

# Prostorová indexace.

Hilbert Curve. Z-Curve. Quad Tree. k-D Tree. R-Tree. Clustering.

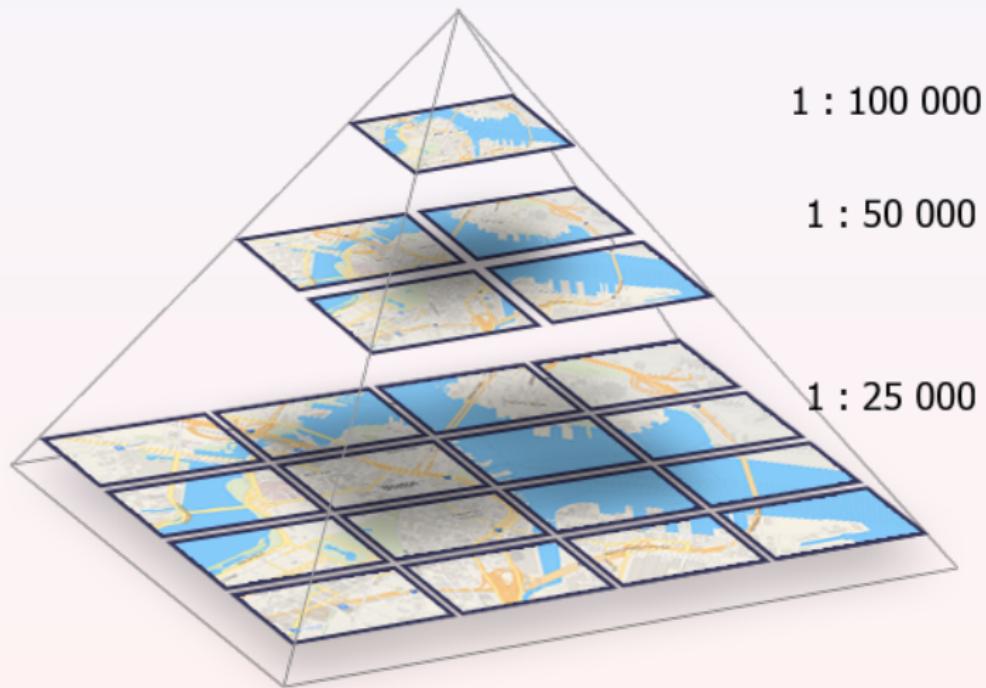
Tomáš Bayer | bayertom@fsv.cvut.cz

Katedra geomatiky, fakulta stavební ČVUT.

# 1. Motivace

Multiměřítková reprezentace kartografických dat.

Jakou dlaždici načít při posunu mapy v aktuálním zvětšení?



## 2. Prostorová data

Prostorová data reprezentují objekty na zemském povrchu.

Mají geometrickou a atributovou složku.

Prostorové dotazy: práce s podmnožinou prvků splňujících kritérium.

Využívají vzájemné prostorové vztahy mezi jednotlivými entitami.

Prostorové vazby budovány v rámci předzpracování.

Nejčastější prostorové dotazy:

- Nalezení  $k$ -nejbližších sousedů (KNN Search).
- Nalezení objektů ležících v intervalu (Interval Search).
- Nalezení objektů ležících uvnitř jiného objektu (Location Search).
- Nalezení objektů ležících v určité vzdálenosti od jiných (Distance Search).

Datové soubory rozsáhlé, efektivní implementace prostorových operací.

Prostorové dotazy lze urychlit s využitím *prostorové indexace*.

Zásadní při zpracování Big-Data.

Metody vhodné pro 0D-2D entity, lze rozšířit i pro 3D.

Topologická korektnost výstupů.

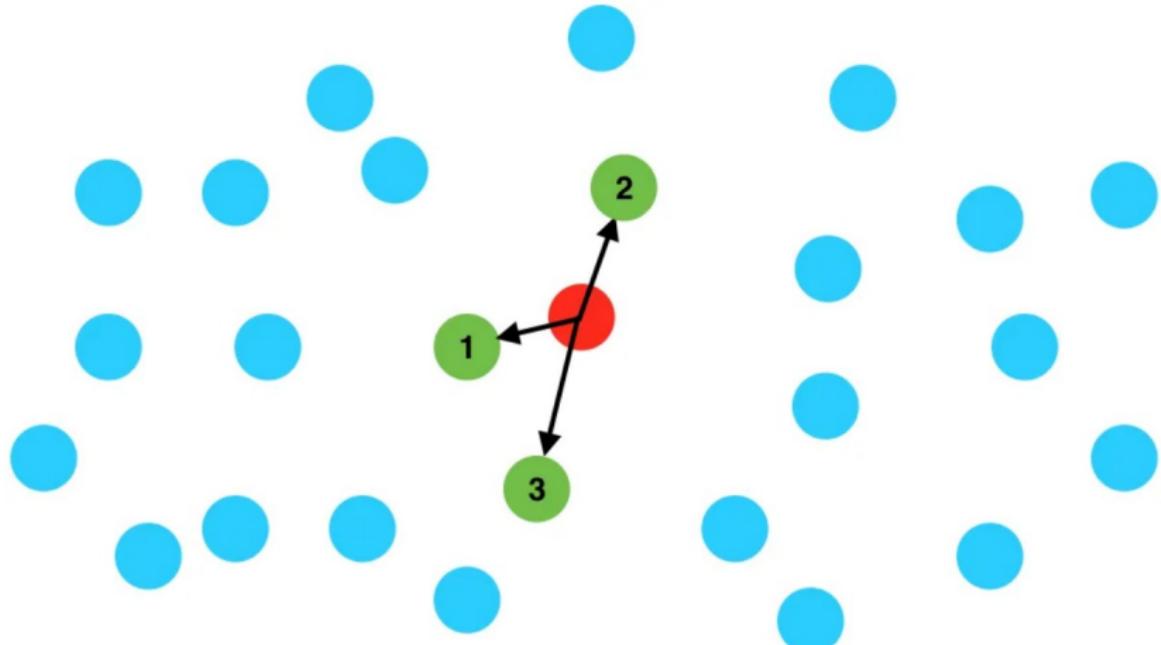
### Indexace & GIS:

Zrychlení operací s prostorovými daty, prostorové dotazy a analýzy.

Web GIS, rastrové / vektorové dlaždice, rychlé načítání dat.

Jakou dlaždici načíst v aktuálním zvětšení?

