Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Калужский филиал
федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ **ИУК «Информатика и управление»**

КАФЕДРА **ИУК4 «Программное обеспечение ЭВМ, информационные технологии»**

Лабораторная работа №4

«Задачи целочисленного линейного программирования»

ДИСЦИПЛИНА: «Моделирование»

Выполнил: студент гр. ИУК4-72Б ______________ (Сафронов Н.С.)
(подпись) (Ф.И.О.)

Проверил: ______________ (Никитенко У.В.)
(подпись) (Ф.И.О.)

Дата сдачи (защиты):

Результаты сдачи (защиты):

- Балльная оценка:
- Оценка:

Калуга, 2023

Цель работы: сформировать практические навыки анализа возможностей построения и выделения наиболее важных свойств объектов моделей для моделирования и использования специализированных программных пакетов и библиотек для стандартных вычислений при решении задач целочисленного линейного программирования на основе сравнения результатов.

Постановка задачи

Найдите оптимальный план задачи целочисленного линейного программирования (N – порядковый номер студента в списке группы), используя

• первый алгоритм Гомори;

• второй алгоритм Гомори (x_1 – произвольное, x_2 – целое);

• метод ветвей и границ (решение проиллюстрируйте схемой).

Вариант 14

$$z = 3x_1 + 4x_2 \to min$$

$$2x_1 + 5x_2 \geq 19$$

$$5x_1 + 2x_2 \geq 21$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 - \text{целые}$$

Ход выполнения работы

Первый алгоритм Гомори

Представим задачу в канонической форме:

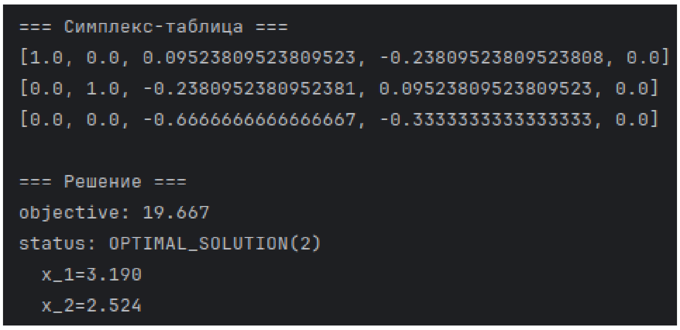
$$z = 3x_1 + 4x_2 \to min$$

$$2x_1 + 5x_2 - x_3 = 19$$

$$5x_1 + 2x_2 - x_4 = 21$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Решим задачу программно в произвольных числах, воспользовавшись двойственным симплекс-методом:



```
=== Симплекс-таблица ===
[1.0, 0.0, 0.09523809523809523, -0.23809523809523808, 0.0]
[0.0, 1.0, -0.2380952380952381, 0.09523809523809523, 0.0]
[0.0, 0.0, -0.6666666666666667, -0.3333333333333333, 0.0]

=== Решение ===
objective: 19.667
status: OPTIMAL_SOLUTION(2)
  x_1=3.190
  x_2=2.524
```

Рисунок 1 – Решение задачи в произвольных числах

Выпишем полученную симплекс-таблицу:

Базис	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	**План**
$\boldsymbol{x_1}$	1	0	$\frac{2}{21}$	$-\frac{5}{21}$	$\frac{67}{21}$
$\boldsymbol{x_2}$	0	1	$-\frac{5}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{53}{21}$
$\boldsymbol{z}$	0	0	$-\frac{14}{21}$	$-\frac{7}{21}$	$\frac{413}{21}$

Получаем следующее решение в произвольных числах:

$$x_1 = \frac{67}{21} = 3.19$$

$$x_2 = \frac{53}{21} = 2.52$$

$$z = \frac{413}{21} = 19.67$$

Найдём целые части оптимального решения:

$$[x_1] = 3$$

$$[x_2] = 2$$

Найдём дробные части оптимального решения:

$$\{x_1\} = \frac{67}{21} - \frac{63}{21} = \frac{4}{21}$$

$$\{x_2\} = \frac{53}{21} - \frac{42}{21} = \frac{11}{21}$$

Выбираем переменную с наибольшей дробной частью, т.е. x_2.

