# Справочные материалы к письменному экзамену «Уравнения математической физики»

**Автор заметок**: Хоружий Кирилл

**От**: *29 мая 2022 г.*

## Содержание

**1 Эволюционные уравнения** 2

**2 Статические линейные поля** 2
Задача Штурма-Лиувилля 2
Метод Фурье в задаче Штурма-Лиувилля 3
Уравнения Пуассона и Лапласа 4
Двумерные гармонические функции 4

**3 Специальные функции** 4
$\boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{B}$-функции 4
Функция Эйри 5
Функции Бесселя 6
Ортогональные полиномы 6

**4 Динамические линейные поля** 7
Волновое уравнение 7
Уравнение теплопроводности 7

**5 Интегральные уравнения** 8
Линейные интегральные уравнения 8
Нелинейные интегральные уравнения 9
Сингулярные интегральные уравнения 10

# 1 Эволюционные уравнения

**Функция Грина**. Для уравнений вида $\hat{L}x = \varphi$, бывает удобно найти $G$, как решение уравнения $\hat{L}G = \delta$:

$$\hat{L}\, x(t) = \varphi(t), \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-s)\varphi(s)\, ds, \qquad \hat{L}G = \delta(t), \tag{1.1}$$

если $\hat{L}$ – линейный оператор. И, если хочется добавить начальные условия, то для $\hat{L}$ второго порядка будет

$$x(t) = \dot{x}(0)G(t) + x(0)\dot{G}(t) + \int_0^t G(t-s)\varphi(s)\, ds.$$

Для уравнений первого порядка $\hat{L} = \partial_t + \gamma$:

$$\hat{L} = \partial_t + \gamma, \qquad \Rightarrow \qquad G(t) = \theta(t)\exp\left(-\gamma t\right). \tag{1.2}$$

Для осциллятора $\hat{L} = \partial_t^2 + \omega^2$, тогда

$$\hat{L} = \partial_t^2 + \omega^2, \qquad \Rightarrow \qquad G(t) = \theta(t)\frac{\sin(\omega t)}{\omega}. \tag{1.3}$$

В общем случае подстановка причинной функции Грина $G(t) = \theta(t)g(t)$ для $\hat{L}$: $L(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ приводит к условиям

$$\partial_t^{n-1} g(0) = 1, \qquad \partial_t^m g(0) = 0, \;\; m = 0, \ldots, n-2,$$

который позволяют методом неопределенных коэффициентов найти $G$ из уравнения $\hat{L}G(t) = \delta(t)$. Проявляем аккуратность при наличии кратных корней у $L(z) = 0$, когда возникают секулярные члены. Нужен пример.

**Матричное уравнение**. Решение линейного уравнения для векторной величины $\boldsymbol{y}$

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} + \hat{\Gamma}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\chi},$$

может быть найдено, через функцию Грина, вида

$$\hat{G}(t) = \theta(t)\exp\left(-\hat{\Gamma}t\right), \qquad \boldsymbol{y}(t) = \int_{-\infty}^{t} \hat{G}(t-s)\boldsymbol{\chi}(s)\, ds. \tag{1.4}$$

Удобно $\hat{\Gamma}$ привести к ЖНФ, а потом вспомнить, что матричная экспонента от жордановой клетки $\hat{J}$ имеет вид

$$\exp\left(-\hat{J}t\right) = e^{-\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Функция Грина через преобразование Лапласа**. Преобразование Лапласа функциии $\Phi(t)$ определяется:

$$\tilde{\Phi}(p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt)\Phi(t)\, dt, \qquad \Phi(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i}\exp(pt)\tilde{\Phi}(p),$$

где далее $c$ выбираем правее всех особенностей для причинности.

Решение уравнения $L(\partial_t)G(t) = \delta(t)$ может быть найдено, как

$$G(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i}\exp(pt)\tilde{G}(p), \qquad \tilde{G}(p) = \frac{1}{L(p)}, \qquad \Rightarrow \qquad G(t) = \sum_i \operatorname{res}_i \frac{\exp(pt)}{L(p)}, \tag{1.5}$$

где суммирование идёт по полюсам $1/L(p)$.

