

# ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ «УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

---

**Автор:** Хоружий Кирилл

**От:** 8 апреля 2022 г.

## Содержание

ТеорМин №1	2
ТеорМин №2	3
1 Неделя I	7
2 Неделя II	8
3 Неделя III	10
4 Неделя V	11

## ТеорМин №1

**Вычеты.** Интеграл по замкнутому контуру  $C$  может быть найден, как

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= 2\pi i \sum_{z_j} \text{res}_{z_j} f(z), \quad \text{res}_a f(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i\varphi} f(a + \varepsilon e^{i\varphi}) \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left( \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-a)^m f(z) \right), \end{aligned}$$

где  $m$  – степень полюса.

**Излучение.** Волновое уравнение с источником:

$$(\partial_t^2 - c^2 \nabla^2) u = \chi, \quad (1)$$

с законом дисперсии  $\varpi = cq$ .

Функция Грина оператора  $\partial_t^2 - c^2 \nabla^2$ :

$$G(t, r) = \frac{\theta(t)}{4\pi c r} \delta(r - ct),$$

а значит выражение для поля:

$$u(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi c^2} \int \frac{d^3 r_1}{R} \chi(t - R/c, \mathbf{r}_1), \quad (2)$$

где  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ .

**Уравнение диффузии.** Уравнение диффузии:

$$(\partial_t - \nabla^2) u = 0, \quad (3)$$

решение которого может быть найдено в виде:

$$u(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dy_1 \dots dy_d}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t}\right) u_0(\mathbf{y}). \quad (4)$$

Асимптотики могут быть найдены в виде

$$u(t, \mathbf{x}) \approx \frac{A}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{4t}\right), \quad A = \int_{\mathbb{R}^d} dy_1 \dots dy_d u_0(\mathbf{y}). \quad (5)$$

При  $A = 0$  асимптотика будет соответствовать

$$u(t, \mathbf{x}) \approx \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{x}}{(4\pi t)^{d/2+1}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{4t}\right), \quad \bar{B} = 2\pi \int_{\mathbb{R}^d} dy_1 \dots dy_d \mathbf{y} u_0(\mathbf{y}), \quad (6)$$

где асимптотики имеют место при  $t \gg l^2$ ,  $l$  – масштаб на котором локализовано поле.

**Уравнение диффузии (с накачкой).** При наличии правой части:

$$(\partial_t - \nabla^2) u = \varphi,$$

можем найти функцию Грина для оператора  $\partial_t - \nabla^2$

$$u(t, \mathbf{x}) = \int G(t - \tau, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\tau, \mathbf{y}) d\tau d^d \mathbf{y}, \quad G(t, \mathbf{r}) = \frac{\theta(t)}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right).$$

**Меленные переменные.** Рассмотрим произвольное возмущение гармонического осциллятора:

$$(\partial_t^2 + \omega_0^2) x(t) = \varepsilon f(t, x, \dot{x}). \quad (7)$$

Приближенно (до  $o(\varepsilon)$ ) можем методом Боголюбова-Крылова найти решение в виде

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (8)$$

где зависимость от времени амплитуды и фазы определяется уравнениями

$$\partial_t A(t) = \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_{\omega_0 t - \pi}^{\omega_0 t + \pi} f(\tau, x, \dot{x}) \cos(\omega_0 \tau + \varphi(t)) d(\omega_0 \tau), \quad (9)$$

$$\partial_t \varphi(t) = \frac{-1}{2\pi A \omega_0} \int_{\omega_0 t - \pi}^{\omega_0 t + \pi} f(\tau, x, \dot{x}) \sin(\omega_0 \tau + \varphi(t)) d(\omega_0 \tau). \quad (10)$$

**Уравнение Хопфа.** В акустике естественно возникает уравнение Хопфа:

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0.$$

Решение может быть найдено в виде

$$x(t) = x_0 + u_0(x_0)t, \quad u(x(t), t) = c(x_0) = u_0(x_0).$$

где сначала разрешаем уравнение  $c = u_0(x_0)$  относительно  $c = c(x_0)$ , а потом разрешаем уравнение на  $x(t)$  относительно  $c = c(x(t), t)$ . Зная, что  $u(x(t), t) = c(x(t), t)$ , находим  $u(x, t) = c(x, t)$ .