Вводим дополнительное ограничение целочисленности:

$$q_2 - q_{21}x_1 - q_{22}x_2 - q_{23}x_3 - q_{24}x_4 \leq 0$$

$$q_{21} = 0 - 0 = 0$$

$$q_{22} = 1 - 1 = 0$$

$$q_{23} = -\frac{5}{21} + 1 = \frac{16}{21}$$

$$q_{24} = \frac{2}{21} - 0 = \frac{2}{21}$$

$$\frac{11}{21} - \frac{16}{21}x_3 - \frac{2}{21}x_4 \leq 0$$

$$-\frac{16}{21}x_3 - \frac{2}{21}x_4 + x_5 = \frac{11}{21}$$

Добавляем новую строку и получаем следующую симплекс таблицу:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**План**
x_1	1	0	$\frac{2}{21}$	$-\frac{5}{21}$	0	$\frac{67}{21}$
x_2	0	1	$-\frac{5}{21}$	$\frac{2}{21}$	0	$\frac{53}{21}$
x_5	0	0	$-\frac{16}{21}$	$-\frac{2}{21}$	1	$\frac{11}{21}$
z	0	0	$-\frac{14}{21}$	$-\frac{7}{21}$	0	$\frac{413}{21}$

Преобразуем симплекс-таблицу и получим:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**План**
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{25}{8}$
x_2	0	1	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{16}$	$\frac{43}{16}$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{8}$	$-\frac{21}{16}$	$\frac{11}{16}$

z	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{175}{8}$

Найдём дробные части оптимального решения:

$$\{x_1\} = \frac{25}{8} - \frac{24}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\{x_2\} = \frac{43}{16} - \frac{32}{16} = \frac{11}{16}$$

$$\{x_3\} = \frac{11}{16}$$

Выбираем переменную с наибольшей дробной частью, т.е. x_2.

Вводим дополнительное ограничение целочисленности:

$$q_2 - q_{21}x_1 - q_{22}x_2 - q_{23}x_3 - q_{24}x_4 - q_{25}x_5 \leq 0$$

$$q_2 = \frac{43}{16} - 2 = \frac{11}{16}$$

$$q_{21} = 0 - 0 = 0$$

$$q_{22} = 1 - 1 = 0$$

$$q_{23} = 0 - 0 = 0$$

$$q_{24} = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}$$

$$q_{25} = -\frac{5}{16} + 1 = \frac{11}{16}$$

$$\frac{11}{16} - \frac{1}{8}x_4 - \frac{11}{16}x_5 \leq 0$$

$$-\frac{1}{8}x_4 - \frac{11}{16}x_5 + x_6 = -\frac{11}{16}$$

Добавляем новую строку и получаем следующую симплекс таблицу:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	**План**
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{25}{8}$
x_2	0	1	1	$\frac{1}{8}$	$-\frac{5}{16}$	0	$\frac{43}{16}$

x_3	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{21}{16}$	0	$\frac{11}{16}$
x_6	0	0	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{11}{16}$	1	$-\frac{11}{16}$
z	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{8}$	0	$-\frac{175}{8}$

Преобразуем симплекс-таблицу и получим:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	План
x_1	1	0	0	$-\frac{3}{11}$	0	$\frac{2}{11}$	3
x_2	0	1	0	$\frac{2}{11}$	0	$-\frac{5}{11}$	3
x_3	0	0	1	$\frac{4}{11}$	0	$-\frac{21}{11}$	2
x_5	0	0	0	$\frac{2}{11}$	1	$-\frac{16}{11}$	1
z	0	0	0	$-\frac{1}{11}$	0	$-\frac{14}{11}$	-21

Решение получилось целочисленным. Оптимальный целочисленный план можно записать так:

