

# БИЛЕТЫ ПО КУРСУ «ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ»

---

Автор заметок: Хоружий Кирилл

От: 19 декабря 2022 г.

## Содержание

1 Основные понятия и приближения	2
2 Квантовые эффекты в проводниках	2
3 Фазовые переходы	4
4 Магнетизм	5
5 Макроскопические квантовые явления	6

# 1 Основные понятия и приближения

## Модель желе

Рассмотрим модель желе: узлы решетки + электроны в целом электронейтральны. Характерные величины системы:

$$[e^2] = \frac{\Gamma \text{ см}^3}{\text{с}^2}, \quad [m] = \Gamma, \quad [n] = \text{см}^{-3}, \quad [\hbar] = \frac{\Gamma \text{ см}^2}{\text{с}}.$$

Из них можем составить две характерные энергии

$$E_C = e^2 n^{1/3}, \quad E_F = \frac{\hbar^2}{m} n^{2/3}.$$

Вспомним, что боровский радиус  $a_0 = \hbar^2 / m e^2$ . При  $n \gg a_0^{-3}$ :  $E_F \gg E_C$  – получается Ферми-газ. При  $n \ll a_0^{-3}$ :  $E_F \ll E_C$  – вигнеровский кристалл.

## Метод функционала плотности

Рассмотрим гамильтониан

$$\hat{H} = \sum_j \frac{p_j^2}{2m} + \sum_j U(r_j) + e^2 \sum_{i \neq j} \frac{1}{|r_i - r_j|}.$$

Собственно потенциал  $U(r)$  задаёт волновую функцию и концентрацию  $n(r)$ .

**Thr 1.1** (Hohenberg-Kohn I). По концентрации  $n(r)$  однозначно восстанавливается  $U(r)$ .

**Thr 1.2** (Hohenberg-Kohn II). Для заданной  $n(r)$  существует такой  $\tilde{U}(r)$ , что система невзаимодействующих частиц с гамильтонианом  $\tilde{H} = \sum_j \frac{p_j^2}{2m} + \sum_j \tilde{U}(r_j)$  приходит к плотности  $n(r)$ .

Остаётся вопрос как найти  $\tilde{U}(r)$ . Понятно, что

$$\tilde{U}(r) = U(r) + e^2 \int \frac{n(r')}{|r - r'|} d^3 r' + V(r),$$

где в рамках local density approximation (LDA) утверждаем, что  $V(r) = V(r)[n(r)]$  – зависит только от концентрации а той же точке.

# 2 Квантовые эффекты в проводниках

## Формула Больцмана

Запишем уравнение на динамику чисел заполнения  $f(k, r)$ :

$$\partial_t f(k, r) + \mathbf{v} \cdot \nabla_r f + \dot{\mathbf{k}} \nabla_k f = I_{st}[f],$$

где  $I_{st}[f]$  – интеграл столкновений,  $\dot{\mathbf{k}} = e\mathbf{E}/\hbar$  – внешняя сила. Считая ситуацию изотропной и стационарной, получаем уравнение Больцмана

$$e\mathbf{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{k}} = I_{st}[f].$$

Столкновительный интеграл можем расписать в виде

$$I_{st}[f] = - \sum_{k'} (w_{k'k} f_k (1 - f_{k'}) - w_{kk'} f_{k'} (1 - f_k)) = \sum w_{kk'} (f_k - f_{k'}),$$

где амплитуда рассеяния по золотому правилу Ферми с учетом упругости процесса  $w_{k'k} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{k'k}|^2 \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'})$ . Можем угадать решение в виде

$$f_k = f(\varepsilon_k) + \delta f_k, \quad \delta f_k = -c \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_k \cdot f'_0(\varepsilon).$$

Подставляя, найдём

$$\lambda c = -e, \quad \lambda = - \int \frac{d\Omega}{4\pi} w(\theta) (1 - \cos \theta).$$

При этом связь так и поля получится в виде

$$\mathbf{J} = \frac{ne^2}{m} \tau \mathbf{E}, \quad \frac{1}{\tau} = -\lambda = \int \frac{d\Omega}{4\pi} w(\theta) (1 - \cos \theta).$$

Таким образом вклад вносят только рассеивающие на большой угол примеси.

