Задание по курсу «Физическая кинетика»

Автор заметок: Хоружий Кирилл

От: *30 марта 2023 г.*

Содержание

Проводимость Друде

Общефизическое рассмотрение. Рассмотрим движение электронов под действием электрического поля
$$m(\ddot{x}+\gamma\dot{x})=eE,$$
в установившемся режиме $\ddot{x}=0$, $\gamma=1/\tau$, где τ – время столкновений. Так находим
$$v=\frac{e\tau}{m}E,\qquad j=env=\frac{ne^2}{m}\tau E,\qquad\Rightarrow\qquad \sigma_{\text{D}}=\frac{ne^2}{m}\tau.$$

τ-приближение. Воспользуемся τ-приближением для I_{st}
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_i\frac{\partial}{\partial r_i}+eE_i\frac{\partial}{\partial p_i}\right)f(r,p,t)=-\frac{f(r,p,t)-f_{\text{eq}}(p)}{\tau}.$$
Рассматривая однородную стационарную задачу приходим к уравнению, вида
$$eE_i\frac{\partial}{\partial p_i}f(p)=-\frac{\delta f(p)}{\tau},$$
где $\delta f=f-f_{\text{eq}}$, а хотим найти $j=e\int\frac{dp}{(2\pi\hbar)^d}\delta f(p)v(p)$.

Рассматривая задачу в предположение о линейном отклике, находим
$$f(p)=f_{\text{eq}}(p)+\chi_i(p)E_i+\ldots,\quad\Rightarrow\quad \chi_i(p)=-e\tau\frac{\partial}{\partial p_i}f_{\text{eq}}(p),$$
и подставляя это в выражение для j, находим
$$j_i=-e^2\tau E_s\int\frac{dp}{(2\pi\hbar)^d}\frac{p_i}{m}\frac{\partial}{\partial p_s}f_{\text{eq}}(p)=\frac{e^2\tau E_i}{m}\int\frac{dp}{(2\pi\hbar)^d}f_{\text{eq}}(p),$$
где мы проинтегрировали по частям. Таким образом приходим к выражению для проводимости Друде
$$j_i=\frac{n_{\text{eq}}e^2\tau}{m}E_i=\sigma_{\text{D}}E_i,\qquad \sigma_{\text{D}}=\frac{n_{\text{eq}}e^2}{m}\tau.$$

Переменное поле. Пусть теперь $E_i=E_i(t)$, тогда
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+eE_i(t)\frac{\partial}{\partial p_i}\right)f(p,t)=-\frac{f(p,t)-f_{\text{eq}}(p)}{\tau}.$$
Переходя к линейному отклику, находим
$$\frac{\partial}{\partial t}\delta f(p,t)+eE_i(t)\frac{\partial}{\partial p_i}f_{\text{eq}}(p,t)=-\frac{\delta f(p,t)}{\tau},$$
или переходя к Фурье $\delta f(t)=\int\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega t}\delta f(\omega)$, находим
$$-i\omega\,\delta f(p,\omega)+eE_i(\omega)\frac{\partial}{\partial p_i}f_{\text{eq}}(p)=-\frac{\delta f(p,\omega)}{\tau},$$
тогда Фурье-образ поправки функции распределения будет равен
$$\delta f(p,\omega)=-\frac{eE_i(\omega)}{1-i\omega\tau}\frac{\partial f_{\text{eq}}(p)}{\partial p_i}\tau.$$
Подставляя в выражение для тока j, получим
$$j_i(\omega)=\frac{\sigma_{\text{D}}}{1-i\omega\tau}E_i(\omega)=\sigma(\omega)E_i(\omega),$$
с полюсом в нижней полуплоскости – причинная функция Грина! Собственно, после обратного Фурье, находим
$$j_i=\int_{-\infty}^{t}\sigma(t-t')E_i(t)\,dt',\qquad\Rightarrow\qquad \sigma(t)=\int\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega t}\frac{\sigma_{\text{D}}}{1-i\omega\tau}=\sigma_{\text{D}}\cdot\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\theta(t).$$

1 Кинетическое уравнение Власова

Начнём с уравнение Лиувилля, считая заданными $\boldsymbol{r}^N=(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_N)$ и $\boldsymbol{p}^N=(\boldsymbol{p}_1,\ldots,\boldsymbol{p}_N)$
$$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{p}_i},\qquad \dot{\boldsymbol{p}}_i=-\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{r}_i},$$
где Гамильтониан запишется в виде
$$H=K(\boldsymbol{p}^N)+V(\boldsymbol{r}^N)+\Phi(\boldsymbol{r}^N),\qquad K(\boldsymbol{p}^N)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m},\quad \Phi(\boldsymbol{r}^N)=\sum_{i=1}^{N}\varphi(\boldsymbol{r}_i).$$

Введём также функцию распределения $f^{[N]}(\boldsymbol{r}^N, \boldsymbol{p}^N, t)$ так чтобы $f^{[N]}(\boldsymbol{r}^N, \boldsymbol{p}^N, t)\, d\boldsymbol{r}^N\, d\boldsymbol{p}^N$ – вероятность находиться в данной точке фазового пространства. Нормировка единичная.

Закон сохранения. Закон сохранения в дифференциальном виде запишется в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0,$$

где в нашем случае ρ – $f^{[N]}$, и $\boldsymbol{j} = \{f^{[N]}\dot{\boldsymbol{r}}_i, f^{[N]}\dot{\boldsymbol{p}}_i\}$, тогда

$$\frac{\partial f^{[N]}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} \left[f^{[N]} \dot{\boldsymbol{r}}_i \right] + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_i} \left[f^{[N]} \dot{\boldsymbol{p}}_i \right] \right) = \frac{d f^{[N]}}{dt} = 0,$$

при подстановке уранений Гамильтона.

Редуцированная функция. Редуцированная функция $f^{(n)}$ определяется как

$$f^{(n)}(\boldsymbol{r}^n,\, \boldsymbol{p}^n,\, t) = \frac{N!}{(N-n)!} \int f^{[N]}(\boldsymbol{r}^N,\, \boldsymbol{p}^N,\, t)\, d\boldsymbol{r}^{(N-n)}\, d\boldsymbol{p}^{(N-n)},$$

где $d\boldsymbol{r}^{(N-n)} = d\boldsymbol{r}_{n+1} \ldots d\boldsymbol{r}_N$ и $d\boldsymbol{p}^{(N-n)} = d\boldsymbol{p}_{n+1} \ldots d\boldsymbol{p}_N$.