$x_1 = 3, x_2 = 3$

$\min z = f(3,3) = 3 * 3 + 4 * 3 = 21$

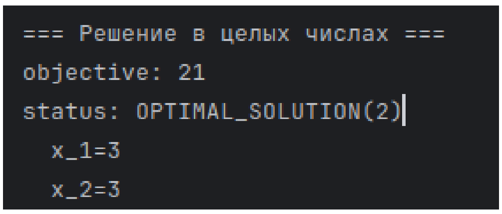

```
=== Решение в целых числах ===
objective: 21
status: OPTIMAL_SOLUTION(2)
  x_1=3
  x_2=3
```

Рисунок 2 – Решение задачи в целых числах

Второй алгоритм Гомори

Представим задачу в канонической форме:

$$z = 3x_1 + 4x_2 \to min$$

$$2x_1 + 5x_2 - x_3 = 19$$

$$5x_1 + 2x_2 - x_4 = 21$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Решим задачу программно в произвольных числах, воспользовавшись двойственным симплекс-методом и выпишем полученную таблицу:

Базис	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	**План**
$\boldsymbol{x_1}$	1	0	$\frac{2}{21}$	$-\frac{5}{21}$	$\frac{67}{21}$
$\boldsymbol{x_2}$	0	1	$-\frac{5}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{53}{21}$
$\boldsymbol{z}$	0	0	$-\frac{14}{21}$	$-\frac{7}{21}$	$\frac{413}{21}$

В полученном оптимальном плане переменная x_2 имеет дробную часть числа. Дополнительное ограничение составляем по строке, соответствующей переменной x_2.

$$\frac{2}{21}x_4 + \frac{\frac{53}{21}}{\frac{53}{21} - 1}\left(-\frac{5}{21}\right)x_3 \leq \frac{53}{21}$$

$$-\frac{11}{42}x_3 - \frac{2}{21}x_4 + x_5 = -\frac{11}{21}$$

Добавляем новую строку и получаем следующую симплекс таблицу:

Базис	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	**План**
$\boldsymbol{x_1}$	1	0	$\frac{2}{21}$	$-\frac{5}{21}$	0	$\frac{67}{21}$
$\boldsymbol{x_2}$	0	1	$-\frac{5}{21}$	$\frac{2}{21}$	0	$\frac{53}{21}$
$\boldsymbol{x_5}$	0	0	$-\frac{11}{42}$	$-\frac{2}{21}$	1	$-\frac{11}{21}$
$\boldsymbol{z}$	0	0	$-\frac{14}{21}$	$-\frac{7}{21}$	0	$\frac{413}{21}$

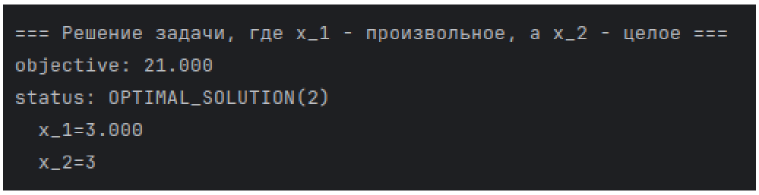
Преобразуем симплекс-таблицу и получим:

Базис	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	**План**
$\boldsymbol{x_1}$	1	0	0	$-\frac{3}{11}$	$\frac{4}{11}$	3
$\boldsymbol{x_2}$	0	1	0	$\frac{2}{11}$	$-\frac{10}{11}$	3
$\boldsymbol{x_3}$	0	0	1	$\frac{4}{11}$	$-\frac{42}{11}$	2
$\boldsymbol{z}$	0	0	0	$-\frac{1}{11}$	$-\frac{28}{11}$	-21

Получаем оптимальный план, который можно записать так:

$x_1 = 3, x_2 = 3$

$\min z = f(3{,}3) = 3 * 3 + 4 * 3 = 21$



```
=== Решение задачи, где x_1 - произвольное, а x_2 - целое ===
objective: 21.000
status: OPTIMAL_SOLUTION(2)
  x_1=3.000
  x_2=3
```

