Задание по курсу «Теория вероятностей»

Выполнил: Хоружий Кирилл

От: *10 декабря 2022 г.*

Содержание

1 Первое задание **2**
I Вероятностное пространство . . . 2
II Условные вероятности и формула Байеса . . . 3
III Случайные величины . . . 4
IV Математическое ожидание, дисперсия и ковариация . . . 5
V Математическое ожидание, дисперсия и ковариация . . . 5

2 Второе задание **5**
II Метод характеристических функций . . . 5
III Элементы теории случайных процессов . . . 6

1 Первое задание

I Вероятностное пространство

Свойства вероятности

T1. Найдём все события X: $\overline{XA} \cup \overline{X\bar{A}} = B$. Вспоминая $\overline{\cup A} = \cap \bar{A}$ и $\overline{\cap A} = \cup \bar{A}$, получаем

$$XX + (A + \bar{A})X + A\bar{A} = \bar{B}, \quad \Rightarrow \quad X = \bar{B}.$$

T2. Теперь $AX = AB$. Учитывая, что $A\bar{A} = \varnothing$, находим $X = B \cup \bar{A}$.

T3. Покажем, что $P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + P\left(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k\right) = 1$, действительно:

$$P\left(\bigcup A_k\right) + P\left(\overline{\bigcup A_k}\right) = 1, \quad \Leftarrow \quad P(X) + P(\bar{X}) = P(X \cup \bar{X}) = P(\Omega) = 1.$$

T4. Знаем, что $P(A_n) = 1$, тогда

$$P(A_n \triangle \Omega) = 0, \quad \Rightarrow \quad P(\cap_{n=1}^{\infty} A_n \Delta \Omega) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \triangle \Omega) = 0,$$

откуда получаем требуемое утверждение.

T5. Начнём с $P(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} P(A_n)$:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geqslant n} A_k = \lim_n B_n.$$

По непрерывности меры $P(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$, и так как B_n – пересечения A_k, то есть $P(B_n) \leqslant P(A_n)$, получаем

$$P(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} P(A_n).$$

Теперь покажем, что $\underline{\lim}_{n\to\infty} P(A_n) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} P(A_n)$. Равносильно

$$\inf_{\{i\}} \lim_{i\to\infty} P(A_j) \leqslant \sup_{\{j\}} \lim_{j\to\infty} P(A_j),$$

что доказывает утверждение.

Покажем $\overline{\lim}_n P(A_n) \leqslant P(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n)$:

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \lim_n B_n,$$

получилась монотонная последовательность. По непрерывности

$$P(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n),$$

но $P(B_n) \geqslant P(A_n)$, откуда находим

$$P(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) \geqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} P(A_n).$$

T6. Покажем, что $\forall A, B$ $|P(AB) - P(A)P(B)| \leqslant \frac{1}{4}$. По отдельности, т.к. $P(A) \geqslant P(AB)$ и $P(B) \geqslant P(AB)$ находим

$$P(AB) - P(A)P(B) \leqslant P(AB) - P(AB)^2 = P(AB)(1 - P(AB)) \leqslant \tfrac{1}{4}.$$

Теперь с другой стороны, вспоминая $P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A)$, находим

$$P(A)P(B) - P(AB) = P(A)P(B) - (P(A) - P(A\bar{B})) - P(A)P(\bar{B}) + P(A)P(\bar{B}) = P(A\bar{B}) - P(A)P(B) \leqslant \tfrac{1}{4},$$

в силу уже доказанного неравенства.

T7. Возьмём $A_{2k} = \Omega$ и $A_{2k+1} = \varnothing$.

Комбинаторика

T8. Хотя бы 1 единица на четырёх костях – A, хотя бы одна пара единиц при 24 бросках двух кубов – B:

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.52, \quad P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.49, \quad \Rightarrow \quad P(A) > P(B).$$

T9. Перебрав все варианты

$$(6,4,1)\ \text{x}6,\ (6,3,2)\ \text{x}6,\ \ldots,\ (4,4,3)\ \text{x}3,$$

находим 27 реализаций для 11 очков и 25 реализаций для 12 очков, таким образом 11 выпадает чаще.

