1 Лекция №2. Косвенные измерения

Конструктивный подход

Рассмотрим систему объект-наблюдатель и добавим между ними прибор. Теперь или наблюдатель взаимодействует с новой системой объект-прибор (Π_{in}), или объект взаимодействует с системой прибор-наблюдатель (Π_{out}). Очень хочется построить отображение $(\Pi_{\text{out}}, U) \to \Pi_{\text{in}}$, где U – оператор эволюции системы прибор-объект.

Пусть стрелки прибора это $|\varphi\rangle\langle\varphi|$. Пусть прибор неточный, с коэффициентом усиления G. Пусть прибором измеряется величина q, получается на выходе y, тогда

$$y = G(q + \delta q) + \delta y, \quad \Rightarrow \quad \tilde{q} = \frac{y}{G} = q + \delta q + \frac{\delta y}{G}.$$

Будем считать, что начальное состояние чистое.

Итак, состояние объекта $|\psi\rangle$, состояние прибора $|\phi\rangle$. Знаем совместный оператор эволюции $\hat{U}$. После взаимодействия

$$|\Psi\rangle = \hat{U}|\psi\rangle|\varphi\rangle,$$

получая некоторое запутанное состояние. Наблюдаемая прибора y (Π_{out}).

Распределение вероятности для $\Pi_{\text{out}} = |y\rangle\langle y|$

$$\begin{aligned} P_y(y) &= \operatorname{tr}(\Pi_{\text{out}}|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \operatorname{tr}\left(|y\rangle\langle y|\hat{U}|\phi\rangle|\psi\rangle\langle\psi|\langle\phi|\hat{U}^\dagger\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(\langle y|\hat{U}|\phi\rangle|\psi\rangle\langle\psi|\langle\phi|\hat{U}^\dagger|y\rangle\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(\hat{\Omega}(y)|\psi\rangle\langle\psi|\Omega^\dagger(y)\right) = \operatorname{tr}\left(\hat{\Omega}^\dagger(y)\Omega(y)\cdot|\psi\rangle\langle\psi|\right), \end{aligned}$$

где $\langle y|\hat{U}|\phi\rangle = \hat{\Omega}$, и явно видим $\Pi_{\text{in}} = \hat{\Omega}^\dagger(y)\hat{\Omega}(y)$. Так прибор приходит после проекции[1] на $|y\rangle\langle y|$ в состояние

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = \frac{|y\rangle\langle y|}{\sqrt{P_y(y)}}\hat{U}|\psi\rangle|\phi\rangle = |y\rangle\otimes\frac{\hat{\Omega}(y)|\psi\rangle}{\sqrt{P_y(y)}},$$

где вообще $y = F(q)$, и тогда $\tilde{q} = F^{-1}(y) \overset{\text{пусть}}{=} y/G$. Тогда

$$P(\tilde{q}) = GP_y(y = G\tilde{q}), \qquad \hat{\Omega}(\tilde{q}) = \sqrt{G}\hat{\Omega}_y(y = G\tilde{q}).$$

Более аксиоматический подход

Заметим, что можно

$$|\psi\rangle \to \frac{\hat{\Omega}(\tilde{q})}{\sqrt{P(\tilde{q})}}|\psi\rangle,$$

где оператор Ω можем представить в виде произведения унитарного и эрмитова

$$\hat{\Omega}(\tilde{q}) = \hat{U}\cdot\hat{\Pi}^{1/2}(\tilde{q}).$$

Вообще основной вклад вносит эрмитова часть, поэтому часто считаю Ω эрмитовым, что, конечно, в общем случае не так.