*Кстати.* Бывает удобно сделать функции маленькими

$$\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \tilde{f}(p)e^{pt}\frac{dp}{2\pi i} = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\omega} \frac{\tilde{f}(p)}{p^n}e^{pt}\frac{dp}{2\pi i}.$$

# 2 Статические линейные поля

## Задача Штурма-Лиувилля

**Постановка задачи**. Задача Штурма-Лиувилля:

$$\hat{L} = \partial_x^2 + Q(x)\partial_x + U(x), \qquad \hat{L}f(x) = \varphi(x), \qquad \begin{cases} \alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = 0 \\ \alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где[1] $|\alpha_1| + |\beta_2| \neq 0$ и $|\alpha_2| + |\beta_2| \neq 0$.

[1] Часто можно встретить нулевые граничные условия: $f(a) = f(b) = 0$.

**Граничные условия**. С учетом того, что функция Грина $G$ наследует граничные условия:

$$\alpha_1 G(a,y) + \beta_1 G'_x(a,y) = 0,$$
$$\alpha_2 G(b,y) + \beta_2 G'_x(b,y) = 0.$$

Запищем уравнение на $G(x,y)$:

$$\hat{L}G(x,y) = \delta(x-y).$$

Решение этого уравнение можем найти решая две системы на $u(x)$ при $x<y$ и $v(x)$ при $x>y$:

$$\begin{cases} \hat{L}u(x) = 0 \\ \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{L}v = 0 \\ \alpha_2 v(b) + \beta_2 v'(b) = 0 \end{cases}$$

Теперь можем выписать ответ

$$G(x,y) = \frac{1}{W(y)} \begin{cases} v(y)u(x), & x<y, \\ v(x)u(y), & x>y, \end{cases} \qquad W[u,v](y) = \frac{v'(y)u(y) - v(y)u'(y)}{u(y)}. \tag{2.2}$$

Который существует и единственнен для $W \neq 0$. Для $W = \mathrm{const}$ $G(x,y) = G(y,x)$, а значит $\hat{L}^{-1}$ – симметричный самосопряженный оператор, и у $\hat{L}$ есть ОНБ из собственных функций.

*Кстати.* Бывает удобно найти $W(x)$, записав формулу Лиувилля-Остроградского

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} = W(x_0) \exp\left( -\int_{x_0}^{x} Q(z)\, dz \right).$$

**Def 2.1.** *Специальной ФСР* называется решение уравнения $\hat{L}u = 0$ и $\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0$, и аналогичного уравнения по $v(x)$ с граничным условием в $b$, если $W[u,v] \neq 0$, то есть $u$ и $v$ линейной независимы.

## Метод Фурье в задаче Штурма-Лиувилля

Допустим мы в $\mathcal{H}$, соответственно есть $\langle x|y \rangle$. Рассмотрим некоторый достаточно хороший самосопряженный компактный оператор $\hat{L}$, у которого есть ОНБ из собственных функций: $\hat{L}e_n = \lambda_n e_n$.

**Thr 2.2** (thr Гильберта-Шмидта). *Если $\hat{L}$ – компактный*[2] *ССО, то у $A$ есть ОНБ из собственных функций.*

Вернемся к оператору Штурма-Лиувилля, который живет в $\mathcal{H} = L_2[a,b]$:

$$\hat{L} = A(x)\partial_x^2 + B(x)\partial_x + C(x), \qquad \langle f|g \rangle = \int_a^b f\bar{g}\, dx.$$

Для задачи Штурма-Лиувилля $\hat{L}$ симметричен, при $B(x) = A'(x)$.

Тогда можем найти функцию Грина, как решение уравнения $\hat{L}G(x,y) = \delta(x-y)$

$$G(x,y) = \sum_n g_n(y) e_n(x), \qquad \delta(x-y) = \sum_n \delta_n(y) e_n(x).$$

Находим коэффициенты Фурье:

$$\delta_n(y) = \frac{\bar{e}_n(y)}{\langle e_n|e_n \rangle}, \qquad \Rightarrow \qquad g_n(y) = \frac{1}{\lambda_n} \frac{\bar{e}_n(y)}{\langle e_n|e_n \rangle}. \tag{2.3}$$

Проблема возникает при $\lambda_n = 0$.

