

## 9 Scientific Essay: Thermalization and Localization

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

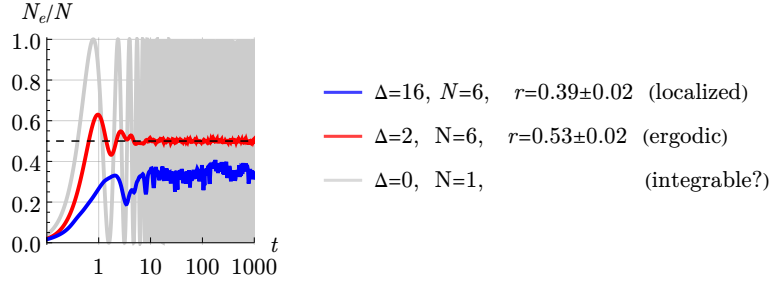


Figure 1: Пример различных сценариев поведения некоторой наблюдаемой.

### 9.1 Intro

**Model.** Эффекты термализации и локализации будем изучать на примере Hubbard model with

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} (\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + \text{h.c.}) + V \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{n}_i \hat{n}_j + \Delta \sum_j \delta_j \hat{n}_j,$$

with  $V$  – nearest neighbor interaction,  $\Delta$  – noise level,  $\delta_j \in [-1, 1]$  evenly distributed. Для получения численных результатов используется (если явно не указано иного) предел hard-bosons<sup>1</sup>. Эта система удобна тем, что можем посмотреть на различные экспериментальные реализации и в ней реализуются все интересные нам режимы.

**Термализация.** Начнём с построения некоторой интуиции про то что можно было бы назвать термализацией для изолированной квантовой системы [1]. Пусть начальное состояние задаётся  $|\psi_0\rangle$ , тогда, in the basis of energy eigenstates  $|j\rangle$ , the evolution

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} c_j e^{-i\varepsilon_j t} |E_j\rangle$$

with  $c_j = \langle E_j | \psi_0 \rangle$ ,  $\varepsilon_j = \langle j | \hat{H} | j \rangle$  and  $\mathcal{N} = \dim H$ . Для некоторой наблюдаемой  $\hat{A}(t)$  the mean value could be expressed as

$$A(t) = \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle = \sum_{j,k} \bar{c}_k c_j e^{-i(\varepsilon_j - \varepsilon_k)t} \langle k | \hat{A} | j \rangle = \sum_j |c_j|^2 \langle j | \hat{A} | j \rangle + \sum_{k \neq j} c_j \bar{c}_k e^{-i(\varepsilon_j - \varepsilon_k)t} \langle k | \hat{A} | j \rangle. \quad (1)$$

По прошествию некоторого времени термализации  $t_{\text{th}}$  хотелось бы увидеть, что наблюдаемые выходят на термальные значения (независящие от начальных условий) с небольшими флуктуациями вокруг (fig. 1, red curve)

$$A(t \gg t_{\text{th}}) = A(E) + \text{small fluctuations}, \quad E = \langle \psi_0 | \hat{H} | \psi_0 \rangle.$$

Для выхода на маленькие флуктуации вокруг среднего значения, как видим из (1), достаточно потребовать малости недиагональных элементов<sup>2</sup>. А чтобы  $A(E)$  не зависело от начальных условий может рассмотреть случай, когда diagonal elements are smooth functions of energy

$$\langle j | \hat{A} | j \rangle = A(\varepsilon_j).$$

Действительно, тогда для начального состояния лежащего в  $\Delta E$  such that the spread  $\partial_E A(E) \Delta E$  is small, the final result is

$$A(t \gg t_{\text{th}}) \approx \sum_j |c_j|^2 \langle j | \hat{A} | j \rangle \approx A(E).$$

Так и приходим к формулировке Eigenstate Thermalization Hypothesis (ETH), put forward by Deutsch [2] and Srednicki [3]: если off-diagonal terms  $\langle k | \hat{A} | j \rangle$  are small in compared to diagonal and diagonal terms are smooth

<sup>1</sup> К Гамильтониану добавили слагаемое  $+U \sum_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1)$  and took  $U \rightarrow \infty$ .

