

ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

Выполнил: Хоружий Кирилл

От: 27 ноября 2022 г.

Содержание

1	Первое задание	2
I	Вероятностное пространство	2
II	Условные вероятности и формула Байеса	3
III	Случайные величины	4
IV	Математическое ожидание, дисперсия и ковариация	4
V	Математическое ожидание, дисперсия и ковариация	5
2	Второе задание	5
II	Метод характеристических функций	5
III	Элементы теории случайных процессов	5

1 Первое задание

I Вероятностное пространство

Свойства вероятности

T1. Найдём все события X : $\overline{X}\bar{A} \cup \overline{X}\bar{A} = B$. Вспоминая $\overline{\cup A} = \cap \bar{A}$ и $\overline{\cap A} = \cup \bar{A}$, получаем

$$XX + (A + \bar{A})X + A\bar{A} = \bar{B}, \quad \Rightarrow \quad X = \bar{B}.$$

T2. Теперь $AX = AB$. Учитывая, что $A\bar{A} = \emptyset$, находим $X = B \cup \bar{A}$.

T3. Покажем, что $P(\bigcup_{k=1}^n A_k) + P(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k) = 1$, действительно:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + P\left(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k\right) = 1, \quad \Leftarrow \quad P(X) + P(\bar{X}) = P(X \cup \bar{X}) = P(\Omega) = 1.$$

T4. Знаем, что $P(A_n) = 1$, тогда

$$P(A_n \Delta \Omega) = 0, \quad \Rightarrow \quad P(\cap_{n=1}^{\infty} A_n \Delta \Omega) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \Delta \Omega) = 0,$$

откуда получаем требуемое утверждение.

T5. Начнём с $P(\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$:

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k = \lim_n B_n.$$

По непрерывности меры $P(\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n)$, и так как B_n – пересечения A_k , то есть $P(B_n) \leq P(A_n)$, получаем

$$P(\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

Теперь покажем, что $\varliminf_{n \rightarrow \infty} P(A_n) \leq \overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} P(A_n)}$. Равносильно

$$\inf_{\{i\}} \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_j) \leq \sup_{\{j\}} \lim_{j \rightarrow \infty} P(A_j),$$

что доказывает утверждение.

Покажем $\overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} P(A_n)} \leq P(\overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n})$:

$$\overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^n A_k = \lim_n B_n,$$

получилась монотонная последовательность. По непрерывности

$$P(\overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n),$$

но $P(B_n) \geq P(A_n)$, откуда находим

$$P(\overline{\varliminf_{n \rightarrow \infty} A_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

T6. Покажем, что $\forall A, B \quad |P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$. По отдельности, т.к. $P(A) \geq P(AB)$ и $P(B) \geq P(AB)$ находим

$$P(AB) - P(A)P(B) \leq P(AB) - P(AB)^2 = P(AB)(1 - P(AB)) \leq \frac{1}{4}.$$

Теперь с другой стороны, вспоминая $P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A)$, находим

$$P(A)P(B) - P(AB) = P(A)P(B) - (P(A) - P(A\bar{B})) - P(A)P(\bar{B}) + P(A)P(\bar{B}) = P(A\bar{B}) - P(A)P(B) \leq \frac{1}{4},$$

в силу уже доказанного неравенства.

T7. Возьмём $A_{2k} = \Omega$ и $A_{2k+1} = \emptyset$.

Комбинаторика

T8. Хотя бы 1 единица на четырёх костях – A , хотя бы одна пара единиц при 24 бросках двух кубов – B :

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0.52, \quad P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.49, \quad \Rightarrow \quad P(A) > P(B).$$

T9. Перебрав все варианты

$$(6, 4, 1) \times 6, (6, 3, 2) \times 6, \dots, (4, 4, 3) \times 3,$$

находим 27 реализаций для 11 очков и 25 реализаций для 12 очков, таким образом 11 выпадает чаще.

T10. Найдём вероятность обнаружить всё четыре масти, взяв 6 карт из колоды. Всего карт каждой масти 13. Пусть событие A_i – не вытащили карты i -й масти. Нам нужно найти $p = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 4P(A_i) - 6P(A_i \cap A_j) + 4P(A_i \cap A_j \cap A_k),$$

так как масти эквивалентны и $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0$. Размер $|\Omega| = C_{52}^6$, тогда

$$P(A_i) = \frac{C_{39}^6}{C_{52}^6}, \quad P(A_i \cap A_j) = \frac{C_{26}^6}{C_{52}^6}, \quad P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{C_{13}^6}{C_{52}^6},$$

откуда находим

$$p = 1 - \frac{4C_{39}^6 - 6C_{26}^6 + 4C_{13}^6}{C_{52}^6} \approx 0.43.$$

T11. Пусть A_i – i -е письмо в нужном конверте, $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$. Тогда по формуле включений-исключений

$$P(A) = nP(A_1) - C_n^2 P(A_i A_j) + C_n^3 P(A_i A_j A_k) - \dots,$$

где соответствующие вероятности

$$P(A_i) = \frac{1}{n}, \quad P(A_i A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}, \quad \dots$$

Подставляя, находим

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!}, \quad 1 - P(A) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}.$$

T12. Раз половина людей имеет 50-рублевые купюры, а другая половина 100-рублевые, то можем сопоставить первым открывающие скобки, а вторым закрывающие. Таким образом задача сводится к подсчёту количества правильных скобочных последовательностей. Мощность $|\Omega| = C_{2n}^n$, тогда

$$P = \frac{C_n}{C_{2n}^n} = \frac{1}{n+1},$$

где числа Каталана $C_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$.

