Zbrani zapiski

Patrik Žnidaršič

Prevedeno dne 21. februar 2023

Kazalo

1 Splošna topologija

1.1 Prostori in preslikave

Definicija. METRIČNI PROSTOR je množica M skupaj s funkcijo $d : M^2 \to \mathbb{R}^+$, da velja:

- $\forall x, y \in M . d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall x, y \in M . d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x, y, z \in M . d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, z)$

Vprašanje 1. Povej definicijo zveznosti za preslikave med metričnimi prostori.

Odgovor: Funkcija $f : (X, d_x) \to (Y, d_Y)$ je zvezna v točki $a \in X$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vse točke $x \in X$, ki so od a oddaljene za manj kot δ, velja $d(f(a), f(x)) < \varepsilon$.

Definicija. Naj bo X množica. TOPOLOGIJA na X je družina $\mathcal{T}$ podmnožic X, ki ustreza pogojem

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- $\forall T \subseteq \mathcal{T} . \bigcup T \in \mathcal{T}$
- $\forall T \subseteq \mathcal{T} . T$ končna $\implies \bigcap T \in \mathcal{T}$

Vprašanje 2. Definiraj topologijo na X.

Definicija. Elementom topologije pravimo ODPRTE MNOŽICE.

Definicija. Prostor je METRIZABILEN ali METRIČEN, če obstaja metrika, s katero je prostor porojen.

Definicija. Prostor X je TRIVIALEN, če sta edini odprti množici X in $\emptyset$.

Definicija. Prostor X je DISKRETEN, če velja $\mathcal{T} = 2^X$.

Opomba. Diskreten prostor je metrizabilen.

Definicija. Naj bo $x \in X$. Odprtim množicam, ki vsebujejo x, pravimo OKOLICE x.

Definicija. Množica $A \subset X$ je ZAPRTA, če je A^c odprta.

Definicija. Naj bo $x \in X$ ter $A \subseteq X$.

- x je NOTRANJA TOČKA A, če obstaja okolica $U \ni x$, da velja $U \subseteq A$.
- x je MEJNA TOČKA A, če vsaka okolica x seka tako A kot A^c.
- NOTRANJOST A je unija vseh odprtih množic v A.
- MEJA A je množica vseh mejnih točk A.
- ZAPRTJE A je presek vseh zaprtih nadmnožic A.
- x je STEKALIŠČE MNOŽICE A, če vsaka okolica x seka $A \backslash \{x\}$

Opomba. Ekvivalentna definicija meje: $\mathrm{Fr}A = \mathrm{Cl}A \backslash \mathrm{Int}A$.

Vprašanje 3. Definiraj naslednje pojme: zaprta množica, notranja točka, mejna točka, notranjost, meja, zaprtje, stekališče

Definicija. Naj bo $(x_n)_n$ zaporedje v X. Točka $x \in X$ je LIMITA zaporedja $(x_n)_n$, če vsaka okolica točke x vsebuje nek rep zaporedja.

Vprašanje 4. Kaj je topologija končnih komplementov? Ali je metrizabilna?

Odgovor: To je topologija, v kateri so odprte množice natanko komplementi končnih, ter cel prostor. Ni metrizabilna.

Vprašanje 5. Kako pokažeš, da je supremum metrika topološko ekvivalentna evklidski metriki na $\mathbb{R}^n$?

Odgovor: Vsaka krogla v supremum metriki vsebuje neko kroglo v evklidski metriki, vsaka ta pa vsebuje neko (manjšo) kroglo v supremum metriki.

Vprašanje 6. Dokaži, da omejenost <u>ni</u> topološka lastnost.

Odgovor: Vsaka metrika je topološko ekvivalentna metriki

$$\hat{d}(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & d(x,y) < 1 \\ 1 & \text{sicer} \end{cases}$$

Metrični prostor s to metriko pa je omejen.

1.2 Zvezne preslikave

Definicija. Funkcija $f : X \to Y$ je ZVEZNA, če je praslika vsake odprte množice pod Y odprta pod X.

Definicija. PRESLIKAVA je zvezna funkcija.

Izrek. *Naj bo $f : X \to Y$ funkcija. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

1. *f je zvezna*
2. *Praslika glede na f od zaprte množice pod Y je zaprta množica pod X.*
3. *Za vsako množico $A \subseteq X$ velja $f_*(\overline{A}) \subseteq \overline{f_*(A)}$.*

Dokaz. Iz prve v drugo trditev in obratno je preprosto.

Dokaz iz druge trditve v tretjo: Naj bo $A \subseteq X$. Velja $A \subseteq f^*(f_*(A)) \subseteq f^*(\overline{f_*(A)})$. Ker je $f^*(\overline{f_*(A)})$ zaprta, je $\overline{A} \subseteq f^*(\overline{f_*(A)})$. Torej je $f_*(\overline{A}) \subseteq \overline{f_*(A)}$.

Dokaz iz tretje trditve v drugo: Naj bo B zaprta podmnožica Y. Tedaj $B = \overline{B} \supseteq \overline{f_*(f^*(B))} \supseteq f_*(\overline{f^*(B)})$. Torej je $f^*(B) \supseteq \overline{f^*(B)}$, torej je $f^*(B)$ zaprta pod X. $\square$

Vprašanje 7. Dokaži, da je trditev $\forall A \subset X \,.\, f_*(\overline{A}) \subseteq \overline{f_*(A)}$ ekvivalentna pogoju za zveznost f.

Definicija. Funkcija $f : X \to Y$ je HOMEOMORFIZEM, če je bijekcija ter inducira bijekcijo med $\mathcal{T}_X$ in $\mathcal{T}_Y$.

Definicija. Prostora X in Y sta HOMEOMORFNA, če obstaja homeomorfizem $X \to Y$.

Definicija. Funkcija $f : X \to Y$ je ODPRTA, če slika odprte množice v odprte množice.

Funkcija $f : X \to Y$ je ZAPRTA, če slika zaprte množice v zaprte množice.

Vprašanje 8. Kaj velja za odprtost in zaprtost bijektivnih funkcij?

Odgovor: Če je f bijekcija, je odprta natanko tedaj, ko je zaprta.

Trditev. *Naj bo $f : X \to Y$ funkcija. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

- *f je homeomorfizem*
- *f je bijektivna, zvezna in odprta*
- *f je bijektivna, zvezna in zaprta*

Vprašanje 9. Kdaj je funkcija homeomorfizem? Podaj 3 ekvivalentne definicije.

Odgovor:

- Če je bijekcija in inducira bijekcijo med topologijama domene in kodomene.
- Če je bijekcija, zvezna in odprta
- Če je bijekcija, zvezna in zaprta

Vprašanje 10. Povej primer homeomorfizma $\mathbb{R} \to (-1, 1)$ in njegovega inverza.

Odgovor:

$$f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$$
$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

$$g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = \frac{x}{1 - |x|}$$

Vprašanje 11. Kaj pomenita oznaki S^n ter B^n?

Odgovor:

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 \leq 1\}$$
$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|^2 = 1\}$$

Definicija. TOPOLOŠKA LASTNOST je lastnost prostora, ki se ohranja pri homeomorfizmih.

1.3 Baze in predbaze

Definicija. Naj bo $x \in X$. Množica $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}$ je LOKALNA BAZA ali BAZA OKOLIC točke x, če vsaka okolica x vsebuje neko odprto množico v lokalni bazi.

Definicija. Množica $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ je BAZA prostora X, če vsako odprto množico v X lahko zapišemo kot unijo nekih množic iz $\mathcal{B}$.

Opomba. Zveznost lahko preverjamo na bazi.

Vprašanje 12. Kateri pogoji morajo veljati za množico $\mathcal{B}$, da jo lahko vzamemo za bazo (neke) topologije na X?

Odgovor: Biti mora pokritje za X, poleg tega pa mora biti presek dveh množic unija nekih elementov množice $\mathcal{B}$.

Definicija. Naj bosta X in Y topološka prostora. Topologija na $X \times Y$, generirana z bazo

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X \wedge V \in \mathcal{T}_Y\},$$

se imenuje PRODUKTNA TOPOLOGIJA.

Vprašanje 13. Kako definiraš produktno topologijo z uporabo baz za X in Y?

Odgovor: Množica

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{B}_X \wedge V \in \mathcal{B}_Y\}$$

je baza za $\mathcal{T}_{X \times Y}$.

Vprašanje 14. Kakšni sta projekciji $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ ter $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$?

Odgovor: Zvezni in odprti.

Definicija. Množica $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$ je PREDBAZA topologije $\mathcal{T}$, če je $\mathcal{P}$ pokritje X, in če je množica vseh končnih presekov elementov $\mathcal{P}$ baza za $\mathcal{T}$.

Vprašanje 15. Ali lahko zveznost in odprtost preslikave preverjamo le na bazi? Kaj pa le na predbazi?

Odgovor: Oboje lahko preverjamo na bazi, na predbazi pa lahko preverjamo le zveznost.

Vprašanje 16. Kako definiramo produktno topologijo s predbazami?

Odgovor: Za elemente predbaze vzamemo trakove $U \times Y$ oz. $X \times V$, kjer sta U in V odprti množici pod pripadajočima prostoroma. Ker je presek takih trakov škatla, je topologija ekvivalentna običajni produktni topologiji.

Vprašanje 17. Dokaži: funkcija $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ je zvezna natanko tedaj, ko so zvezne njene komponente.

Odgovor:

V desno: Če je f zvezna, je za vsak i tudi $\mathrm{pr}_i \circ f = f_i$ zvezna.

V levo: Naj bo U predbazna množica za produkt. Tedaj velja $U = \mathrm{pr}_i^*(V)$ za neka i in V^{odp}. Torej je $f^*(U) = f^*(\mathrm{pr}_i^*(V)) = f_i^*(V)$ odprta.

Definicija. Prostor X je 1-ŠTEVEN, če ima vsaka točka $x \in X$ neko števno bazo okolic.

Definicija. Prostor X je 2-ŠTEVEN, če ima neko števno bazo.

Definicija. Množica $A \subseteq X$ je POVSOD GOSTA, če seka vsako odprto množico v X.

Definicija. Prostor X je SEPARABILEN, če v njem obstaja kakšna števna gosta podmnožica.

Izrek. *Naj bo M metričen prostor. Tedaj je 2-števen natanko tedaj, ko je separabilen.*

Dokaz. V desno: Iz vsake bazične okolice si izberemo neko točko.

V levo: Naj bo A povsod gosta v X. Naj bo $\mathcal{B} = \{K(x, q) \mid x \in A, q \in \mathbb{Q}^+\}$.

Naj bo U okolica točke $x \in X$. Tedaj vsebuje neko kroglo $K(x, r)$, krogla $K(x, \frac{r}{3})$ pa vsebuje neko točko $a \in A$. Za $q \in (\frac{r}{3}, \frac{r}{2}) \cap \mathbb{Q}$ velja $x \in K(a, q) \subseteq K(a, \frac{r}{2}) \subseteq U$. Dobili smo števno bazo za X. □

Vprašanje 18. Dokaži, da je metrični prostor 2-števen natanko tedaj, ko je separabilen.

1.4 Podprostori

Definicija. Naj bo X topološki prostor in $A \subseteq X$ podmnožica. Topologijo $\mathcal{T}_A = \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}_X\}$ imenujemo PODEDOVANA TOPOLOGIJA, dvojico $(A, \mathcal{T}_A)$ pa TOPOLOŠKI PODPROSTOR.

Vprašanje 19. Kaj je topološki podprostor?

Vprašanje 20. Kdaj je množica $B \subseteq A \subseteq X$ zaprta pod A? Dokaži.

Odgovor: Natanko tedaj, ko obstaja $F^{\mathrm{zap}} \subseteq X$, da velja $B = A \cap F$.

B je zaprta v A natanko tedaj, ko je $A \backslash B$ odprta v A. To je natanko tedaj, ko je $A \backslash B = U \cap A$ za nek $U \in \mathcal{T}_X$. Velja $B = A \cap U^{\mathrm{c}}$.

Če je $B = F \cap A$, je F^{c} odprta v X in $F^{\mathrm{c}} \cap A$ odprta v A. Torej je $F \cap A$ zaprta v A.

Trditev. *Naj bo $B \subseteq A \subseteq X$. Veljajo naslednje formule:*

- $\mathrm{Cl}_A B = A \cap \mathrm{Cl}_X B$
- $\mathrm{Int}_A B \supseteq A \cap \mathrm{Int}_X B$
- $\mathrm{Fr}_A B \subseteq A \cap \mathrm{Fr}_X B$

Dokaz. Naj bo $x \in \mathrm{Cl}_A B$. Tedaj vsaka okolica x seka B. Okolice v A so natanko okolice v X, sekane z A, torej vsaka okolica x v X seka B (ker je $x \in A$).

Naj bo $x \in A \cap \mathrm{Cl}_X B$. Tedaj vsaka okolica x v X seka B. Ker je $x \in A$, vsaka okolica x v A seka B.

Naj bo $x \in A \cap \mathrm{Int}_X B$. Tedaj obstaja okolica x v X, ki je vsebovana v B. Ta okolica, sekana z A, je okolica x v A, ki je vsebovana v B.

Naj bo $x \in \mathrm{Fr}_A B$. Tedaj $x \in A$ in vsaka okolica x v A seka tako B kot $A \backslash B$. Ker je $A \subseteq X$, bo vsaka okolica x v X sekala tako B kot $X \backslash B$. □

Vprašanje 21. Postavi inkluzije med $\mathrm{Cl}_X B, \mathrm{Cl}_A B, \mathrm{Fr}_X B, \mathrm{Fr}_A B, \mathrm{Int}_X B, \mathrm{Int}_A B$ za $B \subseteq A \subseteq X$.

Vprašanje 22. Kaj velja za odprte množice odprtega podprostora? Ali velja analogna trditev tudi za zaprte množice zaprtega podprostora?

Odgovor: So odprte natanko tedaj, ko so odprte v večjem prostoru. Da.

Vprašanje 23. Dokaži, da je zožitev zvezne funkcije na podprostor zvezna.

Odgovor: Zožitev je le kompozitum $f \circ i$, kjer je i inkluzija.

Inkluzija je zvezna, ker je praslika odprte množice U, $i^*(U) = A \cap U$, odprta v A.

Definicija. Topološka lastnost je DEDNA, če se prenese na vse topološke podprostore.

Definicija. Topološka lastnost je PRODUKTNA, če se prenese na produkte.

Vprašanje 24. Določi, če so naslednje lastnosti dedne: separabilnost, 2-števnost, diskretnost, trivialnost, metrizabilnost, 1-števnost

Odgovor:

Separabilnost je dedna le na odprte podprostore, ostale so dedne.

Definicija. Družina funkcij $f_\lambda : X_\lambda \to Y$ je USKLAJENA, če se funkcije paroma ujemajo na presekih X_λ.

Lema. *Naj bo $\{X_\lambda\}_\lambda$ odprto pokritje X. Naj bo $A \subseteq X$. A je odprt v X natanko tedaj, ko je za vsak λ množica $X_\lambda \cap A$ odprta v X_λ.*

Dokaz. V desno: Če je A odprt, so odprti vsi njegovi končni preseki.

V levo: Velja

$$A = \bigcup_\lambda X_\lambda \cap A.$$

Torej je A unija odprtih množic. $\square$

Definicija. Pokritje $\{X_\lambda\}_\lambda$ je LOKALNO KONČNO, če ima vsaka točka $x \in X$ okolico, ki seka le končno mnogo X_λ.

Lema. *Naj bo $\{X_\lambda\}_\lambda$ lokalno končno zaprto pokritje X. Naj bo $A \subseteq X$. Tedaj je A zaprta v X natanko tedaj, ko je $X_\lambda \cap A$ zaprta v X_λ za vse λ.*

Dokaz. V desno: Presek dveh zaprtih množic je zaprta množica.

V levo: Naj bo $x \in A^\mathsf{c}$. Tedaj obstaja okolica $U \ni x$, ki seka končno mnogo X_λ, imenujmo jih $X_{\lambda_1}, \ldots, X_{\lambda_n}$. Za vsak $i = 1, \ldots, n$ je $X_{\lambda_i} \cap A$ zaprt v X_{λ_i}, torej tudi v X. Potem je

$$U \cap \bigcap_{i=1}^n (X_{\lambda_i} \cap A)^\mathsf{c}$$

odprta okolica x, ki ne vsebuje A. Torej je A^c odprta, torej je A zaprta. $\square$

Vprašanje 25. Dokaži, da za lokalno končno zaprto pokritje X_λ velja: če je $A \cap X_\lambda$ zaprta v X_λ za vse λ, je A zaprta v X.

Izrek. *Naj bo $\{X_\lambda\}_\lambda$ pokritje, ki je bodisi odprto bodisi lokalno končno zaprto. Naj bo $f_\lambda : X_\lambda \to Y$ usklajena družina zveznih funkcij. Tedaj obstaja natanko določena zvezna preslikava $f : X \to Y$, za katero je skrčitev na X_λ enaka f_λ.*

Dokaz. Obstoj in enoličnost sledita iz usklajenosti. Dokazati moramo le zveznost.

Naj bo $U^{\mathrm{odp}} \subseteq Y$ Če je pokritje odprto, je za vsak λ tudi $X_\lambda \cap f^*(U) = (f|_{X_\lambda})^*(U) = f_\lambda^*(U)$ odprta v X. Po lemi je potem tudi $f^*(U)$ odprta.

