

# ЗАДАНИЕ ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

---

Выполнил: Хоружий Кирилл

От: 2 октября 2022 г.

## Содержание

I Вероятностное пространство	2
II Условные вероятности и формула Байеса	3
III Случайные величины	3

# I Вероятностное пространство

## Свойства вероятности

**T1.** Найдём все события  $X$ :  $\overline{X\bar{A}} \cup \overline{X\bar{A}} = B$ . Вспоминая  $\overline{\cup A} = \cap \bar{A}$  и  $\overline{\cap A} = \cup \bar{A}$ , получаем

$$XX + (A + \bar{A})X + A\bar{A} = \bar{B}, \quad \Rightarrow \quad X = \bar{B}.$$

**T2.** Теперь  $AX = AB$ . Учитывая, что  $A\bar{A} = \emptyset$ , находим  $X = B \cup \bar{A}$ .

**T3.** Покажем, что  $P(\bigcup_{k=1}^n A_k) + P(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k) = 1$ , действительно:

$$P\left(\bigcup A_k\right) + P\left(\bigcup \bar{A}_k\right) = 1, \quad \Leftarrow \quad P(X) + P(\bar{X}) = P(X \cup \bar{X}) = P(\Omega) = 1.$$

**T4. X**

**T5. X**

**T6.** Покажем, что  $\forall A, B |P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$ . По отдельности, т.к.  $P(A) \geq P(AB)$  и  $P(B) \geq P(AB)$  находим

$$P(AB) - P(A)P(B) \leq P(AB) - P(AB)^2 = P(AB)(1 - P(AB)) \leq \frac{1}{4}.$$

Теперь с другой стороны, вспоминая  $P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A)$ , находим

$$P(A)P(B) - P(AB) = P(A)P(B) - (P(A) - P(A\bar{B})) - P(A)P(\bar{B}) + P(A)P(\bar{B}) = P(A\bar{B}) - P(A)P(B) \leq \frac{1}{4},$$

в силу уже доказанного неравенства.

**T7. X**

## Комбинаторика

**T8. X**

**T9. X**

**T10.** Найдём вероятность обнаружить всё четыре масти, взяв 6 карт из колоды. Всего карт каждой масти 13. Пусть событие  $A_i$  – не вытащили карты  $i$ -й масти. Нам нужно найти  $p = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$ :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 4P(A_i) - 6P(A_i \cap A_j) + 4P(A_i \cap A_j \cap A_k),$$

так как масти эквивалентны и  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0$ . Размер  $|\Omega| = C_{52}^6$ , тогда

$$P(A_i) = \frac{C_{39}^6}{C_{52}^6}, \quad P(A_i \cap A_j) = \frac{C_{26}^6}{C_{52}^6}, \quad P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{C_{13}^6}{C_{52}^6},$$

откуда находим

$$p = 1 - \frac{4C_{39}^6 - 6C_{26}^6 + 4C_{13}^6}{C_{52}^6} \approx 0.43.$$

**T11.** Пусть  $A_i$  –  $i$ -е письмо в нужном конверте,  $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ . Тогда по формуле включений-исключений

$$P(A) = nP(A_1) - C_n^2 P(A_i A_j) + C_n^3 P(A_i A_j A_k) - \dots,$$

где соответствующие вероятности

$$P(A_i) = \frac{1}{n}, \quad P(A_i A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}, \quad \dots$$

Подставляя, находим

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!}, \quad 1 - P(A) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}.$$

**T12.** Раз половина людей имеет 50-рублевые купюры, а друга половина 100-рублевые, то можем сопоставить первым открывающие скобки, а вторым закрывающие. Таким образом задача сводится к подсчёту количества правильных скобочных последовательностей. Мощность  $|\Omega| = C_{2n}^n$ , тогда

$$P = \frac{C_n}{C_{2n}^n} = \frac{1}{n+1},$$

где числа Каталана  $C_n = C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$ .

## Геометрическая вероятность

**T13.** Пусть интервал движения автобусов  $T = 25$  мин, время пути автобуса  $t = 2$  мин, и время пути пешехода  $\tau = 15$  мин. Выделим интервал от момента, когда первый автобус выехал ( $t = 0$ ), до момента когда доехал второй

автобус ( $t = T + t$ ). Пешеход пересечётся с автобусом только при времени выхода  $t_{\text{п}} \geqslant T + t - \tau$ , а значит

$$P = 1 - \frac{T + t - \tau}{T} = \frac{13}{25} = 0.52.$$

**T14.** Пусть первая точка  $x \in [0, 1]$  – координата первой точки,  $y \in [0, 1]$  – координата второй точки (выбираем  $y > x$ ). Стороны треугольника тогда должны быть фиксированы

$$a = x, \quad b = y - x, \quad c = 1 - y, \quad a + b \leqslant c, \quad a + c \leqslant b, \quad b + c \leqslant a,$$

которые задают на вероятностном пространстве треугольничек в  $1/8$  от квадрата, и в  $1/3$  от вероятностного пространства (в силу выбора  $y > x$ ), таким образом искомая вероятность равна  $1/4$ .