Наличие у оператора собственного числа $\lambda_n = 0$ называется *нулевой модой*. Рассмотрим оператор:

$$\hat{L} = \partial_x^2,$$

для которого $e_n(x) = e^{inx}$, где $\langle e_n|e_n \rangle = 2\pi$, где $e_0 = 1$ и $\lambda_0 = 0$. Пусть тогда

$$\delta(x) = \sum \frac{\bar{e}_n(0) e_n(x)}{\langle e_n|e_n \rangle} = \sum \frac{e^{inx}}{2\pi}, \qquad G(x) = \sum g_n e_n(x).$$

но для $\hat{L}G = \delta(x)$ оказывается нет решений (справа $e_0$ есть, а слева нет).

В общем, проблема уйдёт, если рассмотрим уравнение, вида

$$\hat{L}G(x) = \delta(x) - e_0(x) = \delta(x) - \frac{1}{2\pi},$$

то есть справа единичный оператор только на образе $\operatorname{Im}\hat{L}$. Если в источнике есть нулевая мода, то уравнение не имеет решений.

[2] $\mathcal{D}(A)$ – компакт в гильбертовом пространстве.

### Уравнения Пуассона и Лапласа

Научимся решать *уравнение Пуассона* $\nabla^2 f = \varphi$, которое при $\varphi = 0$ переходит в *уравнению Лапласа* $\nabla^2 f = 0$. Функции, удовлетворяющие уравнение Лапласа называют *гармоническими*, которые существуют только на некоторой ограниченной области. Иногда бывает проще решать *уравнение Дебая* $(\nabla^2 - \varkappa^2) f = \varphi$.

**Функция Грина**. Решение как обычно можем искать в виде

$$f(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\varphi(\boldsymbol{r})\, d^3 r.$$

В зависимости от размерности пространства $n$, функция Грина $G_n$ будет равна

$$G_2(r) = \frac{\ln r}{2\pi}, \qquad G_3(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi r}, \qquad G_{n>2}(x) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \frac{1}{r^{n-2}}, \tag{2.4}$$

где $S_n$ равно площади $n-1$ мерной единичной сферы.

*Кстати.* Для уравнения Дебая в $\mathbb{R}^3$ функция Грина с $\hat{L} = \nabla^2 - \varkappa^2$ будет равна

$$G(\boldsymbol{r}) = -\frac{e^{-\varkappa r}}{4\pi r}.$$

Для сферически симметричного потенциала $\varphi(\boldsymbol{r}) \equiv \varphi(r)$, решение уравнения Пуассона упростится до

$$f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r}\int_0^r \varphi(\rho)\rho^2\, d\rho + \int_r^\infty \varphi(\rho)\rho\, d\rho.$$

(проверить)

### Двумерные гармонические функции

Отдельно рассмотрим случай $n = 2$. Часто задача формулируется в виде *задачи Дирихле*:

$$\nabla^2 f = 0, \qquad f|_{\partial D} = f_0(\boldsymbol{r}),$$

то есть функция задана на границе некоторой области. Будем искать решение в виде

$$f(z) = u(z) + iv(z), \qquad \nabla^2 u = \nabla^2 v = 0.$$

Если знаем комплексную функцию $f(z)$ такую, что $\operatorname{Re} f|_{\partial D} = f_0$, тогда $\operatorname{Re} f(z)$ решает задачу Дирихле. Далее конформным преобразованием переводим любую область $D$ в круг/полуплоскость, где задача Дирихле решается, а дальше отображаем назад.

Рассмотрим полуплоскость $D = \{(x, y) \mid y > 0\}$, с заданным значением $f(x, 0) = f_0(x)$. Тогда решением будет

$$f(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{\pi}\, \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} f_0(\xi). \tag{2.5}$$

Для круга радиуса $R$ с заданным граничным условием, вида $f(R\cos t,\, R\sin t) = f_0(t)$ решением будет

$$f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2} f_0(t). \tag{2.6}$$

# 3 Специальные функции

## $\Gamma, \psi, B$-функции

**Гамма-функция**. Найдем некоторые интересные свойства:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\, dt \overset{t \to \tau x}{=} x^{z+1}\int_0^\infty \tau^z e^{-\tau x}\, d\tau, \qquad \frac{1}{x^z} = \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty \tau^{z-1} e^{-\tau x}\, d\tau.$$

Существует аналитическое продолжение:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{1 - e^{2\pi i z}} \int_C t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