Naj bo $F^{\mathrm{zap}} \subseteq Y$. Če je pokritje zaprto, je $X_\lambda \cap f^*(F) = f_\lambda^*(F)$ zaprta v X, torej je po lemi $f^*(F)$ zaprta v X. $\square$

Vprašanje 26. Povej in dokaži izrek o odsekoma definiranih preslikavah.

Definicija. Preslikava $f : X \to Y$ je VLOŽITEV, če je homemorfizem na svojo sliko s podedovano topologijo.

Trditev. *Naj bo $f : X \to Y$ injektivna zvezna preslikava. Če je $f_*(X)$ odprta v Y, je f vložitev natanko tedaj, ko je odprta. Če je $f_*(X)$ zaprta v Y, je f vložitev natanko tedaj, ko je zaprta.*

Vprašanje 27. Dokaži: če je $f : X \to Y$ injektivna zvezna preslikava in $f_*(X)$ odprta v Y, je f odprta natanko tedaj, ko je vložitev.

Odgovor:

Če je $f_*(X)$ odprta v Y, je za vsak $U^{\mathrm{odp}} \subseteq X$ množica $f_*(U)$ odprta v $f_*(X)$ natanko tedaj, ko je odprta v Y. Če je f vložitev, je homeomorfizem na sliko in zato odprta v obeh kodomenah. Če je f odprta, je homeomorfizem na sliko, torej vložitev.

Vprašanje 28. Kateri pomembni razred funkcij med metričnimi prostori so avtomatsko vložitve?

Odgovor: Izometrije.

1.5 Ločljivost

Definicija. Naj bo X topološki prostor.

- X je T_0, če za vsak par točk eno loči od druge
- X je T_1, če loči točke
- X je T_2, če ostro loči točke
- X je T_3, če ostro loči točke od zaprtih množic
- X je T_4, če ostro loči zaprte množice

Definicija. Naj bo X topološki prostor.

- X je Kolmogorov, če je T_0.
- X je Fréchetov, če je T_1.
- X je Hausdorffov, če je T_2.
- X je regularen, če je T_3 in T_0.
- X je normalen, če je T_4 in T_1.

Vprašanje 29. Dokaži: V Fréchetovem prostoru so enojci zaprti.

Odgovor: Naj bo X Fréchetov prostor, in $x \in X$. Naj bo $x' \in \{x\}^{\mathsf{c}}$. Tedaj obstajata okolici x, x', ki ju ločita. Okolica x' je vsebovana v $\{x\}^{\mathsf{c}}$. Torej je $\{x\}^{\mathsf{c}}$ odprt.

Trditev. *Naj bo X topološki prostor. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

- *X je Hausdorffov.*
- *Za vsak $x \in X$ je presek zaprtja vseh okolic x enak $\{x\}$.*
- *Diagonala je zaprt podprostor v $X \times X$.*

Dokaz. Naj bo X Hausdorffov in $x, y \in X$ različni točki. Tedaj obstajata okolici U, V, ki ju ostro ločita; to pomeni, da y ni v $\overline{U}$, torej y ni v preseku zaprtij vseh okolic x.

Naj bo $(x, y) \in X \times X$ zunaj diagonale. Obstaja odprta okolica x, katere zaprtje ne vsebuje y (sicer bi bil y v preseku zaprtij okolic x). $U \times \overline{U}^{\mathsf{c}}$ je odprta okolica (x, y), ki ne seka diagonale.

Naj bosta $x, y \in X$. Obstaja škatlasta okolica $U \times V$ točke (x, y), ki ne seka diagonale. Torej $U \cap V = \varnothing$. Ti odprti množici ostro ločita x in y. □

Vprašanje 30. Dvakrat karakteriziraj Hausdorffovo lastnost in dokaži karakterizaciji.

Izrek. *Naj bo Y Hausdorffov prostor.*

1. *Točka $y \in Y$ je stekališče množice $A \subseteq Y$ natanko tedaj, ko vsaka okolica y vsebuje neskončno mnogo točk iz A.*
2. *Zaporedje v Y ima največ eno limito.*
3. *Naj bosta $f, g : X \to Y$ zvezni. Množica rešitev enačbe $f(x) = g(x)$ je zaprta.*
4. *Če se zvezni preslikavi $f, g : X \to Y$ ujemata na gosti podmnožici X, se ujemata na X.*
5. *Graf zvezne preslikave $f : X \to Y$ je zaprt podprostor $X \times Y$.*

Dokaz.
1. Naj bo $y \in Y$ stekališče $A \subseteq Y$. Recimo, da vsaka okolica y vsebuje le končno mnogo točk iz A. Naj bo U neka okolica y. Množico A seka v točkah $y_1, y_2, \ldots, y_n$; za vsako od teh točk najdemo okolico $U_i \ni y$, ki ne vsebuje y_i. Tedaj je $U \cap U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$ ne vsebuje nobenega elementa iz A; torej y ni stekališče.
2. Recimo, da ima zaporedje $(y_n)_n$ dve različni limiti, y_1 in y_2. Tedaj obstajata odprti množici U, V, ki ostro ločita ti točki. Obe U in V morata vsebovati nek rep zaporedja, kar pa ni mogoče, ker sta disjunktni.
3. Funkcija $(f, g) : X \to Y \times Y$ je zvezna. Množica točk ujemanja je praslika diagonale, torej je zaprta.
4. Množica točk ujemanja je zaprta; ker je povsod gosta v X, je to kar cel X.
5. Definiramo $u(x, y) = f(x)$ ter $v(x, y) = y$. Množica točk ujemanja u in v je zaprta, je pa ravno iskani graf.

□

Vprašanje 31. Povej posledice Hausdorffove lastnosti za stekališča, limite in preslikave, ter jih dokaži.

Izrek. *Naj bo X 1-števen in Y Hausdorffov. Potem je funkcija $f : X \to Y$ zvezna natanko tedaj, ko za vsako konvergentno zaporedje $(x_n)_n$ v X velja*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

Dokaz. V desno: Naj $(x_n)_n$ konvergira k x. Naj bo U okolica $f(x)$ v Y. $f^*(U)$ je okolica x, torej vsebuje rep zaporedja $(x_n)_n$; torej U vsebuje rep zaporedja $(f(x_n))_n$.

V levo: Naj bo $A \subseteq X$ in $x \in \overline{A}$. Naj bo $U_1, U_2, \dots$ baza okolic za x. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Izberemo točko iz $A \cap U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$, ter jo proglasimo za x_n. Konstruirali smo zaporedje, ki konvergira proti točki x, za katerega velja $f(x_n) \in A$ za vse n. $(f(x_n))_n$ je zaporedje v $f_*(A)$. Če konvergira, ima limito v $\overline{f(A)}$. Tedaj velja $f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) \in \overline{f(A)}$. Torej za vsak $A \subseteq X$ velja $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, torej je f zvezna. □

Vprašanje 32. Kdaj lahko zamenjaš limito in funkcijo? Natančno povej izrek in ga dokaži.

Izrek. Tihonov *Regularen 2-števen prostor je normalen.*

Dokaz. Naj bosta A, B zaprti množici v X. Za vsako točko x lahko najdemo bazično okolico U, ki ne seka neke okolice B, torej $\overline{U}$ ne seka B. Ko to storimo za vse točke iz A, dobimo števno pokritje A z množicami, katerih zaprtja ne sekajo B. Podobno naredimo za B in označimo množice z V_i.

Torej $U = \bigcup_i U_i$ in $V = \bigcup_i V_i$ ločita A in B, a ne nujno ostro. Definiramo

$$U_n' = U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}$$

$$V_n' = V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}$$

Množice U_i' in V_i' so odprte, ker so končni preseki odprtih množic. Ker vsaka točka A pripada nekemu U_i in nobenemu V_j, je U_i' pokritje za A. Podobno je V_i' pokritje za B.

Vsako točko v preseku $U \cap V$ smo na nekem koraku odšteli bodisi iz vseh naslednjih U_i' bodisi iz vseh naslednjih V_j'; torej je v natanko eni izmed $U' = \bigcup_i U_i'$ ali $V' = \bigcup_i V_i'$. □

Vprašanje 33. Povej in dokaži Tihonov izrek.

Trditev. *Prostor X je T_3 natanko tedaj, ko za vsak $x \in X$ in vsako odprto okolico U za x obstaja taka odprta množica V, da velja $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Vprašanje 34. Karakteriziraj lastnost T_3.

Trditev. *Regularnost je produktna lastnost.*

Dokaz. Dokazati je treba le, da je T_3 produktna lastnost. Naj bo W okolica točke (x, x') v $X \times X'$. W vsebuje neko škatlasto okolico $U \times U'$ točke (x, x').

Ker je X regularen, obstaja okolica $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Podobno obstaja okolica $x' \in V' \subseteq \overline{V'} \subseteq U'$.

Zaprtje množice $V \times V'$ je vsebovano v $U \times U'$, torej tudi v W. □

Vprašanje 35. Dokaži, da je regularnost produktna lastnost.

Izrek. *Metričen prostor je normalen.*

Dokaz. Naj bosta A, B disjunktni zaprti množici. Definiramo $U = \{x \in X \mid d(A, x) < d(B, x)\}$ in $V = \{x \in X \mid d(A, x) > d(B, x)\}$.

Očitno sta U in V disjunktni ter vsebujeta eno izmed A, B. Preverimo še, da sta odprti.

Naj bo $x \in U$. Definiramo $r = \frac{1}{2}(d(B, x) - d(A, x)) > 0$. Za $y \in K(x, r)$ velja $d(A, y) < d(A, x) + r = \frac{1}{2}(d(B, x) + d(A, x))$. Velja tudi $d(B, x) < d(B, y) + r$, torej je $d(B, y) > d(B, x) - r = \frac{1}{2}(d(A, X) + d(B, x))$. Ker je $d(A, y) < d(B, y)$, velja $y \in U$, torej je x notranja točka.

Analogno je V odprta. □

Vprašanje 36. Dokaži, da je vsak normalen prostor Hausdorffov.

Odgovor: Naj bosta $x, y \in X$. Množici $\{x\}, \{y\}$ sta zaprti, torej jih ostro ločimo.

Trditev. *Normalnost je dedna na zaprte podprostore.*

Dokaz. Naj bo A zaprt podprostor normalnega prostora X. Če sta B, C disjunktna zaprta podprostora A, sta taka tudi v X; torej jih lahko ostro ločimo. □

Vprašanje 37. Ali je normalnost dedna ali produktna? Če da, dokaži.

Trditev. *Prostor X je T_4 natanko tedaj, ko za vsako zaprto množico $A \subseteq X$ in vsako okolico $U \supseteq A$ obstaja taka odprta množica V, da velja $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

1.6 Povezanost

Definicija. Prostor X je NEPOVEZAN, če obstajata odprti množici U in V, da je X disjunktna unija $U \cup V$.

Definicija. Prostor je POVEZAN, če ni nepovezan.

Trditev. *Naslednje trditve so ekvivalentne:*

- *Prostor X je nepovezan*
- *Prostor X lahko zapišemo kot disjunktno unijo dveh zaprtih množic*

- *V X obstaja prava neprazna podmnožica, ki je hkrati odprta in zaprta.*
- *Obstaja surjektivna preslikava $f : X \to \{0,1\}$*

Dokaz. Iz 1 sledi 2: Če je $X = U \cup V$, je $U = V^{\mathsf{c}}$ odprta in $V = U^{\mathsf{c}}$ zaprta.

Iz 2 sledi 3: Če je $X = A \cup B$, je A zaprta in $A = B^{\mathsf{c}}$ odprta.

Iz 3 sledi 4: Če je A odprta in zaprta, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$. Funkcija je surjektivna, je pa tudi zvezna: $f^*(\{0\}) = A$, $f^*(\{1\}) = A^{\mathsf{c}}$, ki je odprta, ker je komplement zaprte.

Iz 4 sledi 1: $U = f^*(\{0\}), V = f^*(\{1\})$. To sta disjunktni odprti množici, njuna unija je X, ker je f celovita. □

Vprašanje 38. Karakteriziraj nepovezanost.

Vprašanje 39. Dokaži: v $\mathbb{R}$ so povezani natanko intervali.

Odgovor: Naj bo J interval. Recimo, da je $J = U \cup V$ razcep. Obstaja $a \in U, b \in V$. BŠS $a < b$. Definiramo $c := \sup\{x \in J \mid [a,x) \subseteq U\}$. Ker je $a \le c \le b$, je $c \in J$; ker je U zaprta, je $c \in U$. Ker je U odprta, je za nek $r > 0$ tudi $(c-r, c+r) \in U$, to pa je protislovje s supremumom.

Recimo, da A ni interval. Potem obstajajo točke $a < c < b$, da je $a, b \in A$ in $c \notin A$. $U := \{x \in A \mid x < c\}, V := \{x \in A \mid x > c\}$ je razcep A.

Izrek. *Zvezna slika povezanega prostora je povezan prostor.*

Dokaz. Recimo, da je X povezan, $f : X \to Y$ zvezna in $f_*(X)$ nepovezan. Potem obstaja zvezna surjekcija $g : f_*(X) \to \{0,1\}$. $g \circ f$ je zvezna surjekcija $X \to \{0,1\}$. $\rightarrow\!\leftarrow$ □

Vprašanje 40. Dokaži: zvezna slika povezanega prostora je povezana.

Vprašanje 41. Povej izrek o vmesni vrednosti.

Odgovor: Naj bo $f : X \to \mathbb{R}$ zvezna in X povezan. Potem za vsaki $x, x' \in X$ funkcija f zavzame vse vrednosti med $f(x)$ in $f(x')$.

Izrek. *Naj bo $\{A_\lambda\}_\lambda$ družina povezanih podprostorov v povezanem prostoru X z nepraznim presekom. Tedaj je $\bigcup_\lambda A_\lambda$ povezan.*

Dokaz. Naj bo $x_0 \in \cap_\lambda A_\lambda$ in $f : \bigcup_\lambda A_\lambda \to \{0,1\}$ zvezna preslikava. Ker so prostori povezani, velja $f(x) = f(x_0)$ za vse $x \in A_\lambda$, torej za vse x v uniji. Torej prostor ni nepovezan. □

Vprašanje 42. Kdaj je unija povezanih prostorov povezana? Dokaži.

Vprašanje 43. Dokaži, da je povezanost produktna lastnost.

Odgovor: Za $x \in X$ ter $y \in Y$ so prostori $\{x\} \times Y \approx Y$ ter $X \times \{y\} \approx X$ povezani. Torej so povezane vse množice oblike $\{x\} \times Y \cup X \times \{y\}$, ker imajo neprazen presek.

Naj bo $x_0 \in X$. Družina množic $\{(X \times \{y\}) \cup (\{x_0\} \times Y) \mid y \in Y\}$ ima neprazen presek, njena unija pa je $X \times Y$.

Vprašanje 44. Kaj velja za povezanost zaprtja?

Odgovor: Če je A povezana množica in $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, je B povezana množica.

Vprašanje 45. Kako je definiran Varšavki lok?

Odgovor: L naj bo graf funkcije $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ za $x \in [-1, 0)$. Varšavki lok je tedaj $\overline{L}$.

Definicija. Prostor X je POVEZAN S POTMI, če za vsaki točki $x, x' \in X$ obstaja zvezna pot $\gamma : [0, 1] \to X$, da velja $\gamma(0) = x$ in $\gamma(1) = x'$.

Opomba. Zvezna slika s potmi povezanega prostora je povezana s potmi.

Vprašanje 46. Povej primer s potmi povezanega prostora, katerega zaprtje ni povezano s potmi.

Odgovor: Spirala $r = 1 - \frac{1}{\phi}$.

Vprašanje 47. Dokaži: če je prostor povezan s potmi, je povezan.

Odgovor: Naj bo $x_0 \in X$. Za vsak $x \in X$ obstaja zvezna pot $\gamma : [0, 1] \to X$, da velja $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x$. Ker je $[0, 1]$ povezan, je $\gamma([0, 1])$ povezan.

X je unija slik vseh poti. Ker imajo neprazen presek $\{x_0\}$, je X povezan.

Definicija. KOMPONENTA $C(x)$ točke $x \in X$ je unija vseh povezanih podmnožic, ki vsebujejo x.

Vprašanje 48. Dokaži: komponente so zaprte podmnožice.

Odgovor: Zaprtje povezane množice je povezana množica.

Izrek. *Komponente prostora X določajo particijo X na disjunktne povezane zaprte množice. Slika komponente poljubne zvezne preslikave $f : X \to Y$ je v celotni znotraj neke komponente Y.*

Definicija. Prostor je POPOLNOMA NEPOVEZAN, če so vse njegove komponente točke.

Vprašanje 49. Povej primer popolnoma nepovezanega prostora, katerega komponente niso odprte.

Odgovor: $\mathbb{Q}$.

Definicija. Prostor X je LOKALNO POVEZAN, če ima bazo iz povezanih množic.

Trditev. *Prostor X je lokalno povezan natanko tedaj, ko so komponente vsake odprte množice v X odprte.*

Dokaz. V desno: Naj bo $\mathcal{B}$ baza iz povezanih množic. Naj bo x iz komponente v neki odprti podmnožici X. Tedaj obstaja bazna okolica x, ki je povezana. Torej je komponenta odprta.