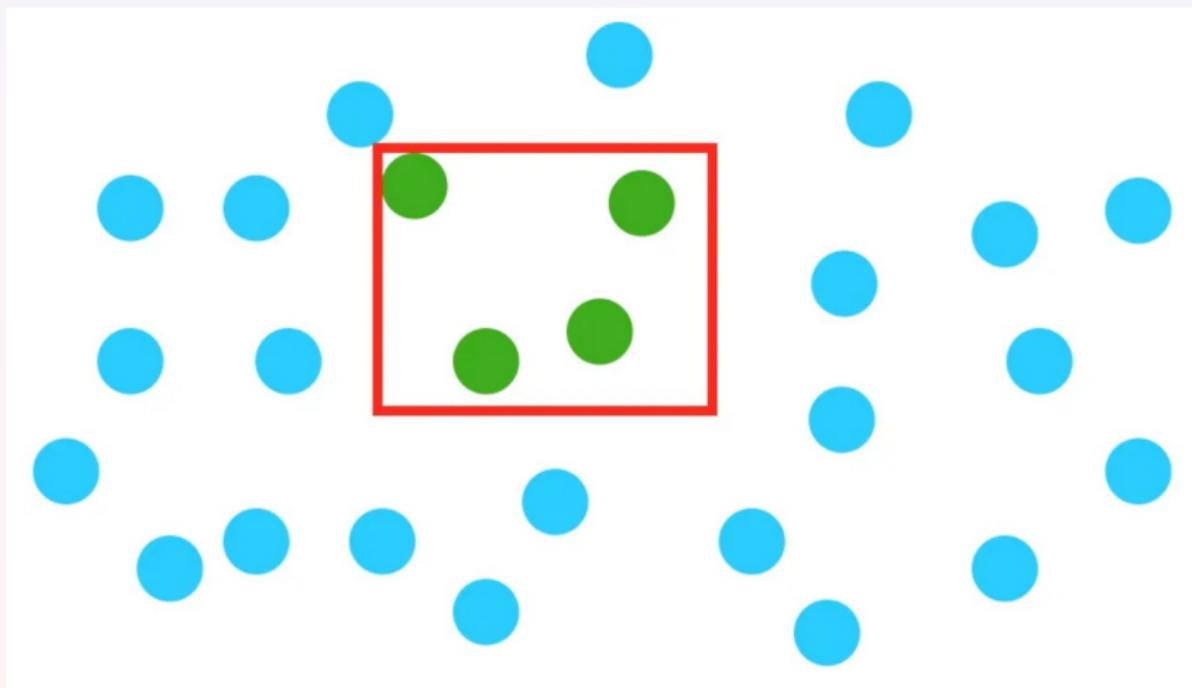
### 3. KNN Search



KNN search výpočetně drahý.

ANN (Approximate NN) search: body v dlaždicích stejným prostorovým indexem.

## 4. Interval Search



# 5. Metody prostorové indexace

Prostorová indexace založeny na transformačních metodách.

Dvě základní strategie:

## Mapování do prostoru s nižší dimenzí:

tzv. Geo-Hashing.

Zpravidla konverze na jednodimenzionální problém, výsledkem 1D prostorový index.

Využívá Space Ordering (seřazení dle hodnoty hashe).

Indexovány buňky v 2D/3D gridu.

+ Extrémně rychlá,  $O(c)$ .

- Problematické definice sousedství.

- Vznik kolizí.

Zástupci: Snake Curve, Spiral Curve, Hilbert Curve, Z-Curve.

## Dynamické dělení prostoru:

tzv. Space Partitioning.

Prostor opakovaně dělen na menší části stejné dimenze (+- pravidelné).

Části se mohou / nemusejí překrývat.

Snaha minimalizovat jejich překryt.

+ Rychlosť.

+ Částečné zachování sousedství.

Zástupci: Grid, Quad-Tree, k-D Tree, R-Tree, Hierarchical Clustering.

## 6. Geo-Hashing

Transformace úlohy na jednodimenzionální indexaci s využitím Space Ordering.

Vhodné zejména pro množiny bodových prvků.

Pro každý objekt  $p \in P$  existuje indexovací funkce  $f$

$$p.\text{addr} = f(p.\text{key}).$$

Z prostorové polohy bodu  $p = [x, y, z]$  získáme jeho *adresu*.

Adresa představována posloupností bitů (integer).

Blízké objekty mají podobnou adresu, lze je uspořádat dle polohy.

Problematika kolizí  $\Rightarrow$  redukce dimenze problému.

Dva body  $p_1 \neq p_2$  mohou mít stejnou adresu

$$p_1.\text{addr} = p_2.\text{addr}.$$

Využití Space Filling Curves:

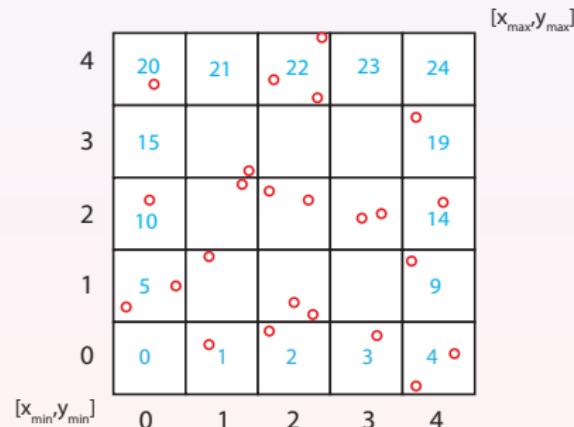
- Snake Curve.
- Spiral Curve.
- Hilbert Curve.
- Z-Curve.

## 7. Pokrytí prostoru gridem

Prostor lze pokrýt 2D / 3D gridem.

Počet buněk (buckets)  $n_b$  funkcí velikosti datasetu  $n$  a dimenze  $k$

$$n_b = n^{1/k}.$$



Řádkový a sloupcový index bodu  $p = [x, y]$

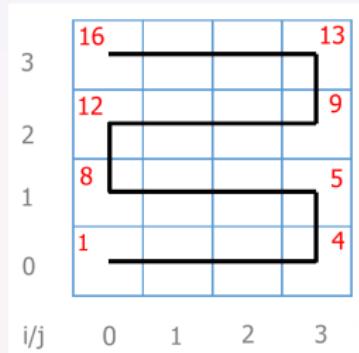
$$i = (\text{int}) \frac{y - y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}, \quad j = (\text{int}) \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}.$$

Blízké objekty leží ve stejné buňce.

## 8. Snake Curve

Jednoduchá vyplňující křivka.

Každá buňka gridu získá 1D index.



Postup po řádcích resp. sloupcích, dle  $x$  resp.  $y$  souřadnic vzestupně.

$$p.\text{addr} = \begin{cases} i \cdot n + j + 1, & i \text{ liché}, \\ (i+1)n - j, & i \text{ sudé}. \end{cases}$$

Objekty v jedné buňce → stejný index.

Alternativně lze použít i bitovou reprezentaci.

Získání adresy v  $O(c)$ .

