Задание по курсу «Физическая кинетика»

Автор заметок: Хоружий Кирилл

От: *19 мая 2023 г.*

Содержание

Проводимость Друде

Общефизическое рассмотрение. Рассмотрим движение электронов под действием электрического поля

$$m(\ddot{x}+\gamma\dot{x}) = eE,$$

в установившемся режиме $\ddot{x}=0$, $\gamma = 1/\tau$, где τ – время столкновений. Так находим

$$v = \frac{e\tau}{m}E, \qquad j = env = \frac{ne^2}{m}\tau E, \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{\text{D}} = \frac{ne^2}{m}\tau.$$

τ-приближение. Воспользуемся τ-приближением для I_{st}

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial r_i} + eE_i \frac{\partial}{\partial p_i}\right) f(r,p,t) = -\frac{f(r,p,t) - f_{\text{eq}}(p)}{\tau}.$$

Рассматривая однородную стационарную задачу приходим к уравнению, вида

$$eE_i \frac{\partial}{\partial p_i} f(p) = -\frac{\delta f(p)}{\tau},$$

где $\delta f = f - f_{\text{eq}}$, а хотим найти $j = e\int \frac{dp}{(2\pi\hbar)^d}\delta f(p) v(p)$.

Рассматривая задачу в предположение о линейном отклике, находим

$$f(p) = f_{\text{eq}}(p) + \chi_i(p)E_i + \ldots, \quad \Rightarrow \quad \chi_i(p) = -e\tau\frac{\partial}{\partial p_i} f_{\text{eq}}(p),$$

и подставляя это в выражение для j, находим

$$j_i = -e^2\tau E_s \int \frac{dp}{(2\pi\hbar)^d}\frac{p_i}{m}\frac{\partial}{\partial p_s} f_{\text{eq}}(p) = \frac{e^2\tau E_i}{m}\int \frac{dp}{(2\pi\hbar)^d} f_{\text{eq}}(p),$$

где мы проинтегрировали по частям. Таким образом приходим к выражению для проводимости Друде

$$j_i = \frac{n_{\text{eq}}e^2\tau}{m}E_i = \sigma_{\text{D}}E_i, \qquad \sigma_{\text{D}} = \frac{n_{\text{eq}}e^2}{m}\tau.$$

Переменное поле. Пусть теперь $E_i = E_i(t)$, тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + eE_i(t)\frac{\partial}{\partial p_i}\right) f(p,t) = -\frac{f(p,t) - f_{\text{eq}}(p)}{\tau}.$$

Переходя к линейному отклику, находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta f(p,t) + eE_i(t)\frac{\partial}{\partial p_i} f_{\text{eq}}(p,t) = -\frac{\delta f(p,t)}{\tau},$$

или переходя к Фурье $\delta f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t}\delta f(\omega)$, находим

$$-i\omega\,\delta f(p,\omega) + eE_i(\omega)\frac{\partial}{\partial p_i} f_{\text{eq}}(p) = -\frac{\delta f(p,\omega)}{\tau},$$

тогда Фурье-образ поправки функции распределения будет равен

$$\delta f(p,\omega) = -\frac{eE_i(\omega)}{1-i\omega\tau}\frac{\partial f_{\text{eq}}(p)}{\partial p_i}\tau.$$

Подставляя в выражение для тока j, получим

$$j_i(\omega) = \frac{\sigma_{\text{D}}}{1-i\omega\tau}E_i(\omega) = \sigma(\omega)E_i(\omega),$$

с полюсом в нижней полуплоскости – причинная функция Грина! Собственно, после обратного Фурье, находим

$$j_i = \int_{-\infty}^{t} \sigma(t-t')E_i(t)\,dt', \qquad \Rightarrow \qquad \sigma(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t}\frac{\sigma_{\text{D}}}{1-i\omega\tau} = \sigma_{\text{D}}\cdot\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\theta(t).$$

1 Кинетическое уравнение Власова

1.1 Цепочка уравнений Боголюбова-Борна-Грина-Кирквуда

Начнём с уравнение Лиувилля, считая заданными $\boldsymbol{r}^N = (\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$ и $\boldsymbol{p}^N = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}_i}, \qquad \dot{\boldsymbol{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}_i},$$

где Гамильтониан запишется в виде

$$H = K(\boldsymbol{p}^N) + V(\boldsymbol{r}^N) + \Phi(\boldsymbol{r}^N), \qquad K(\boldsymbol{p}^N) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m}, \quad \Phi(\boldsymbol{r}^N) = \sum_{i=1}^{N}\varphi(\boldsymbol{r}_i).$$

Введём также функцию распределения $f^{[N]}(\boldsymbol{r}^N, \boldsymbol{p}^N, t)$ так чтобы $f^{[N]}(\boldsymbol{r}^N, \boldsymbol{p}^N, t)\, d\boldsymbol{r}^N\, d\boldsymbol{p}^N$ – вероятность находиться в данной точке фазового пространства. Нормировка единичная.

Закон сохранения. Закон сохранения в дифференциальном виде запишется в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0,$$

где в нашем случае ρ – $f^{[N]}$, и $\boldsymbol{j} = \{f^{[N]}\dot{\boldsymbol{r}}_i, f^{[N]}\dot{\boldsymbol{p}}_i\}$, тогда

$$\frac{\partial f^{[N]}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} \left[f^{[N]} \dot{\boldsymbol{r}}_i \right] + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_i} \left[f^{[N]} \dot{\boldsymbol{p}}_i \right] \right) = \frac{df^{[N]}}{dt} = 0,$$

при подстановке уранений Гамильтона.

Редуцированная функция. Редуцированная функция $f^{(n)}$ определяется как

$$f^{(n)}(\boldsymbol{r}^n,\, \boldsymbol{p}^n,\, t) = \frac{N!}{(N-n)!} \int f^{[N]}(\boldsymbol{r}^N,\, \boldsymbol{p}^N,\, t)\, d\boldsymbol{r}^{(N-n)}\, d\boldsymbol{p}^{(N-n)},$$

где $d\boldsymbol{r}^{(N-n)} = d\boldsymbol{r}_{n+1} \dots d\boldsymbol{r}_N$ и $d\boldsymbol{p}^{(N-n)} = d\boldsymbol{p}_{n+1} \dots d\boldsymbol{p}_N$.

Работаем в приближение потенциального внешнего поля

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = \boldsymbol{X}_i + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{r}_i,\, \boldsymbol{r}_j), \qquad \boldsymbol{F}_{ii} = 0.$$

Тогда сохранение перепишется в виде

$$\frac{\partial f^{[N]}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m} \frac{\partial f^{[N]}}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{X}_i \frac{\partial f^{[N]}}{\partial \boldsymbol{p}_i} = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ij} \frac{\partial f^{[N]}}{\partial \boldsymbol{p}_i}.$$

При редуцирование в силу ограниченности в фазовом пространстве, остаётся

$$\frac{\partial f^{(n)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m} \frac{\partial f^{(n)}}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i \frac{\partial f^{(n)}}{\partial \boldsymbol{p}_i} = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ij} \frac{\partial f^{(n)}}{\partial \dot{\boldsymbol{p}}_i} - \frac{N!}{(N-n)!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n+1}^{N} \int \boldsymbol{F}_{ij} \frac{\partial f^{[N]}}{\partial \boldsymbol{p}_i}\, d\boldsymbol{r}^{(N-n)}\, d\boldsymbol{p}^{(N-n)}.$$

С учетом симметричности функции распределения, последнее слагаемое можем переписать в виде

$$-\frac{N!(N-n)}{(N-n)!} \sum_{i=1}^{n} \int F_{i,n+1} \frac{\partial f^{[N]}}{\partial \boldsymbol{p}_i}\, d\boldsymbol{r}^{(N-n-1)}\, d\boldsymbol{p}^{(N-n-1)}\, d\boldsymbol{r}_{n+1}\, d\boldsymbol{p}_{n+1},$$

Так приходим к выражению, вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \sum_{i=1}^{n} \left[\boldsymbol{X}_i + \sum_{j=1}^{n} F_{ij} \right] \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_i} \right) f^{(n)} = -\sum_{i=1}^{n} \int F_{i,n+1} \frac{\partial f^{(n+1)}}{\partial \boldsymbol{p}_i}\, d\boldsymbol{r}_{n+1}\, d\boldsymbol{p}_{n+1}. \tag{1.1}$$

Эта система уравнений называется цепочкой уравнений Боголюбова-Борна-Грина-Кирквуда Обычно интерес представляют $n = 1, 2$, кстати $\int f^{(n)}\, d\boldsymbol{r}^n\, d\boldsymbol{p}^n = \frac{N!}{(N-n)!}$.

1.2 Уравнение Власова

Для $n = 1$ уравнение сведётся к

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{X}_1 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} \right) f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{p}_1,\, t) = -\int \boldsymbol{F}_{12} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} f^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_2, t)\, d\boldsymbol{r}_2\, d\boldsymbol{p}_2.$$

В силу отсутствия корелляций между столкновениями попробуем сделать приближение

$$f^{(2)}(\xi_1, \xi_2, t) = f^{(1)}(\xi_1^t) f^{(1)}(\xi_2^t).$$

Определяя

$$\tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{r}_1, t) = \int \boldsymbol{F}_{12}(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{r}_2) f^{(1)}(\boldsymbol{r}_2,\, \boldsymbol{p}_2,\, t)\, d\boldsymbol{r}_2\, d\boldsymbol{p}_2,$$

приходим к бесстолкновительному уравнению Власова

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \left[\boldsymbol{X}_1 + \tilde{\boldsymbol{F}} \right] \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} \right) f^{(1)} = 0. \tag{1.2}$$

которое валидно при $nd^3 \gg 1$.

1.3 Интеграл столкновений

Для $n = 2$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \frac{\boldsymbol{p}_2}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2} + [\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{F}_{12}]\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} + [\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{F}_{21}]\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_2}\right) f^{(2)}(\xi_1, \xi_2, t) = -\int \left(\boldsymbol{F}_{13}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} + \boldsymbol{F}_{23}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_2}\right) f^{(3)}\, d\boldsymbol{r}_3\, d\boldsymbol{p}_3$$

Считая $nd^3 \ll 1$, можем игнорировать[1] трёхчастичные столкновения, тогда

$$\left(\frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \frac{\boldsymbol{p}_2}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2} + F_{12}\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_2}\right]\right) f^{(2)} = 0.$$

Переходя к координатам, находим

$$\boldsymbol{F}_{12}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_2}\right) f^{(2)} = -\left(\frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \frac{\boldsymbol{p}_2}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2}\right) f^{(2)}.$$

Введём $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{R} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)$, тогда

$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \boldsymbol{R}} \ll \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \boldsymbol{r}}.$$

Возвращаемся к одночастичной функции, интегрируя находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{X}_1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1}\right) f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t) = -\int \boldsymbol{F}_{12}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_2}\right) f^{(2)}\, d\xi_2 = \int \left[\frac{\boldsymbol{p}_2}{m} - \frac{\boldsymbol{p}_2}{m}\right]\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{p}_2,$$

продолжая с правой частью, вводя $\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \frac{\boldsymbol{p}_2}{m} - \frac{\boldsymbol{p}_1}{m}$ находим

$$\int dp_2\, d^2\sigma\, dz \boldsymbol{v}_{\text{отн}}\left(f^{(2)}(t_+) - f^{(2)}(t_-)\right).$$

После столкновения меняются импульсы частиц, тогда правую часть можем переписать в виде

$$\int d\boldsymbol{p}_2\, d^2\sigma \boldsymbol{v}_{\text{отн}}\left(f^{(1)}(\boldsymbol{p}_2', \boldsymbol{r}, t) f^{(1)}(\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{r}, t) - f^{(1)}(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{r}, t) f^{(1)}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{r}, t)\right), \quad \text{– интеграл столкновений.} \tag{1.3}$$

Формально есть частицы прилетевшие и улетевшие. К слову, $d\boldsymbol{p}_1\, d\boldsymbol{p}_2 = d\boldsymbol{p}_1'\, d\boldsymbol{p}_2'$.

2 x Колебания в плазме

Рассмотрим частицы в силе Лоренца

$$\hat{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}]\right).$$

Запишем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} - e\left[\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}]\right]\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\right) f = 0.$$

Учтём, что $M \gg m$, тогда $f_i = f_{io}$ и $f = f_0 + \delta f$. В линейном отклике

$$\rho = -e\int \delta f\, d\Gamma, \qquad \boldsymbol{j} = -e\int \boldsymbol{v}\,\delta f\, d\Gamma,$$

где уже учли отсутствие вклада равновесных слагаемых. Равновесная функция распределения $f_0 = f_0(\varepsilon(\boldsymbol{p}))$, подставляя, находим

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial \delta f}{\partial \boldsymbol{r}} - e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}]\right)\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}} = 0, \qquad \frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}.$$

Итого остаётся

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial \delta f}{\partial \boldsymbol{r}} = e(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E})\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} - \frac{\delta f}{\tau},$$

где добавление $-\frac{\delta f}{\tau}$ приводит к причинности дальнейшего выражения $+i\delta = +i/\tau$.

Рассмотрим $\boldsymbol{E} = E_{k,\omega}e^{i(\boldsymbol{kr} - \omega t)}$, и тогда $\delta f = \delta f_{k,\omega}e^{i(\boldsymbol{kr} - \omega t)}$, подставляя находим

$$(\omega - \boldsymbol{kv})\delta f_{k\omega} = ie(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E}_{k\omega})\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon},$$

и выражение на Фурье образ первой поправки

$$\delta f_{k\omega}(\boldsymbol{p}) = \frac{ie(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E}_{k,\omega})}{\omega - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} + i\delta}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}.$$

[1] Также будем считать, что $\boldsymbol{X}_i$ меняются слабо.

