\}, \{(a,b,c)\}, \{(a,b,c,d)\}, \{(a,b)(c,d)\}.$$

Также в S_n $\forall\sigma$ раскладывается в циклы, а циклы в транспозиции, определенной оказывается величина четность σ. Для неё выполняется

$$\operatorname{sign}(\sigma_1 \cdot \sigma_2) = \operatorname{sign}(\sigma_1) \cdot \operatorname{sign}(\sigma_2), \qquad \operatorname{sign}(a,b) = -1, \qquad \operatorname{sign}(i_1, i_2, \ldots, i_d) = \left[\begin{array}{ll} +1, & d \not\vdots\, 2, \\ -1, & d \,\vdots\, 2. \end{array}\right.$$

Четностью перестановки называют количество пар $i < j$ таких, что $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Группа D_n симметрий правильного n-угольника состоит из r – поворотов на $2\pi/n$ и s – отражений относительно какой-то выбранной оси. Для $n \,\vdots\, 2 = 0$ получатся классы сопряженности $\{r^b, r^{n-b}\}$, $\{s, sr^2, sr^4, \}$ и $\{sr, sr^3, sr^5, \ldots\}$. Для $n \not\vdots\, 2$ получится $\{r^b, r^{n-b}\}$ и $\{s, sr, sr^2, \ldots\}$.

Теория представлений. Далее работаем с конечными группами $|G| < +\infty$. Элемент группы обознаем за $g \in G$. *Представление* группы определяют как гомоморфизм $\rho\colon G \mapsto \mathrm{GL}(V, \mathbb{C})$ (невырожденные матрицы).

Характером представления ρ называют $\chi[V] = \operatorname{tr}\rho(g)$ для $g \in G$. Характеры изморфных представлений совпадают, а также

$$\chi[V](\mathbb{1}) = \dim V, \qquad \chi[V_1 \oplus V_2] = \chi[V_1] + \chi[V_2], \qquad \chi[V](g^{-1}) = \chi^*[V](g), \qquad \chi[V_1 \otimes V_2] = \chi[V_1] \cdot \chi[V_2].$$

Стараемся решить задачу о разложение приводимого представления по неприводимым. Представление ρ называется *неприводимым*, если у него нет нетривиальных (отличных от $\{0\}$ и V) инвариантных подпространств. По теореме Машке $\forall\rho$ конечной группы G разбивается на сумму неприводимых представлений. Всякое представление *унитаризуемо*.

Для характеров определим скалярное произведение $\langle\chi^{(i)}|\chi^{(j)}\rangle$:

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi(g)\bar{\psi}(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{k}|C_i|\varphi(h_i)\bar{\psi}(h_i).$$

Характеры ортогональны по строкам и столбцам:

$$\langle\chi^{(i)}|\chi^{(j)}\rangle = \delta_{ij}, \qquad \sum_{n=1}^{k}\chi^{(n)}(h_i)\bar{\chi}^{(n)}(n_j) = \delta_{ij}\frac{|G|}{|C_i|}.$$

Число неприводимых представлений равно числу классов сопряженности. Все неприводимые представления абелевой группы одномерны, что является следствием теоремы Бернсайда:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = |G|,$$

где d_i – размерность i-го представления. *Критерием неприводимости* является $\langle\chi|\chi\rangle = 1$, тогда разложение на неприводимые: $\chi = a_1\chi^{(1)} + \ldots + a_n\chi^{(n)}$, где $a_i = \langle\chi|\chi^{(i)}\rangle$.

Таблицы неприводимых представлений Построение для C_n тривиально в силу абелевости группы. Каждый элемент представим в виде $\sqrt[n]{1}$. Построение производим с учетом свойства $\rho(r^k) = \rho(r)^k$.

Теперь для D_4 размера $|D_4| = 2 \times n = 8$, будут классы сопряженности $\{\mathbb{1}\}$, $\{r^2\}$, $\{r, r^3\}$ и $\{s, sr^2\}$, $\{sr, sr^3\}$.

$\mathbb{1}\|\ 1$	$r, r^3\|\ 2$	$r^2\|\ 1$	$s, sr^2\|\ 2$	$sr, sr^3\|\ 2$
1	1	1	1	1
1	1	1	-1	-1
1	-1	1	1	-1
1	-1	1	-1	1
2	0	-2	0	0

Всегда есть тривиальное представление. Также из теоремы Бернсайда находим первый столбец.