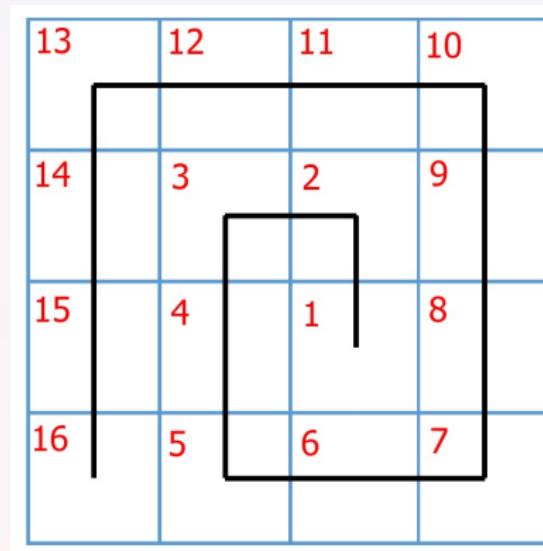
+ Jednoduchá implementace.

- Blízké objekty nemusejí mít podobnou adresu.

## 9. Spiral Curve

Jednoduchá vyplňující křivka.

Buňky uspořádány ve směru od středu k okrajům do spirály.



Preference vnitřních objektů, časté v počítačové grafice/geometrii.

Získání adresy v  $O(c)$ .

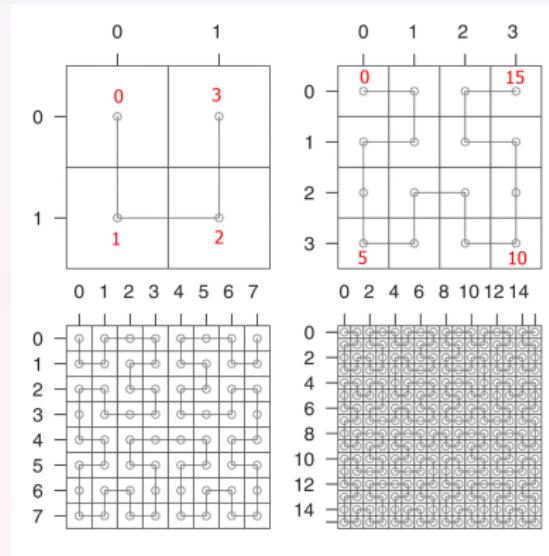
+ Jednoduchá implementace.

- Blízké objekty nemusejí mít podobnou adresu.

# 10. Hilbert Curve

Rekurzivně definovaná křivka vyplňující prostor.

Patří mezi 1D fraktály.



Posloupnost U-shaped segmentů.

- + Lépe zachovává vzdálenost.
- Složitější implementace (rekurzivní).

# 11. Indexace s využitím Hilbert Curve

Pořadová čísla buněk možno reprezentovat binárně.

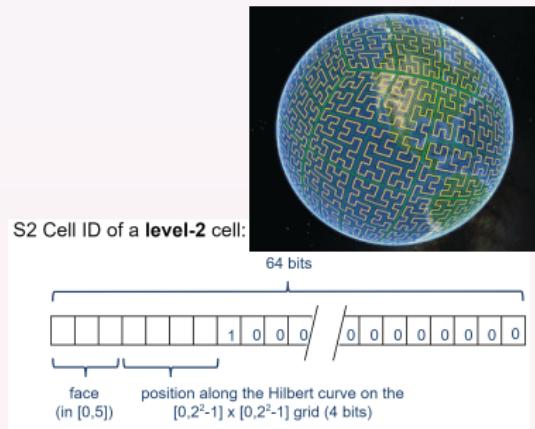
Level 1 (0-3): 00, 01, 10, 11.

Level 2: (0-15): 0000, 0001, 0010, ..., 1111.

Dvojice binárních čísel představují pozice buněk v Quad-Tree.

00	11
01	10

0000	0001	1110	1111
0011	0010	1101	1100
0100	0111	1000	1011
0101	0110	1001	1010



Prostorový index S2 (64 bitů):

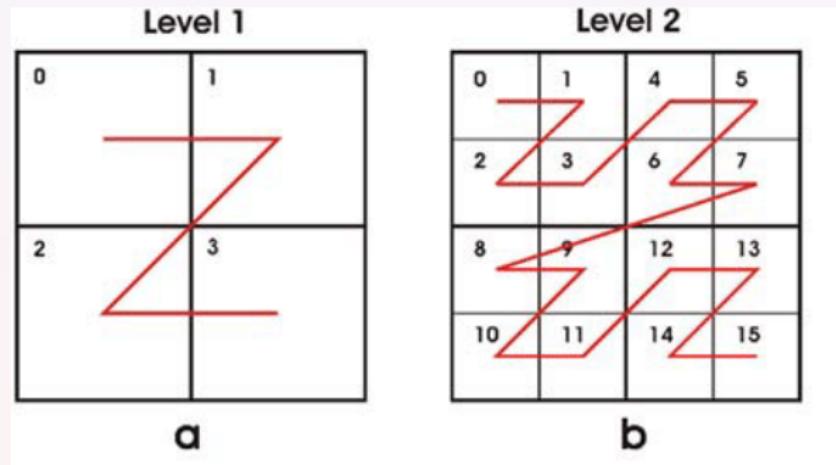
- Face ID: identifikátor na zemském povrchu.
- Pořadové číslo v Hilbertově křivce (odpovídá Level).

Indexace s využitím HC využívá např. Google.

# 12. Z-Curve

Rekurzivně definovaná křivka vyplňující prostor, 1D fraktál.

Často používána v geoinformatice (MySQL 7+).



Posloupnost Z-shaped segmentů.

- + Zachovává vzdálenost, avšak hůře než HC.
- Jednodušší implementace než HC.

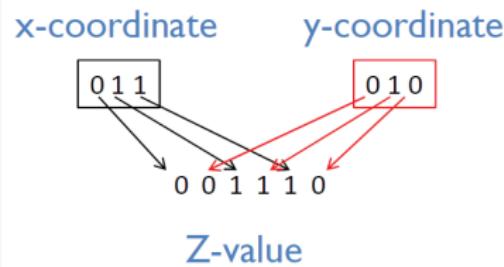
# 13. Indexace s využitím Z-Curve

Pro indexaci využívány souřadnice buněk ve směru  $x, y$  zapsané binárně:

Level 1: 0, 1.  
Level 2: 00, 01, 10, 11.

1	01	11
0	00	10
	0	1

11	0100	0111	1101	1111
10	0101	0110	1100	1110
01	0001	0011	1001	1011
00	0000	0010	1000	1010

  
| 00 | 00 | 01 | 10 | 11 |


Prostorový index:

Pozice buňky získána prolínáním bitů (Bit Interleaving).

