Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Калужский филиал
федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(КФ МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ **ИУК «Информатика и управление»**

КАФЕДРА **ИУК4 «Программное обеспечение ЭВМ, информационные технологии»**

Лабораторная работа №2

«Графический метод решения задачи математического программирования»

ДИСЦИПЛИНА: «Моделирование»

Выполнил: студент гр. ИУК4-72Б ________________ (Сафронов Н.С.)
(подпись) (Ф.И.О.)

Проверил: ________________ (Никитенко У.В.)
(подпись) (Ф.И.О.)

Дата сдачи (защиты):

Результаты сдачи (защиты):

- Балльная оценка:

- Оценка:

Калуга, 2023

Цель работы: изучение математического аппарата математического программирования на примере задач небольшой размерности, допускающих графическое решение.

Постановка задачи

Вариант 14

Найти условный экстремум функции методом множителей Лагранжа:

$$z = 2x_1 - x_2 + x_3 \to extr$$

при условии

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

Решение

$$L = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda\phi(x_1, x_2, x_3)$$

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$$

$$L = 2x_1 - x_2 + x_3 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$$

$$L'_{x_1} = 2 + 2\lambda x_1$$

$$L'_{x_2} = -1 + 2\lambda x_2$$

$$L'_{x_3} = 1 + 2\lambda x_3$$

$$\begin{cases} 2 + 2\lambda x_1 = 0 \\ -1 + 2\lambda x_2 = 0 \\ 1 + 2\lambda x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{\lambda} \\ x_2 = \dfrac{1}{2\lambda} \\ x_3 = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 1 = 0$$

$$\frac{6}{4\lambda^2} = 1$$

$$\lambda^2 = \frac{3}{2}$$

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\lambda} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ x_2 = \frac{1}{2\lambda} = \sqrt{\frac{2}{12}} \\ x_3 = -\frac{1}{2\lambda} = -\sqrt{\frac{2}{12}} \\ \lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ x_2 = \frac{1}{2\lambda} = -\sqrt{\frac{2}{12}} \\ x_3 = -\frac{1}{2\lambda} = \sqrt{\frac{2}{12}} \\ \lambda = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$L''_{x_1x_1} = 2\lambda$$

$$L''_{x_2x_2} = 2\lambda$$

$$L''_{x_3x_3} = 2\lambda$$

$$L''_{x_1x_2} = L''_{x_1x_3} = L''_{x_2x_1} = L''_{x_2x_3} = L''_{x_3x_1} = L''_{x_3x_2} = 0$$

$$d^2L = L''_{x_1x_1}(dx_1)^2 + L''_{x_2x_2}(dx_2)^2 L''_{x_3x_3}(dx_3)^2$$

$$\begin{cases} d^2L = L''_{x_1x_1}(dx_1)^2 + L''_{x_2x_2}(dx_2)^2 L''_{x_3x_3}(dx_3)^2 = 2\lambda(dx_1)^2 + 2\lambda(dx_2)^2 + 2\lambda(dx_3)^2 \\ \lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d^2L > 0 \\ \lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases} => M_1 = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{12}}, -\sqrt{\frac{2}{12}}\right) \approx$$

$$\approx (-0.82, 0.41, -0.41) - \text{точка условного минимума}$$

$$z = f(M_1) = f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{12}}, -\sqrt{\frac{2}{12}}\right) = -4\sqrt{\frac{2}{12}} - \sqrt{\frac{2}{12}} - \sqrt{\frac{2}{12}} =$$

$$= -6\sqrt{\frac{1}{6}} \approx -2.45$$

$$\begin{cases} d^2L = L''_{x_1x_1}(dx_1)^2 + L''_{x_2x_2}(dx_2)^2 L''_{x_3x_3}(dx_3)^2 = 2\lambda(dx_1)^2 + 2\lambda(dx_2)^2 + 2\lambda(dx_3)^2 \\ \lambda = -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d^2L < 0 \\ \lambda = \sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases} => M_2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{12}}, \sqrt{\frac{2}{12}}\right) \approx$$

$$\approx (0.82, -0.41, 0.41) - \text{точка условного максимума}$$

$$z = f(M_1) = f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{12}}, \sqrt{\frac{2}{12}}\right) = 4\sqrt{\frac{2}{12}} + \sqrt{\frac{2}{12}} + \sqrt{\frac{2}{12}} =$$

$$= 6\sqrt{\frac{1}{6}} \approx 2.45$$

Построим графики функций и обозначим на них полученные точки:

