Желательные знания по курсу «Физическая кинетика»

Автор заметок: Хоружий Кирилл

От: *31 мая 2023 г.*

Содержание

1 Проводимость Друде

Общефизическое рассмотрение. Рассмотрим движение электронов под действием электрического поля
$$m(\ddot{x}+\gamma\dot{x}) = eE,$$
в установившемся режиме $\ddot{x}=0$, $\gamma = 1/\tau$, где τ – время столкновений. Так находим
$$v = \frac{e\tau}{m}E, \qquad j = env = \frac{ne^2}{m}\tau E, \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{\text{D}} = \frac{ne^2}{m}\tau.$$
τ-приближение. Воспользуемся τ-приближением для I_{st}
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_i\frac{\partial}{\partial r_i} + eE_i\frac{\partial}{\partial p_i}\right) f(r,p,t) = -\frac{f(r,p,t)-f_{\text{eq}}(p)}{\tau}.$$
Рассматривая однородную стационарную задачу приходим к уравнению, вида
$$eE_i\frac{\partial}{\partial p_i} f(p) = -\frac{\delta f(p)}{\tau},$$
где $\delta f = f - f_{\text{eq}}$, а хотим найти $j = e\int \frac{dp}{(2\pi\hbar)^d}\delta f(p) v(p)$.

Рассматривая задачу в предположение о линейном отклике, находим
$$f(p) = f_{\text{eq}}(p) + \chi_i(p)E_i + \ldots, \quad \Rightarrow \quad \chi_i(p) = -e\tau\frac{\partial}{\partial p_i} f_{\text{eq}}(p),$$
и подставляя это в выражение для j
$$j_i = -e^2\tau E_s \int \frac{dp}{(2\pi\hbar)^d}\frac{p_i}{m}\frac{\partial}{\partial p_s} f_{\text{eq}}(p) = \frac{e^2\tau E_i}{m}\int\frac{dp}{(2\pi\hbar)^d} f_{\text{eq}}(p),$$
где мы проинтегрировали по частям. Таким образом приходим к выражению для проводимости Друде
$$j_i = \frac{n_{\text{eq}}e^2\tau}{m}E_i = \sigma_{\text{D}}E_i, \qquad \sigma_{\text{D}} = \frac{n_{\text{eq}}e^2}{m}\tau.$$
Переменное поле. Пусть теперь $E_i = E_i(t)$, тогда
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + eE_i(t)\frac{\partial}{\partial p_i}\right) f(p,t) = -\frac{f(p,t)-f_{\text{eq}}(p)}{\tau}.$$
Переходя к линейному отклику, находим
$$\frac{\partial}{\partial t}\delta f(p,t) + eE_i(t)\frac{\partial}{\partial p_i} f_{\text{eq}}(p,t) = -\frac{\delta f(p,t)}{\tau},$$
или переходя к Фурье $\delta f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t}\delta f(\omega)$, находим
$$-i\omega\,\delta f(p,\omega) + eE_i(\omega)\frac{\partial}{\partial p_i} f_{\text{eq}}(p) = -\frac{\delta f(p,\omega)}{\tau},$$
тогда Фурье-образ поправки функции распределения будет равен
$$\delta f(p,\omega) = -\frac{eE_i(\omega)}{1-i\omega\tau}\frac{\partial f_{\text{eq}}(p)}{\partial p_i}\tau.$$
Подставляя в выражение для тока j, получим
$$j_i(\omega) = \frac{\sigma_{\text{D}}}{1-i\omega\tau}E_i(\omega) = \sigma(\omega)E_i(\omega),$$
с полюсом в нижней полуплоскости – причинная функция Грина. Собственно, после обратного Фурье, находим
$$j_i = \int_{-\infty}^{t}\sigma(t-t')E_i(t)\,dt', \qquad \Rightarrow \qquad \sigma(t) = \int\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega t}\frac{\sigma_{\text{D}}}{1-i\omega\tau} = \sigma_{\text{D}}\cdot\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\theta(t).$$