Рисунок 3 – Решение задачи при x_1 – произвольное, а x_2 - целое

Метод ветвей и границ

Построим графики, соответствующие системе:

$$2x_1 + 5x_2 \geq 19$$

$$5x_1 + 2x_2 \geq 21$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

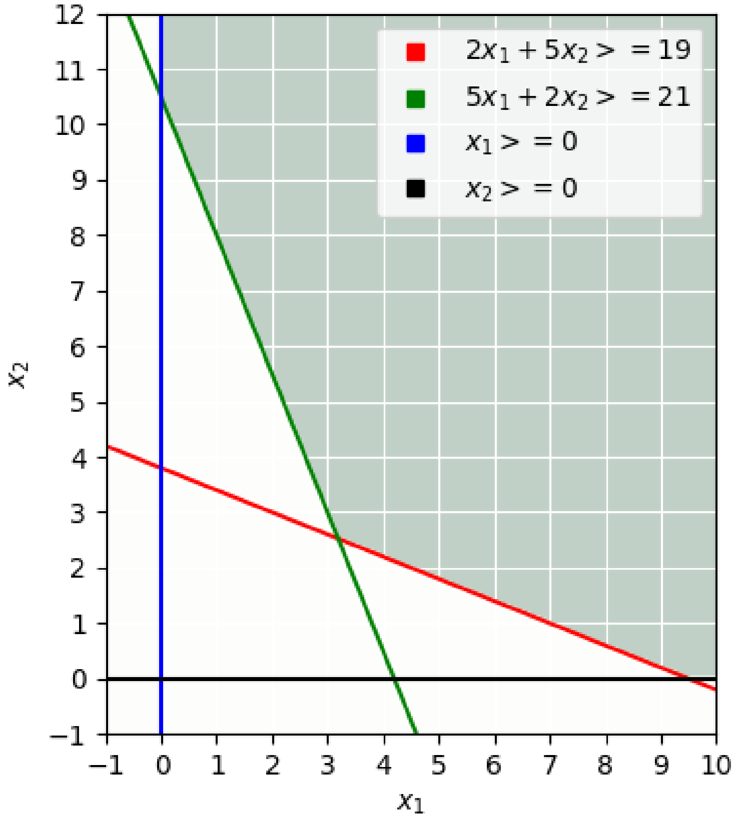


Рисунок 4 – Графики, соответствующие системе

```
Пересечение графиков $2 x_1 + 5 x_2 >= 19$ и $5 x_1 + 2 x_2 >= 21$
{x_1: 67/21, x_2: 53/21}
Пересечение графиков $2 x_1 + 5 x_2 >= 19$ и $x_2 >= 0$
{x_1: 19/2, x_2: 0}
Пересечение графиков $5 x_1 + 2 x_2 >= 21$ и $x_1 >= 0$
{x_1: 0, x_2: 21/2}
```

Рисунок 5 – Точки пересечения графиков, входящие в исследуемую область

Минимальное значение целевой функции достигается при $x_1 = \frac{67}{21}, x_2 = \frac{53}{21}$. Будем использовать его для минимизации.

Разбиваем задачу 1 на две подзадачи 11 и 12. В первой из них к условиям задачи 11 добавляется условие $x_1 \geq 4$, а к задаче 12 — условие $x_1 \leq 3$.

Решим задачу 11 как задачу ЛП.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 19 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 21 \\ \quad x_1 \geq 4 \\ \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решая задачу, получаем решение: $x_1 = 4, x_2 = 2.2, z = 3 * 4 + 4 * 2.2 = 20.8$.

Оптимальное значение переменной $x_2 = 2.2$ оказалось нецелочисленным.

Разбиваем задачу 11 на две подзадачи 111 и 112. В первой из них к условиям задачи 111 добавляется условие $x_2 \geq 3$, а к задаче 112 — условие $x_2 \leq 2$.