**Критерий применимости.** Здесь приближение было в разделение координат и импульсов, то есть должно быть  $\Delta k \sim \frac{1}{l} \ll k_F$ , где  $l \sim v_F \cdot \tau$ , так получаем критерий *Иоффе-Резеля*

$$k_F \cdot l \gg 1$$

критерий применимости Больцмановского приближения.

## Локализация Андерсона

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

## Формула Ландауэра

Рассмотрим два куска металла между которыми существует 1D идеальный провод. Химпотенциалы соответственно равны

$$\mu_L = \mu + \frac{1}{2}eV, \quad \mu_R = \mu - \frac{1}{2}eV,$$

ток можем найти как  $I = T_R - I_L$ :

$$I = \sum_{k>0} ev_k (f_L(\varepsilon_k) - f_R(\varepsilon_k)),$$

где  $f_{R,L}(\varepsilon_k) = f(\varepsilon_k - \mu_{R,L})$  – числа заполнения. Подставляя в выражение для тока, находим

$$I = - \sum_{k>0} ev_k \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_k} (\delta\mu_L - \delta\mu_R) = -e^2 V \int_{k>0} \frac{dk}{2\pi} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \hbar k} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_k} = -\frac{e^2}{2\pi} V \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = \frac{e^2}{2\pi} V.$$

где сделали подстановку  $v_k = \partial \varepsilon_k / \partial \hbar k$ , числа заполнения равны  $f(\varepsilon = 0) = 1$  в  $f(\varepsilon = \infty) = 0$  соответственно. Таким образом находим квант проводимости

$$G = \frac{I}{V} = \frac{e^2}{2\pi\hbar}.$$

Если скажем, что электроны отражаются с коэффициентом  $|t_i|^2$  и всего всего есть  $N$  одномерных каналов, получим *формулу Ландауэра*

$$G = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_{i=1}^N |t_i|^2.$$

## Квантовый эффект Холла

**Эффект Холла.** Вспоминим уравнение Друде

$$m \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{1}{\tau} \mathbf{v} \right) = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

где рассматриваем 2D образец, смотрим стационарное решение. Расписывая покомпонентно, можем найти

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{eB\tau}{mc} \\ \frac{eB\tau}{mc} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{e\tau}{m} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}.$$

Подставим  $\mathbf{J} = ne\mathbf{v}$ , тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{eB\tau}{mc} \\ \frac{eB\tau}{mc} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \frac{ne^2\tau}{m} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}.$$

Получаем соотношение  $\mathbf{J} = \hat{\sigma} \mathbf{E}$ , тогда  $\mathbf{E} = \hat{\sigma}^{-1} \mathbf{J} = \hat{\rho} \mathbf{J}$ . Матрица  $\hat{\rho}$  получается равной

$$\hat{\rho} = \frac{m}{ne^2\tau} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{eB\tau}{mc} \\ \frac{eB\tau}{mc} & 1 \end{pmatrix}.$$

Итого находим

$$\rho_{xx} = \frac{m}{ne^2\tau}, \quad \rho_{xy} = \frac{B}{n|e|c}.$$

**Квантовый эффект Холла.** Характерная длина основного состояния

$$\lambda_B = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_B}}, \quad \omega_B = \frac{eB}{mc}.$$

Подставляя  $\omega_B$ , находим

$$\lambda_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}},$$

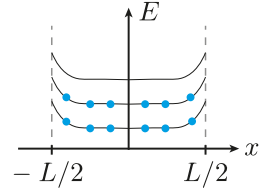


Рис. 1: Уровни Ландау

где  $[\hbar c/e]$  – квант потока  $B$ .

Далее рассматриваем образцы такие, чтобы их характерный размер  $L \gg \lambda_B$ . Уровни Ландау загибаются к краям образца. Далеко от границ все электронные состояния являются локализованными и не участвуют в процессах электропередачи. Неупругие процессы отсутствуют в силу заполненности сферы Ферми.