Видим, что у $\Gamma(z)$ есть особенности $z \in \mathbb{Z}$, где $z \in \mathbb{N}$ – УОТ, и $z \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$ – П1П:

$$\operatorname{res}_{-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}, \tag{3.1}$$

Могут пригодиться следущие выражения для Γ-функции:

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \tfrac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\Gamma(2z), \qquad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

А также *формула Стирлинга*, которую нетрудно получить методом перевада:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\,dt = \int_0^\infty e^{z\ln t - t}\,dt \approx e^{z\ln z - z}\sqrt{2\pi z} = \sqrt{2\pi z}\left(\frac{z}{e}\right)^z. \tag{3.2}$$

**Дигамма-функция**. По определнию дигамма-функция $\psi(z)$:

$$\psi(z) \overset{\text{def}}{=} (\ln\Gamma(z))' = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Заметим, что $\psi(1) = -\gamma$, где $\gamma \approx 0.58$ – постоянная Эйлера-Маскерони. Найдём

$$\psi(z+1) = (\ln z + \ln\Gamma(z)) = \frac{1}{z} + \psi(z), \quad \Rightarrow \quad \psi(N+1) = \frac{1}{N} + \psi(N) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + \psi(1).$$

Также бывает полезно

$$\psi(x+N+1) = \frac{1}{x+N} + \psi(x+N) = \frac{1}{x+N} + \ldots + \frac{1}{x+1} + \psi(x+1).$$

Вспомним, что $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$. Тогда

$$\psi(-z) - \psi(z) = \pi\operatorname{ctg}\pi z.$$

Асимптотика для $\psi(z\to\infty)$:

$$\psi(z\to\infty) = (\ln\Gamma(z))' = \ln z + \frac{1}{2z} + o(1) = \ln z + o(1).$$

**Бета-функция**. Рассмотрим $B$-функцию:

$$B(\alpha,\,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt, \quad \operatorname{Re}\alpha,\beta > 0, \qquad B(\alpha,\,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

которую бывает удобно доставать в интегралах.

## Функция Эйри

**Метод Лапласа**. Рассмотрим дифференцинральное уравнение, вида

$$(a_n z + b_n)f^{(n)} + \ldots + (a_1 z + b_1)f^{(1)} + (a_0 z + b_0)f^{(0)} = 0, \qquad f(z) = \int_C \tilde f(p)e^{pz}\,dp,$$

где $f(p)e^{pz}|_{\partial C}^{\forall z} = 0$. Тогда введем полиномы $A(p)$ и $B(p)$ такие, что

$$-\partial_p\left[A(p)f(p)\right] + B(p)f(p) = 0, \quad A(p) = a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0, \quad B(p) = b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0.$$

Решая, находим образ Лапласа

$$\tilde f(p) = \frac{1}{A(p)}\exp\left(\int_{p_0}^{p}\frac{B(t)}{A(t)}\,dt\right).$$

**Метод перевала**. Действительный метод перевала:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{f(x)}g(x)\,dx = g(x_0)e^{f(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}}.$$

Для стационарной фазы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{if(x)}g(x)\,dx = g(x_0)e^{if(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)}}e^{\pm i\pi/4},$$

где $\pm$ согласован с $\operatorname{sign} f''$. Для комплексного метода перевала

$$I = \int_C e^{f(z)}g(z)\,dz = g(z_0)e^{f(z_0)}e^{i\varphi}\sqrt{\frac{2\pi}{|f''|}}, \quad \varphi = \frac{1}{2}\left(\pm\pi - \arg f''(z_0)\right).$$

**Функция Эйри**. Решаем уравнение, вида

$$\partial_x^2 f - xf = 0, \quad \Rightarrow \quad f(x) = \int_C e^{xt - t^3/3}\,dt.$$

Так приходим к

$$\operatorname{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{xt - t^3/3}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(xu + u^3/3)\,du.$$

В качетсве второго решения выбраится

$$\mathrm{Bi}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[e^{xu-u^3/3} + \sin(xu + u^3/3)\right] du.$$

## Функции Бесселя

Уравнение Бесселя:

$$\partial_z^2 J_m + \frac{1}{z} J_m + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right) J_m = 0,$$

где $J_m(0) \in \mathbb{R}$. Знаем, что

$$e^{iz\sin\varphi} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} J_n(z) e^{in\varphi}, \quad \Rightarrow \quad J_m(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{iz\sin\varphi} e^{-im\varphi}\, d\varphi, \quad \Leftrightarrow \quad J_m(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\varphi - m\varphi)\, d\varphi.$$