2 Уравнение Больцмана

Уравнения Лиувилля. Нам пригодится *уравнение Лиувилля*
$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}_i}, \qquad \dot{\boldsymbol{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}_i}, \qquad H = K(\boldsymbol{p}^N) + V(\boldsymbol{r}^N) + \Phi(\boldsymbol{r}^N), \qquad K(\boldsymbol{p}^N) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m}, \qquad \Phi(\boldsymbol{r}^N) = \sum_{i=1}^{N}\varphi(\boldsymbol{r}_i).$$
Важным его свойством является сохранение фазового объема
$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0, \qquad \frac{\partial f^{[N]}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i}\left[f^{[N]}\dot{\boldsymbol{r}}_i\right] + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_i}\left[f^{[N]}\dot{\boldsymbol{p}}_i\right]\right) = \frac{df^{[N]}}{dt} = 0,$$

где подставили $\rho = f^{[N]}$ и $\boldsymbol{j} = \{f^{[N]}\dot{\boldsymbol{r}}_i, f^{[N]}\dot{\boldsymbol{p}}_i\}$.

Редуцированная функция. В дальнейшем пригодится *редуцированная функция* $f^{(n)}$:

$$f^{(n)}(\boldsymbol{r}^n,\, \boldsymbol{p}^n,\, t) = \frac{N!}{(N-n)!}\int f^{[N]}(\boldsymbol{r}^N,\, \boldsymbol{p}^N,\, t)\, d\boldsymbol{r}^{(N-n)}\, d\boldsymbol{p}^{(N-n)},$$

где $d\boldsymbol{r}^{(N-n)} = d\boldsymbol{r}_{n+1}\dots d\boldsymbol{r}_N$ и $d\boldsymbol{p}^{(N-n)} = d\boldsymbol{p}_{n+1}\dots d\boldsymbol{p}_N$, $f^{[N]}$ – функция распределения N частиц.

БГКИ. Можем получить цепочку уравнений Боголюбова-Борна-Грина-Кирквуда-Ивона:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\boldsymbol{p}_i}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \sum_{i=1}^{n}\left[\boldsymbol{X}_i + \sum_{j=1}^{n}F_{ij}\right]\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_i}\right) f^{(n)} = -\sum_{i=1}^{n}\int F_{i,n+1}\frac{\partial f^{(n+1)}}{\partial \boldsymbol{p}_i}\, d\boldsymbol{r}_{n+1}\, d\boldsymbol{p}_{n+1}, \tag{2.1}$$

для $n = 1, 2, \dots$ с нормировкой $\int f^{(n)}\, d\boldsymbol{r}^n\, d\boldsymbol{p}^n = \frac{N!}{(N-n)!}$.

Приближение среднего поля. Для $n = 1$, после факторизации $f^{(2)}(\xi_1, \xi_2, t) = f^{(1)}(\xi_1^t) f^{(1)}(\xi_2^t)$, уравнение сведётся к приближению среднего поля – *бесстолкновительному уравнению Власова*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \left[\boldsymbol{X}_1 + \tilde{\boldsymbol{F}}\right]\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1}\right) f^{(1)} = 0, \qquad \tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{r}_1, t) = \int \boldsymbol{F}_{12}(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{r}_2) f^{(1)}(\boldsymbol{r}_2,\, \boldsymbol{p}_2,\, t)\, d\boldsymbol{r}_2\, d\boldsymbol{p}_2, \tag{2.2}$$

которое валидно при $nd^3 \gg 1$.

Интеграл столкновений. Для $n = 2$, игнорируя трёхчастичные столкновения, получаем соотношение для двухчастичной функции

$$\boldsymbol{F}_{12}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_2}\right) f^{(2)} = -\left(\frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \frac{\boldsymbol{p}_2}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2}\right) f^{(2)},$$

которое, при подстановке в выражение для $n = 1$, приводит к интегралу столкновений

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{X}_1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1}\right) f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{p}_1,\, t) = -\int \boldsymbol{F}_{12}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_2}\right) f^{(2)}\, d\xi_2 = \int \left[\frac{\boldsymbol{p}_2}{m} - \frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\right]\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{p}_2,$$

где в правой части можно приглядевшись увидеть интеграл столкновений в приближении Больцмана

$$\int d\boldsymbol{p}_2\, d^2\sigma \boldsymbol{v}_{\text{отн}}\left(f^{(1)}(\boldsymbol{p}_2', \boldsymbol{r}, t) f^{(1)}(\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{r}, t) - f^{(1)}(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{r}, t) f^{(1)}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{r}, t)\right), \tag{2.3}$$

с $\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \frac{\boldsymbol{p}_2}{m} - \frac{\boldsymbol{p}_1}{m}$.

