

Лабораторная работа №1

Моделирование изменения денежных средств на вкладе

1. Общая постановка задачи на исследование

Клиент банка открывает вклад, размещая на нем денежные средства при условии начисления i сложных процентов один раз в год. Определить, как будет происходить изменение денежных средств на вкладе по истечении t лет ($t = 1, 2, \dots$) в двух случаях:

1. В банке при открытии вклада было размещено z_0 тыс. руб., пополнение счета вкладчиком в дальнейшем не производится.

2. После первоначального размещения z_0 тыс. руб. вкладчик ежегодно после начисления процентов вносит дополнительную сумму так, что каждый год он увеличивает дополнительно размещаемую сумму по сравнению с предыдущим годом на величину $0,1 z_0$.

2. Задание на лабораторную работу

1. Решить задачу при следующих исходных данных:

$$z_0 = 100 + 4p + 3q + 1,$$

$$i = p + q + 1.$$

Числа p и q определяются номером студента в журнале группы. Например, если номер студента по списку $N = 3$, то преобразуем его в двузначное число $N = 03$. Следовательно, $p = 0$, $q = 3$. Если номер студента двухзначный, например, $N = 15$, то $p = 1$, $q = 5$.

2. Выполнить расчет и выяснить, через, сколько лет вклад удвоится без пополнения счета.

3. Рассчитать, через, сколько лет вклад увеличится в пять раз при ежегодном внесении дополнительной суммы.

4. Изменение денежных средств на вкладе для обоих случаев проиллюстрировать общей таблицей.

5. Построить графики изменения суммы вклада для обоих случаев.

6. Для задания №3, рассчитать сумму z_0 , которую необходимо разместить на вкладе, чтобы через 5 лет наращенная сумма превысила величину $10(100 + 4p + 3q + 1)$.

7. Результат расчета проиллюстрировать отдельной таблицей.

3. Описание имитационной модели процесса

Пусть y_t – сумма денежных средств на вкладе по истечении t лет ($t = 0, 1, 2, \dots$). При этом при $t = 0$ сумма первоначального вклада y_0 известна и

равна z_0 .

Построим модель, описывающую процесс изменения денежных средств для двух рассмотренных случаев.

Случай 1. Обозначим через $r = \frac{i}{100} = 0,01i$ показатель, описывающий приращение вклада по сравнению с предыдущим годом за счет начисления процентов. Например, при $i = 10\%$ наращение за год денежных средств на вкладе составит $r = 0,01i = 0,1$ от суммы, которая была на вкладе год назад. Если эта сумма была равна y_{t-1} , то через год сумма на вкладе станет равной

$$y_t = y_{t-1} + ry_{t-1}.$$

Таким образом, получаем, что изменение денежных средств на вкладе описывается разностным уравнением

$$y_t - (1+r)y_{t-1} = 0. \quad (1)$$

Будем искать решение уравнения (3.1) в виде:

$$y_t = C\lambda^t; \quad y_{t-1} = C\lambda^{t-1}. \quad (2)$$

Подставляем соотношение (3.2) в (3.1) имеем

$$C\lambda^t - (1+r)C\lambda^{t-1} = 0;$$

$$C\lambda^{t-1}(\lambda - 1 - r) = 0;$$

$$\lambda = 1 + r.$$

С учетом формул (2) получаем

$$y_t = C(1+r)^t. \quad (3)$$

При $t = 0$ известно, что $y_0 = z_0$. Поэтому имеем из формулы (3), что

$$y_0 = C = z_0.$$

В результате получаем

$$y_t = z_0(1+r)^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Формула (4) задает изменение денежных средств на вкладе в случае начисления так называемых сложных процентов.

Случай 2. Рассмотрим теперь вторую задачу. Пусть z_t – сумма денежных средств ежегодно дополнительно размещаемых на вкладе. Согласно условию имеем

$$z_t - z_{t-1} = 0,1z_0. \quad (5)$$

Будем искать решение уравнения (5) в виде:

$$z_t = at + b, \quad z_{t-1} = a(t-1) + b. \quad (6)$$

Подставляя соотношение (6) в уравнение (5), имеем

$$at + b - a(t-1) - b = 0,1z_0;$$

$$a = 0,1z_0;$$

$$z_t = 0,1z_0t + b.$$

Первоначальный вклад при $t = 0$ равен z_0 . Отсюда следует $b = z_0$ и тогда

$$z_t = z_0(0,1t + 1). \quad (7)$$

Согласно постановке задачи по истечению каждого года сумма y_t денежных средств на вкладе увеличивается на величину начисленных процентов ry_{t-1} , а также на величину дополнительной суммы пополнения вклада, изменение которого описывается формулой (7). Отсюда следует