Решим задачу 111 как задачу ЛП.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 19 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 21 \\ \quad x_1 \geq 4 \\ \quad x_2 \geq 3 \end{cases}$$

Решая задачу, получаем решение: $x_1 = 4, x_2 = 3, z = 3 * 4 + 4 * 3 = 24$. Запоминаем значение текущего целочисленного рекорда.

Решим задачу 112 как задачу ЛП.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 19 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 21 \\ \quad x_1 \geq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \end{cases}$$

Решая задачу, получаем решение: $x_1 = 4.5, x_2 = 3, z = 3 * 4.5 + 4 * 2 = 21.5$. Оптимальное значение переменной $x_1 = 4.5$ оказалось нецелочисленным.

Решим задачу 12 как задачу ЛП.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 19 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 21 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решая задачу, получаем решение: $x_1 = 3, x_2 = 3, z = 3 * 4 + 4 * 3 = 21$. Запоминаем значение текущего целочисленного рекорда $21 \leq 24 \rightarrow 21$.

Оптимальный план можно записать так:
$x_1 = 3, x_2 = 3, z = 21.$

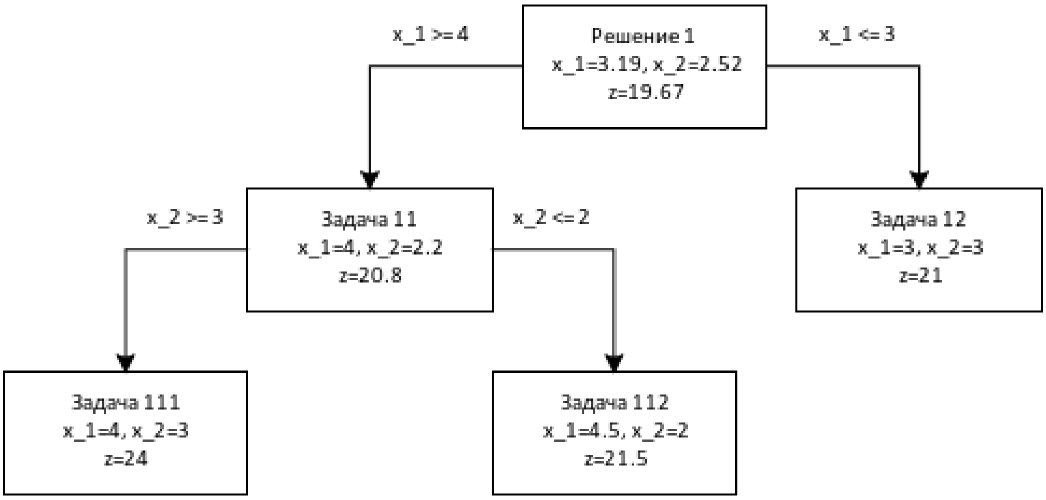


Рисунок 6 – Схема метода ветвей и границ

Вывод: в ходе выполнения лабораторной работы были сформированы практические навыки анализа возможностей построения и выделения наиболее важных свойств объектов моделей для моделирования и использования специализированных программных пакетов и библиотек для стандартных вычислений при решении задач целочисленного линейного программирования на основе сравнения результатов.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Листинг программы

Задание 1

```
from docplex.mp.model import Model

m = Model()
x_1 = m.integer_var(name='x_1', lb=0)
x_2 = m.integer_var(name='x_2', lb=0)

m.add_constraint(2 * x_1 + 5 * x_2 >= 19)
m.add_constraint(5 * x_1 + 2 * x_2 >= 21)
m.minimize(3 * x_1 + 4 * x_2)

c = m.get_cplex()
c.parameters.simplex.limits.iterations.set(100)
c.parameters.lpmethod.set(c.parameters.lpmethod.values.primal)

while c.solution.get_status() != c.solution.status.optimal:
    c.solve()
    print("=== Симплекс-таблица ===")
    for tableau_row in c.solution.advanced.binvarow():
        print(tableau_row)

m.solve()
print("\n=== Решение задачи ===")
m.print_solution()
```