T10. Найдём вероятность обнаружить всё четыре масти, взяв 6 карт из колоды. Всего карт каждой масти 13. Пусть событие A_i – не вытащили карты i-й масти. Нам нужно найти $p = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup) = 4P(A_i) - 6P(A_i \cap A_j) + 4P(A_i \cap A_j \cap A_k),$$

так как масти эквивалентны и $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0$. Размер $|\Omega| = C_{52}^6$, тогда

$$P(A_i) = \frac{C_{39}^6}{C_{52}^6}, \qquad P(A_i \cap A_j) = \frac{C_{26}^6}{C_{52}^6}, \qquad P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{C_{13}^6}{C_{52}^6},$$

откуда находим

$$p = 1 - \frac{4C_{39}^6 - 6C_{26}^6 + 4C_{13}^6}{C_{52}^6} \approx 0.43.$$

T11. Пусть A_i – i-е письмо в нужном конверте, $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Тогда по формуле включений-исключений

$$P(A) = nP(A_1) - C_n^2 P(A_i A_j) + C_n^3 P(A_i A_j A_k) - \ldots,$$

где соответствующие вероятности

$$P(A_i) = \frac{1}{n}, \qquad P(A_i A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}, \qquad \ldots$$

Подставляя, находим

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}, \qquad 1 - P(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \underset{n\to\infty}{\to} e^{-1}.$$

T12. Раз половина людей имеет 50-рублевые купюры, а друга половина 100-рублевые, то можем сопоставить первым открывающие скобки, а вторым закрывающие. Таким образом задача сводится к подсчёту количества правильных скобочных последовательностей. Мощность $|\Omega| = C_{2n}^n$, тогда

$$P = \frac{C_n}{C_{2n^n}} = \frac{1}{n+1},$$

где числа Каталана $C_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$.

Геометрическая вероятность

T13. Пусть интервал движения автобусов $T = 25$ мин, время пути автобуса $t = 2$ мин, и время пути пешехода $\tau = 15$ мин. Выделим интервал от момента, когда первый автобус выехал ($t = 0$), до момента когда доехал второй автобус ($t = T + t$). Пешеход пересечётся с автобусом только при времени выхода $t_\text{п} \geqslant T + t - \tau$, а значит

$$P = 1 - \frac{T + t - \tau}{T} = \frac{13}{25} = 0.52.$$

T14. Пусть первая точка $x \in [0, 1]$ – координата первой точки, $y \in [0, 1]$ – координата второй точки (выбираем $y > x$). Стороны треугольника тогда должны быть фиксированы

$$a = x, \quad b = y - x, \quad c = 1 - y, \qquad a + b \leqslant c, \quad a + c \leqslant b, \quad b + c \leqslant a,$$

которые задают на вероятностном пространстве трегольничек в 1/8 от квадрата, и в 1/3 от вероятностного пространства (в силу выбора $y > x$), таким образом искомая вероятность равна 1/4.

T15 (задача Дюффона). Считая $l \leqslant L$, можем написать геометрическую вероятность в виде

$$P = \frac{1}{\pi L} \int_0^\pi \int_0^{l \sin\theta} dx\, d\theta = \frac{2}{\pi} \frac{l}{L},$$

где l – длина иглы, L – расстояние между полосками.

T16. Аналогично пусть $x \in [0, 1]$ – координата первой точки, $y \in [0, 1]$– координата второй точки. Вероятность третьей точке быть между ними равна $|x - y|$, тогда

$$P = \int_0^1 dx \int_0^1 dy\ |x - y| = \int_0^1 dx \left(\int_0^x (x - y)\, dy + \int_x^1 (y - x)\, dy \right) = \frac{1}{3},$$

что вполне соответсвует интуиции.

II Условные вероятности и формула Байеса

T17. Вероятность встретить 5 равна $P_5 = 1/9$, $P_7 = 1/6$, соответственно $P_0 = 1 - P_5 - P_7 = 13/18$. Тогда искомая вероятность

$$P = P_1 + P_0(P_1 + P_0(P_1 + \ldots)) = \frac{P_5}{1 - P_0} = \frac{1/9}{1 - 13/18} = \frac{2}{5}.$$

T18. Аналогично предыдущей задачи находим

$$P_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{3k+1}} = \frac{1/2}{1-1/8} = 4/7$$
$$P_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \ldots = \frac{1/4}{1-1/8} = \frac{2}{7}$$
$$P_3 = 1 - \frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$$

T19. На первую игру могло выпасть два старых, один старый или обы новых. Тогда искомую вероятность можем найти

$$P = P(\text{нн}|\text{нн}) + P(\text{нн}|\text{сн}) + P(\text{нн}|\text{сс}) = \frac{28}{135}.$$

где учли, что $P(\text{нн}) = \frac{6}{10}\frac{5}{9}$, $P(\text{сн}) = \frac{6}{10}\frac{4}{9} + \frac{4}{10}\frac{6}{9}$, $P(\text{сс}) = \frac{4}{10}\frac{3}{9}$.