3 Тепловой баланс

Локальное равновесие. Мы в дальнейшем будем верить в локальное равновесие

$$f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) \approx \left(\exp\left(\frac{\varepsilon(\boldsymbol{p}) - \mu(\boldsymbol{r}, t)}{T(\boldsymbol{r}, t)}\right) \pm 1\right)^{-1}, \qquad |l\, T_r'| \ll T,$$

где l – длина свободного пробега.

Законы сохранения. Можем получить, что

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{J}_s = -\boldsymbol{J}_Q \cdot \frac{\boldsymbol{\nabla} T}{T^2} + \boldsymbol{J}_e \cdot \frac{\boldsymbol{\mathcal{E}}}{T},$$

где $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ – электрическое поле, $\boldsymbol{J}_Q$ – поток тепла. При этом выполняются закон сохранения числа частиц:

$$\frac{\partial n(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{J} = 0, \qquad \boldsymbol{J} = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi\hbar)^3} f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p}),$$

верным для любого локального в координатном пространстве интеграле столкновений. Аналогично для энергии

$$\frac{\partial E(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{J}_E = 0, \qquad \boldsymbol{J} = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi\hbar)^3} \varepsilon(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}) f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p}),$$

для упругих столкновений.

Тепло. Из термодинамики

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} - (\mu + e\varphi)\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial \boldsymbol{J}_E}{\partial \boldsymbol{r}} + (\mu + e\varphi)\frac{\partial \boldsymbol{J}_e}{\partial e\boldsymbol{r}}.$$

Здесь удобно ввести

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\text{ext}} - \nabla\mu/e = -\nabla(\mu + e\varphi)/e, \qquad \boldsymbol{J}_Q \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{J}_E - (\mu + e\varphi)\boldsymbol{J}_e/e,$$

и получить

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{j}_Q}{\partial \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{J}_e.$$

Принцип Онсагера. Рассмотрим энтропию с охапкой макроскопических параметров x_i, которые будем считать в равновесном случае равными нулю, тогда

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial x_i} x_i = -X_i x_i,$$

где X_i – обобщенные силы, $\dot{x}_i = Y_i$ – обобщенные потоки. В равновесии $Y_i = 0$, при малых отклонениях

$$X_i = \beta_{ik} x_k, \qquad \delta S = -\beta_{ik} x_i x_k, \qquad \dot{x}_i = -\alpha_{ij} X_i,$$

где α_{ij} – *кинематические коэффициенты*. Принцип симметрии кинетических коэффициентов Онсагера:

$$\boxed{\alpha_{ij} = \alpha_{ji}}.$$

Для доказательства достаточно замтетить, что

$$\langle x_i(t) x(0)\rangle = \langle x_i(0) x_k(t)\rangle, \quad \overset{\partial_t}{=} \quad \alpha_{ij}\langle X_j x_k(0)\rangle = \alpha_{kj}\langle x_i(0) X_j\rangle,$$

где усреднение приводит к

$$W \propto e^{\delta S} = e^{-\beta_{im} x_i x_m}, \qquad \Rightarrow \qquad \langle X_j x_k(0)\rangle = \frac{\int \beta_{jl} x_l x_k e^{\delta S}\, d^N x}{\int e^{\delta S}\, d^N x} = \delta_{ik},$$

что при подтсановку и даёт искомые соотношения. Для наличия магнитного поля $\boldsymbol{H}$ появится важное уточнение связанное с инвариантностью по времени: $\alpha_{ij}(\boldsymbol{H}) = \alpha_{ji}(-\boldsymbol{H})$.