Работаем приближение потенциального внешнего поля

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = \boldsymbol{X}_i + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{r}_i,\, \boldsymbol{r}_j), \qquad \boldsymbol{F}_{ii} = 0.$$

Тогда сохранение перепишется в виде

$$\frac{\partial f^{[N]}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m} \frac{\partial f^{[N]}}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{X}_i \frac{\partial f^{[N]}}{\partial \boldsymbol{p}_i} = -\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ij} \frac{\partial f^{[N]}}{\partial \boldsymbol{p}_i}.$$

При редуцирование в силу ограниченности в фазовом пространстве, остаётся

$$\frac{\partial f^{(n)}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m} \frac{\partial f^{(n)}}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i \frac{\partial f^{(n)}}{\partial \boldsymbol{p}_i} = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_{ij} \frac{\partial f^{(n)}}{\partial \dot{\boldsymbol{p}}_i} - \frac{N!}{(N-n)!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=n+1}^{N} \int \boldsymbol{F}_{ij} \frac{\partial f^{[N]}}{\partial \boldsymbol{p}_i}\, d\boldsymbol{r}^{(N-n)}\, d\boldsymbol{p}^{(N-n)}.$$

С учетом симметричности функции распределения, последнее слагаемое можем переписать в виде

$$-\frac{N!(N-n)}{(N-n)!} \sum_{i=1}^{n} \int F_{i,n+1} \frac{\partial f^{[N]}}{\partial \boldsymbol{p}_i}\, d\boldsymbol{r}^{(N-n-1)}\, d\boldsymbol{p}^{(N-n-1)}\, d\boldsymbol{r}_{n+1}\, d\boldsymbol{p}_{n+1},$$

Так приходим к выражению, вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{p}_i}{m} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_i} + \sum_{i=1}^{n} \left[\boldsymbol{X}_i + \sum_{j=1}^{n} F_{ij} \right] \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_i} \right) f^{(n)} = -\sum_{i=1}^{n} \int F_{i,n+1} \frac{\partial f^{(n+1)}}{\partial \boldsymbol{p}_i}\, d\boldsymbol{r}_{n+1}\, d\boldsymbol{p}_{n+1}.$$

Эта система уравнений называется цепочкой уравнений Боголюбова-Борна-Грина Обычно интерес представляют $n = 1, 2$, кстати $\int f^{(n)}\, d\boldsymbol{r}^n\, d\boldsymbol{p}^n = \frac{N!}{(N-n)!}$.

Одночастичный случай

Для $n = 1$ уравнение сведётся к

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{X}_1 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} \right) f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{p}_1,\, t) = -\int \boldsymbol{F}_{12} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} f^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{p}_2, t)\, d\boldsymbol{r}_2\, d\boldsymbol{p}_2.$$

В силу отсутствия корелляций между столкновениями попробуем сделать приближение

$$f^{(2)}(\xi_1, \xi_2, t) = f^{(1)}(\xi_1^t) f^{(1)}(\xi_2^t).$$

Определяя

$$\tilde{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{r}, t) = \int \boldsymbol{F}_{12}(\boldsymbol{r}_1,\, \boldsymbol{r}_2) f^{(1)}(\boldsymbol{r}_2,\, \boldsymbol{p}_2,\, t)\, d\boldsymbol{r}_2\, d\boldsymbol{p}_2,$$

приходим к бесстолкновительному уравнению Власова

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \left[\boldsymbol{X}_1 + \tilde{\boldsymbol{F}} \right] \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} \right) f^{(1)} = 0. \tag{1}$$

которое валидно при $nd^3 \gg 1$.

Двухчастичный случай

Для $n = 2$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \frac{\boldsymbol{p}_2}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2} + [\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{F}_{12}]\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} + [\boldsymbol{X}_2 + \boldsymbol{F}_{21}]\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_2}\right) f^{(2)}(\xi_1, \xi_2, t) = -\int \left(\boldsymbol{F}_{13}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} + \boldsymbol{F}_{23}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_2}\right) f^{(3)}\, d\boldsymbol{r}_3\, d\boldsymbol{p}_3$$

Считая $nd^3 \ll 1$, можем игнорировать[1] трёхчастичные столкновения, тогда

$$\left(\frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \frac{\boldsymbol{p}_2}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2} + F_{12}\left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_2}\right]\right) f^{(2)} = 0.$$

Переходя к координатам, находим

$$\boldsymbol{F}_{12}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_2}\right) f^{(2)} = -\left(\frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \frac{\boldsymbol{p}_2}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2}\right) f^{(2)}.$$

Введём $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{R} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)$, тогда

$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \boldsymbol{R}} \ll \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \boldsymbol{r}}.$$

Возвращаемся к одночастичной функции, интегрируя находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{p}_1}{m}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1} + \boldsymbol{X}_1\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1}\right) f^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1, t) = -\int \boldsymbol{F}_{12}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_1} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_2}\right) f^{(2)}\, d\xi_2 = \int \left[\frac{\boldsymbol{p}_2}{m} - \frac{\boldsymbol{p}_2}{m}\right]\frac{\partial f^{(2)}}{\partial \boldsymbol{r}}\, d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{p}_2,$$

продолжая с правой частью, вводя $\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \frac{\boldsymbol{p}_2}{m} - \frac{\boldsymbol{p}_1}{m}$ находим

$$\int dp_2\, d^2\sigma\, dz \boldsymbol{v}_{\text{отн}}\left(f^{(2)}(t_+) - f^{(2)}(t_-)\right).$$

После столкновения меняются импульсы частиц, тогда правую часть можем переписать в виде

$$\int d\boldsymbol{p}_2\, d^2\sigma \boldsymbol{v}_{\text{отн}}\left(f^{(1)}(\boldsymbol{p}_2', \boldsymbol{r}, t) f^{(1)}(\boldsymbol{p}_1', \boldsymbol{r}, t) - f^{(1)}(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{r}, t) f^{(1)}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{r}, t)\right), \quad \text{– интеграл столкновений.} \qquad (2)$$

Формально есть частицы прилетевшие и улетевшие. К слову, $d\boldsymbol{p}_1\, d\boldsymbol{p}_2 = d\boldsymbol{p}_1'\, d\boldsymbol{p}_2'$.

2 Колебания в плазме

Рассмотрим частицы в силе Лоренца

$$\hat{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}]\right).$$

Запишем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} - e\left[\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}]\right]\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}\right) f = 0.$$

Учтём, что $M \gg m$, тогда $f_i = f_{io}$ и $f = f_0 + \delta f$. В линейном отклике

$$\rho = -e\int \delta f\, d\Gamma, \qquad \boldsymbol{j} = -e\int \boldsymbol{v}\,\delta f\, d\Gamma,$$

где уже учли отсутствие вклада равновесных слагаемых. Равновесная функция распределения $f_0 = f_0(\varepsilon(\boldsymbol{p}))$, подставляя, находим

$$\frac{\partial\delta f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial\delta f}{\partial \boldsymbol{r}} - e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}]\right)\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}} = 0, \qquad \frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v}\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}.$$

Итого остаётся

$$\frac{\partial\delta f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial\delta f}{\partial \boldsymbol{r}} = e(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon} - \frac{\delta f}{\tau},$$

где добавление $-\frac{\delta f}{\tau}$ приводит к причинности дальнейшего выражения $+i\delta = +i/\tau$.