T20. Далее считая $P_A = P_C = 0.3$, $P_B = 0.4$, $P(L) = 0.6$, $P(\bar{L}) = 0.2$. Получено $ACAB$ – событие S, тогда

$$P(A|S) = \frac{P(A)P(S|A)}{\sum_{x=\{A,B,C\}} P(x)P(S|x)} = \frac{9}{16}.$$

T21. Считая что В (всегда), Н (никогда), И (иногда), возможны кофигурации НВВ, НИИ, ИВВ, ...

$$P_1 = \frac{1}{6}, \qquad P_2 = \frac{1}{24}, \qquad P_3 = \frac{1}{12}, \qquad \Rightarrow \qquad P = \frac{1/6 + 1/12}{1/6 + 1/12 + 1/24} = \frac{1}{7}.$$

T22. Пусть A – потопление корабля, гипотезы H_m – попадание в корабль m торпед, $m = 1, \ldots, n$:

$$P(H_m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Найдём $P(A|H_m)$. Для $m = 1$ по условию $P(A|H_1) = 0$, для $m \geqslant 2$ корабль не потопили только если все торпеды в одном отсеке:

$$P(A|H_m) = 1 - k\left(\frac{1}{k}\right)^m = 1 - k^{1-m},$$

тогда полная вероятность потопления

$$P(A) = \sum_{m=2}^{n} P(H_m)P(A|H_m) = \sum_{m=2}^{n} C_n^m p^m (1-p)^{n-m}\left(1 - k^{1-m}\right).$$

T23. Разобьем последовательность на десятки. Вероятность, что 10 успехов $0 < p^1 0 \overset{\text{def}}{=} q \leqslant 1$. Верно, что

$$A \subset \overline{\lim} A_n, \qquad \Rightarrow \qquad P(A) \geqslant P(\overline{\lim} A_n).$$

По лемме Бареля-Кантелли

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum q = \infty, \qquad \Rightarrow \qquad P(\overline{\lim} A_n) = 1, \qquad \Rightarrow \qquad P(A) = 1.$$

III Случайные величины

T24. Составим табличку, из неё найдём $P(\xi\eta = 0) = 1$ и $P(\xi = \eta = 0) = 0$.

T25. Для η можем написать, что $p_\eta(x) = \frac{1}{3}\left(\delta(x-1) + \delta(x) + \delta(x+1)\right)$, тогда по формуле свёртки

$$F_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{3}\left(f_\xi(t-1) + f_\xi(t) + f_\xi(t+1)\right) dt.$$

T26. В квадрат брошена точка в (ξ_1, ξ_2). Найдём функцию распределения и плотность $\eta = \xi_1 + \xi_2$. Обозначив плотность распределения за f_1 и f_2 соответсвенно, можем найти

$$f_\eta(y) = \int_0^1 f_1(y - x_2) f_2(x_2)\, dx_2 = \int_{\max(0,y-1)}^{\min(1,y)} dx_2 = \begin{cases} y, & 0 \leqslant y < 1, \\ 2 - y, & 1 \leqslant y \leqslant 2. \end{cases}$$

Интегрируя, находим $F_\eta(y)$:

$$F_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y^2, & 0 \leqslant y < 1, \\ 2y - \frac{1}{2}y^2 - 1, & 1 \leqslant y \leqslant 2. \end{cases}$$

T27. Пусть ξ_1, $\xi_2 \in \mathrm{P}_\lambda$ – независимые случайные величины. Для суммы $\xi_1 + \xi_2 = \eta$, $x_1 + x_2 = y$можем найти

$$P(\eta = y) = \sum_{x_1, x_2 \colon x_1 + x_2 = y} P_{\xi_1}(x_1) P_{\xi_2}(x_2) = \sum_{0 \leqslant x_1 \leqslant y} \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{x_1!(y-x_1)!} = \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{y!} 2^y.$$

Условное распределение ξ_1 при известной $\eta = \xi_1 + \xi_2$ найдём в виде

$$\frac{P(\xi_1 = x,\, \eta = y)}{P(y = \eta)} = \frac{P(\xi_1 = x) P(\xi_2 = y - x)}{P(y = \eta)} = \frac{C_y^x}{2^y}.$$

T28. Известно, что случайная величина ξ имеет строго возрастающую непрерывную функцию распределения $F_\xi(x)$. Найдём распределение случайное величины $\eta = F_\xi(\xi)$:

$$F_\eta(x) = P(F(\xi) < x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ P(\xi < F^{-1}(x)), & x \in (0, 1), \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

По определению $P(\xi < F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x$, получается $\eta \in U_{0,1}$.