Вспомним, что $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}$, тогда

$$-e \int \frac{ie\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{E}_{k\omega})}{\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v} + i\delta} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\, d\Gamma = j_{k\omega} = -i\omega P_{k\omega},$$

откуда находим поляризацию

$$P_{\alpha, k\omega} = \frac{e^2}{\omega} E_\beta \int \frac{v_\alpha v_\beta}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\, d\Gamma = \chi_{\alpha\beta} E_\beta.$$

Для трёхмерного случая итого находим

$$D_\alpha = E_\alpha + 4\pi P_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta, \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{k}) = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi e^2}{\omega} \int \frac{v_\alpha v_\beta}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\, d\Gamma.$$

Перейдём к переменным $\hat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}/v$, $\hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k}/k$, переписываем интеграл в виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi e^2}{\omega^2} \int d\Gamma\ s v^2 \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\hat{v}_\alpha \hat{v}_\beta}{s - \hat{\boldsymbol{k}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}} + i\delta}$$

где $s = \omega/kv$. Итого усредняя находим[2]

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\hat{v}_\alpha \hat{v}_\beta}{s - \hat{\boldsymbol{k}}\cdot\hat{\boldsymbol{v}} + i\delta} = A(s)\delta_{\alpha\beta} + B(s)\hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta f,$$

Итого находим выражение в виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{k}) = \varepsilon_l \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} + \varepsilon_t \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right).$$

Считая $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_e + \boldsymbol{E}_t$, где $\boldsymbol{E}_l = (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}/k^2$ и $\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_l$, найдём

$$D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta = D_{l\alpha} + D_{t\alpha}, \qquad D_{l\alpha} = \varepsilon_l E_{l\alpha}, \quad D_{t\alpha} = \varepsilon_t D_{t\alpha}.$$

Рассмотрим теперь только $\boldsymbol{E}_l \propto \boldsymbol{k}$, тогда

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = i\left[\boldsymbol{k}\times \boldsymbol{E}_l\right] = 0 = -\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{B}, \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = 0 = \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{D}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{D}_l = 0.$$

Таким образом $\varepsilon_l(\omega, \boldsymbol{k}) = 0$ задаёт дисперсию продольных плазменных колебаний. Для поперечных плазменных колебаний уравнение примет вид

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_t(\omega, \boldsymbol{k}).$$

2D

Специфично для двухмерного случая

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\right) f = 0,$$

поле и поправка

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{k\omega} e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - \omega t)}, \qquad \delta f_{\boldsymbol{k},\omega} = \frac{ie(\boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{E}_{k\omega}(z=0))}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} + i\delta} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}.$$

Рассмотрим выражение для ρ, которая имеет принципиально двухмерный характер

$$\rho_{\omega\boldsymbol{k}} = -ie^2 \int \frac{ie(\boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{E}_{k\omega}(z=0))}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} + i\delta} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\, d\Gamma.$$

Отдельно найдём

$$I(\omega, \boldsymbol{k}) = \int \frac{\boldsymbol{v}}{\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v} + i\delta} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\, d\Gamma = \frac{\boldsymbol{k}}{k^2} \int \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} A(s)\, d\Gamma, \qquad A(s) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{\cos\varphi - s + s}{s - \cos\varphi + i\delta}.$$

Сделаем замену

$$x = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \quad d\varphi = \frac{2\,dx}{1+x^2}, \quad \Rightarrow \quad A(s) = \begin{cases} -1 + \frac{s}{\sqrt{s^2-1}}, & s > 1 \\ -1 - \frac{is}{\sqrt{1-s^2}}, & s > 1. \end{cases}$$

где мнимая часть связана с затуханием Ландау. Подставляя в плотность

$$\rho_{\omega k} = -\frac{ie^2}{k^2}\left(\boldsymbol{k}\cdot \boldsymbol{E}_{\omega k}\right) \int \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} A(s)\, d\Gamma.$$

Расписывая уравнения Максвелла

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho(x,y)\delta(z), \qquad \boldsymbol{E} = -\nabla\varphi, \quad \varphi = \varphi_{k\omega}(z) e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - \omega t)}.$$

[2] см. Бурмистров, считается $A(s)$, $B(s)$.

3 Кондактанс

3.1 Общая идея

Рассмотрим два куска металла между которыми существует 1D идеальный провод. Химпотенциалы соответственно равны

$$\mu_L = \mu + \frac{1}{2}eV, \qquad \mu_R = \mu - \frac{1}{2}eV,$$

ток можем найти как $I = I_R - I_L$:

$$I = \sum_{k>0} ev_k \left(f_R(\varepsilon_k) - f_L(\varepsilon_k)\right),$$

где $f_{R,L}(\varepsilon_k) = f(\varepsilon_k - \mu_{R,L})$ – числа заполнения. Подставляя в выражение для тока, находим

$$I = -\sum_{k>0} ev_k \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_k}\left(\delta\mu_L - \delta\mu_R\right) = -e^2 V \int_{k>0} \frac{dk}{2\pi}\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \hbar k}\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_k} = -\frac{e^2}{2\pi} V \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = \frac{e^2}{2\pi\hbar}V.$$

где сделали подстановку $v_k = \partial\varepsilon_k/\partial\hbar k$, числа заполнения равны $f(\varepsilon = 0) = 1$ и $f(\varepsilon = \infty) = 0$ соответственно. Таким образом находим квант проводимости

$$G = \frac{I}{V} = \frac{e^2}{2\pi\hbar}.$$

Если скажем, что электроны отражаются с коэффициентом $|t_i|^2$ и всего всего есть N одномерных каналов, получим *формулу Ландауэра*

$$G = \frac{e^2}{2\pi\hbar}\sum_{i=1}^N |t_i|^2.$$

3.2 Подход Ландауэра

Рассмотрим точечный контакт двух проводников. Пусть хим. потенциал резервуаров μ_1 и μ_2, функция распределения при температуре Θ

$$f_\alpha(E) = \left(e^{(E-\mu_\alpha)/\Theta} + 1\right)^{-1}, \qquad \alpha = 1, 2.$$

Будем считать систему двухмерной, ось x вдоль течения тока, тогда уравнение Шрёдингера на стационарные волновые функции имеет вид

$$\hat{H}\psi = E\psi, \qquad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + U(x,y).$$

Считаем, что расстояние между стенками меняется как $W(x)$, тогда для $W = \mathrm{const}$ можем явно найти $\psi(x,y) = \varphi(x)\varphi(y)$ и

$$\varphi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{W}}\sin\left(\pi n\left(\frac{y}{W} + \frac{1}{2}\right)\right),$$

для которых верно, что

$$-\left(\frac{\hbar^2}{2m}\partial_y^2 + E\right)\varphi(y) = -\tilde{E}\varphi(y), \qquad \tilde{E} = E - U_n, \quad U_n = \frac{(\pi n\hbar)^2}{2mW^2}.$$

Для адиабатического приближения можем подставить $W = W(x)$. Таким образом эффцективный потенциал имеет вид потенциального барьера высоты $E_n = (\pi n\hbar)^2/(2mW_0^2)$, где $W_0 = \min W(x)$.

Введём вероятности отражения и прохождения R_{nm} и T_{nm} из канала m в канал n, тогда

$$I = 2\sum_{n,m}\int_0^\infty \frac{dE}{2\pi\hbar v_n} ev_n \left(f_1(E)(\delta_{nm} - R_{nm}) - f_2(E)T_{nm}\right).$$

Для линейного кондактанса $G = dI/dV$ при $V \to 0$, пределе нулевой температуры $\mu_1 = E_F$, $\mu_2 = E_F - eV$ и $f(E) = \theta(\mu - E)$ найдём

$$G = 2\sum_{n.m}\int_0^\infty \frac{e^2\, dE}{2\pi\hbar}\delta\left(E_F - eV - E\right)T_{nm}(E) = \frac{e^2}{\pi\hbar}\sum_{n,m} T_{nm}(E_F).$$

Появился $G_q = e^2/(\pi\hbar)$ – квантовый кондактанс.

3.3 Поток тепла

Запишем в линейном приближение ток и поток тепла I_Q

$$I = \frac{2e}{h}\int_0^\infty (f_1(E)-f_2(E))T(E)\,dE = GV+L\,\delta\Theta, \qquad I_Q = \frac{2}{h}\int_0^\infty (f_1(E)-f_2(E))(E-\mu)T(E)\,dE = L'V+K\,\delta\Theta, \qquad \delta\Theta = \Theta_1-\Theta$$

где ввели кинетические коэффициенты G, L, L' и K.

Раскладываясь по температуре, находим

$$I_Q/\delta\Theta = K \approx \frac{G}{e^2}\int_0^\infty \frac{\partial f(E)}{\partial\Theta}(E-\mu)\,dE = \frac{\pi^2}{3}\frac{G\Theta}{e^2}.$$

По сути это закон Видемана-Франца в применении к точечному контакту.

Аналогично находим $L' = L\Theta$, что является проявлением принципа симметрии кинетических коэффициентов Онсагера. И, наконец, для L:

$$L = G\frac{\pi^2}{3}\frac{\Theta}{e}\frac{\partial \ln T}{\partial E}.$$

4 Упругое рассеяние электронов на примесях

Рассеяние электронов на примесях

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{k}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\right) f = I_{\boldsymbol{k}} = -\frac{\delta f}{\tau}.$$

В данном случае для линеаризованного кинетического уравнения τ-приближение является точным, где $\delta f = f_k - f_0$.

Поработаем с самим интегралом столкновений

$$I_k = \frac{2\pi}{\hbar}\sum_{\boldsymbol{k}'}\left(|\langle \boldsymbol{k}'|U_{\text{пол}}|\boldsymbol{k}\rangle|^2\delta(\varepsilon_k-\varepsilon_{k'})\left[f_{k'}(1-f_k)-f_k(1-f_{k'})\right]\right),$$

где $f_{k'}(1-f_k)-f_k(1-f_{k'}) = f_{k'}-f_k$. Для матричного элемента

$$U_{\text{пол}}(\boldsymbol{r}) = \sum_{j=1}^N U(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}_j), \qquad \langle\boldsymbol{k}| = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}.$$

Тогда для матричного эдлемента находим

$$|\langle \boldsymbol{k}'|U_{\text{пол}}|\boldsymbol{k}\rangle|^2 = \frac{1}{V^2}|\tilde{U}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')|^2\cdot\left|\sum_{j=1}^N e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\boldsymbol{R}_j}\right|^2, \qquad \tilde{U}(\boldsymbol{q}) = \int e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}U(\boldsymbol{r})\,d^3\boldsymbol{r}.$$

Усредняя по случайному положению примесей

$$\left\langle\left|\sum_{j=1}^N e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')R_j}\right|\right\rangle_{\text{прим}} = N + N(N-1)\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}.$$

Для матричного элемента получили выражение

$$|\langle \boldsymbol{k}'|U_{\text{пол}}|\boldsymbol{k}\rangle|^2 = \frac{N}{V^2}|\tilde{U}(\boldsymbol{q})|^2 + \frac{N(N-1)}{V^2}|\tilde{U}(0)|^2\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}, \qquad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'.$$

Итого для интеграла столкновений получаем выражение после замены $\sum_{\boldsymbol{k}} \to \int \frac{V\,d^3k}{(2\pi)^3}$

$$I_k(f) = \frac{2\pi n}{\hbar}\int\frac{d^3\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3}|\tilde{U}(\boldsymbol{q})|^2\delta(\varepsilon_k-\varepsilon_{\boldsymbol{k}})\cdot(\delta f_{k'}-\delta f_k),$$

где уже линеаризовали выражение. Здесь n – примесное.

Рассмотрим стационарный однородный случай, когда $\hbar\dot{\boldsymbol{k}} = -e\boldsymbol{E}$, где поле считаем малой поправкой, тогда

$$\dot{\boldsymbol{k}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}} = -e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}, \qquad \delta f_k \overset{\text{def}}{=} \tau(\varepsilon)\,(e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}})\,\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon},$$

то есть ищем решение в τ-приближение. Получается уравнение

$$-(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon} = I_k = \frac{2\pi n}{\hbar}e\boldsymbol{E}\int\frac{d^3\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3}|\tilde{U}(\boldsymbol{q})|^2\delta(\varepsilon_k-\varepsilon_{k'})\left(\tau(\varepsilon')\boldsymbol{v}'\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon'} - \tau(\varepsilon)\boldsymbol{v}\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon}\right).$$

Сокращая $\partial_\varepsilon f_0$ и всё лишнее, находим

$$\boldsymbol{v} = \frac{\hbar\boldsymbol{k}}{m} = \frac{n\tau(\varepsilon[\boldsymbol{k}])}{4\pi^2\hbar}\int_0^\infty dk'\,(k')^2\int d\Omega_{k'}|\tilde{U}(\boldsymbol{q})|^2\cdot\frac{\delta(k-k')}{\hbar^2k/m}\frac{\hbar}{m}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}').$$

Остаётся выражение

$$\frac{1}{\tau(\varepsilon)} = \frac{mkn}{4\pi^2\hbar^3}\int d\Omega_k\ |\tilde{U}(\boldsymbol{q})|^2(1-\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}'), \qquad \hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{k}}{k}. \tag{4.1}$$

Дифференциальное сечение рассеяния. Найдём выражение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 |\tilde{U}(\boldsymbol{q})|^2, \qquad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}', \quad q^2 = 4k^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

И интеграл столкновений перепишется в виде

$$\frac{1}{\tau(\varepsilon)} = nv\int \frac{d\sigma}{d\Omega}(1-\cos\theta)\,d\Omega = nv\sigma_{\text{tr}}, \tag{4.2}$$

где возникло новое σ_{tr} с подавленным рассеянием на малых углах.

