Название

Авторы заметок: Хоружий Кирилл

От: *24 марта 2023 г.*

Содержание

Начнём с уравнение Лиувилля, считая заданными $\boldsymbol{r}^N = (\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$ и $\boldsymbol{p}^N = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}_i}, \qquad \dot{\boldsymbol{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}_i},$$

где Гамильтониан запишется в виде

$$H = K(\boldsymbol{p}^N) + V(\boldsymbol{r}^N) + \Phi(\boldsymbol{r}^N), \qquad K(\boldsymbol{p}^N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m}, \quad \Phi(\boldsymbol{r}^N) = \sum_{i=1}^{N} \varphi(\boldsymbol{r}_i).$$

Введём также функцию распределения $f^{[N]}(\boldsymbol{r}^N, \boldsymbol{p}^N, t)$ так чтобы $f^{[N]}(\boldsymbol{r}^N, \boldsymbol{p}^N, t)\, d\boldsymbol{r}^N\, d\boldsymbol{p}^N$ – вероятность находиться в данной точке фазового пространства. Нормировка единичная.

Закон сохранения. Закон сохранения в дифференциальном виде запишется в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0,$$

где в нашем случае ρ – $f^{[N]}$, и $\boldsymbol{j} = \{f^{[N]}\dot{\boldsymbol{r}}_i, f^{[N]}\dot{\boldsymbol{p}}_i\}$, тогда

$$\frac{\partial f^{[N]}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} \left[f^{[N]} \dot{\boldsymbol{r}}_i \right] + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_i} \left[f^{[N]} \dot{\boldsymbol{p}}_i \right] \right) = \frac{df^{[N]}}{dt} = 0,$$

при подстановке уранений Гамильтона.

Редуцированная функция. Редуцированная функция $f^{(n)}$ определяется как

$$f^{(n)}(\boldsymbol{r}^n, \boldsymbol{p}^n, t) = \frac{N!}{(N-n)!} \int f^{[N]}(\boldsymbol{r}^N, \boldsymbol{p}^N, t)\, d\boldsymbol{r}^{(N-n)}\, d\boldsymbol{p}^{(N-n)},$$

где $d\boldsymbol{r}^{(N-n)} = d\boldsymbol{r}_{n+1} \ldots d\boldsymbol{r}_N$ и $d\boldsymbol{p}^{(N-n)} = d\boldsymbol{p}_{n+1} \ldots d\boldsymbol{p}_N$.

Работаем приближение потенциального внешнего поля

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = \boldsymbol{X}_i + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_j), \qquad \boldsymbol{F}_{ii} = 0.$$

Тогда сохранение перепишется в виде

$$\frac{\partial f^{[N]}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m} \frac{\partial f^{[N]}}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{X}_i \frac{\partial f^{[N]}}{\partial \boldsymbol{p}_i} = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ij} \frac{\partial f^{[N]}}{\partial \boldsymbol{p}_i}.$$

При редуцирование в силу ограниченности в фазовом пространстве, остаётся

$$\frac{\partial f^{(n)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m} \frac{\partial f^{(n)}}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i \frac{\partial f^{(n)}}{\partial \boldsymbol{p}_i} = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ij} \frac{\partial f^{(n)}}{\partial \dot{\boldsymbol{p}}_i} - \frac{N!}{(N-n)!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n+1}^{N} \int \boldsymbol{F}_{ij} \frac{\partial f^{[N]}}{\partial \boldsymbol{p}_i}\, d\boldsymbol{r}^{(N-n)}\, d\boldsymbol{p}^{(N-n)}.$$

С учетом симметричности функции распределения, последнее слагаемое можем переписать в виде

$$-\frac{N!(N-n)}{(N-n)!} \sum_{i=1}^{n} \int F_{i,n+1} \frac{\partial f^{[N]}}{\partial \boldsymbol{p}_i}\, d\boldsymbol{r}^{(N-n-1)}\, d\boldsymbol{p}^{(N-n-1)}\, d\boldsymbol{r}_{n+1}\, d\boldsymbol{p}_{n+1},$$

Так приходим к выражению, вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \sum_{i=1}^{n} \left[\boldsymbol{X}_i + \sum_{j=1}^{n} F_{ij} \right] \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_i} \right) f^{(n)} = -\sum_{i=1}^{n} \int F_{i,n+1} \frac{\partial f^{(n+1)}}{\partial \boldsymbol{p}_i}\, d\boldsymbol{r}_{n+1}\, d\boldsymbol{p}_{n+1}.$$

Эта система уравнений называется цепочкой уравнений Боголюбова-Борна-Грина Обычно интерес представляют $n = 1, 2$, кстати $\int f^{(n)}\, d\boldsymbol{r}^n\, d\boldsymbol{p}^n = \frac{N!}{(N-n)!}$.

Одночастичный случай

Для $n = 1$ уравнение сведётся к

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{X}_1 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} \right) f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t) = -\int \boldsymbol{F}_{12} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} f^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_2, t)\, d\boldsymbol{r}_2\, d\boldsymbol{p}_2.$$

В силу отсутствия кореляций между столкновениями попробуем сделать приближение

$$f^{(2)}(\xi_1, \xi_2, t) = f^{(1)}(\xi_1^t) f^{(1)}(\xi_2^t).$$

Определяя

$$\tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{r}, t) = \int \boldsymbol{F}_{12}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) f^{(1)}(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_2, t)\, d\boldsymbol{r}_2\, d\boldsymbol{p}_2,$$

приходим к бесстолкновительному уравнению Власова

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}+\left[\boldsymbol{X}_1+\tilde{\boldsymbol{F}}\right]\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1}\right)f^{(1)}=0. \tag{1}$$

которое валидно при $nd^3 \gg 1$.

Двухчастичный случай

Для $n=2$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}+\frac{\boldsymbol{p}_2}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2}+\left[\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{F}_{12}\right]\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1}+\left[\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{F}_{21}\right]\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_2}\right)f^{(2)}(\xi_1,\xi_2,t)=-\int\left(\boldsymbol{F}_{13}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1}+\boldsymbol{F}_{23}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_2}\right)f^{(3)}\,d\boldsymbol{r}_3\,d\boldsymbol{p}_3$$

Считая $nd^3 \ll 1$, можем игнорировать[1] трёхчастичные столкновения, тогда

$$\left(\frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}+\frac{\boldsymbol{p}_2}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2}+F_{12}\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1}-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_2}\right]\right)f^{(2)}=0.$$

Переходя к координатам, находим

$$\boldsymbol{F}_{12}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1}-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_2}\right)f^{(2)}=-\left(\frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}+\frac{\boldsymbol{p}_2}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2}\right)f^{(2)}.$$

Введём $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{R}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)$, тогда

$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \boldsymbol{R}} \ll \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \boldsymbol{r}}.$$

