Билеты по курсу «Введение в физику конденсированного состояния»

Автор заметок: Хоружий Кирилл

От: *7 декабря 2022 г.*

Содержание

1 Основные понятия и приближения

Модель желе

Рассмотрим модель желе: узлы решетки + электроны в целом электронейтральны. Характерные величины системы:

$$[e^2] = \frac{\text{г}\,\text{см}^3}{\text{с}^2}, \qquad [m] = \text{г}, \qquad [n] = \text{см}^{-3}, \qquad [\hbar] = \frac{\text{г}\,\text{см}^2}{\text{с}}.$$

Из них можем составить две характерные энергии

$$E_\text{C} = e^2 n^{1/3}, \qquad E_\text{F} = \frac{\hbar^2}{m} n^{2/3}.$$

Вспомним, что боровский радиус $a_0 = \hbar^2/me^2$. При $n \gg a_0^{-3}$: $E_\text{F} \gg E_\text{C}$ – получается Ферми-газ. При $n \ll a_0^{-3}$: $E_\text{F} \ll E_\text{C}$ – вигнеровский кристалл.

Метод функционала плотности

Рассмотрим гамильтониан

$$\hat{H} = \sum_j \frac{p_j^2}{2m} + \sum_j U(r_j) + e^2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{|r_i - r_j|}.$$

Собственно потенциал $U(r)$ задаёт волновую функцию и концентарцию $n(r)$.

Thr 1.1 (Hohenberg-Kohn I)**.** *По концентрации $n(r)$ однозначно восстанавливается $U(r)$.*

Thr 1.2 (Hohenberg-Kohn II)**.** *Для заданной $n(r)$ существует такой $\tilde{U}(r)$, что система невзаимодейтсвующих частиц с гамильтонианом $\tilde{H} = \sum_j \frac{p_j^2}{2m} + \sum_j \tilde{U}(r_j)$ приходит к плотности $n(r)$.*

Остаётся вопрос как найти $\tilde{U}(r)$. Понятно, что

$$\tilde{U}(r) = U(r) + e^2 \int \frac{n(r')}{|r - r'|}\, d^3 r' + V(r),$$

где в рамках local density approximation (LDA) утверждаем, что $V(r) = V(r)[n(r)]$ – зависит только от концентрации а той же точке.

2 Фазовые переходы

Теория Ландау

Рассмотрим теорию Ландау фазовых переходов II рода. Переход II рода характеризуется разрывом μ'' и изменением симметрии: более симметричная фаза обычно соответсвует более высоким температурам $T > T_\text{c}$, менее симметричная фаза соответственно при $T < T_\text{c}$, гле T_c – температура перехода.

Введем *параметр порядка* η так, чтобы в несимметричной фазе $\eta(T > T_\text{c}) \equiv 0$ и $\eta(T < T_\text{c}) \neq 0$. Вблизи от точки перехода η принимает малые значения, тогда можем разложить, например, свободную энергию. Считая $F(\eta) = F(-\eta)$[1] :

$$F = F_0 + \frac{a}{2}\eta^2 + \frac{b}{4}\eta^4 + \ldots$$

где $b > 0$.

В излагаемой теории предполагается, что $A(T)$ не имеет особенности в точке перехода, так что вблизи нее она разложима по целым степеням «расстояния» до этой точки

$$a(T) = \alpha(T - T_\text{c}).$$

Из условия минимальности $F(\eta)$, находим

$$\eta^2 = -\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{b}(T_\text{c} - T), \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\eta = \pm\sqrt{\tfrac{\alpha}{b}(T_\text{c} - T)}}$$

при $T < T_\text{c}$ и $\eta \equiv 0$ при $T > T_\text{c}$.

Сразу можем найти, например, скачок теплоёмкости

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}, \qquad C = T\frac{\partial S}{\partial T}, \qquad \Rightarrow \qquad C = C_0 + \frac{\alpha^2}{b} T_\text{c}.$$

[1] Это почти всегда так, нам интересна намагниченность в качестве η, так что точно можем нечетные степени опустить.

Теория Ландау применима в области немного отстоящей от T_c, так как в T_c доминирует вклад от флуктуаций, но при этом $|T_c - T| \ll T_c$ для малости η.

Теория Гинзбурга-Ландау

Вообще η можем флуктуировать по объёму, тогда корректнее рассматривать $\eta(r)$, и $F[\eta(r)]$ – функционал[2] от параметра порядка:

$$F[\eta(r)] = \int d^D r \, \left(\frac{\alpha(T-T_c)}{2}\eta^2 + \frac{b}{4}\eta^4 + C(\nabla\eta_r)^2\right),$$

где C отвечает за ограничение роста числа флуктуаций. Соответсвенно при $C \to \infty$ получалась бы теория Ландау: $\eta(r) = \text{const}$.