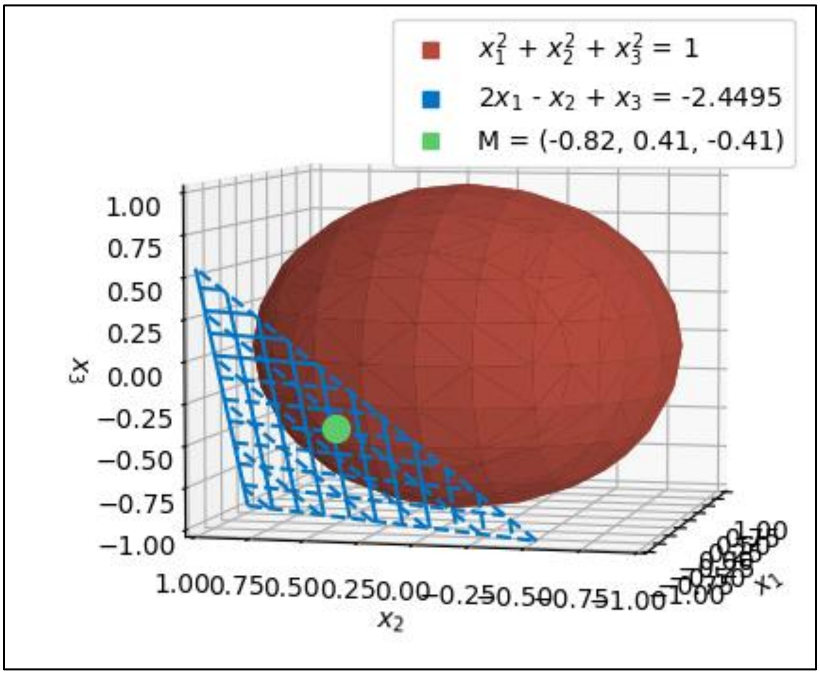

Рисунок 1 – Найденная точка условного локального минимума

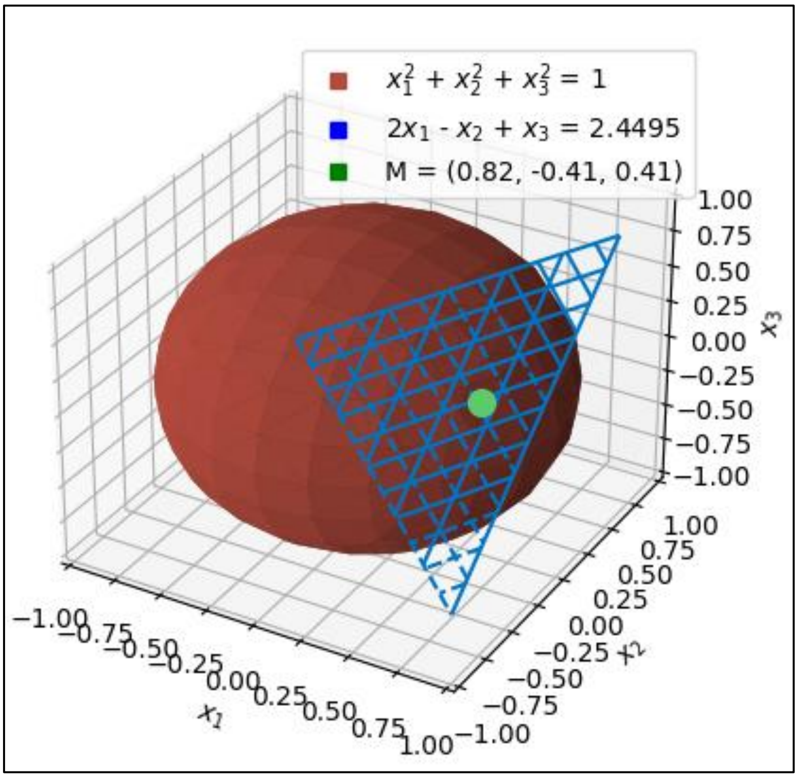

Рисунок 2 – Найденная точка условного локального максимума

Вывод: в ходе выполнения лабораторной работы был изучен математический аппарат математического программирования на примере задач небольшой размерности, допускающих графическое решение.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Листинг программы

```
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from skimage import measure


def function(x_1: float, x_2: float, x_3: float, z: float) -> float:
    return 2 * x_1 - x_2 + x_3 - z


def condition(x_1: float, x_2: float, x_3: float) -> float:
    return np.power(x_1, 2) + np.power(x_2, 2) + np.power(x_3, 2) - 1


def plot_implicit(
        axis: plt.Axes, fn, bbox=(-2.5, 2.5), color="red",
        order=1
):
    xl = np.linspace(-3, 3, 25)
    X, Y, Z = np.meshgrid(xl, xl, xl)
    F = fn(X, Y, Z)
    verts, faces, normals, values = measure.marching_cubes(
        F, 0, spacing=[np.diff(xl)[0]] * 3
    )
    verts -= 3
    axis.plot_trisurf(
        verts[:, 0], verts[:, 1], verts[:, 2], triangles=faces,
        color=color, lw=0, zorder=order
    )


def plot_implicit_contour(
        axis: plt.Axes, fn, bbox=(-2.5, 2.5), color="red",
        order=1
):
    A = np.linspace(-1, 1, 100)
    B = np.linspace(-1, 1, 15)
    A1, A2 = np.meshgrid(A, A)
    for z in B:

        X, Y = A1, A2
        Z = fn(X, Y, z)
        cset = axis.contour(
            X, Y, Z + z, [z], zdir="z", colors=[color],
            zorder=order
        )

    for y in B:
        X, Z = A1, A2
        Y = fn(X, y, Z)
        cset = axis.contour(
            X, Y + y, Z, [y], zdir="y", colors=[color],
            zorder=order
        )
```

```
    for x in B:
        Y, Z = A1, A2
        X = fn(x, Y, Z)
        cset = axis.contour(
            X + x, Y, Z, [x], zdir="x", colors=[color],
            zorder=order
        )


def show_result_plot(
        function,
        condition,
        z: float,
        point: list,
        colors: dict,
        legend: list
