Преобразование НФ с СНФ

КНФ в СКНФ:

F(a, b, c) = (a+b)·(b+c) $= f_1 \cdot f_2$

$$f_1 = a+b \overset{4}{=} a+b+0 \overset{5}{=} (a+b)+c\cdot\bar{c} \overset{3}{=} (a+b+c)\cdot(a+b+\bar{c})$$

$$f_2 = b+c \overset{4}{=} b+c+0 \overset{5}{=} b+c+a\cdot\bar{a} \overset{3}{=} (a+b+c)\cdot(\bar{a}+b+c)$$

$$F = f_1\cdot f_2 = (a+b+c)(a+b+\bar{c})(\bar{a}+b+c)$$

Числовое представление ПФ

$$y_1(a,b,c,d)=\underset{0}{\wedge}\left(1^*,2^*,3,4^*,5,7^*,9^*,10^*,11,12^*,13,14\right)$$

$$y_2(a,b,c,d)=\underset{1}{\vee}\left(1^*,3,2^*,4^*,5,7^*,9^*,10^*,11,12^*,14\right)$$

16

$y_1(0011)=0$

$y_1(1111)=\underline{1}$

$y_1(0001)=?\ -$

п.1 ТИ

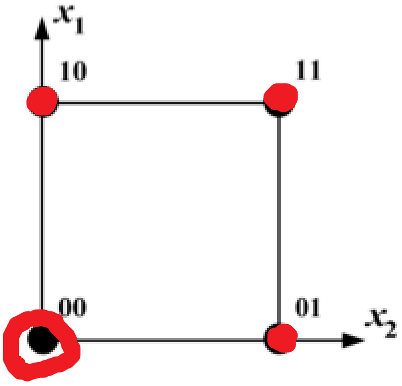
$y_2(0101)=1$

$y_2(0000)=0$

$y_2(1001)=?\ -$

Геометрическое представление ПФ

$f(x_1, x_2)$



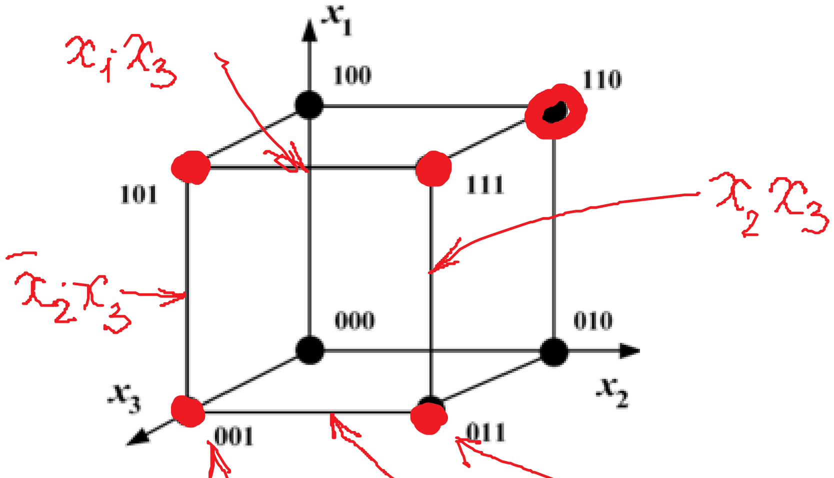
$f(0,0)=0$

$f(0,1)=1$

$f(1,0)=1$

$f(1,1)=1$

$f(x_1, x_2, x_3)$



$f(001)=1$

$f(011)=1$

$\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \overset{12}{=}$

$= \bar{x}_1 x_3$

$\bar{x}_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 \overset{11}{=} x_3$

Функциональный базис

ФБ – система функций АЛ, с помощью которой любая функция может быть представлена суперпозицией исходных функций. $f \circ g$

Функционально *полный* базис

$B_1 = \{\wedge, \vee, \neg\}$ $\quad a \uparrow b = \overline{a+b}$

Минимальный базис

$a \cdot b = \overline{\bar{a} + \bar{b}} \Rightarrow B_2 = \{\vee, \neg\},\ B_3 = \{\wedge, \neg\}$ $\quad a + b = \overline{\bar{a} \cdot \bar{b}}$

Избыточный базис

$B_1 \quad \{\wedge, \vee, \neg, \oplus\} = B_2$

011
100
110

Пример. Представить в базисе $\{\to, \neg\}$ функцию $y(a,b,c) = \underset{0}{\wedge}(3,4,6)$

$y = СКНФ = \underset{011}{(a + \bar{b} + \bar{c})} \cdot \underset{100}{(\bar{a} + b + c)} \cdot \underset{110}{(\bar{a} + \bar{b} + c)} =$

$x \to y = \bar{x} + y$

1) $X = a + \bar{b} + \bar{c} \overset{1}{=} (\bar{b} + a) + \bar{c} = (b \to a) + \bar{c} \overset{1}{=} \bar{c} + (b \to a) =$

$= c \to (b \to a)$

$\to (\bar{a} \to \bar{b}) + \bar{c} = \overline{\bar{a} \to \bar{b}} \to \bar{c}$

2) $\bar{a} + b + c = \overline{a \to b} \to c = Y$

3) $\bar{a} + \bar{b} + c = a \to (b \to c) = Z$

$\overline{\overline{X \cdot Y \cdot Z}} = \overline{\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}} = ?\ \ldots$

n4

Теорема Поста.

Чтобы система функций была функционально полной, необходимо и достаточно, чтобы эта система содержала:

а) функцию, не сохраняющую 0; +
б) функцию, не сохраняющую 1; +
в) несамодвойственную функцию; +
г) немонотонную функцию; +
д) нелинейную функцию. +

Пример. Является ли базис $\{\to, \neg\}$ функционально полным?

x	y	x→y	$x\overline{y}$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	0

а) Если f(0,0, …, 0) = 0, то она «сохраняет ноль»
x→y и $\overline{x}$ не сохраняют ноль:

$0 \to 0 = 1$; $\overline{0} = 1$

б) Если f(1,1, …, 1) = 1, то она «сохраняет единицу»
$\overline{x}$ не сохраняет 1

$\overline{1} = 0$

в) ПФ называют самодвойственной, если на каждой паре противоположных наборов она принимает противоположные значения, то есть

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})}$$

f1=x→y не является самодвойственной

$f^*(x \to y) = \overline{\overline{x} \to \overline{y}} = \overline{x + \overline{y}} = \overline{x} \cdot y \ne \overline{x} + y$

г) ПФ называют монотонной, если при любом возрастании набора значения этой функции не убывают.
x→y и $\overline{x}$ не монотонные функции

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

д) Функция линейна, если многочлен Жегалкина для неё имеет линейных относительно переменных вид
x→y или $\overline{x}$ не линейная функция?

$x \to y = 1 \oplus x \oplus xy$

Полные системы функций

Функция	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0									*			*		*			
ab					*							*	*			*	
$a\bar{b}$			*	*			*	*									
$a \oplus b$										*			*		*	*	*
$a \vee b$						*								*	*		*
$\bar{a}\bar{b}$	*																
$ab + \bar{a}\bar{b}$			*									*	*	*	*		
¬ $\bar{a}$				*	*	*					*						
→ $\bar{a} + b$							*		*	*	*						
$\bar{a} + \bar{b}$		*															
1								*								*	*

11\. $\{\to, \neg\}$ B_1 – мин.

$B = \{\neg, \not\to\}$

Полином Жегалкина

РГР 7: п1, п2, п4