Умножение двоичных чисел в прямых кодах

$9 \times 5 = 1001_2 \times 0101_2 = 101101_2$

				1	0	0	1	множимое			1	0	0	1			$n=5$
×				0	1	0	1	множитель	×		0	1	0	1			
				1	0	0	1	частичные			0	0	0	0			$= y_3 \cdot X$
			0	0	0	0		произведения				1	0	0	1		$= y_2 \cdot X$
+		1	0	0	1				+				0	0	0	0	- - -
	0	0	0	0										1	0	0	1
	0	1	0	1	1	0	1	произведение		0	1	0	1	1	0	1	$2n$

4 способа умножения

=> Для выполнения умножения нужны операции сдвига и сложения
Результат длиной не более 2n бит

Математическое обоснование умножения: пр. др. $0,y_{-1}y_{-2}\dots y_{-n}$ $n+1$

$$Z = X \cdot Y = X \cdot (y_{-1} \cdot 2^{-1} + \dots + y_{-n} \cdot 2^{-n}) =$$
$$= X \cdot 2^{-1} \cdot (y_{-1} + y_{-2} \cdot 2^{-1} + \dots + y_{-n} \cdot 2^{-(n-1)}) =$$
$$= X \cdot 2^{-1} \cdot (y_{-1} + 2^{-1} \cdot (y_{-2} + 2^{-1} \cdot (y_{-3} + \dots + 2^{-1} \cdot (y_{-(n-1)} + 2^{-1} \cdot y_{-n})\dots))) =$$
$$= 2^{-1} \cdot (X \cdot y_{-1} + 2^{-1} \cdot (X \cdot y_{-2} + \dots + \boxed{2^{-1} \cdot (X \cdot y_{-(n-1)} + \boxed{2^{-1} \cdot (X \cdot y_{-n} + \underset{Z}{0})})}\dots)) \quad V$$

Пример. $Z = X \cdot Y = 0.75 \cdot 0.625$ для $n=5$ Ответ: 0.10000100_2

$\mathbf{X} = 0.75 = 0.11 = 0.1100$ $\mathbf{X}_{пр} = 0|1100 = 12_{10}$

$\mathbf{Y} = 0.6875 = 0.1011 = 0.1011$ $\mathbf{Y}_{пр} = 0|1011$ $0,\dots$ $y = 11_{10}$

Sign коммутр.

		0	0	0	0	0	0		0	0	0	0			И.П.: Z=0
1.		0	0	0	0	0	0		0	0	0	0			$y_{-4}=1$: Z = Z+X
	+	0	0	1	1	0	0								
		0	0	1	1	0	0		0	0	0	0			Z→
		0	0	0	1	1	0		0	0	0	0		X	.
2.	+	0	0	1	1	0	0								$y_{-3}=1$: $Z = Z + X_{пр}$
		0	1	0	0	1	0		0	0	0	0			Z →
		0	0	1	0	0	1		0	0	0	0			.
3.		0	0	0	1	0	0		1	0	0	0			$y_{-2}=0$: ~~Z=Z+X0~~ Z →
4.	+	0	0	1	1	0	0								$y_{-1}=1$: Z=Z+X
		0	1	0	0	0	0		1	0	0	0			Z →
		0	0	1	0	0	0		0	1	0	0			$=Z_{пр}$
		+	0,	1	0	0	0		0	1	0	0			Z_2