$$\begin{aligned} y_t &= y_{t-1} + ry_{t-1} + z_t; \\ y_t - (1+r)y_{t-1} &= 0,1z_0t + z_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Решение разностного уравнения (8) ищется в виде суммы решения однородного уравнения (1) y_t^0 вида (3) и любого частного решения \tilde{y}_t неоднородного уравнения (8). Частное решение уравнения (8) будем искать в виде

$$\tilde{y}_t = At + B; \quad \tilde{y}_{t-1} = A(t-1) + B. \quad (9)$$

Подставляя равенства (9) в (8), получаем

$$\begin{aligned} At + B - (1+r)(A(t-1) + B) &= 0,1z_0t + z_0; \\ -rAt + A(1+r) - rB &= 0,1z_0t + z_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Приравнявая коэффициенты при t и слагаемых, не содержащих t , в левой и правой частях равенства (10), имеем

$$-rA = 0,1z_0; \quad A = -\frac{z_0}{10r};$$

$$A(1+r) - rB = z_0; \quad B = -\frac{z_0}{10r^2}(1+11r).$$

С учетом формулы (9) получаем

$$\tilde{y}_t = -\frac{z_0t}{10r} - \frac{z_0}{10r^2}(1+11r). \quad (11)$$

Общее решение уравнения (8) представимо в виде:

$$y_t = y_t^0 + \tilde{y}_t = C(1+r)^t - \frac{z_0t}{10r} - \frac{z_0}{10r^2}(1+11r).$$

Постоянную C находим из условия, что при $t=0$ значение $y_0 = z_0$. В результате получаем

$$C = z_0 + \frac{z_0}{10r^2}(1+11r) = \frac{z_0(1+r)}{r} + \frac{z_0}{10r^2}(1+r) = \frac{z_0}{r}(1+r)\left(1 + \frac{1}{10r}\right).$$

Таким образом, окончательно имеем

$$y_t = \frac{z_0}{r}\left(1 + \frac{1}{10r}\right)(1+r)^{t+1} - \frac{z_0t}{10r} - \frac{z_0}{10r^2}(1+11r). \quad (12)$$

Формула (12) описывает изменение денежных средств на вкладе по истечении t лет, $t = 1, 2, \dots$

4. Методические рекомендации по выполнению работы

Пусть $p=0$ и $q=0$, тогда исходные данные: $z_0 = 101$, $i = 1$. Показатель,

описывающий приращение вклада, равен $r = \frac{i}{100} = 0,01$. Согласно первому случаю процесс приращения вклада описывается формулой (4):

$$y_t = z_0(1+r)^t = 101 \cdot 1,01^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Согласно второму случаю вклад растет согласно формуле (12):

$$y_t = \frac{z_0}{r} \left(1 + \frac{1}{10r} \right) (1+r)^{t+1} - \frac{z_0 t}{10r} - \frac{z_0}{10r^2} (1+11r).$$

Для удобства выполнения расчетов отдельно вычислим постоянные величины в формулах (4) и (12): $(1+r)$; $\frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{10r} \right)$ и $\frac{z_0}{10r^2} (1+11r)$.

Построим расчетную область на листе Excel (рис. 1), где соответственно заполним ячейки:

B3 → 101;

B4 → 1;

E1 → =B4/100;

E2 → =1+E1;

E3 → =(1+1/(10*E1))/E1;

E4 → =B3(1+11*E1)/(10*E1^2).

	A	B	C	D	E
1	p=	0		r=	0,01
2	q=	0		1+r=	1,01
3	z0=	101		(1+1/(10r))/r=	1100
4	i=	1		z0(1+11r)/(10rr)=	112110
5					
6	t	yt - 1 случай	yt - 2 случай	z0*2=	202
7	0	101,00	101,00	z0*5=	505
8	1	102,01	213,11		
9	2	103,03	336,44		
10	3	104,06	471,11		
11	4	105,10	617,22		
12	5	106,15	774,89		
13	6	107,21	944,24		
14	7	108,29	1125,38		
15	8	109,37	1318,43		
16	9	110,46	1523,52		
17	10	111,57	1740,75		
18	11	112,68	1970,26		
19	12	113,81	2212,16		
20	13	114,95	2466,59		

Рис. 1. Вычисление изменения вклада

Далее построим таблицу для расчета изменения денежных средств по годам. В ячейки A7, A8, A9, ... введем $t = 0, 1, 2, \dots$ – здесь будем указывать изменение времени. В столбце B будем считать изменение денежных средств в условиях первого случая, а в столбце C – второго:

B7 → =B3;

C7 → =B3;

B8 → =B\$3*СТЕПЕНЬ(\$E\$2;A8);

C8 → =B\$3*\$E\$3*СТЕПЕНЬ(\$E\$2;A8+1)-B\$3*A8/(10*\$E\$1)-\$E\$4.