**Уравнение Хопфа (с накачкой).** Добавим к уравнению накачку:

$$\partial_t u + u \partial_x u = f(x, t).$$

Система может быть сведена к

$$\begin{cases} \dot{u} = f(t, x(t)) \\ \dot{x} = u(t, x(t)) \end{cases} \Leftrightarrow \ddot{x} = f(x, t), \Rightarrow x(t) = x(t, x_0, \dot{x}_0),$$

где  $\dot{x}_0 = u_0(x_0)$ . Сначала разрешаем уравнение  $x(t)$  относительно  $x_0 = x_0(t, x)$ , а потом подставляем этот  $x_0$  в  $u(t, x) = \dot{x}(t, x_0(t, x))$ , что и является решением исходной задачи.

**Уравнение Бюргерса.** Добавим диссипацию в уравнение Хопфа:

$$\partial_t u + u \partial_x u = \partial_x^2 u,$$

так получим уравнение Бюргерса.

Заметим, что преобразование Коула-Хопфа

$$\psi = \exp\left(-\frac{1}{2}h\right), \quad u = \partial_x h, \quad \Rightarrow \quad (\partial_t - \partial_x^2)\psi = 0.$$

Имея начальные условия для  $\psi_0(x)$ , можем найти

$$\psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \psi_0(y) \frac{\theta(t)}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) dy,$$

откуда находим решение

$$u(t, x) = -2\partial_x \ln \psi(t, x).$$

## ТеорМин №2

**Автомодельные решения.** Если уравнения вида  $\hat{L} u(\mathbf{r}, t) = \dots$  — однородно и изотропно, то может помочь автомодельная подстановка:

$$u(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{t^a} f\left(\frac{\mathbf{r}}{t^b}\right) \quad : \quad t \rightarrow \lambda t \Rightarrow u \rightarrow \lambda^{-a} u, \quad r \rightarrow \lambda^b r. \quad (11)$$

Восстановить  $a$  в общем виде нельзя, но требуя, например, локальности решения  $\int_{\mathbb{R}^n} u dV = \text{const}$  можем иногда найти и  $a$ .

**Уравнение Фредгольма.** Есть уравнение Фредгольма I рода:

$$\int_a^b ds K(t, s) f(s) = g(t),$$

и уравнение Фредгольма II рода:

$$f(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t, s) f(s), \quad \Leftrightarrow \quad f = g + \lambda \hat{K} f, \quad (12)$$

где мы ввели интегральный оператор  $\hat{K} f = \int_a^b ds K(t, s) f(s)$ . Решение можем найти в виде

$$f = \frac{1}{1 - \lambda \hat{K}} g = \left( \mathbb{1} + \lambda \hat{R} \right) g, \quad \hat{R} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{K} + \lambda \hat{K}^2 + \dots$$

В терминах интегрирования результента  $R(t, s)$  выражается, как

$$R(t, s) = K(t, s) + \lambda \int_a^b dp_1 K(t, p_1) K(p_1, s) + \lambda^2 \int_a^b dp_1 \int_a^b dp_2 K(t, p_1) K(p_1, p_2) K(p_2, s) + \dots \quad (13)$$

## Линейные интегральные уравнения

**Свертка I.** Рассмотрим уравнение на  $\varphi$ , вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) \varphi(y) dy = f(x), \quad (14)$$

то есть уравнение Фредгольма первого рода с  $(a, b) = \mathbb{R}$  и  $K(x, y) = K(x - y)$ . Решение можем найти через преобразование Фурье

$$\tilde{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k) e^{ikx} dx,$$

которое переводит свёртку в произведение:

$$\tilde{\varphi}(k) = \frac{\tilde{f}(k)}{\tilde{K}(k)}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{f}(k)}{\tilde{K}(k)}. \quad (15)$$

**Свертка II.** Аналогично для уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} dy K(x-y)\varphi(y), \quad (16)$$

для которого также

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} dy f(y)R(x-y), \quad R(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{K}(k)}{1 - \lambda \tilde{K}(k)}. \quad (17)$$

**Уравнение Вольтерра I.** Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма I на  $(a, b) = (0, t)$ :

$$f(t) = \int_0^t ds K(t-s)\varphi(s).$$

Здесь хорошо работает преобразование Лапласа

$$f(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} f(p)e^{pt} dp,$$

которое переводит свертку в произведение, а значит можем сразу написать решение

$$\varphi(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \frac{f(p)}{K(p)} e^{pt} \frac{dp}{2\pi i}. \quad (18)$$