Разложение единицы

Рассмотрим результат измерения $\hat{\Pi}(q)$ и потребуем

$$\forall\tilde{q},\,\tilde{q}' \quad \left[\hat{\Pi}(\tilde{q}),\,\hat{\Pi}(\tilde{q}')\right] = 0,$$

тогда есть общий базис.

$$\hat{\Pi}(\tilde{q}) = \int \Pi(\tilde{q},q)\,|q\rangle\langle q|\,dq = \Pi(\tilde{q},\,\hat{Q}), \qquad \hat{Q} = \int q\,|q\rangle\langle q|\,dq.$$

Продолжаем считать $\hat{\Omega}(\tilde{q}) = \Pi^{1/2}(\tilde{q},\,\hat{q})$. И этот общий базис соответствует оператору $\hat{Q}$.

Например

$$(\Delta q)^2_{\text{meas}} = \int_{-\infty}^{+\infty}(\tilde{q}-q)^2\Pi(\tilde{q},q)\,d\tilde{q}.$$

Так для непрерывного случая точность при многократном измерение будет накапливаться.

[1] Объект приходит в собственное состояние прибора.

Примеры

Рассмотрим падение поляризованного фотона на PBS, и далее следующего либо в $|H\rangle$ либо в $|V\rangle$:

$$|0\rangle \otimes (\psi_h\,|h\rangle + \psi_v\,|v\rangle)\,,$$

после эволюции правила игры такие

$$\hat{U}\,|0\rangle\,|h\rangle = |H\rangle\,|h\rangle\,, \qquad \hat{U}\,|0\rangle\,|v\rangle = |V\rangle\,|v\rangle\,,$$

где h, v – поляризация фотона.

Разложим единицу в виде

$$\hat{U}\,|0\rangle = \hat{U}\,|0\rangle\,(|h\rangle\,\langle h| + |v\rangle\,\langle v|) = |H\rangle\,|h\rangle\,\langle h| + |V\rangle\,|v\rangle\,\langle v|\,.$$

Таким образом *оператор Крауса* или *оператор редукции*

$$\hat{\Omega}_H = \langle H|\hat{U}|0\rangle = |h\rangle\,\langle h| = \mathbb{1}_h,$$
$$\hat{\Omega}_V = \langle V|\hat{U}|0\rangle = |v\rangle\,\langle v| = \mathbb{1}_v.$$

2 Лекция №3. Пределы измерений и «Back Action»

Пример линейного измерения

Кстати, SQL – Standart Quantum Limit, который даже достигнут и не является фундаментальным. Рассмотрим зеркало с координатой x, посылаем лучик, меряем фазу φ:

$$\varphi_{\text{out}} = \varphi + 2kx$$

Картина Гейзенберга. Лучик описывается $\hat{N}$, $\hat{\varphi}$, хотя оператора фазы и не бывает, но можно ввести оператор $\cos\hat{\varphi}$ и $\sin\hat{\varphi}$, с ненулевым коммутатором $\sim |0\rangle\,\langle 0|$. Поэтому для достаточно возбужденных состояний можно приближенно ввести оператор фазы канонически сопряженный числу квантов N

$$\left[\hat{N},\,\hat{\varphi}\right] = i.$$

Вполне естественно рассматривать гамильтониан

$$\hat{H} = -\hat{F}\hat{x} = -2\frac{\hbar\omega\hat{\hat{N}}}{c}\hat{x} = -2\hbar k\hat{\hat{N}}\hat{x}.$$

Посчитав уравнение Гейзенберга для этого гамильтониана

$$\hat{\varphi}_{\text{out}} = \hat{\varphi} + 2k\hat{x}$$
$$\hat{p}_{\text{out}} = \hat{p} + 2\hbar k\hat{N}$$

Таким образом можем оценить координату x

$$\tilde{x} = \frac{\hat{\varphi}_{\text{out}}}{2k} = \hat{x} + \frac{\hat{\varphi}}{2k}.$$

Есть два линейных уравнения, все масштабы нелинейности (здесь λ) много больше величин, которые хотим померять, и это приводит к очень приятным последствиям. Действительно, рассмотрим

$$[\tilde{x},\,\hat{p}_{\text{out}}] = [\hat{x},\,\hat{p}] + \hbar\left[\hat{\varphi},\,2k\hat{N}\right] = i\hbar + \hbar(-i) = 0,$$

что очень характерно для линейных систем.