Вспоминая формулу Друде, находим

$$\boldsymbol{j} = \sigma_D\boldsymbol{E}, \qquad \sigma_D = \frac{e^2n_0\tau_{\text{tr}}}{m},$$

где входит именно τ_{tr}.

Фурье-образ. Для экранированного кулоновского потенциала

$$U(r) = -e^{-r/\lambda}\frac{Ze^2}{r}, \qquad \tilde{U}(\boldsymbol{q}) = \int U(\boldsymbol{r})e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}\,dV = \frac{4\pi Ze^2}{q^2+\lambda^{-2}}.$$

Для дифференциального сечения рассеяния находим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^2}\left(\frac{4\pi Ze^2}{q^2+\lambda^{-2}}\right)^2 = \left(\frac{Ze^2}{4E_F}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}+(2k_F\lambda)^{-2}}\right)^2.$$

где $q = 2k_F\sin\frac{\theta}{2}$. Полное сечение рассеяния тогда получается

$$\sigma = \int d\sigma = \int_0^\pi \left(\frac{Ze^2}{4E_F}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}+(2k_F\lambda)^{-2}}\right)^2 = \frac{2\pi Z^2e^4}{4E_F^2}\int_0^2 \frac{du}{(u+\frac{1}{2}(k_F\lambda)^{-2})^2},$$

где $u = 1-\cos\theta$. Итого, введя $\zeta \overset{\text{def}}{=} \frac{4}{\pi}(k_F\lambda)^2$, находим

$$\sigma = \frac{\pi Z^2e^4}{2E_F^2}\frac{(\pi\zeta)^2/2}{1+\pi\zeta}.$$

Для транспортного σ_{tr}, находим

$$\sigma_{\text{tr}} = \frac{2\pi Z^2e^4}{4E_F^2}\int_0^2\frac{u\,du}{(u+\frac{1}{2}(k_F\lambda)^{-2})^2} = \frac{\pi Z^2e^4}{2E_F^2}\left(\ln(1+\pi\zeta)-\frac{\pi\zeta}{1+\pi\zeta}\right).$$

Для проводимости ρ можем найти

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau_{\text{tr}}} = \frac{mnv_F}{n_0e^2}\frac{\pi Z^2e^4}{2E_F^2}\zeta^3F(\zeta), \qquad F(\zeta) = \frac{1}{\zeta^3}\left(\ln(1+\pi\zeta)-\frac{\pi\zeta}{1+\pi\zeta}\right).$$

Итого, находим

$$\rho = Z^2R_qa_{\text{B}}\frac{n}{n_0}F(\zeta)\cdot\left[\frac{e^2}{2\pi\hbar}\frac{me^2}{\hbar^2}\frac{p_F}{e^2}\frac{\pi e^4}{p_F^2/2m^2}\frac{64k_F^6\lambda^6}{\pi^3}\right] = Z^2R_qa_{\text{B}}\frac{n}{n_0}F(\zeta). \tag{4.3}$$

где подставили $\lambda^2 = \frac{\pi a_{\text{B}}}{4k_F}$.

5 Рассеяние электронов на фононах

Эффект Иоффе-Регеля. На высоких температурах $r^2 \sim T$ для ионов, тогда

$$\tau = \frac{1}{n_{\text{ion}}v\sigma} \sim \frac{1}{T}, \qquad \rho = \frac{m}{ne^2\tau} \sim T.$$

Для $\tau v_F \sim \lambda_F$, можем записать с учётом $n \sim k_F^3$

$$\rho = \frac{mv_F}{ne^2\tau v_F} = \frac{mv_F}{ne^2\lambda_F} \sim \frac{\hbar}{k_Fe^2},$$

что называется пределом Иоффе-Регеля, которые неплохо работает для легированных полупроводников.

Испускание фононов. И снова запишем столкновительный интеграл в терминах приход-уход:

$$I_p = \sum_{\boldsymbol{p}'} w_{\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'}n_{\boldsymbol{p}'}(1-n_{\boldsymbol{p}}) - \sum_{\boldsymbol{p}'} w_{\boldsymbol{p}'\boldsymbol{p}}n_{\boldsymbol{p}}(1-n_{\boldsymbol{p}'}).$$

Рассматриваем однородную ситуацию, тогда

$$\dot{\boldsymbol{p}}\frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{p}} = -e(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = I_{\text{ст}}.$$

Учитвая что $w_q \sim q$, можем расписать

$$\begin{aligned}I_{\text{ст}} =& \frac{2\pi}{\hbar V}\sum_{\boldsymbol{q}}\left(w_{\boldsymbol{q}}(1+N_{\boldsymbol{q}})n_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}}(1-n_{\boldsymbol{p}})\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} + \hbar\omega_q) + w_q N_q n_{\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{q}}(1-n_{\boldsymbol{p}})\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{q}} - \hbar\omega_q)\right) - \\ &-\frac{2\pi}{\hbar V}\sum_{\boldsymbol{q}}\left(w_{\boldsymbol{q}}(1+N_{\boldsymbol{q}})n_q(1-n_{\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{q}})\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{q}} - \hbar\omega_q) + w_q N_q(1-n_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}})\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} + \hbar\omega_q)\right).\end{aligned}$$

Будем считать, что фононы равновесные

$$N_q = N_q^0 = \frac{1}{e^{\hbar\omega_q/T}-1}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1+N_q}{N_q} = e^{\hbar\omega_q/T}.$$

Для электронов

$$n_p^0 = \frac{1}{e^{(\varepsilon_p-\mu)/T}+1}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1-n_p^0}{n_p^0} = e^{(\varepsilon_p-\mu)/T}.$$

Преобразуем выражение из квадратных скобок *

$$(1+N_q)(1-n_p)(1-n_{p+\hbar q})\left(\frac{n_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}}}{1-n_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}}} - \frac{N_q}{1+N_q}\frac{n_p}{1-n_p}\right), \tag{5.1}$$

которое очевидно зануляется для равновесных функций.

Решение будем искать в виде

$$n_p = n_p^0 + \delta n_p = n_p^0 - \frac{\partial n_p^0}{\partial \varepsilon_p}\Phi_p = n_p^0 + \frac{n^0(\varepsilon_p)(1-n^0(\varepsilon_p))}{T}\Phi_p.$$

Возвращаясь к (5.1), получаем линеаризуя

$$\begin{aligned}&(1+N_q)(1-n_p^0)(1-n^0_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}})\left[\frac{\delta n_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}}}{(1-n^0_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}})^2} - \frac{N_q}{1+N_q}\frac{\delta n_p}{(1-n_p^0)^2}\right] = \\ &= +\frac{1}{T}(1+N_q)(1-n_p^0)n^0_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}}\left[\Phi_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \Phi_p\right] = \\ &= -\frac{1}{T}(1+N_q)N_q(n^0_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - n_p^0)\left[\Phi_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \Phi_p\right].\end{aligned}$$

Аналогично преобразуется второе слагаемое в *, откуда находим линеаризованный интеграл столкновений:

$$I_{\text{ст}}(\Phi_p) = -\frac{2\pi}{\hbar V}\sum_{\boldsymbol{q}} w_q \frac{(1+N_q)N_q(n^0_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - n_p^0)}{T}\left[\Phi_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \Phi_{\boldsymbol{p}}\right] \times \left[\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} + \hbar\omega_q) - \delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \hbar\omega_q)\right]$$

Выделим физ. смысл в слагаемых

$$\begin{aligned}I_{\text{ст}}(\Phi_p) = -\frac{2\pi}{\hbar V}\sum_{\boldsymbol{q}} w_q\frac{(1+N_q)N_q}{T}\Big(&\left[n^0(\varepsilon_p + \hbar\omega_q) - n^0(\varepsilon_p)\right]\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} + \hbar\omega_q) - \\ &-\left[n^0(\varepsilon_p - \hbar\omega_q) - n^0(\varepsilon_p)\right]\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \hbar\omega_q)\Big)\left[\Phi_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \Phi_{\boldsymbol{p}}\right].\end{aligned}$$

Учтём, что мы живём вблизи поверхности Ферми, тогда $\hbar\omega_q$ мало по сравнению с ε_p, приходим к выражению

$$I_{\text{ст}}(\Phi_p) = -\frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon}\frac{2\pi}{\hbar V}\sum_q w_q\frac{2\hbar\omega_q(1+N_q)N_q}{T}\delta(\varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \varepsilon_{\boldsymbol{p}})\left[\Phi_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \Phi_{\boldsymbol{p}}\right].$$

Аргумент δ-функции можем расписать в виде

$$\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} \pm \hbar\omega_q = \frac{2p\hbar q\cos\theta}{2m} + \frac{\hbar^2q^2}{2m} \pm \hbar c_L q = \frac{\hbar pq}{m}\left(\cos\theta + \frac{\hbar q}{2p} \pm \frac{mc_L}{p}\right),$$

где $c_L \ll v_F$, поэтому можем опустить последнее слагаемое.

Кинетическое уравнение. Итого, будем решать кинетическое уравнение на $\Phi_{\boldsymbol{p}}$ вида

$$-e(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})\frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon} = I_{\text{ст}}(\Phi_p) = -\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\frac{2\pi}{\hbar V}\sum_q w_q\frac{2\hbar\omega_q(1+N_q)N_q}{T}\delta(\varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \varepsilon_{\boldsymbol{p}})\left[\Phi_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \Phi_{\boldsymbol{p}}\right]. \tag{5.2}$$

Решение аналогично будем искать в виде $\Phi_p = -e(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p)$, что соответствует τ-приближению: $I_{\text{ст}} = -\delta n_p/\tau$. Таким образом остаётся найти τ_{tr}, и найти остальные величины по формуле Друде. Выражая из двух уравнений

$(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})$, находим

$$(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}) = -\frac{4\pi}{\hbar V}\sum_{\boldsymbol{q}} w_q \frac{\hbar\omega_q(1+N_q)N_q}{T}\delta(\varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}}-\varepsilon_{\boldsymbol{p}})\frac{\hbar(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{E})}{m}\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p).$$

Переходя к интегрированию, нахоим

$$(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}) = -\frac{4\pi}{\hbar}\int \frac{q^2\,dq\,d\Omega_q}{(2\pi)^3} w_q \frac{\hbar\omega_q(1+N_q)N_q}{T}\delta(\varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}}-\varepsilon_p)\frac{\hbar(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{E})}{m}\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p).$$

Проведём интегрирование, введя полярную ось и расписав

$$\boldsymbol{q} = (q\sin\theta\cos\varphi,\ q\sin\theta\sin\varphi,\ q\cos\theta),$$
$$\boldsymbol{E} = (E\sin\theta_E\cos\varphi_E,\ E\sin\theta_E\sin\varphi_E,\ E\cos\theta_E).$$

Тогда скалярное произведение перепишется в виде

$$(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{E}) = qE\left(\cos\theta\cos\theta_E + \sin\theta\sin\theta_E\cos(\varphi-\varphi_E)\right),$$

где после интегрирование второе слагаемое зануляется. Также подставляя $(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}) = Ev\cos\theta_E$, тогда

$$\frac{p}{m\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p)} = -\frac{4\pi}{T}\int_0^{q_D}\frac{q^2\,dq\sin\theta\,d\theta}{(2\pi)^2} w_q\omega_q(1+N_q)N_q \times \delta\left(\tfrac{\hbar qp}{m}\left(\cos\theta+\tfrac{\hbar q}{2p}\right)\right)\times\frac{\hbar q}{m}\cos\theta,$$

где q_D – максимальный дебаевский импульс. Таким образом

$$\frac{1}{\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p)} = \frac{4\pi m}{Tp^2}\int_0^{q_D}\frac{q^2\,dq}{(2\pi)^2}w_q\omega_q(1+N_q)N_q\int_{-1}^{1}dx\ x\times\delta\left(x+\tfrac{\hbar q}{2p}\right),$$

где ввели $x=\cos\theta$.

