

ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

Выполнил: Хоружий Кирилл

От: 2 октября 2022 г.

Содержание

I	Вероятностное пространство	2
II	Условные вероятности и формула Байеса	3
III	Случайные величины	3

I Вероятностное пространство

Свойства вероятности

T1. Найдём все события X : $\overline{XA} \cup \overline{X\bar{A}} = B$. Вспоминая $\overline{\cup A} = \cap \bar{A}$ и $\overline{\cap A} = \cup \bar{A}$, получаем

$$XX + (A + \bar{A})X + A\bar{A} = \bar{B}, \quad \Rightarrow \quad X = \bar{B}.$$

T2. Теперь $AX = AB$. Учитывая, что $A\bar{A} = \emptyset$, находим $X = B \cup \bar{A}$.

T3. Покажем, что $P(\bigcup_{k=1}^n A_k) + P(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k) = 1$, действительно:

$$P\left(\bigcup A_k\right) + P\left(\overline{\bigcup A_k}\right) = 1, \quad \Leftarrow \quad P(X) + P(\bar{X}) = P(X \cup \bar{X}) = P(\Omega) = 1.$$

T4. ✗

T5. ✗

T6. Покажем, что $\forall A, B \quad |P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$. По отдельности, т.к. $P(A) \geq P(AB)$ и $P(B) \geq P(AB)$ находим

$$P(AB) - P(A)P(B) \leq P(AB) - P(AB)^2 = P(AB)(1 - P(AB)) \leq \frac{1}{4}.$$

Теперь с другой стороны, вспоминая $P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A)$, находим

$$P(A)P(B) - P(AB) = P(A)P(B) - (P(A) - P(A\bar{B})) - P(A)P(\bar{B}) + P(A)P(\bar{B}) = P(A\bar{B}) - P(A)P(B) \leq \frac{1}{4},$$

в силу уже доказанного неравенства.

T7. ✗

Комбинаторика

T8. ✗

T9. ✗

T10. Найдём вероятность обнаружить всё четыре масти, взяв 6 карт из колоды. Всего карт каждой масти 13. Пусть событие A_i – не вытащили карты i -й масти. Нам нужно найти $p = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 4P(A_i) - 6P(A_i \cap A_j) + 4P(A_i \cap A_j \cap A_k),$$

так как масти эквивалентны и $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0$. Размер $|\Omega| = C_{52}^6$, тогда

$$P(A_i) = \frac{C_{39}^6}{C_{52}^6}, \quad P(A_i \cap A_j) = \frac{C_{26}^6}{C_{52}^6}, \quad P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{C_{13}^6}{C_{52}^6},$$

откуда находим

$$p = 1 - \frac{4C_{39}^6 - 6C_{26}^6 + 4C_{13}^6}{C_{52}^6} \approx 0.43.$$

T11. Пусть A_i – i -е письмо в нужном конверте, $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$. Тогда по формуле включений-исключений

$$P(A) = nP(A_1) - C_n^2 P(A_i A_j) + C_n^3 P(A_i A_j A_k) - \dots,$$

где соответствующие вероятности

$$P(A_i) = \frac{1}{n}, \quad P(A_i A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}, \quad \dots$$

Подставляя, находим

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!}, \quad 1 - P(A) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}.$$

T12. Раз половина людей имеет 50-рублевые купюры, а другая половина 100-рублевые, то можем сопоставить первым открывающие скобки, а вторым закрывающие. Таким образом задача сводится к подсчёту количества правильных скобочных последовательностей. Мощность $|\Omega| = C_{2n}^n$, тогда

$$P = \frac{C_n}{C_{2n}^n} = \frac{1}{n+1},$$

где числа Каталана $C_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$.

Геометрическая вероятность

T13. Пусть интервал движения автобусов $T = 25$ мин, время пути автобуса $t = 2$ мин, и время пути пешехода $\tau = 15$ мин. Выделим интервал от момента, когда первый автобус выехал ($t = 0$), до момента когда доехал второй

автобус ($t = T + t$). Пешеход пересечётся с автобусом только при времени выхода $t_{\pi} \geq T + t - \tau$, а значит

$$P = 1 - \frac{T + t - \tau}{T} = \frac{13}{25} = 0.52.$$

T14. Пусть первая точка $x \in [0, 1]$ – координата первой точки, $y \in [0, 1]$ – координата второй точки (выбираем $y > x$). Стороны треугольника тогда должны быть фиксированы

$$a = x, \quad b = y - x, \quad c = 1 - y, \quad a + b \leq c, \quad a + c \leq b, \quad b + c \leq a,$$

которые задают на вероятностном пространстве треугольничек в $1/8$ от квадрата, и в $1/3$ от вероятностного пространства (в силу выбора $y > x$), таким образом искомая вероятность равна $1/4$.