**Уравнение Вольтерра II.** Аналогично для уравнения Фредгольма II:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^t K(x-y)\varphi(y) dy, \quad (19)$$

находим решение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^t R(t-s)f(s) ds, \quad R(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} e^{pt} \frac{K(p)}{1 - \lambda K(p)}.$$

**Периодическое ядро I.** Рассмотрим  $f(t)$  и  $K(t)$  периодичные с  $T = b - a$ , тогда и  $\varphi(t)$  периодически по  $T$ . Решим уравнение, вида

$$\int_a^b K(t-s)\varphi(s) ds = f(t). \quad (20)$$

Раскладывая всё в ряд Фурье (вводя  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ):

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\omega t} f_n, \quad f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{in\omega t} dt.$$

Решение находим в виде суммы

$$\varphi_n = \frac{f_n}{TK_n}, \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f_n}{TK_n} e^{-in\omega t}. \quad (21)$$

**Периодическое ядро II.** Аналогично можем найти резольвенту для уравнения Фредгольма второго рода:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b ds K(t-s)\varphi(s).$$

Реша  $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b ds R(t-s)f(s), \quad R(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{K_n}{1 - \lambda TK_n} e^{-in\omega t}. \quad (22)$$

## Нелинейные интегральные уравнения

**Уравнение типа свёртки.** Рассмотрим уравнение вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t-s)\varphi(s) = f(t). \quad (23)$$

Аналогично смотрим на фурье-образ, откуда находим выражение для  $\varphi(t)$ :

$$\varphi(t) = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{f(\omega)} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (24)$$

**Обобщение.** Обобщим происходящее, введя  $L(s)$

$$L(s) = \sum_{n=0}^N a_n s^n, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} ds \varphi(t-s)L(s)\varphi(s) = f(t), \quad (25)$$

решим в виде

$$\varphi(\omega)L(i\partial_\omega)\varphi(\omega) = f(\omega), \quad (26)$$

то есть можем свести интегральное уравнение к дифференциальному.

**Лаплас.** Рассмотрим уравнение вида

$$\int_0^t ds \varphi(t-s)L(s)\varphi(s) = f(t),$$

решение которого также находится в виде

$$\varphi(p)L(-\partial_p)\varphi(p) = f(p).$$

**Периодический случай.** Аналогично линейному случаю рассмотрим

$$\int_{-\pi}^{+\pi} ds \varphi(t-s)\varphi(s) = f(t),$$

периодичное с  $T = 2\pi$  и  $\omega = 1$ . Тогда решение находится в виде

$$\varphi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\pm) \sqrt{\frac{f_n}{2\pi}} e^{-int}.$$

**Факторизуемое ядро.** Для факторизуемого ядра уравнение примет вид

$$\varphi(t) = x(t) \int_a^b ds \varphi^n(s)y(s) + f(t),$$

решение которого можем найти в виде

$$\varphi(t) = \alpha x(t) + f(t), \quad \alpha: \alpha = \int_a^b dt y(t) (\alpha x(t) + f(t))^n,$$

где  $\alpha$  задан неявно алгебраическим уравнением.

**Факторизуемое ядро'.** Для уравнения на интервале  $[0, t]$  уравнение вида

$$\varphi(t) = f(t) + x(t) \int_0^t ds y(s)\varphi^n(s),$$

может быть сведено к дифференциальному уравнению по  $z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t)/x(t)$ :

$$z'(t) = y(t)x^n(t)z^n(t) + \frac{d}{dt} \left( \frac{f(t)}{x(t)} \right), \quad z(0) = \frac{f(0)}{x(0)}.$$

## Сингулярные интегральные уравнения

**Сингулярные интегральные уравнения.** Основой решения станет *формула Соболюцкого*:

$$\text{v. p.} \int_a^b \frac{f(x)}{x-x_0} dx = \pm i\pi f(x_0) + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^b \frac{f(x)}{x-x_0 \pm i\varepsilon} dx. \quad (27)$$

Полезно ввести преобразование Гильберта  $\hat{H}$ :

$$\hat{H}\varphi(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y) dy}{2\pi} \left( \frac{1}{y-x+i\varepsilon} + \frac{1}{y-x-i\varepsilon} \right),$$

для которого верно, что  $\hat{H}^2 = -\mathbb{1}$ .