V levo: Za bazo vzamemo družino vseh podmnožic X, ki so komponenta neke odprte množice. □

Vprašanje 50. Karakteriziraj lokalno povezanost in dokaži karakterizacijo.

Definicija. Za $x \in X$ je $\tilde{C}(x)$ unija vseh s potmi povezanih podmnožic X, ki vsebujejo x. Pravimo ji KOMPONENTA ZA POVEZANOST S POTMI.

Definicija. Prostor X je LOKALNO POVEZAN S POTMI, če ima bazo iz s potmi povezanih množic.

Izrek. *Če je X lokalno povezan s potmi, njegove komponente sovpadajo s komponentami za povezanost s potmi.*

Dokaz. Za $x \in X$ je $\tilde{C}(x) \subseteq C(x)$, torej moramo pokazati le drugo inkluzijo.

Ker je X lokalno povezan s potmi, so komponente za povezanost s potmi odprte. Ker je vsaka taka komponenta komplement unije vseh ostalih, so tudi zaprte; to pa je možno le, če velja $C(x) = \tilde{C}(x)$. □

Vprašanje 51. Kaj velja za komponente prostora, ki je lokalno povezan s potmi? Dokaži.

1.7 Kompaktnost

Definicija. Prostor X je KOMPAKTEN, če ima vsako odprto pokritje X končno podpokritje.

Opomba. Kompaktnost lahko preizkušamo na baznih množicah.

Vprašanje 52. Dokaži: v kompaktnem prostoru ima vsaka neskončna množica stekališče.

Odgovor:

Recimo, da A nima stekališča v X, in je X kompakten. Potem za vsako točko $x \in X$ obstaja okolica U_x, ki vsebuje le končno mnogo elementov A. Te množice tvorijo pokritje, torej obstaja končno podpokritje; torej ima A končno mnogo elementov.

Vprašanje 53. Dokaži: kompaktnost je produktna lastnost.

Odgovor: Naj bosta X in Y kompaktna. Omejimo se lahko na pokritja s škatlastimi množicami. Naj bo $\{U_\lambda \times V_\mu\}_{\lambda,\mu}$ pokritje $X \times Y$.

Za vsak $x \in X$ je podprostor $\{x\} \times Y$ homeomorfen Y, zato kompakten. Tedaj obstaja končna poddružina zgornje, ki pokriva $\{x\} \times Y$. Označimo z U_x (končen) presek vseh množic U_λ, ki sodelujejo v tem končnem podpokritju. Dobljeno podpokritje krije tudi $U_x \times Y$.

U_x tvorijo odprto pokritje X, torej obstaja končno podpokritje $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Unija pripadajočih podpokritij $U_X \times Y$ je končno podpokritje $X \times Y$.

Vprašanje 54. Povej in dokaži Bolzano-Weierstrassov izrek.

Odgovor: Vsako omejeno zaporedje v $\mathbb{R}^n$ ima stekališče.

Kompaktnost je produktna, torej je produkt zaprtih intervalov kompakten. Ker je zaporedje omejeno, je vsebovano v nekem takem produktu. Ker je množica točk zaporedja neskončna v kompaktu, ima stekališče.

Vprašanje 55. Dokaži: kompaktna podmnožica metričnega prostora je omejena.

Odgovor: Naj bo $x \in K$. Množica $\{K(x,r) \mid r > 0\}$ je pokritje, torej obstaja končno podpokritje.

Vprašanje 56. Dokaži: kompaktnost je dedna na zaprte podprostore.

Odgovor: Naj bo $A^{\text{zap}} \subseteq K$. Naj bo $\{U_\lambda\}_\lambda$ odprto pokritje A. Tedaj je $\{U_\lambda\}_\lambda \cup A^\mathsf{c}$ odprto pokritje X.

Vprašanje 57. Dokaži: v Hausdorffovem prostoru topologija ostro loči kompakte od točk.

Odgovor: Naj bo K kompakt in $x \notin K$ točka zunaj njega. Za vsak $y \in K$ obstajata množici U_y, V_y, ki sta okolici x oz. y.

$\{V_y\}_y$ je odprto pokritje K, torej obstaja končno podpokritje $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$. Množica $U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n}$ je okolica x, množica $V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}$ pa je okolica K. Ti okolici sta disjunktni.

Vprašanje 58. Dokaži: kompaktna podmnožica v T_2 prostoru je zaprta.

Odgovor: Naj bo $x \in K^\mathsf{c}$. Ker v Hausdorffovem prostoru topologija ostro loči kompakte od točk, obstaja okolica x, ki ne seka K.

Vprašanje 59. Dokaži: kompakten Hausdorffov prostor je normalen.

Odgovor: V kompaktnem Hausdorffovem prostoru kompaktne podmnožice sovpadajo z zaprtimi.

Naj bosta A, B kompaktni podmnožici X. Za vsak $x \in A$ obstajata okolici U_x, V_x, ki ostro ločita x in B.

$\{U_x\}_x$ je odprto pokritje, torej obstaja končno podpokritje $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$. Tedaj sta $U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$ ter $V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}$ odprti množici, ki ostro ločita A in B.

Vprašanje 60. Kaj pravi Heine-Borel-Legesgueov izrek? Dokaži ga.

Odgovor: Kompakti v $\mathbb{R}^n$ so natanko zaprte in omejene množice.

Če je K kompakt, je omejen (velja v vseh metričnih prostorih) in zaprt (velja v vseh T_2 prostorih).

Če je A zaprta in omejena množica, obstaja škatlasta množica (produkt zaprtih intervalov), znotraj katere je. To je kompaktna množica (kompaktnost je produktna, zaprt interval je kompakten po lemi o pokritju), A je njena zaprta podmnožica. Torej je A kompaktna.

Vprašanje 61. Karakteriziraj kompaktnost z zaprtimi množicami.

Odgovor: X je kompakten natanko tedaj, ko ima vsaka družina zaprtih množic s praznim presekom v X končno poddružino s praznim presekom.

Vprašanje 62. Povej Cantorjev izrek.

Odgovor: Vsako padajoče zaporedje nepraznih zaprtih intervalov ima neprazen presek. Če velikost intervalov konvergira k 0, je v preseku samo ena točka.

Izrek. *Zvezna slika kompakta je kompakt.*

Izrek. Lebesgueova lema *Za vsako odprto pokritje metričnega kompakta obstaja $\lambda > 0$, da vsaka krogla s polmerom λ leži v celoti v nekem elementu pokritja.*

Dokaz. Naj bo $\{U_\lambda\}_\lambda$ pokritje X. Obstaja končno podpokritje $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Preslikava $x \mapsto \max_j\{d(x, U_j^c)\}$ je zvezna (indukcija). Označimo jo z f.

Ker je $U_1, U_2, \ldots, U_n$ pokritje, je $f > 0$. Funkcija na kompaktu zavzame minimum, torej lahko vzamemo $\lambda = \min f$. □

Vprašanje 63. Povej in dokaži Lebesgueovo lemo.

Vprašanje 64. Dokaži: če sta X, Y metrična in X kompakten, je zvezna preslikava $f : X \to Y$ enakomerno zvezna.

Odgovor: Definiramo pokritje $\{f^*(K(y, \frac{\varepsilon}{2}))\}_y$. Za δ tedaj vzamemo Lebesgueovo število tega pokritja.

Vprašanje 65. Dokaži: vsaka zvezna preslikava iz kompakta v T_2 prostor je zaprta.

Odgovor: Če je X kompakt, so njegove zaprte podmnožice kompaktne; torej so njihove slike kompaktne. Ker je kodomena Hausdorffova, je kompakt zaprt.

Definicija. Odprta množica U je relativno kompaktna, če je $\overline{U}$ kompaktna.

Definicija. Prostor X je lokalno kompakten, če ima bazo iz relativno kompaktnih množic.

Izrek. *Hausdorffov prostor, v katerem je vsaka točka vsebovana v neki kompaktni množici, je lokalno kompakten.*

Dokaz. Naj bo $x \in X$. Obstaja $K^{\text{komp}} \ni x$. Naj bo $U \ni x$ okolica x. Dokažimo, da ima x v U relativno kompaktno okolico.

K je normalen prostor, ker je T_2 in kompakten. Torej je prostor $K \cap U$ regularen, torej obstaja V^{odp}, da je $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq K \cap U$. Ker je $\overline{V}$ zaprta podmnožica K, je kompaktna, torej je V relativno kompaktna. □

Vprašanje 66. Povej zadostni pogoj, da je Hausdorffov prostor lokalno kompakten, in ga dokaži.

Vprašanje 67. Dokaži: vsak lokalno kompakten Hausdorffov prostor je regularen.

Odgovor: Naj bo $U \ni x$ odprta okolica. Ker je X lokalno kompakten, obstaja relativno kompaktna okolica $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Ker je $\overline{V}$ normalna (je kompaktna in Hausdorffova), je regularna in obstaja okolica $x \in W \subseteq \overline{W} \subseteq V$.

Izrek. *Bairov izrek za lokalno kompaktne prostore. Naj bo X LCH in $(A_n)_n$ števna družina zaprtih množic s prazno notranjostjo. Tedaj ima njihova unija tudi prazno notranjost.*

Dokaz. Naj bo U_0 odprta množica v X. Pokazati moramo, da U_0 ni vsebovan v $\bigcup_n A_n$, oziroma da velja $U_0 \backslash \bigcup_n A_n \neq \varnothing$.

Ker ima A_1 prazno notranjost, obstaja $x' \in U_0 \backslash A_1$. Obstaja relativno kompaktna okolica $x' \in U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq U_0 \backslash A_1$.

Ker U_1 ni vsebovan v A_2, obstaja relativno kompaktna $U_2 \subseteq \overline{U_2} \subseteq U_1 \backslash A_2$. Postopek nadaljujemo.

Dobimo verigo kompaktov $\overline{U_1} \supseteq \overline{U_2} \supseteq \ldots$, za katero velja $\overline{U_i} \cap A_i = \varnothing$. Njihov presek je neprazen, in je vsebovan v $U_0 \backslash \bigcup_n A_n$. □

Vprašanje 68. Povej in dokaži Bairov izrek za lokalno kompaktne prostore.

Vprašanje 69. S pomočjo Bairovega izreka dokaži, da so iracionalna števila povsod gosta v $\mathbb{R}$.

Odgovor: Točke so v $\mathbb{R}$ zaprte množice s prazno notranjostjo. Ker je $\mathbb{R}$ LCH, ima vsaka števna množica prazno notranjost; to se zgodi natanko tedaj, ko je njen komplement povsod gost v $\mathbb{R}$. Torej je $\mathbb{Q}^{\mathsf{c}}$ povsod gost v $\mathbb{R}$.

Izrek. *Bairov izrek za polne metrične prostore Naj bo $A_1, A_2, \ldots$ števna družina zaprtih množic s prazno notranjostjo v polnem metričnem prostoru X. Tedaj ima njihova unija prazno notranjost.*

Vprašanje 70. Kako se dokaz Bairovega izreka za polne metrične prostore razlikuje od izreka za lokalno kompaktne prostore?

Odgovor: Pri določanju množic $\overline{U_i}$ skrbimo, da njihovi premeri konvergirajo k 0 (take množice lahko določimo, ker so metrični prostori normalni).

Za končni sklep uporabimo dejstvo, da ima zaporedje z elementi iz teh padajočih množic limito, ki je v njihovem preseku.

Definicija. Kompaktifikacija je gosta vložitev $h : X \to \tilde{X}$, kjer je $\tilde{X}$ nek kompakten Hausdorffov prostor.

Vprašanje 71. Kako poteka kompaktifikacija Aleksandrova? Dokaži, da je res kompaktifikacija.

Odgovor: Naj bo X LCH prostor, ki ni kompakten.

Definiramo $X^+ = X \cup \{\infty\}$. Topologija na X^+ je unija topologije na X ter vse množice, ki vsebujejo ∞, ter katerih komplement je kompakt v X.

Dokažimo, da je to res topologija. Če je $\{U_\lambda\}_\lambda$ družina odprtih množic, imamo dve možnosti: če so vse prvega tipa, je njihova unija prvega tipa in zato vsebovana v topologiji. Če je kakšna drugega tipa, je njen komplement kompakt, zato je komplement unije (ki je presek komplementov) zaprt podprostor kompakta, torej kompakten; torej je unija v topologiji. Podobno za končne preseke.

Res je kompakt (enostavno).

Za dokaz T_2 je dovolj ostro ločiti točke X od ∞. Naj bo $x \in X$. Obstaja relativno kompaktna okolica $x \in U \subseteq \overline{U}$. U in $\overline{U}^\mathsf{c}$ ostro ločita x od ∞.

Očitno je inkluzija $i : X \to X^+$ odprta, torej je vložitev. Ker X ni kompakten, vsaka okolica točke ∞ seka $i_*(X)$, torej je to res kompaktifikacija.

1.8 Prostori preslikav

Definicija. Topologija konvergence po točkah na $\mathcal{C}(X,Y)$ je topologija, generirana s predbazo $\mathcal{P} = \{\langle\{x\}, U\rangle \mid x \in X, U^{\mathrm{odp}} \subseteq Y\}$.

Definicija. Kompaktno-odprta topologija na $\mathcal{C}(X,Y)$ je topologija, generirana s predbazo $\mathcal{P} = \{\langle K, U\rangle \mid K^{\mathrm{komp}} \subseteq X, U^{\mathrm{odp}} \subseteq Y\}$.

Vprašanje 72. Povej bazo za $\mathcal{C}(X,Y)$ s co-topologijo v primeru, da je Y metričen, in dokaži, da je to res baza.

Odgovor:

$$\mathcal{B} = \{\langle f, K, \varepsilon\rangle \mid f \in \mathcal{C}(X,Y), K^{\mathrm{komp}} \subseteq X, \varepsilon > 0\}$$

$\mathcal{B}$ očitno pokriva cel $\mathcal{C}(X,Y)$.

Če je $g \in \langle f, K, \varepsilon\rangle \cap \langle f', K', \varepsilon'\rangle$, definiramo

$$\delta = \min_{x\in K}(\varepsilon - d(f(x), g(x)))$$
$$\delta' = \min_{x\in K'}(\varepsilon' - d(f'(x), g(x)))$$

To sta strogo pozitivni števili, torej je $\langle g, K \cup K', \min\{\delta, \delta'\}\rangle \subseteq \langle f, K, \varepsilon\rangle \cap \langle f', K', \varepsilon'\rangle$. Torej je $\mathcal{B}$ res baza neke topologije na $\mathcal{C}(X, Y)$.

Predbazne množice so res v bazi, ker so le bazne okolice konstantnih preslikav.

Naj bo $\langle f, K, \varepsilon\rangle \in \mathcal{B}$. Za vsak $c \in K$ definiramo $U_c = \{x \in K \,|\, d(f(x), f(c)) < \frac{\varepsilon}{2}\}$. Pokritje $\{U_c\}_c$ ima končno podpokritje $U_{c_1}, \ldots, U_{c_n}$. Za vsak i je $\overline{U_{c_i}}$ zaprta podmnožica kompakta, torej je kompakt. Torej velja $f \in \bigcap_{i=1}^n \left\langle \overline{U_{c_i}}, K(f(c_i), \frac{\varepsilon}{2})\right\rangle \subseteq \langle f, K, \varepsilon\rangle$.

Vprašanje 73. Podaj inkluzijo $Y \to \mathcal{C}(X, Y)$. Pod katerim pogojem je inkluzija zaprta? Dokaži.

Odgovor: $y \mapsto (x \mapsto y)$.

Za poljubno predbazno množico velja $\langle K, U\rangle \cap i(Y) = i(U)$, torej i res podaja bijekcijo med topologijo na Y in topologijo na $i(Y)$.

Če je Y Hausdorffov, je i zaprta. Dovolj je dokazati, da je $i(Y)$ zaprta; torej, da je $i(Y)^\mathsf{c}$ odprta. Naj bo $f \in i(Y)^\mathsf{c}$. Tedaj f ni konstantna in obstajata točki $x, x' \in X$, ki se slikata v drugačni vrednosti. Ker je Y Hausdorffov, obstajata okolici U, U', ki ostro ločita $f(x), f(x')$. Tedaj je $f \in \langle\{x\}, U\rangle \cap \langle\{x'\}, U'\rangle \subseteq i(Y)^\mathsf{c}$.

Vprašanje 74. Dokaži; Y je Hausdorffov natanko tedaj, ko je $\mathcal{C}(X, Y)$ Hausdorffov. Za katero ločljivostno lastnost to še velja?

Odgovor: Naj bo Y Hausdorffov in $f, f' \in \mathcal{C}(X, Y)$ različni. Tedaj obstaja $x \in X$, da je $f(x) \neq f'(x)$. Torej obstajata okolici U, U', ki ostro ločita $f(x)$ in $f'(x)$. Tedaj sta $\langle\{x\}, U\rangle$ in $\langle\{x\}, U'\rangle$ disjunktni okolici, ki ostro ločita f in f'.

Obratno: Ker je T_2 dedna lastnost in Y lahko vložimo v $\mathcal{C}(X, Y)$, je Y Hausdorffov.

To velja tudi za regularnost.