По сохранению или смене ориентация базиса можем сопоставить ± 1 соответсвующием классам. Важно помнить, что $(sr^k)^2 = \mathbb{1}$ и $(r^k)^4 = \mathbb{1}$, откуда знаем одномерные представления $\rho(sr^k) = \pm 1$ и $\rho(r^k) = \sqrt[4]{1} = \pm i, \pm 1$, откуда достраиваем одномерные представления.

При построение D_7 будет важно вспомнить про сопоставление матриц поворота двухмерным представлениям, по которым найдём элементы таблицы характеров, как след соответсвующей матрицы.

Построим табличку характеров для $S_3\colon |S_3| = 3! = 6$. Также из теоремы Бернсайда находим первый столбец. Для второй строчки всегда есть *знаковое* представление.

$e\vert$ 1	$(a,b)\vert$ 3	$(a,b,c)\vert$ 2
1	1	1
1	-1	1
2	0	-1

Построим табличку характеров для $S_4\colon |S_4| = 4! = 24$.

$e\vert$ 1	$(a,b)\vert$ 6	$(a,b,c)\vert$ 8	$(a,b,c,d)\vert$ 6	$(a,b)(c,d)\vert$ 3
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
2	0	-1	0	2
3	-1	0	1	-1
3	1	0	-1	-1

Тут важно посмотреть на отображение $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, построив $\chi[\mathbb{C}^4]$, значениях характеров которой можем восстановить по количеству неподвижных точек (4, 2, 1, 0, 0). Неприводимое представление можем получить в виде $\chi[\mathbb{C}^4] - \chi^{(1)}$. Также может помочь тензорное произведение представлений.

Преобразование Меллина. Для функции $g(x)$ такую, что $g(x) = O(x^{-\alpha})$ при $x \to 0$ и $g(x) = x^{-\beta}$ при $x \to +\infty$ можем определить *преобразование Меллина*

$$G(\lambda) = \int_0^\infty g(x) x^{\lambda-1}\, dx,$$

определенного в полосе $\alpha < \operatorname{Re}\lambda < \beta$. Обратное преобразование может быть найдено в виде

$$g(x) = \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} G(\lambda) x^{-\lambda} \frac{d\lambda}{2\pi i},$$

для $\alpha < C < \beta$.

Для вычисления инетгралов бывает удобно воспользоваться сверточным свойством преобразования Меллина

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x) x^{\lambda-1}\, dx = \int_{C_f-i\infty}^{C_f+i\infty} F(\lambda_f) G(\lambda-\lambda_f) \frac{d\lambda_f}{2\pi i} = \int_{C_g-i\infty}^{C_g+i\infty} F(\lambda-\lambda_g) G(\lambda_g) \frac{d\lambda_g}{2\pi i},$$

где $\alpha_f + \alpha_g < \operatorname{Re}\lambda < \beta_f + \beta_g$. В частности, при допустимом $\lambda = 1$, получаем

$$\int_0^\infty f(x) g(x)\, dx = \int_{C_f-i\infty}^{C_f+i\infty} F(\lambda_f) G(1-\lambda_f) \frac{d\lambda_f}{2\pi i}.$$

Приведем некоторый зоопарк по преобразованию Меллина:

$$e^{-x} \xrightarrow{M} \Gamma(\lambda), \qquad \frac{1}{1+ax^n} \xrightarrow{M} \frac{\pi a^{-\frac{\lambda}{n}}}{n \sin\left(\frac{\pi\lambda}{n}\right)}, \qquad \frac{1}{\sqrt[m]{1+x^n}} \xrightarrow{M} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{m}-\frac{\lambda}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}, \qquad \frac{1}{1-x} \xrightarrow{M} \pi\cot(\pi\lambda),$$

$$\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx}} \xrightarrow{M} \frac{\Gamma(1-\lambda)\Gamma\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}-\lambda}}{\sqrt{\pi b}}, \qquad x^n \xrightarrow{M} 2\pi\delta(i(n+\lambda)), \qquad \frac{1}{1+e^{\alpha x}} \xrightarrow{M} \left(1-2^{1-\lambda}\right)\alpha^{-\lambda}\Gamma(\lambda)\zeta(\lambda),$$

$$\sin x \xrightarrow{M} \sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\Gamma(\lambda), \qquad \cos x \xrightarrow{M} \cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\Gamma(\lambda).$$

Гамма функция. Полезно будет вспомнить, что

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt = \int_0^1 (-\ln x)^{z-1}\, dx = \frac{2^{z+1}}{z}\int_0^1 y(-\ln y)^z\, dy, \qquad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

Для произведения бывает удобно

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma(z+\frac{n-1}{n}) = n^{\frac{1}{2}-nz}\cdot(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(nz), \qquad \Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}.$$