Рассмотрим $\boldsymbol{E} = E_{k,\omega}e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-\omega t)}$, и тогда $\delta f = \delta f_{k,\omega}e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}-\omega t)}$, подставляя находим

$$(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})\delta f_{k\omega} = ie(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}_{k\omega})\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon},$$

и выражение на Фурье образ первой поправки

$$\delta f_{k\omega}(\boldsymbol{p}) = \frac{ie(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}_{k,\omega})}{\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} + i\delta}\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}.$$

[1] Также будем считать, что $\boldsymbol{X}_i$ меняются слабо.

Вспомним, что $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}$, тогда

$$-e \int \frac{ie\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E}_{k\omega})}{\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v} + i\delta} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \, d\Gamma = j_{k\omega} = -i\omega P_{k\omega},$$

откуда находим поляризацию

$$P_{\alpha, k\omega} = \frac{e^2}{\omega} E_\beta \int \frac{v_\alpha v_\beta}{\omega - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v}} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \, d\Gamma = \chi_{\alpha\beta} E_\beta.$$

Для трёхмерного случая итого находим

$$D_\alpha = E_\alpha + 4\pi P_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta, \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{k}) = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi e^2}{\omega} \int \frac{v_\alpha v_\beta}{\omega - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v}} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \, d\Gamma.$$

Перейдём к переменным $\hat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}/v$, $\hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k}/k$, переписываем интеграл в виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi e^2}{\omega^2} \int d\Gamma \, s v^2 \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\hat{v}_\alpha \hat{v}_\beta}{s - \hat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{v}} + i\delta}$$

где $s = \omega/kv$. Итого усредняя находим[2]

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{\hat{v}_\alpha \hat{v}_\beta}{s - \hat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{v}} + i\delta} = A(s)\delta_{\alpha\beta} + B(s)\hat{k}_\alpha \hat{k}_\beta f,$$

Итого находим выражение в виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{k}) = \varepsilon_l \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} + \varepsilon_t \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right).$$

Считая $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_e + \boldsymbol{E}_t$, где $\boldsymbol{E}_l = (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{k})\boldsymbol{k}/k^2$ и $\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_l$, найдём

$$D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta = D_{l\alpha} + D_{t\alpha}, \qquad D_{l\alpha} = \varepsilon_l E_{l\alpha}, \quad D_{t\alpha} = \varepsilon_t D_{t\alpha}.$$

Рассмотрим теперь только $\boldsymbol{E}_l \propto \boldsymbol{k}$, тогда

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = i \left[\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_l \right] = 0 = -\frac{i\omega}{c} \boldsymbol{B}, \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = 0 = \frac{i\omega}{c} \boldsymbol{D}, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{D}_l = 0.$$

Таким образом $\varepsilon_l(\omega, \boldsymbol{k}) = 0$ задаёт дисперсию продольных плазменных колебаний. Для поперечных плазменных колебаний уравнение примет вид

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_t(\omega, \boldsymbol{k}).$$

2D

Специфично для двухмерного случая

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \right) f = 0,$$

поле и поправка

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{k\omega} e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - \omega t)}, \qquad \delta f_{\boldsymbol{k},\omega} = \frac{ie(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E}_{k\omega}(z=0))}{\omega - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} + i\delta} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}.$$

Рассмотрим выражение для ρ, которая имеет принципиально двухмерный характер

$$\rho_{\omega \boldsymbol{k}} = -ie^2 \int \frac{ie(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E}_{k\omega}(z=0))}{\omega - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} + i\delta} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \, d\Gamma.$$

Отдельно найдём

$$I(\omega, \boldsymbol{k}) = \int \frac{\boldsymbol{v}}{\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v} + i\delta} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \, d\Gamma = \frac{\boldsymbol{k}}{k^2} \int \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} A(s) \, d\Gamma, \qquad A(s) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{\cos\varphi - s + s}{s - \cos\varphi + i\delta}.$$

Сделаем замену

$$x = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad d\varphi = \frac{2\, dx}{1 + x^2}, \quad \Rightarrow \quad A(s) = \begin{cases} -1 + \frac{s}{\sqrt{s^2 - 1}}, & s > 1 \\ -1 - \frac{is}{\sqrt{1 - s^2}}, & s > 1. \end{cases}$$

где мнимая часть связана с затуханием Ландау. Подставляя в плотность

$$\rho_{\omega k} = -\frac{ie^2}{k^2} \left(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_{\omega k} \right) \int \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} A(s) \, d\Gamma.$$

Расписывая уравнения Максвелла

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi \rho(x, y)\delta(z), \qquad \boldsymbol{E} = -\nabla \varphi, \quad \varphi = \varphi_{k\omega}(z) e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - \omega t)}.$$

[2] см. Бурмистров, считается $A(s)$, $B(s)$.

3 x Кондактанс

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

4 Упругое рассеяние электронов на примесях

Рассеяние электронов на примесях

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{k}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\right) f = I_{\boldsymbol{k}} = -\frac{\delta f}{\tau}.$$

В данном случае для линеаризованного кинетического уравнения τ-приближение является точным, где $\delta f = f_k - f_0$.

Поработаем с самим интегралом столкновений

$$I_k = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\boldsymbol{k}'} \left(|\langle \boldsymbol{k}' | U_{\text{пол}} | \boldsymbol{k} \rangle|^2 \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'}) \left[f_{k'}(1-f_k) - f_k(1-f_{k'}) \right] \right),$$

где $f_{k'}(1-f_k) - f_k(1-f_{k'}) = f_{k'} - f_k$. Для матричного элемента

$$U_{\text{пол}}(\boldsymbol{r}) = \sum_{j=1}^{N} U(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_j), \qquad \langle \boldsymbol{k} | = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}.$$

Тогда для матричного эдлемента находим

$$|\langle \boldsymbol{k}' | U_{\text{пол}} | \boldsymbol{k} \rangle|^2 = \frac{1}{V^2} |\tilde{U}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')|^2 \cdot \left| \sum_{j=1}^{N} e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\boldsymbol{R}_j} \right|^2, \qquad \tilde{U}(\boldsymbol{q}) = \int e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} U(\boldsymbol{r})\, d^3\boldsymbol{r}.$$

Усредняя по случайному положению примесей

$$\left\langle \left| \sum_{j=1}^{N} e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')R_j} \right| \right\rangle_{\text{прим}} = N + N(N-1)\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}.$$

Для матричного элемента получили выражение

$$|\langle \boldsymbol{k}' | U_{\text{пол}} | \boldsymbol{k} \rangle|^2 = \frac{N}{V^2} |\tilde{U}(\boldsymbol{q})|^2 + \frac{N(N-1)}{V^2} |\tilde{U}(0)|^2 \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}, \qquad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'.$$

Итого для интеграла столкновений получаем выражение после замены $\sum_{\boldsymbol{k}} \to \int \frac{V\, d^3k}{(2\pi)^3}$

$$I_k(f) = \frac{2\pi n}{\hbar} \int \frac{d^3\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3} |\tilde{U}(\boldsymbol{q})|^2 \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{\boldsymbol{k}}) \cdot (\delta f_{k'} - \delta f_k),$$

где уже линеаризовали выражение. Здесь n – примесное.