Тогда *простейшее сингулярное уравнение* вида

$$\pi \hat{H}\varphi(x) + \lambda \varphi(x) = f(x) \quad (28)$$

будет иметь решение относительно  $\varphi(x)$ :

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \pi^2} f(x) - \frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} \hat{H}[f](x) = \frac{1}{\lambda + i\pi} f(x) - \frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{f(y)}{y-x+i\varepsilon}. \quad (29)$$

**Сингулярные интегральные уравнения с полиномиальными коэффициентами.** Рассмотрим уравнение вида

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy = x^2 \varphi(x) + f(x).$$

Применяя оператор  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-z+i\varepsilon}$ , приходим к уравнению

$$-\pi i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-z+i\varepsilon} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2 \varphi(y)}{y-z+i\varepsilon} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y-z+i\varepsilon} dy.$$

Здесь можем провести следующие рассуждения:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(y-z+i\varepsilon+z-i\varepsilon)}{y-z+i\varepsilon} \varphi(y) dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(y) dy + z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y-z+z}{y-z+i\varepsilon} \varphi(y) dy = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(y) dy}_{C_1} + z \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) dy}_{C_2} + z^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-z+i\varepsilon} dy, \end{aligned}$$

а значит исходное уравнение переписывается в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-z+i\varepsilon} dy = -\frac{-}{z^2+i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y-z+i\varepsilon} dy - \frac{C_1+C_2z}{z^2+i\pi},$$

решение которого мы уже знаем:

$$\varphi(x) = -\frac{C_1+C_2x}{x^4+\pi^2} - \frac{f(x)}{x^2-i\pi} - \frac{1}{x^4+\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y-z+i\varepsilon} dy.$$

**Сингулярные интегральные уравнения на отрезке.** Рассмотрим уравнение на конечном отрезке

$$\text{v.p.} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(y)}{y-x} dy = f(x).$$

Решение можем найти при условии на  $f$ :  $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$ , тогда

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi i} \left( f(x) + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(y) dy}{\sqrt{1-y^2}(y-x+i\varepsilon)} \right).$$

# 1 Неделя I

## № 4.1.6

Найдём решение волнового уравнения (1) для точечного гармонического источника

$$\chi = \cos(\omega t) \delta(\mathbf{r}).$$

Подставляя  $\xi$  в (2), находим

$$u(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi c^2} \int \frac{d^3 r_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \cos(\omega t - \omega |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c) \delta(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\cos(\omega(t - \frac{r}{c}))}{r}.$$

## № 4.1.7

Найдём значение функции Грина при  $r = 0$  для оператора  $\partial_t^2 + \nabla^4$ . Для начала перейдём к Фурье образу

$$\tilde{G}(t, \mathbf{q}) = \int d^3 \mathbf{x} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} G(t, \mathbf{x}), \quad \Rightarrow \quad (\partial_t^2 + q^4) \tilde{G} = \delta(t).$$

Решение этого уравнение известно<sup>1</sup>:

$$\tilde{G}(t) = \theta(t) \frac{1}{q^2} \sin(q^2 t).$$

Осталось найти

$$G(t, 0) = \theta(t) \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{\sin(q^2 t)}{q^2} = \frac{\theta(t)}{(2\pi)^3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \sin(q^2 t) = \frac{1}{8\sqrt{2}\pi^{5/2}} \cdot \frac{\theta(t)}{\sqrt{t}}.$$

## № 4.2.2

Найдём решение одномерного диффузионного уравнения для

$$(\partial_t - \partial_x^2) u = 0, \quad u_0(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right).$$

**Точное решение.** Воспользуемся (4), тогда

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t} - \frac{y^2}{2l^2}\right) dy.$$

Выделяя полный квадрат, находим, что

$$\frac{(x-y)^2}{4t} + \frac{y^2}{2l^2} = \left(\sqrt{\frac{1}{2l^2} + \frac{1}{4t}} y - \frac{x}{4t\sqrt{\frac{1}{2l^2} + \frac{1}{4t}}}\right)^2 + \frac{x^2}{2l^2 + 4t},$$

а значит

$$u(t, x) = \frac{l}{\sqrt{l^2 + 2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2 + 4t}\right).$$

**Асимптотика.** Так как функция  $u_0$  симметрична, то через (5) находим

$$A = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx = l\sqrt{2\pi}, \quad \Rightarrow \quad u(t, x) \approx \frac{l}{\sqrt{2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right),$$

что является асимптотикой точного решения при  $t \gg l^2$ .