По каналам проводимости вдоль границ будет одномерный проводник с квантуемым conductance  $G$ :

$$G = \frac{e^2}{h}, \quad \sigma_{xy} = \frac{e^2}{h}\nu,$$

где  $\nu$  – количество заполненных уровней Ландау. Для  $\sigma_{xx} = 0$  в силу локализованности электронов. Тогда для сопротивления  $\hat{\sigma} = \hat{\rho}^{-1}$ , получаем

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}, \quad \sigma_{xy} = \frac{-\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}.$$

Если  $\sigma_{xx} = 0$ , тогда  $\rho_{xx} = 0$  и  $\rho_{xy} = 1/\sigma_{xy}$ :

$$\rho_{xy} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{\nu}.$$

Емкость уровней Ландау

$$N_{LL} = \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{S}{2\pi\lambda_B^2}, \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{N}{N_{LL}} = \frac{N\lambda_B^2 2\pi}{S} = 2\pi n\lambda_B^2 = 2\pi n \frac{\hbar c}{eB}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\nu} \sim B.$$

Идеальности будет мешать эффект туннелирования, но они подавлены как  $e^{-L/\lambda_B}$ .

### 3 Фазовые переходы

#### Теория Ландау

Рассмотрим теорию Ландау фазовых переходов II рода. Переход II рода характеризуется разрывом  $\mu''$  и изменением симметрии: более симметричная фаза обычно соответствует более высоким температурам  $T > T_c$ , менее симметричная фаза соответственно при  $T < T_c$ , где  $T_c$  – температура перехода.

Введем *параметр порядка*  $\eta$  так, чтобы в несимметричной фазе  $\eta(T > T_c) \equiv 0$  и  $\eta(T < T_c) \neq 0$ . Вблизи от точки перехода  $\eta$  принимает малые значения, тогда можем разложить, например, свободную энергию. Считая  $F(\eta) = F(-\eta)$ <sup>1</sup>:

$$F = F_0 + \frac{a}{2}\eta^2 + \frac{b}{4}\eta^4 + \dots$$

где  $b > 0$ .

В излагаемой теории предполагается, что  $A(T)$  не имеет особенностей в точке перехода, так что вблизи нее она разложима по целым степеням «расстояния» до этой точки

$$a(T) = \alpha(T - T_c).$$

Из условия минимальности  $F(\eta)$ , находим

$$\eta^2 = -\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{b}(T_c - T), \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{b}(T_c - T)}}$$

при  $T < T_c$  и  $\eta \equiv 0$  при  $T > T_c$ .

Сразу можем найти, например, скачок теплоёмкости

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad C = T \frac{\partial S}{\partial T}, \quad \Rightarrow \quad C = C_0 + \frac{\alpha^2}{b} T_c.$$

Теория Ландау применима в области немного отстоящей от  $T_c$ , так как в  $T_c$  доминирует вклад от флуктуаций, но при этом  $|T_c - T| \ll T_c$  для малости  $\eta$ .

<sup>1</sup>Это почти всегда так, нам интересна намагниченность в качестве  $\eta$ , так что точно можем нечетные степени опустить.

## Теория Гинзбурга-Ландау

Вообще  $\eta$  можем флуктуировать по объёму, тогда корректнее рассматривать  $\eta(r)$ , и  $F[\eta(r)]$  – функционал<sup>2</sup> от параметра порядка:

$$F[\eta(r)] = \int d^D r \left( \frac{\alpha(T - T_c)}{2} \eta^2 + \frac{b}{4} \eta^4 + C(\nabla \eta_r)^2 \right),$$

где  $C$  отвечает за ограничение роста числа флуктуаций. Соответственно при  $C \rightarrow \infty$  получалась бы теория Ландау:  $\eta(r) = \text{const}$ .

Соберем из доступных констант две длины:

$$r_c = \sqrt{\frac{C}{\alpha(T - T_c)}}, \quad r_0 = \left( \frac{bT_c}{\alpha^2(T - T_c)^2} \right)^{1/D},$$

где  $r_c$  – корреляционный радиус. Таким образом можем игнорировать вклад от флуктуаций при  $r_c \gg r_0$ .

В размерности  $D = 3$ :

$$\frac{T - T_c}{T_c} \gg \text{Gi} = \frac{b^2 T_c}{\alpha C^3},$$

где  $\text{Gi}$  – *число Гинзбурга*, собственно это и образует критерий Гинзбурга-Леванюка. При  $D = 5$ :

$$\frac{T - T_c}{T_c} \ll \frac{T_c C^5}{\alpha b^2},$$

таким образом  $D = 5$  – верхняя критическая размерность, теория Ландау применима в  $T_c$  для  $D > 4$ .

## Внешнее поле

Внешнее поле  $h$  даст добавку в  $F$ :

$$F = F_0 + \frac{\alpha}{2}(T - T_c) + \frac{b}{4}\eta^4 - \eta h V,$$

получается поле понижает симметрию более симметричной фазы, так что разница между обеими фазами исчезает – переход «размывается».

