14 章 1〜6 節（ロジスティック写像）の実行結果のまとめ

香川渓一郎

2020 年 5 月 22 日

目次

1　14-1_logistic.py のコード

Landau, et al. 『計算物理学 II』朝倉書店． 14 章 p.338(1–6), p.340(1–2) の演習を次のプログラム 14-1_logistic.py で行う．

ソースコード 1　14-1_logistic.py

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
14-1_logistic.py プログラム
Landau, et al.『計算物理学II』朝倉書店．14 章 p.338の演習
(無次元化された)ロジスティック方程式のシミュレーション
使い方 14-1_logistic.py
"""

import matplotlib.pyplot as plt
import japanize_matplotlib # 日本語表示に対応

N = 100 # 世代数

# 初期設定
x = float(input("初期値x0 を入力してください:"))
mu = float(input("増加率μの値を入力してください:"))
x0 = x # 初期値を保存

# グラフ描画用変数
xlist = [0]
ylist = [x]

"""logistic 方程式の計算"""
```

```
for i in range(1, N):
    x = mu * x * (1 - x)
    # 随時グラフ描画用変数に代入
    xlist.append(i)
    ylist.append(x)

# グラフの表示
fig = plt.figure() # グラフの描画先の準備
plt.title('初期値x0=%1.4f, 増加率μ=%1.4f' %(x0, mu))
plt.plot(xlist, ylist)
plt.xlabel('世代数')
plt.ylabel('(無次元化された)個体数')
fig.savefig("14-1_logistic/x0_%1.4f-mu_%1.4f.png" %(x0, mu)) # グラフをフォルダに画像として保存
plt.show()
```

2　14-1_logistic.py の実行結果

2.1　初期値を 0.75 に固定して増加率を変化させる

課題 14.3-3: $\mu < 0$ のとき個体数は振動しながら減衰し，$\mu = 0$ のとき個体数は直ちに消滅する．

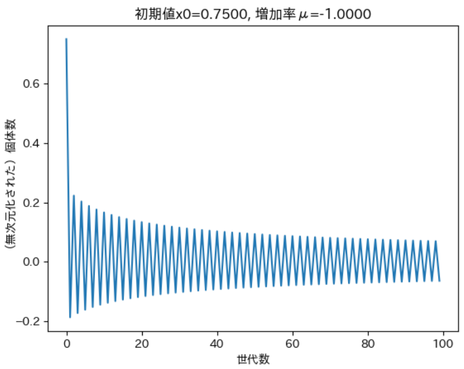

図 1　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = -1$

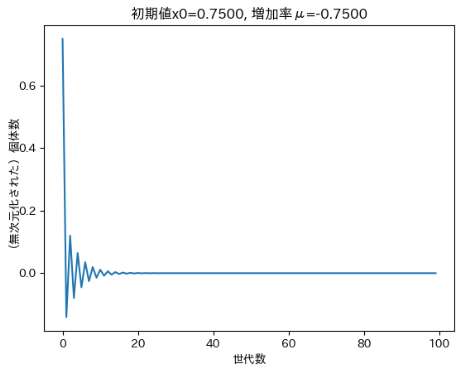

図 2　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = -0.75$

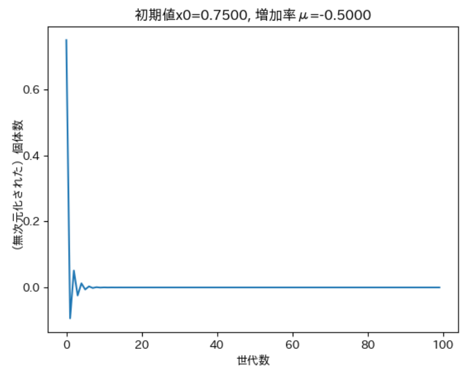

図 3　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = -0.5$

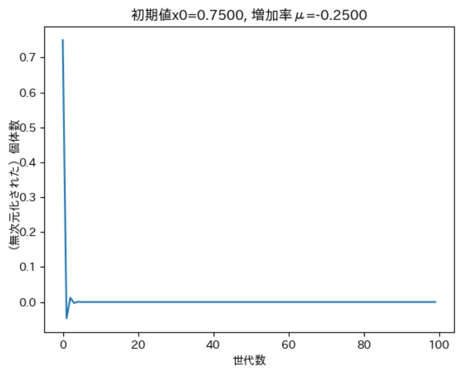

図 4　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = -0.25$