):
    figure = plt.figure()
    axis = figure.add_subplot(111, projection="3d", computed_zorder=False)
    plot_implicit(axis, condition, color=colors["red"], order=1)
    plot_implicit_contour(
        axis, lambda x_1, x_2, x_3: function(x_1, x_2, x_3, z),
        color=colors["blue"], order=2
    )
    axis.plot(
        point[0], point[1], point[2], ".", c=colors["black"],
        markersize=20, zorder=3
    )
    axis.set_xlabel("$x_1$")
    axis.set_ylabel("$x_2$")
    axis.set_zlabel("$x_3$")
    axis.set_xlim(-1, 1)
    axis.set_ylim(-1, 1)
    axis.set_zlim(-1, 1)

    plt.legend(
        handles=legend
    )
    plt.show()


if __name__ == "__main__":
    colors = {
        "red": "#B34B3E",
        "blue": "#0174C3",
        "black": "#5DCA6E"
    }

    min_z = -6 * np.sqrt(1 / 6)
    red_legend_handle = matplotlib.lines.Line2D(
        [], [], color=colors["red"], marker="s", ls="",
        label="$x_1^2$ + $x_2^2$ + $x_3^2$ = 1"
    )
    blue_legend_handle = matplotlib.lines.Line2D(
        [], [], color=colors["blue"], marker="s", ls="",
        label=f"2$x_1$ - $x_2$ + $x_3$ = {min_z:.4f}"
    )
    green_legend_handle = matplotlib.lines.Line2D(
        [], [], color=colors["black"], marker="s", ls="",
```

```
    label=f"M = ({-np.sqrt(2 / 3):.2f}, "
          f"{np.sqrt(2 / 12):.2f}, {-np.sqrt(2 / 12):.2f})"
)
legend = [red_legend_handle, blue_legend_handle, green_legend_handle]
point = [-np.sqrt(2 / 3), np.sqrt(2 / 12), -np.sqrt(2 / 12)]
show_result_plot(function, condition, min_z, point, colors, legend)

max_z = 6 * np.sqrt(1 / 6)
blue_legend_handle = matplotlib.lines.Line2D(
    [], [], color="blue", marker="s", ls="",
    label=f"2$x_1$ - $x_2$ + $x_3$ = {max_z:.4f}"
)
green_legend_handle = matplotlib.lines.Line2D(
    [], [], color="green", marker="s", ls="",
    label=f"M = ({np.sqrt(2 / 3):.2f}, "
          f"{-np.sqrt(2 / 12):.2f}, {np.sqrt(2 / 12):.2f})"
)
legend = [red_legend_handle, blue_legend_handle, green_legend_handle]
point = [np.sqrt(2 / 3), -np.sqrt(2 / 12), np.sqrt(2 / 12)]
show_result_plot(function, condition, max_z, point, colors, legend)
```