4 Марковские процесса

Детальный баланс. Марковский процесс с матрицей T называем *обратимым*, если для стационарного распределения $\boldsymbol{x}$ выполняется

$$x_i T_{ij} = x_j T_{ji}.$$

Для симметричных матриц перехода всегда будет детальный баланс. Есть тесная связь с H-теоремой, а именно условие детального баланса является *достаточным* для строгого возрастания энтропии в изолированных системах. Ещё *соотношения Онзагера* следуют из принципа детального баланса в линейном приближении вблизи равновесия.

Уравнение Чепмена-Колмогорова. Далее говорим о *пропагаторе*

$$T(x,t|x',t') = \delta(x - \Phi_{t-t'}(x')),$$

иначе вероятности перехода из x в x' за время $t-t'$, где $\Phi_{t-t'}(x')$ – эволюция системы.

В дискретном случае *уравнение Чепмена-Колмогорова* –

$$T_{t+s} = T_t T_s,$$

матрицы переходов просто перемножаются.

Нам интереснее будет работать с диференциальным уравнением Чепмена-Колмогорова

$$\partial_t P(n,t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(W(n|m,t) P(m,t) - W(m|t,t) P(n,t)\right), \tag{4.1}$$

где первое слагаемое – приток из системы, второе – отток в систему.

5 Уравнение Навье-Стокса

Уравнение *Навье-Стокса* в векторном виде

$$\boxed{\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \boldsymbol{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla \operatorname{div} \boldsymbol{v}} \tag{5.1}$$

где для несжимаемой жидкости $\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0$, первая вязкость $\eta > 0$.

Предел применимости в том, что средняя скорость должна слабо меняться на микроскопических масштабах, то есть на масштабах времени и длины свободного пробега.

6 Уравнение Фоккера-Планка

Уравнение Ланжевена. Стохастическое уравнение Ланжевена (математика и физика)

$$\frac{dx}{dt} = g(x(t)) + \xi(t), \qquad \boxed{\frac{dp}{dt} = -\gamma p - \nabla U + \xi_p(t), \quad \langle \xi_p(t)\xi_p(t')\rangle = D\delta(t-t')}. \tag{6.1}$$

где $\xi(t)$ – случайный процесс. Заметим, что

$$T(x,t|x',t') = \langle \delta(x - \Phi_{t-t'}(x')) \rangle_\xi,$$

и можем разложиться в ряд

$$E(x,t+\delta t|x',t) = \langle \delta(x - \delta x(t) - x') \rangle = \left(1 + \langle \delta x(t) \rangle \frac{d}{dx'} + \frac{1}{2} \langle |\delta x(t)|^2 \rangle \frac{d^2}{dx'^2} + \ldots \right) \delta(x - x')$$

Далее заменим средние первого порядка на F_1 и второго на F_2, а остальные малы.

Уравнение Фокера-Планка. Получаем *уравнение Фокера*

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x,t|x_0,t_0) = -\frac{d}{dx} \left(F_1(x) T(x,t|x_0,t_0) \right) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \left(F_2(x) T(x,t|x_0,t_0) \right).$$

Вообще F мы знаем из уравнения Ланжевена

$$F_1(x)\delta t = \langle \delta x(t) \rangle = g(x), \qquad F_2(x) = \frac{1}{\delta t} \int_t^{t+\delta t} \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle \, dt_1 \, dt_2 = D.$$

Подробнее в `билетах` на странице 45.

Подставим для Фоккера-Планка

$$g(x) = (v(p), \, F(r)) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(p) \\ -\gamma p - \nabla U + \xi_p(t) \end{pmatrix}, \qquad T(x,t|x_0,t_0) = \langle f(r,p,t) \rangle_\xi.$$

И в более конкретизированном виде для $P = \langle f(r,p,t) \rangle$ уравнение Фоккера-Планка имеет вид

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} P + \frac{\partial}{\partial r} vP + \frac{\partial}{\partial p} (-\gamma p - \nabla U) P - \frac{D}{2} \frac{\partial}{\partial p^2} P = 0} \tag{6.2}$$

где $D = 2mT\gamma$ – соотношение Эйнштейна.