Ошибка измерения

$$\langle(\Delta x)^2_{\text{meas}}\rangle = \frac{(\Delta\varphi)^2}{4k^2} \overset{\text{coh}}{=} \frac{1}{16k^2N},$$

где для когерентного состояния $\Delta N = N^{1/2}$ и $\Delta\varphi = \frac{1}{2}N^{-1/2}$.

И для обратного действия

$$\langle(\Delta p)^2_{\text{BA}}\rangle = 4\hbar^2k^2(\Delta N)^2 \overset{\text{coh}}{=} 4\hbar^2k^2N.$$

К слову, соотношение неопределенности

$$\langle(\Delta x)^2_{\text{meas}}\rangle\langle(\Delta p)^2_{\text{BA}}\rangle = \hbar^2(\Delta\varphi)^2(\Delta N)^2.$$

Картина Шрёдингера. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

Пример неизменяющего взаимодействия

Бомбовый парадокс. Есть склад где бесконечно много бомб, есть через которые если фотон проходит, то они взрываются, и те которые не взрываются. Найдём исправную бомбу, взяв интерферометр Маха-Цендера.

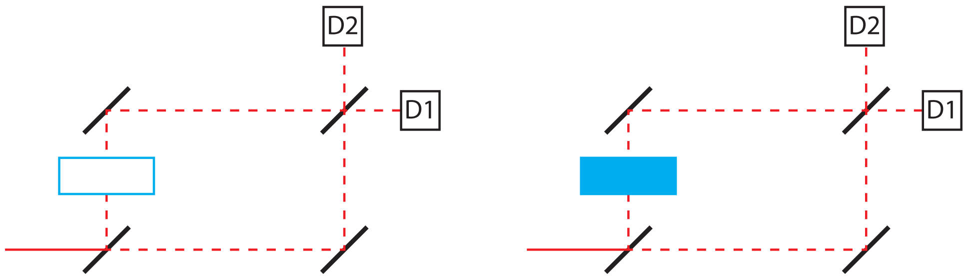

Рис. 1: Иллюстрация к бомбовому парадоксу

Без внешнего влияния срабатывает D1, соответсвенно если мы поставили бомбу, и фотон прилетел в D2, то мы гарантируем, что у нас правильная бомба, при этом фотон через неё не пролетал.

Эффект Зенона. Настроим вращатель так, чтобы за N пролетов случился поворот на $\pi/2$, тогда вероятность

$$P_1 = \left(\cos^2\frac{\pi}{2N}\right)^N = \left(1 - \frac{\pi^2}{4N^2}\right)^N = e^{-\pi/N}.$$

На картинке представлена схема эксперимента. Таким образом вероятность поглотиться объектом нулевая,

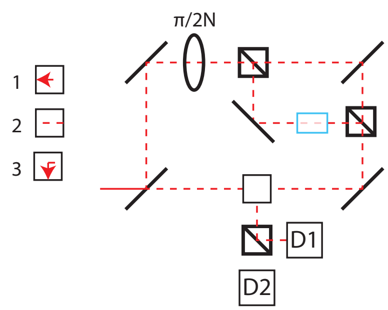

Рис. 2: Эффект Зенона

однако гарантировано мы при $N \to \infty$ определяем наличие на пути объекта.

3 Лекция №4

Основная мера шума, с которым будем работать

$$B(t,t') = \langle f(t)f(t')\rangle,$$

ковариационная функция. Вообще далее будем работать с симметризованным произведением

$$\hat{f}\circ\hat{g} = \frac{1}{2}\left(\hat{f}\hat{g} + \hat{g}\hat{f}\right).$$

Рассмотрим пример

$$\langle[\hat{f}(t) - \hat{f}(t+\tau)]^2\rangle = \langle f^2(t)\rangle + \langle f^2(t+\tau)\rangle - \langle f(t)f(t+\tau)\rangle - \langle f(t+\tau)f(t)\rangle = B(t,t) + B(t+\tau,t+\tau) - 2B(t,t+\tau).$$