Возвращаемся к одночастичной функции, интегрируя находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}+\boldsymbol{X}_1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1}\right)f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\,\boldsymbol{p}_1,\,t)=-\int \boldsymbol{F}_{12}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1}-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_2}\right)f^{(2)}\,d\xi_2=\int\left[\frac{\boldsymbol{p}_2}{m}-\frac{\boldsymbol{p}_2}{m}\right]\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \boldsymbol{r}}\,d\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{p}_2,$$

продолжая с правой частью, вводя $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}=\frac{\boldsymbol{p}_2}{m}-\frac{\boldsymbol{p}_1}{m}$ находим

$$\int dp_2\,d^2\sigma\,dz\boldsymbol{v}_{\text{отн}}\left(f^{(2)}(t_+)-f^{(2)}(t_-)\right).$$

После столкновения меняются импульсы частиц, тогда правую часть можем переписать в виде

$$\int d\boldsymbol{p}_2\,d^2\sigma\boldsymbol{v}_{\text{отн}}\left(f^{(1)}(\boldsymbol{p}_2',\boldsymbol{r},t)f^{(1)}(\boldsymbol{p}_1',\boldsymbol{r},t)-f^{(1)}(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{r},t)f^{(1)}(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{r},t)\right),\quad \text{– интеграл столкновений.} \tag{2}$$

Формально есть частицы прилетевшие и улетевшие. К слову, $d\boldsymbol{p}_1\,d\boldsymbol{p}_2 = d\boldsymbol{p}_1'\,d\boldsymbol{p}_2'$.

Формула Друде

Общефизическое рассмотрение. Рассмотрим движение электронов под действием электрического поля

$$m(\ddot{x}+\gamma\dot{x})=eE,$$

в установившемся режиме $\ddot{x}=0$, $\gamma=1/\tau$, где τ – время столкновений. Так находим

$$v=\frac{e\tau}{m}E,\qquad j=env=\frac{ne^2}{m}\tau E,\qquad \Rightarrow\qquad \sigma_{\text{D}}=\frac{ne^2}{m}\tau.$$

τ-приближение. Воспользуемся τ-приближением для I_{st}

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_i\frac{\partial}{\partial r_i}+eE_i\frac{\partial}{\partial p_i}\right)f(r,p,t)=-\frac{f(r,p,t)-f_{\text{eq}}(p)}{\tau}.$$

Рассматривая однородную стационарную задачу приходим к уравнению, вида

$$eE_i\frac{\partial}{\partial p_i}f(p)=-\frac{\delta f(p)}{\tau},$$

где $\delta f=f-f_{\text{eq}}$, а хотим найти $j=e\int\frac{dp}{(2\pi\hbar)^d}\delta f(p)v(p)$.

Рассматривая задачу в предположение о линейном отклике, находим

$$f(p)=f_{\text{eq}}(p)+\chi_i(p)E_i+\ldots,\quad\Rightarrow\quad \chi_i(p)=-e\tau\frac{\partial}{\partial p_i}f_{\text{eq}}(p),$$

и подставляя это в выражение для j, находим

$$j_i=-e^2\tau E_s\int\frac{dp}{(2\pi\hbar)^d}\frac{p_i}{m}\frac{\partial}{\partial p_s}f_{\text{eq}}(p)=\frac{e^2\tau E_i}{m}\int\frac{dp}{(2\pi\hbar)^d}f_{\text{eq}}(p),$$

[1] Также будем считать, что $\boldsymbol{X}_i$ меняются слабо.

где мы проинтегрировали по частям. Таким образом приходим к выражению для проводимости Друде
$$j_i = \frac{n_{\text{eq}} e^2 \tau}{m} E_i = \sigma_{\text{D}} E_i, \qquad \sigma_{\text{D}} = \frac{n_{\text{eq}} e^2}{m}\tau.$$

Переменное поле. Пусть теперь $E_i = E_i(t)$, тогда
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + eE_i(t)\frac{\partial}{\partial p_i}\right) f(p,t) = -\frac{f(p,t) - f_{\text{eq}}(p)}{\tau}.$$
Переходя к линейному отклику, находим
$$\frac{\partial}{\partial t}\delta f(p,t) + eE_i(t)\frac{\partial}{\partial p_i} f_{\text{eq}}(p,t) = -\frac{\delta f(p,t)}{\tau},$$
или переходя к Фурье $\delta f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t}\delta f(\omega)$, находим
$$-i\omega\, \delta f(p,\omega) + eE_i(\omega)\frac{\partial}{\partial p_i} f_{\text{eq}}(p) = -\frac{\delta f(p,\omega)}{\tau},$$
тогда Фурье-образ поправки функции распределения будет равен
$$\delta f(p,\omega) = -\frac{eE_i(\omega)}{1-i\omega\tau}\frac{\partial f_{\text{eq}}(p)}{\partial p_i}\tau.$$
Подставляя в выражение для тока j, получим
$$j_i(\omega) = \frac{\sigma_{\text{D}}}{1-i\omega\tau} E_i(\omega) = \sigma(\omega) E_i(\omega),$$
с полюсом в нижней полуплоскости – причинная функция Грина! Собственно, после обратного Фурье, находим
$$j_i = \int_{-\infty}^{t} \sigma(t-t') E_i(t)\, dt', \qquad \Rightarrow \qquad \sigma(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t}\frac{\sigma_{\text{D}}}{1-i\omega\tau} = \sigma_{\text{D}} \cdot \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}\theta(t).$$

Семинар №2

Рассмотрим частицы в силе Лоренца
$$\hat{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\left[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right]\right).$$
Запишем
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} - e\left[\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\left[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right]\right]\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\right) f = 0.$$
Учтём, что $M \gg m$, тогда $f_i = f_{io}$ и $f = f_0 + \delta f$. В линейном отклике
$$\rho = -e\int \delta f\, d\Gamma, \qquad \boldsymbol{j} = -e\int \boldsymbol{v}\,\delta f\, d\Gamma,$$
где уже учли отсутствие вклада равновесных слагаемых. Равновесная функция распределения $f_0 = f_0(\varepsilon(\boldsymbol{p}))$, подставляя, находим
$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial \delta f}{\partial \boldsymbol{r}} - e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\left[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right]\right)\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}} = 0, \qquad \frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}.$$
Итого остаётся
$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial \delta f}{\partial \boldsymbol{r}} = e(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} - \frac{\delta f}{\tau},$$
где добавление $-\frac{\delta f}{\tau}$ приводит к причинности дальнейшего выражения $+i\delta = +i/\tau$.