## № 4.2.3

Найдём асимптотическое поведение решение одномерного диффузного уравнения (3) для различных начальных условий.

1. Рассмотрим

$$u_0(x) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right).$$

В силу нечетности функции, через (6), находим

$$B = 2\pi \int_{\mathbb{R}} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2l^2}\right) = -4\pi l^2 \partial_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2/2l^2} dx = -4\pi l^2 \sqrt{2\pi} l \partial_\alpha \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = l^3 (2\pi)^{3/2},$$

<sup>1</sup>Конспект, (1.11).

а значит искомая асимптотика

$$u(t, x) \approx \left( \frac{l}{\sqrt{2}} \right)^3 \frac{x e^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}.$$

### 2. Рассмотрим

$$u_0(x) = \exp\left(-\frac{|x|}{l}\right).$$

В силу четности функции, через (5), находим

$$A = 2 \int_0^\infty e^{-x/l} dx = 2l.$$

Тогда искомая асимптотика

$$u(t, x) \approx \frac{l}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{t}}.$$

### 3. Рассмотрим

$$u_0(x) = x \exp\left(-\frac{|x|}{l}\right).$$

В силу нечетности функции, через (6), находим

$$B = 4\pi \int_0^\infty x^2 \exp\left(-\frac{|x|}{l}\right) dx = 4\pi l^2 \partial_\alpha^2 \int_0^\infty e^{-\alpha x/l} dx = 2\pi l^2 \partial_\alpha^2 \left(\frac{l}{\alpha}\right) = 8\pi l^3,$$

а значит

$$u(t, x) \approx \frac{l^3}{\sqrt{\pi}} \frac{x e^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}.$$

### 4. Рассмотрим

$$u_0(x) = \frac{1}{x^2 + l^2}.$$

В силу четности функции, через (5), находим

$$A = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2 + l^2} dx = 2\pi i \frac{1}{2il} = \frac{\pi}{l},$$

тогда искомая асимптотика

$$u(t, x) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2l} \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{t}}.$$

### 5. Рассмотрим

$$u_0(x) = \frac{x}{(x^2 + l^2)^2}.$$

В силу четности функции, через (6), находим

$$B = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{(x^2 + l^2)^2} dx = 4\pi i \lim_{x \rightarrow il} \left( \frac{x^2}{(x + il)^2} \right)' = \frac{\pi^2}{l}.$$

Тогда искомая асимптотика

$$u(t, x) = \frac{\sqrt{\pi}}{8l} \frac{x e^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}.$$

## 2 Неделя II

### №1. 6.2.2

Решим уравнение (7) для  $f(\dot{x}) = -\varepsilon \dot{x}^3$ . Подставляя  $f(t)$  в (9) и (10), находим уравнения на амплитуду и фазу:

$$\dot{A} = -\frac{3}{8}\varepsilon A^3 \omega_0^2, \quad \dot{\varphi} = 0,$$

откуда сразу находим  $\varphi(t) = \varphi_0$  и

$$\frac{dA}{A^3} = \left( -\frac{3}{8}\varepsilon \omega_0^2 \right) dt, \quad \Rightarrow \quad A = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \frac{3}{4}A_0 \varepsilon \omega_0^2 t}},$$



а значит искомое решение

$$x(t) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + \frac{3}{4}A_0\varepsilon t}} \sin(t + \varphi_0).$$

### №2. 6.2.6

Решим уравнение (7) для  $f(t) = \cos t$ . Знаем, что точное решение

$$x(t) = A \sin(t + \varphi_0) + \frac{\varepsilon t}{2} \sin(t).$$

Однако решим методом медленных амплитуд.

Подставляя  $f(t)$  в (9) и (10), находим уравнения на амплитуду и фазу:

$$\begin{cases} \dot{A}(t) = \frac{\varepsilon}{2} \cos(\varphi(t)), \\ \dot{\varphi}(t) = \frac{-\varepsilon}{2A(t)} \sin(\varphi(t)), \end{cases}$$

которые приводят к двум случаям.