**T15 (задача Дюффона).** Считая  $l \leqslant L$ , можем написать геометрическую вероятность в виде

$$P = \frac{1}{\pi L} \int_0^{\pi} \int_0^{l \sin \theta} dx d\theta = \frac{2}{\pi} \frac{l}{L},$$

где  $l$  – длина иглы,  $L$  – расстояние между полосками.

**T16.** Аналогично пусть  $x \in [0, 1]$  – координата первой точки,  $y \in [0, 1]$  – координата второй точки. Вероятность третьей точке быть между ними равна  $|x - y|$ , тогда

$$P = \int_0^1 dx \int_0^1 dy |x - y| = \int_0^1 dx \left( \int_0^x (x - y) dy + \int_x^1 (y - x) dy \right) = \frac{1}{3},$$

что вполне соответствует интуиции.

## II Условные вероятности и формула Байеса

**T17.** X

**T18.** X

**T19.** X

**T20.** X

**T21.** X

**T22.** Пусть  $A$  – потопление корабля, гипотезы  $H_m$  – попадание в корабль  $m$  торпед,  $m = 1, \dots, n$ :

$$P(H_m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Найдём  $P(A|H_m)$ . Для  $m = 1$  по условию  $P(A|H_1) = 0$ , для  $m \geqslant 2$  корабль не потопили только если все торпеды в одном отсеке:

$$P(A|H_m) = 1 - k \left( \frac{1}{k} \right)^m = 1 - k^{1-m},$$

тогда полная вероятность потопления

$$P(A) = \sum_{m=2}^n P(H_m)P(A|H_m) = \sum_{m=2}^n C_n^m p^m (1-p)^{n-m} (1 - k^{1-m}).$$

**T23.** X

## III Случайные величины

**T24.** X

**T25.** X

**T26.** В квадрат брошена точка в  $(\xi_1, \xi_2)$ . Найдём функцию распределения и плотность  $\eta = \xi_1 + \xi_2$ . Обозначив плотность распределения за  $f_1$  и  $f_2$  соответственно, можем найти

$$f_\eta(y) = \int_0^1 f_1(y - x_2) f_2(x_2) dx_2 = \int_{\max(0, y-1)}^{\min(1, y)} dx_2 = \begin{cases} y, & 0 \leqslant y < 1, \\ 2 - y, & 1 \leqslant y \leqslant 2. \end{cases}$$

Интегрируя, находим  $F_\eta(y)$ :

$$F_\eta(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y^2, & 0 \leqslant y < 1, \\ 2y - \frac{1}{2}y^2 - 1, & 1 \leqslant y \leqslant 2. \end{cases}$$

**T27.** Пусть  $\xi_1, \xi_2 \in P_\lambda$  – независимые случайные величины. Для суммы  $\xi_1 + \xi_2 = \eta$ ,  $x_1 + x_2 = y$  можем найти

$$P(\eta = y) = \sum_{x_1, x_2 : x_1 + x_2 = y} P_{\xi_1}(x_1) P_{\xi_2}(x_2) = \sum_{0 \leqslant x_1 \leqslant y} \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{x_1!(y-x_1)!} = \frac{\lambda^y e^{-2\lambda}}{y!} 2^y.$$

Условное распределение  $\xi_1$  при известной  $\eta = \xi_1 + \xi_2$  найдём в виде

$$\frac{P(\xi_1 = x, \eta = y)}{P(y = \eta)} = \frac{P(\xi_1 = x)P(\xi_2 = y - x)}{P(y = \eta)} = \frac{C_y^x}{2^y}.$$

**Т28.** Известно, что случайная величина  $\xi$  имеет строго возрастающую непрерывную функцию распределения  $F_\xi(x)$ . Найдём распределение случайной величины  $\eta = F_\xi(\xi)$ :

$$F_\eta(x) = P(F(\xi) < x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ P(\xi < F^{-1}(x)), & x \in (0, 1), \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

По определению  $P(\xi < F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x$ , получается  $\eta \in U_{0,1}$ .

**Т29.** Пусть  $\xi \in N_{0,1}$ , найдём функцию распределения  $F_{\xi^2}(x)$  и плотность  $f_{\xi^2}(x)$ . Нас интересуют все такие  $x^2 = y$  или  $x = \sqrt{y}$ , тогда

$$f_\xi(x) dx \xrightarrow{x=\sqrt{y}} \frac{f_\xi(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} dy, \quad \Rightarrow \quad f_{\xi^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}.$$

Теперь по определению находим функцию распределения

$$F_{\xi^2}(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{y}} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\sqrt{y^2/2}} d\sqrt{y} = \text{Erf}\left(\sqrt{\frac{z}{2}}\right).$$

**Т30. X**

**Т31.** Можем решать эту задачу в терминах геометрической вероятности, тогда на кубе  $[0, 1]^3$  задана система неравенств

$$|x - y| \geq \frac{1}{4}, \quad |z - y| \geq \frac{1}{4}, \quad |x - z| \geq \frac{1}{4},$$

которые формируют в кубе 6 одинаковых пирамидок объёма  $1/48$ , тогда искомая вероятность равна  $1/8$ .