T29. Пусть $\xi \in N_{0,1}$, найдём функцию распределения $F_{\xi^2}(x)$ и плотность $f_{\xi^2}(x)$. Нас интересуют все такие $x^2 = y$ или $x = \sqrt{y}$, тогда

$$f_\xi(x)\, dx \overset{x = \sqrt{y}}{\to} \frac{f_\xi(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}\, dy, \qquad \Rightarrow \qquad f_{\xi^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}.$$

Теперь по определению находим функцию распределения

$$F_{\xi^2}(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{y}}\, dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\sqrt{y}^2/2}\, d\sqrt{y} = \mathrm{Erf}\left(\sqrt{\tfrac{z}{2}}\right).$$

T30. ✗

T31. Можем решать эту задачу в терминах геометрической вероятности, тогда на кубе $[0, 1]^3$ задана система неравенств

$$|x - y| \geqslant \frac{1}{4}, \qquad |z - y| \geqslant \frac{1}{4}, \qquad |x - z| \geqslant \frac{1}{4},$$

которые формируют в кубе 6 одинаковых пирамидок объёма $1/48$, тогда искомая вероятность равна $1/8$.

IV Математическое ожидание, дисперсия и ковариация

T32. ✗
T33. ✗
T34. ✗
T34. ✗

V Математическое ожидание, дисперсия и ковариация

T32. ✗
T33. ✗
T34. ✗
T34. ✗

2 Второе задание

II Метод характеристических функций

T10. Для $f_\xi(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$, найдём $h(t)$:

$$h(t) = \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty e^{(it-1)x}\, dx + \int_{-\infty}^0 e^{(it+1)x}\, dx \right) = \frac{1}{t^2 + 1}.$$

T11. Для нормального распределения с параметрами (a, σ^2), можем вспомнить

$$h_{a\xi + b} = e^{itb} h_\xi(at), \qquad \Rightarrow \qquad h(t) = e^{-\frac{1}{2} t^2 \sigma^2} e^{ita}.$$

Т12. Обратная задача, найдем распределения через обратный Фурье образ $\cos t$:

$$\mathcal{F}^{-1}[\cos t] = \frac{1}{2}\left(\delta(x-1)+\delta(x+1)\right), \qquad \Rightarrow \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1, \\ 1/2, & -1 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$

Теперь для $h_2(t)$:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos t + \tfrac{i}{6}\sin t\right] = \frac{1}{3}\delta(x-1)+\frac{1}{2}\delta(x)+\frac{1}{6}\delta(x+1).$$

Т13. Найдём функцию распределения для $h(t)=e^{-t^2}\cos t$. В принципе можно снова вспомнить $h_{a\xi+b}$ и сразу написать ответ:

$$h(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{4}(x+1)^2}+e^{-\frac{1}{4}(x-1)^2}\right) = \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2/4}\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Т14. Характеристическая функция должна быть равномерно непрерывной. Функция $\cos t^2$ не является равномерно непрерывной, в силу неограниченности производной $-2\sin(t^2)t$.

Т15. Вспомнив характеристическую функцию для распределения Пуассона

$$f_{\xi_\lambda} = \exp\left(\lambda(e^{it}-1)\right),$$

можем получить для случайной величина $\eta = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\xi_\lambda-\lambda)$ характеристическую функцию

$$f_\eta = \exp\left(-it\sqrt{\lambda}+\lambda\left(e^{it/\sqrt{\lambda}}-1\right)\right) = \exp\left(-t^2+o(1/\sqrt{\lambda})\right), \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{\lambda\to\infty} P\left(\tfrac{\xi_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant x\right) = \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2}\,dy.$$

Т16. Теперь можем найти предел

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} P(\xi_n \leqslant n) = P\left(\tfrac{1}{\sqrt{n}}(\xi_n-n)\leqslant 0\right) = \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

III Элементы теории случайных процессов

Т18. Исходя из того, что сумма по столбцам должна быть единичной, можем составить матрицу

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.5 & 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix},$$

тогда $\Pi\boldsymbol{p} = (0.32,\ 0.53,\ 0.15)$. Стационарное состояние можем найти через собственный вектор

$$\Pi\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}, \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{q} = \frac{1}{9}\left(3,\ 5,\ 1\right).$$

Т19. Для двухуровеневой системы с матрицей перехода

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix},$$

найдём собственные векторы и перейдём в их базис

$$\boldsymbol{q}\Pi = \boldsymbol{q}, \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{q}_1 = \left(1/2,\ 1/2\right), \quad \lambda_1 = 1 \qquad \boldsymbol{q}_2 = \left(\alpha,\ -\beta\right), \quad \lambda_2 = 1-\alpha-\beta.$$

Тогда можем найти степень матрицы

$$\Pi = S\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}S^{-1}, \qquad \Pi^n = S\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}S^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \alpha\lambda_2^n+\beta & \alpha(1-\lambda_2^n) \\ \beta(1-\lambda_2^n) & \alpha+\beta\lambda_2^n \end{pmatrix},$$

и соответственно предельное распределение $(1/2,\ 1/2)$.