**Нулевая фаза.** При  $\varphi(0) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$  видим, что  $\dot{\varphi} = 0$ , а значит  $\varphi(t) = \text{const}$ . Тогда уравнение на амплитуду легко интегрируется, и находим (считая  $A(0) \stackrel{\text{def}}{=} A_0$ )

$$A(t) = A_0 + \frac{\varepsilon}{2} \cos(\varphi_0)t,$$

что прекрасно описывает резонанс:

$$x(t) = \left( A_0 + \frac{\varepsilon}{2} \cos(\varphi_0)t \right) \sin(t), \quad \varphi_0 = 0.$$

**Ненулевая фаза.** Разделим два уравнения друг на друга:

$$\frac{dA}{d\varphi} = -\frac{A}{\operatorname{tg} \varphi}, \quad \Rightarrow \quad \log A = -\log \sin \varphi + \tilde{c}, \quad \Rightarrow \quad A = A_0 \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi},$$

таким образом нашли удобный первый интеграл системы.

Подставляя в выражение для  $\dot{\varphi}$  находим

$$\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon}{2} \sin^2(\varphi), \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} = -\frac{\varepsilon}{2} dt, \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctg \left( \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_0} + \frac{\varepsilon t}{2}} \right).$$

Теперь нужно подставить  $\varphi(t)$  в выражение для  $\dot{A}$  и разложить по  $\varepsilon$ :

$$\cos \arctg x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \Rightarrow \quad \dot{A} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{t\varepsilon}{2} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\varphi_0)} \right)^2}} = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} + o(\varepsilon),$$

а значит искомая амплитуда

$$A(t) = A_0 + \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} \frac{\varepsilon}{2} t.$$

Итого находим (при  $\varphi_0 \neq \pi/2$ )

$$x(t) = \left( A_0 + \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} \frac{\varepsilon t}{2} \right) \sin \left( t + \arctg \left( \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_0} + \frac{\varepsilon t}{2}} \right) \right).$$

### №3. 6.2.8

Решим уравнение (7) для  $f(t) = \kappa \cos t + (1 - x^2)\dot{x}$ . Подставляя  $f(t)$  в (9) и (10), находим уравнения на амплитуду и фазу:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\varepsilon \left( \kappa \cos \varphi + A \left( 1 - \frac{A^2}{4} \right) \right), \quad \dot{\varphi} = -\frac{1}{2A}\varepsilon \kappa \sin(\varphi).$$

Считая  $\kappa$  тоже малым параметром, решаем, аналогично семинару, уравнение с разделяющимися переменными:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\varepsilon A \left( 1 - \frac{A^2}{4} \right), \quad \Rightarrow \quad A(t) = 2 \frac{A_0}{\sqrt{4e^{-\varepsilon t} + A_0^2(1 - e^{-\varepsilon t})}},$$

что похоже на правду, так как всё также

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 2,$$

то есть сохраняется предельный цикл на плоскости  $\{x, \dot{x}\}$ .

Для фазы можем найти решение при  $t \rightarrow \infty$ :

$$\dot{\varphi} = -\frac{\varepsilon\kappa}{2} \sin(\varphi) \sqrt{\frac{4 + A_0^2(e^{\varepsilon t} - 1)}{4A_0^2 e^{\varepsilon t}}} \approx -\frac{\varepsilon\kappa}{4} \sin(\varphi), \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\varphi(t)\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\varphi_0\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon\kappa}{4}t\right).$$

Возможно даже корректным будет выражение

$$\varphi(t) = 2 \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\varphi_0\right) \exp\left(-\frac{\varepsilon\kappa}{4}t\right)\right),$$

получается малая накачка определяет асимптотику на фазы на бесконечности.

Сама асимптотика будет иметь вид

$$\varphi(t \rightarrow \infty) = 2 \operatorname{arcctg}\left(e^{\frac{\varepsilon\kappa}{4}t} \operatorname{ctg}\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right).$$

### 3 Неделя III

#### №1. 7.1.2

Найдём решение уравнения Хопфа с начальными условиями  $u = 0$  при  $x < 0$  и  $u = -c_1x + c_2x^2$  при  $x > 0$ . Для начала считаем

$$\begin{cases} c(x_0) = -c_1x_0 + c_2x_0^2 \\ x(t) = x_0(c) + ct \end{cases} \Rightarrow x_0(c) = \frac{c_1 \pm \sqrt{c_1^2 + 4c_2c}}{2c_2},$$

где выбор знака не принципиален. Подставляя  $x_0$  в уравнение на  $x(t)$ , выражаем  $c$ :

$$c = \frac{c_1}{2c_2^3t^2} \left( \pm \sqrt{c_1(c_1(c_2t - 1)^2 + 4c_2^2tx) - c_1c_2t + c_1 + 2c_2^2tx} \right),$$

