Пусть задана целевая функция f(x), производные которой могут быть разрывными либо не вычисляются явно. Такая ситуация возможна, например, если значения функции заданы в табличной форме. В этом случае рассматриваются два подхода: методы поиска и методы сопряжённых направлений.

**Метод поиска**

С помощью этой формулы можно получить диагональные элементы матрицы G, считая первые n направляющих векторов равными (1,0,…,0),…,(0,0,…,1).

– начальная точка, векторы

Для вычисления недиагональных элементов матрицы G

Недостатки градиентного метода:

1. При минимизации положительно определённой квадратичной формы этот метод бесконечен.
2. Каждая итерация выполняется независимо от других.
3. Скорость сходимости зависит от вида функции.

**Метод сопряженных направлений**

Пусть – начальная точка и , – точка минимума функции на луче, выходящем из в направлении вектора .

Положим

**Метод переменной метрики**

Пусть – начальная точка, – приближённая положительно определённая матрица, – ненулевой направляющий вектор, полученнный на итерации.

**Каноническая задача линейного программирования**

**Базисом опорного плана** называется система из m линейно независимых условий, которая включает все векторы, отвечающие положительным компонентам опорного плана.

**Опорный план** называется невырожденным, если он содержит ровно m положительных компонент.

Следовательно, невырожденный опорный план имеет единственный базис, а у вырожденного их может быть несколько.

Задача невырождена, если все её опорные планы невырождены.

Теорема 1. Множество всех планов задачи ЛП выпукло.

Доказательство. Пусть и планы задачи.

Возьмём число , и умножим первое равенство на , а второе :

Теорема 2. Если множество планов задачи не пусто, то оно имеет хотя бы одну угловую точку.

Теорема 3. Если задача ЛП разрешима, то оптимальное значение целевой функции достигается в вершине многогранника планов. Если целевая функция принимает оптимальное значение более, чем в одной вершине, то оно принимает его в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.

Теорема 4. Вектор является опорным планом задачи тогда и только тогда, когда – вершина многогранника планов этой задачи.

**11.10.2023**

Симплекс-метод

Если задача разрешима, то существует вершина многогранника допустимых решений, в которой целевая функция достигает экстремума.

Каждой вершине соответствует опорный план.

**Условия оптимальности опорного плана**

**Теорема** (признак оптимальности). Если для некоторого опорного плана выполняются неравенства *,* то этот план является оптимальным для задачи.

Целевая функция ограничена снизу на многограннике решний, поэтому существует оптимальный план

1. Исходная задача не имеет ни одного плана, т.е. система ограничений несовместна (если бы существовал план являлся бы планом вспомогательной задачи, на котором .
2. .

– план исходной задачи

– сколь угодно большое положительное число соответствующее искусственным переменным, которые образую базис, который называется искусственным базисом.

Теорема. Если в оптимальном плане расширенной задачи все искусственные переменные равны нулю, то вектор является оптимальным планом задачи.

Доказательство.

План исходной задачи такой, что . Это противоречит условию, что - оптимальный план расширенной задачи.

**Двойственность в линейном программировании**

Несимметричные двойственные задачи

Введём -мерный вектор – строку и составим задачу:

В матричной форме

Целевая функция максимизируется:

Эта задача эквивалентна задаче минимизация функции

Двойственная задача

Она эквивалентна задаче:

Замена

Прямая задача

Двойственная задача

**Экономическая интерпретация двойственной задачи**

Лемма 1. Для любых планов прямой и двойственной задач выполняется неравенство .

Лемма 2. Если для некоторых планов пары двойственных задач выполняется равенство , то - оптимальные планы.

Первая теорема двойственности. Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальный план, то другая тоже имеет оптимальный план, причём оптимальные значения целевых функций равны. Если целевая функция одной из этих задач не ограничена, то двойственная задача не имеет планов.

Нахождение решения двойственной задачи

матрица, составленная из векторов базиса оптимального плана,

вектор-строка коэффициентов целевой функции при базисных переменных.

Оптимальный план двойственной задачи:

образуют единичную матрицу .

Вторая теорема двойственности.

Для того, чтобы планы двойственных задач были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли условиям дполонющей нежесткости:

Двойственный симплекс метод

Прямая задача

Двойственная задача

…

Опорный вектор является псевдопланом тогда и только тогда, когда – признак оптимальности. Если среди базисных компонент псевдоплана нет отрицательных, то псевдоплан – оптимальный (неотрицательность всех компонент означает, что псевдоплан является опорным планом, а так как все оценки , то этот план является оптимальным).

Вычислительная схема двойственного симплект-метода для двойственно невырожденной канонической задачи ЛП

1. Строится первоначальный псевдоплан, заполняется первая симплекс таблица.

…

1. Среди отрицальных коэффициентов направляющей строки выбираем элемент, для которого двойственное симплекс отношение .

…

**01.10.2023**

**Целочисленное программирование**

**Задача целочисленного линейного программирования**

**Метод отсечения**

**Общая схема метода отсечения**

Сначала решается задача без условия целочисленности переменных. Если решение задачи является целочисленным, то оно является оптимальным решением исходной целочисленной задачи.

В противном случае к ограничениям задачи добавляют новое линейное ограничение, называемое отсечением, которое переводит исходную задачу в задачу с многогранником планов, обладающим свойствами:

1. Нецелочисленный оптимальный план задачи не принадлежит многограннику планов задачи.
2. Все целочисленные планы задачи остаются в многограннике планов задачи.

После этого решается новая задача. Затем в случае необходиомсти добавляются ещё одно ограничение и решается новая задача и т.д.

**Определение.** Пусть - оптимальный план задачи, не являющийся целочисленным. Неравенство

Называется правильным отсечением, если оно удовлетворяет двум условиям:

1. Для вектора неравенство не выполняется, т.е.
2. Если – целочисленный план задачи, то план задачи удовлетворяет неравенству (5) (условие правильности).

**Алгоритм плотного заполнения**

**…**

**Метод Фора-Мальгранжа**

0 этап – определяют допустимый план ;

1 этап – добавляют новое ограничение ;

2 этап – находят допустимый план задачи, если план не улучшается, то он оптимальный; а если найден улучшенный план , то ограничение заменяется на .

Останавливаемся, если система ограничений противоречива.

**Алгоритм Балаша**

Основан на формировании и исследовании дерева ветвлений. Подмножеству на уровне дерева ветвлений отвечает следующая задача:

При условиях

Пусть все ,

Если в ограничении при : , то .

Если неравенство выполняется для коэффициента при переменной , то (.

Пересчёт правых частей ограничений и снова проверяется выполнение неравенства .