Для двух разных функций

$$B_{f,g}(t,t') = \langle\hat{f}(t)\circ\hat{g}(t')\rangle, \qquad B_{fg}(t,t') = B_{gf}(t',t).$$

Стационарный процесс

Процесс называется *стационарным*, если

$$B(t,t') = B(t+\tau, t'+\tau), \qquad \forall t, t', \tau,$$

тогда рассмотрим $\tau = -t'$, и получим что $B(t,t') = B(t-t', 0) \overset{\text{def}}{=} B(t-t')$ – для стационарного процесса корреляционная функция зависит только от разности t, t'. Ещё мы знаем, что $B(t) = B(-t)$.

Спектральная плотность. Рассмотрим Фурье-образ

$$F(\Omega) = \int f(t) e^{i\Omega t}\, dt, \qquad f(t) = \int F(\Omega) e^{-i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi}.$$

Выбор знака – квантово-оптический.

Найдём теперь

$$\langle F(\Omega), F^\dagger(\Omega')\rangle = \int \langle f(t), f(t')\rangle e^{i\Omega t - i\Omega' t}\, dt\, dt' = \int B(t) e^{i\Omega t} e^{i(\Omega-\Omega')t'}\, dt\, dt' = 2\pi\delta(\Omega-\Omega') \int B(t) e^{i\Omega t}\, dt,$$

так приходим к *спектральной плотности* $S(\Omega)$:

$$S(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(t) e^{i\Omega t}\, dt,$$

и выражение можем переписать в виде

$$\langle F(\Omega), F^\dagger(\Omega')\rangle = 2\pi\delta(\Omega-\Omega') S(\Omega), \qquad B(t) = \int S(\Omega) e^{-i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi} = \langle f(t),\, f(0)\rangle,$$

с учётом важного свойства $S(\Omega) = S(-\Omega)$. Для двух функций

$$S_{gf}(\Omega) = S^\dagger_{fg}(\Omega) = S(fg)(-\Omega).$$

Почему такое название, ну например

$$B(0) = \langle f^2(t)\rangle = \int S(\Omega) \frac{d\Omega}{2\pi}.$$

Билинейность. Рассмотрим некоторую систему такую, что $f \to g = Af + B$, тогда

$$f(\Omega) \to Af(\Omega), \qquad \Rightarrow \qquad S_{gg}(\Omega) = |A|^2 S_{ff}(\Omega).$$

Пусть теперь все знаем про f, g, тогда

$$S[f+g] = S_{ff} + S_{gg} + S_{fg} + S_{gf}.$$

Белый шум. Пусть

$$B(t,t') = S\delta(t-t'),$$

тогда при $t \to t'$ верно, что $B(t,t') = \langle f^2(t)\rangle \to \infty$. Для спектральной плотности

$$\int B(t) e^{i\Omega t}\, dt = S,$$

видим, что $S(\Omega) \equiv S = \text{const}$.

Оптический измеритель. Рассмотрим последовательность импульсов с интервалом θ:

$$\hat{N}_j = \langle N\rangle + \delta\hat{N}_j, \qquad [\hat{N}_j, \hat{\varphi}_l] = i\delta_{jl}.$$

Пусть импульсы одинаковы и приготовлены независимо друг от друга:

$$\langle \delta\hat{N}_j \circ \delta\hat{N}_l\rangle = (\Delta N)^2 \delta_{jl}, \qquad \langle \hat{\varphi}_j \hat{\varphi}_l\rangle = (\Delta\varphi)^2 \delta_{jl}, \qquad \Delta N\, \Delta\varphi \geqslant 1/2.$$

Собственно, хотим перейти к некпрерывному случаи и свести добавку к белому шуму.