Рассмотрим $\boldsymbol{E} = E_{k,\omega} e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}$, и тогда $\delta f = \delta f_{k,\omega} e^{i(\boldsymbol{kr}-\omega t)}$, подставляя находим
$$(\omega - \boldsymbol{kv})\delta f_{k\omega} = ie(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}_{k\omega})\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon},$$
и выражение на Фурье образ первой поправки
$$\delta f_{k\omega}(\boldsymbol{p}) = \frac{ie(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}_{k,\omega})}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} + i\delta}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}.$$
Вспомним, что $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}$, тогда
$$-e\int \frac{ie\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}_{k\omega})}{\omega - \boldsymbol{kv} + i\delta}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\, d\Gamma = j_{k\omega} = -i\omega P_{k\omega},$$
откуда находим поляризацию
$$P_{\alpha,k\omega} = \frac{e^2}{\omega} E_\beta \int \frac{v_\alpha v_\beta}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\, d\Gamma = \chi_{\alpha\beta} E_\beta.$$

Для трёхмерного случая итого находим

$$D_\alpha = E_\alpha + 4\pi P_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta, \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{k}) = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi e^2}{\omega} \int \frac{v_\alpha v_\beta}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\, d\Gamma.$$

Перейдём к переменным $\hat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}/v$, $\hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k}/k$, переписываем интеграл в виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi e^2}{\omega^2} \int d\Gamma\ s v^2 \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\hat{v}_\alpha \hat{v}_\beta}{s - \hat{\boldsymbol{k}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}} + i\delta}$$

где $s = \omega/kv$. Итого усредняя находим[2]

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\hat{v}_\alpha \hat{v}_\beta}{s - \hat{\boldsymbol{k}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}} + i\delta} = A(s)\delta_{\alpha\beta} + B(s)\hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta f,$$

Итого находим выражение в виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{k}) = \varepsilon_l \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} + \varepsilon_t \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right).$$

Считая $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_e + \boldsymbol{E}_t$, где $\boldsymbol{E}_l = (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}/k^2$ и $\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_l$, найдём

$$D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta = D_{l\alpha} + D_{t\alpha}, \qquad D_{l\alpha} = \varepsilon_l E_{l\alpha}, \quad D_{t\alpha} = \varepsilon_t D_{t\alpha}.$$

Рассмотрим теперь только $\boldsymbol{E}_l \propto \boldsymbol{k}$, тогда

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = i\left[\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_l\right] = 0 = -\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{B}, \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = 0 = \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{D}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{D}_l = 0.$$

Таким образом $\varepsilon_l(\omega, \boldsymbol{k}) = 0$ задаёт дисперсию продольных плазменных колебаний. Для поперечных плазменных колебаний уравнение примет вид

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_t(\omega, \boldsymbol{k}).$$

2D

Специфично для двухмерного случая

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\right) f = 0,$$

поле и поправка

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{k\omega} e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - \omega t)}, \qquad \delta f_{\boldsymbol{k},\omega} = \frac{ie(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}_{k\omega}(z=0))}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} + i\delta}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}.$$

Рассмотрим выражение для ρ, которая имеет принципиально двухмерный характер

$$\rho_{\omega\boldsymbol{k}} = -ie^2 \int \frac{ie(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}_{k\omega}(z=0))}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} + i\delta}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\, d\Gamma.$$

Отдельно найдём

$$I(\omega, \boldsymbol{k}) = \int \frac{\boldsymbol{v}}{\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v} + i\delta}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\, d\Gamma = \frac{\boldsymbol{k}}{k^2}\int \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} A(s)\, d\Gamma, \qquad A(s) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi}\frac{\cos\varphi - s + s}{s - \cos\varphi + i\delta}.$$

Сделаем замену

$$x = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \quad d\varphi = \frac{2\, dx}{1 + x^2}, \quad \Rightarrow \quad A(s) = \begin{cases} -1 + \frac{s}{\sqrt{s^2-1}}, & s > 1 \\ -1 - \frac{is}{\sqrt{1-s^2}}, & s > 1. \end{cases}$$

где мнимая часть связана с затуханием Ландау. Подставляя в плотность

$$\rho_{\omega k} = -\frac{ie^2}{k^2}\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_{\omega k}\right)\int \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} A(s)\, d\Gamma.$$

Расписывая уравнения Максвелла

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho(x, y)\delta(z), \qquad \boldsymbol{E} = -\nabla\varphi, \quad \varphi = \varphi_{k\omega}(z)e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - \omega t)}.$$

[2] см. Бурмистров, считается $A(s)$, $B(s)$.

Семинар 4

Т4. Упругое рассеяние электронов на примесях

Рассеяние электронов на примесях
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}+\dot{\boldsymbol{k}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\right)f=I_{\boldsymbol{k}}=-\frac{\delta f}{\tau}.$$
В данном случае для линеаризованного кинетического уравнения τ-приближение является точным, где $\delta f = f_k - f_0$.

Поработаем с самим интегралом столкновений
$$I_k=\frac{2\pi}{\hbar}\sum_{\boldsymbol{k}'}\left(|\langle\boldsymbol{k}'|U_{\text{пол}}|\boldsymbol{k}\rangle|^2\delta(\varepsilon_k-\varepsilon_{k'})\left[f_{k'}(1-f_k)-f_k(1-f_{k'})\right]\right),$$
где $f_{k'}(1-f_k)-f_k(1-f_{k'})=f_{k'}-f_k$. Для матричного элемента
$$U_{\text{пол}}(\boldsymbol{r})=\sum_{j=1}^{N}U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_j),\qquad \langle\boldsymbol{k}|=\frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}.$$
Тогда для матричного эдлемента находим
$$|\langle\boldsymbol{k}'|U_{\text{пол}}|\boldsymbol{k}\rangle|^2=\frac{1}{V^2}|\tilde{U}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')|^2\cdot\left|\sum_{j=1}^{N}e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\boldsymbol{R}_j}\right|^2,\qquad \tilde{U}(\boldsymbol{q})=\int e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}U(\boldsymbol{r})\,d^3\boldsymbol{r}.$$
Усредняя по случайному положению примесей
$$\left\langle\left|\sum_{j=1}^{N}e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')R_j}\right|\right\rangle_{\text{прим}}=N+N(N-1)\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}.$$
Для матричного элемента получили выражение
$$|\langle\boldsymbol{k}'|U_{\text{пол}}|\boldsymbol{k}\rangle|^2=\frac{N}{V^2}|\tilde{U}(\boldsymbol{q})|^2+\frac{N(N-1)}{V^2}|\tilde{U}(0)|^2\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'},\qquad \boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'.$$
Итого для интеграла столкновений получаем выражение после замены $\sum_{\boldsymbol{k}}\to\int\frac{V\,d^3k}{(2\pi)^3}$
$$I_k(f)=\frac{2\pi n}{\hbar}\int\frac{d^3\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3}|\tilde{U}(\boldsymbol{q})|^2\delta(\varepsilon_k-\varepsilon_{\boldsymbol{k}})\cdot(\delta f_{k'}-\delta f_k),$$
где уже линеаризовали выражение. Здесь n – примесное.