Střídají se bity ve směru  $x$  a  $y$

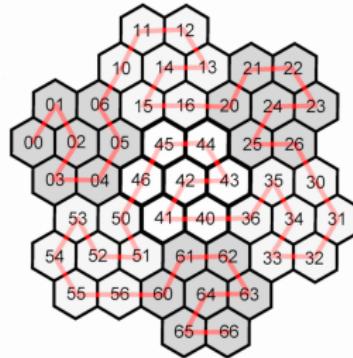
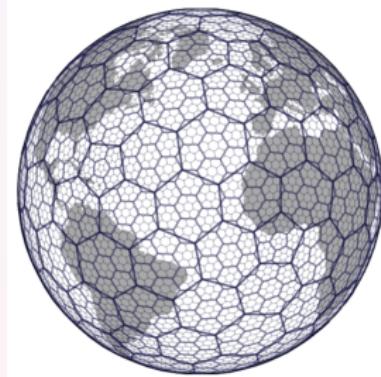
$$\begin{aligned}(0, 0) &\rightarrow (00, 00) \rightarrow 0000 = 0 \\(1, 1) &\rightarrow (01, 01) \rightarrow 0011 = 3 \\(2, 3) &\rightarrow (10, 11) \rightarrow 1101 = 13\end{aligned}$$

# 14. Hexagonal Indexation

Prostorový index, zemský povrch rozdělen do sférických šestiúhelníků.

Indexace realizována prostřednictvím Peano-Gosper Curve (Space Filling Curve).

Využito v H3 Spatial index.



## Princip indexace:

Prováděna po skupinách tvořených 7 šestiúhelníky.

Buňky ( $n = 67$ ) číslovány koeficienty  $k_i = [0, 66]$ .

Indexační funkce

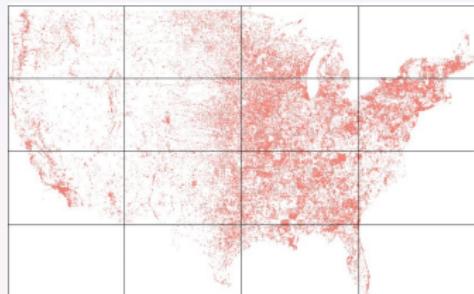
$$idx = k_1 2^{3(n-1)} + k_2 2^{3(n-2)} + \dots + k_{n-1} 2^{3(1)} + k_n 2^{3(0)}.$$

## Prostorový index:

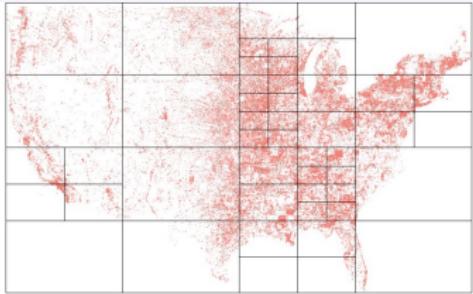
Číslo hexagonální dlaždice v rámci světa + poloha s využitím idx.

Reprezentace 64-bitovým integerem.

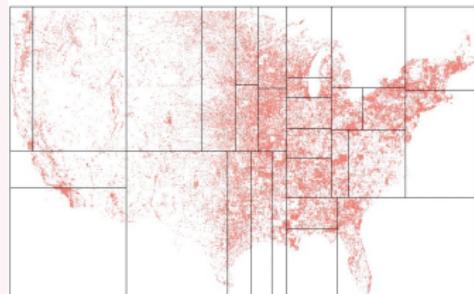
# 15. Přehled prostorových indexačních struktur



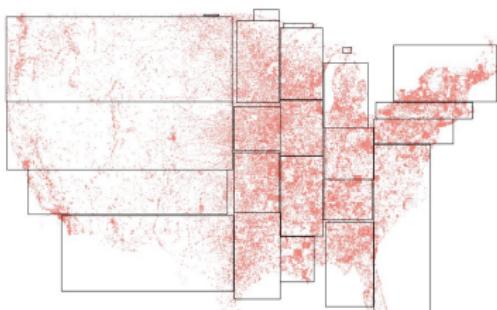
Uniform grids



Quad-Tree



KD-Tree



R-Tree

# 16. Quad-Tree

Datová reprezentující rekurzivní dělení prostoru do kvadrantů.

Každý kvadrant obsahuje nejvýše zadaný počet objektů.

Strom stupně 4, každý uzel má právě 4 potomky.

Kvadranty čtvercové nebo obdélníkové.

Lze zobecnit do prostoru dimenze 3  $\Rightarrow$  Oct-Tree (8 potomků).

Space / Data driven decomposition:

- Regional Quad-Tree: pravidelné dělení (častější).
  - Point Quad-Tree: dělící hranice závisí na vstupních bodech (v mediánu).
- + Adaptabilní dělení prostoru (zohledňuje hustotu).
- + Uchovává sousednost.
- + Lze použít pro libovolné objekty (nejen body).
- + Snadná implementace.

Nutnost předzpracování dat (vytvoření Quad-Tree,  $O(n \log n)$ ).

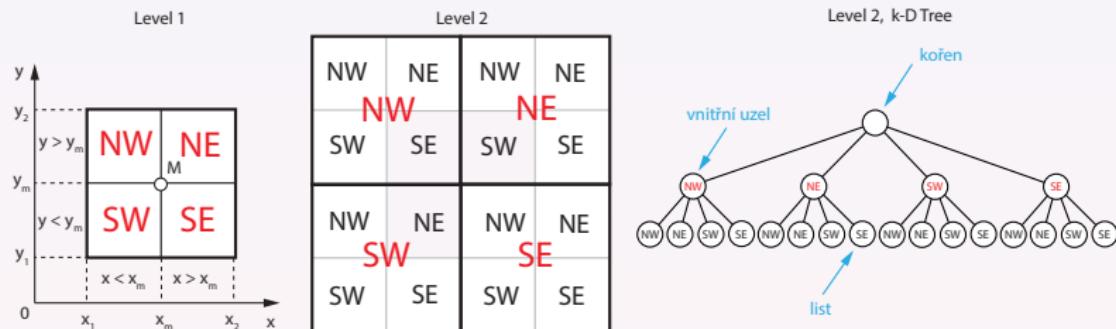
Paměťové nároky  $O(n)$ .

- Méně efektivní než ostatní stromy.
- Nevhodný pro data s proměnlivou prostorovou hustotou.
- Nejsou vyvážené.

# 17. Princip Quad-Tree

Opakované dělení prostoru do 4 kvadrantů: NW, NE, SW, SE.

Kvadrant kartézský součinem dvojice intervalů  $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ .



Souřadnice středu kvadrantu

$$x_m = (x_1 + x_2)/2, y_m = (y_1 + y_2)/2$$

Přidávaný bod  $p = [x, y]$ .