Геометрическая вероятность

T13. Пусть интервал движения автобусов $T = 25$ мин, время пути автобуса $t = 2$ мин, и время пути пешехода $\tau = 15$ мин. Выделим интервал от момента, когда первый автобус выехал ($t = 0$), до момента когда доехал второй автобус ($t = T + t$). Пешеход пересечётся с автобусом только при времени выхода $t_{\text{п}} \geq T + t - \tau$, а значит

$$P = 1 - \frac{T + t - \tau}{T} = \frac{13}{25} = 0.52.$$

T14. Пусть первая точка $x \in [0, 1]$ – координата первой точки, $y \in [0, 1]$ – координата второй точки (выбираем $y > x$). Стороны треугольника тогда должны быть фиксированы

$$a = x, \quad b = y - x, \quad c = 1 - y, \quad a + b \leq c, \quad a + c \leq b, \quad b + c \leq a,$$

которые задают на вероятностном пространстве треугольничек в $1/8$ от квадрата, и в $1/3$ от вероятностного пространства (в силу выбора $y > x$), таким образом искомая вероятность равна $1/4$.

T15 (задача Дюффона). Считая $l \leq L$, можем написать геометрическую вероятность в виде

$$P = \frac{1}{\pi L} \int_0^\pi \int_0^{l \sin \theta} dx d\theta = \frac{2}{\pi} \frac{l}{L},$$

где l – длина иглы, L – расстояние между полосками.

T16. Аналогично пусть $x \in [0, 1]$ – координата первой точки, $y \in [0, 1]$ – координата второй точки. Вероятность третьей точке быть между ними равна $|x - y|$, тогда

$$P = \int_0^1 dx \int_0^1 dy |x - y| = \int_0^1 dx \left(\int_0^x (x - y) dy + \int_x^1 (y - x) dy \right) = \frac{1}{3},$$

что вполне соответствует интуиции.

II Условные вероятности и формула Байеса

T17. ✗

T18. ✗

T19. ✗

T20. ✗

T21. ✗

T22. Пусть A – потопление корабля, гипотезы H_m – попадание в корабль m торпед, $m = 1, \dots, n$:

$$P(H_m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Найдём $P(A|H_m)$. Для $m = 1$ по условию $P(A|H_1) = 0$, для $m \geq 2$ корабль не потопили только если все торпеды в одном отсеке:

$$P(A|H_m) = 1 - k \left(\frac{1}{k} \right)^m = 1 - k^{1-m},$$

тогда полная вероятность потопления

$$P(A) = \sum_{m=2}^n P(H_m) P(A|H_m) = \sum_{m=2}^n C_n^m p^m (1-p)^{n-m} (1 - k^{1-m}).$$

T23. ✗

III Случайные величины

T24. ✗

T25. ✗

T26. В квадрат брошена точка в (ξ_1, ξ_2) . Найдём функцию распределения и плотность $\eta = \xi_1 + \xi_2$. Обозначив плотность распределения за f_1 и f_2 соответственно, можем найти

$$f_\eta(y) = \int_0^1 f_1(y-x_2) f_2(x_2) dx_2 = \int_{\max(0, y-1)}^{\min(1, y)} dx_2 = \begin{cases} y, & 0 \leq y < 1, \\ 2-y, & 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

Интегрируя, находим $F_\eta(y)$:

$$F_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y^2, & 0 \leq y < 1, \\ 2y - \frac{1}{2}y^2 - 1, & 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$$

T27. Пусть $\xi_1, \xi_2 \in P_\lambda$ – независимые случайные величины. Для суммы $\xi_1 + \xi_2 = \eta$, $x_1 + x_2 = y$ можем найти

$$P(\eta = y) = \sum_{x_1, x_2: x_1+x_2=y} P_{\xi_1}(x_1) P_{\xi_2}(x_2) = \sum_{0 \leq x_1 \leq y} \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{x_1! (y-x_1)!} = \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{y!} 2^y.$$

Условное распределение ξ_1 при известной $\eta = \xi_1 + \xi_2$ найдём в виде

$$\frac{P(\xi_1 = x, \eta = y)}{P(\eta = y)} = \frac{P(\xi_1 = x) P(\xi_2 = y-x)}{P(\eta = y)} = \frac{C_y^x}{2^y}.$$

T28. Известно, что случайная величина ξ имеет строго возрастающую непрерывную функцию распределения $F_\xi(x)$. Найдём распределение случайной величины $\eta = F_\xi(\xi)$:

$$F_\eta(x) = P(F(\xi) < x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ P(\xi < F^{-1}(x)), & x \in (0, 1), \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

По определению $P(\xi < F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x$, получается $\eta \in U_{0,1}$.