Рассмотрим стационарный однородный случай, когда $\hbar\dot{\boldsymbol{k}}=-e\boldsymbol{E}$, где поле считаем малой поправкой, тогда
$$\dot{\boldsymbol{k}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}=-e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial\varepsilon},\qquad \delta f_k\stackrel{\text{def}}{=}\tau(\varepsilon)\left(e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}}\right)\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon},$$
то есть ищем решение в τ-приближение. Получается уравнение
$$-(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}=I_k=\frac{2\pi n}{\hbar}e\boldsymbol{E}\int\frac{d^3\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3}|\tilde{U}(\boldsymbol{q})|^2\delta(\varepsilon_k-\varepsilon_{k'})\left(\tau(\varepsilon')\boldsymbol{v}'\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon'}-\tau(\varepsilon)\boldsymbol{v}\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon}\right).$$
Сокращая $\partial_\varepsilon f_0$ и всё лишнее, находим
$$\boldsymbol{v}=\frac{\hbar\boldsymbol{k}}{m}=\frac{n\tau(\varepsilon[\boldsymbol{k}])}{4\pi^2\hbar}\int_0^\infty dk'\ (k')^2\int d\Omega_{k'}|\tilde{U}(\boldsymbol{q})|^2\cdot\frac{\delta(k-k')}{\hbar^2k/m}\frac{\hbar}{m}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}').$$
Остаётся выражение
$$\frac{1}{\tau(\varepsilon)}=\frac{mkn}{4\pi^2\hbar^3}\int d\Omega_k\ |\tilde{U}(\boldsymbol{q})|^2(1-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}'),\qquad \hat{\boldsymbol{k}}=\frac{\boldsymbol{k}}{k}.\tag{3}$$

Дифференциальное сечение рассеяния. Найдём выражение
$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2|\tilde{U}(\boldsymbol{q})|^2,\qquad \boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}',\quad q^2=4k^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$
И интеграл столкновений перепишется в виде
$$\frac{1}{\tau(\varepsilon)}=nv\int\frac{d\sigma}{d\Omega}(1-\cos\theta)\,d\Omega=nv\sigma_{\text{tr}},\tag{4}$$
где возникло новое σ_{tr} с подавленным рассеянием на малых углах.

Вспоминая формулу Друде, находим
$$\boldsymbol{j}=\sigma_D\boldsymbol{E},\qquad \sigma_D=\frac{e^2n_0\tau_{\text{tr}}}{m},$$

где входит именно τ_{tr}.

Фурье-образ. Для экранированного кулоновского потенциала

$$U(r) = -e^{-r/\lambda}\frac{Ze^2}{r}, \qquad \tilde{U}(\boldsymbol{q}) = \int U(\boldsymbol{r})e^{-i\boldsymbol{qr}}\,dV = \frac{4\pi Ze^2}{q^2+\lambda^{-2}}.$$

Для дифференциального сечения рассеяния находим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^2}\left(\frac{4\pi Ze^2}{q^2+\lambda^{-2}}\right)^2 = \left(\frac{Ze^2}{4E_F}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}+(2k_F\lambda)^{-2}}\right)^2.$$

где $q = 2k_F\sin\frac{\theta}{2}$. Полное сечение рассеяния тогда получается

$$\sigma = \int d\sigma = \int_0^\pi \left(\frac{Ze^2}{4E_F}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}+(2k_F\lambda)^{-2}}\right)^2 = \frac{2\pi Z^2e^4}{4E_F^2}\int_0^2\frac{du}{(u+\frac{1}{2}(k_F\lambda)^{-2})^2},$$

где $u = 1-\cos\theta$. Итого, введя $\zeta \overset{\text{def}}{=} \frac{4}{\pi}(k_F\lambda)^2$, находим

$$\sigma = \frac{\pi Z^2e^4}{2E_F^2}\frac{(\pi\zeta)^2/2}{1+\pi\zeta}.$$

Для транспортного σ_{tr}, находим

$$\sigma_{\text{tr}} = \frac{2\pi Z^2e^4}{4E_F^2}\int_0^2\frac{u\,du}{(u+\frac{1}{2}(k_F\lambda)^{-2})^2} = \frac{\pi Z^2e^4}{2E_F^2}\left(\ln(1+\pi\zeta)-\frac{\pi\zeta}{1+\pi\zeta}\right).$$

Для проводимости ρ можем найти

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau_{\text{tr}}} = \frac{mnv_F}{n_0e^2}\frac{\pi Z^2e^4}{2E_F^2}\zeta^3F(\zeta), \qquad F(\zeta) = \frac{1}{\zeta^3}\left(\ln(1+\pi\zeta)-\frac{\pi\zeta}{1+\pi\zeta}\right).$$

Итого, находим

$$\rho = Z^2R_qa_{\text{B}}\frac{n}{n_0}F(\zeta)\cdot\left[\frac{e^2}{2\pi\hbar}\frac{me^2}{\hbar^2}\frac{p_F}{e^2}\frac{\pi e^4}{p_F^2/2m^2}\frac{64k_F^6\lambda^6}{\pi^3}\right] = Z^2R_qa_{\text{B}}\frac{n}{n_0}F(\zeta). \tag{5}$$

где подставили $\lambda^2 = \frac{\pi a_{\text{B}}}{4k_F}$.

T5. Рассеяние электронов на фононах

Эффект Иоффе-Регеля. На высоких температурах $r^2 \sim T$ для ионов, тогда

$$\tau = \frac{1}{n_{\text{ion}}v\sigma} \sim \frac{1}{T}, \qquad \rho = \frac{m}{ne^2\tau} \sim T.$$

Для $\tau v_F \sim \lambda_F$, можем записать с учётом $n \sim k_F^3$

$$\rho = \frac{mv_F}{ne^2\tau v_F} = \frac{mv_F}{ne^2\lambda_F} \sim \frac{\hbar}{k_Fe^2},$$

что называется пределом Иоффе-Регеля, которые неплохо работает для легированных полупроводников.