Вообще $q_D = \sqrt[3]{6\pi^2 n}$, $p_F = \sqrt[3]{3\pi^2 n}$, тогда $\frac{\hbar q_D}{2p_F} < 1$. Учитывая, что $w_q \propto \omega_q \propto q$, находим

$$\frac{1}{\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p)} \propto \frac{1}{T}\int_0^{q_D} q^5\,dq\ \frac{e^{\hbar\omega_q/T}}{(e^{\hbar\omega_q/T}-1)^2}.$$

Введём $z = \frac{\hbar\omega_q}{T} = \frac{T_D}{T}\frac{q}{q_D}$, где $T_D = \hbar c_L q_D$. Таким образом

$$\frac{1}{\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p)} \propto \frac{1}{T}\left(\frac{T}{T_D}\right)^6\int_0^{T_D/T}\frac{e^z z^5\,dz}{(e^z-1)^2},$$

где из-за разности скоростей возникла пятая степень вместо четвертой. Итого, искомое выражение

$$\frac{1}{\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p)} \propto \left(\frac{T}{T_D}\right)^5\int_0^{T_D/T}\frac{z^5\,dz}{\operatorname{sh}^2\frac{z}{2}}. \tag{5.3}$$

Формула Друде. Вспоминая, что

$$\sigma = \sigma_D = \frac{e^2 n\tau_{\text{tr}}}{m},$$

находим

$$\frac{\rho_{\text{e-ph}}(T)}{\rho_{\text{e-ph}}(T_D)} = \frac{\sigma_{\text{e-ph}}(T)}{\sigma_{\text{e-ph}}(T_D)} = \left(\frac{T}{T_D}\right)^5\int_0^{T_D/T}\frac{z^5\,dz}{\operatorname{sh}^2\frac{z}{2}}\Big/\int_0^1\frac{z^5\,dz}{\operatorname{sh}^2\frac{z}{2}}.$$

Для $T \ll T_D$ получится

$$\frac{\rho_{\text{e-ph}}(T)}{\rho_{\text{e-ph}}(T_D)} = 526\left(\frac{T}{T_D}\right)^5.$$

И в обратную сторону, для $T \gg T_D$, раскладываясь в ряд, находим

$$\frac{\rho_{\text{e-ph}}(T)}{\rho_{\text{e-ph}}(T_D)} = 1.06\left(\frac{T}{T_D}\right).$$

6 Электроны в магнитном поле

Запишем энергию в виде

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}) = m^{-1}_{\alpha\beta}\frac{p_\alpha p_\beta}{2},\qquad m_{\alpha\beta} = m_{\beta\alpha}.$$

Рассмотрим анзац, вида

$$\delta f(\boldsymbol{p},t) = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}(\varepsilon)e^{-i\omega t},$$

подставляя в уравнение Больцмана, найдём

$$(\tau^{-1}+i\omega)(p_\mu A_\mu) - \frac{e}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}v_\alpha B_\beta \frac{\partial}{\partial p_\gamma}(p_\mu A_\mu) = e(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}.$$

Свёртка симметричного тензора с антисимметричным даст 0, тогда

$$(\tau^{-1}-i\omega)m_{\alpha\beta}v_\alpha A_\beta - \frac{e}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}v_\alpha B_\beta A_\gamma = ev_\alpha E_\alpha\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}.$$

Вынося v_α, можем получить выражение

$$\left((\tau^{-1}-i\omega)m_{\alpha\beta}+\frac{e}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma\right)A_\beta - eE_\alpha\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}=0,$$

что составляет уравнение на величину $\boldsymbol{A}$.

Введём тензор

$$\Gamma_{\alpha\beta}=(\tau^{-1}-i\omega)m_{\alpha\beta}+\frac{e}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma, \qquad \Rightarrow \qquad A_\beta = e\Gamma^{-1}_{\beta\gamma}E_\gamma\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}.$$

Таким образом нашли поправку к функции распределения

$$\delta f(\boldsymbol{p}) = ev_\alpha m_{\alpha\beta}\Gamma^{-1}_{\beta\gamma}E_\gamma\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon},$$

и, соответственно, можем найти ток

$$j_\alpha = -e\int\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3}v_\alpha\delta f = e^2E_\gamma\int\frac{2(\,d^3p)}{(2\pi\hbar)^3}v_\alpha v_\nu m_{\nu\beta}\Gamma^{-1}_{\beta\gamma}(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}),$$

откуда можем найти тензор проводимости $j_\alpha=\sigma_{\alpha\beta}E_\beta$:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega,\boldsymbol{B}) = e^2\int\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3}v_\alpha v_\nu m_{\nu\mu}\Gamma^{-1}_{\mu\beta}\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right) = e^2\int\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3}m^{-1}_{\alpha\gamma}p_\gamma m^{-1}_{\nu\delta}P_\delta m_{\nu\mu}\Gamma^{-1}_{\mu\beta}\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right).$$

Свернув тензоры, находим

$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega,\boldsymbol{B}) = e^2m^{-1}_{\alpha\gamma}\int\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3}p_\gamma p_\mu\Gamma^{-1}_{\mu\beta}(\varepsilon)\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right) = \frac{2}{3}e^2\int d\varepsilon\ g(\varepsilon)\varepsilon\cdot\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)\Gamma^{-1}_{\alpha\beta}(\varepsilon).$$

где $g(\varepsilon)\sim\sqrt{\varepsilon}$ – плотность состояний. Переходя к плотности электронов, находим

$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega,\boldsymbol{B}) = \frac{2}{3}e^2n\int d\varepsilon g(\varepsilon)\varepsilon\Gamma^{-1}_{\alpha\beta}(\varepsilon)\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right) = ne^2\left\langle\Gamma^{-1}_{\alpha\beta}(\varepsilon)\right\rangle.$$

Для металла усреднение тревиально и с учётом δ-образной производной $\partial_\varepsilon f_0$ при низких температурах просто берём $\tau(\varepsilon_F)$:

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{ne^2}\left[(\tau^{-1}-i\omega)m_{\alpha\beta}+\frac{e}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma\right].$$

Далее считая $m_{\alpha\beta}=m\delta_{\alpha\beta}$, получим

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{m}{ne^2\tau}\begin{pmatrix}1-i\omega\tau & \omega_c\tau & 0\\ -i\omega_c\tau & 1-i\omega\tau & 0\\ 0 & 0 & 1-i\omega\tau\end{pmatrix},$$

и для обратной матрицы $\sigma_{\alpha\beta}$, находим

$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega,\,\boldsymbol{B}) = \frac{\sigma_D}{(1-i\omega\tau)^2+(\omega_c\tau)^2}\begin{pmatrix}1-i\omega\tau & -\omega_c\tau & 0\\ \omega_c\tau & 1-i\omega\tau & 0\\ 0 & 0 & \frac{(1-i\omega\tau)^2+(\omega_c\tau)^2}{1-i\omega\tau}\end{pmatrix}, \qquad \omega_c=\frac{eB}{mc}.$$

где $\sigma_D=\frac{ne^2\tau}{m}$.

Для тока можем записать

$$j_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}j_\alpha(\omega)e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_{\alpha\beta}(\omega,\boldsymbol{B})E_\beta(\omega)e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Переходя к обратному Фурье-образу для поля, находим

$$j_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_{\alpha\beta}(t-t',\boldsymbol{B})E_\beta(t')\,dt', \qquad \sigma_{\alpha\beta}(t-t',\boldsymbol{B}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_{\alpha\beta}(\omega,\boldsymbol{B})e^{-i\omega(t-t')}\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Теперь можем явно найти

$$\sigma_{zz}(t,\boldsymbol{B}) = \theta(t)\sigma_D\frac{e^{-t/\tau}}{\tau}, \qquad \sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_D\theta(t)\frac{e^{-t/\tau}}{\tau}\cos(\omega_ct), \qquad \sigma_{yx}=-\sigma_{xy}=\sigma_D\theta(t)\frac{e^{-t/\tau}}{\tau}\sin(\omega_ct),$$

где учли, что полюса подинтегрального выражения находятся в нижней полуплоскости:

$$\omega = -\frac{i}{\tau}, \qquad \omega = -\frac{i}{\tau} \pm \omega_c.$$

7 Модель диффузии Лоренца

Несохранение числа частиц. В τ-приближении:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} = -\frac{f - f_0}{\tau}, \qquad \delta n = \int \delta f \, d^3\boldsymbol{r}, \quad F(\boldsymbol{v}, t) \overset{\text{def}}{=} \int d^3\boldsymbol{r} \; f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t).$$

Проинтегрируем уравнение Больцмана по координатам:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{F - F_0}{\tau},$$

Введя $\delta F(\boldsymbol{v}, t) = F(\boldsymbol{v}, t) - F_0(\boldsymbol{v})$, найдём

$$\delta F(\boldsymbol{v}, t) = \delta F(\boldsymbol{v}, 0) e^{-t/\tau},$$

таким образом τ-приближение не сохраняет число частиц, релаксируя к равновесному.

Модификация. Исправим эту проблему следующим образом

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{1}{\tau}\left[-f + \int \frac{d\Omega_v}{4\pi} f\right] = \frac{1}{\tau}\left(Pf - f\right), \qquad Pf = \int \frac{d\Omega_v}{4\pi} f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t).$$

что называется моделью Лоренца, случай легкой примеси в тяжелом газе, а именно слабо-ионизированный газ. Здесь Pf – члены прихода. Электроны рассеиваются[3] на тяжелых частицах. Забавный факт – тут возникает диффузия, а ещё эта модель имеет точное решение.

Проверка. Аналогично перейдём к функции F, тогда

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{t}\left(PF(v, t) - F(\boldsymbol{v}, t)\right),$$

тогда, после применения проекции P, находим

$$\frac{\partial (PF)}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\left[P^2 F - PF\right] = 0, \qquad \Rightarrow \qquad PF(v, t) = \Phi(v).$$

Так находим, что

$$F(\boldsymbol{v}, t) = \Phi(v) + \left[F_0(\boldsymbol{v}) - \Phi(v)\right] e^{-t/\tau}.$$

Лаплас. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} = -\frac{1}{\tau}\left(f - \langle f \rangle\right).$$

Сдлаем преобразование Фурье в пространстве и преобразование Лапласа по времени:

$$\hat{f}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{v}, s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dt \int d^3r \; e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t).$$

вставить из фото.

Приходим к интегралу

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx \; \frac{(1 + s\tau) - ivk\tau x}{(i + s\tau)^2 + (vk\tau x)^2} = \frac{1}{vk\tau} \operatorname{arctg} \frac{vk\tau}{1 + s\tau}.$$

Подставляем всё в $P\hat{f}$

$$P\hat{f}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{v}, s) = \left[1 - \frac{1}{vk\tau} \operatorname{arctg} \frac{vk\tau}{1 + s\tau}\right] \int \frac{d\Omega_v}{4\pi} \frac{f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{v}, t = 0)}{s + i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} + \tau^{-1}},$$

находим

$$\hat{f}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{v}, s) = \frac{\tau^{-1}}{s + i\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{k} + \tau^{-1}} \left[1 - \frac{1}{vk\tau} \operatorname{arctg} \frac{vk\tau}{1 + s\tau}\right] \int \frac{d\Omega_v}{4\pi} \frac{f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{v}, t = 0)}{s + i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} + \tau^{-1}} + \frac{f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{v}, t = 0)}{s + i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} + \tau^{-1}}.$$

Конкретизируем начальные условия:

$$f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t = 0) = \delta(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0), \qquad \Rightarrow \qquad f(\boldsymbol{k}, , t = 0) = \delta(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0).$$

Подставляя в интеграл по телесному углу, находим

$$\int \frac{d\Omega_v}{4\pi} \frac{f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{v}, t = 0)}{s + i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} + \tau^{-1}} = \int \frac{d\Omega_v}{4\pi} \frac{\delta(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0)}{s + i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} + \tau^{-1}} = \frac{1}{s + i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} + \tau^{-1}} \frac{\delta(v - v_0)}{4\pi v_0^2}.$$

[3] См. ЛЛХ.

Диффузия. Рассматриваем время $t \gg \tau$, тогда малые $s\tau \ll 1$, и можем разложиться

$$1 - \frac{1}{vk\tau}\,\mathrm{arctg}\,\frac{vk\tau}{1+s\tau} = 1 - \frac{1}{1+s\tau} + \frac{1}{3}\frac{(vk\tau)^2}{(1+s\tau)^3} \approx s\tau + \frac{1}{3}v^2k^2\tau^2 + \ldots$$

Подставляя в выражение для $\hat{f}$, находим

$$\hat{f}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},s) = \left(\frac{\tau^{-1}}{s + i\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k} + \tau^{-1}}\right)^2 \frac{1}{s + \frac{1}{3}v^2k^2\tau^2}\frac{\delta(v-v_0)}{4\pi v_0^2} + \frac{\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0)}{s + i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_0) + \tau^{-1}}.$$

Смотрим большие времена и большие расстояния, тогда самое большое это τ^{-1}, и можем переписать функцию распределения $\hat{f}$ в виде

$$\hat{f}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},s) \approx \frac{1}{s + Dk^2}\frac{\delta(v-v_0)}{4\pi v_0^2}, \qquad D = \frac{1}{3}v_0^2\tau.$$

Возвращаясь к обратному Фурье-образу, находим

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) = \int_{s^*-i\infty}^{s^*+i\infty}\frac{e^{st\,ds}}{2\pi i}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\hat{f}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},s).$$

Считая по вычетам, находим

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) = \frac{\delta(v-v_0)}{4\pi v_0^2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk_x}{2\pi}\exp\left(-Dt(k_x - \frac{ix}{2Dt})^2 - \frac{x^2}{4Dt}\right)\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk_y}{2\pi}\ldots\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk_z}{2\pi}\ldots\right],$$

так приходим к явной диффузии

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}}\frac{\delta(v-v_0)}{4\pi v_0^2}e^{-r^2/4Dt}, \qquad D = \frac{1}{3}v_0^2\tau. \tag{7.1}$$

8 Электронный газ

И снова смотрим на уравнение Больцмана, ищём решение в виде $f = f_0 + \delta f$, смотрим на τ-приближение, равновесным будет распределение Ферми:

$$f_0 = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}} + 1}, \qquad \mu = \mu(t,\boldsymbol{r}), \quad T = T(t,\boldsymbol{r}).$$

Будем решать уравнение рассматривая стационарный случай

$$\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial\boldsymbol{r}} - e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon} = -\frac{\delta f}{\tau}.$$

Можем переписать

$$\frac{\partial f_0}{\partial\boldsymbol{r}} = \frac{\partial f_0}{\partial T}\boldsymbol{\nabla}T + \frac{\partial f_0}{\partial\mu}\boldsymbol{\nabla}\mu = -\frac{\varepsilon-\mu}{T}\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}\boldsymbol{\nabla}T - \frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\nabla\mu.$$

Тогда, после подстановки, левая часть уравнения может быть найдена в виде

$$\delta f = \tau\left(\frac{\varepsilon-\mu}{T}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T) + \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\mu + e\boldsymbol{E})\right)\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}.$$

