Jogando Sinuca com π

Como o número de colisões em um sistema mecânico computa os dígitos de π

Leonardo Lima Santos
Lucas Pimentel Alves da Costa
Pedro Kury Kitagawa

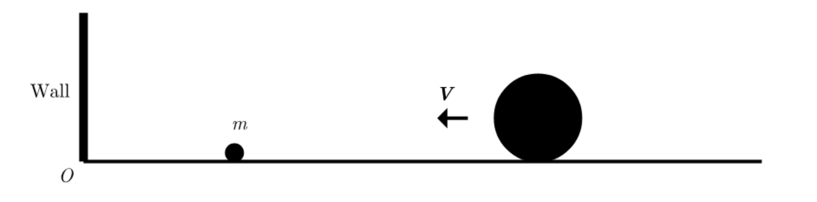
22 de junho de 2025

Definição do Problema

Objetivo: Calcular a quantidade de colisões em um sistema idealizado

- **Sistema Físico**
    - Parede fixa em $x = 0$
    - Duas bolas de massa m (pequena) e M (grande)
    - Movimento unidimensional (eixo X)
    - Bola m em repouso entre parede e bola M
    - Bola M inicia com velocidade V em direção a m

Definição do Problema



Variáveis e Suposições do Sistema

- Variáveis fundamentais:
  - Massa das bolas m e M
  - Razão $\frac{M}{m} = 100^N$, com N dígitos de π a computar
- Simplificações e desconsiderações:
  - Colisões perfeitamente elásticas
  - Ausência de atrito e resistência do ar
  - Bolas como partículas adimensionais

O que realmente acontece nas colisões?

Análise do caso simples $m = M$

$$u_0 = 0, \qquad v_0 = V,$$

$$u_1 = \frac{(m-M)u_0 + 2Mv_0}{m+M}, \qquad v_1 = \frac{(M-m)v_0 + 2mu_0}{m+M}$$

Resultados para $m = M$

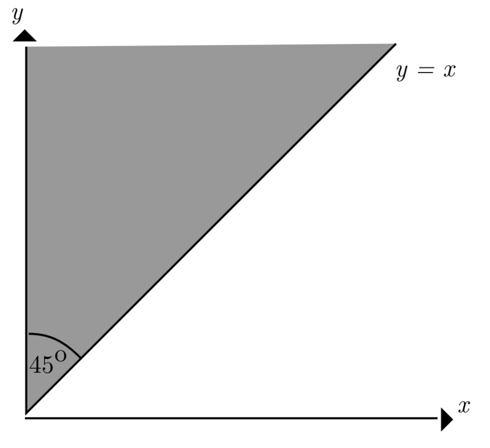
$$u_1 = \frac{2MV}{2M} = V,$$
$$v_1 = \frac{0 \cdot V}{2m} = 0$$

1. M bate com velocidade V na bola m e fica em repouso (1ª colisão)
2. m segue até a parede, bate na parede com velocidade V e volta com velocidade $-V$ (2ª colisão)
3. m bate com velocidade $-V$ na bola M e fica em repouso (3ª colisão)
4. M segue com $-V$ indefinidamente

O espaço de configuração do sistema

Posição da **bola m** é $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{t})$, e da **bola M** é $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{t})$

Definimos como **função posição** $P(t) = (x(t), y(t))$, com $0 \leq x(t) \leq y(t)$, que nos dá um ponto em um espaço no $\mathbb{R}^2$