Умеем дифференцировать:

$$\frac{dJ_m}{dz} = \frac{J_{m-1}(z)}{2} - \frac{J_{m+1}(z)}{2}, \qquad \frac{m}{z} J_m(z) = \frac{1}{2}\left(J_{m+1}(z) + J_{m-1}(z)\right), \qquad \frac{d}{dz}\left(z^m J_m(z)\right) = J_{m-1}(z) z^m.$$

Откуда сразу находим

$$J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z).$$

Умеем раскладывать в ряд и уходить на бесконечность:

$$J_m(z) = \frac{z^m}{2^m}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k z^{2k}}{4^k k!(m+k)!}, \qquad J_m(z\to\infty) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\cos\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

соответственно с нулями в $\frac{\pi}{2} + \pi m$.

Преобразование Фурье от функции:

$$F[J_m(z)](k) = \int_{-\infty}^{+\infty} J_m(z) e^{-ikz}\, dz = \frac{(-1)^m e^{im\varphi_0} + e^{-im\varphi_0}}{\sqrt{1-k^2}}, \qquad \varphi_0 = \arcsin k.$$

В частности

$$F[J_0](k) = \frac{2}{\sqrt{1-k^2}}\theta(1-k^2), \qquad F[J_1](k) = \frac{2ik}{\sqrt{1-k^2}}\theta(1-k^2).$$

Преобразование Лапласа:

$$\Lambda[J_m](p) = \int_0^\infty e^{-pz} J_m(z)\, dz = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}(p+\sqrt{p^2+1})^m}.$$

Например,

$$\int_0^\infty \frac{J_n(z)}{z^n}\, dz = \frac{1}{(2n-1)!!}.$$

## Ортогональные полиномы

**Полиномы Лежандра**. Дифференциральное уравнение ($a$, $b = -1$, $1$):

$$\sigma(x) = 1 - x^2, \qquad \tau(x) = -2x = \sigma', \qquad \rho = 1, \qquad (1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0.$$

Формула Родрига:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\partial_x^n (1-x^2)^n, \qquad \alpha_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}, \qquad a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.$$

Нормировка:

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}.$$

Рекуррентное соотноешение:

$$A_n = \frac{\|p_n+1\|^2}{\langle p_{n+1}|xp_n\rangle} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{n+1}, \qquad B_n = 0, \qquad C_n = -\frac{n}{n+1},$$

подставляя, приходим к

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n + nP_{n-1}(x) = 0.$$

Производяшая функция:

$$\psi(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)z^n=\frac{1}{\sqrt{z^2-2zx+1}}.$$

Умеем дифференцировать

$$(x^2-1)\frac{dP_n}{dx}=n(xP_n(x)-P_{n-1}(x)).$$

**Полиномы Эрмита**. Дифференциральное уравнение

$$\sigma=1,\qquad \tau=-2x,\qquad \rho(x)=e^{-x^2},\qquad H_n''-2xH_n'+2nH_n=0,\qquad (e^{-x^2}H_n')'=-2ne^{-x^2}H_n.$$

Знаем, что формула Родрига примет вид

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\partial_x^n e^{-x^2},\qquad a_n=2^n,$$

тогда

$$\|H_n\|^2=2^n n!\sqrt{\pi}.$$

Рекуррентное соотношение:

$$H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x).$$

Производящаяя функция:

$$\psi(x,z)=e^{-z^2+2zx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}z^n.$$

# 4 Динамические линейные поля

## Волновое уравнение

**Общий подход**. Найдём функцию Грина для уравнения, вида

$$\big(\partial)t^2+\varpi^2[-i\nabla]\big)\,u=\chi.$$

Решение запишется в виде

$$\big(\partial_t^2+\varpi^2[-i\nabla]\big)\,G=\delta(t)\delta(\boldsymbol{r}),\qquad u(t,\,\boldsymbol{r})=\int dt_1\,d^3r_1\;G(t-t_1,\,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\chi(t_1,\,\boldsymbol{r}_1).$$