Vprašanje 75. Povej primer prostora, v katerem so vse zvezne realne funkcije konstantne.

Odgovor: Neskončna množica s topologijo končnih komplementov.

Izrek. *Urisonova lema Hausdorffov prostor X je normalen natanko tedaj, ko za vsaki disjunktni zaprti množici A, B obstaja preslikava $f : X \to [0, 1]$, da velja $f(A) = 0$, $f(B) = 1$.*

Dokaz. V levo: Če sta A, B disjunktni zaprti množici in f preslikava, ki ju loči, potem množici $f^*([0, \frac{1}{2}))$ in $f^*((\frac{1}{2}, 1])$ ostro ločita A in B.

V desno: Definiramo $U_1 = B^{\mathsf{c}}$. Ker je prostor normalen, je T_4 in obstaja množica U_0, da je $A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1$. Med $\overline{U_0}$ in U_1 lahko vrinemo $U_{\frac{1}{2}}$, nato vrinemo četrtine, osmine, itd.

Postopek ponavljamo v nedogled. Dobimo neskončno skupino množic $U_{\frac{a}{2^n}}$, $0 \leq a \leq 2^n$, kjer velja $r \leq s \implies U_r \subseteq \overline{U_r} \subseteq U_s$.

Definiramo

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in U_r\} & x \notin B \\ 1 & x \in B \end{cases}$$

Recimo, da je $0 < f(x) < 1$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Obstajata r, s, da velja $f(x) - \varepsilon < r < f(x) < s < f(x) + \varepsilon$. Velja $x \in U_s \backslash \overline{U_r}$, to je odprta množica. Velja $f(U_s \backslash \overline{U_r}) \subseteq (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$. □

Vprašanje 76. Povej in dokaži Urisonovo lemo.

Definicija. Zaporedje $(a_n)_n$ je KVADRATNO SUMABILNO, če je vsota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ končna.

Definicija. Množico vseh kvadratno sumabilnih realnih zaporedij označimo z l^2.

Izrek. URISONOV METRIZACIJSKI IZREK *Vsak normalen 2-števen prostor je metrizabilen.*

Dokaz. V l^2 vpeljemo metriko $d((x_n)_n, (y_n)_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_n - y_n)^2}$.

Ker je prostor 2-števen, ima števno bazo $\mathcal{B}$. Za vsak par bazičnih okolic B_n, B_m, kjer je $\overline{B_n} \subseteq B_m$, obstaja Urisonova funkcija $f_{n,m} : X \to [0, 1]$, da velja $f_{n,m}(B_n) = 0$, $f_{n,m}(B_m^{\mathsf{c}}) = 1$.

Ta družina preslikav loči točke X; naj bosta $x, x' \in X$. Obstaja bazna okolica $B' \supseteq x$, v kateri ni x'. Tedaj obstaja manjša bazna okolica $B \subseteq B'$, katere zaprtje je v B' (normalnost). Vzamemo preslikavo med njima.

Vpeljemo (poljubno) novo indeksiranje teh funkcij z $(f_n)_n$. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira, zato po Weierstrassovem kriteriju konvergira tudi vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2(x)}{n^2}.$$

Predpis $f(x) = (\frac{1}{n} f_n(x))_n$ določa funkcijo $X \to l^2$.

Ker za $x \neq x'$ obstaja funkcija f_n, ki ju loči, velja $f(x) \neq f(x')$, torej je f injektivna.

Naj bo $x \in X$, $\varepsilon > 0$ ter N tak, da je $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Za $n = 1, \ldots, N$ definiramo množice

$$U_n = \{y \in X \mid (f_n(x) - f_n(y))^2 < \frac{\varepsilon}{2N}\}.$$

To je končno število odprtih množic, torej je njihov presek $U = \bigcap_{n \leq N} U_n$ tudi odprt.

Naj bo $y \in U$.

$$
\begin{aligned}
(d(f(x), f(y)))^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(f_n(x) - f_n(y))^2 \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}(f_n(x) - f_n(y))^2 + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}(f_n(x) - f_n(y))^2 \\
&< N\frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Torej se U slika v ε-okolico točke $f(x)$, torej je f zvezna.

Naj bo $x \in X$ ter $U \ni x$ poljubna okolica. Obstajata bazni množici B, B', da velja $x \in B \subseteq \overline{B} \subseteq B' \subseteq U$. Naj bo f_n Urisonova preslikava za ti množici. Naj bo $y \in X$. Naj velja $d(f(x), f(y)) < \frac{1}{n}$. Velja

$$
\left|\frac{1}{n}f_n(y)\right| = \left|\frac{1}{n}f_n(y) - \frac{1}{n}f_n(x)\right| < d(f(x), f(y)),
$$

torej

$$
|f_n(y)| = |f_n(y) - f_n(x)| < nd(f(x), f(y)) < 1.
$$

Ker f_n slika $(B')^{\mathsf{c}}$ v 1, mora veljati $y \in B' \subseteq U$. Torej za $f(y)$, ki je dovolj blizu $f(x)$, velja $y = f^{-1}(f(y)) \in U$ (f je injektivna). Torej je f^{-1} zvezna kot funkcija $f_*(X) \to X$, torej je f homeomorfizem na sliko.

Torej je X podprostor metrizabilnega l^2, torej je X metrizabilen. □

Vprašanje 77. Povej in dokaži Urisonov metrizacijski izrek.

Lema. *Naj bo X normalen in $A^{\text{zap}} \subseteq X$. Naj bo $f : A \to \mathbb{R}$ zvezna in naj obstaja $c \in \mathbb{R}$, da je $|f(a)| \leq c$ za vse $a \in A$. Potem obstaja $h : X \to \mathbb{R}$, da velja $|h(x)| \leq \frac{1}{3}c$ za vse $x \in X$ ter $|f(a) - h(a)| \leq \frac{2}{3}c$ za vse $a \in A$.*

Dokaz. Definiramo

$$
\begin{aligned}
A_+ &= \{a \in A \,|\, f(a) \geq \frac{1}{3}c\} \\
A_- &= \{a \in A \,|\, f(a) \leq -\frac{1}{3}c\}
\end{aligned}
$$

To sta disjunktni zaprti množici, torej po Urisonovi lemi obstaja preslikava $h : X \to [-\frac{1}{3}c, \frac{1}{3}c]$, ki slika A_- v $-\frac{1}{3}c$, ter A_+ v $\frac{1}{3}c$. □

Izrek. Tietzejev razširitveni izrek *Naj bo X normalen prostor in $A^{\text{zap}} \subseteq X$. Naj bo $J \subseteq \mathbb{R}$ interval in $f : A \to J$ zvezna. Potem jo lahko razširimo na zvezno preslikavo $f : X \to J$.*

Dokaz. Brez škode za splošnost velja $J = [-1, 1]$.

Po lemi obstaja taka preslikava $h_0 : X \to \mathbb{R}$, da velja $|h_0(x)| \leq \frac{1}{3}$ ter $|f(a) - h_0(a)| \leq \frac{2}{3}$. Lemo nato uporabimo na preslikavi $f - h_0$, dobimo preslikavo h_1. Nato lemo uporabimo na preslikavi $f - h_0 - h_1$, in postopek nadaljujemo.

Dobimo preslikave $h_n : X \to \mathbb{R}$, za katere velja $|h_n(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ter

$$\left| f(a) - \sum_{i=0}^{n-1} h_i(a) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n .$$

Definiramo $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i(x)$. Po Weierstrassovem kriteriju konvergira enakomerno na X, torej je F zvezna. Velja $F(a) = f(a)$ za $a \in A$. Velja $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 3$, torej je $|F(x)| \leq 1$. $\square$

Vprašanje 78. Povej in dokaži Tietzejev razširitveni izrek.

Definicija. Prostor E je ABSOLUTNI EKSTENZOR, če za vsako preslikavo $f : A \to E$, kjer je $A^{\text{zap}} \subseteq X$ in X normalen, obstaja razširitev $f' : X \to E$.

Definicija. Prostor $A \subseteq X$ je RETRAKT, če obstaja preslikava $r : X \to A$ z lastnostjo $r(a) = a$ za vse $a \in A$. Tako preslikavo imenujemo RETRAKCIJA.

Vprašanje 79. Kaj je absolutni ekstenzor in kaj retrakt?

Vprašanje 80. Ali je produkt absolutnih ekstenzorjev tudi absolutni ekstenzor?

Odgovor: Da.

Vprašanje 81. Dokaži: retrakt Hausdorffovega prostora je zaprt podprostor.

Odgovor: Naj bo $r : X \to A$ retrakcija in $i : A \to X$ inkluzija. Potem je A ravno množica točk ujemanja preslikave $i \circ r$ ter identitete.

Vprašanje 82. Dokaži: retrakt absolutnega ekstenzorja je absolutni ekstenzor.

Odgovor: Naj bo $r : E \to B$ retrakt absolutnega ekstenzorja E na podprostor B. Naj bo X normalen, $A^{\text{zap}} \subseteq X$ ter $f : A \to B$ zvezna. f lahko obravnavamo kot preslikavo $A \to E$, torej jo lahko razširimo na preslikavo $f' : X \to E$. Tedaj je $r \circ f'$ razširitev preslikave f.

1.9 Stone-Weierstrassov izrek

Definicija. Naj bo $f : X \to \mathbb{R}$ zvezna preslikava. NOSILEC preslikave f je množica $\overline{f^*(\mathbb{R} \backslash \{0\})}$.

Definicija. Naj bo $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ pokritje prostora X. RAZČLENITEV ENOTE je množica preslikav $\rho_i : X \to [0, 1]$, kjer je nosilec preslikave ρ_i vsebovan v U_i in velja $\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n = 1$ povsod na X.

Vprašanje 83. Kaj je razčlenitev enote?

Vprašanje 84. Dokaži: za vsako odprto pokritje $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ normalnega prostora X obstaja neka podrejena razčlenitev enote.

Odgovor: Ker je X normalen in $A_1 = \bigcap_{i=2}^n U_i^{\mathsf{c}} \subseteq U_1$ zaprta, obstaja odprta množica V_1, da $A_1 \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U_1$. Enako naredimo tudi za druge U_i. Družina $(V_i)_i$ je še vedno pokritje X. Enak postopek naredimo na tej družini; dobimo družino $(W_i)_i$, ki še vedno pokriva X, in za katero velja $W_i \subseteq \overline{W_i} \subseteq V_i$.

Izberemo Urisonove funkcije $f_i : X \to [0,1]$, za katere velja $f(V_i^{\mathsf{c}}) = 0$ ter $f(\overline{W_i}) = 1$. Definiramo $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$. Ker W_i pokrivajo X, je f strogo pozitivna. Preslikave $\rho_i = \frac{f_i}{f}$ tvorijo razčlenitev enote, ker je nosilec ρ_i vsebovan v $\overline{V_i} \subseteq U_i$.

Vprašanje 85. Povej Weierstrassov izrek.

Odgovor: Polinomi so gosti v $\mathcal{C}([a,b])$, opremljenim s supremum metriko.

Definicija. Množica preslikav M LOČI TOČKE, če za vsaki različni točki x, x' obstaja funkcija $f \in M$, da velja $f(x) \neq f(x')$.

Izrek. STONE-WEIERSTRASS *Naj bo X normalen prostor. Naj bo A podalgebra v $\mathcal{C}(X)$ (opremljeno s co-topologijo). Če A vsebuje konstantno preslikavo in loči točke, je $\overline{A} = \mathcal{C}(X)$.*

Dokaz. Za nenegativen $f \in A$ velja $\sqrt{f} \in \overline{A}$, ker kvadratni koren lahko predstavimo kot enakomerno limito polinomov (Taylorjeva vrsta). Torej velja $|f| \in \overline{A}$, ker je $|x| = \sqrt{x^2}$. Torej za $f_1, f_2 \in A$ velja $\max f_1, f_2 \in \overline{A}$, ker lahko maksimum izrazimo z absolutno vrednostjo. Podobno za minimum.

Za poljubna $x, y \in X$ ter $a, b \in \mathbb{R}$ obstaja preslikava $f \in A$, da velja $f(x) = a$, $f(y) = b$. Naj bo $f \in \mathcal{C}(X)$ ter $\langle f, K, \varepsilon \rangle$ njegova bazična okolica. Za vsaki točki $u, v \in K$ izberemo preslikavo $h_{u,v}$, da velja $h_{u,v}(u) = f(u)$ ter $h_{u,v}(v) = f(v)$.

Naj bo $u \in K$. Množice

$$U_v = \{x \in K \mid h_{u,v}(x) < f(x) + \varepsilon\}$$

so odprte v X in pokrivajo K, torej obstaja končno podpokritje $U_{v_1}, \ldots, U_{v_n}$. Velja $h_u = \min\{h_{u,v_1}, \ldots, h_{u,v_n}\} \in \overline{A}$. Velja $h_u(x) < f(x) + \varepsilon$ za $x \in K$. Velja $h_u(u) = f(u)$.

Podobno naredimo za spodnjo mejo; definiramo

$$V_u = \{x \in K \mid h_u(x) > f(x) - \varepsilon\}.$$

To je odprto pokritje K, torej obstaja končno podpokritje $V_{u_1}, \ldots, V_{u_m}$. Definiramo $h = \max\{h_{u_1}, \ldots, h_{u_m}\}$. Velja $h \in \overline{A}$. Velja $f(x) - \varepsilon < h(x) < f(x) + \varepsilon$ za vse $x \in K$. Torej $h \in \langle f, K, \varepsilon \rangle$. Torej velja $\overline{A} \cap \langle f, K, \varepsilon \rangle$. □

Vprašanje 86. Povej in dokaži Stone-Weierstrassov izrek.

2 Diskretna matematika 1

2.1 Osnovna načela kombinatorike

Trditev. *Načelo produkta Če so $A_1, A_2, \ldots, A_n$ končne množice, je $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$.*

Trditev. *Načelo vsote Če so $A_1, A_2, \ldots, A_n$ paroma disjunktne končne množice, je $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$.*

Trditev. *Načelo enakosti Če obstaja bijekcija $A \to B$, je $|A| = |B|$.*

Trditev. *Načelo dvojnega preštevanja Če izraza I_1 in I_2 preštevata elemente iste množice, imata enako vrednost.*

Trditev. *Dirichletovo načelo (načelo golobnjaka) Če je $m > n$, potem ne obstaja injekcija $[m] \to [n]$.*

Vprašanje 1. Katera so osnovna načela kombinatoričnega preštevanja? Kako Dirichletovo načelo izrazimo v jeziku funkcij?

Odgovor:

Osnovna načela kombinatoričnega preštevanja so:

- načelo produkta
- načelo vsote
- načelo enakosti
- Dirichletovo načelo

Dirichletovo načelo: če je $m > n$, ne obstaja injekcija $[m] \to [n]$.

2.2 Število preslikav in binomski izrek

Definicija. $n^{\underline{k}} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$, $n^{\overline{k}} = n(n+1)\ldots(n+k-1)$.

Trditev. *Naj bo A n-množica in B m-množica. Tedaj velja*

- $\left|B^A\right| = m^n$.
- *Število injektivnih preslikav $A \to B$ je $n^{\underline{k}}$.*
- *Število bijektivnih preslikav $A \to B$ je $n!$, če je $m = n$, sicer 0.*

Dokaz. Zapišimo $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Naj bo $f \in B^A$. Priredimo mu $\mathcal{F}(f) = (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)) \in K^n$.

F je bijekcija $B^A \to B^n$, po načelu produkta pa velja $|B^n| = m^n$.

Drugo točko dokažemo podobno, tretja pa direktno sledi iz druge. □

Definicija. Za $x \in \mathbb{C}$ in $k \in \mathbb{N}_0$ definiramo

$$\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!}.$$

Za vse druge k je $\binom{x}{k} = 0$.

Trditev. *Če je $n \in \mathbb{N}_0$ in $k \leq n$, je*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Posledica. *Za $0 \leq k \leq n$ velja*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Definicija. Za $k \in \mathbb{N}$ in končno množico X je

$$\binom{X}{k} = \{S \subseteq X \mid |S| = k\}.$$

Trditev. *Če je N n-množica in $k \in \mathbb{N}_0$, je $\left|\binom{N}{k}\right| = \binom{n}{k}$.*

Trditev. *Za $1 \leq k \leq n$ velja*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Dokaz. Naj bo N n-množica. Velja $\left|\binom{N}{k}\right| = \binom{n}{k}$. Naj bo $x \in N$. Razdelimo k-podmnožice N v tiste, ki vsebujejo x, in tiste, ki ga ne vsebujejo. Moč prve skupine je $\binom{n-1}{k-1}$, moč druge pa $\binom{n-1}{k}$. □

Izrek. Binomski izrek *Za vsak $n \geq 0$ ter elementa a, b nekega komutativnega kolobarja velja*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Dokaz.

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ členov}}$$

To je vsota produktov, kjer iz vsakega oklepaja izberemo en člen. Torej

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k b^{n-k}$$

za neke c_k. To pa je ravno število načinov, da izmed n oklepajev izberemo k oklepajev (iz katerih vzamemo a namesto b). Torej $c_k = \binom{n}{k}$. □

Vprašanje 2. Koliko je vseh preslikav med končnima množicama, koliko je vseh injektivnih preslikav, bijektivnih preslikav in surjektivnih preslikav?