$Z_2 = +10000100_2 = ?_{10} = 152_{10}$ + · + = +

XOR

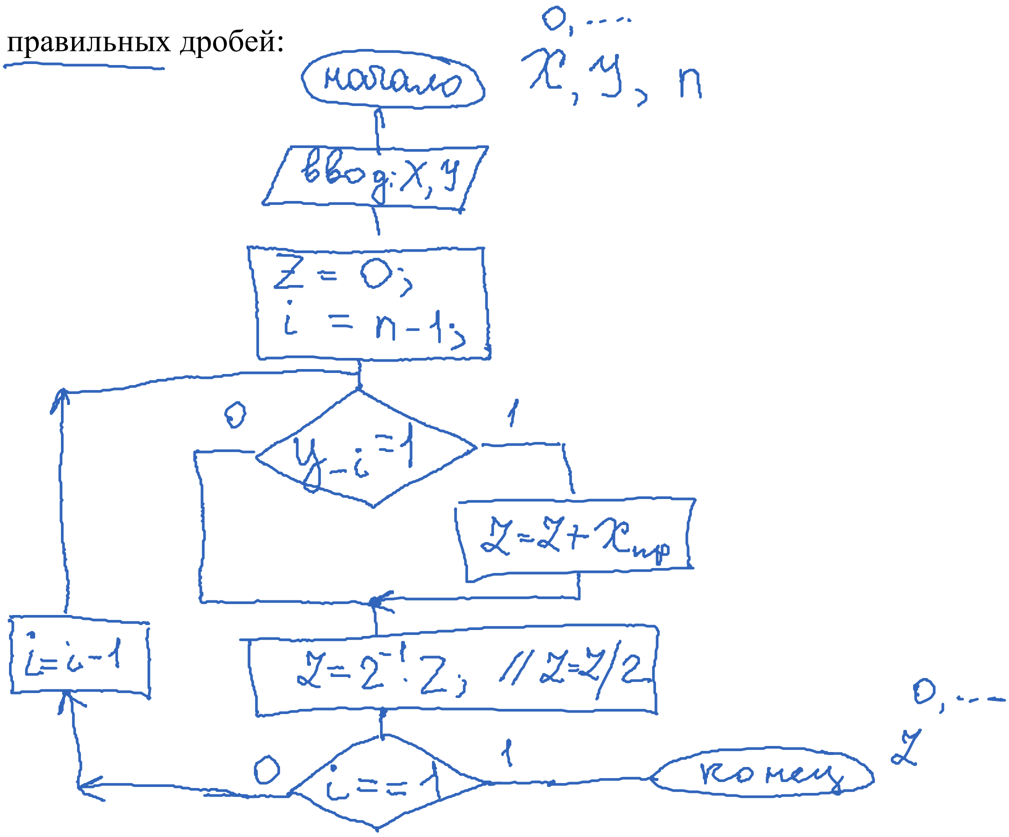
⊕	0	1
0	0	1
1	1	0

0 +
1 −

Знак результата (Sign): $S_Z = S_X \oplus S_Y = 0 \oplus 0 = 0$ +

$x<0,\ y<0$: $S_Z = 1 \oplus 1 = 0$ +

ГСА умножения правильных дробей:



Умножение двоичных чисел в дополнительном коде.

1) Для выполнения умножения нужны операции сдвига и сложения
2) Результат длиной не более 2n бит
3) Исходные данные представлены в дополнительном коде Z
4) Результат сразу со знаком
5) Теорема (X и Y – правильные дроби):
   - Xдоп ·Yдоп=Zдоп, если Y>0
   - если Y<0, то Zдоп = Xдоп ·Yдоп + (-X)доп

$(-0{,}101_2)_{обр} = 1|010$

$(-01{,}010)_{обр} = 1| \ldots 1$

0,5000

Модифицированный сдвиг:

исходное число	сдвиг вправо на 1 разряд	сдвиг влево на 1 разряд
$00\|a_1\ a_2 \ldots\ a_n$	$00\|0\ a_1\ a_2 \ldots a_{n-1}$	$0\ a_1\|\ a_2 \ldots a_n\ 0$
$01\|a_1\ a_2 \ldots\ a_n$	$00\|1\ a_1 \ldots a_{n-1}$	$1\ a_1\|\ a_2 \ldots a_n\ 0$
$11\|a_1\ a_2 \ldots\ a_n$	$11\|1\ a_1 \ldots a_{n-1}$	$1\ a_1\|\ a_2 \ldots a_n\ 1/0$
$10\|a_1\ a_2 \ldots\ a_n$	$11\|0\ a_1 \ldots a_{n-1}$	$0\ a_1\|\ a_2 \ldots a_n\ 1/0$

$0\ a_1 | a_2 \ldots a_n\ \alpha$

$\alpha = \begin{cases} 1, & обр \\ 0, & доп \end{cases}$

Пример 1. Z = X·Y = $-\cancel{0}.10101_2$ · $\cancel{0}.10011_2$ для n=6 Ответ: $-\cancel{0}.0110001111_2$

−21 +19

Xпр = 1|10101 **Y**пр = 0|10011

Xобр = 1|01010 **Y**обр = 0|10011

Xдоп = $\boxed{1|01011}$ **Y**доп = 0|10011

ИП: Z=0

		0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		
		0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	1	1		И.П.: Z=Yдоп,цифр
1.	+	1	1	0	1	0	1	1								y_{-5}=1: Z = Z+Xдоп
		1	1	0	1	0	1	1		1	0	0	1	1		
		1	1	1	0	1	0	1		1	1	0	0	1		Z→
2.	+	1	1	0	1	0	1	1								$y_{-4}=1: Z=Z+X_д$
Ж		1	1	0	0	0	0	0		1	1	0	0	1		
		1	1	1	0	0	0	0		0	1	1	0	0		Z→
3.		1	1	1	1	0	0	0		0	0	1	1	0		$y_{-3}=0$: Z→
4.		1	1	1	1	1	0	0		0	0	0	1	1		$y_{-2}=0$: Z→
5.	+	1	1	0	1	0	1	1								$y_{-1}=1: Z=Z+X_д$
Ж		1	1	0	0	1	1	1		0	0	0	1	1		Z→
$Z_д$	=	1	1	1	0	0	1	1		1	0	0	0	1		y>0
$Z_{пр}$	=	1	1	0	1	1	0	0		0	1	1	1	1		
Z_2	=	−0,		0	1	1	0	0		0	1	1	1	1_2		$= ?_{10}$

Пример 2. Z = X·Y = −26 · −13

Ответ: 101010010_2

X = -11010

Xпр = 1|11010

Xобр = 1|00101

Xдоп = 1|00110

Y = -1101

Yпр = 1|01101

Yобр = 1|10010

Yдоп = 1|10011

n = max (6, 5) = 6

		0	0	0	0	0	0	0		1	0	0	1	1		И.П.: Z=Yдоп,цифр
1.																y_0=1: Z = Z+Xдоп
																Z→

РГР. Задание 2. Умножение чисел в дополнительных кодах!