Переходя к пространственному Фурье-образу, приходим у уравнению с известной функцией Грина:

$$\big(\partial_t^2+\varpi^2[\boldsymbol{q}]\big)\,\tilde{G}=\delta(t),\qquad\Rightarrow\qquad \tilde{G}(t)=\theta(t)\frac{\sin(\varpi t)}{\varpi}.$$

Тогда через обратное Фурье-преобразование находим

$$G(t,\,\boldsymbol{r})=\theta(t)\int_{\mathbb{R}^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{\sin(\varpi t)}{\varphi}\exp\left(i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}\right)\overset{*}{=}\frac{\theta(t)}{\pi r}\int_0^{\infty}\frac{dq}{2\pi}q\frac{\sin(\varpi[q]t)}{\varpi[q]}\sin(qr),$$

где $\overset{*}{=}$ верно для $\varpi[\boldsymbol{q}]\equiv\varpi[q]$.

Например, для $\varpi[\boldsymbol{q}]=qc$, волновое уравнение с источником:

$$(\partial_t^2-c^2\nabla^2)u(t,\boldsymbol{r})=\chi(t,\boldsymbol{r}),\qquad G(t,r)=\frac{\theta(t)}{4\pi cr}\delta(r-ct).\tag{4.1}$$

а значит выражение для поля:

$$u(t,\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi c^2}\int d^3r_1\;\frac{\chi(t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|/c,\boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|},\tag{4.2}$$

перейти к сферически симметричному случаю.

## Уравнение теплопроводности

Уравнение диффузии:

$$\left(\partial_t-\nabla^2\right)u=0,\tag{4.3}$$

решение которого может быть найдено в виде:

$$u(t,\boldsymbol{x})=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{dy_1\dots dy_d}{(4\pi t)^{d/2}}\exp\left(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2}{4t}\right)u_0(\boldsymbol{y}).\tag{4.4}$$

Асимтотики могут быть найдены в виде

$$u(t,\boldsymbol{x}) \approx \frac{A}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{4t}\right), \qquad A = \int_{\mathbb{R}^d} dy_1 \ldots dy_d \; u_0(\boldsymbol{y}). \tag{4.5}$$

При $A = 0$ асимтотика будет соответствовать

$$u(t,\boldsymbol{x}) \approx \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{x}}{(4\pi t)^{d/2+1}} \exp\left(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{4t}\right), \qquad \bar{B} = 2\pi \int_{\mathbb{R}^d} dy_1 \ldots dy_d \; \boldsymbol{y}\, u_0(\boldsymbol{y}), \tag{4.6}$$

где асимтотики имеют место при $t \gg l^2$, $l$ – масштаб на котором локализовано поле.

**Накачка**. При наличии правой части:

$$(\partial_t - \nabla^2)u = \varphi,$$

можем найти функцию Грина для оператора $\partial_t - \nabla^2$

$$u(t,\boldsymbol{x}) = \int G(t-\tau, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\varphi(t,\boldsymbol{y})\, d\tau\, d^d\boldsymbol{y}, \qquad G(t,\boldsymbol{r}) = \frac{\theta(t)}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right).$$

# 5 Интегральные уравнения

**Уравнение Фредгольма**. Есть уравнение Фредгольма I рода:

$$\int_a^b ds \; K(t,s) f(s) = g(t),$$

и уравнение Фредгольма II рода:

$$f(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)f(s), \qquad \Leftrightarrow \qquad f = g + \lambda \hat{K} f, \tag{5.1}$$

где мы ввели интегральный оператор $\hat{K}f = \int_a^b ds \; K(t,s)f(s)$. Решение можем найти в виде

$$f = \frac{1}{1-\lambda\hat{K}}\, g = \left(\mathbb{1} + \lambda \hat{R}\right) g, \qquad \hat{R} \overset{\text{def}}{=} \hat{K} + \lambda \hat{K}^2 + \ldots$$

В терминах интегрирования резольвента $R(t,s)$ выражается, как

$$R(t,s) = K(t,s) + \lambda \int_a^b dp_1 \; K(t,p_1)K(p_1,s) + \lambda^2 \int_a^b dp_1 \int_a^b dp_2 \; K(t,p_1)K(p_1,p_2)K(p_2,s) + \ldots \tag{5.2}$$

## Линейные интегральные уравнения

**Свертка I**. Рассмотрим уравнение на $\varphi$, вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-y)\varphi(y) = f(x), \tag{5.3}$$