Рассмотрим стационарный однородный случай, когда $\hbar\dot{\boldsymbol{k}} = -e\boldsymbol{E}$, где поле считаем малой поправкой, тогда

$$\dot{\boldsymbol{k}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}} = -e\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}, \qquad \delta f_k \overset{\text{def}}{=} \tau(\varepsilon)\left(e\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{k}}\right) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon},$$

то есть ищем решение в τ-приближение. Получается уравнение

$$-(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = I_k = \frac{2\pi n}{\hbar} e\boldsymbol{E} \int \frac{d^3\boldsymbol{k}'}{(2\pi)^3} |\tilde{U}(\boldsymbol{q})|^2 \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'}) \left(\tau(\varepsilon')\boldsymbol{v}' \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon'} - \tau(\varepsilon)\boldsymbol{v}\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon} \right).$$

Сокращая $\partial_\varepsilon f_0$ и всё лишнее, находим

$$\boldsymbol{v} = \frac{\hbar \boldsymbol{k}}{m} = \frac{n\tau(\varepsilon[\boldsymbol{k}])}{4\pi^2\hbar} \int_0^\infty dk'\ (k')^2 \int d\Omega_{k'} |\tilde{U}(\boldsymbol{q})|^2 \cdot \frac{\delta(k-k')}{\hbar^2 k/m} \frac{\hbar}{m}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}').$$

Остаётся выражение

$$\frac{1}{\tau(\varepsilon)} = \frac{mkn}{4\pi^2\hbar^3} \int d\Omega_k\ |\tilde{U}(\boldsymbol{q})|^2 (1 - \hat{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{k}}'), \qquad \hat{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{k}}{k}. \tag{3}$$

Дифференциальное сечение рассеяния. Найдём выражение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 |\tilde{U}(\boldsymbol{q})|^2, \qquad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}', \quad q^2 = 4k^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

И интеграл столкновений перепишется в виде

$$\frac{1}{\tau(\varepsilon)} = nv \int \frac{d\sigma}{d\Omega}(1-\cos\theta)\, d\Omega = nv\sigma_{\text{tr}}, \tag{4}$$

где возникло новое σ_{tr} с подавленным рассеянием на малых углах.

Вспоминая формулу Друде, находим

$$\boldsymbol{j} = \sigma_D \boldsymbol{E}, \qquad \sigma_D = \frac{e^2 n_0 \tau_{\text{tr}}}{m},$$

где входит именно τ_{tr}.

Фурье-образ. Для экранированного кулоновского потенциала

$$U(r) = -e^{-r/\lambda}\frac{Ze^2}{r}, \qquad \tilde{U}(\boldsymbol{q}) = \int U(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}\, dV = \frac{4\pi Ze^2}{q^2+\lambda^{-2}}.$$

Для дифференциального сечения рассеяния находим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^2}\left(\frac{4\pi Ze^2}{q^2+\lambda^{-2}}\right)^2 = \left(\frac{Ze^2}{4E_F}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2} + (2k_F\lambda)^{-2}}\right)^2.$$

где $q = 2k_F \sin\frac{\theta}{2}$. Полное сечение рассеяния тогда получается

$$\sigma = \int d\sigma = \int_0^{\pi}\left(\frac{Ze^2}{4E_F}\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}+(2k_F\lambda)^{-2}}\right)^2 = \frac{2\pi Z^2e^4}{4E_F^2}\int_0^2 \frac{du}{(u+\frac{1}{2}(k_F\lambda)^{-2})^2},$$

где $u = 1-\cos\theta$. Итого, введя $\zeta \overset{\text{def}}{=} \frac{4}{\pi}(k_F\lambda)^2$, находим

$$\sigma = \frac{\pi Z^2 e^4}{2E_F^2}\frac{(\pi\zeta)^2/2}{1+\pi\zeta}.$$

Для транспортного σ_{tr}, находим

$$\sigma_{\text{tr}} = \frac{2\pi Z^2e^4}{4E_F^2}\int_0^2 \frac{u\, du}{(u+\frac{1}{2}(k_F\lambda)^{-2})^2} = \frac{\pi Z^2e^4}{2E_F^2}\left(\ln(1+\pi\zeta) - \frac{\pi\zeta}{1+\pi\zeta}\right).$$

Для проводимости ρ можем найти

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau_{\text{tr}}} = \frac{mnv_F}{n_0e^2}\frac{\pi Z^2e^4}{2E_F^2}\zeta^3 F(\zeta), \qquad F(\zeta) = \frac{1}{\zeta^3}\left(\ln(1+\pi\zeta) - \frac{\pi\zeta}{1+\pi\zeta}\right).$$

Итого, находим

$$\rho = Z^2 R_q a_{\text{B}} \frac{n}{n_0} F(\zeta) \cdot \left[\frac{e^2}{2\pi\hbar}\frac{me^2}{\hbar^2}\frac{p_F}{e^2}\frac{\pi e^4}{p_F^2/2m^2}\frac{64k_F^6\lambda^6}{\pi^3}\right] = Z^2 R_q a_{\text{B}}\frac{n}{n_0}F(\zeta). \tag{5}$$

где подставили $\lambda^2 = \frac{\pi a_{\text{B}}}{4k_F}$.

5 Рассеяние электронов на фононах

Эффект Иоффе-Регеля. На высоких температурах $r^2 \sim T$ для ионов, тогда

$$\tau = \frac{1}{n_{\text{ion}} v\sigma} \sim \frac{1}{T}, \qquad \rho = \frac{m}{ne^2\tau} \sim T.$$

Для $\tau v_F \sim \lambda_F$, можем записать с учётом $n \sim k_F^3$

$$\rho = \frac{mv_F}{ne^2\tau v_F} = \frac{mv_F}{ne^2\lambda_F} \sim \frac{\hbar}{k_F e^2},$$

что называется пределом Иоффе-Регеля, которые неплохо работает для легированных полупроводников.