<sup>2</sup> Заметим, что диагональных слагаемых  $\mathcal{N}$  и off-diagonal  $\mathcal{N}^2 - \mathcal{N}$ . Если считать вклад каждого off-diagonal term случайным, то флуктуации может оценить, как  $\sqrt{\mathcal{N}^2} |\langle k | \hat{A} | j \rangle|$ , откуда и возникает требование малости.

functions of energy, то наблюдаемая как будто бы термализуется. Стоит сделать некоторую оговорку, что для изолированной системы чистое состояние остаётся чистым  $\text{tr} \rho^2 = 1$ , в то время как для термального состояния  $\text{tr} \rho^2 < 1$ , поэтому и говорим о термализации наблюдаемых<sup>3</sup>. Опять же, судя по условиям, как будто бы возможны системы и наблюдаемые  $A_1, A_2$  такие что  $A_1$  термализуется, а  $A_2$  нет.

Основной вывод этого раздела: иногда так бывает, что в некоторой системе и для некоторой наблюдаемой  $\hat{A}$  её значение  $A(t \gg t_{\text{th}})$  выходит на константу с небольшими флуктуациями вокруг, скорее всего этому будут соответствовать указанные ЕТН условия.

**Локализация.** Принципиально противоположным термализации будет локализация. Так бывает, что система сохраняет информацию о начальных условиях даже при  $t \rightarrow \infty$  (fig. 1, blue curve) и  $A = A(\psi_0)$ . Например мы можем разделить систему на две равные подсистемы  $\Omega_1, \Omega_2$ , заселить только  $\Omega_1$  и следить за контрастностью

$$\mathcal{I} = \frac{N_{\Omega_1} - N_{\Omega_2}}{N_{\Omega_1} + N_{\Omega_2}}.$$

Так в [4] в 1D в качестве  $\Omega_1$  выбрали чётные узлы решётки (fig. 2), а в [5] в 2D за  $\Omega_1$  взяли левую часть системы (fig. 4). Как раз для  $\mathcal{I}(t)$  уже видно заявленное термальное поведение, когда  $\mathcal{I}(t \gg t_{\text{th}}) \approx 0$ , но в какой-то момент случается переход к локализации и  $\mathcal{I}(t \gg t_{\text{th}}) \approx \text{const} > 0$ . Такое поведение характерно при добавление в систему frozen noise  $\Delta > 0$ , первые данный эффект был описан by Anderson [6].

Для одночастичной задачи было бы логичным предположить, что такое поведение возникает из-за локализации собственных функций. Действительно, в fig. 2 представлены собственные состояния гамильтониана при разных уровнях шума.

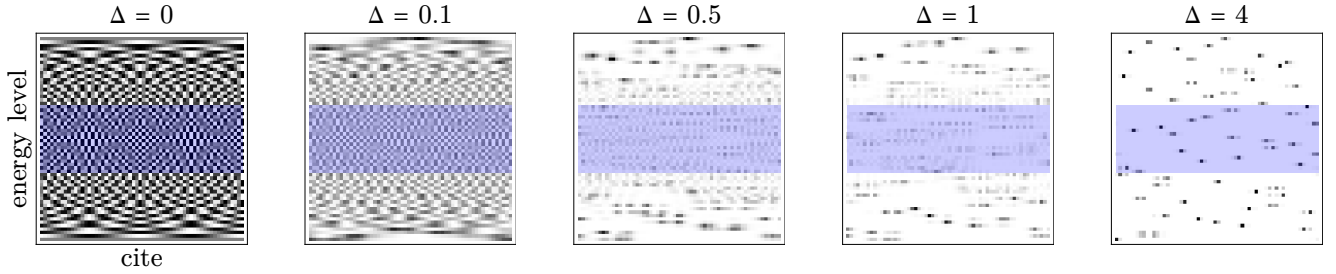


Figure 2: Eigenvectors for  $L = 60$  and  $N = 1$

<sup>3</sup>Возникает надежда, что если мы будем разобьём систему на две подсистемы  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ , то  $\rho_1 = \text{tr}_{\Omega_2} \rho$  уже действительно может оказаться термальной, а  $\Omega_2$  выступает в некотором смысле термостатом для  $\Omega_1$ . Данное предположение не получит развития в рамках этого эссе, однако автор надеется вернуться к этому вопросу позднее.