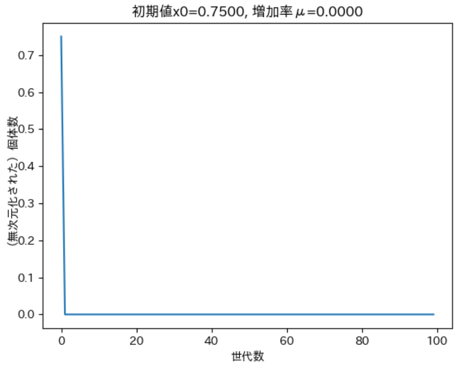

図 5　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = 0$

課題 14.3-4: $\mu \geq 0$ のときの個体数の変化.

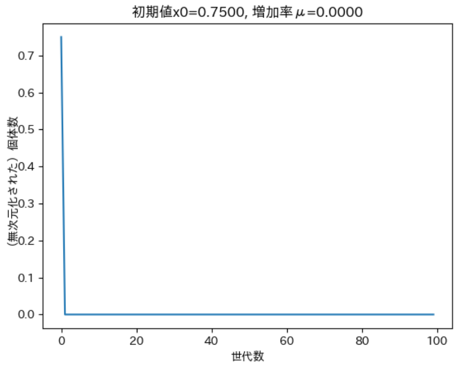

図 6　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = 0$

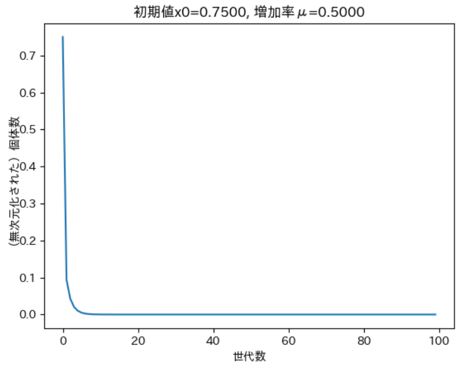

図 7　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = 0.5$

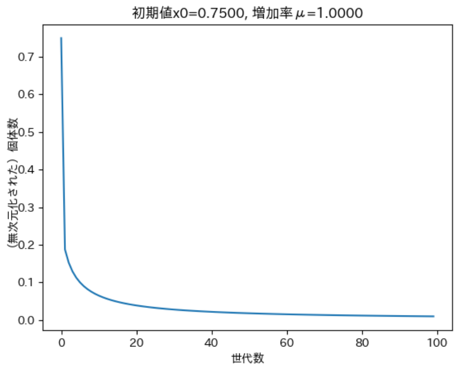

図 8　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = 1$

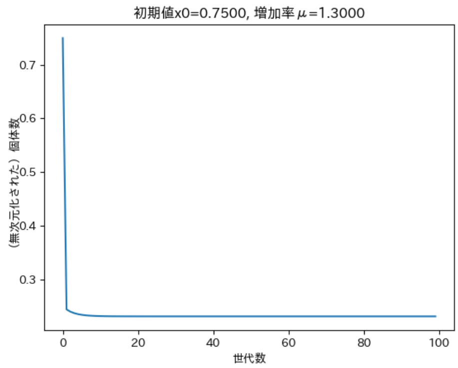

図 9　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = 1.3$

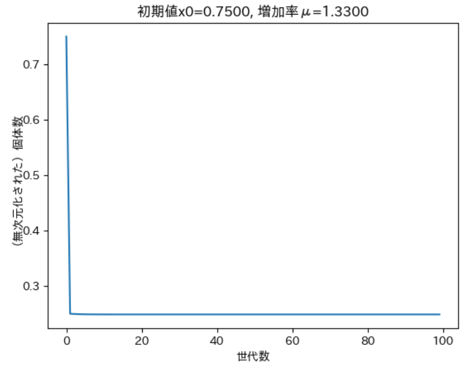

図 10　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = 1.33$

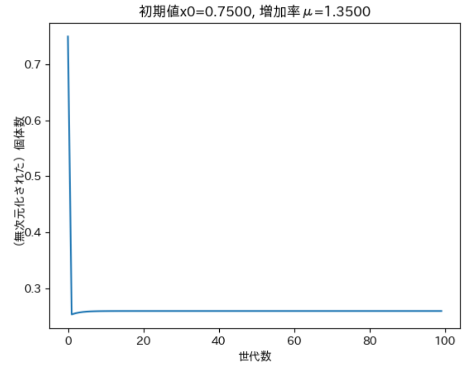

図 11　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = 1.35$

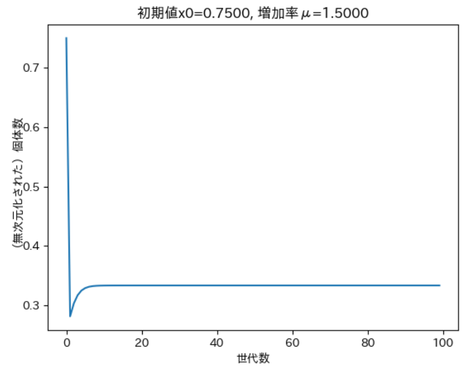

図 12　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = 1.5$

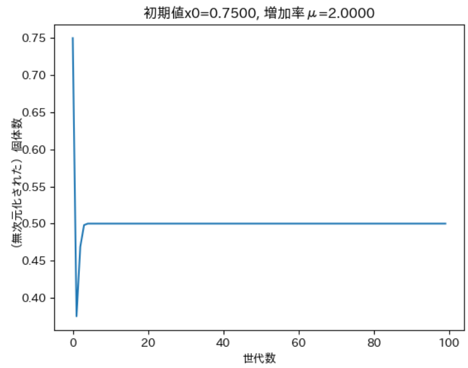

図 13　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = 2$

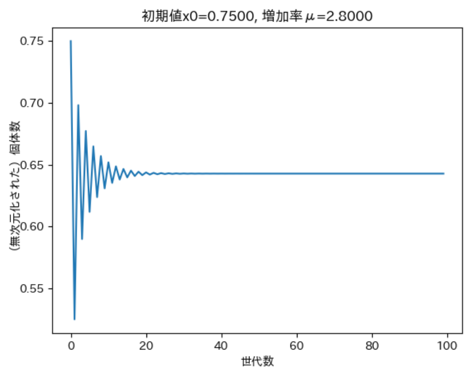

図 14　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = 2.8$

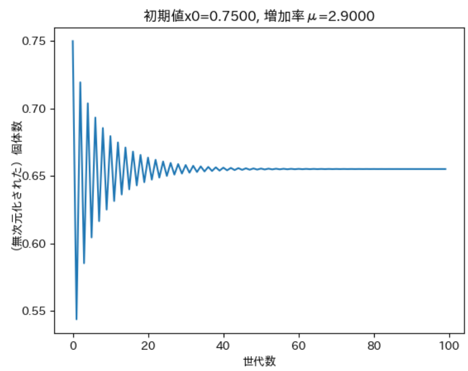

図 15　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = 2.9$

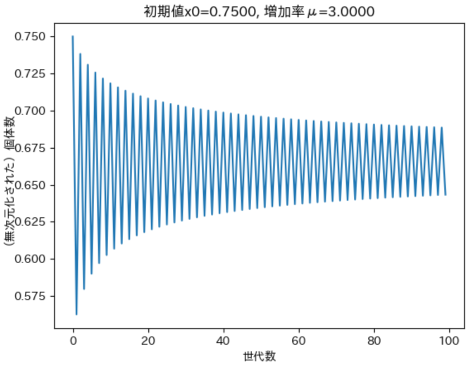

図 16　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = 3$

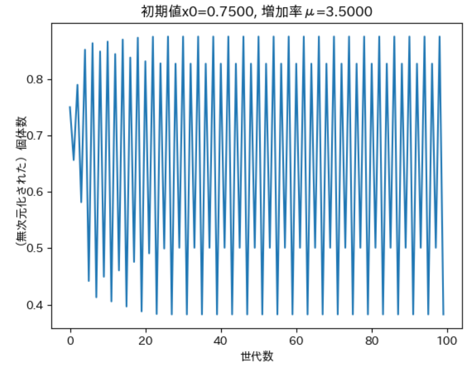

図 17　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = 3.5$

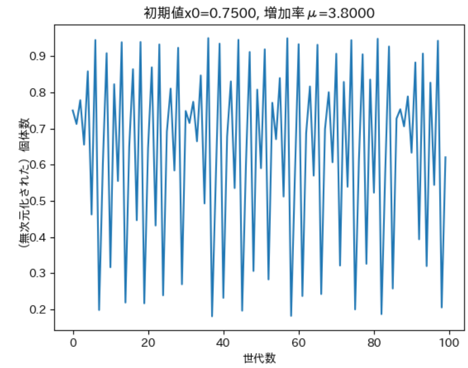