Odgovor:

Naj bo N n-množica in K k-množica. Vseh preslikav $N \to K$ je k^n, injektivnih preslikav je $n^{\underline{k}}$, bijektivnih pa $n!$, če je $n = k$, in 0, če $n \neq k$.

Vseh surjektivnih preslikav je $k!S(n,k)$

Vprašanje 3. Zapišite binomski izrek.

Odgovor: Naj bo $n \geq 0$ in naj bosta a, b elementa nekega komutativnega kolobarja. Tedaj velja

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2.3 Izbori

Trditev. *Število neurejenih izborov iz n-množice dolžine k s ponavljanjem je*

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Dokaz. Naj bo $N = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Naj bo $\{x_1, x_1, \ldots, x_1, x_2, x_2, \ldots x_2, \ldots, x_n, x_n, \ldots x_n\}$ neurejen izbor dolžine k.

Uredimo ta izbor po zapisanih indeksih elementov, ter ga zapišimo kot binarni niz, kjer enice predstavljajo elemente (jih je natanko k), ničle pa predstavljajo meje med različnimi elementi N. Ničel je natanko $n-1$ (lahko so tudi zaporedne).

Vsak tak binarni niz predstavlja en izbor (postopek izvršimo v drugi smeri), vsak izbor nam da natanko en tak niz. Našli smo torej bijekcijo. Teh binarnih nizov je

$$\binom{n+k-1}{k},$$

ker si lahko poljubno izberemo položaj ničel v nizu. □

Vprašanje 4. Koliko je urejenih in neurejenih izborov z in brez ponavljanja? Utemeljite formulo za neurejene izbore s ponavljanjem.

Odgovor:

	ponavljanje	brez ponavljanja
urejen izbor	n^k	$n^{\underline{k}}$
neurejen izbor	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Za vsak izbor lahko tvorimo binarni niz, kjer enice predstavljajo elemente, ničle pa meje med različnimi elementi (če elemente uredimo tako, da so enaki skupaj). Tak niz bo imel k enic in $n-1$ ničel, postopek podaja bijekcijo med nizi in izbori. Nize lahko izberemo na $\binom{n+k-1}{k}$ načinov.

2.4 Permutacije

Definicija. PERMUTACIJA množice A je bijekcija $f : A \to A$. Množico vseh permutacij množica A označimo z S_A.

Opomba. $|S_A| = |A|!$

Definicija. MULTIMNOŽICA je par (S, ν), kjer je S množica, $\nu : S \to \mathbb{N}_0$ pa preslikava, ki šteje število pojavitev elementov v multimnožici.

Definicija. PERMUTACIJA MULTIMNOŽICE $M = (S, \nu)$ je zaporedje $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kjer je $x_i \in S$ ter se vsak x_i v zaporedju pojavi natanko $\nu(x_i)$-krat.

Definicija. MULTINOMSKI KOEFICIENT za števila $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ter $n = n_1+n_2+\ldots+n_k$ je zapis

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

Opomba. Velja

$$\binom{n}{n_1, n_2} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2}.$$

Trditev. *Število permutacij multimnožice* $\{x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_k^{\alpha_k}\}$ *je*

$$\binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k},$$

za $n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$.

Dokaz. Najprej izberemo α_1 mest, kjer se pojavi x_1. Nato izmed $n - \alpha_1$ izberemo α_2 mest, kjer se pojavi x_2. Postopek nadaljujemo. Na vsakem koraku imamo

$$\binom{n - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_i - 1}{\alpha_i}$$

možnosti izbire. Vseh možnosti je torej

$$\binom{n}{\alpha_1}\binom{n-\alpha_1}{\alpha_2}\cdots\binom{\alpha_k}{\alpha_k} = \binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}.$$

$\square$

Izrek. *Multinomski izrek Za vsak $n \geq 0$ ter elemente $x_1, x_2, \ldots, x_k$ komutativnega kolobarja velja*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}.$$

Vprašanje 5. Kaj je permutacija multimnožice? Definirajte multinomske koeficiente in zapišite multinomski izrek.

Odgovor:

Permutacija multimnožice $M = (S, \nu) = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_k^{\alpha_k}\}$ je tako zaporedje $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, da velja $y_j \in S$ za vse j, ter da se x_i v zaporedju pojavi natanko α_i-krat, za vse i.

Multinomski koeficient je zapis

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!},$$

kjer so n_i števila in velja $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Multinomski izrek pravi, da za vse $n \geq 0$ ter elemente $x_1, x_2, \ldots, x_k$ poljubnega komutativnega kolobarja velja

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}.$$

2.5 Kompozicije

Definicija. Kompozicija naravnega števila n je tak vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, da velja $\lambda_i \geq 1$ ter $\sum_i \lambda_i = n$.

Opomba. Kompozicija dolžine k je ravno rešitev enačbe $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ v naravnih številih.

Trditev. *Število kompozicij velikosti n je 2^{n-1}, število kompozicij dolžine k pa $\binom{n-1}{k-1}$.*

Dokaz. Predstavljamo si n kot n elementov, položenih v ravno črto. Med vsaka dva elementa lahko bodisi postavimo črto, bodisi ne; torej imamo 2^{n-1} možnosti, kako te črte postavimo.

Če se omejimo le na kompozicije dolžine k, moramo postaviti $k - 1$ črt na $n - 1$ možnih mest. □

Vprašanje 6. Kaj je kompozicija naravnega števila? Koliko je vseh kompozicij števila n in koliko jih ima k členov?

Odgovor:

Kompozicija naravnega števila n je vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, da velja $\forall i. \lambda_i \geq 1$ in $\sum_i \lambda_i = n$.

Vseh kompozicij je 2^{n-1}, kompozicij dolžine k pa $\binom{n-1}{k-1}$.

Definicija. Šibka kompozicija števila n je vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, kjer velja $\lambda_i \geq 0$, ter $\sum_i \lambda_i = n$.

Trditev. *Število šibkih kompozicij velikosti n in dolžine k je $\binom{n+k-1}{k-1}$.*

Dokaz. Če vsakemu elementu šibke kompozicije prištejemo 1, dobimo ravno kompozicijo velikosti $n + k$. Teh je $\binom{n+k-1}{k-1}$. □

Vprašanje 7. Kaj je šibka kompozicija naravnega števila in koliko je takih kompozicij števila n s k členi?

Odgovor:

Šibka kompozicija naravnega števila n je vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, kjer velja $\lambda_i \geq 0$ ter $\sum_i \lambda_i = n$.

Kompozicij števila n dolžine k je $\binom{n+k-1}{k-1}$.

2.6 Razčlenitve

Definicija. Razčlenitev naravnega števila n je vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, kjer velja $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq 1$ in $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$.

Definicija.

- $p(n)$ je število razčlenitev števila n.
- $p_k(n)$ je število razčlenitev števila n s k členi.
- $\overline{p}_k(n)$ je število razčlenitev števila n s k ali manj členi.

Trditev.

- $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$.
- $\overline{p}_k(n) = \overline{p}_{k-1}(n) + \overline{p}_k(n-k)$.

Dokaz.

- Razčlenitve s k členi razdelimo na tiste, kjer je $\lambda_k = 1$ in druge. Prvih je $p_{k-1}(n-1)$, drugih pa $p_k(n-k)$ (v diagramu odmislimo prvi stolpec).
- Razčlenitve razdelimo na tiste, ki imajo k členov, in tiste, ki imajo manj kot k členov; $\overline{p}_k(n) = \overline{p}_{k-1}(n) + p_k(n) = \overline{p}_{k-1}(n) + \overline{p}_k(n-k)$.

□

Vprašanje 8. Kaj je razčlenitev naravnega števila? Koliko je vseh razčlenitev števila n s k členi in koliko s kvečjemu k členi?

Odgovor:

Razčlenitev naravnega števila n je vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, kjer velja $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq 1$ in $\sum_i \lambda_i = n$.

Razčlenitev n s k členi je $p_k(n)$, razčlenitev s kvečjemu k členi pa $\overline{p}_k(n)$. Določitev teh vrednosti je težek problem, veljata pa rekurzivni formuli $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$ ter $\overline{p}_k(n) = \overline{p}_{k-1}(n) + \overline{p}_k(n-k)$.

Vprašanje 9. Kako prestavljamo razčlenitve?

Odgovor: S Ferrerrovimi diagrami ali Youngovimi tabelami.

2.7 Stirlingova in Lahova števila

Definicija. Za $1 \leq k \leq n$ je STIRLINGOVO ŠTEVILO 1. VRSTE $c(n, k)$ število permutacij množice $[n]$, ki se zapišejo s k disjunktnimi cikli.

Trditev. *Za $1 \leq k \leq n$ velja $c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k)$.*

Dokaz. Razdelimo permutacije $[n]$ glede na to, kam se slika element n. Če je n negibna točka, dobimo $c(n-1, k-1)$ možnosti. Če je n v ciklu dolžine vsaj 2, ga lahko odstranimo in dobimo permutacijo množice $[n-1]$ s k cikli. Isto permutacijo štejemo natanko $(n-1)$-krat; v vsako permutacijo $[n-1]$ lahko vrinemo n na $n-1$ mestih. $\square$

Vprašanje 10. Kako so definirana Stirlingova števila prve vrste in kako jih izračunamo? Zapišite začetni del Stirlingove matrike prve vrste.

Odgovor:

Stirlingovo število prve vrste $c(n, k)$ je število permutacij $[n]$, ki se jih zapiše s k disjunktnimi cikli. Izračunamo jih s pomočjo pogojev $c(0, 0) = 1$, $c(n, 0) = 0$ in rekurzivne zveze $c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k)$.

	0	1	2	3	4	k
0	1					
1	0	1				
2	0	1	1			
3	0	2	3	1		
4	0	6	11	6	1	
n						

Definicija. Naj bo X množica. Množica $\{X_i \mid i \in I\}$ je razdelitev množice X, če velja:

- $\bigcup_i X_i = X$

- $X_i \cap X_j = \varnothing$ za $i \neq j$
- $X_i \neq \varnothing$ za vse i

Definicija. Za $1 \leq k \leq n$ je STIRLINGOVO ŠTEVILO 2. VRSTE $S(n,k)$ število razdelitev $[n]$ v k blokov.

Trditev. *Za* $1 \leq k \leq n$ *velja* $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$.

Dokaz. Naj bo X n-množica in $a \in X$. Razdelimo razdelitve v dve skupini. Razdelitev, ki vsebujejo blok $\{a\}$, je $S(n-1,k-1)$. Razdelitev, ki ne vsebujejo bloka $\{a\}$, je $S(n-1,k) \cdot k$, ker lahko a vrinemo v poljuben blok. □

Vprašanje 11. Kako so definirana Stirlingova števila druge vrste in kako jih izračunamo? Zapišite začetni del Stirlingove matrike druge vrste. Kakšna je povezava med temi števili in ekvivalenčnimi relacijami?

Odgovor:

Stirlingovo število druge vrste $S(n,k)$ je število razdelitev $[n]$ v k disjunktnih nepraznih blokov. To ustreza številu ekvivalenčnih relacij na množici $[n]$, ki jo razdelijo v k ekvivalenčnih razredov.

Stirlingova števila druge vrste izračunamo s pogojema $S(0,0) = 1$, $S(n,0) = 0$, ter rekurzivno zvezo $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$.

	0	1	2	3	4	k
0	1					
1	0	1				
2	0	1	1			
3	0	1	3	1		
4	0	1	7	6	1	
n						

Definicija. Za $1 \leq k \leq n$ je Lahovo število $L(n,k)$ število razdelitev n-množice v k linearno urejenih nepraznih blokov.

Trditev. $L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n-k+1)L(n-1,k)$.

Dokaz. Razdelimo razdelitve na tiste, kjer nastopa blok (n) in ostale. V prvem primeru dobimo $L(n-1,k-1)$ možnosti, v drugem pa lahko vsaki razdelitvi brez n vrinemo n na $n+k-1$ mest: na $n-1$ načinov med elemente, in na k načinov na konec bloka. □

Vprašanje 12. Kako so definirana Lahova števila in kako jih izračunamo — kako rekurzivno in kako eksplicitno?

Odgovor:

Lahovo število $L(n,k)$ je število razdelitev n elementov v k linearno urejenih blokov. Izračunamo ga lahko z rekurzivno formulo $L(n,k) = L(n-1,k-1)+(n+k-1)L(n-1,k)$ ali eksplicitno s formulo $L(n,k) = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}$.

2.8 Dvanajstera pot

Vprašanje 13. Kaj je dvanastera pot? Zapišite in napolnite ustrezno tabelo.

Odgovor: Naj bo N n-množica in K k-množica. Preslikave $N \to K$ razdelimo glede na to, ali ločijo elemente N, ali ločijo elemente K, ter glede na to, ali so injektivne, surjektivne, ali če nimamo dodatnih zahtev. Dvanajstera pot poda način izračuna števila teh preslikav.

	injektivne	surjektivne	kakršnekoli
loči predmete, loči predale	$k^{\underline{n}}$	$k!S(n,k)$	k^n
loči predmete, ne loči predalov	$\begin{cases}1 & n \le k\\ 0 & n > k\end{cases}$	$S(n,k)$	$\sum_{i=1}^{k} S(n,i)$
ne loči predmetov, loči predale	$\binom{k}{n}$	$\binom{n-1}{k-1}$	$\binom{n+k-1}{k-1}$
ne loči predmetov, ne loči predalov	$\begin{cases}1 & n \le k\\ 0 & n > k\end{cases}$	$p_k(n)$	$\overline{p}_k(n)$

2.9 Načelo vključitev in izključitev

Izrek. Načelo vključitev in izključitev *Naj bodo $A_1, A_2, \dots, A_n$ množice. Tedaj*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_j,$$

kjer je

$$a_j = \sum_{I \in \binom{[n]}{j}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Dokaz. Naj bo $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. x prispeva 1 k levi strani formule. Če dokažemo, da prispeva 1 tudi k desni strani formule, bo izrek dokazan.

Recimo, da se x pojavi v k izmed množic $A_1, A_2, \dots, A_n$.

- a_1 prispeva k
- a_2 prispeva $\binom{k}{2}$
- a_3 prispeva $\binom{k}{3}$

- ...
- a_k prispeva 1
- vsi višji a_i prispevajo 0

Skupen prispevek x je torej

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k}{i}.$$

Po binomskem izreku velja $0 = (1-1)^k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k}{i}$.

Torej je prispevek x enak

$$0 - (-1)^{0+1} = 1.$$

□

Vprašanje 14. Formulirajte in dokažite načelo vključitev in izključitev.

Odgovor: Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ množice. Tedaj

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}a_j,$$

kjer je

$$a_j = \sum_{I\in\binom{[n]}{j}}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|.$$

Izberemo poljuben element $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. K levi strani vsote prispeva 1; dokazati moramo, da toliko prispeva tudi k desni strani vsote.

Naj bo k število množic izmed $A_1, A_2, \ldots, A_n$, kjer se pojavi x. a_i k prispevku x prišteje oz. odšteje $\binom{k}{i}$.

Vsoto $\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k}{i}$ izračunamo s pomočjo binomskega izreka za $0 = (1-1)^k$; sledi, da je prispevek x na desni strani enak 1.

2.10 Linearne rekurzivne enačbe

Vprašanje 15. Pojasnite pojem linearne rekurzivne enačbe s konstantnimi koeficienti. Kako lahko zapišemo splošno rešitev dvočlene rekurzije? Kako formulo dokažemo?

Odgovor:

To je enačba, katere rešitev je zaporedje $(a_n)_n$, enačba sama pa je podana z linearno rekurzivno zvezo $c_d a_{n+d} + c_{d-1}a_{n+d-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_o a_n = 0$.

Splošna rešitev dvočlene rekurzije: za rekurzivno enačbo $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$ je rešitev sledeča: tvorimo karakteristično enačbo $x^2 = \alpha x + \beta$, ter označimo rešitvi z λ_1, λ_2.

Če je $\lambda_1 = \lambda_2$, obstajata taki konstanti A, B, da je $a_n = (A + nB)\lambda_1^n$. Če je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, pa obstajata konstanti A, B, da je $a_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$. V obeh primerih konstanti izračunamo iz začetnih pogojev.

V primeru $\lambda_1 \neq \lambda_2$ velja $a_0 = A + B$ in $a_1 = \lambda_1 A + \lambda_2 B$; tedaj je enačba rešljiva za A, B za začetne pogoje. Za splošen n dokažemo po indukciji;

$$\begin{aligned}
a_n &= \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} \\
&= \alpha(A\lambda_1^{n-1} + B\lambda_2^{n-1}) + \beta(A\lambda_1^{n-2} + B\lambda_2^{n-2}) \\
&= A\lambda_1^{n-2}(\alpha\lambda_1 + \beta) + B\lambda_2^{n-2}(\alpha\lambda_2 + \beta) \\
&= A\lambda_1^n + B\lambda_2^n
\end{aligned}$$

Če je $\lambda_1 = \lambda_2$, prvo izločimo primer $\lambda_1 = 0$; takrat dobimo ničelno zaporedje. Ponovno je enačba rešljiva za prva dva člena zaporedja. Po indukciji se razširi na celotno zaporedje;

$$\begin{aligned}
a_n &= \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} \\
&= \alpha(A + nB - B)\lambda^{n-1} + \beta(A + nB - 2B)\lambda^{n-2} \\
&= \lambda^{n-2}(\lambda\alpha A + \lambda\alpha nB - \lambda\alpha B + \beta A + \beta nB - 2B\beta) \\
&= \lambda^{n-2}(A\lambda^2 + nB\lambda^2 - B(\lambda\alpha + 2\beta))
\end{aligned}$$

Ker je λ edina ničla $x^2 = \alpha x + \beta$, je $\alpha^2 + 4\beta = 0$. Tedaj $\lambda = \frac{\alpha}{2}$, torej $\lambda\alpha + 2\beta = 0$.