## 9.2 2D

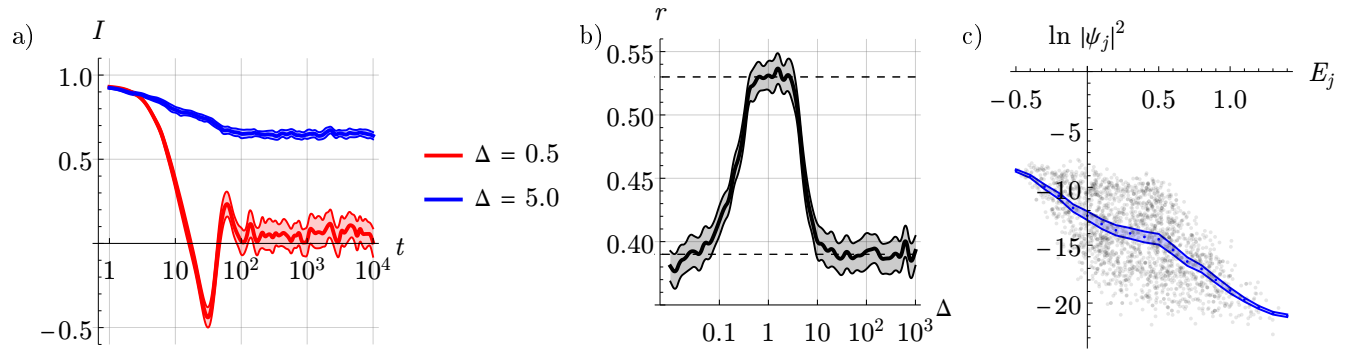


Figure 3: a) ... b) ... c) ...

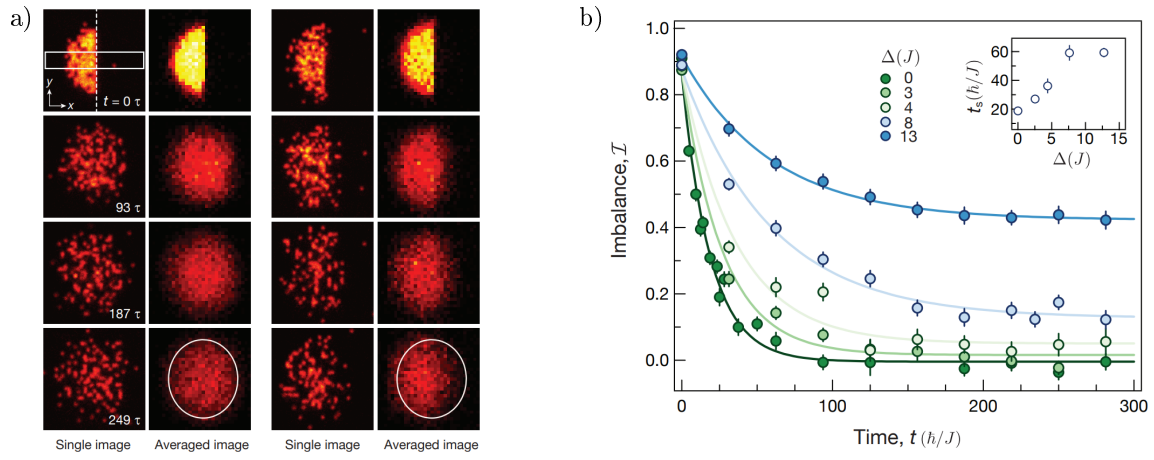


Figure 4: a) Raw fluorescence images (red to yellow corresponds to increasing detected light level) showing the evolution of the initial density step without disorder [5]. b) Relaxation dynamics of a density domain wall [5].

