Cahn–Hilliard 方程式の数値解析の関連論文

香川渓一郎

2020 年 5 月 26 日

目次

1 Cherfils, Petcu, Pierre (2010) day:200526

1.1 論文情報

Cherfils, Laurence, Madalina Petcu, and Morgan Pierre. "A numerical analysis of the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions." Discrete Contin. Dyn. Syst 27.4 (2010): 1511-1533.

1.2 何に関する論文で何を示したのか

動的境界条件下における Cahn–Hilliard 方程式の有限要素空間半離散化を考える．考える問題は次の通り

$$
\begin{aligned}
u_t &= \Delta w, \quad t > 0, x \in \Omega \\
w &= f(u) - \Delta u, \quad t > 0, x \in \Omega \\
(1/\Gamma_s)\, u_t &= \sigma_s \Delta_{\|} u - \lambda_s u - g_s(u) - \partial_n u, \quad t > 0, x \in \Gamma \\
\partial_n w &= 0, \quad t > 0, x \in \Gamma
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

内部で Cahn–Hilliard 方程式を満たし，境界では Allen–Cahn 方程式を満たす．ここに空間領域は 2, 3 次元の平板とする．即ち

$$
\Omega = \Pi_{i=1}^{d-1} \left(\mathbb{R}/\left(L_i \mathbb{Z}\right)\right) \times (0, L_d), \quad L_i > 0, i = 1, \ldots, d, \quad d = 2 \text{ or } 3. \tag{1.2}
$$

1, 2 次元方向には周期境界条件を課す．解に十分な正則性があると仮定して，エネルギーノルムと弱いノルムで最適な誤差評価を示す．解の正則性が低い場合には弱位相で収束することを示す．また時間離散化のための後方オイラースキームに基づく完全離散問題の安定性を示す．いくつかの数値計算結果は本手法の適用性を示すものである．

1.3 先行研究と比べてスゴイこと

動的境界条件は二元混合系における相分離現象での境界の影響を記述したプロトタイプモデルである．この動的境界条件のモデルは閉じた系での相分離現象のモデルとして Fischer, Maass, Dieterich (1997) [3], Fixcher, Maass, Dieterich (1998) [2], Kenzler, et al. (2001) [5] によって考えられている．これらでは有限差分の枠組みを用いた数値的なスキームが検討されている．本論文では新たな離散化のための有限要素法を提案して解析する．Elliott, French, Milner (1989) [1] によって提案された，標準的な Cahn–Hilliard 方程式に対して提案された分割スキームを拡張した，空間半離散スキームを提案する．（同様の分割スキームは他の Cahn–Hilliard 方程式に対しても拡張されている．）

1.4 論文の核となるモノ

本論文の主定理である定理 3.3 では空間分割幅 h が 0 に近づくときのエネルギーノルムと弱位相でのノルムの差の最適誤差評価を述べている．

1.5 どのような手法で示したのか

定理 3.3 の証明の概要は放物型問題の標準的な手法を用いたが，ここではいくつかの評価がより複雑になる．時間離散化には後方オイラースキームを用いた完全離散スキームを提案している．完全離散スキームの解はメッシュ依存性がなく安定であり，分割数無限大の極限で平衡に収束することを示した．最後に半陰解法に基づく 2 次元空間での FreeFem++ ソフトウェアによる数値シミュレーションを示す．この問題に有限要素法を適用することは理論的，実用的に興味深い．

1.6 今後の展望や課題

1.7 この論文を引用している論文

1.8 この論文が引用している主要な先行研究

2 Cherfils, Petcu (2014) day:200526

2.1 論文情報

Cherfils, Laurence, and Madalina Petcu. "A numerical analysis of the Cahn–Hilliard equation with non-permeable walls." Numerische Mathematik 128.3 (2014): 517-549.

2.2 何に関する論文で何を示したのか

非透水性壁を持つ有界領域における Cahn–Hilliard 方程式の数値解析を行った．ここでの動的境界条件は Goldstein, Miranville, Schimperna (2011) [4] によって考案された次の GMS 型動的境界条件を考察する．考える空間領域は１方向に有限の厚さを持ち残りの１，２次元方向には周期性を課す．

$$\Omega = \Pi_{i=1}^{d-1} \left(\mathbb{R}/\left(L_i\mathbb{Z}\right)\right) \times (0, L_d), \quad L_i > 0, i = 1, \dots, d, \quad d = 2 \text{ or } 3 \tag{2.1}$$

この動的境界条件は二元物質と壁との相互作用を記述するために導入されたものである．この方程式の数値解析を行うには，空間変数に対して有限要素法を用いて半離散化され厳密解と近似解との誤差評価を得る．また時間離散化のための後方オイラースキームに基づく完全離散スキームの安定性を示した．理論的な結果を支持するための数値シミュレーションを行った．

2.3 先行研究と比べてスゴイこと

2.4 論文の核となるモノ

2.5 どのような手法で示したのか

2.6 今後の展望や課題

2.7 この論文を引用している論文

2.8 この論文が引用している主要な先行研究

参考文献

[1] C. M. Elliott, D. A. French, and F. A. Milner. A second order splitting method for the Cahn-Hilliard equation. *Numerische Mathematik*, Vol. 54, No. 5, pp. 575–590, 1989.

[2] H. P. Fischer, P. Maass, and W. Dieterich. Diverging time and length scales of spinodal decomposition modes in thin films. *Europhysics Letters*, Vol. 42, No. 1, pp. 49–54, 1998.

[3] Hans Peter Fischer, Philipp Maass, and Wolfgang Dieterich. Novel surface modes in spinodal decomposition. *Physical Review Letters*, Vol. 79, No. 5, pp. 893–896, 1997.

[4] Gisle Ruiz Goldstein, Alain Miranville, and Giulio Schimperna. A Cahn-Hilliard model in a domain with non-permeable walls. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 240, No. 8, pp. 754–766, 2011.

[5] R. Kenzler, F. Eurich, P. Maass, B. Rinn, J. Schropp, E. Bohl, and W. Dieterich. Phase separation in confined geometries: Solving the Cahn-Hilliard equation with generic boundary conditions. *Computer Physics Communications*, Vol. 133, No. 2-3, pp. 139–157, 2001.