Конкретизируем рассмотрение к модели Изинга, тогда параметром порядка  $\eta$  будет удельная намагниченность  $M$ , внешнее поле  $B$ :

$$\frac{\partial F}{\partial M} = \alpha(T - T_c)M + bM^3 - B = 0.$$

Появляется дополнительная намагниченность к спонтанной  $M = M_0 + \delta M$ , в небольших полях  $\delta M = \chi B$  и получаем закон Кюри-Вейса для восприимчивости

$$\frac{1}{\chi(T)} = \begin{cases} 2\alpha(T_c - T), & T < T_c, \\ \alpha(T - T_c), & T > T_c, \end{cases}$$

где учли, что при  $T > T_c$  спонтанная намагниченность  $M_0 = 0$ .

## 4 Магнетизм

### Гамильтониан Гейзенберга (локализованные магнитные моменты)

Для системы атомарных спинов в решётке ферромагнетика запишем гамильтониан Гейзенберга:

$$\hat{H} = -\mu_0 g \sum_i \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \mathbf{B} - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} J_{ij} \hat{\mathbf{S}}_i \hat{\mathbf{S}}_j.$$

Будем считать, что  $\mathbf{M} = \mu_0 g n \langle \mathbf{S} \rangle$  и отклонения спинов от среднего значения малы

$$\hat{\mathbf{S}}_i = \langle \mathbf{S} \rangle + \delta \hat{\mathbf{S}}_i, \quad \delta S_i \ll \langle S \rangle.$$

Тогда гамильтониан Гейзенберга представим в виде

$$\hat{H} = -\mu_0 g \sum_i \hat{\mathbf{S}}_i \left( \mathbf{B} + \frac{1}{\mu_0 g} \sum_{i \neq j} J_{ij} \langle \mathbf{S} \rangle \right),$$

где выражение в скобках и есть  $\mathbf{B}_{\text{eff}} = \mathbf{B} + b\mathbf{M}$ , где  $b = zJ/n\mu_0^2 g^2$ .

<sup>2</sup>Подробнее про отсутствие других производных от  $\eta$  можно прочесть в ЛЛ5 §146.

Теперь вспомним, что во внешнем поле  $B_{\text{eff}}$  намагниченность двухуровневой системы определяется

$$M = n\mu\mathbb{B}(\mu B_{\text{eff}}/T),$$

где  $\mathbb{B}$  – функция Бриллюэна с разложением  $\mathbb{B}(x) = \alpha x - \beta x^3$ ,  $\alpha = (S+1)/3S$ ,  $\beta = \alpha(2S^2 + 2S + 1)/30S^2$ .

Таким образом намагниченность является решением системы уравнений

$$\begin{cases} M = n\mu(\alpha x - \beta x^3 + \dots), \\ M = \frac{T}{\mu b}x - \frac{B}{b}, \end{cases}$$

где  $x = \mu B_{\text{eff}}/T$ . В отсутствие внешнего поля  $B = 0$  температура Кюри будет

$$T_c = \frac{1}{3}S(S+1)zJ,$$

где  $z$  – количество ближайших соседей в решётке.

## Гамильтониан Хаббарда (делокализованные магнитные моменты)

В приближении слабой связи электроны почти свободные, гамильтониан можем записать в виде

$$\hat{H} = \sum_{k\sigma} \varepsilon_k \hat{c}_{k\sigma}^\dagger \hat{c}_{k\sigma} + U_0 \sum_j \hat{n}_{j\uparrow} \hat{n}_{j\downarrow}.$$

Считая  $\langle n_{\uparrow,\downarrow} \rangle = \bar{n} \pm \delta n$ , находим выигрыш от поляризации в потенциальной энергии

$$\Delta_+ = U_0 \langle n_{\uparrow} \rangle \langle n_{\downarrow} \rangle = U_0 (\bar{n}^2 - \delta n^2).$$

Однако заполняя  $|\uparrow\rangle$  состояния, мы раздуваем поверхность Ферми, проигрывая в кинетической энергии на

$$\Delta_- = \delta n \cdot \frac{\delta n}{D(\varepsilon_F)},$$

тогда поляризация свободных электронов будет происходить при

$$U_0 D(\varepsilon_F) > 1,$$

что и составляет *критерий Стонера*.