T29. Пусть $\xi \in N_{0,1}$, найдём функцию распределения $F_{\xi^2}(x)$ и плотность $f_{\xi^2}(x)$. Нас интересуют все такие $x^2 = y$ или $x = \sqrt{y}$, тогда

$$f_\xi(x) dx \xrightarrow{x=\sqrt{y}} \frac{f_\xi(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} dy, \quad \Rightarrow \quad f_{\xi^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}.$$

Теперь по определению находим функцию распределения

$$F_{\xi^2}(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{y}} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\sqrt{y}^2/2} d\sqrt{y} = \text{Erf} \left(\sqrt{\frac{z}{2}} \right).$$

T30. ✗

T31. Можем решать эту задачу в терминах геометрической вероятности, тогда на кубе $[0, 1]^3$ задана система неравенств

$$|x-y| \geq \frac{1}{4}, \quad |z-y| \geq \frac{1}{4}, \quad |x-z| \geq \frac{1}{4},$$

которые формируют в кубе 6 одинаковых пирамидок объёма $1/48$, тогда искомая вероятность равна $1/8$.

IV Математическое ожидание, дисперсия и ковариация

T32. ✗

Т33. ✗
Т34. ✗
Т34. ✗

V Математическое ожидание, дисперсия и ковариация

Т32. ✗
Т33. ✗
Т34. ✗
Т34. ✗

2 Второе задание

II Метод характеристических функций

Т10. Для $f_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, найдём $h(t)$:

$$h(t) = \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty e^{(it-1)x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{(it+1)x} dx \right) = \frac{1}{t^2 + 1}.$$

Т11. Для нормального распределения с параметрами (a, σ^2) , можем вспомнить

$$h_{a\xi+b} = e^{itb} h_\xi(at), \quad \Rightarrow \quad h(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2} e^{ita}.$$

Т12. Обратная задача, найдем распределения через обратный Фурье образ $\cos t$:

$$\mathcal{F}^{-1}[\cos t] = \frac{1}{2} (\delta(x-1) + \delta(x+1)), \quad \Rightarrow \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ 1/2, & -1 < x < 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$$

Теперь для $h_2(t)$:

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t + \frac{i}{6} \sin t \right] = \frac{1}{3} \delta(x-1) + \frac{1}{2} \delta(x) + \frac{1}{6} \delta(x+1).$$

Т13. Найдём функцию распределения для $h(t) = e^{-t^2} \cos t$. В принципе можно снова вспомнить $h_{a\xi+b}$ и сразу написать ответ:

$$h(t) = \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{1}{4}(x+1)^2} + e^{-\frac{1}{4}(x-1)^2} \right) = \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4} \operatorname{ch} \left(\frac{x}{2} \right).$$

Т14. Характеристическая функция должна быть равномерно непрерывной. Функция $\cos t^2$ не является равномерно непрерывной, в силу неограниченности производной $-2 \sin(t^2)t$.

Т15. Вспомнив характеристическую функцию для распределения Пуассона

$$f_{\xi_\lambda} = \exp(\lambda(e^{it} - 1)),$$

можем получить для случайной величина $\eta = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\xi_\lambda - \lambda)$ характеристическую функцию

$$f_\eta = \exp \left(-it\sqrt{\lambda} + \lambda \left(e^{it/\sqrt{\lambda}} - 1 \right) \right) = \exp \left(-t^2 + o(1/\sqrt{\lambda}) \right), \quad \Rightarrow \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P \left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq x \right) = \int_{-\infty}^x e^{-y^2} dy.$$

Т16. Теперь можем найти предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=1}^n \frac{n^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n \leq n) = P \left(\frac{1}{\sqrt{n}}(\xi_n - n) \leq 0 \right) = \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

III Элементы теории случайных процессов

Т18. Исходя из того, что сумма по столбцам должна быть единичной, можем составить матрицу

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.5 & 0.6 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix},$$

тогда $\Pi \mathbf{p} = (0.32, 0.53, 0.15)$. Стационарное состояние можем найти через собственный вектор

$$\Pi \mathbf{q} = \mathbf{q}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q} = \frac{1}{9} (3, 5, 1).$$

Т19. Для двухуровневой системы с матрицей перехода

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix},$$

найдем собственные векторы и перейдем в их базис

$$\mathbf{q}\Pi = \mathbf{q}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q}_1 = (1/2, 1/2), \quad \lambda_1 = 1 \quad \mathbf{q}_2 = (\alpha, -\beta), \quad \lambda_2 = 1 - \alpha - \beta.$$

Тогда можем найти степень матрицы

$$\Pi = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S^{-1}, \quad \Pi^n = S \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} S^{-1} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \alpha\lambda_2^n + \beta & \alpha(1 - \lambda_2^n) \\ \beta(1 - \lambda_2^n) & \alpha + \beta\lambda_2^n \end{pmatrix},$$

и соответственно предельное распределение $(1/2, 1/2)$.