Испускание фононов. И снова запишем столкновительный интеграл в терминах приход-уход:

$$I_p = \sum_{\boldsymbol{p}'} w_{\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'} n_{\boldsymbol{p}'}(1-n_{\boldsymbol{p}}) - \sum_{\boldsymbol{p}'} w_{\boldsymbol{p}'\boldsymbol{p}} n_{\boldsymbol{p}}(1-n_{\boldsymbol{p}'}).$$

Рассматриваем однородную ситуацию, тогда

$$\dot{\boldsymbol{p}}\frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{p}} = -e(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} = I_{\text{ст}}.$$

Учитвая что $w_q \sim q$, можем расписать

$$I_{\text{ст}} = \frac{2\pi}{\hbar V}\sum_{\boldsymbol{q}} \left(w_{\boldsymbol{q}}(1+N_{\boldsymbol{q}})n_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}}(1-n_{\boldsymbol{p}})\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} + \hbar\omega_q) + w_q N_q n_{\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{q}}(1-n_{\boldsymbol{p}})\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{q}} - \hbar\omega_q)\right) -$$
$$-\frac{2\pi}{\hbar V}\sum_{\boldsymbol{q}} \left(w_{\boldsymbol{q}}(1+N_{\boldsymbol{q}})n_q(1-n_{\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{q}})\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{q}} - \hbar\omega_q) + w_q N_q(1-n_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}})\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} + \hbar\omega_q)\right).$$

Будем считать, что фононы равновесные

$$N_q = N_q^0 = \frac{1}{e^{\hbar\omega_q/T}-1}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1+N_q}{N_q} = e^{\hbar\omega_q/T}.$$

Для электронов

$$n_p^0 = \frac{1}{e^{(\varepsilon_p-\mu)/T}+1}, \quad \Rightarrow \quad \frac{1-n_p^0}{n_p^0} = e^{(\varepsilon_p-\mu)/T}.$$

Преобразуем выражение из квадратных скобок *

$$(1+N_q)(1-n_p)(1-n_{p+\hbar q})\left(\frac{n_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}}}{1-n_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}}} - \frac{N_q}{1+N_q}\frac{n_p}{1-n_p}\right), \tag{6}$$

которое очевидно зануляется для равновесных функций.

Решение будем искать в виде

$$n_p = n_p^0 + \delta n_p = n_p^0 - \frac{\partial n_p^0}{\partial \varepsilon_p}\Phi_p = n_p^0 + \frac{n^0(\varepsilon_p)(1-n^0(\varepsilon_p))}{T}\Phi_p.$$

Возвращаясь к (6), получаем линеаризуя

$$(1+N_q)(1-n_p^0)(1-n^0_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}})\left[\frac{\delta n_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}}}{(1-n^0_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}})^2} - \frac{N_q}{1+N_q}\frac{\delta n_p}{(1-n_p^0)^2}\right] =$$
$$= +\frac{1}{T}(1+N_q)(1-n_p^0)n^0_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}}\left[\Phi_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \Phi_p\right] =$$
$$= -\frac{1}{T}(1+N_q)N_q(n^0_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - n_p^0)\left[\Phi_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \Phi_p\right].$$

Аналогично преобразуется второе слагаемое в *, откуда находим линеаризованный интеграл столкновений:

$$I_{\text{ст}}(\Phi_p) = -\frac{2\pi}{\hbar V}\sum_{\boldsymbol{q}} w_q \frac{(1+N_q)N_q(n^0_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - n_p^0)}{T}\left[\Phi_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \Phi_{\boldsymbol{p}}\right] \times \left[\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} + \hbar\omega_q) - \delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \hbar\omega_q)\right]$$

Выделим физ. смысл в слагаемых

$$I_{\text{ст}}(\Phi_p) = -\frac{2\pi}{\hbar V}\sum_{\boldsymbol{q}} w_q \frac{(1+N_q)N_q}{T}\Bigg(\left[n^0(\varepsilon_p + \hbar\omega_q) - n^0(\varepsilon_p)\right]\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} + \hbar\omega_q) -$$
$$-\left[n^0(\varepsilon_p - \hbar\omega_q) - n^0(\varepsilon_p)\right]\delta(\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \hbar\omega_q)\Bigg)\left[\Phi_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \Phi_{\boldsymbol{p}}\right].$$

Учтём, что мы живём вблизи поверхности Ферми, тогда $\hbar\omega_q$ мало по сравнению с ε_p, приходим к выражению

$$I_{\text{ст}}(\Phi_p) = -\frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon}\frac{2\pi}{\hbar V}\sum_q w_q \frac{2\hbar\omega_q(1+N_q)N_q}{T}\delta(\varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \varepsilon_{\boldsymbol{p}})\left[\Phi_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \Phi_{\boldsymbol{p}}\right].$$

Аргумент δ-функции можем расписать в виде

$$\varepsilon_p - \varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} \pm \hbar\omega_q = \frac{2p\hbar q\cos\theta}{2m} + \frac{\hbar^2 q^2}{2m} \pm \hbar c_L q = \frac{\hbar pq}{m}\left(\cos\theta + \frac{\hbar q}{2p} \pm \frac{mc_L}{p}\right),$$

где $c_L \ll v_F$, поэтому можем опустить последнее слагаемое.

Кинетическое уравнение. Итого, будем решать кинетическое уравнение на $\Phi_{\boldsymbol{p}}$ вида

$$-e(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})\frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon} = I_{\text{ст}}(\Phi_p) = -\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}\frac{2\pi}{\hbar V}\sum_q w_q \frac{2\hbar\omega_q(1+N_q)N_q}{T}\delta(\varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \varepsilon_{\boldsymbol{p}})\left[\Phi_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \Phi_{\boldsymbol{p}}\right]. \tag{7}$$

Решение аналогично будем искать в виде $\Phi_p = -e(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p)$, что соответствует τ-приближению: $I_{\text{ст}} = -\delta n_p/\tau$. Таким образом остаётся найти τ_{tr}, и найти остальные величины по формуле Друде. Выражая из двух уравнений $(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})$, находим

$$(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}) = -\frac{4\pi}{\hbar V}\sum_{\boldsymbol{q}} w_q \frac{\hbar\omega_q(1+N_q)N_q}{T}\delta(\varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}} - \varepsilon_{\boldsymbol{p}})\frac{\hbar(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{E})}{m}\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p).$$

Переходя к интегрированию, нахоим

$$(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}) = -\frac{4\pi}{\hbar}\int\frac{q^2\,dq\,d\Omega_q}{(2\pi)^3}w_q\frac{\hbar\omega_q(1+N_q)N_q}{T}\delta(\varepsilon_{\boldsymbol{p}+\hbar\boldsymbol{q}}-\varepsilon_p)\frac{\hbar(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{E})}{m}\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p).$$

Проведём интегрирование, введя полярную ось и расписав

$$\boldsymbol{q} = (q\sin\theta\cos\varphi,\, q\sin\theta\sin\varphi,\, q\cos\theta),$$
$$\boldsymbol{E} = (E\sin\theta_E\cos\varphi_E,\, E\sin\theta_E\sin\varphi_E,\, E\cos\theta_E).$$