### 9.3 Random Matrices

- [7] – Characterization of many-body mobility edges with random matrices
- [8] – The many-body localization phase transition

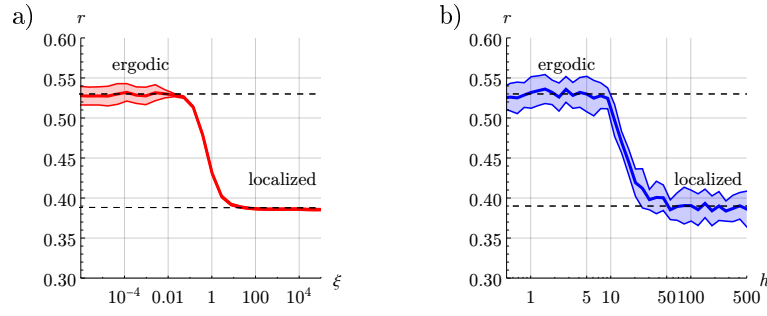


Figure 5: Phase transition with random binary matrix (red) and 1D spins / fermions (blue)

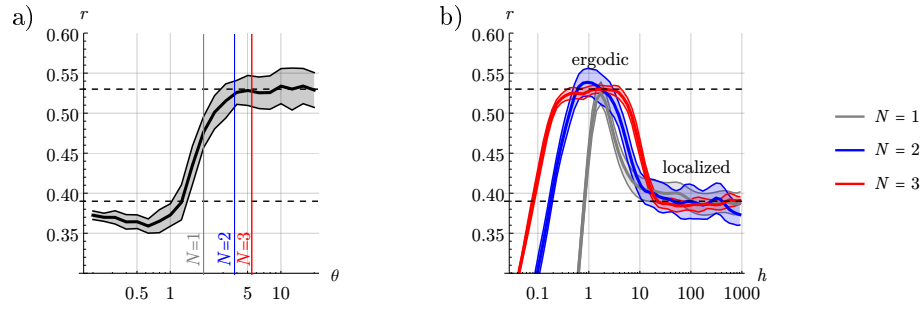


Figure 6: The influence of matrix rarefaction  $\theta$  on phase formation

## 9.4 1D

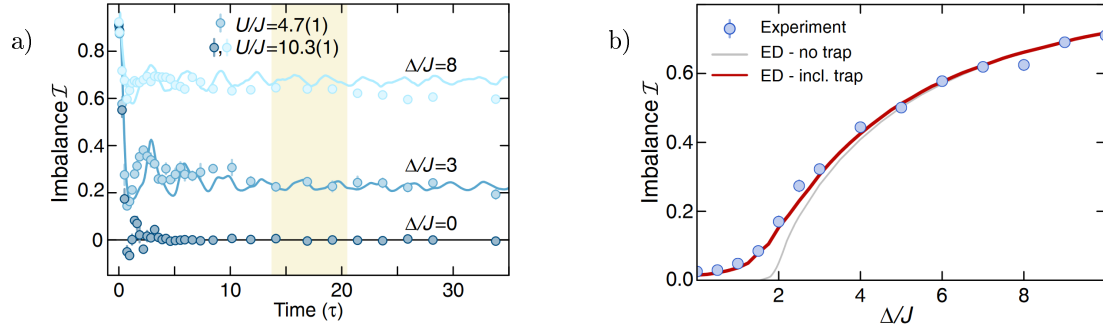


Figure 7: a) Time evolution of an initial charge-density wave [4] . b) Stationary values of the imbalance  $\mathcal{I}$  as a function of disorder  $\Delta$  for non-interacting atoms [4] .

## 9.5 Entropy growth

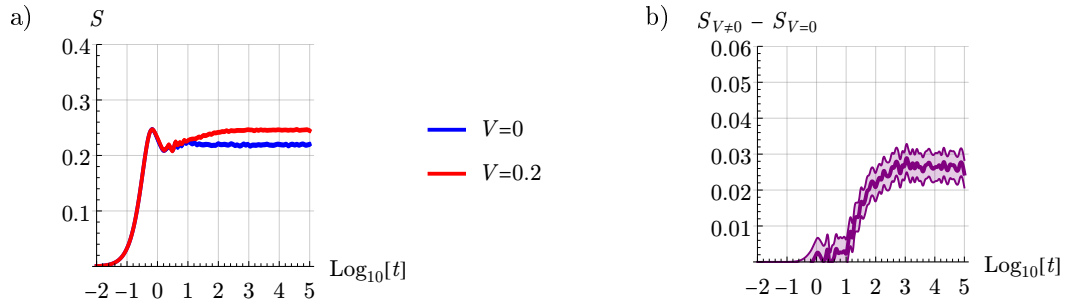


Figure 8: a) Entanglement growth. b) The same data but with subtracted values.