Vprašanje 16. Kakšna je splošna rešitev d-člene linearne rekurzivne enačbe s konstantnimi koeficienti? Opišite korake dokaza te formule.

Odgovor:

Naj bo dana enačba

$$a_{n+d} + c_{d-1}a_{n+d-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = f(n).$$

Če je $f(n) = 0$, obravnavamo homogen primer. Tedaj enačbo predelamo v polinom $\lambda^d + c_{d-1}\lambda^{d-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0$. Označimo ničle tega polinoma z $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ter njihove stopnje z $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Rešitev je tedaj oblike

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} A_i(n)\lambda_i^n,$$

kjer so A_i polinomi stopenj st $A_i \leq s_i - 1$.

Če velja $f(n) \neq 0$, je a_n oblike $a_n = z_n + w_n$, kjer je z_n rešitev nehomogenega primera, w_n pa neka partikularna rešitev enačbe.

Dokaz je sledeč: Tako $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ kot $\operatorname{End} \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ sta vektorska prostora nad $\mathbb{C}$. Definiramo preslikavo $E \in \operatorname{End} \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ s predpisom

$$E : a_0, a_1, a_2, \ldots \mapsto a_1, a_2, a_3, \ldots.$$

Definiramo tudi funkcijo $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s predpisom

$$Q(x) = x^d + c_{d-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0.$$

Velja

$$\begin{aligned}
(a_n)_n \in \ker Q(E) &\Leftrightarrow Q(E).(a_n)_n = 0 \\
&\Leftrightarrow (E^d + \ldots + c_1 E + c_0 I).(a_n)_n = 0 \\
&\Leftrightarrow (a_d + c_{d-1}a_{d-1} + \ldots + a_1 c_1 + a_0 c_0, \ldots, \ldots) = 0 \\
&\Leftrightarrow (a_n)_n \text{ustreza rekurzivni enačbi}
\end{aligned}$$

Velja $Q(x) = (x - \lambda_1)^{s_1} \ldots (x - \lambda_k)^{s_k}$, $s_1 + s_2 + \ldots + s_k = d$.

Iz linearne algebre vemo $\ker Q(E) = \ker (E - \lambda_1 I)^{s_1} \oplus \ldots \oplus \ker (E - \lambda_k)^{s_k}$. Ni se težko prepričati, da je $\dim \ker (E - \lambda_i I)^{s_i} = s_i$ (definiramo preslikavo iz zaporedij v $\mathbb{C}^{s_i}$, ki ohrani prvih s_i členov zaporedja. Ta preslikava je bijekcija, ker je zaporedje tukaj določeno s prvimi s_i členi).

Velja: $(\lambda^n)_{n\geq 0}, (n\lambda^n)_{n\geq 0}, \ldots, (n^{s-1}\lambda^n)_{n\geq 0}$ je baza za $\ker (E - \lambda I)^s$. Dokaz izpustimo. Torej je $(a_n)_n \in \ker(E - \lambda I)^s \Leftrightarrow a_n = A(n)\lambda^n$, in $\operatorname{st} A \leq s - 1$.

2.11 Rodovne funkcije

Definicija. Naj bo $(a_n)_n$ zaporedje. FORMALNA POTENČNA VRSTA je zapis

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Definicija. RODOVNA FUNKCIJA je formalna potenčna vrsta, katere zaporedje je rešitev kombinatoričnega problema.

Trditev. *Formalna potenčna vrsta $A(x)$ premore inverz natanko tedaj, ko je $a_0 \neq 0$.*

Dokaz. Desno: naj bo $B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ inverz $A(x)$. Tedaj $a_0 b_0 = 1$, torej $a_0 \neq 0$.

Levo: Definiramo $b_0 = a_0^{-1}$. Velja $a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0$, torej lahko b_1 enolično določimo. Če postopek ponavljamo, lahko izračunamo vse b_i, torej inverz lahko določimo. □

Vprašanje 17. Kaj je formalna potenčna vrsta in kaj rodovna funkcija? Katere formalne potenčne vrste so obrnljive? Kakšen je splošen recept za reševanje rekurzivnih enačb s pomočjo rodovnih funkcij?

Odgovor:

Formalna potenčna vrsta je zapis $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, kjer je $(a_n)_n$ neko zaporedje. Če je to zaporedje rešitev kombinatoričnega problema, vrsto imenujemo rodovna funkcija. Formalna potenčna vrsta je obrnljiva (z inverzom 1) natanko tedaj, ko velja $a_0 \neq 0$.

Splošen princip uporabe rodovnih funkcij za reševanje rekurzivnih enačb je sledeč: Najprej z uporabo rekurzivne enačbe zapišemo enačbo, kateri mora ustrezati rodovna funkcija. To enačbo rešimo, da dobimo rodovno funkcijo, izraženo kot racionalno funkcijo v spremenljivki x. S pomočjo algebre nad rodovnimi funkcijami nato dobljeno funkcijo razvijemo v formalno potenčno vrsto, iz katere preberemo koeficiente.

Vprašanje 18. Kaj so Catalanova števila? Naštejte nekaj primerov kombinatoričnih objektov, ki jih preštejejo Catalanova števila.

Odgovor:

Catalanova števila so zaporedje C_n naravnih števil, ki se pogosto pojavljajo v kombinatoriki. Velja $C_1 = C_2 = 1, C_3 = 2, C_4 = 5$. Poznamo rekurzivno zvezo $C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$ ter eksplicitno formulo $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Med drugim Catalanova števila štejejo:

- Število poti od $(0,0)$ do $(n,0)$, kjer sta edina dovoljena koraka $(1,1)$ in $(1,-1)$, ki ne padejo pod abscisno os.
- Število oklepajskih izrazov z n oklepaji in n zaklepaji.
- Število možnih zaporedij, v katerih lahko množimo n števil, če paroma množimo dve sosednji števili.
- Število načinov, da razrežemo stopnice višine (in širine) n na n pravokotnikov.

2.12 Teorija grafov

Definicija. GRAF G je urejen par $(V(G), E(G))$, kjer je $V(G)$ množica vozlišč grafa in $E(G)$ množica povezav grafa, pri čemer je $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$.

Definicija. SOSEŠČINA vozlišča $v \in V(G)$ je množica

$$N_G(v) = \{w \mid v, w \in E(G)\}$$

Definicija. STOPNJA vozlišča $u \in V(G)$ je $|N_G(u)|$.

Definicija. Graf je REGULAREN, če imajo vsa vozlišča isto stopnjo.

Izrek. Lema o rokovanju *V vsakem grafu G velja*

$$\sum_{u \in V(G)} deg_G(u) = 2\,|E(G)|\,.$$

Dokaz. Zgradimo matriko s toliko vrsticami kot vozlišči in toliko stolpci kot povezavami. Na mesto, ki pripada povezavi e in vozlišču v, postavimo 1, če je u del povezave e, in 0 sicer.

Če preštejemo enice po vrsticah, dobimo $\sum_{u \in V(G)} \deg_G(u)$, če pa jih preštejemo po stolpcih, dobimo $2\,|E(G)|$. □

Vprašanje 19. Kaj je stopnja vozlišča grafa in kaj pravi lema o rokovanju? Kako dokažemo to lemo?

Odgovor:

Stopnja vozlišča $v \in V(G)$ je $|N_G(v)|$. Lema o rokovanju pravi, da je vsota stopenj vseh vozlišč ravno dvakratnik števila povezav. Dokažemo jo tako, da zgradimo incidenčno matriko z vozlišči v vrsticami in povezavami v stolpcih, v polja pa damo 1, če je vozlišče del povezave, in 0 sicer. Po načelu dvojnega preštevanja lema velja.

Definicija. Graf H je podgraf grafa G, če je $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$.

Definicija. Podgraf H je porojen ali induciran, če velja sklep

$$\forall u, v \in H. uv \in E(G) \implies uv \in E(H).$$

Definicija. Podgraf H je vpeti podgraf grafa G, če je $V(H) = V(G)$.

Definicija. Sprehod v grafu G je zaporedje $v_1, v_2, \dots, v_k$ vozlišč, da velja $v_i v_{i+1} \in E(G)$ za vse i. Sprehod je sklenjen, če je $v_1 = v_k$. Sprehod je enostaven, če so vsa vozlišča v njem paroma različna.

Definicija. Pot v grafu je podgraf, ki je graf pot.

Definicija. Cikel je enostaven sklenjen sprehod.

Definicija. Dolžina sprehoda je število povezav, ki jih sprehod prehodi.

Vprašanje 20. Pojasnite sprehod, sklenjen sprehod, pot v grafu, cikel v grafu. Pokažite, da vsak graf, ki vsebuje sklenjen sprehod lihe dolžine, vsebuje tudi cikel lihe dolžine.

Odgovor:

Sprehod je zaporedje vozlišč $v_1, v_2, \dots, v_k$, da velja $v_i \sim v_{i+1}$ za $i = 1, \dots, k-1$.

Sprehod je sklenjen, če je $v_k = v_1$.

Pot v grafu je podgraf, ki je izomorfen P_n za nek $n \in \mathbb{N}$.

Cikel je določen s sklenjenim enostavnim sprehodom.

Dokažemo z indukcijo na dolžini sprehoda. Baza indukcije je trikotnik, ki vsebuje lih cikel. Če je sklenjen sprehod enostaven, je to že cikel. Sicer se v njem neko vozlišče ponovi. Sprehod lahko pri tem vozlišču razdelimo na dva sklenjena sprehoda; vsaj eden od njiju je lihe dolžine. Po indukcijski predpostavki ima torej graf lih cikel.

Definicija. POVEZANE KOMPONENTE grafa G so ekvivalenčni razredi za relacijo R:

$$uRv \Leftrightarrow \text{obstaja pot med } u \text{ in } v.$$

Definicija. Število povezanih komponent označimo z $\Omega(G)$. Graf je POVEZAN, če ima le eno povezano komponento.

Definicija. RAZDALJA med vozliščema u in v je dolžina najkrajše u, v poti.

Definicija. PREMER grafa G je $\max\{d(u, v) \,|\, u, v \in V(G)\}$.

Definicija. Graf je DVODELEN, če obstaja razdelitev $V(G)$ na X in Y, da velja sklep: če je uv povezava, je $u \in X$ ter $v \in Y$, ali obratno.

Izrek. *Graf G je dvodelen natanko tedaj, ko ne vsebuje lihih ciklov.*

Dokaz. Izrek velja natanko tedaj, ko velja za vsako komponento posebej; BŠS je graf povezan.

V desno: Naj bo G dvodelen in X, Y njegova dvodelna razdelitev. Naj bo $C = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ cikel in $v_0 = v_k$. Recimo, da je $v_0 \in X$. Tedaj je $v_1 \in Y$, $v_2 \in X$, itd. Velja $v_{k-1} \in Y$, torej je $k - 1$ liho in k sodo.

V levo: Naj bo G graf brez lihih ciklov. Naj bo $w_0 \in V(G)$ poljubno vozlišče. Definiramo množici

$$L = \{u \in G \,|\, d(w_0, u) \text{ je liho}\}$$
$$S = \{v \in G \,|\, d(w_0, v) \text{ je sodo}\}.$$

$V(G)$ je disjunktna unija L in S. Dokažimo, da vozlišča znotraj L niso sosednja, in da vozlišča znotraj S niso sosednja. Razdelimo L in S v sloje glede na razdaljo vozlišča od w_0. Vsaka povezava mora biti med dvema sosednjima slojema ali znotraj sloja; ne moramo imeti povezave iz sloja k v sloj $k + i$ za $i > 1$.

Recimo, da sta u in v povezani vozlišči v istem sloju; $d(u, w_0) = d(v, w_0) = k$. Tedaj obstaja pot dolžine k med w_0 in u ter med w_0 in v. Če ti poti združimo, dobimo sklenjen sprehod dolžine $2k + 1$; tedaj ima graf lih cikel. $\rightarrow\!\leftarrow$ □

Vprašanje 21. Kaj so dvodelni grafi? Kako jih karakteriziramo? Kako dokažemo to karakterizacijo?

Odgovor:

Graf je dvodelen, če lahko vozlišča razdelimo na dve disjunktni množici X in Y tako, da vse povezave potekajo med tema množicama, in ni povezave med dvema vozliščema znotraj ene množice.

Graf je dvodelen natanko tedaj, ko nima lihih ciklov. V desno je implikacija trivialna; če ima lih cikel, potem eno vozlišče ne mora biti v nobeni od množic. Če graf nima lihih ciklov, ga razdelimo glede na sodost oz. lihost razdalje od poljubnega vozlišča w. Če bi potekala kakšna povezava med vozliščema z isto parnostjo razdalje, jo lahko uporabimo, da sestavimo lih cikel; to pa je protislovno.

2.13 Morfizmi grafov

Definicija. Naj bosta G in H grafa. Preslikava $f : V(G) \to V(H)$ je HOMOMORFIZEM, če velja sklep: Če je uv povezava v G, je $f(u)f(v)$ povezava v H.

Definicija. EPIMORFIZEM ali VLOŽITEV je injektiven homomorfizem.

Definicija. Vložitev je IZOMETRIČNA, če ohranja razdalje.

Opomba. Takrat je $f(G)$ induciran podgraf v H.

Definicija. Homomorfizem f je IZOMORFIZEM, če je bijekcija, in če je f^{-1} homomorfizem.

Definicija. AVTOMORFIZEM je izomorfizem $G \to G$. Grupo avtomorfizmov grafa G označimo z $\mathrm{Aut}\,(G)$.

Definicija. Graf je ASIMETRIČEN, če je grupa avtomorfizmov trivialna.

Vprašanje 22. Kaj je homomorfizem grafov, izomorfizem grafov in avtomorfizem grafa? Kaj je to $\mathrm{Aut}\,(G)$? Kakšno algebrsko strukturo ima?

Odgovor:

Homomorfizem je preslikava $f : V(G) \to V(H)$, ki ohranja povezave (velja $u \sim_G v \implies f(u) \sim_H f(v)$).

Izomorfizem je bijektiven homomorfizem, katerega inverz je tudi homomorfizem.

Avtomorfizem je izomorfizem $G \to G$. Grupo vseh avtomorfizmov označimo z $\mathrm{Aut}\,(G)$.

2.14 Operacije z grafi

Definicija. Graf H je MINOR grafa G, če lahko H dobimo iz nekega podgrafa G s skrčitvijo nekaterih povezav.

Opomba. Do minorja pridemo z zaporedjem operacij odstrani vozlišče, odstrani povezavo, skrči povezavo.

Definicija. Naj bosta G in H grafa. KARTEZIČNI PRODUKT $G\Box H$ je graf z:

- $V(G\Box H) = V(G) \times V(H)$
- $E(G\Box H) = \{(g,h)(g',h') \,|\, g = g' \wedge h \sim_H h' \vee g \sim_G g' \wedge h = h'\}$

Definicija. SUBDIVIZIJA povezave $e \in E(G)$ je operacija na grafu, ki povezavo razdeli na dve in med njiju vstavi vozlišče stopnje 2. Označimo jo z $G^+(e)$.

Definicija. SUBDIVIZIJA grafa G je graf, ki ga dobimo iz G tako, da zaporedoma subdividiramo nekatere povezave.

Definicija. Grafa G in H sta HOMEOMORFNA, če obstaja graf X, ki je subdivizija od G in od H.

Definicija. GLAJENJE vozlišča stopnje 2 je obratna operacija subdiviziji povezave.

Vprašanje 23. Kaj pomeni, da je graf H minor grafa G? Kdaj sta dva grafa homeomorfna? Pojasnite operacijo kartezičnega produkta grafov.

Odgovor:

Graf H je minor grafa G, če lahko H dobimo iz podgrafa G tako, da zaporedoma krčimo nekaj povezav.

Grafa G in H sta homeomorfna, če obstaja graf X, ki je subdivizija od G in od H; torej če lahko s subdivizijami povezav pridemo do X začenši z G ali začenši s H.

Kartezični produkt grafov G in H je graf $G\Box H$, katerega vozlišča so urejeni pari $(g,h) \in V(G) \times V(H)$, para (g,h) in (g',h') pa sta povezana natanko tedaj, ko je $g = g' \wedge h \sim_H h'$ ali $h = h' \wedge g \sim_G g'$.

2.15 Povezanost

Definicija. Vozlišče $v \in V(G)$ je PREREZNO VOZLIŠČE, če je $\Omega(G - v) > \Omega(G)$.

Opomba. Podobne definicije za prerezne povezave, množice in množice povezav.

Definicija. Povezan graf je k-POVEZAN, če ima vsaj $k+1$ vozlišč in je vsaka prerezna množica moči večje ali enake k.