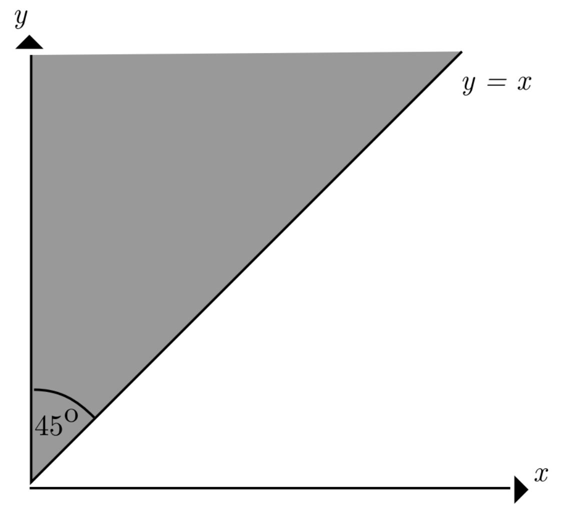
Tipos de Colisões no Sistema

- **Bola-Parede**: $x(t) = 0$, reflexão simples no eixo Y
- **Bola-Bola**: $x(t) = y(t)$, reflexão na fronteira $x = y$ (a depender das massas)

No caso em que $m = M$, as reflexões são todas ópticas.