図 18　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = 3.8$

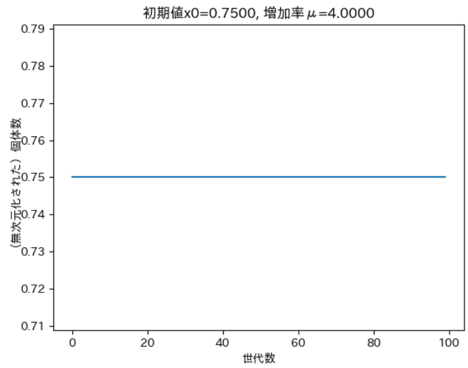

図 19　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = 4$

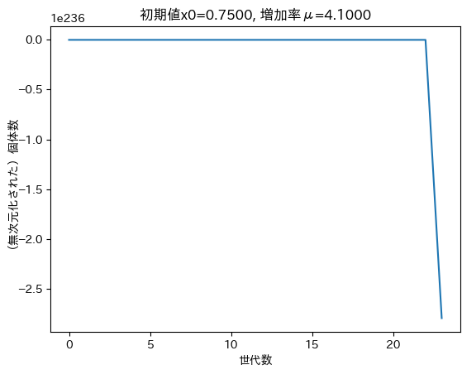

図 20　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = 4.1$

2.2　増加率を固定して初期値を変化させる

課題 14.3-6: 増加率 μ を一定として初期値 x_0 を変化させる．

$\mu = 1$ で固定した場合

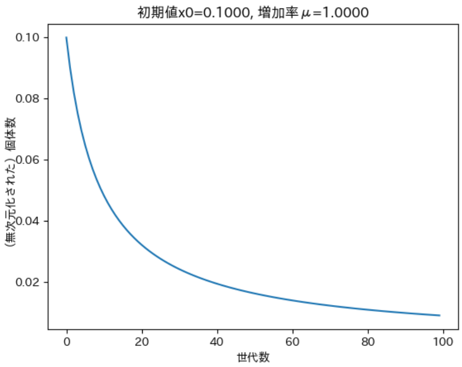

図 21　初期値 $x_0 = 0.1$，増加率 $\mu = 1$

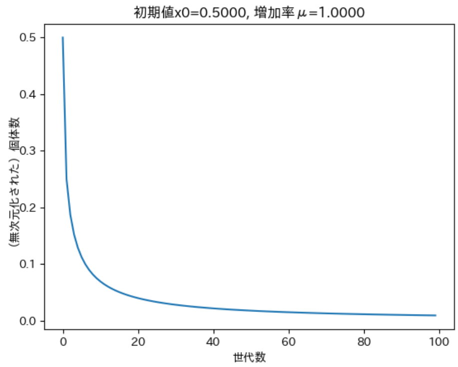

図 22　初期値 $x_0 = 0.5$，増加率 $\mu = 1$

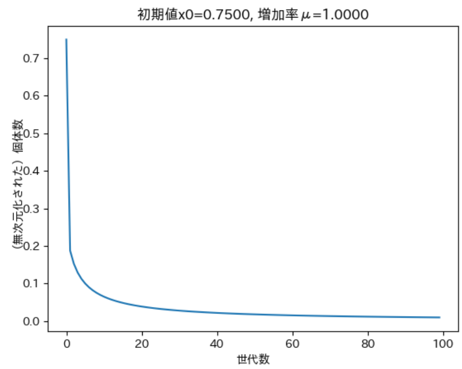

図 23　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = 1$

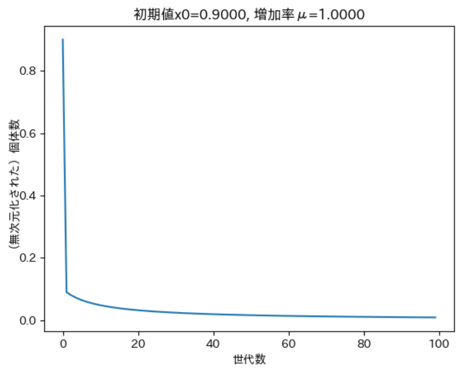

図 24　初期値 $x_0 = 0.9$，増加率 $\mu = 1$

$\mu = 2.9$ で固定した場合

$x_* \neq 0$ を不動点とするとき，

$$x_* = \mu x_*(1 - x_*) \tag{2.1}$$

より

$$x_* = 1 - \frac{1}{\mu}. \tag{2.2}$$

$\mu = 2.9$ とすると $x_* = 0.65517\ldots$.

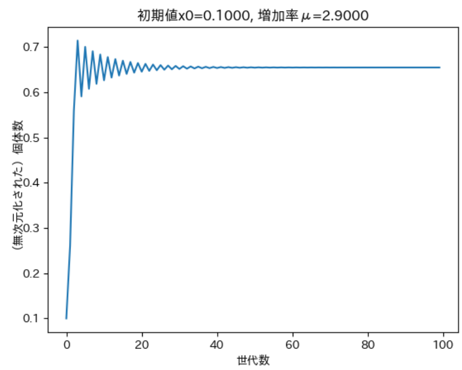

図 25　初期値 $x_0 = 0.1$，増加率 $\mu = 2.9$

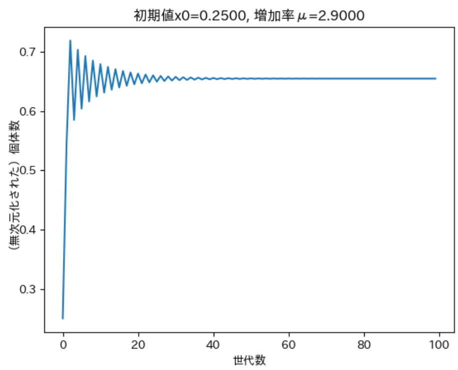

図 26　初期値 $x_0 = 0.25$，増加率 $\mu = 2.9$

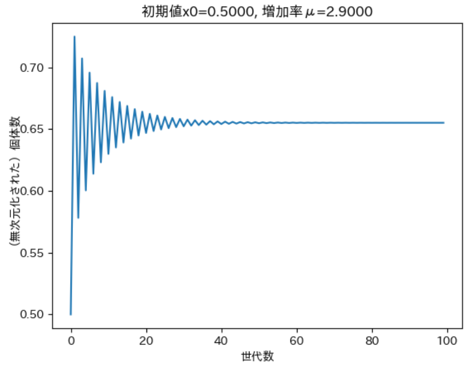

図 27　初期値 $x_0 = 0.5$，増加率 $\mu = 2.9$

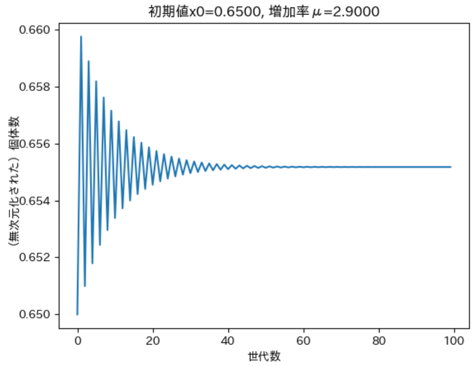

図 28　初期値 $x_0 = 0.65$，増加率 $\mu = 2.9$

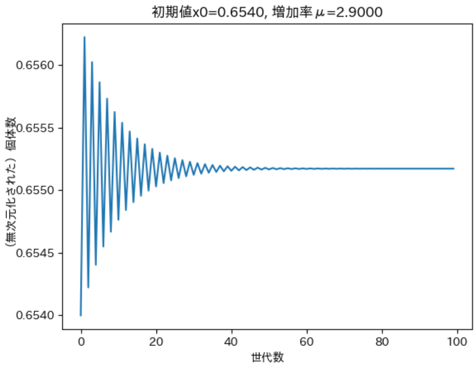

図 29　初期値 $x_0 = 0.654$，増加率 $\mu = 2.9$

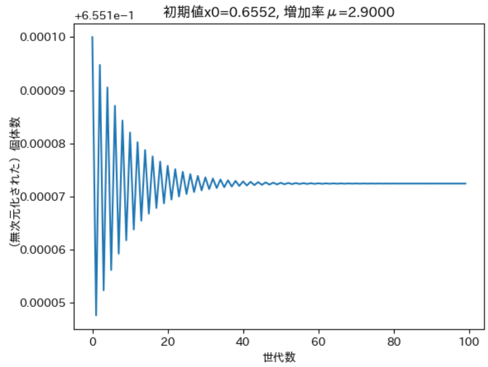

図 30　初期値 $x_0 = 0.6552$，増加率 $\mu = 2.9$

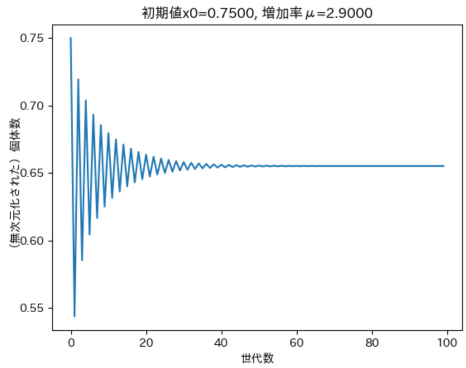

図 31　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = 2.9$

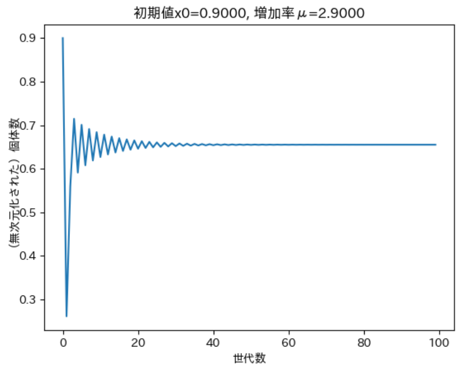

図 32　初期値 $x_0 = 0.9$，増加率 $\mu = 2.9$