Рассмотрим $T \gg \theta$, соответственно $J = T/\theta \gg 1$. Вспомним, что

$$\hat{\varphi}_j^{\text{out}} = \hat{\varphi}_j^{\text{in}} + 2k\hat{x},$$

$$\hat{p}^{\text{out}}(t_j) = \hat{p}^{\text{in}}(t_j) + 2\hbar k \hat{N}_j.$$

Для координаты можем написать

$$\tilde{x} = \frac{1}{2kJ} \sum_{j=1}^{J} \varphi_j^{\text{out}} = \frac{1}{2kJ} \sum_{j=1}^{J} \varphi_j^{\text{int}} + x,$$

и для импульса

$$\hat{p}^{\text{out}}(t_J) - \hat{p}^{\text{in}}(t_1) = 2\hbar k\theta \sum_{j=1}^{J} \delta\dot{\hat{N}}_j.$$

Введём $N_j = \theta \dot{N}_j$. Найдём ошибку измерения:

$$\left\langle \left(\tfrac{1}{2kJ} \sum_{j=1}^J \varphi_j^{\text{in}} \right) \right\rangle = \frac{1}{4k^2J^2} \sum_{j,l=1}^J \langle \varphi_j^{\text{in}} \varphi_l^{\text{in}} \rangle = \frac{(\Delta\varphi)^2}{4k^2J^2} \sum_{j,l=1}^J \delta_{jl} = \frac{(\Delta\varphi)^2}{4k^2J} = \frac{(\Delta\varphi)^2\theta}{4k^2T},$$

Аналогично для p зеркала (возмущение):

$$\langle (\Delta p_{\text{pert}})^2 \rangle = 4\hbar^2 k^2 T (\Delta \dot{N})^2 \theta.$$

4 Лекция №7

4.1 Одномерный случай

Общий вид. Рассмотрим линейные системы. Живём на малых отклонениях, поэтому линейность естественна. Пусть есть черный ящик, на который можем воздействовать через $F(t)$ и наблюдать отклик q

$$\hat{q}(t) = \hat{q}_0(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t,t') F(t')\, dt' \tag{4.1}$$

где χ как раз отвечает за динамику системы.

Гамильтонов подход. При этом помним, что есть квантовая механика – пишем гамильтониан вида

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - F(t)\hat{Q}, \qquad i\hbar \frac{d\hat{Q}(t)}{dt} = \left[\hat{Q}(t),\, \hat{H} \right].$$

Тогда эволюция примет вид

$$\hat{Q}(t) = \hat{Q}_0(t) - \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \left[\hat{Q}_0(t),\, \hat{Q}_0(t') \right] F(t') + \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \left[\left[\hat{Q}_0(t),\, \hat{Q}_0(t') \right], \hat{Q}_0(t'') \right] F(t')F(t''),$$

но до тех пор, пока система линейна верно, что

$$\left[\left[\hat{Q}_0(t),\, \hat{Q}_0(t') \right], \hat{Q}_0(t'') \right] = 0.$$

Остаётся выражение, вида

$$\hat{Q}(t) = \hat{Q}_0(t) - \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \left[\hat{Q}_0(t),\, \hat{Q}_0(t') \right] F(t'). \tag{4.2}$$

Таким образом динамика принципиально завязаны эволюция и шумы.

Сравнивая (4.1) и (4.2), видим что $Q \equiv q$ и

$$\chi(t,t') = \theta(t-t') \frac{i}{\hbar} \left[\hat{q}_0(t),\, \hat{q}_0(t') \right], \quad \Leftrightarrow \quad \left[q_0(t),\, q_0(t') \right] = i\hbar \left(\chi(t',t) - \chi(t,t') \right), \tag{4.3}$$

что гордо именуется *формулой Кубо* для линейного отклика.