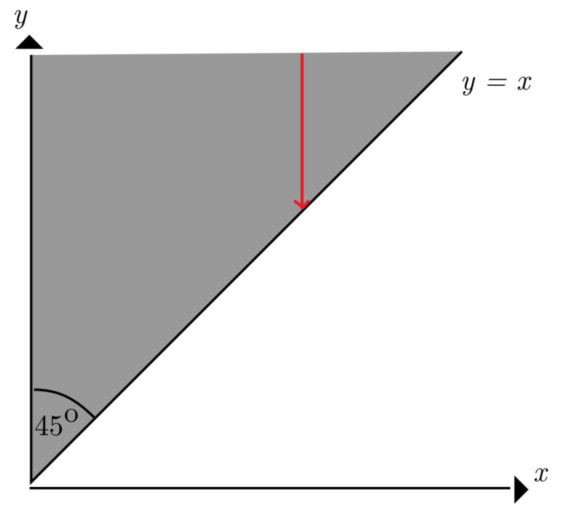
Início do experimento

$\vec{P} = (x(t), y(t))$, $\dot{\vec{P}} = (\dot{x}, \dot{y}) = (u, v)$



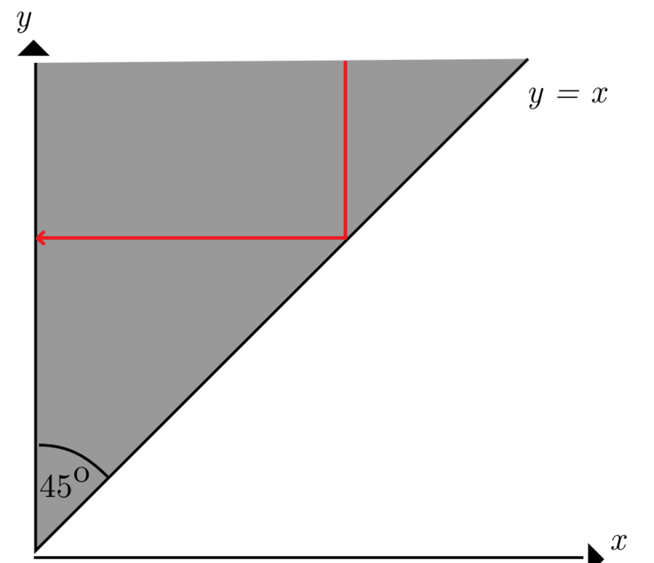
Primeira colisão entre m e M

$$\dot{\vec{P}}(t_0) = (0, V) \rightarrow \dot{\vec{P}}(t_1) = (V, 0)$$



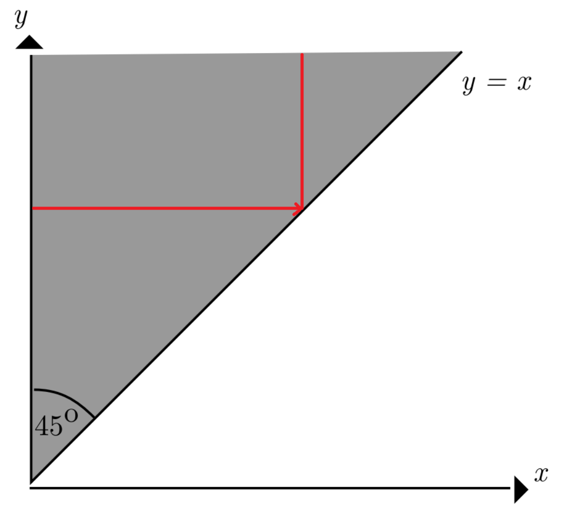
Colisão entre m e a parede

$$\dot{\vec{P}}(t_1) = (V, 0) \rightarrow \dot{\vec{P}}(t_2) = (-V, 0)$$



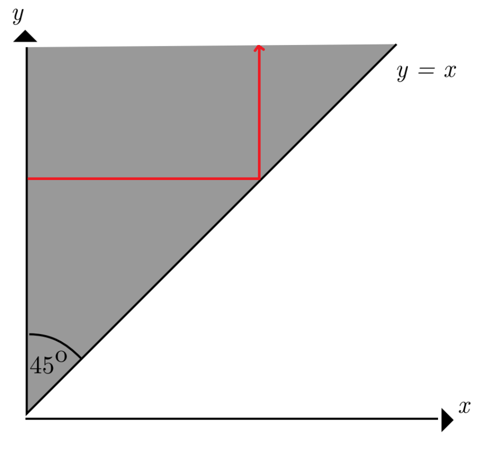
Segunda colisão entre m e M

$$\dot{\vec{P}}(t_2) = (-V, 0) \to \dot{\vec{P}}(t_3) = (0, -V)$$



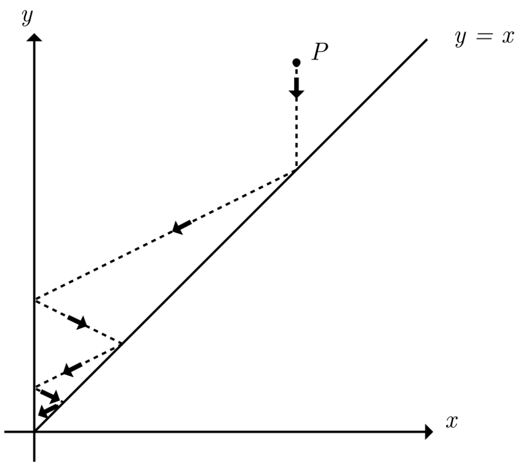
M segue infinitamente, com m parado

$\dot{\vec{P}}(t_\infty) = (0, -V)$



O que acontece quando $m \neq M$?

- Reflexões não são ópticas
- Não sabemos se as colisões param



O pulo do gato

A chave para simplificar o problema: tornar a reflexão na fronteira $x = y$ óptica (i.e., o ângulo de entrada igual ao de saída). Definimos:

$$x' = \sqrt{m}\, x, \quad y' = \sqrt{M}\, y$$

Representação Matricial da Transformação

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \vec{p'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

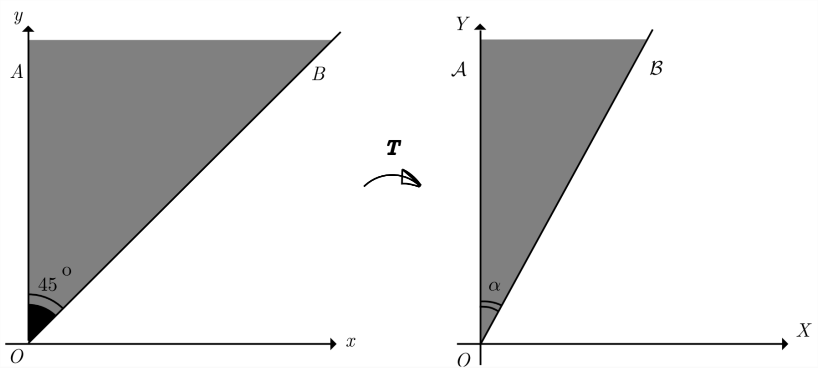
$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{m} & 0 \\ 0 & \sqrt{M} \end{pmatrix}, \qquad \vec{p'} = T\,\vec{p}$$

Resultando em:

$$\vec{p'} = \begin{pmatrix} \sqrt{m}\,x \\ \sqrt{M}\,y \end{pmatrix}$$

Novo espaço após aplicação de T

Ângulo entre eixo X e reta $x = y$ se altera.