$\mu = 3.3$ で固定した場合

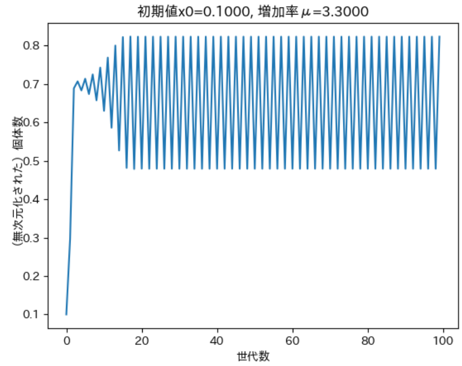

図 33　初期値 $x_0 = 0.1$，増加率 $\mu = 3.3$

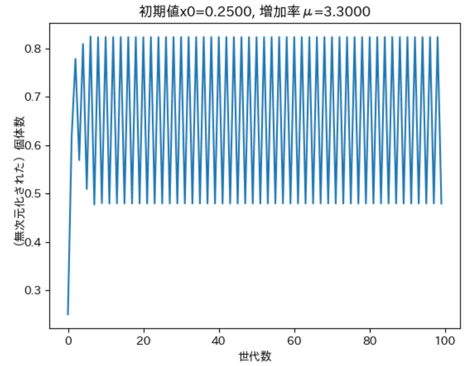

図 34　初期値 $x_0 = 0.25$，増加率 $\mu = 3.3$

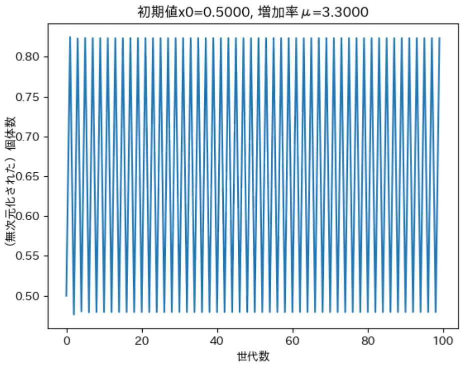

図 35　初期値 $x_0 = 0.5$，増加率 $\mu = 3.3$

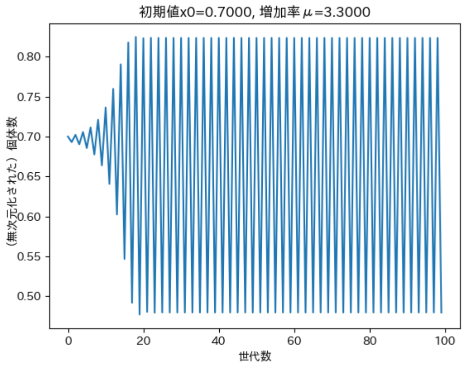

図 36　初期値 $x_0 = 0.7$，増加率 $\mu = 3.3$

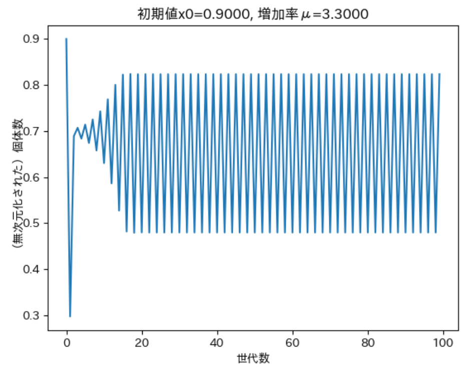

図 37　初期値 $x_0 = 0.9$，増加率 $\mu = 3.3$

$\mu = 3.5$ で固定した場合

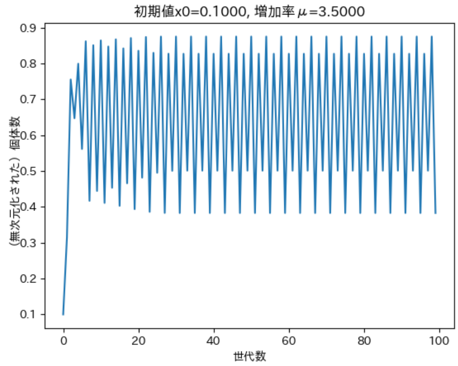

図 38　初期値 $x_0 = 0.1$，増加率 $\mu = 3.5$

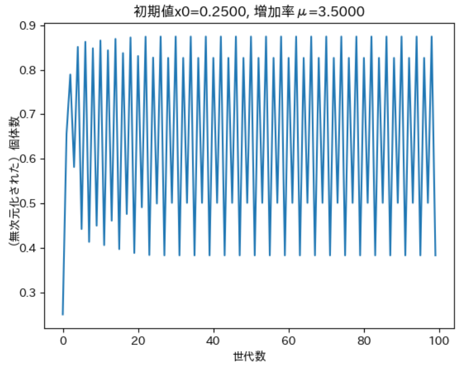

図 39　初期値 $x_0 = 0.25$，増加率 $\mu = 3.5$

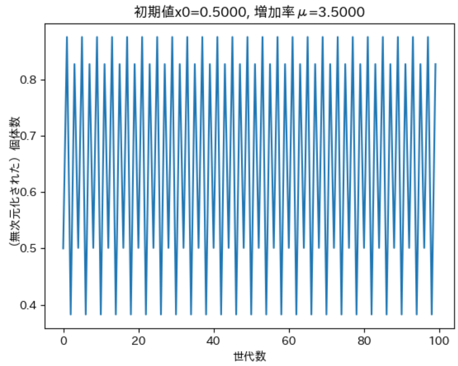

図 40　初期値 $x_0 = 0.5$，増加率 $\mu = 3.5$

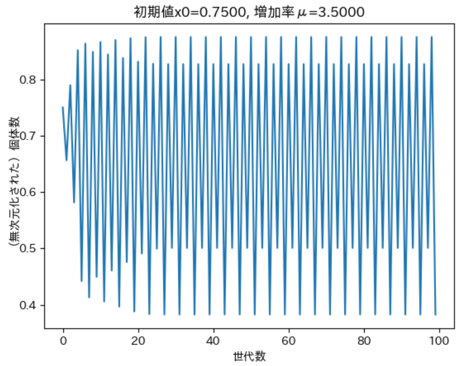

図 41　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = 3.5$

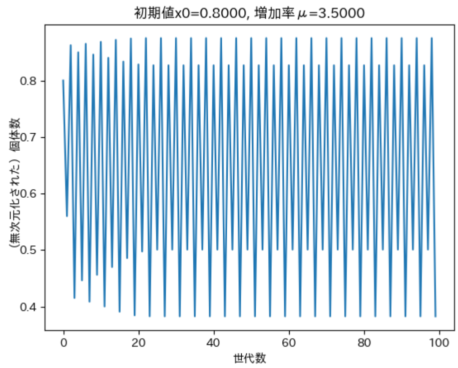

図 42　初期値 $x_0 = 0.8$，増加率 $\mu = 3.5$

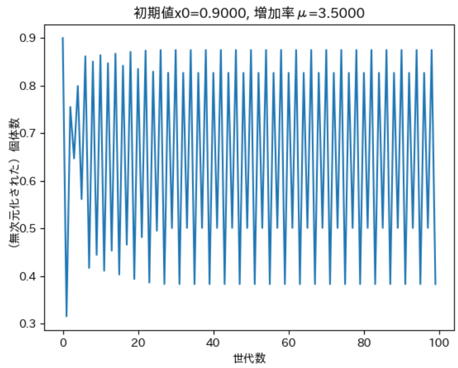

図 43　初期値 $x_0 = 0.9$，増加率 $\mu = 3.5$

$\mu = 3.8$ で固定した場合

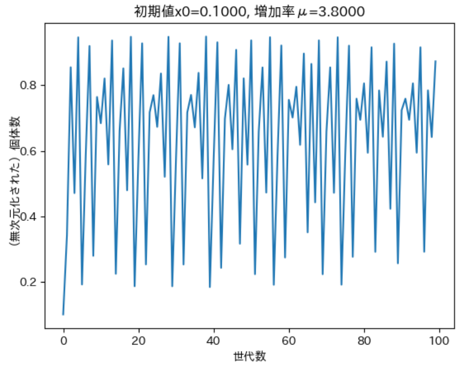

図 44　初期値 $x_0 = 0.1$，増加率 $\mu = 3.8$

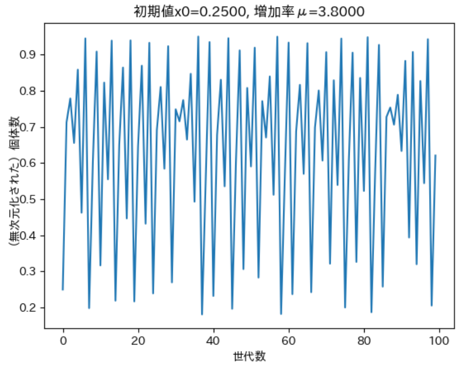

図 45　初期値 $x_0 = 0.25$，増加率 $\mu = 3.8$

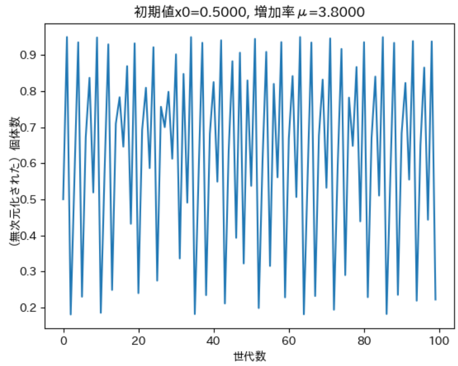

図 46　初期値 $x_0 = 0.5$，増加率 $\mu = 3.8$

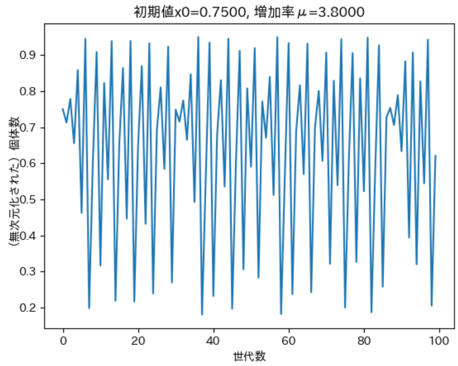

図 47　初期値 $x_0 = 0.75$，増加率 $\mu = 3.8$

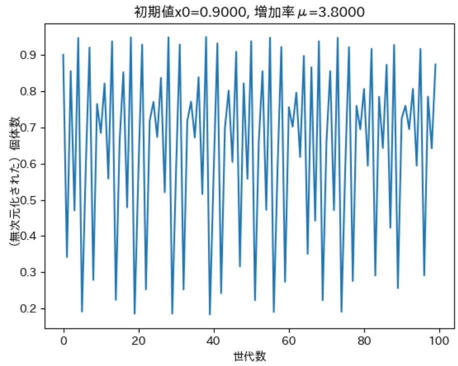

図 48　初期値 $x_0 = 0.9$，増加率 $\mu = 3.8$

2.3　ファイゲンバウムによる観察の確認

ここでは初期値を $x_0 = 0.75$ に固定する．

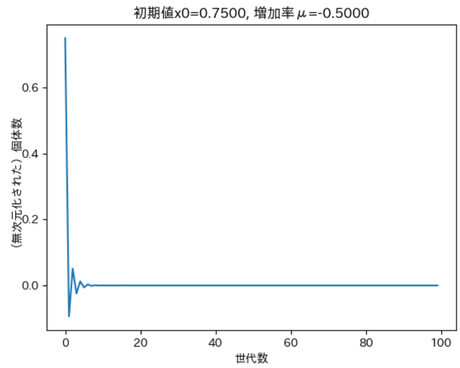

図 49　増加率 $\mu = -0.5$ のとき個体数は定常解のゼロに漸近し，時間が経つとゼロで安定する