Уравнение Смолуховского. Для уравнения Ланжевена в пределе очень вязкой жидкости

$$\gamma p = -\nabla U + \xi_p(t).$$

Для концентрации частиц $n = \int f \, dp$, можем в этом приближении в одномерии записать *уравнение Смолуховского*

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle n \rangle_\xi = \frac{1}{\gamma m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{D}{2\gamma m} \frac{\partial}{\partial x} \right) \langle n \rangle_\xi.$$

Соотношения Эйнштейна. В отсутствие внешних сил верно, что

$$\frac{\partial n}{\partial t} + D\nabla^2 n = 0, \qquad n_0(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt} \right),$$

где $n_0(t=0) = \delta(\boldsymbol{r})$. Можем сразу найти среднеквадратичное отклонение

$$\langle r^2 \rangle = \int n_0 r^2 \, d^3 r = 6Dt.$$

В равновесных условиях диффузионный поток отсутствует $\boldsymbol{j} = -D\nabla n + b\boldsymbol{F} n = 0$, функция распределения частиц во внешнем поле $U(\boldsymbol{r})$ совпадает с больцмановской $n(\boldsymbol{r}) \sim \exp\left(-U/T\right), \boldsymbol{F} = -\nabla U$, откуда получаем соотношение Эйнштейна

$$\boxed{D = bT}. \tag{6.3}$$

7 Уравнение Линдблада

Уравнение Линдблада. Для редуцированной матрицы плотности системы ρ можем записать

$$\boxed{\partial_t \rho = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] + \hat{L}[\rho], \qquad \hat{L}[\rho] = \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \left(\left[L_k \rho, L_k^\dagger \right] + [L_k, \rho L_k^\dagger] \right)}, \tag{7.1}$$

который может сводиться к уравннению, получаемому в рамках модели Калдейры-Легетта для $L = a$.

Уравнение Блоха. Для спина $\frac{1}{2}$ можем получить для

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \left(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right), \quad \hat{L} = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \right), \quad \rho = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} + \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right), \quad |\boldsymbol{r}| \leqslant 1,$$

где $\boldsymbol{r} \overset{\text{def}}{=} 2\langle \boldsymbol{S} \rangle$, и получить эволюцию, вида

$$\partial_t \boldsymbol{r} = -\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\Omega} - \gamma \boldsymbol{r}.$$

8 ФДТ

Рассмотрим поведение осциллятора под дейтсвием случайных внешних сил:

$$m\ddot{q} + \gamma\dot{q} + m\omega_0^2 q = f(t), \qquad q(\omega) = \alpha(\omega) f(\omega), \quad \alpha(\omega) = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2) - i\gamma\omega},$$

где α – восприимчивость.

Работа, совершаемая внешней силой, равна $-q\partial_t f$. Раскладывая $f(t)$ и $q(t)$ в фурье, находим среднюю величину поглощаемой энергии

$$Q = \frac{\omega}{2}\alpha''|f_0|^2, \qquad \alpha'' = \operatorname{Im}\alpha.$$

Очевидно, спектральная плотность внешней силы и отклика связаны соотношением

$$\psi_q(\omega) = |\alpha(\omega)|^2 \psi_f(\omega).$$

Для большой температуры T

$$\psi_q(0) = \langle q^2 \rangle = \frac{T}{m\omega_0^2} = \psi_T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |\alpha(\omega)|^2 = \psi_T \frac{1}{2m\omega_0^2\gamma}, \quad \Rightarrow \quad \psi_T = \frac{\langle f(t) f(t') \rangle}{\delta(t-t')} = 2\gamma T.$$

Для произвольных температур

$$\langle q(t) q(t+\tau) \rangle = \hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \alpha''(\omega) \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} e^{-i\omega\tau},$$

и для связи отклика и внешней силы (что и есть ФДТ)

$$\boxed{\psi_q(\omega) = \hbar\alpha''(\omega) \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T}}. \tag{8.1}$$

Тут же дальше из соотношений Крамерса-Кронига можно получить соотношения симметрии кинетических коэффициентов Онсагера.