Металл. Достаточно рассмотреть $-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon} \approx \delta(\varepsilon - \varepsilon_F)$. Для тока $\boldsymbol{j}$ находим

$$\boldsymbol{j} = -e\int\boldsymbol{v}(f_0 + \delta f)\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{e}{3}(\boldsymbol{\nabla}\mu + e\boldsymbol{E})\int\tau v^2\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3} + \frac{e}{3}\frac{\boldsymbol{\nabla}T}{T}\int\tau v^2(\varepsilon-\mu)\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Для плотности потока энергии $\boldsymbol{q}$

$$\boldsymbol{q} = \int\boldsymbol{v}(\varepsilon - e\varphi)(f_0 + \delta f)\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = -\frac{\boldsymbol{j}}{e}(\mu - e\varphi) - \ldots.$$

Введём диссипативную часть $\boldsymbol{q}'$

$$\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{q} + \frac{\boldsymbol{j}}{e}(\mu - e\varphi).$$

Также определим усреднение в виде

$$\langle F(\varepsilon)\rangle = \frac{m}{3n}\int\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3}v^2\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)F(\varepsilon) = \frac{2}{3n}\int_0^\infty\varepsilon\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)F(\varepsilon)g(\varepsilon)\,d\varepsilon, \qquad n = \int_0^\infty\varepsilon\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)g(\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Тогда уравнение перепишется в виде

$$\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{\nabla}\mu}{e} = \frac{m\boldsymbol{j}}{ne^2\langle\tau\rangle} - \frac{\boldsymbol{\nabla}T}{eT}\frac{\langle(\varepsilon-\mu)\tau\rangle}{\langle\tau\rangle} = \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} + \alpha\boldsymbol{\nabla}T.$$

Тогда для потока энергии

$$\boldsymbol{q}' = -\frac{\langle(\varepsilon-\mu)\tau\rangle}{e\langle\tau\rangle}\boldsymbol{j} + \frac{\boldsymbol{\nabla} T}{mT}\frac{n\langle(\varepsilon-\mu)\tau\rangle^2}{\langle\tau\rangle} - \frac{\boldsymbol{\nabla} T}{mT}n\langle(\varepsilon-\mu)^2\tau\rangle = \alpha T\boldsymbol{j} - \varkappa\boldsymbol{\nabla} T.$$

Где коэффициенты соответственно равны

$$\alpha = -\frac{\langle(\varepsilon-\mu)\tau\rangle}{eT\langle\tau\rangle}, \qquad \varkappa = \frac{n\langle\tau\rangle}{mT}\left[\frac{\langle(\varepsilon-\mu)^2\tau\rangle}{\langle\tau\rangle} - \frac{\langle(\varepsilon-\mu)\tau\rangle^2}{\langle\tau\rangle^2}\right], \qquad \sigma = \frac{ne^2\langle\tau\rangle}{m}. \tag{8.1}$$

где $\varkappa$ – коэффициент теплопроводности, α – термоэлектрический коэффициентр, σ – проводимость.

Полупроводник. Здесь можем написать, что $\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon} = -\frac{\partial f_0}{\partial T}$, так как $f_0 \approx e^{(\mu-\varepsilon)/T}$. Тогда усреднение можем переписать в виде

$$\langle F(\varepsilon)\rangle = \frac{m}{3nT}\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3}f_0 v^2 F(\varepsilon).$$

Считая, что $\tau(\varepsilon) \propto v^k \propto \varepsilon^{k/2}$ и что $f_0 \propto e^{-\frac{mv^2}{2T}}$, находим

$$\langle v^k\rangle \propto \left(\frac{2T}{m}\right)^{k/2}\Gamma\left(\frac{3+k}{2}\right).$$

Так, например, для α получится

$$\alpha = \frac{1}{e}\left(\frac{\mu}{T} - \frac{\langle\tau v^2\varepsilon\rangle}{\langle\tau v^2\rangle}\right) = \frac{1}{e}\left(\frac{\mu}{T} - \frac{\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+k}{2}\right)}\right) = \frac{1}{e}\left(\frac{\mu}{T} - \frac{5+k}{2}\right).$$

9 Уравнения Навье-Стокса

Пишем уравнение Больцмана для двухчастичных столкновений

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = \int d^3p_1\, v_{\text{отн}}\, d\sigma_{pp_1}(f'f_1' - ff_1).$$

Столкновения упругие: $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}'+\boldsymbol{p}_1'$. Умножим уравнение на некоторую $\varphi(\boldsymbol{p})$ и проинтегрируем по импульсам:

$$\int d^3\boldsymbol{p}\ \varphi(\boldsymbol{p})\ldots = \frac{1}{4}\iint d^3\boldsymbol{p}\, d^3\boldsymbol{p}_1\, v_{\text{отн}}\, d\sigma_{pp_1}(f'f_1' - ff_1)\times\left(\varphi(\boldsymbol{p}) + \varphi(\boldsymbol{p}_1) - \varphi(\boldsymbol{p}') - \varphi(\boldsymbol{p}_1')\right).$$

Частицы. Можем вспомнить законы сохранения и подставить $\varphi(\boldsymbol{p}) = \left[1,\, p_\alpha,\, \frac{p^2}{2m}\right]$, получим следующее выражение для $\varphi(p) = 1$

$$\frac{1}{n}\int d^3p\ \boldsymbol{v}f = \langle\boldsymbol{v}\rangle = \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{r}), \qquad \int d^3\boldsymbol{p}\ f = n(t,\boldsymbol{r}), \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\boldsymbol{u}) = 0. \tag{9.1}$$

Импульс. Теперь рассмотрим $\varphi(\boldsymbol{p}) = mv_\alpha$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(mnu_\alpha) + \frac{\partial\Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = nF_\alpha,$$

где ввели тензор потока импульса

$$\begin{aligned}\Pi_{\alpha\beta} &\overset{\text{def}}{=} \int d^3\boldsymbol{p}\ mv_\alpha v_\beta f = nm\langle v_\alpha v_\beta\rangle = mnu_\alpha u_\beta + mn\langle(v_\alpha-u_\alpha)(v_\beta-u_\beta)\rangle = \\ &= mnu_\alpha u_\beta + mn\left\langle(v_\alpha-u_\alpha)(v_\beta-u_\beta) - \tfrac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})^2\right\rangle + \tfrac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}mn\langle(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})^2\rangle = \\ &= mnu_\alpha u_\beta + P\delta_{\alpha\beta} - \sigma'_{\alpha\beta},\end{aligned}$$

где ввели для удобства величины тензора вязких напряжений и давления

$$\sigma'_{\alpha\beta} = -mn\left\langle(v_\alpha-u_\alpha)(v_\beta-u_\beta) - \tfrac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})^2\right\rangle, \qquad P = \tfrac{1}{3}mn\left\langle(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})^2\right\rangle.$$

Тогда уравнение перепишется в виде

$$\frac{\partial(mnu_\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial(mnu_\alpha u_\beta)}{\partial x_\beta} = \frac{\partial\sigma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + nF_\alpha.$$

В силу уравнения непрерывности часть слагаемых сократится, тогда

$$mn\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + u_\beta\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\right) + \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial\sigma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + nF_\alpha.$$

Введем плотность $\rho \overset{\text{def}}{=} mn$, тогда

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}), \qquad \rho\frac{du_\alpha}{dt} = \rho\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right)_\alpha = -\frac{\partial P}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial\sigma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + nF_\alpha. \tag{9.2}$$

Энергия. Подставим $\varphi(\boldsymbol{p}) = \frac{p^2}{2m}$, тогда

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{q} = n(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}), \qquad \varepsilon = n\left\langle \frac{m\boldsymbol{v}^2}{2}\right\rangle, \quad \boldsymbol{q} = n\left\langle \boldsymbol{v}\frac{m\boldsymbol{v}^2}{2}\right\rangle. \tag{9.3}$$

Вообще малостью будем считать $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$, тогда

$$\varepsilon = \frac{mn}{2}\left(\left\langle(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})^2\right\rangle + \boldsymbol{u}^2\right) = \frac{3}{2}P + \frac{1}{2}mnu^2, \tag{9.4}$$

$$q_\alpha = u_\alpha\left(\frac{5}{2}P + \frac{1}{2}nmu^2\right) + q'_\alpha - \sigma'_{\alpha\beta}u_\beta, \tag{9.5}$$

где диссипативная часть плотности потока энергии $\boldsymbol{q}'$ имеет вид

$$q'_\alpha = \frac{mn}{2}\langle(v-u)_\alpha(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})^2\rangle.$$

Подставляя и сокращая, находим

$$\frac{3}{2}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{5}{2}P\operatorname{div}\boldsymbol{u} + \frac{3}{2}u_\alpha\frac{\partial P}{\partial x_\alpha} = \sigma'_{\alpha\beta}\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} - \operatorname{div}\boldsymbol{q}'.$$

Объединяя в $\frac{d}{dt}$, можем переписать в виде

$$\frac{3}{2}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{5}{2}P\operatorname{div}\boldsymbol{u} = \sigma'_{\alpha\beta}\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} - \operatorname{div}\boldsymbol{q}'. \tag{9.6}$$

Температура. Введём для одноатомного газа

$$\frac{3}{2}T = \left\langle\frac{m(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})^2}{2}\right\rangle, \quad \Rightarrow \quad P(t,\boldsymbol{r}) = n(t,\boldsymbol{r})T(t,\boldsymbol{r}).$$

Снова учитывая уравнение непрерывности можем перписать выражение в виде

$$\frac{3n}{2}\frac{dT}{dt} + nT\operatorname{div}\boldsymbol{u} = \sigma'_{\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} - \operatorname{div}\boldsymbol{q}', \tag{9.7}$$

что является уравнением на температуру. Три основные уравнения – (9.1), (9.3), (9.7), которые мы получили из уравнения Больцмана. Осталось замкнуть эти уравнения.

τ-приближение. Будем решать систему уравнение в τ-приближение, когда $I_{\text{ст}} = -\frac{f-f_0}{\tau}$. Выбираем функцию f_0 в виде локально равновестного распределения

$$f_0 = \frac{n(t,\boldsymbol{r})}{\left(2\pi mT(t,\boldsymbol{r})\right)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{r}))^2}{2mT(t,\boldsymbol{r})}\right), \qquad \int f_0\, d^3\boldsymbol{p} = n(t,\boldsymbol{r}).$$

Мы учли, что длина пробега $l \ll L$, характерных размеров системы. Число $\mathrm{Kn} = \frac{l}{L}$ – число Кнудсена, которое и характеризует то что достаточно часто происходят столкновения.

Подставляя в левую часть f_0, находим поправку

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F}\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}} = -\frac{\delta f}{\tau}.$$

Верно, что $\sigma'_{\alpha\beta}$ будет зануляться для локально равновесного распределения. После выражения временных производных из бездиссипативных уравнений, получается

$$\delta f = -\tau\frac{f_0}{T}\left((\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T)\left(\frac{m(v')^2}{2T} - \frac{5}{2}\right) + \frac{m}{2}v'_\alpha v'_\beta U_{\alpha\beta}\right),$$

где ввели переменные

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}, \qquad U_{\alpha\beta} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\operatorname{div}\boldsymbol{u}.$$

Кинетические коэффициенты

Теплопроводность. Главное здесь найти

$$q'_\alpha = \int d^3\boldsymbol{p}\,\delta f\, v'_\alpha\frac{m(v')^2}{2}.$$

Подставляя поправку δf, находим

$$q'_\alpha = -\nabla_\alpha T\int d^3\boldsymbol{p}\ \frac{f_0\tau m}{6T}\left(\frac{m(v')^6}{2T} - \frac{5(v')^4}{2}\right) = -\varkappa n_\alpha T,$$

где *коэффициент теплопроводности* $\varkappa$ равен

$$\varkappa = \frac{nm}{6T}\left\langle\tau(v')\left(\frac{m(v')^6}{2T} - \frac{5(v')^4}{2}\right)\right\rangle.$$

Нам понадобятся интегралы, вида

$$\langle (v')^{2n} \rangle = \frac{(T/m)^n}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\boldsymbol{x}\; x^{2n} e^{-x^2/2} = (2n+1)!! \left(\frac{T}{m}\right)^n .$$

Собирая всё вместе, находим

$$\varkappa = \frac{5nT}{2m}\tau, \tag{9.8}$$

где мы считали $\tau = \mathrm{const}$.