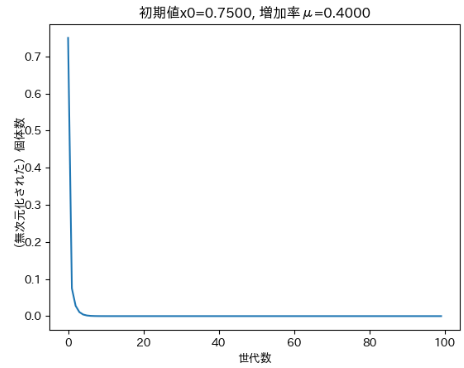

図 50　増加率 $\mu = 0.4$ のとき個体数は定常解のゼロに漸近し，時間が経つとゼロで安定する

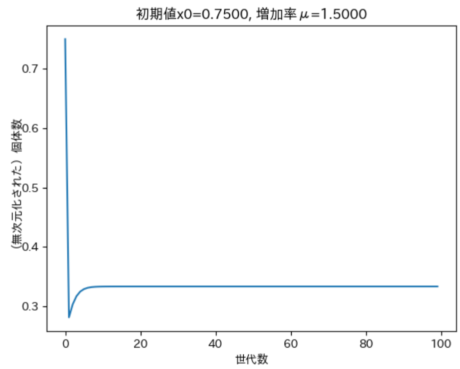

図 51　増加率 $\mu = 1.5$ のとき個体数は非自明な定常解に漸近し，時間が経つとその定常解で安定する

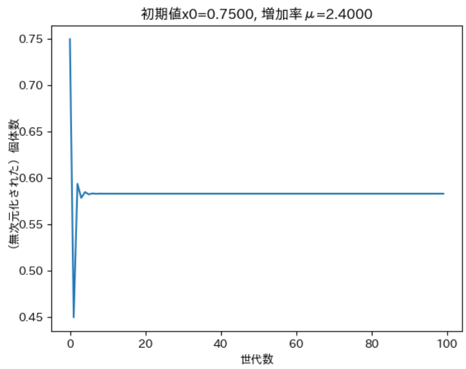

図 52　増加率 $\mu = 2.4$ のとき個体数は非自明な定常解に振動しながら漸近し，時間が経つとその定常解で安定する

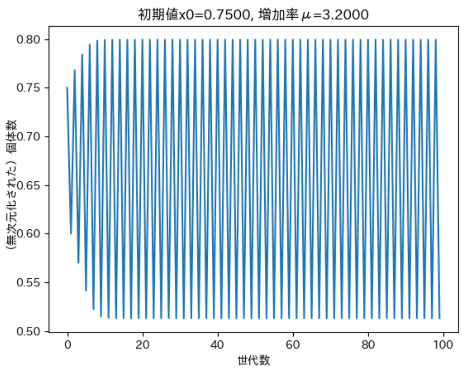

図 53　増加率 $\mu = 3.2$ のとき時間が経つと二重周期解に安定する

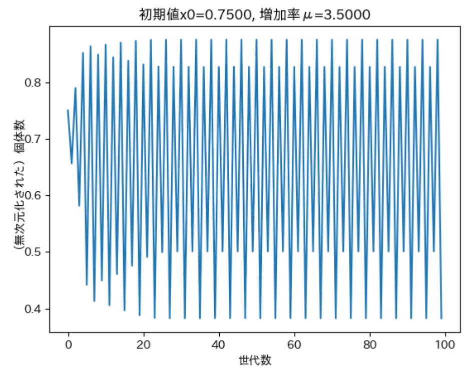

図 54　増加率 $\mu = 3.5$ のとき時間が経つと四重周期解に安定する

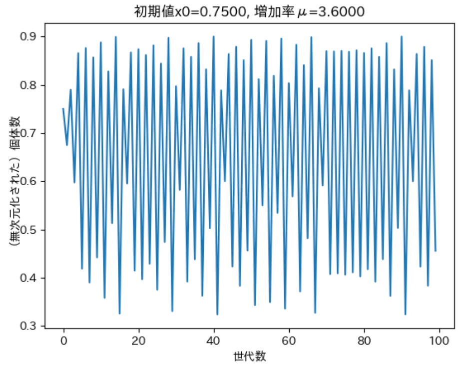

図 55　増加率 $\mu = 3.6$ のときカオス的な振る舞いをする

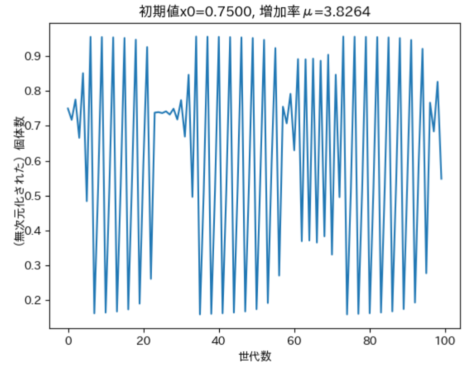

図 56　増加率 $\mu = 3.8264$ のとき安定に見える期間とそれが崩れたのち再び安定に見える状態となる間欠状態が見られる

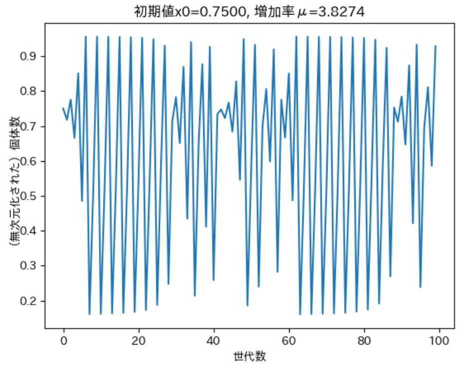

図 57　増加率 $\mu = 3.8274$ のとき間欠状態が見られる

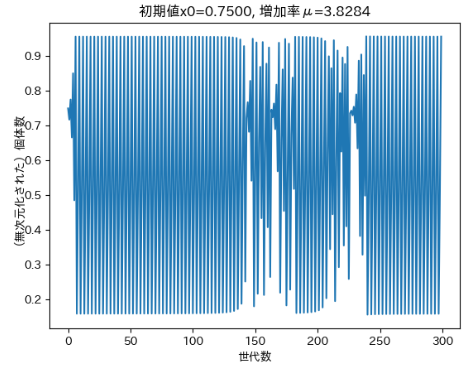

図 58　増加率 $\mu = 3.8284$ のとき間欠状態が見られる（但し世代数の最大値を 300 回に増やす）

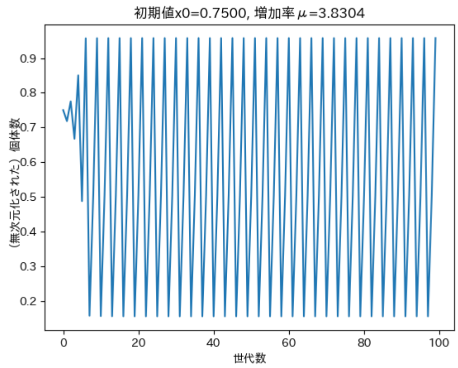

図 59　増加率 $\mu = 3.8304$ のとき二重周期解で安定となる

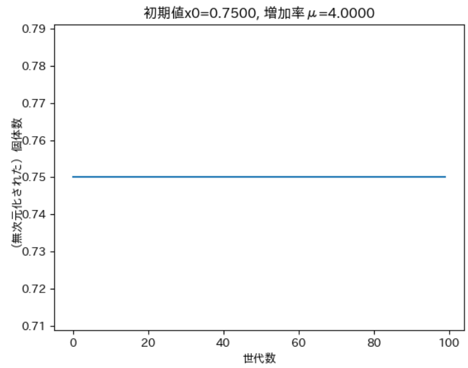

図 60　増加率 $\mu = 4$ のとき初期値 0.75 が安定である

3　14-4_chaos.py のコード

Landau, et al. 『計算物理学 II』朝倉書店．14 章 p.340(3) の演習を次のコード 14-4_chaos.py で行う．

ソースコード 2　14-4_chaos.py

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
14-1_chaos.py プログラム
Landau, et al.『計算物理学II』朝倉書店. 14 章 p.340の演習
```

```
(無次元化された)ロジスティック方程式のシミュレーション
解のカオス的挙動を調べる
使い方 14-1_chaos.py
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import japanize_matplotlib # 日本語表示に対応

N = 100 # 世代数

# 初期設定
x0 = 0.75
mu = 3.95
eps = 2e-14

x0p = x0 * (1 + eps)
mup = mu * (1 - eps)