T15 (задача Дюффона). Считая $l \leq L$, можем написать геометрическую вероятность в виде

$$P = \frac{1}{\pi L} \int_0^\pi \int_0^{l \sin \theta} dx d\theta = \frac{2}{\pi} \frac{l}{L},$$

где l – длина иглы, L – расстояние между полосками.

T16. Аналогично пусть $x \in [0, 1]$ – координата первой точки, $y \in [0, 1]$ – координата второй точки. Вероятность третьей точке быть между ними равна $|x - y|$, тогда

$$P = \int_0^1 dx \int_0^1 dy |x - y| = \int_0^1 dx \left(\int_0^x (x - y) dy + \int_x^1 (y - x) dy \right) = \frac{1}{3},$$

что вполне соответствует интуиции.

II Условные вероятности и формула Байеса

T17. ✗

T18. ✗

T19. ✗

T20. ✗

T21. ✗

T22. Пусть A – потопление корабля, гипотезы H_m – попадание в корабль m торпед, $m = 1, \dots, n$:

$$P(H_m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}.$$

Найдём $P(A|H_m)$. Для $m = 1$ по условию $P(A|H_1) = 0$, для $m \geq 2$ корабль не потопили только если все торпеды в одном отсеке:

$$P(A|H_m) = 1 - k \left(\frac{1}{k} \right)^m = 1 - k^{1-m},$$

тогда полная вероятность потопления

$$P(A) = \sum_{m=2}^n P(H_m) P(A|H_m) = \sum_{m=2}^n C_n^m p^m (1 - p)^{n-m} (1 - k^{1-m}).$$

T23. ✗

III Случайные величины

T24. ✗

T25. ✗

T26. В квадрат брошена точка в (ξ_1, ξ_2) . Найдём функцию распределения и плотность $\eta = \xi_1 + \xi_2$. Обозначив плотность распределения за f_1 и f_2 соответственно, можем найти

$$f_\eta(y) = \int_0^1 f_1(y - x_2) f_2(x_2) dx_2 = \int_{\max(0, y-1)}^{\min(1, y)} dx_2 = \begin{cases} y, & 0 \leq y < 1, \\ 2 - y, & 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

Интегрируя, находим $F_\eta(y)$:

$$F_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} y^2, & 0 \leq y < 1, \\ 2y - \frac{1}{2} y^2 - 1, & 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

T27. Пусть $\xi_1, \xi_2 \in P_\lambda$ – независимые случайные величины. Для суммы $\xi_1 + \xi_2 = \eta$, $x_1 + x_2 = y$ можем найти

$$P(\eta = y) = \sum_{x_1, x_2: x_1 + x_2 = y} P_{\xi_1}(x_1) P_{\xi_2}(x_2) = \sum_{0 \leq x_1 \leq y} \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{x_1! (y - x_1)!} = \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{y!} 2^y.$$

Условное распределение ξ_1 при известной $\eta = \xi_1 + \xi_2$ найдём в виде

$$\frac{P(\xi_1 = x, \eta = y)}{P(y = \eta)} = \frac{P(\xi_1 = x)P(\xi_2 = y - x)}{P(y = \eta)} = \frac{C_y^x}{2^y}.$$

T28. Известно, что случайная величина ξ имеет строго возрастающую непрерывную функцию распределения $F_\xi(x)$. Найдём распределение случайной величины $\eta = F_\xi(\xi)$:

$$F_\eta(x) = P(F(\xi) < x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ P(\xi < F^{-1}(x)), & x \in (0, 1), \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

По определению $P(\xi < F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x$, получается $\eta \in U_{0,1}$.

T29. Пусть $\xi \in N_{0,1}$, найдём функцию распределения $F_{\xi^2}(x)$ и плотность $f_{\xi^2}(x)$. Нас интересуют все такие $x^2 = y$ или $x = \sqrt{y}$, тогда

$$f_\xi(x) dx \xrightarrow{x=\sqrt{y}} \frac{f_\xi(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} dy, \quad \Rightarrow \quad f_{\xi^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}.$$

Теперь по определению находим функцию распределения

$$F_{\xi^2}(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{y}} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\sqrt{y}^2/2} d\sqrt{y} = \text{Erf} \left(\sqrt{\frac{z}{2}} \right).$$

T30. ✗

T31. Можем решать эту задачу в терминах геометрической вероятности, тогда на кубе $[0, 1]^3$ задана система неравенств

$$|x - y| \geq \frac{1}{4}, \quad |z - y| \geq \frac{1}{4}, \quad |x - z| \geq \frac{1}{4},$$

которые формируют в кубе 6 одинаковых пирамидок объёма $1/48$, тогда искомая вероятность равна $1/8$.