Испускание фононов. И снова запишем столкновительный интеграл в терминах приход-уход:

$$I_p = \sum_{\boldsymbol{p}'} w_{\boldsymbol{pp}'}n_{\boldsymbol{p}'}(1-n_{\boldsymbol{p}}) - \sum_{\boldsymbol{p}'} w_{\boldsymbol{p}'\boldsymbol{p}}n_{\boldsymbol{p}}(1-n_{\boldsymbol{p}'}).$$

Рассматриваем однородную ситуацию, тогда

$$\dot{\boldsymbol{p}}\frac{\partial n}{\partial\boldsymbol{p}} = -e(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon} = I_{\text{ст}}.$$

Учитвая что $w_q \sim q$, можем расписать

$$\begin{aligned} I_{\text{ст}} =& \frac{2\pi}{\hbar V}\sum_{\boldsymbol{q}}\left(w_{\boldsymbol{q}}(1+N_{\boldsymbol{q}})n_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}}(1-n_{\boldsymbol{p}})\delta(\varepsilon_p-\varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}}+\hbar\omega_q) + w_qN_qn_{\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{q}}(1-n_{\boldsymbol{p}})\delta(\varepsilon_p-\varepsilon_{\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{q}}-\hbar\omega_q)\right) - \\ &-\frac{2\pi}{\hbar V}\sum_{\boldsymbol{q}}\left(w_{\boldsymbol{q}}(1+N_{\boldsymbol{q}})n_q(1-n_{\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{q}})\delta(\varepsilon_p-\varepsilon_{\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{q}}-\hbar\omega_q) + w_qN_q(1-n_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}})\delta(\varepsilon_p-\varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}}+\hbar\omega_q)\right). \end{aligned}$$

Будем считать, что фононы равновесные

$$N_q = N_q^0 = \frac{1}{e^{\hbar\omega_q/T}-1}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1+N_q}{N_q} = e^{\hbar\omega_q/T}.$$

Для электронов

$$n_p^0 = \frac{1}{e^{(\varepsilon_p-\mu)/T}+1}, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1-n_p^0}{n_p^0} = e^{(\varepsilon_p-\mu)/T}.$$

Преобразуем выражение из квадратных скобок *

$$(1+N_q)(1-n_p)(1-n_{p+\hbar q})\left(\frac{n_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}}}{1-n_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}}} - \frac{N_q}{1+N_q}\frac{n_p}{1-n_p}\right), \tag{6}$$

которое очевидно зануляется для равновесных функций.

Решение будем искать в виде

$$n_p = n_p^0 + \delta n_p = n_p^0 - \frac{\partial n_p^0}{\partial \varepsilon_p}\Phi_p = n_p^0 + \frac{n^0(\varepsilon_p)(1-n^0(\varepsilon_p))}{T}\Phi_p.$$

Возвращаясь к (6), получаем линеаризуя

$$(1+N_q)(1-n_p^0)(1-n^0_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}})\left[\frac{\delta n_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}}}{(1-n^0_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}})^2} - \frac{N_q}{1+N_q}\frac{\delta n_p}{(1-n_p^0)^2}\right] =$$

$$= +\frac{1}{T}(1+N_q)(1-n_p^0)n^0_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}}\left[\Phi_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \Phi_p\right] =$$

$$= -\frac{1}{T}(1+N_q)N_q(n^0_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - n_p^0)\left[\Phi_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \Phi_p\right].$$

Аналогично преобразуется второе слагаемое в *, откуда находим линеаризованный интеграл столкновений:

$$I_{\text{ст}}(\Phi_p) = -\frac{2\pi}{\hbar V}\sum_{\boldsymbol{q}} w_q \frac{(1+N_q)N_q(n^0_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - n_p^0)}{T}\left[\Phi_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \Phi_{\boldsymbol{p}}\right]\times\left[\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} + \hbar\omega_q) - \delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \hbar\omega_q)\right]$$

Выделим физ. смысл в слагаемых

$$I_{\text{ст}}(\Phi_p) = -\frac{2\pi}{\hbar V}\sum_{\boldsymbol{q}} w_q \frac{(1+N_q)N_q}{T}\Big(\left[n^0(\varepsilon_p+\hbar\omega_q) - n^0(\varepsilon_p)\right]\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} + \hbar\omega_q) -$$

$$- \left[n^0(\varepsilon_p-\hbar\omega_q) - n^0(\varepsilon_p)\right]\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \hbar\omega_q)\Big)\left[\Phi_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \Phi_{\boldsymbol{p}}\right].$$

Учтём, что мы живём вблизи поверхности Ферми, тогда $\hbar\omega_q$ мало по сравнению с ε_p, приходим к выражению

$$I_{\text{ст}}(\Phi_p) = -\frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon}\frac{2\pi}{\hbar V}\sum_q w_q \frac{2\hbar\omega_q(1+N_q)N_q}{T}\delta(\varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \varepsilon_{\boldsymbol{p}})\left[\Phi_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \Phi_{\boldsymbol{p}}\right].$$

Аргумент δ-функции можем расписать в виде

$$\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} \pm \hbar\omega_q = \frac{2p\hbar q\cos\theta}{2m} + \frac{\hbar^2q^2}{2m} \pm \hbar c_L q = \frac{\hbar pq}{m}\left(\cos\theta + \frac{\hbar q}{2p} \pm \frac{mc_L}{p}\right),$$

где $c_L \ll v_F$, поэтому можем опустить последнее слагаемое.

Кинетическое уравнение. Итого, будем решать кинетическое уравнение на $\Phi_{\boldsymbol{p}}$ вида

$$-e(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})\frac{\partial n^0}{\partial\varepsilon} = I_{\text{ст}}(\Phi_p) = -\frac{\partial n_0}{\partial\varepsilon}\frac{2\pi}{\hbar V}\sum_q w_q \frac{2\hbar\omega_q(1+N_q)N_q}{T}\delta(\varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \varepsilon_{\boldsymbol{p}})\left[\Phi_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \Phi_{\boldsymbol{p}}\right]. \tag{7}$$

Решение аналогично будем искать в виде $\Phi_p = -e(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p)$, что соответствует τ-приближению: $I_{\text{ст}} = -\delta n_p/\tau$. Таким образом остаётся найти τ_{tr}, и найти остальные величины по формуле Друде. Выражая из двух уравнений $(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})$, находим

$$(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}) = -\frac{4\pi}{\hbar V}\sum_{\boldsymbol{q}} w_q \frac{\hbar\omega_q(1+N_q)N_q}{T}\delta(\varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \varepsilon_{\boldsymbol{p}})\frac{\hbar(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{E})}{m}\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p).$$

Переходя к интегрированию, нахоим

$$(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}) = -\frac{4\pi}{\hbar}\int\frac{q^2\,dq\,d\Omega_q}{(2\pi)^3} w_q \frac{\hbar\omega_q(1+N_q)N_q}{T}\delta(\varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \varepsilon_p)\frac{\hbar(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{E})}{m}\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p).$$

Проведём интегрирование, введя полярную ось и расписав

$$\boldsymbol{q} = (q\sin\theta\cos\varphi,\ q\sin\theta\sin\varphi,\ q\cos\theta),$$

$$\boldsymbol{E} = (E\sin\theta_E\cos\varphi_E,\ E\sin\theta_E\sin\varphi_E,\ E\cos\theta_E).$$