## 5 Макроскопические квантовые явления

### Критерий сверхтекучести Ландау

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

### Идеальный бозе-газ

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

### Неидеальный Бозе-газ

Рассмотрим гамильтониан

$$H = \sum_p \frac{p^2}{2m} a_p^\dagger a_p + \frac{g}{2V} \sum a_{p_1}^\dagger a_{p_2}^\dagger a_{p_2} a_{p_1},$$

где  $\sum p_{\text{in}} = \sum p_{\text{out}}$ .

Основной вклад идёт от нулевых импульсов:

$$\frac{g}{2V} \sum a_{p_1}^\dagger a_{p_2}^\dagger a_{p_2} a_{p_1} \approx \frac{g}{2V} a_0^\dagger a_0^\dagger a_0 a_0 + \frac{g}{2V} \sum_{p \neq 0} \left( a_0^\dagger a_0^\dagger a_p a_{-p} + a_p^\dagger a_{-p}^\dagger a_0 a_0 + 4a_0^\dagger a_0 a_p^\dagger a_p \right),$$

где первое слагаемое пропорционально

$$N_0^2 = \left(N - \sum_{p \neq 0} a_p^\dagger a_p\right)^2 = N^2 - 2N \sum_{p \neq 0} a_p^\dagger a_p.$$

Итого находим<sup>3</sup>, что

$$H = \frac{gN^2}{2V} + \sum_{p \neq 0} \left[ \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{2gN}{2V} \right) a_p^\dagger a_p + \frac{gN}{2V} (a_p^\dagger a_{-p}^\dagger + a_p a_{-p}) \right],$$

таким образом приходим к квадратичному гамильтониану.

Сделаем каноническое преобразование Боголюбова

$$\begin{cases} a_p = u_p b_p + v_p b_{-p}^\dagger \\ a_p^\dagger = u_p b_p^\dagger + v_p b_{-p} \end{cases} \quad [b_p, b_{p'}^\dagger] = \delta_{pp'}, \quad [b_p, b_{p'}] = 0.$$

Так приходим к ограничениям вида

$$u_p^2 - v_p^2 = 1, \quad v_p = v_{-p}, \quad u_p = u_{-p},$$

более того можем выбрать коэффициенты вещественными.

Из диагонализации, с учетом требований, получаем выражение для  $u_p$  и  $v_p$ :

$$u_p = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon(p)}{E_p}} + \sqrt{\frac{E_p}{\varepsilon(p)}} \right), \quad v_p = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon(p)}{E_p}} - \sqrt{\frac{E_p}{\varepsilon(p)}} \right),$$

где энергия  $\varepsilon(p)$  имеет вид

$$\varepsilon(p) = \sqrt{s^2 p^2 + \left( \frac{p^2}{2m} \right)^2}, \quad s = \sqrt{\frac{gN}{mV}}.$$

Таким образом гамильтониан приводится к виду

$$H = H_0 + \sum_{p \neq 0} \varepsilon(p) b_p^\dagger b_p.$$

Таким образом боголюбоны соответствуют идеальному бозе-газу возмущений.

По критерию Ландау сразу находим

$$v_{\text{кр}} = \min_p \frac{\varepsilon(p)}{p} = s.$$

Найдём количество надконденсатных частиц

$$N_{p \neq 0} = \sum_{p \neq 0} \langle a_p^\dagger a_p \rangle = \sum_{p \neq 0} (u_p^2 \langle b_p^\dagger b_p \rangle + v_p^2 (1 - \langle b_p^\dagger b_p \rangle)) \stackrel{T=0}{=} \sum_p v_p^2 \sim V \cdot (ms)^3.$$

Длину рассеяния  $a$  можем вычислить для  $s$ -рассеяния

$$a = \frac{gm}{4\pi}.$$

Подставляя  $a$  в выражение для  $N_>$ , находим

$$N_{p \neq 0} \sim N \cdot \sqrt{na^3}, \quad \frac{N_{p \neq 0}}{N} \sim \sqrt{na^3}, \quad \Rightarrow \quad N \approx N_0(1 + \dots \sqrt{na^3}).$$

Для введение парных столкновений требуем, чтобы  $na^3 \ll 1$ .

ξ

<sup>3</sup>Вообще около  $a_0^\dagger$  могла быть фаза, но от неё каноническим преобразованием можем избавиться.