Задание 2

```
from docplex.mp.model import Model

m = Model()
x_1 = m.continuous_var(name='x_1', lb=0)
x_2 = m.integer_var(name='x_2', lb=0)

m.add_constraint(2 * x_1 + 5 * x_2 >= 19)
m.add_constraint(5 * x_1 + 2 * x_2 >= 21)

m.minimize(3 * x_1 + 4 * x_2)


m.solve()
print("\n=== Решение задачи, где x_1 - произвольное, а x_2 - целое
===")
m.print_solution()
```

Задание 3

```
import itertools
from functools import reduce
```

```python
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import sympy
from matplotlib.ticker import MultipleLocator

if __name__ == '__main__':
    conditions = [
        lambda x_1, x_2: 2 * x_1 + 5 * x_2 >= 19,
        lambda x_1, x_2: 5 * x_1 + 2 * x_2 >= 21,
        lambda x_1, x_2: x_1 >= 0,
        lambda x_1, x_2: x_2 >= 0
    ]

    equalities = [
        lambda x_1, x_2: 2 * x_1 + 5 * x_2 - 19,
        lambda x_1, x_2: 5 * x_1 + 2 * x_2 - 21,
        lambda x_1, x_2: x_1,
        lambda x_1, x_2: x_2
    ]

    labels = [
        '$2 x_1 + 5 x_2 >= 19$',
        '$5 x_1 + 2 x_2 >= 21$',
        '$x_1 >= 0$',
        '$x_2 >= 0$'
    ]

    colors = ['r', 'g', 'b', 'k']

    x_1_bounds = (-1, 10)
    x_2_bounds = (-1, 12)

    x_1_range = np.linspace(x_1_bounds[0], x_1_bounds[1], 250)
    x_2_range = np.linspace(x_2_bounds[0], x_2_bounds[1], 250)
    x_1s, x_2s = np.meshgrid(x_1_range, x_2_range)

    axis: plt.Axes
    figure, axis = plt.subplots()

    axis.set_xlim(*x_1_bounds)
    axis.set_ylim(*x_2_bounds)

    handles = []
    for equality in equalities:
        axis.contour(
            x_1s, x_2s, equality(x_1s, x_2s), [0],
            colors=colors[equalities.index(equality)]
        )
        handles.append(
            matplotlib.lines.Line2D(
                [], [], color=colors[equalities.index(equality)],
```

```
                marker="s", ls="",
                label=labels[equalities.index(equality)]
            )
        )

    regions = [condition(x_1s, x_2s) for condition in conditions]
    intersection = np.array(reduce(lambda _x, _y: _x & _y, regions))

    extent = (x_1s.min(), x_1s.max(), x_2s.min(), x_2s.max())
    plt.imshow(
        intersection.astype(int),
        extent=extent,
        origin="lower",
        cmap="Greens",
        alpha=0.25
    )

    plt.xlabel("$x_1$")
    plt.ylabel("$x_2$")

    axis.xaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))
    axis.yaxis.set_major_locator(MultipleLocator(1))

    axis.grid(color='w', linestyle='-')

    plt.legend(handles=handles)
    plt.show()

    sym_x_1 = sympy.Symbol('x_1')
    sym_x_2 = sympy.Symbol('x_2')
    for equality_1, equality_2 in
list(itertools.combinations(equalities, 2)):

        solution = sympy.solve(
            [
                equality_1(sym_x_1, sym_x_2), equality_2(sym_x_1,
sym_x_2)
            ],
            [sym_x_1, sym_x_2], particular=True
        )

        x_1 = solution[sym_x_1]
        x_2 = solution[sym_x_2]

        if all(ineq(x_1, x_2) for ineq in conditions):
            print('Пересечение графиков ', end='')
            print(labels[equalities.index(equality_1)], end=' и ')
            print(labels[equalities.index(equality_2)])
            print(solution)
```