где  $+$  не удовлетворяет  $c(t = 0, x) = u_0(x)$ , а значит

$$u(x, t) = \frac{c_1}{2c_2^3t^2} \left( -\sqrt{c_1(c_1(c_2t - 1)^2 + 4c_2^2tx) - c_1c_2t + c_1 + 2c_2^2tx} \right).$$

Стоит заметить, что до точки  $x^* = c_1/c_2$  верно  $u'_0(x) < 0$ , а значит решение существует только до некоторого  $t^*$ .

#### №2. 7.1.3

Теперь решим уравнение Хопфа с накачкой:

$$\partial_t u + u \partial_x u = f, \quad f = \alpha^2 x, \quad u_0(x) = 0,$$

где сделали замену  $\varphi = \alpha^2$ . Сначала находим

$$\ddot{x} - \alpha^2 x = 0, \quad \Rightarrow \quad x = x_0 \operatorname{ch}(\alpha t) + \frac{\dot{x}_0}{\alpha} \operatorname{sh}(\alpha t).$$

Находим, что  $\dot{x}_0 = u_0(x_0) = 0$ , а значит

$$\dot{x} = \alpha x_0 \operatorname{sh}(\alpha t) = \alpha x \operatorname{th}(\alpha t).$$

При  $\varphi = -\alpha^2$  уравнение изменится на  $\dot{x} = -\alpha x \operatorname{tg}(\alpha t)$ . Итого, окончательный ответ

$$u(t, x) = \sqrt{|\varphi|} \operatorname{sign}(\varphi) x \cdot \begin{cases} \operatorname{th}(\sqrt{|\varphi|} t), & \varphi > 0; \\ \tan(\sqrt{|\varphi|} t), & \varphi < 0. \end{cases}$$

#### №3. 7.1.4

Аналогично решаем уравнение Хопфа с накачкой:

$$\partial_t u + u \partial_x u = f, \quad f = f_0, \quad u_0(x) = x.$$

Сначала находим

$$\ddot{x} = f_0, \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2}f_0 t^2 + \dot{x}_0 t + x_0,$$

где  $\dot{x}_0 = u_0(x_0) = x_0$ , а значит

$$x_0 = \frac{x - f_0 t^2/2}{t + 1}, \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = f_0 t + \dot{x}_0 = \frac{\frac{1}{2}f_0 t^2 + f_0 t + x}{t + 1},$$

таким образом искомый ответ

$$u(t, x) = \frac{\frac{1}{2}f_0t^2 + f_0t + x}{t + 1}.$$

#### №4. 7.1.5

Найдём решение уравнения Бюргерса с начальным условием

$$\psi_0 = \text{ch}(ax) + B \text{ch}(bx),$$

где  $a < b$  и  $B \ll 1$ .

Для начала находим  $\psi$ , как решение диффузного уравнения:

$$\psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) \psi_0(y) dy = e^{a^2t} \text{ch}(ax) + Be^{b^2t} \text{ch}(bx).$$

Теперь находим  $u$

$$u = -2\partial_x \ln \psi = -\frac{2\left(ae^{a^2t} \text{sh}(ax) + bBe^{b^2t} \text{sh}(bx)\right)}{e^{a^2t} \text{ch}(ax) + Be^{b^2t} \text{ch}(bx)}.$$

Заметим, что при  $x \rightarrow -0$  и  $t \rightarrow \infty$ , система будет определяться большим шоком:

$$\begin{aligned} u(x, t) &\approx -2b^2x, & t \rightarrow \infty, x \rightarrow 0; \\ u(x, t) &\approx -2b, & x \rightarrow 0, t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

## 4 Неделя V

#### № 8.1.5

Найдём локализованное автомодельное решение уравнения

$$\partial_t u = \partial_x(u^{-1} \partial_x u) + \partial_x u.$$

Подстановкой (11), получаем систему

$$-a - 1 = -b - a = -2b, \quad \Rightarrow \quad a = b = 1, \quad \Rightarrow \quad u(t, x) = \frac{1}{t} f\left(\frac{r}{t}\right).$$

Условие локализованности можем записать в виде

$$\int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx = \text{const}, \quad \Rightarrow \quad a = b,$$

так что можем говорить о существовании локализованного автомодельного решения.