Тогда скалярное произведение перепишется в виде

$$(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{E}) = qE\left(\cos\theta\cos\theta_E + \sin\theta\sin\theta_E\cos(\varphi-\varphi_E)\right),$$

где после интегрирование второе слагаемое зануляется. Также подставляя $(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}) = Ev\cos\theta_E$, тогда

$$\frac{p}{m\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p)} = -\frac{4\pi}{T}\int_0^{q_D}\frac{q^2\,dq\sin\theta\,d\theta}{(2\pi)^2}w_q\omega_q(1+N_q)N_q\times\delta\left(\tfrac{\hbar qp}{m}\left(\cos\theta+\tfrac{\hbar q}{2p}\right)\right)\times\frac{\hbar q}{m}\cos\theta,$$

где q_D – максимальный дебаевский импульс. Таким образом

$$\frac{1}{\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p)} = \frac{4\pi m}{Tp^2}\int_0^{q_D}\frac{q^2\,dq}{(2\pi)^2}w_q\omega_q(1+N_q)N_q\int_{-1}^{1}dx\;x\times\delta\left(x+\tfrac{\hbar q}{2p}\right),$$

где ввели $x=\cos\theta$.

Вообще $q_D=\sqrt[3]{6\pi^2 n}$, $p_F=\sqrt[3]{3\pi^2 n}$, тогда $\frac{\hbar q_D}{2p_F}<1$. Учитывая, что $w_q\propto\omega_q\propto q$, находим

$$\frac{1}{\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p)} \propto \frac{1}{T}\int_0^{q_D}q^5\,dq\;\frac{e^{\hbar\omega_q/T}}{(e^{\hbar\omega_q/T}-1)^2}.$$

Введём $z=\frac{\hbar\omega_q}{T}=\frac{T_D}{T}\frac{q}{q_D}$, где $T_D=\hbar c_L q_D$. Таким образом

$$\frac{1}{\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p)} \propto \frac{1}{T}\left(\frac{T}{T_D}\right)^6\int_0^{T_D/T}\frac{e^z z^5\,dz}{(e^z-1)^2},$$

где из-за разности скоростей возникла пятая степень вместо четвертой. Итого, искомое выражение

$$\frac{1}{\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p)} \propto \left(\frac{T}{T_D}\right)^5\int_0^{T_D/T}\frac{z^5\,dz}{\operatorname{sh}^2\frac{z}{2}}. \tag{8}$$

Формула Друде. Вспоминая, что

$$\sigma=\sigma_D=\frac{e^2 n\tau_{\text{tr}}}{m},$$

находим

$$\frac{\rho_{\text{e-ph}}(T)}{\rho_{\text{e-ph}}(T_D)} = \frac{\sigma_{\text{e-ph}}(T)}{\sigma_{\text{e-ph}}(T_D)} = \left(\frac{T}{T_D}\right)^5\int_0^{T_D/T}\frac{z^5\,dz}{\operatorname{sh}^2\frac{z}{2}}\Big/\int_0^1\frac{z^5\,dz}{\operatorname{sh}^2\frac{z}{2}}.$$

Для $T\ll T_D$ получится

$$\frac{\rho_{\text{e-ph}}(T)}{\rho_{\text{e-ph}}(T_D)} = 526\left(\frac{T}{T_D}\right)^5.$$

И в обратную сторону, для $T\gg T_D$, раскладываясь в ряд, находим

$$\frac{\rho_{\text{e-ph}}(T)}{\rho_{\text{e-ph}}(T_D)} = 1.06\left(\frac{T}{T_D}\right).$$

T6.

Запишем энергию в виде

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}) = m^{-1}_{\alpha\beta}\frac{p_\alpha p_\beta}{2},\qquad m_{\alpha\beta}=m_{\beta\alpha}.$$

Рассмотрим анзац, вида

$$\delta f(\boldsymbol{p},t) = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}(\varepsilon)e^{-i\omega t},$$

подставляя в уравнение Больцмана, найдём

$$(\tau^{-1}+i\omega)(p_\mu A_\mu) - \frac{e}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}v_\alpha B_\beta\frac{\partial}{\partial p_\gamma}(p_\mu A_\mu) = e(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}.$$

Свёртка симметричного тензора с антисимметричным даст 0, тогда

$$(\tau^{-1}-i\omega)m_{\alpha\beta}v_\alpha A_\beta - \frac{e}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}v_\alpha B_\beta A_\gamma = ev_\alpha E_\alpha\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}.$$

Вынося v_α, можем получить выражение

$$\left((\tau^{-1}-i\omega)m_{\alpha\beta}+\frac{e}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma\right)A_\beta - eE_\alpha\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}=0,$$

что составляет уравнение на величину $\boldsymbol{A}$.

Введём тензор

$$\Gamma_{\alpha\beta}=(\tau^{-1}-i\omega)m_{\alpha\beta}+\frac{e}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma,\quad\Rightarrow\quad A_\beta=e\Gamma^{-1}_{\beta\gamma}E_\gamma\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}.$$

Таким образом нашли поправку к функции распределения

$$\delta f(\boldsymbol{p}) = ev_\alpha m_{\alpha\beta}\Gamma^{-1}_{\beta\gamma}E_\gamma\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon},$$

и, соответственно, можем найти ток

$$j_\alpha = -e\int \frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3} v_\alpha \delta f = e^2 E_\gamma \int \frac{2(\,d^3p)}{(2\pi\hbar)^3} v_\alpha v_\nu m_{\nu\beta}\Gamma^{-1}_{\beta\gamma}(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}),$$

откуда можем найти тензор проводимости $j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta}E_\beta$:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega,\boldsymbol{B}) = e^2\int \frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3} v_\alpha v_\nu m_{\nu\mu}\Gamma^{-1}_{\mu\beta}\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right) = e^2\int \frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3} m^{-1}_{\alpha\gamma}p_\gamma m^{-1}_{\nu\delta}P_\delta m_{\nu\mu}\Gamma^{-1}_{\mu\beta}\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right).$$

Свернув тензоры, находим

$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega,\boldsymbol{B}) = e^2 m^{-1}_{\alpha\gamma}\int \frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3} p_\gamma p_\mu \Gamma^{-1}_{\mu\beta}(\varepsilon)\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right) = \frac{2}{3}e^2\int d\varepsilon\ g(\varepsilon)\varepsilon\cdot\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)\Gamma^{-1}_{\alpha\beta}(\varepsilon).$$

где $g(\varepsilon)\sim\sqrt{\varepsilon}$ – плотность состояний. Переходя к плотности электронов, находим

$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega,\boldsymbol{B}) = \frac{2}{3}e^2 n\int d\varepsilon g(\varepsilon)\varepsilon\Gamma^{-1}_{\alpha\beta}(\varepsilon)\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right) = ne^2\left\langle \Gamma^{-1}_{\alpha\beta}(\varepsilon)\right\rangle.$$