Hledáme kvadrant  $\sigma$ , ve kterém leží.

$$p \in \begin{cases} NE & x > x_m, y > y_m, \\ NW & x \leq x_m, y > y_m, \\ SW & x \leq x_m, y \leq y_m, \\ SE & x > x_m, y \leq y_m. \end{cases}$$

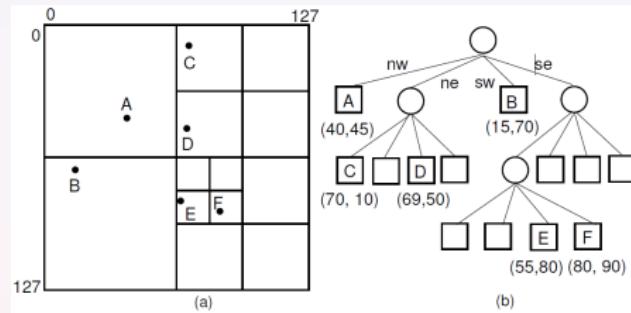
Vnitřní uzly pouze pro orientaci, data uchovávána v listech.

# 18. Quad-Tree, reprezentace

Dělení do kvadrantů prováděno opakováně.

Podmínka: kvadrant obsahuje alespoň nějaký bod.

Výsledkem adaptivní dělení prostoru.



Stromová reprezentace, 2 typy uzelů:

- interní (4 potomci),
- list: představuje kvadrant (prázdný/obsahuje body).

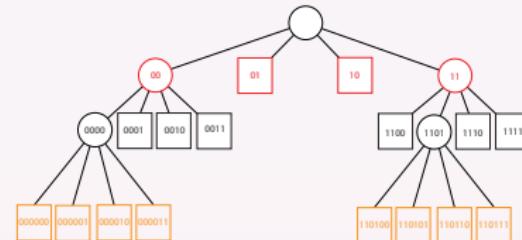
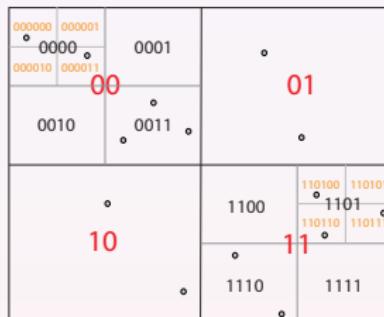
Jednoduchá implementace v Pythonu:

```
class QTNode():
    def __init__(self, xm, ym, w, h, points):
        self.xm = xm
        self.ym = ym
        self.width = w
        self.height = h
        self.points = points
        self.children = []
```

# 19. Quad-Tree, prostorová indexace

Dvě základní metody indexace:

- Využití Quad-Tree indexu (analogie s HC).
- Využití Space Filling Curves (viz Z-Curve, efektivnější).



## Quad-Tree index:

Pořadová čísla kvadrantů (identifikátory) možno reprezentovat binárně.

Level 1 (0-3): 00, 01, 10, 11.

Level 2 (0-3): 00, 01, 10, 11.

Index kvadrantu: kombinace identifikátorů kvadrantů z úrovní Level 1 až Level k.

Level 1 + Level 2: 0000-0011, 0100-0111, 0100-0111, 1100-1111.

- Pro vysoké stromy Quad-Tree indexy dlouhé.

Využití: databázové systémy Oracle, MySQL.

# 20. k-D Tree

Nejčastěji používaná struktura pro prostorovou indexaci.

Dělení střídavě probíhá v  $k$  směrech.

Reprezentace stromem stupně  $k$ , každý uzel má právě  $k$  potomků.

2D varianta: střídá se dělení ve směru  $x, y$ , strom stupně 2.

Dělící nadrovina prochází mediánem množiny.

Výsledkem obdélníkové oblasti, každá obsahuje nejvíše zadaný počet objektů.

Konkrétní tvar závislý na vstupním datasetu.

Efektivnější dělení než Quad-Tree.

Nutnost předzpracování dat (vytvoření k-D Tree,  $O(n \log n)$ ).

Paměťové nároky  $O(n)$ .

- + Nejpoužívanější prostorová indexační struktura.
- + Schopnost adaptace na proměnnou prostorovou hustotu množin.
- + Vysoká efektivita zejména pro malá  $k$ .
- Výpočetně složitější konstrukce.
- Nejsou vyvážené.

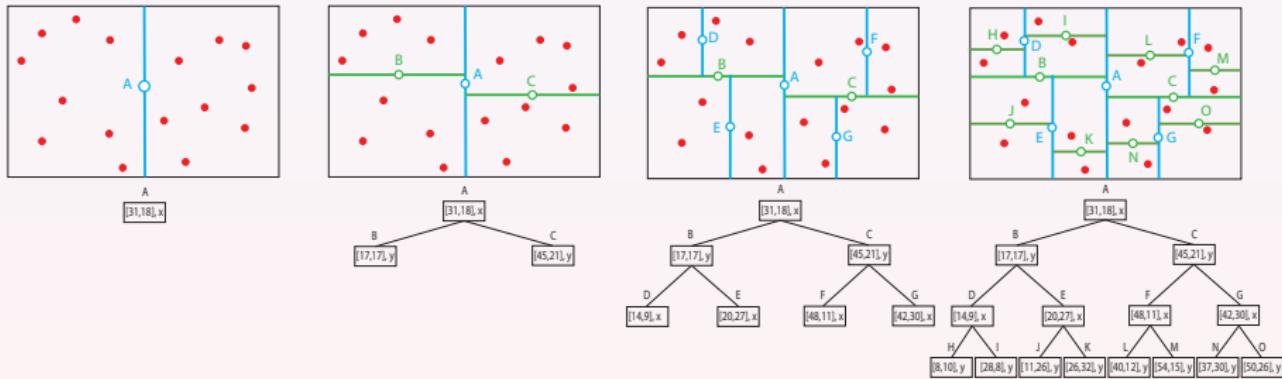
# 21. Princip k-D Tree

Modifikace Binary Search Trees, podpora multidimenzionálních klíčů.

Vnitřní uzly pouze pro orientaci, data uchovávána v listech.

**Discriminator  $\delta$ :** Pomocný klíč, ukládá informaci o tom, ve kterém směru dělení probíhá

$$\delta = i\%k, \quad i = 0, \dots, k - 1.$$



**Dvoudimenzionální strom ( $k = 2, \delta = 0, 1$ ):**

Oblast  $\sigma$  k-D Tree obdélníková, dělena na levou část  $\sigma_l$  a pravou část  $\sigma_r$ .

Určen medián  $M$  souřadnic všech bodů  $\sigma$ .

Dělící nadrovina prochází  $M$ , pro  $\delta = 0$  resp.  $\delta = 1$  rovnoběžná s osou  $y$  resp.  $x$ .

Body v  $\sigma_l$  resp. v  $\sigma_r$  vlevo resp. vpravo od  $M$  vzhledem k  $x$  resp.  $y$ .