Тензор вязких напряжений. Для тензора вязких напряжений

$$\sigma'_{\alpha\beta} = -m \int d^3\boldsymbol{p}\; \delta f \left(v'_\alpha v'_\beta - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3}(v')^2 \right) = \frac{nm^2}{2T} U_{\mu\nu} \left\langle \tau(v') v'_\mu v'_\nu \left(v'_\alpha v'_\beta - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3}(v')^2 \right) \right\rangle .$$

Вспоминаем теорию поля

$$\langle v'_\alpha v'_\beta v'_\mu v'_\nu \rangle = \frac{1}{15} \left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} \right) .$$

Получается тензор, вида

$$\sigma'_{\alpha\beta} = \frac{nm^2}{2T} \cdot \frac{\langle \tau (v')^4 \rangle_0}{15} 2U_{\alpha\beta} = \eta \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \boldsymbol{u} \right),$$

где *коэффицент вязкости* η равен

$$\eta = \frac{nm^2}{T} \cdot \frac{\langle \tau (v')^4 \rangle_0}{15} = n\tau T. \tag{9.9}$$

Заметим, что

$$\eta = \frac{m\varkappa}{c_p}, \qquad c_p = \frac{5}{2}.$$

Уравнения Навье-Стокса. Для $\sigma'_{\alpha\beta}$ обычно можем переписать её в виде

$$\sigma'_{\alpha\beta} = \eta \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \boldsymbol{u} \right) + \zeta \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \boldsymbol{u},$$

где в нашем случае для малой плотности $\zeta = 0$, в отличие от сдвиговой вязкости η. Считая $\zeta, \eta = \mathrm{const}$

$$\frac{\partial \sigma'_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \eta \left(\nabla^2 u_\alpha + \nabla_\alpha \operatorname{div} \boldsymbol{u} - \frac{2}{3} \nabla_\alpha \operatorname{div} \boldsymbol{u} \right) + \zeta \nabla_\alpha \operatorname{div} \boldsymbol{u},$$

и подставляя в исходное уравнение, нахходим уравнение Навье-Стокса

$$\rho \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = -\boldsymbol{\nabla} P + \eta \nabla^2 \boldsymbol{u} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + n\boldsymbol{F}. \tag{9.10}$$

Беспорядок. Для наличия вмороженного беспорядка получим дополнительное слагаемое

$$\rho \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \ldots - \rho \frac{\boldsymbol{u}}{\tau}.$$

Для получения формулы Друде, можем увидеть что почти всё в стационарном случае занулится, и получится

$$\boldsymbol{u} = \frac{n\tau}{\rho}\boldsymbol{F}, \qquad \boldsymbol{j} = -ne\boldsymbol{u} = -ne\frac{n\tau}{\rho}(-e\boldsymbol{E}) = \frac{e^2 n\tau}{m}\boldsymbol{E}.$$

10 Холловская проводимость

Рассмотрим систему

$$\begin{gathered} \dot{x}_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \dot{k}_\beta \Omega_n^\gamma = v_n^\alpha \\ \dot{k}_\alpha + \frac{e}{\hbar c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \dot{x}_\beta B_\gamma = -\frac{e}{\hbar} E_\alpha . \end{gathered}$$

Решение можем найти, переписа в виде

$$\begin{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} & \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\Omega_n^\gamma \\ \frac{e}{\hbar c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B^\gamma & \delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_\alpha \\ \dot{k}^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_n^\alpha \\ -\frac{e}{\hbar} E^\alpha \end{pmatrix},$$

для координаты и импульса

$$\begin{aligned} \dot{x}_\alpha &= (1 + \frac{e}{\hbar c}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\Omega}_n)^{-1} \left(v_n^\alpha + \frac{e}{\hbar c}(\boldsymbol{v}_n \cdot \boldsymbol{\Omega}_n) B^\alpha + \frac{e}{\hbar}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} E^\beta \Omega_n^\gamma \right) \\ \dot{k}_\alpha &= -\frac{e}{\hbar}\left(1 + \frac{e}{\hbar c}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\Omega}_n \right)^{-1} \left(E^\alpha + \frac{e}{\hbar c}\left(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}\right)\Omega_n^\alpha + \frac{1}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} v_n^\beta B^\gamma \right) . \end{aligned}$$

Несохранение фазового объема. Заметим, что

$$\frac{\partial \dot{x}_\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \dot{k}_\alpha}{\partial k_\alpha} = -\frac{d \ln D_n}{dt}, \qquad D_n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}, t) = 1 + \frac{e}{\hbar c}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) \cdot \boldsymbol{\Omega}_n(\boldsymbol{k}).$$

Таким образом фазовый объем увеличивается в соответствии с

$$\frac{d \ln \Delta V}{dt} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{n}_{\boldsymbol{k}} \cdot \dot{\boldsymbol{k}} = -\frac{d}{dt} \ln D_n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}, t),$$

где $\Delta V = \Delta \boldsymbol{r}\ \Delta \boldsymbol{k}$, и тогда $\Delta V(t) = \Delta V(0)/D_n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}, t)$. Это можно исправить заменой

$$d\mu = \frac{d^3 r\, d^3 k}{(2\pi)^3} \quad \to \quad d\tilde{\mu} \overset{\text{def}}{=} D_n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}, t) \frac{d^3 r\, d^3 k}{(2\pi)^3}.$$

и в дальнейшем интегрировать уже в новой метрике.

Проводимость. Среднее для любой локальной наблюдаемой может быть получено в виде

$$\langle \mathcal{O} \rangle(\boldsymbol{r}, t) = \sum_n \int d\tilde{\mu} f_n(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{k}, t) \langle u_{n\boldsymbol{k}} | \mathcal{O} | u_{n\boldsymbol{k}} \rangle \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}').$$

В равновесном случае $f_n(\boldsymbol{k})$ – функция Ферми $f(E_n(\boldsymbol{k}) - \mu)$. Для тока тогда

$$j_n^\alpha(\boldsymbol{r}, t) = -e \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(v_n^\alpha + \frac{e}{\hbar c}(\boldsymbol{v}_n \cdot \boldsymbol{\Omega}_n) B^\alpha + \frac{e}{\hbar} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} E^\beta \Omega_n^\gamma \right) f_n(\boldsymbol{k}).$$

Для случая $\boldsymbol{B} = 0$ явно можем найти

$$\boldsymbol{j}_n = -\frac{e^2}{\hbar} \boldsymbol{E} \times \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \boldsymbol{\Omega}_n(\boldsymbol{k}).$$

12 Тяжелая частица в лёгком газе

Уравнениве Фоккера-Планка. Заметим, что

$$\frac{\partial f(t, \boldsymbol{p})}{\partial t} = \int d^3\boldsymbol{q}\ \left(w(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}) f(t, \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}) - w(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) f(t, \boldsymbol{p}) \right),$$

раскладываясь до второго порядка малости по $\boldsymbol{q}$, находим

$$\frac{\partial f(t, \boldsymbol{p})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left(\tilde{A}_\alpha f + \frac{\partial}{\partial p_\beta}(B_{\alpha\beta} f) \right),$$

где ввели

$$\tilde{A}_\alpha = \int q_\alpha w(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\, d^3\boldsymbol{q} = \frac{\sum_{\delta t} q_\alpha}{\delta t}, \qquad B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int q_\alpha q_\beta q(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\, d^3\boldsymbol{q} = \frac{\sum_{\delta t} q_\alpha q_\beta}{2\delta t}.$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial s_\alpha}{\partial p_\alpha}, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{s} = 0,$$

где величина $\boldsymbol{s}$ – плотность потока в импульсном пространстве

$$s_\alpha = -\tilde{A}_\alpha f - \frac{\partial}{\partial p_\beta}(B_{\alpha\beta} f) = -A_\alpha f - B_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial p_\beta}, \qquad A_\alpha = \tilde{A}_\alpha + \frac{\partial B_{\alpha\beta}}{\partial p_\beta}.$$

Итого в общем виде уравнение Фоккера-Планка можем иметь вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} + \operatorname{div}_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{s} = 0. \tag{12.1}$$

Считатать обычно проще $B_{\alpha\beta}$, а потом они друг через друга выражаются с учётом того, что в равновесии поток $\boldsymbol{s}^{(0)}$ зануляется.

Тяжелые частицы. Будем считать, что

$$f^{(0)} \sim \exp\left(-\frac{p^2}{2MT} \right).$$

Начнём с вычисления коэффициентов $B_{\alpha\beta}$:

$$B_{\alpha\beta} = B\delta_{\alpha\beta}, \qquad B = \frac{\sum_{\delta t} q^2}{6\delta t},$$

и кинетическое уравнение перепишется в виде

$$\frac{\partial f(t, \boldsymbol{p})}{\partial t} = B \operatorname{div}_{\boldsymbol{p}} \left(\frac{\boldsymbol{p} f}{MT} + \nabla_{\boldsymbol{p}} f \right).$$

Таким образом B иммет смысл коэффициента диффузии в импульсном пространстве.

Для определения величины B выразим
$$\boldsymbol{q} = \Delta \boldsymbol{p}_b = \boldsymbol{p}_b - \vec{p}_b' = \boldsymbol{p}_a' - \boldsymbol{p}_a.$$
Считая, что $p_a = p_a'$, находим
$$q^2 = 2p_a^2 - 2p_a^2 \cos\theta = 2p_a^2(1-\cos\theta).$$
И тогда можем посчитать интеграл вида
$$B = \frac{1}{6}\frac{\sum_{\delta t} q^2}{\delta t} = \frac{1}{6}\int 2p_a^2(1-\cos\theta) f_a^{(0)}(\boldsymbol{p}_a) v_a \, d\sigma \, d^3\boldsymbol{p}_\alpha.$$
Вводя $n = \int f^{(0)}(\boldsymbol{p}_\alpha)\, d^3\boldsymbol{p}_a$, находим
$$B = \frac{n_a}{3m}\langle p_a^3 \sigma_t(v_a)\rangle = \frac{m^2 n_a}{3}\langle v_a^3 \sigma_t\rangle,$$
где m – масса легкой частица, σ_t – транспортное сечение рассеяния легких частиц на тяжелых.

Диффузия. Добавив силу $\boldsymbol{F}$ можем найти
$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\left(\left(\boldsymbol{F} - \frac{B\boldsymbol{p}}{MT}\right) f - B\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}\right) = 0.$$
На больших $\boldsymbol{p}$ функция распределения обращается в ноль. Для стационарного случая
$$\left(\boldsymbol{F} - \frac{B\boldsymbol{p}}{MT}\right) f - B\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = \text{const} = 0.$$
Функция распределения при внешней силе модифицируется к виду
$$f \sim \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{F}MT/B)^2}{2MT}\right) = \exp\left(-\frac{(\boldsymbol{p} - M\boldsymbol{u})^2}{2MT}\right), \qquad \boldsymbol{u} = \frac{T}{B}\boldsymbol{F},$$
где $\boldsymbol{u}$ – средняя потоковая скорость. Вообще подвижность b определяется из $\boldsymbol{u} = b\boldsymbol{F}$, откуда находим $b = T/B$ и $D = bT = T^2/B$.

14 x Броуновское движение

Добавим случайную силу к уравнению движения
$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = F^{(\text{сл})}(t) + \boldsymbol{F}(t), \qquad \Rightarrow \qquad m\frac{d\langle \boldsymbol{v}\rangle}{dt} = \langle F^{(\text{сл})}(t)\rangle + \boldsymbol{F}(t).$$
Вообще $\langle \boldsymbol{v}\rangle = b\boldsymbol{F}$, при этом $\langle F^{(\text{сл})}(t)\rangle + \boldsymbol{F} = 0$, тогда
$$F^{(\text{сл})}(t) = -\frac{\boldsymbol{v}(t)}{b} + f^{(\text{сл})}(t), \qquad \langle f^{(\text{сл})}(t)\rangle = 0.$$
Тогда уравнение движения перепишется в виде
$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\gamma \boldsymbol{v} + \frac{1}{M}\left(f^{(\text{сл})}(t) + \boldsymbol{F}(t)\right), \qquad \gamma = \frac{1}{bM}.$$
Уже можем сказать, что
$$\langle f_i^{(\text{сл})}(t) f_k^{(\text{сл})}(t')\rangle = \varkappa \delta_{ik}\delta(t-t').$$
Введём также $f^{(\text{полн})} = f^{(\text{сл})} + \boldsymbol{F}(t)$. Теперь перейдём к Фурье-образу
$$\boldsymbol{v}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_\omega e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}, \qquad f^{(\text{полн})}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega^{(\text{полн})} e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}.$$
Тогда уравнение перепишется в виде
$$-i\omega \boldsymbol{v}_\omega = -\gamma \boldsymbol{v}_\omega + \frac{1}{M} f_\omega^{(\text{полн})}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_\omega = \frac{f_\omega^{(\text{полн})}}{M(\gamma - i\omega)}.$$
Полезно ввести отклик системы $\boldsymbol{r}_\omega$
$$\boldsymbol{r}_\omega = \frac{\boldsymbol{v}_\omega}{-i\omega} = \chi(\omega) f_\omega^{(\text{полн})}, \qquad \chi(\omega) = \frac{i\gamma/\omega - 1}{M(\gamma^2+\omega^2)}, \quad |\chi|^2 = \frac{1}{M^2\omega^2(\gamma^2+\omega^2)} = \frac{\operatorname{Im}\chi}{M\omega\gamma}.$$

Диссипативная теорема. Рассмотрим
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_\omega e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi},$$

тогда коррелятор

$$\langle x(t)x(t')\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\langle x_\omega x_{\omega'}\rangle e^{-i\omega t - i\omega' t}\,\frac{d\omega\,d\omega'}{(2\pi)^2}.$$

Учитывая, что $\langle x_\omega x_{\omega'}\rangle = 2\pi(x^2)_\omega\delta(\omega+\omega')$, где $(x^2)_\omega$ – спектральная плотность, находим

$$\langle x(t)x(t')\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}(x^2)_\omega e^{-i\omega(t-t')}\,\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Для $t=t'$ просто

$$\langle x^2(t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}(x^2)_\omega\,\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Но мы знаем, что $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$, и тогда

$$(v_i v_k)_\omega = -i\omega\chi(\omega)\cdot i\omega\chi(-\omega)\cdot\left(f_i^{(\text{сл})}f_k^{(\text{сл})}\right)_\omega = \omega^2|\chi(\omega)|^2(f_i^{(\text{сл})}f_k^{(\text{сл})})_\omega.$$

Для нахождения константы удобно посмотреть на одновременной коррелятор

$$\langle v_i(t)v_k(t)\rangle = \delta_{ik}\frac{T}{M} = \int_{-\infty}^{+\infty}(v_i v_k)_\omega\,\frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2|\chi(\omega)|^2(f_i^{(\text{сл})}f_k^{(\text{сл})})_\omega\,\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Итак, получаем уравнение

$$\delta_{ik}\frac{T}{M} = \delta_{ik}\varkappa\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\frac{1+\gamma^2/\omega^2}{M^2(\gamma^2+\omega^2)^2}\,\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Интеграл равен π/γ и тогда

$$\varkappa = 2\gamma MT. \tag{14.1}$$

Искомый коррелятор тогда равен

$$\langle f_i^{(\text{сл})}(t)f_k^{(\text{сл})}(t')\rangle = 2\gamma MT\delta_{ik}\delta(t-t').$$