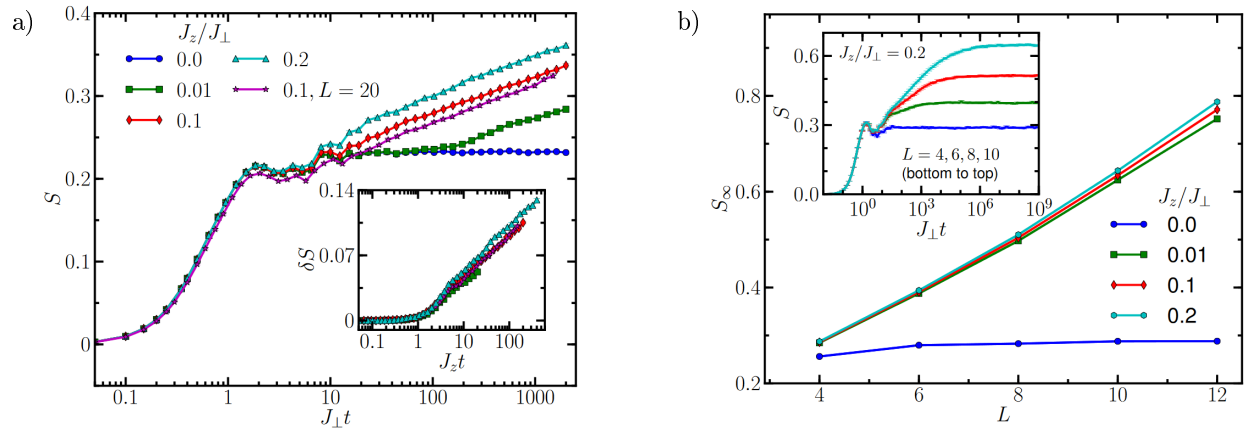


Figure 9: a) Entanglement growth [9]. b) Saturation values of the entanglement entropy as a function of  $L$  [9].

## References

- [1] Sergei Khlebnikov and Martin Kruczenski. Thermalization of isolated quantum systems, March 2014.
- [2] J. M. Deutsch. Quantum statistical mechanics in a closed system. *Phys. Rev. A*, 43:2046–2049, Feb 1991.
- [3] Mark Srednicki. Chaos and quantum thermalization. *Phys. Rev. E*, 50:888–901, Aug 1994.
- [4] Michael Schreiber, Sean S. Hodgman, Pranjal Bordia, Henrik P. Lüschen, Mark H. Fischer, Ronen Vosk, Ehud Altman, Ulrich Schneider, and Immanuel Bloch. Observation of many-body localization of interacting fermions in a quasi-random optical lattice. *Science*, 349(6250):842–845, August 2015.
- [5] Jae-yoon Choi, Sebastian Hild, Johannes Zeiher, Peter Schauß, Antonio Rubio-Abadal, Tarik Yefsah, Vedika Khemani, David A. Huse, Immanuel Bloch, and Christian Gross. Exploring the many-body localization transition in two dimensions. *Science*, 352(6293):1547–1552, June 2016.
- [6] P. W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.*, 109:1492–1505, Mar 1958.
- [7] Xingbo Wei, Rubem Mondaini, and Gao Xianlong. Characterization of many-body mobility edges with random matrices, January 2020.
- [8] Arijeet Pal and David A. Huse. The many-body localization phase transition. *Physical Review B*, 82(17):174411, November 2010.
- [9] Jens H. Bardarson, Frank Pollmann, and Joel E. Moore. Unbounded growth of entanglement in models of many-body localization. *Physical Review Letters*, 109(1):017202, July 2012.