

ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

Выполнил: Хоружий Кирилл

От: 18 сентября 2022 г.

I Вероятностное пространство

Свойства вероятности

T1. Найдём все события X : $\overline{X\bar{A}} \cup \overline{X\bar{A}} = B$. Вспоминая $\overline{\cup A} = \cap \bar{A}$ и $\overline{\cap A} = \cup \bar{A}$, получаем

$$XX + (A + \bar{A})X + A\bar{A} = \bar{B}, \Rightarrow X = \bar{B}.$$

T2. Теперь $AX = AB$. Учитывая, что $A\bar{A} = \emptyset$, находим $X = B \cup \bar{A}$.

T3. Покажем, что $P(\bigcup_{k=1}^n A_k) + P(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k) = 1$, действительно:

$$P\left(\bigcup A_k\right) + P\left(\bigcup \bar{A}_k\right) = 1, \Leftrightarrow P(X) + P(\bar{X}) = P(X \cup \bar{X}) = P(\Omega) = 1.$$

T4. X

T5. X

T6. Покажем, что $\forall A, B |P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$. По отдельности, т.к. $P(A) \geq P(AB)$ и $P(B) \geq P(AB)$ находим

$$P(AB) - P(A)P(B) \leq P(AB) - P(AB)^2 = P(AB)(1 - P(AB)) \leq \frac{1}{4}.$$

Теперь с другой стороны, вспоминая $P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A)$, находим

$$P(A)P(B) - P(AB) = P(A)P(B) - (P(A) - P(A\bar{B})) - P(A)P(\bar{B}) + P(A)P(\bar{B}) = P(A\bar{B}) - P(A)P(B) \leq \frac{1}{4},$$

в силу уже доказанного неравенства.

T7. X

Комбинаторика

T8. X

T9. X

T10. Найдём вероятность обнаружить всё четыре масти, взяв 6 карт из колоды. Всего карт каждой масти 13. Пусть событие A_i – не вытащили карты i -й масти. Нам нужно найти $p = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 4P(A_i) - 6P(A_i \cap A_j) + 4P(A_i \cap A_j \cap A_k),$$

так как масти эквивалентны и $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0$. Размер $|\Omega| = C_{52}^6$, тогда

$$P(A_i) = \frac{C_{39}^6}{C_{52}^6}, \quad P(A_i \cap A_j) = \frac{C_{26}^6}{C_{52}^6}, \quad P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{C_{13}^6}{C_{52}^6},$$

откуда находим

$$p = 1 - \frac{4C_{39}^6 - 6C_{26}^6 + 4C_{13}^6}{C_{52}^6} \approx 0.43.$$

T11. Пусть A_i – i -е письмо в нужном конверте, $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$. Тогда по формуле включений-исключений

$$P(A) = nP(A_1) - C_n^2 P(A_i A_j) + C_n^3 P(A_i A_j A_k) - \dots,$$

где соответствующие вероятности

$$P(A_i) = \frac{1}{n}, \quad P(A_i A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}, \quad \dots$$

Подставляя, находим

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!}, \quad 1 - P(A) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}.$$

T12. Раз половина людей имеет 50-рублевые купюры, а друга половина 100-рублевые, то можем сопоставить первым открывающие скобки, а вторым закрывающие. Таким образом задача сводится к подсчёту количества правильных скобочных последовательностей. Мощность $|\Omega| = C_{2n}^n$, тогда

$$P = \frac{C_n}{C_{2n}^n} = \frac{1}{n+1},$$

где числа Каталана $C_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$.

Геометрическая вероятность

T13. Пусть интервал движения автобусов $T = 25$ мин, время пути автобуса $t = 2$ мин, и время пути пешехода $\tau = 15$ мин. Выделим интервал от момента, когда первый автобус выехал ($t = 0$), до момента когда доехал второй автобус ($t = T + \tau$). Пешеход пересечётся с автобусом только при времени выхода $t_{\text{п}} \geq T + t - \tau$, а значит

$$P = 1 - \frac{T + t - \tau}{T} = \frac{13}{25} = 0.52.$$

T14. Пусть первая точка $x \in [0, 1]$ – координата первой точки, $y \in [0, 1]$ – координата второй точки (выбираем $y > x$). Стороны треугольника тогда должны быть фиксированы

$$a = x, \quad b = y - x, \quad c = 1 - y, \quad a + b \leq c, \quad a + c \leq b, \quad b + c \leq a,$$

которые задают на вероятностном пространстве треугольничек в $1/8$ от квадрата, и в $1/3$ от вероятностного пространства (в силу выбора $y > x$), таким образом искомая вероятность равна $1/4$.

T15 (задача Дюффона). Считая $l \leq L$, можем написать геометрическую вероятность в виде

$$P = \frac{1}{\pi L} \int_0^\pi \int_0^{l \sin \theta} dx d\theta = \frac{2}{\pi} \frac{l}{L},$$

где l – длина иглы, L – расстояние между полосками.

T16. Аналогично пусть $x \in [0, 1]$ – координата первой точки, $y \in [0, 1]$ – координата второй точки. Вероятность третьей точки быть между ними равна $|x - y|$, тогда

$$P = \int_0^1 dx \int_0^1 dy |x - y| = \int_0^1 dx \left(\int_0^x (x - y) dy + \int_x^1 (y - x) dy \right) = \frac{1}{3},$$

что вполне соответствует интуиции.