Por que aplicamos T?

- **Objetivo:** fazer com que as reflexões tornem-se ópticas
- Precisamos, então, provar que T faz com que as reflexões sejam ópticas

Propriedades da Transformação T

Velocidade: $\dot{\vec{P}}' = (\sqrt{m}u, \sqrt{M}v)$. Em outras palavras, T transforma a velocidade da mesma forma que transforma as posições. Vamos analisar as reflexões nos seguintes casos:

- Reflexão na parede (fixada em $x = 0$)
- Reflexão no eixo $Y = \sqrt{\frac{M}{m}}X$

Ângulo Transformado

Quando aplicamos T no espaço, o nosso novo ângulo α é tal que:

$$\tan\alpha = \frac{x'}{y'} = \frac{\sqrt{m}\cdot x}{\sqrt{M}\cdot y} = \sqrt{\frac{m}{M}}$$

já que $y = x$ no lado oblíquo ao ângulo. Logo $\alpha = \arctan\sqrt{\frac{m}{M}}$.
Usaremos isso no futuro.

Reflexão no eixo Y

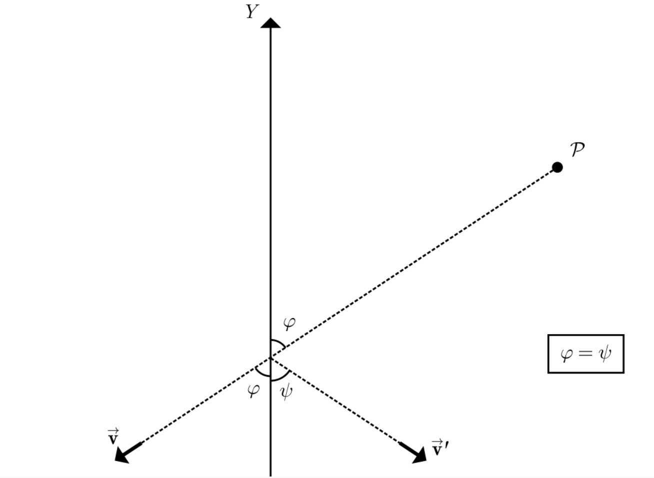
Vamos chamar de φ o ângulo que a trajetória faz com o eixo Y antes de atingí-lo e chamar de ψ o ângulo que a trajetória faz com o eixo Y depois de tê-lo atingido.

A mudança da velocidade u para $-u$ implica na transformação

$$\dot{\vec{P}}' = (-\sqrt{m}\,u, \sqrt{M}\,v)$$

Isso só pode acontecer se $\varphi = \psi$.

Demonstração: Reflexão no Eixo Y



Conclui-se que é reflexão óptica. $\square$ 1/2

Reflexão no eixo $Y = \sqrt{\frac{M}{m}}X$

Considerando as conservações do sistema, entenda K_1 e K_2 como constantes tal que:

$$\begin{cases} mu + Mv & = K_1, \text{(conservação do momento linear)} \\ mu^2 + Mv^2 & = K_2, \text{(conservação da energia cinética)} \end{cases}$$

Reformulações em Coordenadas Transformadas

$$\dot{\vec{P'}} = (\sqrt{m}\,u, \sqrt{M}\,v), \vec{m} = (m, M)$$

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \dot{\vec{P'}} = K_1, \\ |\dot{\vec{P'}}|^2 = K_2. \end{cases}$$

Dessa forma:

$$|\vec{m}||\dot{\vec{P'}}| \cos\varphi = K_1 \therefore$$

$$(\sqrt{M^2 + m^2})\sqrt{K_2} \cos\varphi = K_1$$

Demonstração: Reflexão na Diagonal

Então: $\cos\varphi = \frac{K_1}{(\sqrt{M^2+m^2})\sqrt{K_2}} = K_3$, com K_3 constante.