# 初期値の保存
x1 = x0
x2 = x0p
x3 = x0

# グラフ描画用変数
xlist = [0]
ylist1 = [x1]
ylist2 = [x2]
ylist3 = [x3]

"""logistic 方程式の計算"""
for i in range(1, N):
    x1 = mu * x1 * (1 - x1)
    x2 = mu * x2 * (1 - x2)
    x3 = mup * x3 * (1 - x3)
    # 随時グラフ描画用変数に代入
    xlist.append(i)
    ylist1.append(x1)
    ylist2.append(x2)
    ylist3.append(x3)

"""個別のグラフを並べて表示"""
# グラフ描画先の準備
fig1 = plt.figure()
# グラフを表示する領域の追加
ax1 = plt.subplot(3, 1, 1)
ax2 = plt.subplot(3, 1, 2)
ax3 = plt.subplot(3, 1, 3)
# 各グラフタイトル
ax1.set_title('$x_0, \mu$')
ax2.set_title('$x_0(1+\epsilon), \mu$')
ax3.set_title('$x_0, \mu(1-\epsilon)$')
# 各グラフの設定
c1, c2, c3 = "blue", "red", "green" # プロットの色
l1, l2, l3 = "$x_0, \mu$", "$x_0(1+\epsilon), \mu$", "$x_0, \mu(1-\epsilon)$" # ラベル
```

```
ax1.plot(xlist, ylist1, color=c1, label=l1)
ax2.plot(xlist, ylist2, color=c2, label=l2)
ax3.plot(xlist, ylist3, color=c3, label=l3)
# 軸名
plt.xlabel('世代数')
plt.ylabel('(無次元化された)個体数')

fig1.suptitle('グラフを並べて表示', x=0.5, y=0.995)
fig1.tight_layout() # レイアウト設定
fig1.savefig("14-1_logistic/chaos-parallel.png") # グラフをフォルダに画像として保存
plt.show() # グラフの表示

"""グラフを重ねて表示"""
fig2 = plt.figure() # グラフ描画先の準備
ax = plt.subplot() # グラフを表示する領域の追加

ax.set_title('グラフを重ねて表示')
ax.set_xlabel('世代数')
ax.set_ylabel('(無次元化された)個体数')

ax.plot(xlist, ylist1, color=c1, label=l1)
ax.plot(xlist, ylist2, color=c2, label=l2)
ax.plot(xlist, ylist3, color=c3, label=l3)
ax.legend(loc=0) # 凡例
fig2.tight_layout() # レイアウトの設定
fig2.savefig('14-1_logistic/chaos-overlap.png') # 画像の保存
plt.show()
```