Подстановка предполагаемого вида  $u$  в исходное уравнение даёт выражение, вида

$$f(\xi)^2 + (\xi + 1)f(\xi)f'(\xi) + f''(\xi) = \frac{f'(\xi)^2}{f(\xi)},$$

где заменили  $\frac{r}{t} \stackrel{\text{def}}{=} \xi$ .

Вроде бы неплохой выглядит идея посмотреть на  $f(x) = 1/g(x)$ , тогда

$$g(x)g''(x) - g'(x)^2 + xg'(x) + g'(x) - g(x) = 0.$$

Если внимательно на уравнение посмотреть, то можно предположить

$$g(x) = e^{\alpha x} + ax + b, \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{\alpha}, \quad b = -\frac{1 + \alpha}{\alpha},$$

но это не выглядит как что-то осмысленное.

#### № 9.1.2

На интервале  $(0, \infty)$  найдём резольвенту ядра  $K(t, s) = \exp(t - 2s)$ . Пользуясь (13), находим

$$\hat{K}^2 = \int_0^\infty K(t, p_1) K(p_1, s) dp_1 = e^{t-2s} \int_0^\infty e^{-p_1} dp_1 = e^{t-2s}, \quad \Rightarrow \quad R(t, s) = e^{t-2s} + \lambda e^{t-2s} + \dots = \frac{e^{t-2s}}{1 - \lambda},$$

что вполне соответствует факторизуемому ядру.

**№ 9.1.4**

Найдём решение (12) для  $K = \exp(-t^2 - s^2)$  и  $g(t) = t^2$ . Для начала найдём резольвенту, как

$$\hat{R} = \hat{K} + \lambda \hat{K}^2 + \dots = K(t, s) + \lambda K(t, s) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2p_1^2} dp_1 + \dots = \frac{K(t, s)}{1 - \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}}}.$$

Тогда  $f$  можем найти в виде

$$f(t) = g(t) + \lambda \hat{R} g(t) = t^2 + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2-s^2}}{1 - \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}}} s^2 ds = t^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \lambda} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{2}},$$

что и является искомым решением.

**№ 9.1.7**

Найдём решение (12) для  $K = (1 + ts)e^{-2t-s}$  и  $g(t) = e^{t/2}$ . Для начала найдём резольвенту:

$$\int_0^{\infty} K(t, p_1) K(p_1, s) dp_1 = \sum_i K_i(t, s) \int_0^{\infty} K_i(p_1, p_1) dp_1 = \alpha e^{-2t-s} + \beta ts e^{-2t-s},$$

где  $K(t, s) = e^{-2t}e^{-s} + (te^{-2t})(se^{-s})$  – факторизуемо, и коэффициенты

$$\alpha = \int_0^{\infty} e^{-3p_1} dp_1 = \frac{1}{3}, \quad \beta = \int_0^{\infty} p_1^2 e^{-3p_1} dp_1 = \frac{2}{27}.$$

Аналогично последующие слагаемые

$$\hat{K}^3 = \alpha^2 e^{-2t-s} + \beta^2 ts e^{-2t-s}.$$

Суммируя, находим

$$R(t, s) = e^{-2t-s} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{3}\lambda} + \frac{ts}{1 - \frac{2}{27}\lambda} \right).$$

Осталось найти  $f$  в виде

$$f(t) = e^{t/2} + \int_0^{\infty} R(t, s) g(s) ds = e^{t/2} + 6\lambda e^{-2t} \left( \frac{1}{3 - \lambda} + \frac{18t}{27 - 2\lambda} \right).$$

**№ 9.1.6**

Найдём решение (12) для  $K = (1 + ts)e^{-2t-s}$  и  $g(t) = e^{t/2}$ . Для начала найдём резольвенту, аналогично двум предыдущим номерам

$$R(t, s) = \frac{1}{1 - \lambda} + \frac{t^2 s^2}{1 - \frac{1}{5}\lambda}.$$

Теперь можем найти  $f(t)$ :

$$f(t) = g(t) + \lambda \int_0^1 R(t, s) ds = t^2 + \lambda \left( \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \lambda} + \frac{t^2}{5 - \lambda} \right) = \frac{t^2}{1 - \frac{1}{5}\lambda} + \frac{\lambda/3}{1 - \lambda},$$

где уже добавка не затухает со временем, в отличие от предыдущих задач.