Корреляционная функция. Введём корреляционную функцию, вида

$$B(t,t') = \frac{1}{2} \left\langle \hat{q}_0(t)\hat{q}_0(t') + \hat{q}_0(t')\hat{q}_0(t) \right\rangle.$$

Также определим

$$\hat{\mathcal{Q}} = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)\hat{q}_0(t)\, dt, \qquad \hat{\mathcal{Q}}^\dagger = \int_{-\infty}^{+\infty} Q^*(t)\hat{q}_0(t)\, dt.$$

Для неё верно, что

$$0 \leqslant \langle \psi | \hat{\mathcal{Q}}^\dagger \hat{\mathcal{Q}} | \psi \rangle, \qquad \hat{\mathcal{Q}} \left| \psi \right\rangle = \left| \varphi \right\rangle, \quad \left\langle \psi \right| \mathcal{Q}^\dagger = \left\langle \varphi \right|.$$

Для произвольных операторов $\hat{A}$, $\hat{B}$ верно, что $\hat{A}\bar{B} = \hat{A} \circ \hat{B} + \frac{1}{2} \left[\hat{A}, \hat{B} \right]$, где $\hat{A} \circ \hat{B} = \frac{1}{2}\{\hat{A}, \hat{B}\} = \frac{1}{2} \left(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \right)$. Подставляя и собирая всё вместе, находим

$$\langle \psi | \hat{\mathcal{Q}}^\dagger \hat{\mathcal{Q}} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \hat{q}_0(t)\hat{q}_0(t') \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} Q^*(t')Q(t') \left(B(t,t') + \frac{i\hbar}{2} \left(\chi(t',t) - \chi(t,t') \right) \right) \geqslant 0,$$

что верно $\forall Q$ и таким образом составляет соотношение неопределенности, связывающее χ и B.

Стационарность. На этом заканчивается общей рассмотрение, поэтому ограничимся частным случаем стационарности. `Это высокая стена, но увидели в стороночке дверь и сразу же туда ныряем.` Под стационарностью имеем ввиду, что

$$\chi(t,t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\omega) e^{-i\omega(t-t')} \frac{d\omega}{2\pi}, \qquad B(t,t') = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{-i\omega(t-t')} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Здесь $S(\omega)$ – спектральная плотность. Знаем из фурье-анализа, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(t)Y(t-t')Z(t')\,dt\,dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega)Y(\omega)Z(\omega)\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Подставляя фурье-представления в соотношение неопределенности, находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |Q(\omega)|^2\frac{d\omega}{2\pi} \times S(\omega) \geqslant \frac{i\hbar}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |Q(\omega)|^2\frac{d\omega}{2\pi} \times 2i\,\mathrm{Im}\,\chi(\omega),$$

что делает наш интеграл одномерным и даёт возможность свести всё к неотрицательности аргументов

$$S(\omega) \geqslant -\hbar\,\mathrm{Im}\,\chi(\omega).$$

Зная, что для спектральной плотности $S^*(\omega) = S(-\omega) = S(\omega)$ и $\xi(-\omega) = \chi^*(\omega)$, можем переписать неравенство в виде

$$S(\omega) \geqslant -\hbar\,\mathrm{Im}\,\chi(-\omega) = \hbar\,\mathrm{Im}\,\chi(\omega).$$

Таким образом приходим к выражению

$$S(\omega) \geqslant \hbar|\,\mathrm{Im}\,\chi(\omega)|, \tag{4.4}$$

что уже достаточно занятно.

4.2 Многомерный случай

Обобщим предыдущую секцию на многомерный случай, в частности двухмерный, но вообще не обязательно этим ограничиваться – систему с N интерфейсами, которые как-то друг с другом связаны

$$\hat{q}_j(t) = \hat{q}_{j0}(t) + \sum_{k=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{jk}(t,t')F_k(t')\,dt'.$$

Переписывая это в рамках гамильтонова подхода, с учётом линейности, можем найти, что

$$\chi(t,t') = \theta(t-t')\frac{i}{\hbar}\left[\hat{q}_{j0}(t), \hat{q}_{k0}(t')\right], \qquad \left[\hat{q}_{j0}(t), \hat{q}_{k0}(t')\right] = i\hbar\left(\chi_{kj}(t',t) - \chi_{jk}(t,t')\right).$$

Если раньше это было не ноль только для ненулевой мнимой части – наличия трения в системе, то теперь ситуация немного другая.