4　14-4_chaos.py の実行結果

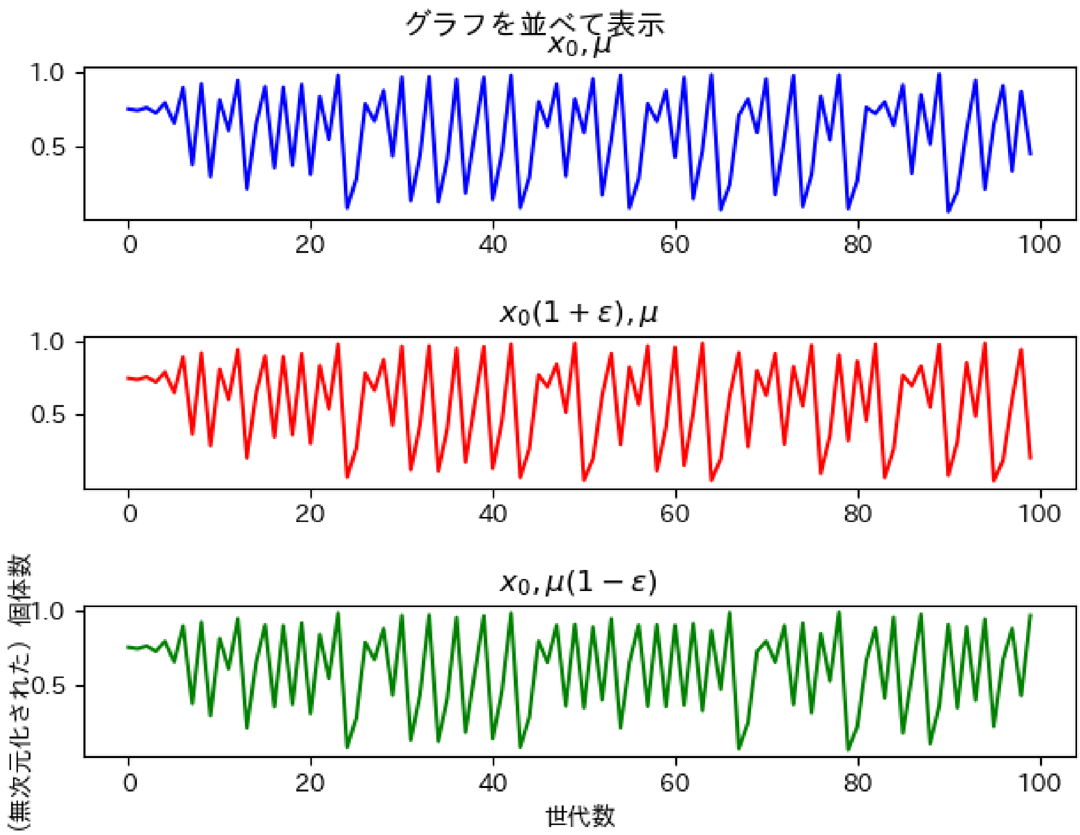

図 61　ロジスティック写像のカオス的挙動-1

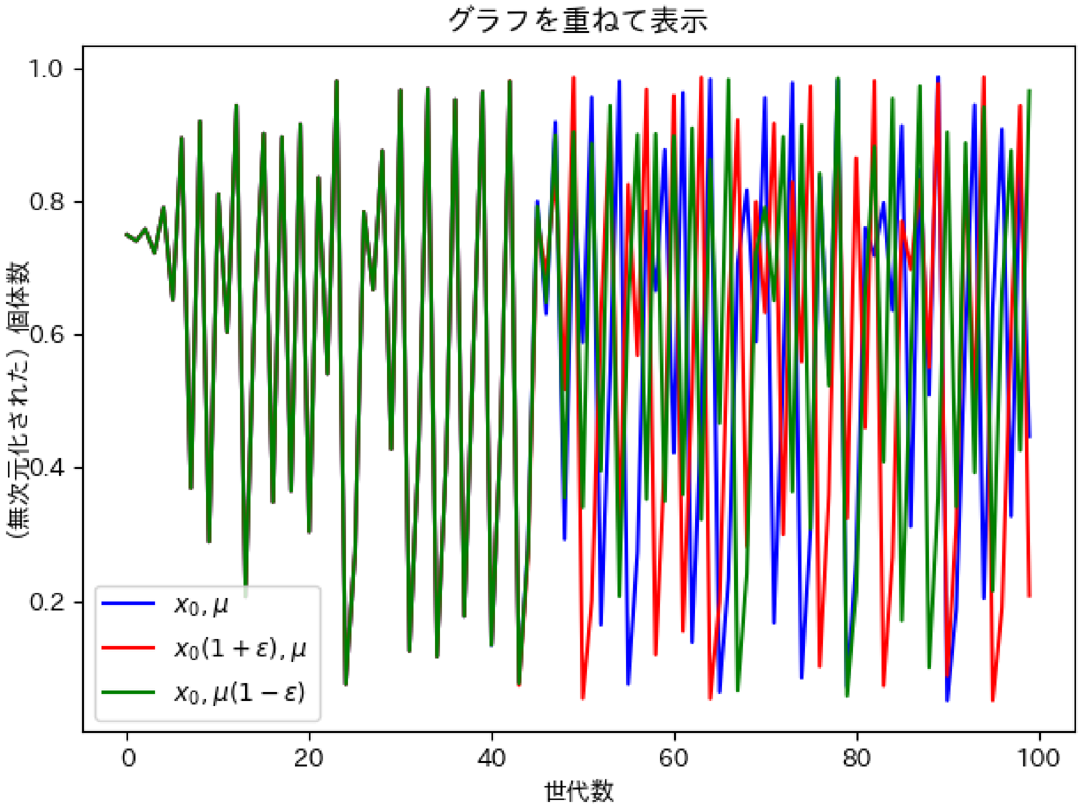

図 62　ロジスティック写像のカオス的挙動-1

5　14-5_branch.py のコード

Landau, et al. 『計算物理学 II』朝倉書店．14 章 p.343(1–9) の演習を次のプログラム 14-8_branch.py で行う．

ソースコード 3　14-8_branch.py

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
14-8_branch.py プログラム
Landau, et al.『計算物理学II』朝倉書店. 14 章 p.343の演習
ロジスティック写像の分岐図を描画するシミュレーション
使い方 14-8_branch.py
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import japanize_matplotlib