Для металла усреднение тревиально и с учётом δ-образной производной $\partial_\varepsilon f_0$ при низких температурах просто берём $\tau(\varepsilon_F)$:

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{ne^2}\left[(\tau^{-1}-i\omega)m_{\alpha\beta} + \frac{e}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma\right].$$

Далее считая $m_{\alpha\beta} = m\delta_{\alpha\beta}$, получим

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{m}{ne^2\tau}\begin{pmatrix}1-i\omega\tau & \omega_c\tau & 0\\ -i\omega_c\tau & 1-i\omega\tau & 0\\ 0 & 0 & 1-i\omega\tau\end{pmatrix},$$

и для обратной матрицы $\sigma_{\alpha\beta}$, находим

$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega,\,\boldsymbol{B}) = \frac{\sigma_D}{(1-i\omega\tau)^2+(\omega_c\tau)^2}\begin{pmatrix}1-i\omega\tau & -\omega_c\tau & 0\\ \omega_c\tau & 1-i\omega\tau & 0\\ 0 & 0 & \frac{(1-i\omega\tau)^2+(\omega_c\tau)^2}{1-i\omega\tau}\end{pmatrix},\qquad \omega_c = \frac{eB}{mc}.$$

где $\sigma_D = \frac{ne^2\tau}{m}$.

Для тока можем записать

$$j_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} j_\alpha(\omega)e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_{\alpha\beta}(\omega,\boldsymbol{B})E_\beta(\omega)e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Переходя к обратному Фурье-образу для поля, находим

$$j_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_{\alpha\beta}(t-t',\boldsymbol{B})E_\beta(t')\,dt',\qquad \sigma_{\alpha\beta}(t-t',\boldsymbol{B}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_{\alpha\beta}(\omega,\boldsymbol{B})e^{-i\omega(t-t')}\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Теперь можем явно найти

$$\sigma_{zz}(t,\boldsymbol{B}) = \theta(t)\sigma_D\frac{e^{-t/\tau}}{\tau},\qquad \sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_D\theta(t)\frac{e^{-t/\tau}}{\tau}\cos(\omega_c t),\qquad \sigma_{yx} = -\sigma_{xy} = \sigma_D\theta(t)\frac{e^{-t/\tau}}{\tau}\sin(\omega_c t),$$

где учли, что полюса подинтегрального выражения находятся в нижней полуплоскости:

$$\omega = -\frac{i}{\tau},\qquad \omega = -\frac{i}{\tau}\pm\omega_c.$$

T7. Модель Лоренца

Несохранение числа частиц. В τ-приближении:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{r}} = -\frac{f-f_0}{\tau},\qquad \delta n = \int\delta f\,d^3\boldsymbol{r},\quad F(\boldsymbol{v},t)\stackrel{\text{def}}{=}\int d^3\boldsymbol{r}\ f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t).$$

Проинтегрируем уравнение Больцмана по координатам:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{F-F_0}{\tau},$$

Введя $\delta F(\boldsymbol{v},t) = F(\boldsymbol{v},t) - F_0(\boldsymbol{v})$, найдём

$$\delta F(\boldsymbol{v},t) = \delta F(\boldsymbol{v},0)e^{-t/\tau},$$

таким образом τ-приближение не сохраняет число частиц, релаксируя к равновесному.

Модификация. Исправим эту проблему следующим образом

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\tau}\left[-f+\int\frac{d\Omega_v}{4\pi}f\right] = \frac{1}{\tau}\left(Pf - f\right),\qquad Pf = \int\frac{d\Omega_v}{4\pi}f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t).$$

что называется моделью Лоренца, случай легкой примеси в тяжелом газе, а именно слабо-ионизированный газ. Здесь Pf – члены прихода. Электроны рассеиваются[3] на тяжелых частицах. Забавный факт – тут возникает диффузия, а ещё эта модель имеет точное решение.

Проверка. Аналогично перейдём к функции F, тогда

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{t}\left(PF(v,t) - F(\boldsymbol{v},t)\right),$$

тогда, после применения проекции P, находим

$$\frac{\partial(PF)}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\left[P^2F - PF\right] = 0, \qquad \Rightarrow \qquad PF(v,t) = \Phi(v).$$

Так находим, что

$$F(\boldsymbol{v},t) = \Phi(v) + \left[F_0(\boldsymbol{v}) - \Phi(v)\right]e^{-t/\tau}.$$

Лаплас. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} = -\frac{1}{\tau}\left(f - \langle f\rangle\right).$$

Сдлаем преобразование Фурье в пространстве и преобразование Лапласа по времени:

$$\hat{f}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt \int d^3r\; e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t).$$

вставить из фото.

Приходим к интегралу

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\; \frac{(1+s\tau) - ivk\tau x}{(i+s\tau)^2 + (vk\tau x)^2} = \frac{1}{vk\tau}\operatorname{arctg}\frac{vk\tau}{1+s\tau}.$$

Подставляем всё в $P\hat{f}$

$$P\hat{f}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},s) = \left[1 - \frac{1}{vk\tau}\operatorname{arctg}\frac{vk\tau}{1+s\tau}\right]\int \frac{d\Omega_v}{4\pi}\frac{f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},t=0)}{s + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} + \tau^{-1}},$$

находим

$$\hat{f}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},s) = \frac{\tau^{-1}}{s + i\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k} + \tau^{-1}}\left[1 - \frac{1}{vk\tau}\operatorname{arctg}\frac{vk\tau}{1+s\tau}\right]\int \frac{d\Omega_v}{4\pi}\frac{f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},t=0)}{s + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} + \tau^{-1}} + \frac{f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},t=0)}{s + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} + \tau^{-1}}.$$

Конкретизируем начальные условия:

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t=0) = \delta(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0), \qquad \Rightarrow \qquad f(\boldsymbol{k},,t=0) = \delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0).$$

Подставляя в интеграл по телесному углу, находим

$$\int \frac{d\Omega_v}{4\pi}\frac{f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},t=0)}{s + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} + \tau^{-1}} = \int \frac{d\Omega_v}{4\pi}\frac{\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0)}{s + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} + \tau^{-1}} = \frac{1}{s + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} + \tau^{-1}}\frac{\delta(v-v_0)}{4\pi v_0^2}.$$

Диффузия. Рассматриваем время $t \gg \tau$, тогда малые $s\tau \ll 1$, и можем разложиться

$$1 - \frac{1}{vk\tau}\operatorname{arctg}\frac{vk\tau}{1+s\tau} = 1 - \frac{1}{1+s\tau} + \frac{1}{3}\frac{(vk\tau)^2}{(1+s\tau)^3} \approx s\tau + \frac{1}{3}v^2k^2\tau^2 + \ldots$$