- Depois da reflexão, o ângulo passa a ser ψ, mas o mesmo sistema ainda vale, então $\cos\psi = K_3$
- Concluímos, portanto, que $\psi = \varphi$

■ 2/2

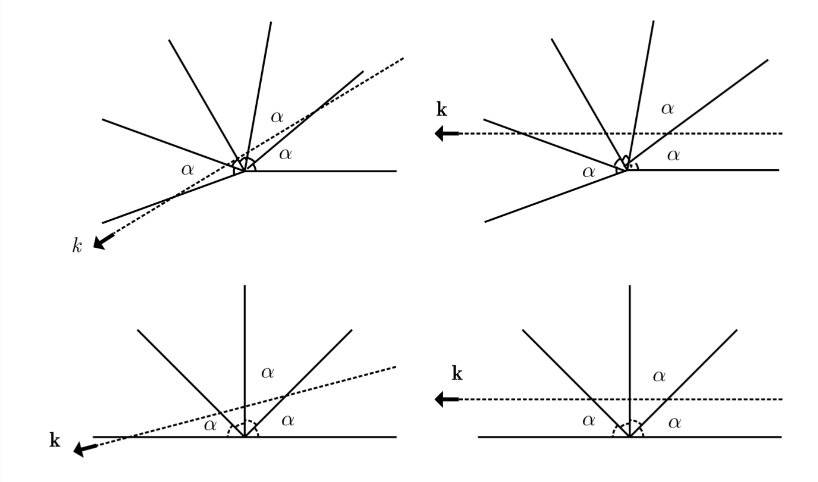
Número de Reflexões Ópticas

Até agora, o número de reflexões ainda pode ser infinita.

Enunciamos, e em seguida provaremos, o seguinte lema:

Lema
(a) Máximo número de reflexões no ângulo α é finito.
(b) O número de reflexões é igual a $\frac{\pi}{\alpha}$ se $\frac{\pi}{\alpha} \in \mathbb{Z}$, senão $\lfloor \frac{\pi}{\alpha} \rfloor + 1$.
(c) Se o raio inicial for paralelo a um dos lados do ângulo α (ou seja, $u = 0, v = V$), o número reduz em 1.

Desdobramos o ângulo α e a trajetória γ. Como as reflexões são ópticas, então a imagem é a reta k.



Prova do Lema

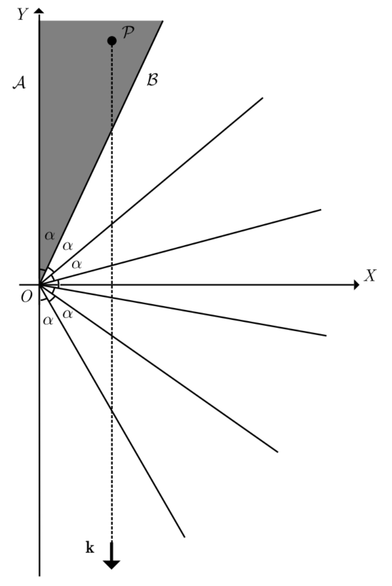
Para cada intersecção de k com uma cópia do ângulo, acontece uma reflexão em γ.

- Como k intersecta uma quantidade finita de ângulos, então está provado (a). $\square$ 1/3
- Se n é o número máximo de reflexões, temos $n\alpha = \pi$, ou $n\alpha > \pi > (n-1)\alpha$. No primeiro caso, $n = \frac{\pi}{\alpha}$, no segundo caso, $n = [\frac{\pi}{\alpha}] + 1$. $\square$ 2/3
- Quando k é paralelo ao lado do ângulo α, então a possível intersecção final não acontece. $\blacksquare$ 3/3

Prova do Teorema $\Pi = 31415926535897\ldots$

- Tome o número de reflexos $\Pi(N)$.
- Suponha o raio k que descreve o desdobramento da trajetória γ do sistema na configuração $\alpha = AOB$.

O início de γ (i.e., antes do primeiro choque) deve ser paralelo ao eixo Y (ou seja, $u = 0$ e $v = V$), assim como k.