Definicija. Največji tak k, za katerega je graf k-povezan, imenujemo POVEZANOST grafa. Označimo jo s $\kappa(G)$. Če G ni povezan, je $\kappa(G) = 0$.

Vprašanje 24. Kaj so to prerezna vozlišča in prerezne povezave grafa? Kdaj je graf k-povezan in kaj je to povezanost grafa?

Odgovor:

Vozlišče $v \in V(G)$ je prerezno vozlišče, če je $\Omega(G - v) > \Omega(G)$. Podobno je povezava e prerezna, če je $\Omega(G - e) > \Omega(G)$.

Graf je k-povezan, če ima vsaj $k+1$ vozlišč in je vsaka prerezna množica moči vsaj k. Največji k, za katerega to velja, je povezanost grafa.

Izrek. WHITNEY *Naj bo G graf z vsaj tremi vozlišči. Tedaj je G 2-povezan natanko tedaj, ko za vsak par vozlišč u in v obstajata notranje disjunktni uv poti.*

Dokaz. V levo: očitno.

V desno: Naj bosta $u, v \in V(G)$. Dokažimo z indukcijo na $d(u, v)$.

Če je $d(u, v) = 1$, je $uv \in E(G)$. Če $G - uv$ ni povezan, ima 2 komponenti. V vsaj eni od njiju je še eno vozlišče, ker je $|V(G)| \geq 3$. BŠS zraven u. Tedaj je u prerezno vozlišče in graf ni 2-povezan. $\rightarrow\!\leftarrow$

Naj bo P najkrajša pot med u in v ter w sosed od v na poti P. Ker je $d(u, v) \geq 2$, je $w \neq u$. Po indukcijski predpostavki obstajata notranje disjjunktni poti med u in w. Označimo ju z R in S.

Če je v na eni izmed teh poti, je $R \cup S$ cikel in obstajata poti od u do v.

Če v ni na nobeni od teh poti; graf $G - w$ je povezan, ker je G 2-povezan. Torej v $G - w$ obstaja pot med u in v; označimo jo s T. Na tej poti si izberimo zadnje vozlišče x, ki je na eni izmed poti R ali S. BŠS $x \in V(R)$. Definiramo novi poti; prva gre od u do x po R, in nato do v po T, druga pa od u od w po S, in nato stopi do w. Ti poti sta notranje disjunktni. □

Izrek. MENGER *Graf G je k-povezan natanko tedaj, ko za vsak par vozlišč obstaja k notranje disjunktnih poti med njima.*

Vprašanje 25. Pojasnite Whitney-ev izrek, ki karakterizira 2-povezane grafe. Skicirajte dokaz tega izreka. Zapišite Mengerjev izrek.

Odgovor:

Mengerjev izrek: Graf je k-povezan natanko tedaj, ko za vsak par vozlišč obstaja k notranje disjunktnih poti med njima. Whitney-ev izrek je poseben primer Mengerjevega izreka za $k = 2$.

Implikacija v levo je očitna, implikacijo v desno pa dokazujemo s pomočjo indukcije na razdalji $d(u, v)$ (kjer sta u, v vozlišči, za kateri iščemo pot).

Za bazo indukcije vzamemo primer, ko sta u in v sosednji vozlišči. Dovolj je pokazati, da je $G - uv$ povezan. Ker je G 2-povezan, ima vsaj tri vozlišča; torej obstaja še tretje vozlišče w. Če bi bil $G - uv$ nepovezan, bi razpadel na dve komponenti. BŠS je w v isti komponenti kot u. Tedaj pa je u prerezno vozlišče grafa G, torej G ni 2-povezan. $\rightarrow\!\leftarrow$

Če u in v nista soseda, obstaja pot med njima. Na tej poti vzamemo vozlišče, ki je povezano z v, in ga imenujemo w. Po indukcijski predpostavki obstajata notranje disjunktni poti med u in w. Imenujmo jih R, S. Če je v na eni od njih, smo končali. Sicer je graf $G - w$ povezan (ker je G 2-povezan), torej obstaja pot med u in v, ki ne obišče w.

Imenujmo jo T. Z x označimo zadnje vozlišče, ki je na poti T in na eni od R, S. Lahko velja tudi $x = u$. BŠS $x \in V(R)$. Novi poti med u in v definiramo na sledeč način: ena gre po R do x, in nato po T do v, druga pa po S do w, in nato do v po povezavi.

2.16 Drevesa

Definicija. DREVO je povezan graf brez ciklov.

Definicija. GOZD je graf brez ciklov.

Definicija. LIST drevesa je vozlišče stopnje 1.

Vprašanje 26. Kaj je drevo in kaj gozd? Katere karakterizacije dreves poznate?

Odgovor:

Gozd je graf brez ciklov.

Drevo je:

- Povezan graf brez ciklov.
- Vsak par vozlišč v G je povezan z enolično potjo.
- Povezan graf, v katerem je vsaka povezava most.
- Povezan graf z $|V(G)| - 1 = |E(G)|$.

Definicija. VPETO DREVO grafa G je njegov vpet podgraf, ki je drevo. Število vpetih dreves grafa G označimo s $\tau(G)$.

Trditev. *Če je G graf in $e \in E(G)$, je $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G|e)$.*

Dokaz. Vsa vpeta drevesa razdelimo na tista, ki vsebujejo e, in tista, ki ga ne vsebujejo. □

Vprašanje 27. Kaj je vpeto drevo grafa? Kateri grafi premorejo vpeta drevesa? Kako lahko rekurzivno določimo število vpetih dreves povezanega grafa?

Odgovor:

Vpeto drevo grafa je njegov vpet podgraf, ki je drevo.

Vsi povezani grafi premorejo vpeta drevesa.

Število vpetih dreves lahko rekurzivno izrazimo z

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G|e),$$

kjer je e poljubna povezava v G. Pri tem skrčitev povezave ohranja dvojne povezave med vozliščema.

Definicija. Laplaceova matrika grafa G je matrika s členi l_{ij}, kjer je

$$l_{ij} = \begin{cases} \deg_G(v_i) & i = j \\ -1 & i \neq j. \end{cases}$$

Izrek. *Kirchoff $\tau(G)$ je enak determinanti matrike, ki jo dobimo iz $L(G)$ tako, da odstranimo poljuben stolpec in pripadajočo vrstico.*

Vprašanje 28. Kaj je Laplaceova matrika multigrafa? Kaj pravi Kirchoffov izrek o številu vpetih dreves multigrafa?

Odgovor:

Laplaceova matrika je matrika s členi l_{ij}, kjer je $l_{ii} = \deg v_i$, in $l_{ij} = -1$ za $i \neq j$.

Kirchoffov izrek pravi, da je $\tau(G)$ enak determinanti matrike, ki jo dobimo iz $L(G)$ tako, da odstranimo poljuben stolpec in pripadajočo vrstico.

2.17 Eulerjevi grafi

Definicija. Sprehod v grafu je Eulerjev, če vsebuje vse povezave, vsako samo enkrat. Če je sprehod sklenjen, je to Eulerjev obhod.

Definicija. Graf je Eulerjev, če premore Eulerjev obhod.

Izrek. *Povezan graf je Eulerjev natanko tedaj, ko so vsa vozlišča v G sode stopnje.*

Dokaz. V desno: Vedno, ko v obhodu vstopimo v neko vozlišče, iz njega tudi izstopimo. Ker tako prepotujemo po vsaki povezavi natanko enkrat, imajo vozlišča sode stopnje.

V levo: Indukcija na številu povezav. Baza indukcije je graf K_3, za katerega izrek velja. Naj bo G poljuben povezan graf s samimi sodimi vozlišči. Ker nima listov, ni drevo. Torej ima cikel C. Tudi v grafu $H = G - E(C)$ so vsa vozlišča sode stopnje. Po indukcijski predpostavki imajo vse komponente H Eulerjev obhod. Konstruiramo Eulerjev obhod za G tako; gremo po povezavah cikla C. Ko pridemo v vozlišče, prvo obiščemo celotno njegovo komponento v H (če še ni obiskana). Nato nadaljujemo. □

Vprašanje 29. Kaj pomeni, da je graf Eulerjev? Kako karakteriziramo Eulerjeve grafe? Skicirajte dokaz slednjega rezultata.

Odgovor:

Graf je Eulerjev, če v njem obstaja Eulerjev obhod, torej če obstaja tak sprehod po grafu, ki obišče vsako povezavo natanko enkrat, in se vrne na začetek.

Povezan graf je Eulerjev natanko tedaj, ko so vsa vozlišča sode stopnje. V desno je to očitno, v levo pa dokažemo z indukcijo na številu povezav. Za bazo indukcije vzamemo trikotnik, za katerega izrek velja. Graf G nima listov, torej ni drevo. Sledi, da v njem obstaja cikel C. Graf $H = G - E(C)$ ima prav tako vsa vozlišča sode stopnje; za njegove komponente velja indukcijska predpostavka. Eulerjev obhod v G konstruiramo tako, da se pomikamo po ciklu C, ter ob prihodu v vozlišče prvo preiščemo celotno njegovo komponento v H, nato pa nadaljujemo po ciklu.

2.18 Hamiltonovi grafi

Definicija. HAMILTONOVA POT v grafu G je taka pot, ki vsebuje vsa vozlišča grafa. HAMILTONOV CIKEL je tak cikel, ki vsebuje vsa vozlišča grafa.

Definicija. Graf je HAMILTONOV, če premore Hamiltonov cikel.

Trditev. *Če je G Hamiltonov graf in $X \subseteq V(G)$, je $\Omega(G - X) \leq |X|$.*

Vprašanje 30. Kdaj je graf Hamiltonov? Navedite in pojasnite potrebni pogoj z razpadom grafa za obstoj Hamiltonovega cikla v grafu.

Odgovor:

Graf je Hamiltonov, če premore Hamiltonov cikel, torej če obstaja cikel v grafu, ki obišče vsa vozlišča.

Če je G Hamiltonov graf in $X \subseteq V(G)$ množica nekaterih vozlišč, potem velja $\Omega(G-X) \leq |X|$.

Pogoj velja, ker, če postavimo vsa vozlišča v cikel, ter jih nekaj odstranimo, nam nujno ostane vsaj $|X|$ komponent; to bodo namreč deli cikla med vozlišči, ki smo jih odstranili. Še vedno imamo lahko manj komponent, če so katera od preostalih vozlišč med seboj povezana zunaj cikla, ali če sta bili dve od odstranjenih vozlišč v ciklu sosednji.

Izrek. *ORE Če za vsak par vozlišč u, v povezanega grafa G velja*

$$u \nsim v \implies deg(u) + deg(v) \geq |V(G)|,$$

je G Hamiltonov.

Dokaz. Dokaz z metodo najmanjšega protiprimera. Recimo, da izrek ne velja. Tedaj imamo protiprimere. Med njimi izberimo takega, ki ima najmanj vozlišč, med temi pa takega, ki ima največ povezav. G ni polni graf, ker bi bil sicer Hamiltonov. Izberimo vozlišči u, v, ki nista povezani. Naj bo H graf, ki ga dobimo, če G dodamo povezavo uv. H je Hamiltonov, ker je G maksimalni protiprimer s toliko vozlišči. Torej H vsebuje Hamiltonov cikel C. Ta cikel gotovo vsebuje povezavo uv. Označimo $C = ux_2 \ldots x_{n-1}v$. V G definiramo množici $S = \{i \mid ux_{i+1} \in E(G)\}$ ter $T = \{i \mid vx_i \in E(G)\}$.

Velja $|S \cup T| + |S \cap T| = |S| + |T| = \deg u + \deg v \geq |V(G)|$.

V $S \cup T$ ni vozlišča v, torej $|S \cup T| < |V(G)|$. Torej $S \cap T \neq \varnothing$.

Naj bo $j \in S \cap T$. Pot $u \to x_j \to v \to x_{j+1} \to u$ je Hamiltonov cikel v grafu G (premikamo se po C do x_j, nato skočimo na v, nato pa nazaj po C do x_{j+1}, in skočimo do u). $\rightarrow\!\!\times\!\!\leftarrow$ $\square$

Vprašanje 31. Navedite Orejev zadostni pogoj za obstoj Hamiltonovega cikla v grafu. Skicirajte dokaz tega izreka.

Odgovor:

Če v grafu G za vsak par vozlišč u, v velja sklep

$$u \nsim v \implies \deg(u) + \deg(v) \geq |V(G)|,$$

potem je G Hamiltonov.

Dokaz poteka z metodo najmanjšega protiprimera. Izmed vseh protiprimerov izberemo tiste grafe, ki imajo najmanj vozlišč, od teh pa (enega) takega, ki ima maksimalno število povezav. Imenujmo ga G. Ta graf ni Hamiltonov, torej ni poln; torej obstajata vozlišči u, v, ki nista povezani.

Če v G dodamo povezavo uv, dobimo Hamiltonov graf (G je maksimalni protiprimer s tem številom vozlišč). Naj bo $C = ux_2x_3 \dots x_{n-1}v$ Hamiltonov cikel v tem večjem grafu.

Definiramo množici $S = \{i \,|\, ux_{i+1} \in E(G)\}$ ter $T = \{i \,|\, vx_i \in E(G)\}$. Po načelu vključitev in izključitev velja

$$|S \cup T| + |S \cap T| = |S| + |T| \geq |V(G)|.$$

Velja $v \notin S \cup T$, torej je $|S \cup T| < |V(G)|$, torej velja $S \cap T \neq \varnothing$.

Naj bo $j \in S \cap T$. Konstruiramo Hamiltonov cikel: Prvo gremo po C od u do x_j, nato skočimo na v, zatem gremo v drugi smeri po C do x_{j+1}, od tam pa skočimo na u. $\rightarrow\!\!\times\!\!\leftarrow$

2.19 Ravninski grafi

Definicija. Graf G je RAVNINSKI, če ga lahko narišemo v ravnini tako, da se nobeni njegovi povezavi ne križata. Taki risbi rečemo RAVNINSKA RISBA.

Definicija. Dolžini najkrajšega cikla v grafu pravimo OŽINA in jo označimo z $g(G)$.

Definicija. Sklenjena območja v ravnini, ki jih dobimo z ravninsko vložitvijo grafa G, imenujemo LICA VLOŽITVE. Množico vseh lic označimo z $F(G)$.

Izrek. EULERJEVA FORMULA *Če je G ravninski graf, vložen v ravnino, potem je*

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 1 + \Omega(G)$$

Dokaz. Dokažimo za povezane grafe; $\Omega(G) = 1$.

Označimo $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$ in $f = |F(G)|$.

Indukcija po m. Za $m = 0$ ter $m = 1$ izrek velja. Recimo, da velja za vse $m' < m$. Če je G drevo, je $m = n - 1$ ter $f = 1$ in izrek velja. Če G ni drevo, ima cikel C, ki omejuje neko lice. Naj bo e povezava tega cikla. Naj bo $H = G - e$. Za H velja indukcijska predpostavka, torej $n - (m - 1) + (f - 1) = 2$, torej $n - m + f = 2$. □

Posledica. *Če je G povezan graf, vložen v ravnino, in ni drevo, potem je*

$$|E(G)| \leq \frac{g(G)}{g(G) - 2}(|V(G)| - 2)$$

Dokaz.

$$|F(G)| \leq \frac{2}{g(G)}\,|E(G)|$$

(lema o rokovanju za lica)

$$|F(G)| = 2 - |V(G)| + |E(G)|$$

Torej

$$|E(G)|\,(1 - \frac{2}{g(G)}) \leq |V(G)| - 2$$

□

Vprašanje 32. Kaj so ravninski grafi? Kaj so lica ravninske vložitve grafa in čemu je enaka vsota dolžin vseh lic ravninske vložitve grafa? Kako lahko omejimo število povezav ravninskega grafa s pomočjo njegove ožine?

Odgovor:

Graf je ravninski, če ga lahko narišemo v ravnini tako, da se nobeni povezavi ne sekata.

Lica ravninske vložitve so sklenjena območja v ravnini, ki jih dobimo z ravninsko vložitvijo grafa.

Po lemi o rokovanju za lica velja

$$2\,|E(G)| = \sum_{f \in F(G)} l(f).$$

Velja

$$|E(G)| \leq \frac{g(G)}{g(G) - 2}(|V(G)| - 2)$$

Vprašanje 33. Kaj pravi Eulerjeva formula za ravninske grafe? Skicirajte njen dokaz. Katere posledice Eulerjeve formule poznate?

Odgovor:

Eulerjeva formula poda enačbo (za ravninske grafe):

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 1 + \Omega(G).$$

Obravnavamo lahko samo povezane grafe. Dokaz je z indukcijo na številu povezav. Za bazo vzamemo grafa P_1 ter P_2, za katera izrek velja.

V koraku indukcije ločimo primera, ko je G drevo ali ne. Če je drevo, eksplicitno poznamo število lic in število povezav, tedaj formula velja. Če ni drevo, vzamemo poljuben cikel, ter mu odstranimo povezavo. Dobimo graf, ki je še vedno povezan, za katerega velja indukcijska predpostavka. Iz tega takoj sledi izrek za G.

Posledica Eulerjeve formule je, da je število lic konstantno ne glede na risbo. Poleg tega izrek uporabimo v dokazu zgornje meje za število povezav zgoraj.