Аналогично можем найти

$$\langle v_i v_k\rangle_\omega = \omega^2|\chi(\omega)|^2\cdot 2\gamma MT\delta_{ik}, \qquad \langle x_i x_k\rangle_\omega = |\chi(\omega)|^2\cdot 2\gamma MT\delta_{ik}.$$

Подставляя через мнимую часть отклика, находим

$$\langle v_i v_k\rangle_\omega = 2\delta_{ik}T\omega\,\mathrm{Im}\,\chi, \qquad \langle x_i x_k\rangle_\omega = 2\delta_{ik}\frac{T}{\omega}\,\mathrm{Im}\,\chi.$$

Более явно можем найти

$$\langle v_i(t)v_k(t')\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}(v_i v_k)_\omega e^{-i\omega(t-t')}\,\frac{d\omega}{2\pi} = \delta_{ik}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2T\gamma e^{-i\omega(t-t')}}{M(\gamma^2+\omega^2)}\,\frac{d\omega}{2\pi} = \delta_{ik}\frac{T}{M}e^{-\gamma|t-t'|}.$$

Интегрируя полученное выражение по t, получим

$$\int_{t'}^{\infty}\langle v_i(t)v_k(t')\rangle\,dt = \delta_{ik}\frac{T}{\gamma M} = \delta_{ik}\cdot\frac{T}{M}\cdot bM = \delta_{ik}bT = D\delta_{ik}.$$

14.1 Среднеквадратичное отклонение

Частица двигается случайным образом и хотим найти $\Delta\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t+t_0) - \boldsymbol{r}(t_0)$. Умеем выражать коррелятор через спектральную плотность:

$$\left\langle(\Delta\boldsymbol{r}(t))^2\right\rangle = 2\int_{-\infty}^{+\infty}(1-e^{-i\omega t})(\boldsymbol{r}^2)_\omega\,\frac{d\omega}{2\pi} = 2\int_{-\infty}^{+\infty}(1-e^{-i\omega t})\frac{6T}{\omega}\,\mathrm{Im}\,\chi\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Подставляя $\mathrm{Im}\,\chi$, находим

$$\left\langle(\Delta\boldsymbol{r}(t))^2\right\rangle = \frac{6Tt}{M\gamma}\left(1-\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma t}\right).$$

Таким образом есть два предела: при $\gamma t \gg 1$:

$$\left\langle(\Delta\boldsymbol{r}(t))^2\right\rangle = 6Dt,$$

где $\gamma = 1/bM$, $Tb = D$. И для $\gamma t \ll 1$ получается

$$\left\langle(\Delta\boldsymbol{r}(t))^2\right\rangle = \frac{3T}{M}t^2 = \langle\boldsymbol{v}^2\rangle t^2,$$

то есть просто свободное движение со средней тепловой скоростью.

15 модель Калдейры-Леггетта

Запишем функцию Лагранжа

$$L(\dot{q}, q, \{\dot{x}_\alpha, x_\alpha\}) = \frac{M\dot{q}^2}{2} - U_0(q) + \sum_\alpha \left(\frac{m\dot{x}_\alpha^2}{2} - \frac{m\omega_\alpha^2 x_\alpha^2}{2}\right) - q\sum_\alpha C_\alpha x_\alpha.$$

Теперь уравнения дваижения – уравнения Лагранжа

$$M\ddot{q} + U_0'(q) = -\sum_\alpha C_\alpha x_\alpha, \qquad m\ddot{x}_\alpha + m\omega_\alpha^2 x_\alpha = -qC_\alpha.$$

Решение для фононов можем записать в виде

$$x_\alpha(t) = -C_\alpha \int_{-\infty}^t \frac{\sin(\omega_\alpha(t-s))}{m\omega_\alpha} q(s)\,ds + x_\alpha(0)\cos\omega_\alpha t + \frac{\dot{x}_\alpha(0)}{\omega_\alpha}\sin(\omega_\alpha t).$$

Введем также функцию запаздывающего отклика

$$K_\alpha(t) = -\theta(t)\frac{C_\alpha \sin(\omega_\alpha t)}{m\omega_\alpha}, \qquad K_\alpha(\omega) = -\frac{C_\alpha}{m(\omega_\alpha^2 - (\omega + i\delta)^2)},$$

с полюсами $\omega = \pm\omega_\alpha - i\delta$, $\delta \to +0$.

Можем ввести силу со стороны термостата на частицу

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-s)q(s)\,ds + f(t), \qquad f(t) = -\sum_\alpha C_\alpha\left(x_\alpha(0)\cos\omega_\alpha t + \frac{\dot{x}_\alpha(0)}{\omega_\alpha}\sin\omega_\alpha t\right),$$

где $K(t) = -\sum_\alpha C_\alpha K_\alpha(t) = \theta(t)\sum_\alpha C_\alpha^2 \frac{\sin(\omega_\alpha t)}{m\omega_\alpha}$. Для Фурье-образа:

$$K(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - (\omega + i\delta)^2}\frac{J(\Omega)}{\Omega}\,d\Omega, \qquad J(\Omega) = \frac{\pi}{2}\sum_\alpha \frac{C_\alpha^2}{m\omega_\alpha}\delta(\Omega - \omega_\alpha).$$

Итого, для движения частицы

$$M\ddot{q} + U_0'(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-s)q(s)\,ds + f(t).$$

Можем представить $K(\omega) = K_0 + i\eta\omega$ или

$$K(t) = K_0\delta(t) - \eta\delta'(t), \qquad J(\Omega) = \eta\Omega, \quad K_0 = \sum_\alpha \frac{C_\alpha^2}{m\omega_\alpha^2},$$

что приведёт для уравнений движения

$$\boxed{M\ddot{q} + U_0'(q) = K_0 q(t) - \eta\dot{q}(t) + f(t)} \tag{15.1}$$

что формально соответствует трению η, перенормировке потенциала $U(q) = U_0(q) - K_0 q^2/2$ и добавлению случайной силы $f(t)$.

Коррелятор. Найдём корреляционную функцию случайной силы

$$\langle f(t)f(t')\rangle = \sum_{\alpha,\beta} C_\alpha C_\beta \langle\left(x_\alpha(0)\cos\omega_\alpha t + \frac{\dot{x}_\alpha(0)}{\omega_\alpha}\sin\omega_\alpha t\right)\left(x_\beta(0)\cos\omega_\beta t + \frac{\dot{x}_\beta(0)}{\omega_\beta}\sin\omega_\beta t\right)\rangle.$$

Так как фононы независимы друг от друга, то можем переписать в виде

$$\langle f(t)f(t')\rangle = \sum_{\alpha,\beta} C_\alpha^2\left(\langle x_\alpha(0)^2\rangle\cos(\omega_\alpha t)\cos(\omega_\alpha t') + \frac{\langle\dot{x}_\alpha(0)^2\rangle}{\omega_\alpha^2}\sin(\omega_\alpha t)\sin(\omega_\alpha t')\right).$$

Здесь учли, что среднее от полной производной по времени равно нулю. Для скоростей

$$\langle\dot{x}_\alpha^2(0)\rangle = \omega_\alpha^2\langle x_\alpha^2(0)\rangle = \frac{2}{m}\frac{1}{2}\left(\bar{n}_\alpha + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_\alpha = \frac{\hbar\omega_\alpha}{2m}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega_\alpha}{2T}.$$

И для временного коррелятора

$$\begin{aligned}
\langle f(t)f(t')\rangle &= \sum_\alpha C_\alpha^2 \frac{\hbar}{2m\omega_\alpha}\left(\operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega_\alpha}{2T}\right)\cos(\omega_\alpha(t-t')) - i\sin(\omega_\alpha(t-t'))\right) \\
&= \eta\int_{-\infty}^{+\infty} \hbar\Omega\operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\Omega}{2T}\right)e^{-i\Omega(t-t')}\frac{d\Omega}{2\pi} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\langle f(t)f(t')\rangle_\Omega e^{-i\Omega(t-t')}\frac{d\Omega}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Для Фурье-компоненты

$$\langle f(t)f(t')\rangle_\Omega = \hbar\hbar\Omega \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\Omega}{2T}\right) = \begin{cases} 2\eta T, & \hbar = 0 \\ \eta\hbar|\Omega|, & T = 0. \end{cases}$$

Во временном представлении

$$\langle f(t)f(t')\rangle = \{2\eta T\delta(t-t'), \hbar = 0, -\eta\hbar(t-t')^{-2}/\pi, \quad T = 0.$$

Это согласуется с ФДТ в виде

$$\langle f(t)f(t')\rangle_\Omega = -\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\alpha(\omega)}\right)\hbar \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right) = \frac{\hbar\alpha''(\omega)}{|\alpha(\omega)|^2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T},$$

где $\alpha(\omega)f(\omega) = q(\omega)$, и тогда

$$\alpha(\omega) = \left(-M\omega^2 + M\omega_0^2 - i\eta\omega\right)^{-1},$$

где $U'(q) = \frac{m\omega_0^2}{2}q^2$, и значит

$$\operatorname{Im}(\alpha(\omega))^{-1} = -\eta\omega, \qquad \langle f(t)f(t')\rangle_\Omega = \hbar\Omega\hbar \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\Omega}{2T}\right).$$

16 Уравнение Линдблада

Полный гамильтониан системы

$$\hat H = \hat H_s + \hat H_r + \hat H_{sr}.$$

Знаем уравнение на полную матрицу плотности

$$\frac{\partial\hat\rho}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat\rho, \hat H\right],$$

далее будем искать уравнение на $\hat\rho_s = \operatorname{tr}_r\hat\rho$. Будем работать в впредставление взаимодействия

$$\hat{\tilde\rho} = \exp\left(\frac{it}{\hbar}\left(\hat H_s + \hat H_r\right)\right)\hat\rho\exp\left(\frac{-it}{\hbar}(\hat H_s + \hat H_r)\right).$$

Можем переписать тогда в виде

$$\frac{\partial\hat{\tilde\rho}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{\tilde\rho}(t_0),\, \hat{\tilde H}_{sr}(t)\right] + \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2\int_{t_0}^t \left[\left[\hat{\tilde\rho}(t'),\, \hat{\tilde H}_{sr}(t')\right],\, \hat{\tilde H}_{sr}(t)\right]dt'.$$

Будем считать, что взаимодействие адиабатически включалось, тогда можно забыть про первое слагаемое. Также считаем, что

$$\hat{\tilde\rho}(t) \approx \hat{\tilde\rho}_s(t)\otimes\hat{\tilde\rho}_r(t), \qquad \hat{\tilde\rho}(t) = \hat{\tilde\rho}_s(t)\otimes\hat{\tilde\rho}_r(-\infty),$$

то есть резервуар в термодинамическом равновесии и слабо взаимодействует с системой. В итоге

$$\frac{\partial\hat{\tilde\rho}_s(t)}{\partial t} \approx \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2\int_{-\infty}^t dt'\operatorname{tr}\left(\left[\left[\hat{\tilde\rho}_s(t')\otimes\hat{\tilde\rho}_r(-\infty),\, \hat{\tilde H}_{sr}(t')\right],\, \hat{\tilde H}_{sr}(t)\right]\right).$$

Явно учитывая вид $\hat H$, можем найти коммутаторы. Введя

$$\hat F(t) = \sum_\alpha \gamma_\alpha\hat b_\alpha e^{i(\omega_s-\omega_\alpha)t}, \hat{\tilde H}_{sr}(t) = \hbar\left(\hat F^\dagger(t)\hat a + \hat F(t)\hat a^\dagger\right),$$

посчитав корреляторы вида$\langle\hat F^\dagger(t)\hat F(t')\rangle_r$, интегралы от них, и вернувшись к представлению Шрёдингера, получаем выражение

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat\rho_s(t)}{\partial t} &= \frac{i}{\hbar}\left[\hat\rho_s, \hat H_s + \hbar\Delta_1\hat a\hat a^\dagger - \hbar(\Delta_1+\Delta_2)\hat a^\dagger\hat a\right] \\ &+ \gamma_s\left(n(\omega_s)+1\right)\left(2\hat a\hat\rho_s(t)\hat a^\dagger - \{\hat\rho_s(t),\, \hat a^\dagger\hat a\}\right) + \gamma_s n(\omega_s)\left(2\hat a^\dagger\hat\rho_s(t)\hat a - \{\hat\rho_s(t),\, \hat a\hat a^\dagger\}\right).\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\gamma_s = \pi D(\omega_s)|\gamma(\omega_s)|^2, \qquad D(\omega) = \sum_\alpha\delta(\omega-\omega_\alpha),$$

а также

$$\Delta_1 = P\int_0^\infty D(\omega)|\gamma(\omega)|^2 n(\omega)\frac{1}{\omega-\omega_s}\,d\omega, \qquad \Delta_2 = P\int_0^\infty D(\omega)|\gamma(\omega)|^2\frac{1}{\omega-\omega_s}\,d\omega.$$

Таким образом добавление резервуара привело к перенормировки гамильтониана

$$\hat H_S = \hbar\Delta_1 + \hbar(\omega_s - \Delta_2)\hat a^\dagger\hat a,$$

и возникновения диссипативного члена:

$$\frac{\partial\hat{\rho}_s(t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H}_S, \hat{\rho}_s\right] + \gamma_s\left(n(\omega_s)+1\right)\left(2\hat{a}\hat{\rho}_s(t)\hat{a}^\dagger - \{\hat{\rho}_s(t),\, \hat{a}^\dagger\hat{a}\}\right) + \gamma_s n(\omega_s)\left(2\hat{a}^\dagger\hat{\rho}_s(t)\hat{a} - \{\hat{\rho}_s(t),\, \hat{a}\hat{a}^\dagger\}\right).$$

Общий вид уравнения Линдблада:

$$\frac{\partial\hat{\rho}(t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H},\, \hat{\rho}\right] + \frac{1}{2}\sum_k\left(\left[\hat{L}_k\hat{\rho},\, \hat{L}_k^\dagger\right] + \left[\hat{L}_k,\, \hat{\rho}\hat{L}_k^\dagger\right]\right),$$

сводится к полученному для $\hat{L}_1 \approx \hat{a}^\dagger$ и $\hat{L}_2 \approx \hat{a}$.