**Třidimenzionální strom ( $k = 3, \delta = 0, 1, 2$ ):**

3D varianta stromu důležitá při práci s bodovými mračny.

## 22. Implementace k-D Tree

Implementace uzlu v programovacím jazyce Python:

```
class KDNode:
    def __init__(self, discr, med, points):
        self.discriminatory = discr
        self.median = med
        self.left = None
        self.right = None
        self.points = points
```

**Konstrukce k-D Tree nad  $P$  (2D):**

Max. počet bodů  $n_{max}$  v  $\sigma$ ,  $k = 2$ .

1] Pokud  $\|P\| < n_{max}$ , ukonči proceduru.

2] Urči discriminator  $\delta = i\%k$ .

3] Spočti medián

$$\delta = 0 : x_m = \text{med}(x_i), \quad \delta = 1 : y_m = \text{med}(y_i).$$

4] Rozděl  $P$  na  $P_l$  a  $P_r$ , pro každý  $p = [x, y]$

$$P_l = \{p, \delta = 0 \wedge x < x_m \vee \delta = 1 \wedge x < y_m\}, \quad P_r = \{p, \delta = 0 \wedge x > x_m \vee \delta = 1 \wedge x > y_m\}.$$

Podmnožina  $P_l$  levým podstromem  $P$ , podmnožina  $P_r$  pravým podstromem  $P$ .

5] Inkrementuj  $i = i + 1$ .

6] Opakuj rekurzivně 1-6 nad  $P_l$  a  $P_r$ .

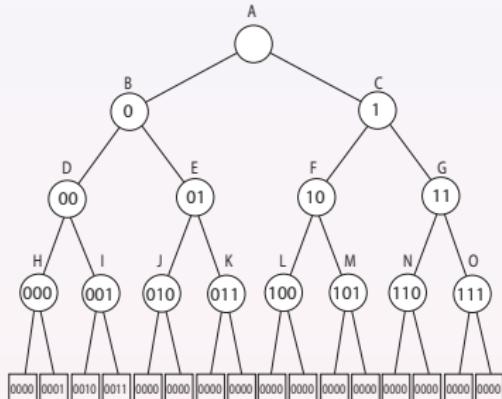
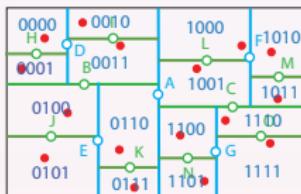
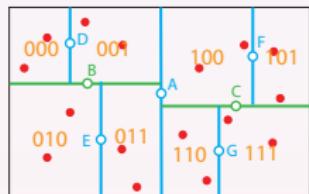
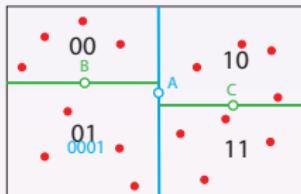
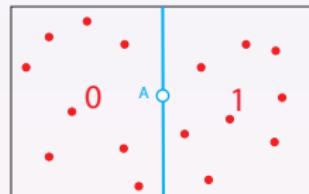
**Hledání oblasti  $\sigma$  obsahující  $p$ :**

Procházení k-D Tree od kořenu k listů.

Dle hodnot  $x$  resp.  $y$  přecházíme do levého resp. pravého podstromu.

## 23. k-D Tree, prostorová indexace

Podobný princip jako u Quad-Tree, využívá binárního indexu



### k-D Tree index:

Identifikátory kvadrantů v binárním tvaru:

Level 1: 0, 1.

Level 2: 00, 01, 10, 11.

Index kvadrantu: kombinace identifikátorů kvadrantů z úrovní Level 1 až Level k.

Level 1 + Level 2: 00, 01, 10, 11.

Level 1 + Level 2 + Level 3: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

Velmi používaný prostorový index.

- Pro vysoké stromy k-D-Tree indexy dlouhé.

# 24. R-Tree

Nejčastěji používaná struktura pro indexaci prostorových dat.

Jiná koncepce, oblasti  $\sigma$  nejsou disjunktní (mohou se vzájemně překrývat, avšak jen málo).

Objekty, které jsou vzájemně blízké, jsou seskupeny do uzlů.

Lze použít pro libovolné entity, generalizace do vyšších dimenzí.

Objekty uchovávány v listech, vnitřní uzly pro orientaci.

Jsou vyvážené (na rozdíl od předchozích), nižší výška stromu.

Výška nezávisí na vstupních datech.

Vnitřní uzly reprezentovány min-max boxy.

Několik praktických problémů:

- Vnitřní uzly se by měly co nejméně překrývat.
- Neměly by obsahovat příliš volného místa.
- Blízké objekty by měly ležet v blízkých vnitřních uzlech.

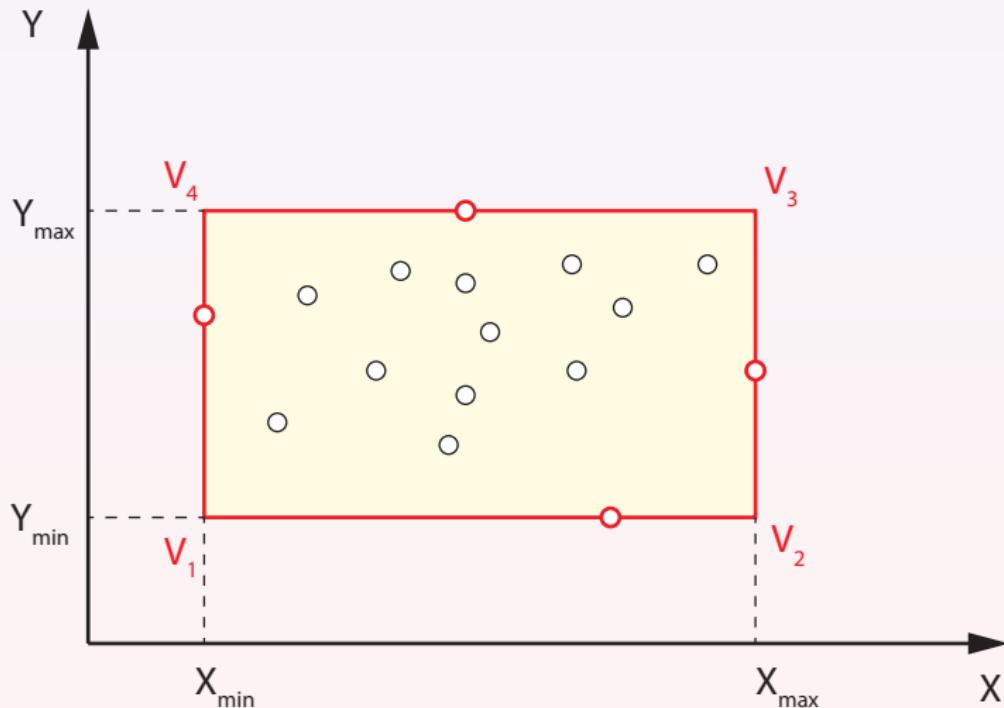
+ Výborné výkonné parametry: NN Search.