то есть уравнение Фредгольма первого рода с $(a,b) = \mathbb{R}$ и $K(x,y) = K(x-y)$. Решение можем найти через преобразование Фурье

$$\tilde{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx}\, dx, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k) e^{ikx}\, dx,$$

которое переводит свёртку в произведение:

$$\tilde{\varphi}(k) = \frac{\tilde{f}(k)}{\tilde{K}(k)}, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{f}(k)}{\tilde{K}(k)}. \tag{5.4}$$

**Свертка II**. Аналогично для уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} dy \; K(x-y)\varphi(y), \tag{5.5}$$

для которого также

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} dy \; f(y) R(x-y), \qquad R(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{\tilde{K}(k)}{1-\lambda\tilde{K}(k)}. \tag{5.6}$$

**Уравнение Вольтерра I**. Рассмотрим интегральное уранвение Фредгольма I на $(a,b) = (0,t)$:

$$f(t) = \int_0^t ds \; K(t-s)\varphi(s).$$

Здесь хорошо работает преобразование Лапласа

$$f(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt, \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} f(p)e^{pt}\,dp,$$

которое переводит свертку в произведение, а значит можем сразу написать решение

$$\varphi(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \frac{f(p)}{K(p)}e^{pt}\frac{dp}{2\pi i}. \tag{5.7}$$

**Уравнение Вольтерра II**. Аналогично для уравнения Фредгольма II:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^t K(x-y)\varphi(y)\,dy, \tag{5.8}$$

находим решение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^t R(t-s)f(s)\,ds, \qquad R(t) = \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} \frac{dp}{2\pi i}e^{pt}\frac{K(p)}{1-\lambda K(p)}.$$

**Периодическое ядро I**. Рассмотрим $f(t)$ и $K(t)$ периодчиные с $T = b-a$, тогда и $\varphi(t)$ периодично по $T$. Решим уравнение, вида

$$\int_a^b K(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t). \tag{5.9}$$

Раскладывая всё в ряд Фурье (вводя $\omega = \frac{2\pi}{T}$):

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-in\omega t}f_n, \qquad f_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{in\omega t}\,dt.$$

Решение находим в виде суммы

$$\varphi_n = \frac{f_n}{TK_n}, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{f_n}{TK_n}e^{-in\omega t}. \tag{5.10}$$

**Периодическое ядро II**. Аналогично можем найти резольвенту для уравнения Фредгольма второго рода:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_a^b ds\; K(t-s)\varphi(s).$$

Реше $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_a^b ds\; R(t-s)f(s), \qquad R(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{K_n}{1-\lambda TK_n}e^{-in\omega t}. \tag{5.11}$$

**Факторизуемое ядро**. Рассмотрим случай, когда ядро вырожденное: $K(t,s) = \sum_i A_i(t)B_i(s)$. Тогда интегральное уравнение перепишется в виде

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\sum A_i(t)\int_a^b B_i(s)\varphi(s)\,ds.$$

Решение уравнения можем найти в виде

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\sum_i C_iA_i(t), \qquad (\mathbb{1} - \lambda\hat{M})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\Phi}, \qquad \Phi_i = \int_a^b B_i(t)f(t)\,dt, \qquad M_{ij} = \int_a^b B_i(t)A_j(t)\,dt.$$

## Нелинейные интегральные уравнения

**Уравнение типа свёртки**. Рассмотрим уравнение вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t-s)\varphi(s) = f(t). \tag{5.12}$$

Аналогично смотрим на фурье-образ, откуда находим выражение для $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \pm\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{f(\omega)}e^{i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}. \tag{5.13}$$

**Обобщение**. Обобщим происходящее, введя $L(s)$

$$L(s) = \sum_{n=0}^N a_ns^n, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} ds\;\varphi(t-s)L(s)\varphi(s) = f(t), \tag{5.14}$$

решим в виде

$$\varphi(\omega)L(i\partial_\omega)\varphi(\omega) = f(\omega), \tag{5.15}$$

то есть можем свести интегральное уравнение к дифференциальному.