17 Уравнение Смолуховского

17.1 Сведение к осциллятору

Работаем примерно с уравнением

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n + \mathrm{div}(bn\nabla U),$$

точнее с уравнением вида

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{D}{T}kP + \frac{D}{T}kx\frac{\partial P}{\partial x} + D\frac{\partial^2 P}{\partial x^2},$$

где подставили потенциал $U = kx^2/2$.

Введём $g = 2\gamma T$ и $\tau = bt$, тогда можем сделать подстановку

$$P(x,\tau) = e^{-\gamma kx^2/2g}\psi(x,\tau),$$

получаем уравнение вида

$$\frac{1}{k}\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4A}\right)\psi + A\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \qquad A = \frac{g}{2k\gamma} = \frac{T}{k}.$$

Таким образом пришли к гамильтониану гармонического осциллятора, с собственными функциями в виде полиномов эрмита

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{2\pi A}}}H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2A}}\right)e^{-x^2/4A}.$$

Итого, искомая вероятность

$$P(x,\tau) = e^{-\gamma kx^2/2g}\psi(x,\tau) = e^{-x^2/4A}\psi(x,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nk\tau}\varphi_0(x)\varphi_n(x).$$

17.2 Забываются начальные условия

Забавный факт:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)H_n(y)}{n!}\left(\frac{U}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{1-U^2}}\exp\left(\frac{2uxy}{1+u} - \frac{u^2(x-y)^2}{1-u^2}\right),$$

и воспользуемся соотношением ортогональности, что найти эволюцию от $P(x,0) = \delta(x-x_0)$:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n\left(\frac{x_0}{\sqrt{2A}}\right) = \frac{\varphi_n(x_0)}{\varphi_0(x_0)}.$$

Итого, эволюция запишется в виде

$$\begin{aligned} P(x,\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nk\tau}\frac{\varphi_0(x)}{\varphi_0(x_0)}\varphi_n(x)\varphi_n(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A}}e^{-x^2/2A}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}e^{-nk\tau}H_n\left(\frac{x_0}{\sqrt{2A}}\right)H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2A}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi A(1-e^{-2k\tau})}}\exp\left(-\frac{(x-x_0e^{-k\tau})}{2A(1-e^{-2k\tau})}\right), \end{aligned}$$

где подставили ту сумму с $u = e^{-k\tau}$. Таким образом начальные условия забываются!

Состояние с заданной x-компонентной спина – собственное для $\hat{\sigma}_x$: $\psi \sim (\pm 1, 1)$, а значит

$$\psi(t) \sim \begin{pmatrix} \pm e^{\mp i\Omega t/2} \\ e^{\mp i\Omega t/2}\end{pmatrix}, |\psi(t)|^2 = \mathrm{const},$$

то есть ситема будет равновероятно наблюдаться в состояние $|0\rangle$ или $|1\rangle$.

Для постоянных измерений будем работать с системой, вида
$$\dot\rho_x = -2\gamma\rho_x, \qquad \dot\rho_y = -\Omega\rho_z - 2\gamma\rho_y, \qquad \dot\rho_z = \Omega\rho_y,$$
которая очевидно для $\rho_x = 1$ будет иметь решение, вида
$$\rho_x(t) = e^{-2\gamma t}.$$

18 Метастабильное состояние

18.1 Цепочка уравнений Боголюбова-Борна-Грина-Кирквуда

Начнём с уравнение Лиувилля, считая заданными $\boldsymbol{r}^N = (\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$ и $\boldsymbol{p}^N = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_N)$
$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}_i}, \qquad \dot{\boldsymbol{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}_i},$$
где Гамильтониан запишется в виде
$$H = K(\boldsymbol{p}^N) + V(\boldsymbol{r}^N) + \Phi(\boldsymbol{r}^N), \qquad K(\boldsymbol{p}^N) = \sum_{i=1}^N \frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m}, \quad \Phi(\boldsymbol{r}^N) = \sum_{i=1}^N \varphi(\boldsymbol{r}_i).$$
Введём также функцию распределения $f^{[N]}(\boldsymbol{r}^N, \boldsymbol{p}^N, t)$ так чтобы $f^{[N]}(\boldsymbol{r}^N, \boldsymbol{p}^N, t)\, d\boldsymbol{r}^N\, d\boldsymbol{p}^N$ – вероятность находиться в данной точке фазового пространства. Нормировка единичная.

Закон сохранения. Закон сохранения в дифференциальном виде запишется в виде
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0,$$
где в нашем случае ρ – $f^{[N]}$, и $\boldsymbol{j} = \{f^{[N]}\dot{\boldsymbol{r}}_i, f^{[N]}\dot{\boldsymbol{p}}_i\}$, тогда
$$\frac{\partial f^{[N]}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i}\left[f^{[N]}\dot{\boldsymbol{r}}_i\right] + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_i}\left[f^{[N]}\dot{\boldsymbol{p}}_i\right]\right) = \frac{df^{[N]}}{dt} = 0,$$
при подстановке уранений Гамильтона.

Редуцированная функция. Редуцированная функция $f^{(n)}$ определяется как
$$f^{(n)}(\boldsymbol{r}^n, \boldsymbol{p}^n, t) = \frac{N!}{(N-n)!}\int f^{[N]}(\boldsymbol{r}^N, \boldsymbol{p}^N, t)\, d\boldsymbol{r}^{(N-n)}\, d\boldsymbol{p}^{(N-n)},$$
где $d\boldsymbol{r}^{(N-n)} = d\boldsymbol{r}_{n+1}\ldots d\boldsymbol{r}_N$ и $d\boldsymbol{p}^{(N-n)} = d\boldsymbol{p}_{n+1}\ldots d\boldsymbol{p}_N$.

Работаем в приближение потенциального внешнего поля
$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = \boldsymbol{X}_i + \sum_{j=1}^N \boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{r}_j), \qquad \boldsymbol{F}_{ii} = 0.$$
Тогда сохранение перепишется в виде
$$\frac{\partial f^{[N]}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\boldsymbol{p}_i}{m}\frac{\partial f^{[N]}}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{X}_i\frac{\partial f^{[N]}}{\partial \boldsymbol{p}_i} = -\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N \boldsymbol{F}_{ij}\frac{\partial f^{[N]}}{\partial \boldsymbol{p}_i}.$$
При редуцирование в силу ограниченности в фазовом пространстве, остаётся
$$\frac{\partial f^{(n)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{p}_i}{m}\frac{\partial f^{(n)}}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{X}_i\frac{\partial f^{(n)}}{\partial \boldsymbol{p}_i} = -\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \boldsymbol{F}_{ij}\frac{\partial f^{(n)}}{\partial \dot{\boldsymbol{p}}_i} - \frac{N!}{(N-n)!}\sum_{i=1}^n\sum_{j=n+1}^N \int \boldsymbol{F}_{ij}\frac{\partial f^{[N]}}{\partial \boldsymbol{p}_i}\, d\boldsymbol{r}^{(N-n)}\, d\boldsymbol{p}^{(N-n)}.$$
С учетом симметричности функции распределения, последнее слагаемое можем переписать в виде
$$-\frac{N!(N-n)}{(N-n)!}\sum_{i=1}^n \int F_{i,n+1}\frac{\partial f^{[N]}}{\partial \boldsymbol{p}_i}\, d\boldsymbol{r}^{(N-n-1)}\, d\boldsymbol{p}^{(N-n-1)}\, d\boldsymbol{r}_{n+1}\, d\boldsymbol{p}_{n+1},$$
Так приходим к выражению, вида
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{p}_i}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \sum_{i=1}^n\left[\boldsymbol{X}_i + \sum_{j=1}^n F_{ij}\right]\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_i}\right) f^{(n)} = -\sum_{i=1}^n \int F_{i,n+1}\frac{\partial f^{(n+1)}}{\partial \boldsymbol{p}_i}\, d\boldsymbol{r}_{n+1}\, d\boldsymbol{p}_{n+1}. \tag{18.1}$$
Эта система уравнений называется цепочкой уравнений Боголюбова-Борна-Грина-Кирквуда Обычно интерес представляют $n = 1, 2$, кстати $\int f^{(n)}\, d\boldsymbol{r}^n\, d\boldsymbol{p}^n = \frac{N!}{(N-n)!}$.

18.2 Уравнение Власова

Для $n = 1$ уравнение сведётся к

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{X}_1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1}\right) f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{p}_1,\, t) = -\int \boldsymbol{F}_{12}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} f^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_2, t)\, d\boldsymbol{r}_2\, d\boldsymbol{p}_2.$$

В силу отсутствия корелляций между столкновениями попробуем сделать приближение

$$f^{(2)}(\xi_1, \xi_2, t) = f^{(1)}(\xi_1^t) f^{(1)}(\xi_2^t).$$

Определяя

$$\tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{r}_1, t) = \int \boldsymbol{F}_{12}(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{r}_2) f^{(1)}(\boldsymbol{r}_2,\, \boldsymbol{p}_2,\, t)\, d\boldsymbol{r}_2\, d\boldsymbol{p}_2,$$

приходим к бесстолкновительному уравнению Власова

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \left[\boldsymbol{X}_1 + \tilde{\boldsymbol{F}}\right]\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1}\right) f^{(1)} = 0. \tag{18.2}$$

которое валидно при $nd^3 \gg 1$.

18.3 Интеграл столкновений

Для $n = 2$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \frac{\boldsymbol{p}_2}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2} + [\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{F}_{12}]\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} + [\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{F}_{21}]\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_2}\right) f^{(2)}(\xi_1, \xi_2, t) = -\int \left(\boldsymbol{F}_{13}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} + \boldsymbol{F}_{23}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_2}\right) f^{(3)}\, d\boldsymbol{r}_3\, d\boldsymbol{p}_3$$

Считая $nd^3 \ll 1$, можем игнорировать[4] трёхчастичные столкновения, тогда

$$\left(\frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \frac{\boldsymbol{p}_2}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2} + F_{12}\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_2}\right]\right) f^{(2)} = 0.$$

Переходя к координатам, находим

$$\boldsymbol{F}_{12}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_2}\right) f^{(2)} = -\left(\frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \frac{\boldsymbol{p}_2}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2}\right) f^{(2)}.$$

Введём $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{R} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)$, тогда

$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \boldsymbol{R}} \ll \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \boldsymbol{r}}.$$

Возвращаемся к одночастичной функции, интегрируя находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{X}_1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1}\right) f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{p}_1,\, t) = -\int \boldsymbol{F}_{12}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_2}\right) f^{(2)}\, d\xi_2 = \int \left[\frac{\boldsymbol{p}_2}{m} - \frac{\boldsymbol{p}_2}{m}\right]\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{p}_2,$$

продолжая с правой частью, вводя $\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \frac{\boldsymbol{p}_2}{m} - \frac{\boldsymbol{p}_1}{m}$ находим

$$\int dp_2\, d^2\sigma\, dz \boldsymbol{v}_{\text{отн}} \left(f^{(2)}(t_+) - f^{(2)}(t_-)\right).$$

После столкновения меняются импульсы частиц, тогда правую часть можем переписать в виде

$$\int d\boldsymbol{p}_2\, d^2\sigma \boldsymbol{v}_{\text{отн}} \left(f^{(1)}(\boldsymbol{p}_2', \boldsymbol{r}, t) f^{(1)}(\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{r}, t) - f^{(1)}(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{r}, t) f^{(1)}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{r}, t)\right), \quad \text{– интеграл столкновений.} \tag{18.3}$$

Формально есть частицы прилетевшие и улетевшие. К слову, $d\boldsymbol{p}_1\, d\boldsymbol{p}_2 = d\boldsymbol{p}_1'\, d\boldsymbol{p}_2'$.

20 Упражнения

20.1 У1

Матрица перехода

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.5 \\ 0.15 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Собственный вектор с $\lambda = 1$:

$$\boldsymbol{q} = \left(\frac{b}{1-a+b},\ \frac{a-1}{a-1-b}\right) \approx \begin{pmatrix} 0.77 \\ 0.23 \end{pmatrix}.$$

Для него выполняется детальный баланс $T_{j\neq i} q_i = T_{i \neq j} q_j$. Таким образом данный процесс обратимый.

[4]Также будем считать, что $\boldsymbol{X}_i$ меняются слабо.

20.2 У2

Рассмотрим одномерное случайное блуждение с для разных p. Матрица перехода имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} q & q & 0 & 0 & \dots \\ p & 0 & q & 0 & \dots \\ 0 & p & 0 & q & \dots \\ 0 & 0 & p & 0 & \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

И снова ищем $T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, что значит

$$x_0 p = x_1 q, \qquad x_1 p = x_2 q, \qquad \dots$$

откуда находим

$$\frac{1}{x_0} = 1 + \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{p}{1-p}\right)^i = 1 + \frac{1-(p/q)^N}{1-p/q} = \begin{cases} \infty, & p \geqslant 0.5 \\ \frac{2-3p}{1-2p}, & p < 0.5 \end{cases}$$

Видно, что при $p \geqslant 0.5$ сумма расходится и $x_0 \to 0$, а при $x_0 (p < 0.5)$ конечна, гарантировано возвращаемся.