- Horší parametry: Interval Search.

- Objekt se může nacházet ve více uzlech (překrývají se).

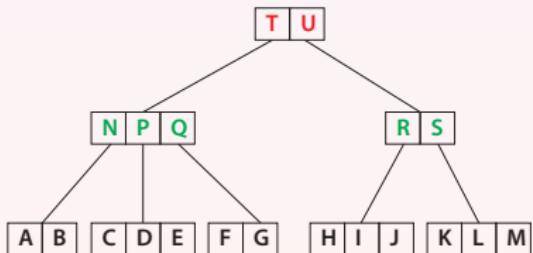
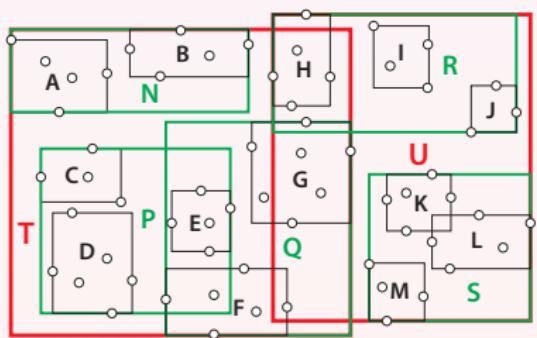
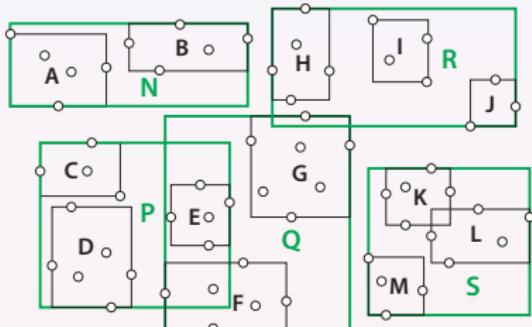
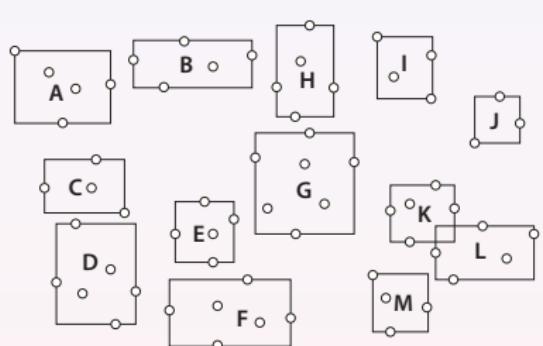
- Obtížnější implementace.

## 25. Min-max box



# 26. Princip konstrukce R-Tree

Hierarchická dekompozice scény zdola nahoru.



## 27. Vlastnosti R– Tree

Délkově vyvážený strom.

Uzel má nejvíše  $k$  potomků (počet proměnlivý).

Interní uzly obsahují min-max boxy.

Seznam objektů (0D-3D) uchováván v listech.

Každý uzel obsahuje  $[m, M]$  prvků,  $M$  maximální počet objektů uvnitř min-max boxu

$$m \leq \frac{M}{2}.$$

Výška R-Tree s  $n$  záznamy (nezávisí na struktuře vstupních dat)

$$h \leq \log_m n.$$

Implementace třídy R-Tree Node:

```
class RNode:  
    def __init__(self, left, right, children = None, data = None):  
        self.low_left = rect  
        self.high_right = rect  
        self.children = children  
        self.data = data
```

Efektivní struktura pro **Range Search**.

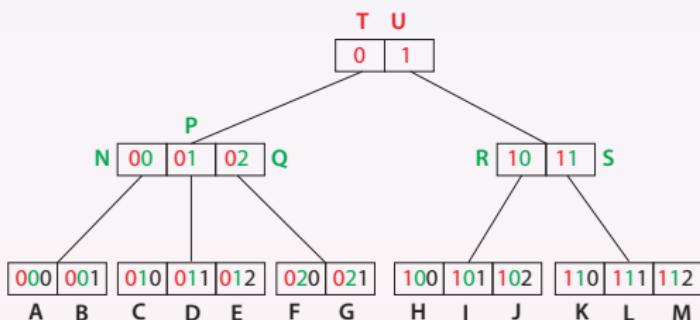
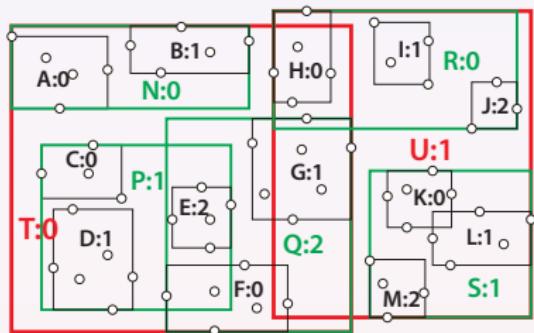
Vyhledání všech objektů min-max boxů kolidujících se vstupním obdélníkem.

R-Tree procházen od kořene, hledáme kolidující min-max boxy.

V každém listu vybereme objekty uvnitř obdélníku, výsledek může ležet v různých podstromech.

# 28. Prostorová indexace s R-Tree

Využívá celočíselného indexu min-max boxů



## R-Tree index:

Identifikátory min-max boxů v celočíselném tvaru:

Level 1: 0, 1, ..., k<sub>1</sub>.

Level 2: 0, 1, ..., k<sub>2</sub>.

Index kvadrantu: kombinace identifikátorů min-max boxů od úrovně 1:

Level 1 + Level 2: 0.0, 0.1, 0.2, 1.0, 11.

Level 1 + Level 2 + Level 3: 0.0.0, 0.0.1, 0.1.0, 0.1.1, 0.1.2, 0.2.0, ...

Velmi používaný prostorový index (PostGIS, Oracle).

Efektivní pro prostorové operace.