Тогда скалярное произведение перепишется в виде

$$(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{E}) = qE\left(\cos\theta\cos\theta_E+\sin\theta\sin\theta_E\cos(\varphi-\varphi_E)\right),$$

где после интегрирование второе слагаемое зануляется. Также подставляя $(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}) = Ev\cos\theta_E$, тогда

$$\frac{p}{m\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p)} = -\frac{4\pi}{T}\int_0^{q_D}\frac{q^2\,dq\sin\theta\,d\theta}{(2\pi)^2}w_q\omega_q(1+N_q)N_q\times\delta\left(\tfrac{\hbar qp}{m}\left(\cos\theta+\tfrac{\hbar q}{2p}\right)\right)\times\frac{\hbar q}{m}\cos\theta,$$

где q_D – максимальный дебаевский импульс. Таким образом

$$\frac{1}{\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p)} = \frac{4\pi m}{Tp^2}\int_0^{q_D}\frac{q^2\,dq}{(2\pi)^2}w_q\omega_q(1+N_q)N_q\int_{-1}^{1}dx\;x\times\delta\left(x+\tfrac{\hbar q}{2p}\right),$$

где ввели $x=\cos\theta$.

Вообще $q_D = \sqrt[3]{6\pi^2 n}$, $p_F = \sqrt[3]{3\pi^2 n}$, тогда $\frac{\hbar q_D}{2p_F}<1$. Учитывая, что $w_q\propto\omega_q\propto q$, находим

$$\frac{1}{\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p)}\propto\frac{1}{T}\int_0^{q_D}q^5\,dq\;\frac{e^{\hbar\omega_q/T}}{(e^{\hbar\omega_q/T}-1)^2}.$$

Введём $z=\frac{\hbar\omega_q}{T}=\frac{T_D}{T}\frac{q}{q_D}$, где $T_D=\hbar c_L q_D$. Таким образом

$$\frac{1}{\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p)}\propto\frac{1}{T}\left(\frac{T}{T_D}\right)^6\int_0^{T_D/T}\frac{e^z z^5\,dz}{(e^z-1)^2},$$

где из-за разности скоростей возникла пятая степень вместо четвертой. Итого, искомое выражение

$$\frac{1}{\tau_{\text{tr}}(\varepsilon_p)}\propto\left(\frac{T}{T_D}\right)^5\int_0^{T_D/T}\frac{z^5\,dz}{\operatorname{sh}^2\frac{z}{2}}. \tag{8}$$

Формула Друде. Вспоминая, что

$$\sigma=\sigma_D=\frac{e^2 n\tau_{\text{tr}}}{m},$$

находим

$$\frac{\rho_{\text{e-ph}}(T)}{\rho_{\text{e-ph}}(T_D)} = \frac{\sigma_{\text{e-ph}}(T)}{\sigma_{\text{e-ph}}(T_D)} = \left(\frac{T}{T_D}\right)^5\int_0^{T_D/T}\frac{z^5\,dz}{\operatorname{sh}^2\frac{z}{2}}\Big/\int_0^1\frac{z^5\,dz}{\operatorname{sh}^2\frac{z}{2}}.$$

Для $T\ll T_D$ получится

$$\frac{\rho_{\text{e-ph}}(T)}{\rho_{\text{e-ph}}(T_D)} = 526\left(\frac{T}{T_D}\right)^5.$$

И в обратную сторону, для $T\gg T_D$, раскладываясь в ряд, находим

$$\frac{\rho_{\text{e-ph}}(T)}{\rho_{\text{e-ph}}(T_D)} = 1.06\left(\frac{T}{T_D}\right).$$

6 Электроны в магнитном поле

Запишем энергию в виде

$$\varepsilon(\boldsymbol{p}) = m^{-1}_{\alpha\beta}\frac{p_\alpha p_\beta}{2},\qquad m_{\alpha\beta}=m_{\beta\alpha}.$$

Рассмотрим анзац, вида

$$\delta f(\boldsymbol{p},t) = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}(\varepsilon)e^{-i\omega t},$$

подставляя в уравнение Больцмана, найдём

$$(\tau^{-1}+i\omega)(p_\mu A_\mu)-\frac{e}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}v_\alpha B_\beta\frac{\partial}{\partial p_\gamma}(p_\mu A_\mu) = e(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}.$$

Свёртка симметричного тензора с антисимметричным даст 0, тогда

$$(\tau^{-1}-i\omega)m_{\alpha\beta}v_\alpha A_\beta-\frac{e}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}v_\alpha B_\beta A_\gamma = ev_\alpha E_\alpha\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}.$$

Вынося v_α, можем получить выражение

$$\left((\tau^{-1} - i\omega) m_{\alpha\beta} + \frac{e}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B_\gamma\right) A_\beta - eE_\alpha \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = 0,$$

что составляет уравнение на величину $\boldsymbol{A}$.

Введём тензор

$$\Gamma_{\alpha\beta} = (\tau^{-1} - i\omega) m_{\alpha\beta} + \frac{e}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B_\gamma, \qquad \Rightarrow \qquad A_\beta = e\Gamma^{-1}_{\beta\gamma} E_\gamma \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}.$$

Таким образом нашли поправку к функции распределения

$$\delta f(\boldsymbol{p}) = e v_\alpha m_{\alpha\beta} \Gamma^{-1}_{\beta\gamma} E_\gamma \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon},$$

и, соответственно, можем найти ток

$$j_\alpha = -e \int \frac{2\, d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} v_\alpha \delta f = e^2 E_\gamma \int \frac{2(\, d^3 p)}{(2\pi\hbar)^3} v_\alpha v_\nu m_{\nu\beta} \Gamma^{-1}_{\beta\gamma} (-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}),$$

откуда можем найти тензор проводимости $j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta$:

$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{B}) = e^2 \int \frac{2\, d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} v_\alpha v_\nu m_{\nu\mu} \Gamma^{-1}_{\mu\beta} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\right) = e^2 \int \frac{2\, d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} m^{-1}_{\alpha\gamma} p_\gamma m^{-1}_{\nu\delta} P_\delta m_{\nu\mu} \Gamma^{-1}_{\mu\beta} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\right).$$

Свернув тензоры, находим

$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{B}) = e^2 m^{-1}_{\alpha\gamma} \int \frac{2\, d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} p_\gamma p_\mu \Gamma^{-1}_{\mu\beta}(\varepsilon) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\right) = \frac{2}{3} e^2 \int d\varepsilon\; g(\varepsilon)\varepsilon \cdot \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\right) \Gamma^{-1}_{\alpha\beta}(\varepsilon).$$

где $g(\varepsilon) \sim \sqrt{\varepsilon}$ – плотность состояний. Переходя к плотности электронов, находим

$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{B}) = \frac{2}{3} e^2 n \int d\varepsilon g(\varepsilon) \varepsilon \Gamma^{-1}_{\alpha\beta}(\varepsilon) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\right) = ne^2 \left\langle \Gamma^{-1}_{\alpha\beta}(\varepsilon) \right\rangle.$$