Соберем из доступных констант две длины:

$$r_c = \sqrt{\frac{C}{\alpha(\mathrm{T}-T_c)}}, \qquad r_0 = \left(\frac{bT_c}{\alpha^2(T-T_c)^2}\right)^{1/D},$$

где r_c – корреляционный радиус. Таким образом можем игнорировать вклад от флуктуаций при $r_c \gg r_0$.

В размерности $D = 3$:

$$\frac{T-T_c}{T_c} \gg \mathrm{Gi} = \frac{b^2 T_c}{\alpha C^3},$$

где Gi – *число Гинзбурга*, собственно это и образует критерий Гинзбурга-Леванюка. При $D = 5$:

$$\frac{T-T_c}{T_c} \ll \frac{T_c C^5}{\alpha b^2},$$

таким образом $D = 5$ – верхняя критическая размерность, теория Ландау применима в T_c для $D > 4$.

Внешнее поле

Внешнее поле h даст добавку в F:

$$F = F_0 + \frac{\alpha}{2}(T-T_c) + \frac{b}{4}\eta^4 - \eta h V,$$

получается поле понижает симметрию более симметричной фазы, так что разница между обеими фазами исчезает – переход «размывается».

Конкретизируем рассмотрение к модели Изинга, тогда параметром порядка η будет удельная намагниченность M, внешнее поле B:

$$\frac{\partial F}{\partial M} = \alpha(T-T_c)M + bM^3 - B = 0.$$

Появляется дополнительная намагниченность к спонтанной $M = M_0 + \delta M$, в небольших полях $\delta M = \chi B$ и получаем закон Кюри-Вейса для восприимчивости

$$\frac{1}{\chi(T)} = \begin{cases} 2\alpha(T_c - T), & T < T_c, \\ \alpha(T-T_c), & T > T_c, \end{cases}$$

где учли, что при $T > T_c$ спонтанная намагниченность $M_0 = 0$.

3 Квантовые эффекты в проводниках

Квантовый эффект Холла

Эффект Холла. Вспоминим уравнение Друде

$$m\left(\cancel{\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}} + \frac{1}{\tau}\boldsymbol{v}\right) = e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B},$$

где рассматриваем 2D образец, смотрим стационарное решение. Расписывая покомпоненто, можем найти

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{eB\tau}{mc} \\ \frac{eB\tau}{mc} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{e\tau}{m}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}.$$

[2] Подробнее про отсутствие других производных от η можно прочитать в ЛЛ5 §146.

Подставим $\boldsymbol{J} = ne\boldsymbol{v}$, тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{eB\tau}{mc} \\ \frac{eB\tau}{mc} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \frac{ne^2\tau}{m} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}.$$

Получаем соотношение $\boldsymbol{J} = \hat{\sigma}\boldsymbol{E}$, тогда $\boldsymbol{E} = \hat{\sigma}^{-1}J = \hat{\rho}\boldsymbol{J}$. Матрица $\hat{\rho}$ получается равной

$$\hat{\rho} = \frac{m}{ne^2\tau} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{eB\tau}{mc} \\ \frac{eB\tau}{mc} & 1 \end{pmatrix}.$$

Итого находим

$$\rho_{xx} = \frac{m}{ne^2\tau}, \qquad \rho_{xy} = \frac{B}{n|e|c}.$$

Квантовый эффект Холла. Характерная длина основного состояния

$$\lambda_B = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_B}}, \qquad \omega_B = \frac{eB}{mc}.$$

Подставляя ω_B, находим

$$\lambda_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}},$$

где $[\hbar c/e]$ – квант потока B.

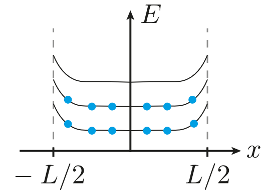

Рис. 1: Уровни Ландау

Далее рассматриваем образцы такие, чтобы их характерный размер $L \gg \lambda_B$. Уровни Ландау загибаются к краям образца. Далеко от границ все электронные состояния являются локализованными и не участвуют в процессах электропередачи. Неупругие процессы отсутсвуют в сиду заполненности сферы Ферми.

По каналам проводимости вдоль границ будет одномерный проводник с квантущимся conductance G:

$$G = \frac{e^2}{h}, \qquad \sigma_{xy} = \frac{e^2}{h}\nu,$$

где ν – количество заполненных уровней Ландау. Для $\sigma_{xx} = 0$ в силу локализованности электронов. Тогда для сопротивления $\hat{\sigma} = \hat{\rho}^{-1}$, получаем

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}, \qquad \sigma_{xy} = \frac{-\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}.$$

Если $\sigma_{xx} = 0$, тогда $\rho_{xx} = 0$ и $\rho_{xy} = 1/\sigma_{xy}$:

$$\rho_{xy} = \frac{h}{e^2}\frac{1}{\nu}.$$

Емкость уровней Ландау

$$N_{LL} = \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{S}{2\pi\lambda_B^2}, \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{N}{N_{LL}} = \frac{N\lambda_B^2 2\pi}{S} = 2\pi n\lambda_B^2 = 2\pi n\frac{\hbar c}{eB}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\nu} \sim B.$$

Идеальности будет мешать эффект туннелирования, но они подавлены как e^{-L/λ_B}.