N = 300 # N+200:経過させる世代数

# グラフ描画用変数
xlist = []
ylist = []

print('start')
for mu in np.arange(1, 4, 0.003):
    #print(mu)
    for x0 in np.arange(0.002, 1, 0.002):
        x = x0
        # 始めに 200世代経過させる
        for i in range(1, 200):
            x = mu * x * (1-x)
        for i in range(1, N):
            x_before = x
            x = mu * x * (1-x)
            if x_before == x:
                break
        ylist.append(float(format(x, '.4f')))
        #ylist.append(x)
        xlist.append(mu)

print('グラフ描画開始')
fig = plt.figure(figsize=(15, 15))
plt.title('分岐図')
plt.scatter(xlist, ylist, s=0.3)
plt.xlabel('$\mu$')
plt.ylabel('$x_*$')
fig.savefig('14-1_logistic/branch.png', dpi=300) # 画像の保存
plt.show()

print('グラフ描画終了')
```

6　14-5_branch.py の実行結果

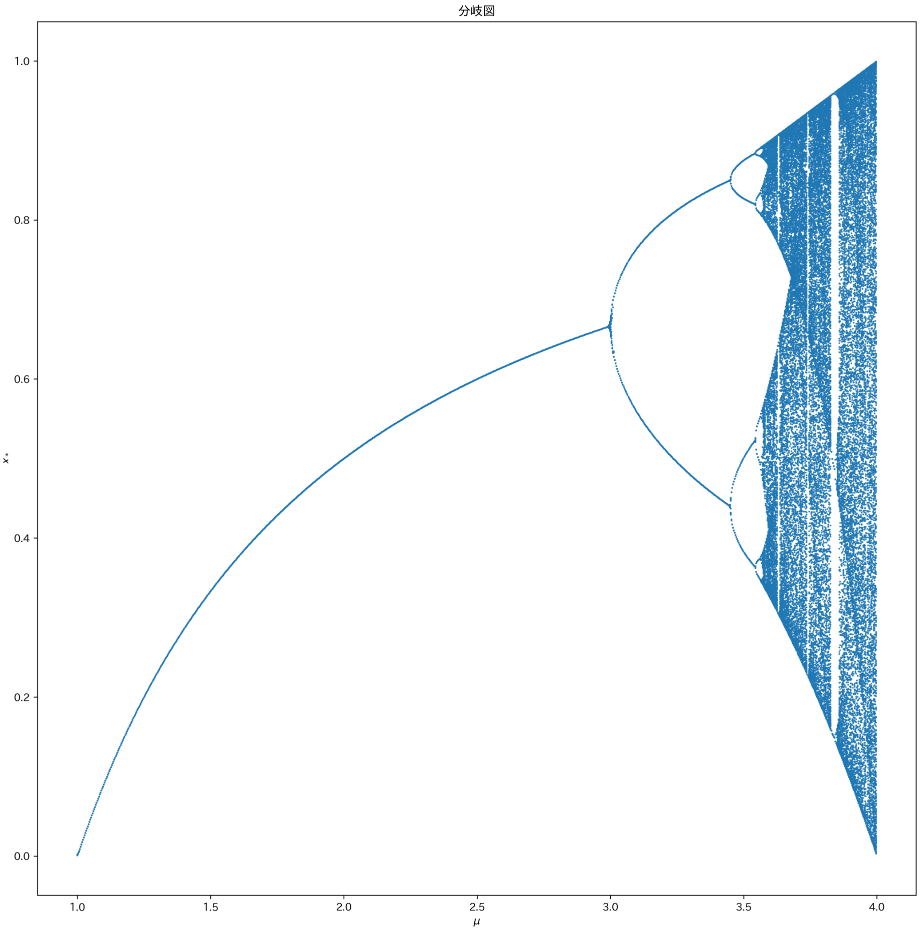

図 63　$1 < \mu < 4$ でのロジスティック写像の分岐図

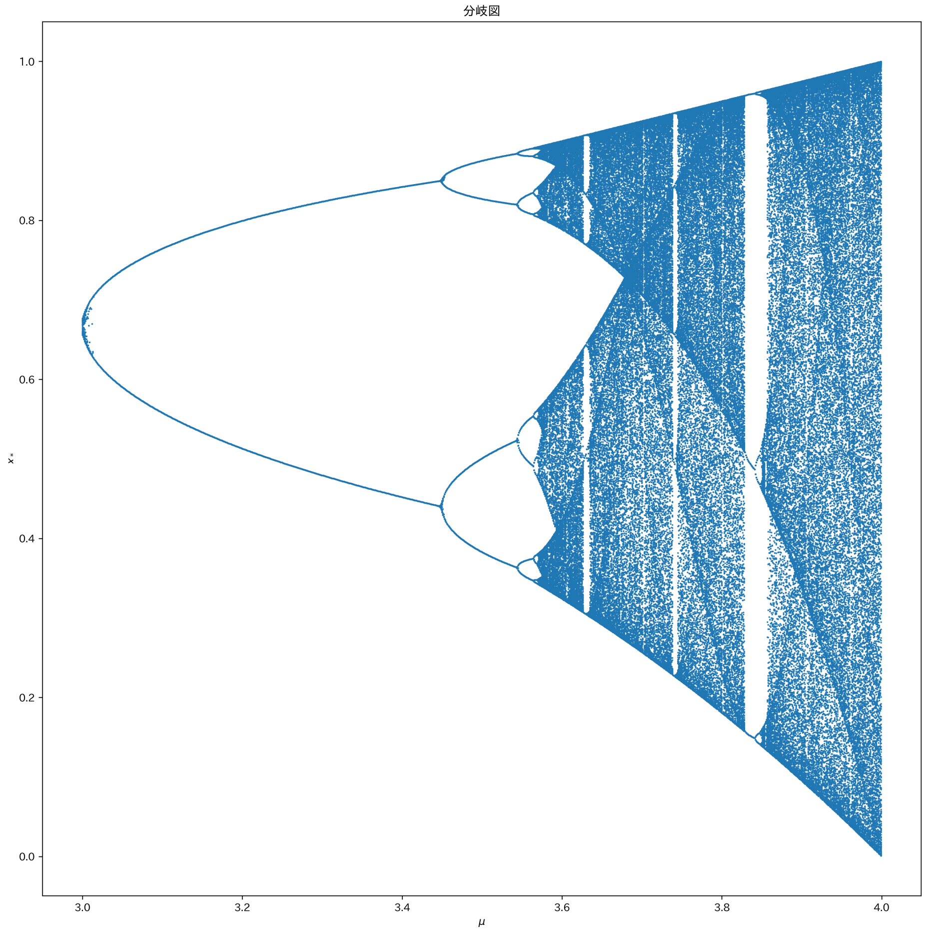

図 64　$3 < \mu < 4$ でのロジスティック写像の分岐図