Для металла усреднение тревиально и с учётом δ-образной производной $\partial_\varepsilon f_0$ при низких температурах просто берём $\tau(\varepsilon_F)$:

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{ne^2} \left[(\tau^{-1} - i\omega) m_{\alpha\beta} + \frac{e}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} B_\gamma\right].$$

Далее считая $m_{\alpha\beta} = m\delta_{\alpha\beta}$, получим

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{m}{ne^2\tau} \begin{pmatrix} 1 - i\omega\tau & \omega_c\tau & 0 \\ -i\omega_c\tau & 1 - i\omega\tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 - i\omega\tau \end{pmatrix},$$

и для обратной матрицы $\sigma_{\alpha\beta}$, находим

$$\sigma_{\alpha\beta}(\omega,\, \boldsymbol{B}) = \frac{\sigma_D}{(1 - i\omega\tau)^2 + (\omega_c\tau)^2} \begin{pmatrix} 1 - i\omega\tau & -\omega_c\tau & 0 \\ \omega_c\tau & 1 - i\omega\tau & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-i\omega\tau)^2 + (\omega_c\tau)^2}{1 - i\omega\tau} \end{pmatrix}, \qquad \omega_c = \frac{eB}{mc}.$$

где $\sigma_D = \frac{ne^2\tau}{m}$.

Для тока можем записать

$$j_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} j_\alpha(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{B}) E_\beta(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Переходя к обратному Фурье-образу для поля, находим

$$j_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{\alpha\beta}(t - t', \boldsymbol{B}) E_\beta(t')\, dt', \qquad \sigma_{\alpha\beta}(t - t', \boldsymbol{B}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{\alpha\beta}(\omega, \boldsymbol{B}) e^{-i\omega(t-t')} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Теперь можем явно найти

$$\sigma_{zz}(t, \boldsymbol{B}) = \theta(t) \sigma_D \frac{e^{-t/\tau}}{\tau}, \qquad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_D \theta(t) \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \cos(\omega_c t), \qquad \sigma_{yx} = -\sigma_{xy} = \sigma_D \theta(t) \frac{e^{-t/\tau}}{\tau} \sin(\omega_c t),$$

где учли, что полюса подинтегрального выражения находятся в нижней полуплоскости:

$$\omega = -\frac{i}{\tau}, \qquad \omega = -\frac{i}{\tau} \pm \omega_c.$$

7 Модель диффузии Лоренца

Несохранение числа частиц. В τ-приближении:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} = -\frac{f-f_0}{\tau}, \qquad \delta n = \int \delta f\, d^3\boldsymbol{r}, \quad F(\boldsymbol{v},t) \overset{\text{def}}{=} \int d^3\boldsymbol{r}\; f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t).$$

Проинтегрируем уравнение Больцмана по координатам:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{F-F_0}{\tau},$$

Введя $\delta F(\boldsymbol{v},t) = F(\boldsymbol{v},t) - F_0(\boldsymbol{v})$, найдём

$$\delta F(\boldsymbol{v},t) = \delta F(\boldsymbol{v},0)e^{-t/\tau},$$

таким образом τ-приближение не сохраняет число частиц, релаксируя к равновесному.

Модификация. Исправим эту проблему следующим образом

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{1}{\tau}\left[-f + \int \frac{d\Omega_v}{4\pi} f\right] = \frac{1}{\tau}\left(Pf - f\right), \qquad Pf = \int \frac{d\Omega_v}{4\pi} f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t).$$

что называется моделью Лоренца, случай легкой примеси в тяжелом газе, а именно слабо-ионизированный газ. Здесь Pf – члены прихода. Электроны рассеиваются[3] на тяжелых частицах. Забавный факт – тут возникает диффузия, а ещё эта модель имеет точное решение.

Проверка. Аналогично перейдём к функции F, тогда

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{t}\left(PF(v,t) - F(\boldsymbol{v},t)\right),$$

тогда, после применения проекции P, находим

$$\frac{\partial (PF)}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\left[P^2F - PF\right] = 0, \qquad \Rightarrow \qquad PF(v,t) = \Phi(v).$$

Так находим, что

$$F(\boldsymbol{v},t) = \Phi(v) + \left[F_0(\boldsymbol{v}) - \Phi(v)\right] e^{-t/\tau}.$$

Лаплас. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} = -\frac{1}{\tau}\left(f - \langle f\rangle\right).$$

Сдлаем преобразование Фурье в пространстве и преобразование Лапласа по времени:

$$\hat{f}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt \int d^3r\; e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t).$$

вставить из фото.

Приходим к интегралу

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\; \frac{(1+s\tau) - ivk\tau x}{(i+s\tau)^2 + (vk\tau x)^2} = \frac{1}{vk\tau}\operatorname{arctg}\frac{vk\tau}{1+s\tau}.$$

Подставляем всё в $P\hat{f}$

$$P\hat{f}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},s) = \left[1 - \frac{1}{vk\tau}\operatorname{arctg}\frac{vk\tau}{1+s\tau}\right]\int \frac{d\Omega_v}{4\pi}\frac{f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},t=0)}{s + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} + \tau^{-1}},$$

находим

$$\hat{f}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},s) = \frac{\tau^{-1}}{s + i\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k} + \tau^{-1}}\left[1 - \frac{1}{vk\tau}\operatorname{arctg}\frac{vk\tau}{1+s\tau}\right]\int \frac{d\Omega_v}{4\pi}\frac{f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},t=0)}{s + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} + \tau^{-1}} + \frac{f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},t=0)}{s + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} + \tau^{-1}}.$$

Конкретизируем начальные условия:

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t=0) = \delta(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0), \qquad \Rightarrow \qquad f(\boldsymbol{k},,t=0) = \delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0).$$

Подставляя в интеграл по телесному углу, находим

$$\int \frac{d\Omega_v}{4\pi}\frac{f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},t=0)}{s + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} + \tau^{-1}} = \int \frac{d\Omega_v}{4\pi}\frac{\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0)}{s + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} + \tau^{-1}} = \frac{1}{s + i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} + \tau^{-1}}\frac{\delta(v - v_0)}{4\pi v_0^2}.$$

Диффузия. Рассматриваем время $t \gg \tau$, тогда малые $s\tau \ll 1$, и можем разложиться

$$1 - \frac{1}{vk\tau}\operatorname{arctg}\frac{vk\tau}{1+s\tau} = 1 - \frac{1}{1+s\tau} + \frac{1}{3}\frac{(vk\tau)^2}{(1+s\tau)^3} \approx s\tau + \frac{1}{3}v^2k^2\tau^2 + \ldots$$

[3] См. ЛЛХ.