Далее, используя маркер автозаполнения, распространим формулы, заданные в ячейках B8 и C8 вниз. Для данных, выражающих изменение вклада, установим формат числовой с двумя знаками после запятой.

Требуется выяснить, через сколько лет в первом случае вклад удвоится. Подсчитаем величину удвоенного вклада: E6 → =2*B3. Посмотрим в столбце с данными расчета по первому случаю, когда значение $y_t \geq 2z_0$. Этому условию соответствует ячейка B77, в которой значение $y_t = 202,68$ при этом $t = 70$. Следовательно, через 70 лет вклад, рассчитываемый согласно условиям первого случая удвоится.

Определим, через сколько лет во втором случае вклад увеличится в пять раз. Сначала вычислим значение требуемой суммы вклада в ячейке E7, а затем, используя таблицу, найдем нужное значение. Согласно расчетам в ячейке C11 содержится значение 617,22, которое и будет ответом. При этом $t = 4$. Отсюда можно сделать вывод, что рост средств в условиях второго случая производится гораздо быстрее, чем первого.

Построим графики отдельно для иллюстрации изменения вклада в условиях первого и второго случаев. Исходными данными для построения первого графика будет диапазон A6:B17 (рис. 2). Исходными данными для построения второго графика будет диапазон A6:C17. Однако при настройке области построения исключим B6:B17, так как этот диапазон иллюстрирует первый случай изменения денежных средств (рис. 3).

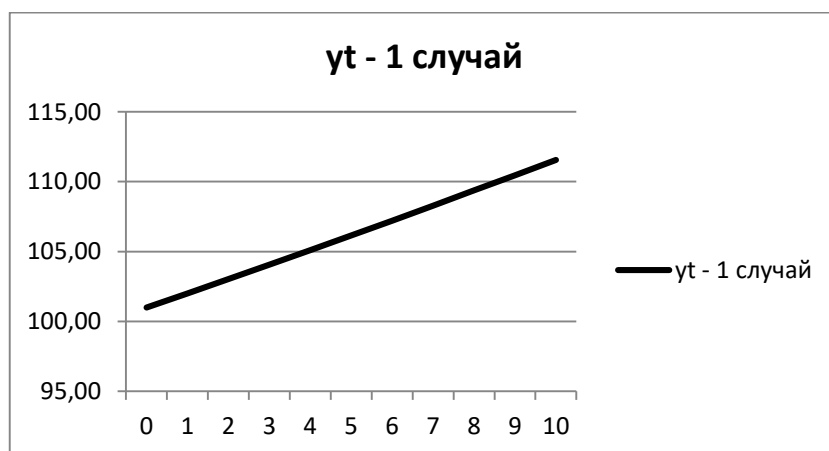


Рис. 2. Изменение суммы вклада в условия первого случая

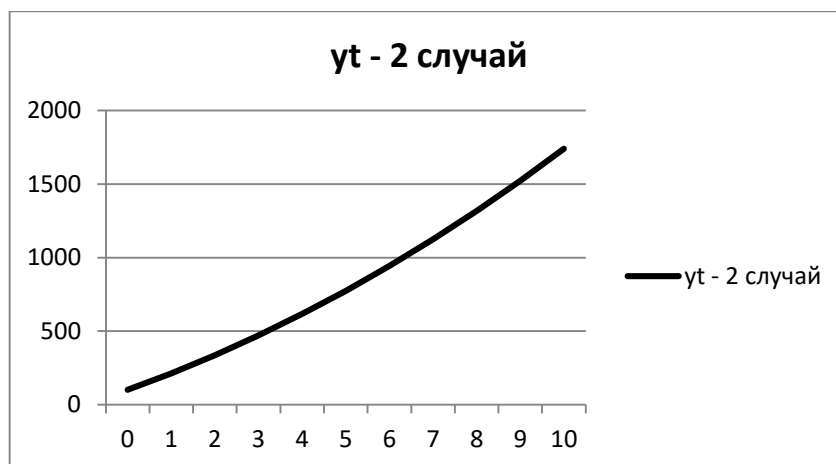


Рис. 3. Изменение суммы вклада в условия второго случая

Определим, какую сумму z_0 необходимо разместить на вкладе в условиях второго случая, чтобы через 5 лет наращенная сумма превысила $10(100+4p+3q+1)=1010$. Воспользуемся формулой (12), откуда выразим z_0 при условии, что $t = 5$, $y_5 = 1010$:

$$y_t \leq \frac{z_0}{r} \left(1 + \frac{1}{10r} \right) (1+r)^{t+1} - \frac{z_0 t}{10r} - \frac{z_0}{10r^2} (1+11r);$$

$$z_0 \geq y_5 \left(\frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{10r} \right) (1+r)^{5+1} - \frac{5}{10r} - \frac{1}{10r^2} (1+11r) \right)^{-1}.$$

Выполним расчет (рис. 4):

Н3 \rightarrow =10*(100+4*B1+3*B2+1)

Н4 \rightarrow =E3*СТЕПЕНЬ(E2;H2+1)-H2/(10*E1)-(1+11*E1)/(10*E1^2)

Н5 \rightarrow =Н3/Н4.

	G	H	I	J
1	Дополнительный расчет			
2	t=	5		
3	yt=	1010		
4	коэффициент	7,672166		
5	начальный вклад	131,64		

Рис. 4. Определение начальной суммы вклада

Следовательно, в рассматриваемых условиях начальный вклад должен составлять не менее 131, 64 условных единиц, чтобы через пять лет сумма на счете была не менее 1010 условных единиц.

5. Реализация модели в приложении *Microsoft Excel*

Порядок организации вычислительной области на листе *MS Excel* предполагает:

1. Согласно варианту задать исходные данные.
2. Записать формулы изменения суммы вклада для первого и второго случаев.
3. Выполнить расчет изменения денежных средств на вкладе для первого и второго случаев по формулам (4) и (12) соответственно.
4. Определить, через какой период времени сумма вклада превысит удвоенную сумму первоначального вклада для первого и второго случаев.
5. Построить графики изменения суммы вклада для обоих случаев.
6. Ответить на вопросы о времени, когда вклад увеличится в два раза при расчете в условиях первого случая и, когда вклад увеличится в пять раз при расчете в условиях второго случая.
7. Выполнить расчет первоначальной суммы вклада z_0 , которую необходимо разместить на вкладе, чтобы через 5 лет наращенная сумма превысила величину $10(100 + 4p + 3q + 1)$.

6. Требования к отчету

Отчет оформляется с использованием текстового процессора *Microsoft Word* со следующими параметрами настройки:

1. Параметры страницы:
 - верхнее поле **2 см**;
 - нижнее поле **2 см**;
 - левое поле **3 см**;
 - правое поле **1,5 см**;
 - ориентация страницы книжная.
2. Стилль шрифта «Обычный»:
 - шрифт ***Times New Roman***;
 - размер **14**;
 - ориентация текста – **по ширине страницы**;
 - отступ первой строки **1,25 см**;
 - межстрочный интервал **1,5 строки**.
3. На всех страницах отчета разместить колонтитулы:
 - верхний колонтитул заполнить по образцу:

Лабораторная работа №1	Иванов Андрей, группа 1-15а ТПК
------------------------	---------------------------------

шрифт колонтитула – ***Arial***, размер **10**;

– в область нижнего колонтитула вставить номера страниц отчета с ориентацией «по центру» (шаблон – «простой номер 2»).

Содержание отчета:

1. Титульный лист установленного образца.

2. Номер лабораторной работы и ее название.
3. Общая постановка задачи на исследование.
4. Вариант студента.
5. Задание на лабораторную работу с указанием исходных данных в соответствии с вариантом.
6. Решение задачи (выполненное в соответствии с методическими рекомендациями) с подстановкой исходных данных в соответствии с вариантом.
7. Выводы с анализом результатов полученных в ходе выполнения лабораторной работы.
8. Место для подписи студента и преподавателя по образцу:

Работу выполнил:	студент группы 1-3 ДОС	<подпись>	Иванов А.К.
-------------------------	------------------------	------------------------	-------------

Работу принял:	кпн, доцент кафедры ПМ	<подпись>	Стоянт Г.В.
-----------------------	------------------------	------------------------	-------------

Дата:	<не заполнять>
--------------	-----------------------------

9. Результаты решения задач в приложении *Microsoft Excel* (представляется студентом на флэш-карте).