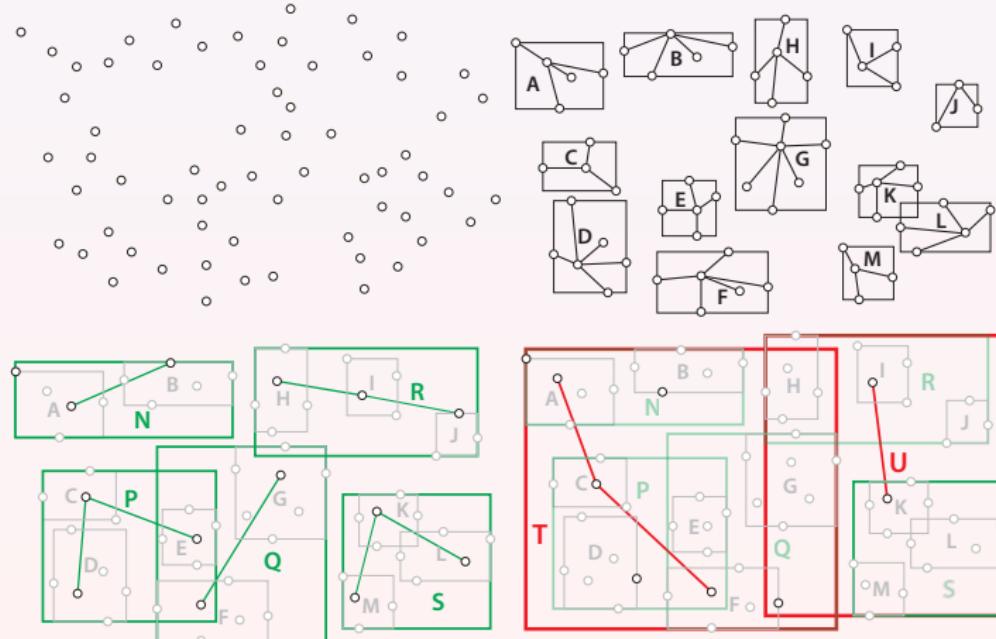
## 29. Hierarchická dekompozice vstupních dat

Specializované metoda, využívají pokročilé heuristiky.

Minimalizace překrytů a hluchých míst.

Netriviální implementace.

Alternativně, hierarchická clusterizace: opakování clusterizace datasetu.

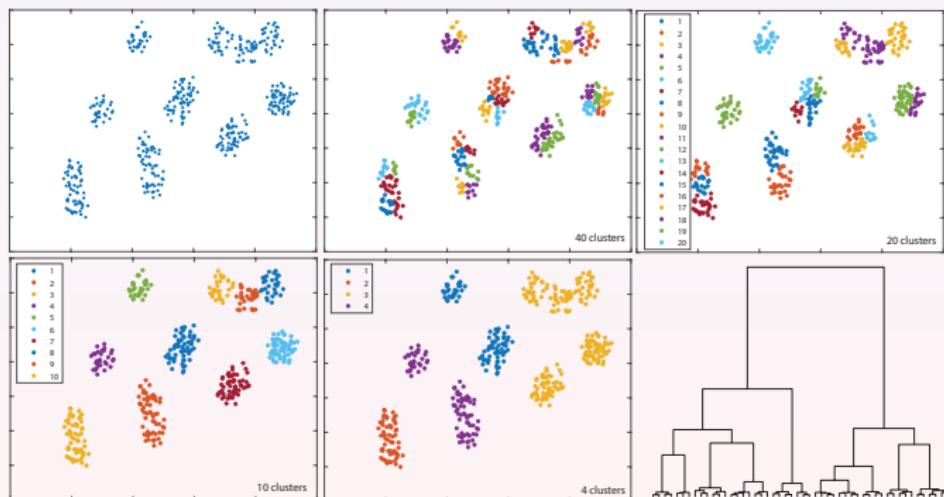


# 30. Hierarchická clusterizace

Shlukování blízkých objektů na základě geometrických parametrů do clusterů.

Každý cluster má centroid.

Clusterizace dle různých metrik / pseudometrik, nejčastěji používána  $L_2$  norma.



## Hierarchická clusterizace:

Opakování postupu v několika iteracích.

V následujícím kroku clusterizovány centroidy shluků.

Hierarchie clusterizace znázorněna dendrogramem.

+ Efektivní metoda, adaptivní vzhledem ke vstupním datům.

- Konstrukce clusterizace časově náročná.

# 31. Prostorová indexace, hierarchická clusterizace

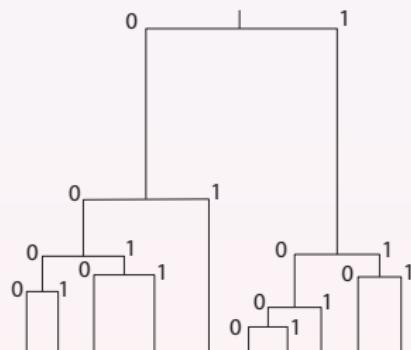
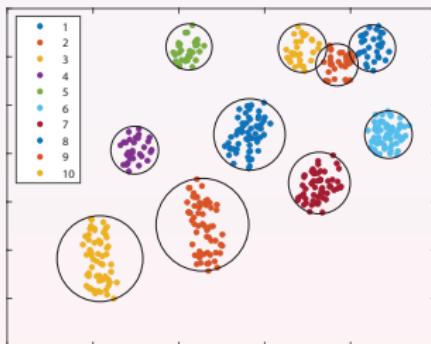
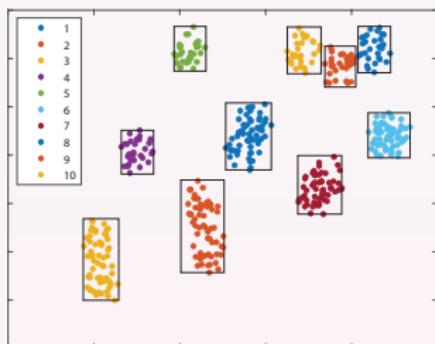
Dendrogram strom stupně 2 (binární).

Využívá binárního indexu.

Oblasti vymezené clustery nekonvexní.

Aproximace min-max boxy nebo kružnicemi, částečně se překrývají.

Indexovaný bod padne do nejbližšího min-max boxu, kružnice.



## Spatial index:

Identifikátory clusterů v binárním tvaru:

Level 1: 0, 1.

Level 2: 0, 1.

Index clusteru: kombinace identifikátorů kvadrantů z úrovní Level 1 až Level k.

Level 1 + Level 2: 0, 1

Level 2 + Level 3: 00, 01, 10, 11

Level 1 + Level 2 + Level 3: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

Varianta s min-max boxy využívá R-Tree.

## 32. Porovnání metod prostorové indexace

Index Type	Data Structure	Best For	Efficiency	Supported Data Types	Main Advantages
R-tree	Hierarchical (Tree-based)	Datasets with varying object sizes, shapes, and dimensions	Good	Points, Lines, Polygons	Good for overlapping regions, adaptable, handles various data types
Quadtree	Hierarchical (Tree-based)	2D datasets with varying density, adaptability to Octree for 3D	Good	Points, Polygons	Space partitioning, efficient for sparse datasets
Geohash	Grid-based (string)	Approximate nearest-neighbor queries, simple grid indexing	Moderate	Points	Easy to implement, compact representation
KD-tree	Binary tree	Point data in multi-dimensional spaces	High	Points	Efficient for point data, handles high-dimensional data

### 33. Aplikace prostorové indexace

Bing Maps Tile System: aplikace Quad Tree.