Dessa maneira, o número de reflexões nos "lados do ângulo α" é igual a $\lfloor \pi/\alpha \rfloor$, mas nada garante que π/α será um número inteiro, na verdade:

$$\alpha = \arctan\sqrt{\frac{m}{M}} = \arctan\sqrt{\frac{m}{m \cdot 100^N}} = \arctan\left(10^{-N}\right)$$

Fórmula para Π: O caso simples

Para $N = 0$:

$$\alpha = \mathrm{arctan}(10^0) = \mathrm{arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$$

Então a primeira parte do Lema (c) vale:

$$\Pi(0) = \lfloor 4 \rfloor - 1 = 3$$

Fórmula para Π: Demais Casos

Para $N \geq 1$, $\alpha = \arctan(10^{-N})$ é um ângulo arbitrário que não consegue mensurar um número racional de graus $(180/k)$. Nesse contexto, a segunda parte do Lema (c) é aplicável e consequentemente achamos a fórmula exata:

$$\Pi(N) = \left\lfloor \frac{\pi}{\arctan(10^{-N})} \right\rfloor \blacksquare$$

Podemos realizar uma aproximação para $\arctan(10^{-N})$ para simplificar a nossa solução exata.

Aproximação usando Série de Taylor

Recorde-se que:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Limite da Aproximação

Usando a aproximação anterior, podemos afirmar que:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\arctan x} - \frac{1}{x}\right) = 0$$

Então, $\arctan(x) \approx x$ quando $x \to 0$

Aproximação para Π: Demais Casos (continuação)

Como $x = 10^{-N}$ e $N \in \mathbb{N}$, temos que:

$$1 \geq x > 0$$

e:

$$\frac{1}{\arctan x} > \frac{1}{x} \implies \frac{\pi}{\arctan x} > \frac{\pi}{x}$$

Como $\frac{\pi}{\arctan(10^{-N})} > \frac{\pi}{10^{-N}}$, logo:

$$\Pi(N) = \left\lfloor \frac{\pi}{\arctan(10^{-N})} \right\rfloor \approx \left\lfloor \frac{\pi}{10^{-N}} \right\rfloor = \lfloor \pi \cdot 10^{N} \rfloor$$

Precisão da Aproximação

Empiricamente, pode-se verificar que $\Pi(N) = \lfloor \pi * 10^N \rfloor$ para $N \leq 50,000,000$. Contudo, para $N > 50,000,000$ algo particular do método deve ser considerado.

Problema no método

Da demonstração anterior, temos que:

$$\lim_{N \to \infty} \left(\frac{\pi}{\arctan(10^{-N})} - \frac{\pi}{10^{-N}} \right) = 0$$

Portanto, pelo Lema (b) e pelo Lema (c), temos duas opções para quando N é grande.

Análise das Duas Opções de Erro

- Opção 1 (Lema c):

$$\Pi(N) = \left[\frac{\pi}{\arctan\left(10^{-N}\right)}\right] = [\pi 10^N]$$

$$\Pi(N) = [(3.1415\ldots a_{N-1}a_N)10^N] = 31415\ldots a_{N-1}a_N$$

- Opção 2 (Lema b):

$$\Pi(N) = \left[\frac{\pi}{\arctan\left(10^{-N}\right)}\right] = [\pi 10^N] + 1$$

$$\Pi(N) = [(3.1415\ldots a_{N-1}a_N)10^N] = 31415\ldots a_{N-1}a_N + 1$$

Continuação da Análise de Erro

Então, o nosso erro pode ser descrito da seguinte maneira:

$$\Pi(N) - \lfloor \pi \cdot 10^N \rfloor = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Entretanto, o número de dígitos errados pode ser maior caso existam k dígitos 9 seguidos ao final do número.

- G. Galperin, *Playing Pool with* , 9 dez. 2003.
- 3Blue1Brown, *The most unexpected answer to a counting puzzle*, YouTube, 13 jan. 2019.
- 3Blue1Brown, *There's more to those colliding blocks that compute pi*, YouTube, 13 mar. 2025.
- Stand-Up Maths, *We calculated pi with colliding blocks*, YouTube, 13 mar. 2025.