Подставляя в выражение для $\hat{f}$, находим

$$\hat{f}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},s)=\left(\frac{\tau^{-1}}{s+i\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}+\tau^{-1}}\right)^2\frac{1}{s+\frac{1}{3}v^2k^2\tau^2}\frac{\delta(v-v_0)}{4\pi v_0^2}+\frac{\delta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0)}{s+i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_0)+\tau^{-1}}.$$

Смотрим большие времена и большие расстояния, тогда самое большое это τ^{-1}, и можем переписать функцию распределения $\hat{f}$ в виде

$$\hat{f}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},s)\approx\frac{1}{s+Dk^2}\frac{\delta(v-v_0)}{4\pi v_0^2},\qquad D=\frac{1}{3}v_0^2\tau.$$

Возвращаясь к обратному Фурье-образу, находим

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)=\int_{s^*-i\infty}^{s^*+i\infty}\frac{e^{st\,ds}}{2\pi i}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}\hat{f}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{v},s).$$

Считая по вычетам, находим

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)=\frac{\delta(v-v_0)}{4\pi v_0^2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk_x}{2\pi}\exp\left(-Dt(k_x-\frac{ix}{2Dt})^2-\frac{x^2}{4Dt}\right)\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk_y}{2\pi}\ldots\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dk_z}{2\pi}\ldots\right],$$

так приходим к явной диффузии

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)=\frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}}\frac{\delta(v-v_0)}{4\pi v_0^2}e^{-r^2/4Dt},\qquad D=\frac{1}{3}v_0^2\tau. \tag{9}$$

8 Электронный газ

И снова смотрим на уравнение Больцмана, ищём решение в виде $f=f_0+\delta f$, смотрим на τ-приближение, равновесным будет распределение Ферми:

$$f_0=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}+1},\qquad \mu=\mu(t,\boldsymbol{r}),\quad T=T(t,\boldsymbol{r}).$$

Будем решать уравнение рассматривая стационарный случай

$$\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial\boldsymbol{r}}-e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}=-\frac{\delta f}{\tau}.$$

Можем переписать

$$\frac{\partial f_0}{\partial\boldsymbol{r}}=\frac{\partial f_0}{\partial T}\boldsymbol{\nabla}T+\frac{\partial f_0}{\partial\mu}\boldsymbol{\nabla}\mu=-\frac{\varepsilon-\mu}{T}\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}\boldsymbol{\nabla}T-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\nabla\mu.$$

Тогда, после подстановки, левая часть уравнения может быть найдена в виде

$$\delta f=\tau\left(\frac{\varepsilon-\mu}{T}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}T)+\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\mu+e\boldsymbol{E})\right)\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}.$$

Металл. Достаточно рассмотреть $-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\approx\delta(\varepsilon-\varepsilon_F)$. Для тока $\boldsymbol{j}$ находим

$$\boldsymbol{j}=-e\int\boldsymbol{v}(f_0+\delta f)\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3}=\frac{e}{3}(\boldsymbol{\nabla}\mu+e\boldsymbol{E})\int\tau v^2\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3}+\frac{e}{3}\frac{\boldsymbol{\nabla}T}{T}\int\tau v^2(\varepsilon-\mu)\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Для плотности потока энергии $\boldsymbol{q}$

$$\boldsymbol{q}=\int\boldsymbol{v}(\varepsilon-e\varphi)(f_0+\delta f)\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3}=-\frac{\boldsymbol{j}}{e}(\mu-e\varphi)-\ldots.$$

Введём диссипативную часть $\boldsymbol{q}'$

$$\boldsymbol{q}'=\boldsymbol{q}+\frac{\boldsymbol{j}}{e}(\mu-e\varphi).$$

Также определим усреднение в виде

$$\langle F(\varepsilon)\rangle=\frac{m}{3n}\int\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3}v^2\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)F(\varepsilon)=\frac{2}{3n}\int_0^\infty\varepsilon\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)F(\varepsilon)g(\varepsilon)\,d\varepsilon,\qquad n=\int_0^\infty\varepsilon\left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right)g(\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Тогда уравнение перепишется в виде

$$\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{\nabla}\mu}{e}=\frac{m\boldsymbol{j}}{ne^2\langle\tau\rangle}-\frac{\boldsymbol{\nabla}T}{eT}\frac{\langle(\varepsilon-\mu)\tau\rangle}{\langle\tau\rangle}=\frac{\boldsymbol{j}}{\sigma}+\alpha\boldsymbol{\nabla}T.$$

Тогда для потока энергии

$$\boldsymbol{q}'=-\frac{\langle(\varepsilon-\mu)\tau\rangle}{e\langle\tau\rangle}\boldsymbol{j}+\frac{\boldsymbol{\nabla}T}{mT}\frac{n\langle(\varepsilon-\mu)\tau\rangle^2}{\langle\tau\rangle}-\frac{\boldsymbol{\nabla}T}{mT}n\langle(\varepsilon-\mu)^2\tau\rangle=\alpha T\boldsymbol{j}-\varkappa\boldsymbol{\nabla}T.$$

Где коэффициенты соответственно равны

$$\alpha = -\frac{\langle(\varepsilon-\mu)\tau\rangle}{eT\langle\tau\rangle}, \qquad \varkappa = \frac{n\langle\tau\rangle}{mT}\left[\frac{\langle(\varepsilon-\mu)^2\tau\rangle}{\langle\tau\rangle} - \frac{\langle(\varepsilon-\mu)\tau\rangle^2}{\langle\tau\rangle^2}\right], \qquad \sigma = \frac{ne^2\langle\tau\rangle}{m}. \tag{10}$$

где $\varkappa$ – коэффициент теплопроводности, α – термоэлектрический коэффициентр, σ – проводимость.

Полупроводник. Здесь можем написать, что $\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial f_0}{\partial T}$, так как $f_0 \approx e^{(\mu-\varepsilon)/T}$. Тогда усредение можем переписать в виде

$$\langle F(\varepsilon)\rangle = \frac{m}{3nT}\frac{2\,d^3p}{(2\pi\hbar)^3} f_0 v^2 F(\varepsilon).$$

Считая, что $\tau(\varepsilon) \propto v^k \propto \varepsilon^{k/2}$ и что $f_0 \propto e^{-\frac{mv^2}{2T}}$, находим

$$\langle v^k\rangle \propto \left(\frac{2T}{m}\right)^{k/2} \Gamma\left(\frac{3+k}{2}\right).$$

Так, например, для α получится

$$\alpha = \frac{1}{e}\left(\frac{\mu}{T} - \frac{\langle\tau v^2\varepsilon\rangle}{\langle\tau v^2\rangle}\right) = \frac{1}{e}\left(\frac{\mu}{T} - \frac{\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+k}{2}\right)}\right) = \frac{1}{e}\left(\frac{\mu}{T} - \frac{5+k}{2}\right).$$

9 x Уравнение Навье-Стокса

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.