**Лаплас**. Рассмотрим уравнение вида

$$\int_0^t ds\ \varphi(t-s)L(s)\varphi(s) = f(t),$$

решение которого также находится в виде

$$\varphi(p)L(-\partial_p)\varphi(p) = f(p).$$

**Периодический случай**. Аналогично линейному случаю рассмотрим

$$\int_{-\pi}^{+\pi} ds\ \varphi(t-s)\varphi(s) = f(t),$$

периодичное с $T = 2\pi$ и $\omega = 1$. Тогда решение находится в виде

$$\varphi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\pm)\sqrt{\frac{f_n}{2\pi}} e^{-int}.$$

**Факторизуемое ядро**. Для факторизуемого ядра уравнение примет вид

$$\varphi(t) = x(t)\int_a^b ds\ \varphi^n(s)y(s) + f(t),$$

решение которого можем найти в виде

$$\varphi(t) = \alpha x(t) + f(t), \qquad \alpha\colon \alpha = \int_a^b dt\ y(t)\left(\alpha x(t) + f(t)\right)^n,$$

где $\alpha$ задан неявно алгебраическим уравнением.

**Факторизуемое ядро на причинном интервале**. Для уравнения на интервале $[0,t]$ уравнение вида

$$\varphi(t) = f(t) + x(t)\int_0^t ds\ y(s)\varphi^n(s),$$

может быть сведено к дифференциальному уравнению по $z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(t)/x(t)$:

$$z'(t) = y(t)x^n(t)z^n(t) + \frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{x(t)}\right), \qquad z(0) = \frac{f(0)}{x(0)}.$$

## Сингулярные интегральные уравнения

**Сингулярные интегральные уравнения**. Основой решения станет *формула Сохоцкого*:

$$\text{v. p.}\int_a^b \frac{f(x)}{x-x_0}\,dx = \pm i\pi f(x_0) + \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^b \frac{f(x)}{x-x_0\pm i\varepsilon}\,dx. \tag{5.16}$$

Полезно ввести преобразование Гильберта $\hat{H}$:

$$\hat{H}\varphi(x) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)\,dy}{2\pi}\left(\frac{1}{y-x+i\varepsilon} + \frac{1}{y-x-i\varepsilon}\right),$$

для которого верно, что $\hat{H}^2 = -\mathbb{1}$.

Тогда *простейшее сингулярное уравнение* вида

$$\pi\hat{H}\varphi(x) + \lambda\varphi(x) = f(x) \tag{5.17}$$

будет иметь решение относительно $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{\lambda^2+\pi^2}f(x) - \frac{1}{\lambda^2+\pi^2}\hat{H}[f](x) = \frac{1}{\lambda+i\pi}f(x) - \frac{1}{\lambda^2+\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}dy\ \frac{f(y)}{y-x+i\varepsilon}. \tag{5.18}$$

**Сингулярные интегральные уравнения с полиномильными коэффициентами**. Рассмотрим уравнение вида

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(y)}{y-x}\,dy = x^2\varphi(x) + f(x).$$

Применяя оператор $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x-z+i\varepsilon}$, приходим к уравнению

$$-\pi i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(y)}{y-z+i\varepsilon}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^2\varphi(y)}{y-z+i\varepsilon}\,dy + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(y)}{y-z+i\varepsilon}\,dy.$$

Здесь можем провести следующие рассуждения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(y-z+i\varepsilon+z-i\varepsilon)}{y-z+i\varepsilon}\varphi(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(y)\,dy + z\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y-z+z}{y-z+i\varepsilon}\varphi(y)\,dy =$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(y)\,dy}_{C_1} + z\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\,dy}_{C_2} + z^2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-z+i\varepsilon}\,dy,$$

а значит исходное уравнение переписывается в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-z+i\varepsilon}\,dy = -\frac{-}{z^2+i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y-z+i\varepsilon}\,dy - \frac{C_1+C_2z}{z^2+i\pi},$$

решение которого мы уже знаем:

$$\varphi(x) = -\frac{C_1+C_2x}{x^4+\pi^2} - \frac{f(x)}{x^2-i\pi} - \frac{1}{x^4+\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{y-z+i\varepsilon}\,dy.$$

**Сингулярные интегральные уравнения на отрезке**. Рассмотрим уравнение на конечном отрезке

$$\text{v.p.}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(y)}{y-x}\,dy = f(x).$$

Решение можем найти при условии на $f$: $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0$, тогда

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi i}\left(f(x) + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{f(y)\,dy}{\sqrt{1-y^2}(y-x+i\varepsilon)}\right).$$