Подставляя в выражение для $\hat{f}$, находим

$$\hat{f}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},s) = \left(\frac{\tau^{-1}}{s + i\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k} + \tau^{-1}}\right)^2 \frac{1}{s + \frac{1}{3}v^2k^2\tau^2}\frac{\delta(v-v_0)}{4\pi v_0^2} + \frac{\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0)}{s + i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_0) + \tau^{-1}}.$$

Смотрим большие времена и большие расстояния, тогда самое большое это τ^{-1}, и можем переписать функцию распределения $\hat{f}$ в виде

$$\hat{f}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},s) \approx \frac{1}{s + Dk^2}\frac{\delta(v-v_0)}{4\pi v_0^2}, \qquad D = \frac{1}{3}v_0^2\tau.$$

Возвращаясь к обратному Фурье-образу, находим

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) = \int_{s^*-i\infty}^{s^*+i\infty} \frac{e^{st\,ds}}{2\pi i}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\hat{f}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},s).$$

Считая по вычетам, находим

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) = \frac{\delta(v-v_0)}{4\pi v_0^2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk_x}{2\pi}\exp\left(-Dt(k_x - \frac{ix}{2Dt})^2 - \frac{x^2}{4Dt}\right)\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk_y}{2\pi}\ldots\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk_z}{2\pi}\ldots\right],$$

[3] См. ЛЛХ.

так приходим к явной диффузии

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}}\frac{\delta(v-v_0)}{4\pi v_0^2}e^{-r^2/4Dt}, \qquad D = \frac{1}{3}v_0^2\tau. \tag{9}$$

T8. Электронный газ

И снова смотрим на уравнение Больцмана, ищём решение в виде $f = f_0 + \delta f$, смотрим на τ-приближение, равновесным будет распределение Ферми:

$$f_0 = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}+1}, \qquad \mu = \mu(t,\boldsymbol{r}), \quad T = T(t,\boldsymbol{r}).$$

Будем решать уравнение рассматривая стационарный случай

$$\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{r}} - e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon} = -\frac{\delta f}{\tau}.$$

Можем переписать

$$\frac{\partial f_0}{\partial\boldsymbol{r}} = \frac{\partial f_0}{\partial T}\boldsymbol{\nabla}T + \frac{\partial f_0}{\partial\mu}\boldsymbol{\nabla}\mu = -\frac{\varepsilon-\mu}{T}\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}\boldsymbol{\nabla}T - \frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\nabla\mu.$$

Тогда, после подстановки, левая часть уравнения может быть найдена в виде

$$\delta f = \tau\left(\frac{\varepsilon-\mu}{T}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T) + \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\mu + e\boldsymbol{E})\right)\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}.$$

Металл. Достаточно рассмотреть $-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon} \approx \delta(\varepsilon-\varepsilon_F)$. Для тока $\boldsymbol{j}$ находим

$$\boldsymbol{j} = -e\int\boldsymbol{v}(f_0+\delta f)\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{e}{3}(\boldsymbol{\nabla}\mu + e\boldsymbol{E})\int\tau v^2\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3} + \frac{e}{3}\frac{\boldsymbol{\nabla}T}{T}\int\tau v^2(\varepsilon-\mu)\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Для плотности потока энергии $\boldsymbol{q}$

$$\boldsymbol{q} = \int\boldsymbol{v}(\varepsilon - e\varphi)(f_0+\delta f)\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = -\frac{\boldsymbol{j}}{e}(\mu - e\varphi) - \ldots.$$

Введём диссипативную часть $\boldsymbol{q}'$

$$\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{q} + \frac{\boldsymbol{j}}{e}(\mu - e\varphi).$$

Также определим усреднение в виде

$$\langle F(\varepsilon)\rangle = \frac{m}{3n}\int\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3}v^2\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)F(\varepsilon) = \frac{2}{3n}\int_0^\infty\varepsilon\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)F(\varepsilon)g(\varepsilon)\,d\varepsilon, \qquad n = \int_0^\infty\varepsilon\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)g(\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Тогда уравнение перепишется в виде

$$\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{\nabla}\mu}{e} = \frac{m\boldsymbol{j}}{ne^2\langle\tau\rangle} - \frac{\boldsymbol{\nabla}T}{eT}\frac{\langle(\varepsilon-\mu)\tau\rangle}{\langle\tau\rangle} = \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} + \alpha\boldsymbol{\nabla}T.$$

Тогда для потока энергии

$$\boldsymbol{q}' = -\frac{\langle(\varepsilon-\mu)\tau\rangle}{e\langle\tau\rangle}\boldsymbol{j} + \frac{\boldsymbol{\nabla}T}{mT}\frac{n\langle(\varepsilon-\mu)\tau\rangle^2}{\langle\tau\rangle} - \frac{\boldsymbol{\nabla}T}{mT}n\langle(\varepsilon-\mu)^2\tau\rangle = \alpha T\boldsymbol{j} - \varkappa\boldsymbol{\nabla}T.$$

Где коэффициенты соответственно равны

$$\alpha = -\frac{\langle(\varepsilon-\mu)\tau\rangle}{eT\langle\tau\rangle}, \qquad \varkappa = \frac{n\langle\tau\rangle}{mT}\left[\frac{\langle(\varepsilon-\mu)^2\tau\rangle}{\langle\tau\rangle} - \frac{\langle(\varepsilon-\mu)\tau\rangle^2}{\langle\tau\rangle^2}\right], \qquad \sigma = \frac{ne^2\langle\tau\rangle}{m}. \tag{10}$$

где $\varkappa$ – коэффициент теплопроводности, α – термоэлектрический коэффициентр, σ – проводимость.

Полупроводник. Здесь можем написать, что $\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon} = -\frac{\partial f_0}{\partial T}$, так как $f_0 \approx e^{(\mu-\varepsilon)/T}$. Тогда усреднение можем переписать в виде

$$\langle F(\varepsilon)\rangle = \frac{m}{3nT}\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3}f_0v^2F(\varepsilon).$$

Считая, что $\tau(\varepsilon) \propto v^k \propto \varepsilon^{k/2}$ и что $f_0 \propto e^{-\frac{mv^2}{2T}}$, находим

$$\langle v^k\rangle \propto \left(\frac{2T}{m}\right)^{k/2}\Gamma\left(\frac{3+k}{2}\right).$$

Так, например, для α получится

$$\alpha = \frac{1}{e}\left(\frac{\mu}{T} - \frac{\langle\tau v^2\varepsilon\rangle}{\langle\tau v^2\rangle}\right) = \frac{1}{e}\left(\frac{\mu}{T} - \frac{\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+k}{2}\right)}\right) = \frac{1}{e}\left(\frac{\mu}{T} - \frac{5+k}{2}\right).$$