4 Макроскопические квантовые явления

Критерий сверхтекучести Ландау

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

Идеальный бозе-газ

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

Неидеальный Бозе-газ

Рассмотрии гамильтониан

$$H = \sum_p \frac{p^2}{2m} a_p^\dagger a_p + \frac{g}{2V} \sum a_{p_1'}^\dagger a_{p_2'}^\dagger a_{p_2} a_{p_1},$$

где $\sum p_{\text{in}} = \sum p_{\text{out}}$.

Основной вклад идёт от нулевых импульсов:

$$\frac{g}{2V} \sum a_{p_1'}^\dagger a_{p_2'}^\dagger a_{p_2} a_{p_1} \approx \frac{g}{2V} a_0^\dagger a_0^\dagger a_0 a_0 + \frac{g}{2V} \sum_p \left(a_0^\dagger a_0^\dagger a_p a_{-p} + a_p^\dagger a_{-p}^\dagger a_0 a_0 + 4 a_0^\dagger a_0 a_p^\dagger a_p \right),$$

где первое слагаемое пропорционально

$$N_0^2 = (N - \sum_p a_p^\dagger a_p)^2 = N - 2N \sum_p a_p^\dagger a_p.$$

Итого находим[3] , что

$$H = \frac{gN^2}{2V} + \sum_p \left[\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{2gN}{2V} \right) a_p^\dagger a_p + \frac{gN}{2V} \left(a_p^\dagger a_{-p}^\dagger + a_p a_{-p} \right) \right],$$

таким образом приходим к квадратичному гамильтониану.

Сделаем каноническое преобразование Боголюбова

$$\begin{cases} a_p = u_p b_p + v_p b_{-p}^\dagger \\ a_p^\dagger = u_p b_p^\dagger + v_p b_{-p}^\dagger \end{cases} \qquad [b_p,\, b_{p'}^\dagger] = \delta_{pp'}, \qquad [b_p,\, b_{p'}] = 0.$$

Так приходим к ограничениям вида

$$u_p^2 - v_p^2 = 1, \qquad v_p = v_{-p}, \qquad u_p = u_{-p},$$

более того можем выбрать коэффициенты вещественными.

Из диагонализации, с учетом требований, получаем выражение для u_p и v_p:

$$u_p = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon(p)}{E_p}} + \sqrt{\frac{E_p}{\varepsilon(p)}} \right), \qquad u_p = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon(p)}{E_p}} - \sqrt{\frac{E_p}{\varepsilon(p)}} \right),$$

где энергия $\varepsilon(p)$ имеет вид

$$\varepsilon(p) = \sqrt{s^2 p^2 + \left(\frac{p^2}{2m} \right)^2}, \qquad s = \sqrt{\frac{gn}{m}}.$$

Таким образом гамильтониан приводится к виду

$$H = H_0 + \sum_{p \neq 0} \varepsilon(p) b_p^\dagger b_p.$$

Таким образом боголюбоны соответсвуют идеальному бозе-газу возмущений.

По критерию Ландау сразу находим

$$v_{\text{кр}} = \min_p \frac{\varepsilon(p)}{p} = s.$$

Найдём количество надконденсатных частиц

$$N_{p\neq 0} = \sum_{p \neq 0} \langle a_p^\dagger a_p \rangle = \sum_{p \neq 0} \left(u_p^2 \langle b_p^\dagger b_p \rangle + v_p^2 (1 - \langle b_p^\dagger b_p \rangle) \right) \overset{T=0}{\equiv} \sum_p v_p^2 \sim V \cdot (ms)^3.$$

Длину рассеяния a можем вычислить для s-рассеяния

$$a = \frac{gm}{4\pi}.$$

Подставляя a в выражение для $N_>$, находим

$$N_{p\neq 0} \sim N \cdot \sqrt{na^3}, \qquad \frac{N_{p\neq 0}}{N} \sim \sqrt{na^3}, \qquad \Rightarrow \qquad N \approx N_0 (1 + \ldots \sqrt{na^3}).$$

Для введение парных столкновений требуем, чтобы $na^3 \ll 1$.

[3] Вообще около $a_0^\dagger$ могла быть фаза, но от неё каноническим преобразованием можем избавиться.