2.20 Barvanja grafov

Definicija. Preslikava $f : V(G) \to [k]$ je k-BARVANJE grafa G, če velja

$$uv \in E(G) \implies f(u) \neq f(v).$$

Definicija. KROMATIČNO ŠTEVILO $\chi(G)$ je najmanjši tak k, da obstaja k-barvanje grafa G.

Trditev. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Trditev. *Naj bo $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ zaporedje stopenj grafa G. Tedaj velja*

$$\chi(G) \leq \max_i(\min\{i-1, d_i\}) + 1$$

Vprašanje 34. Kaj je kromatično število $\chi(G)$ grafa G? Pojasnite požrešni algoritem barvanja grafa. Kako lahko z njegovo pomočjo navzgor omejimo $\chi(G)$?

Odgovor:

Kromatično število $\chi(G)$ je najmanjše število k, za katerega obstaja k-barvanje grafa G (preslikava $V(G) \to [k]$, ki sosednjim vozliščem priredi različne barve).

Požrešni algoritem si izbere vrstni red vozlišč v grafu, ter na vsakem koraku vozlišču priredi najmanjšo barvo, s katero ni že pobarvan noben njegov sosed. Algoritem ne daje vedno optimalnih rezultatov, obstaja pa vrstni red vozlišč, za katerega bo algoritem dal pravi rezultat.

Če algoritem poženemo na poljubnem vrstnem redu, lahko ocenimo, da bo $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$; v najslabšem primeru bodo vsi sosedje vozlišča s stopnjo $\Delta(G)$ drugače pobarvani, in bomo potrebovali $\Delta(G) + 1$ barv.

Če algoritem poženemo na zaporedju vozlišč s padajočimi stopnjami $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$, dobimo boljšo zgornjo mejo

$$\chi(G) \leq \max_i(\min\{d_i, i-1\}) + 1.$$

Vozlišče i lahko gotovo pobarvamo z barvo i, ker je to i-to po vrsti. S podobnih argumentom kot prej pa je na voljo tudi barva $d_i + 1$.

Izrek. *Brooks Če je G povezan graf, ki ni polni graf ali lih cikel, je $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Definicija. Preslikava $c : E(G) \to [k]$ je k-barvanje povezav, če velja

$$uv, uw \in E(G) \implies c(uv) \neq c(uw)$$

Definicija. Najmanjši k, za kateregа obstaja k-barvanje povezav, imenujemo kromatični indeks grafa G in označimo $\chi'(G)$.

Izrek. *Vizing Za vsak graf G velja $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Definicija. Če je $\chi'(G) = \Delta(G)$, je G razreda 1. Če je $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, je G razreda 2.

Vprašanje 35. Kaj je kromatični indeks $\chi'(G)$ grafa G? Kaj pravi Vizingov izrek in kako na njegovi osnovi razdelimo vse grafe v dva razreda?

Odgovor:

Kromatični indeks je najmanjši tak k, za katerega obstaja k-barvanje povezav grafa G. Barvanje povezav je preslikava $E(G) \to [k]$, ki povezavama s skupnim vozliščem priredi različni barvi.

Vizingov izrek pravi, da je kromatični indeks bodisi enak $\Delta(G)$ bodisi enak $\Delta(G) + 1$. Grafe tako razdelimo glede na to, katera enakost tu drži; če drži prva, je graf razreda 1, sicer je razreda 2.

3 Analiza 2b

3.1 Hilbertov prostor

Vprašanje 1. Definiraj skalarni produkt na realnem vektorskem prostoru X.

Odgovor: Skalarni produkt na vektorskem prostoru X je preslikava $\cdot,\cdot : X \times X \to \mathbb{R}$, za katero velja:

- $\langle x, x \rangle \geq 0$
- $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$

Vprašanje 2. Kaj pravi Cauchy-Schwarzova neenakost?

Odgovor: Za vektorja x, y velja

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 .$$

Enakost velja natanko tedaj, ko sta vektorja linearno odvisna.

Definicija. Vektorski prostor X s skalarnim produktom je HILBERTOV PROSTOR, če je poln metrični prostor za porojeno metriko.

Vprašanje 3. Definiraj Hilbertov prostor.

Vprašanje 4. Dokaži, da $\mathcal{C}([a, b])$ z integralskim skalarnim produktom ni Hilbertov prostor.

Odgovor: Definiramo zaporedje funkcij

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ nx & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -1 & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$$

za $x \in [-1, 1]$. To zaporedje je Cauchyjevo, vendar ne konvergira k zvezni funkciji; če konvergira k f, mora veljati $f(x) = 1$ za $x > 0$ in $f(x) = -1$ za $x < 0$.

Definicija. NAPOLNITEV metričnega prostora M je izometrična vložitev M v prostor $\overline{M}$, ki je poln, in kjer je M gosta v $\overline{M}$.

Vprašanje 5. Kaj je napolnitev $\mathcal{C}([a, b])$?

Odgovor: Množica $L^2([a, b])$ kvadratno integrabilnih funkcij.

Definicija. Naj bo Y podprostor X in $x \in X$. PRAVOKOTNA PROJEKCIJA vektorja x na Y, če obstaja, je tak vektor $P_Y(x) \in Y$, da je $x - P_Y(x)$ pravokoten na vse vektorje iz Y.

Trditev. *Naj bo A podmnožica vektorskega prostora X. ORTOGONALNI KOMPLEMENT množice A je množica $A^{\perp} = \{x \in X \mid \forall a \in A . a \perp x\}$.*

Trditev. *$A^\perp$ je vektorski podprostor v X.*

Opomba. Velja $(A^\perp)^\perp \supset A$. Če je X končnodimenzionalen, in je A vektorski podprostor, velja enakost; sicer pa ne nujno.

Za $X = L^2([a,b])$ in $A = \mathcal{C}([a,b])$ velja $A^\perp = \{0\}$, ker so na vse zvezne funkcije za integralski skalarni produkt pravokotne natanko tiste funkcije, ki so enake nič skoraj povsod; te pa spadajo v isti ekvivalenčni razred, torej so predstavljene z 0 v L^2.

Velja $(A^\perp)^\perp = L^2([a,b]) \neq \mathcal{C}([a,b])$.

Opomba. $A^\perp$ je zaprt podprostor, ker vsebuje limite vseh zaporedij v A. Skalarni produkt je zvezna preslikava, torej velja

$$0 = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, a\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} x_n, a \right\rangle.$$

Opomba. Če je V zaprt podprostor Hilbertovega prostora, je $(V^\perp)^\perp = V$.

Vprašanje 6. Dokaži: naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom, Y njegov podprostor in $x \in X$. Če obstaja pravokotna projekcija x na Y, je enolično določena in je najboljša aproksimacija x z vektorji iz Y.

Odgovor: Recimo, da sta y_1 in y_2 pravokotni projekciji x na Y. Tedaj velja $x-y_1, x-y_2 \in Y^\perp$, torej $x - y_1 - (x - y_2) \in Y^\perp$ (ker je podprostor). Torej $y_2 - y_1 \in Y^\perp$, velja pa tudi $y_2 - y_1 \in Y$. Torej $y_2 - y_1 \perp y_2 - y_1$, torej $y_1 = y_2$.

Naj bo $w \in Y$. Dokazujemo, da velja $\|x - w\| \geq \|x - P_Y(x)\|$.

$$x - w = \underbrace{x - P_Y(x)}_{\in Y^\perp} + \underbrace{P_Y(x) - w}_{\in Y}$$

Po Pitagorovem izreku torej velja

$$\|x - w\|^2 = \|x - P_Y(x)\|^2 + \|P_Y(x) - w\|^2 \geq \|x - P_Y(x)\|^2$$

Opomba. Projekcija je idempotent; $P_Y^2 = P_Y$ (za kompozitum).

Vprašanje 7. Dokaži: če ima Y pravokotno projekcijo na Y, ima tudi pravokotno projekcijo na $Y^\perp$.

Odgovor:

$x - P_Y(x)$ je pravokotna projekcija na $Y^\perp$; velja $x - (x - P_Y(x)) \in Y \subseteq (Y^\perp)^\perp$.

Vprašanje 8. Naj bo Y končnodimenzionalni vektorski podprostor prostora X s skalarnim produktom. Naj bo $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ njegova ortonormirana baza. Kako izračunaš pravokotno projekcijo $x \in X$ na Y?

Odgovor:

$$P_Y(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle \, e_j.$$

Opomba. Za vsak podprostor Y v X, ki ima končno kodimenzijo, obstaja pravokotna projekcija za vse $x \in X$.

Definicija. Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom. ORTOGONALEN SISTEM je nabor vektorjev $(e_j)_j \subseteq X$, da velja $\forall i, j. e_i \perp e_j$.

Ortogonalen sistem je ORTONORMIRAN, če so vektorji normirani.

Trditev. BESSELOVA NEENAKOST *Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom. Naj bo $(e_j)_j$ ONS in $x \in X$. Tedaj je*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Dokaz. Tvorimo $Y_n = \mathrm{Lin}(\{e_1, e_2, \ldots, e_n\})$. Ti vektorji so ONB za Y_n, torej za $x \in X$ velja

$$P_{Y_n}(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle \, e_j.$$

Po Pitagorovem izreku je $\|P_{Y_n}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$. □

Vprašanje 9. Povej in dokaži Besselo neenakost.

Trditev. *Naj bo X Hilbertov prostor. Naj bodo $(c_j)_j$ taka števila, da je $\sum_j |c_j|^2 < \infty$. Naj bo $(e_n)_n$ ONS. Obstaja vektor $x \in X$, da velja $\langle x, e_n \rangle = c_n$ za vse n.*

Dokaz. Definiramo $s_n = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j$. Ker je to zaporedje Cauchyjevo (vrsta kvadratov konvergira), in je X Hilbertov, ima zaporedje limito, ki očitno ustreza pogoju. □

Definicija. ONS je KOMPLETEN, če za vsak $x \in X$ velja $x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle \, e_j$.

4 Fizika 2

4.1 Sile

Grobo rečeno je sila skupni vpliv okolice na neko telo. Naj bo dano neko telo. Z m označimo njegovo maso, z $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ hitrost ter z $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t)$ pospešek.

Za vsako možno okolico definiramo $d_{\min}$ kot najmanjšo razdaljo med danim telesom in katerimkoli telesom iz okolice.

Definicija. Naj bo S koordinatni sistem. Če $\vec{v}$ limitira k konstantni funkciji v okolicah za $d_{\min} \to \infty$, je S NEPOSPEŠEN (INERCIALEN) KOORDINATNI SISTEM.

Opomba. To je prvi Newtonov zakon.

Definicija. Naj bo S nepospešen koordinatni sistem. SKUPNA SILA OKOLICE NA OPAZOVANO TELO je $\vec{F} = m\vec{a}$.

Opomba. To je drugi Newtonov zakon.

Predpostavimo, da velja $\lim\limits_{d_{\min} \to \infty} \vec{F} = \vec{0}$.

Trditev. NAČELO SUPERPOZICIJE *Z $\vec{F}_i$ označimo silo i-tega okoliškega telesa na opazovano telo. Tedaj velja $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$.*

Definicija. Naj bosta dani dve telesi. Z $\vec{F}_{1\to 2}$ označimo silo prvega telesa na drugega, z $\vec{F}_{2\to 1}$ pa silo drugega telesa na prvega. Za sili $\vec{F}_{1\to 2}$ in $\vec{F}_{2\to 1}$ velja TRETJI NEWTONOV ZAKON, če je $\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$.

Vprašanje 1. Povej pet točk, s katerimi se definira silo.

5 Uvod v Geometrijsko Topologijo

5.1 Kvocientni prostori

Opomba. Da bo kvocientna projekcija zvezna, mora biti praslika vsake odprte množice v $X/_\sim$ tudi odprta. Lahko bi vzeli šibkejšo topologijo na $X/_\sim$, in bi bila projekcija toliko bolj zvezna. Prava topologija bo torej tista, ki je najmočnejša možna. S tem bo najbolj podobna topologiji na X.

Definicija. Naj bo X topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X. KVOCIENTNA TOPOLOGIJA na $X/_\sim$ je družina množic

$$\{V \subseteq X/_\sim \mid q^*(V)^{\text{odp}} \subseteq X\}.$$

Vprašanje 1. Karakteriziraj odprtost in zaprtost množic v $X/_\sim$.

Odgovor: $V^{\text{odp}} \subseteq X/_\sim \Leftrightarrow q^*(V)^{\text{odp}} \subseteq X$.

$Z^{\text{zap}} \subseteq X/_\sim \Leftrightarrow q^*(Z)^{\text{zap}} \subseteq X$.

Opomba. V splošnem q ni niti odprta niti zaprta.

Definicija. Naj bo X topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija. Naj bo $A \subseteq X$. NASIČENJE MNOŽICE A je množica $q^*(q_*(A)) = \bigcup_{x\in A}[x]$.

Vprašanje 2. Definiraj nasičenje množice.

Trditev. *Za $A \subseteq X$ velja: $q_*(A)$ je odprta v $X/_\sim$ natanko tedaj, ko je nasičenje A odprto v X. Podobno velja za zaprte množice.*

Vprašanje 3. Kdaj je kvocientna projekcija q odprta?

Odgovor: Natanko tedaj, ko je nasičenje vsake odprte množice odprto.

Trditev. *Naj bosta X in Y topološka prostora, $\sim$ ekvivalenčna relacija na X in $f : X \to Y$ zvezna. Če je f konstantna na ekvivalenčnih razredih, enolično določa preslikavo $\overline{f} : X/_\sim \to Y$ s predpisom $f([x]) = f(x)$. Če je dodatno surjektivna, je $\overline{f}$ surjektivna. Če f loči ekvivalentne razrede, je $\overline{f}$ injektivna.*

Dokaz. Dokazati moramo le, da je $\overline{f}$ zvezna; ostalo je očitno. Naj bo $V^{\text{odp}} \subseteq Y$. Velja $q^*(\overline{f}^*(V)) = f^*(V)^{\text{odp}} \subseteq X$, torej je $\overline{f}^*(V)$ odprta v $X/_\sim$. □

Definicija. Naj bosta X, Y topološka prostora in $f : X \to Y$ funkcija. f je KVOCIENTNA PRESLIKAVA, če je surjektivna in če velja $\forall V \subseteq Y. V^{\text{odp}} \subseteq Y \Leftrightarrow f^*(V)^{\text{odp}} \subseteq X$.

Vprašanje 4. Kako obravnavaš kvocientno preslikavo kot kvocientno projekcijo za neko ekvivalenčno relacijo?

Odgovor: Relacija je določena z razbitjem X na f-praslike točk.

Vprašanje 5. Povej in dokaži kriterij za kvocientnost zvezne surjekcije f.

Odgovor: Naj bo $f : X \to Y$ zvezna surjekcija. Če je še odprta ali zaprta, je kvocientna.

Če je $V^{\text{odp}} \subseteq Y$, je $f^*(V)^{\text{odp}} \subseteq X$ zaradi zveznosti. Recimo, da je f odprta. Naj bo $V \subseteq Y$ taka, da je $f^*(V)^{\text{odp}} \subseteq X$. Velja $f_*(f^*(V)) = V$ zaradi surjektivnosti, in ta množica je odprta pod X.

Vprašanje 6. Kako pravimo nasprotni implikaciji od zveznosti v definiciji kvocientne preslikave?

Odgovor: Kvocientnost v ožjem smislu.

Opomba. Če je X kompakt in Y Hausdorffov, je vsaka zvezna preslikava zaprta, torej tudi kvocientna (če je le surjektivna).

Izrek. *Naj bo X prostor, $\sim$ ekvivalenčna relacija na X in $f : X \to Y$ kvocientna preslikava. Če f naredi iste identifikacije kot $\sim$, je inducirana preslikava $\overline{f} : X/_\sim \to Y$ homeomorfizem.*

Vprašanje 7. Povej izrek za homeomorfen opis kvocientnega prostora.

Vprašanje 8. Dokaži, da je kompozitum kvocientnih preslikav kvocientna preslikava.

Odgovor: Naj bosta $f : X \to Y, g : Y \to Z$ kvocientni. Tedaj je $g \circ f$ zvezna in surjektivna. Naj bo $(g \circ f)^*(V)^{\text{odp}} \subseteq X$. Velja $(g \circ f)^*(V) = f^*(g^*(V))$. Ker je f kvocientna v ožjem smislu, je $g^*(V)$ odprta. Ker je g kvocientna v ožjem smislu, je V odprta.

Vprašanje 9. Dokaži: če je $g \circ f$ kvocientna in sta f, g zvezni, je g kvocientna.

Odgovor: Ker je $g \circ f$ surjektivna, je g surjektivna. Naj bo $g^*(V)^{\text{odp}} \subseteq Y$. Tedaj $(g \circ f)^*(V) = f^*(g^*(V))^{\text{odp}} \subseteq X$, torej je $V^{\text{odp}} \subseteq Z$.

Trditev. *Naj bo $h : X \to Y$ homeomorfizem in $\sim_X$ ekvivalenčna relacija na X. Definiramo $y_1 \sim_Y y_2 \Leftrightarrow h^{-1}(y_1) \sim_X h^{-1}(y_2)$. Potem je $X/_{\sim_X} \approx Y/_{\sim_Y}$.*

Dokaz.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q_X"'] \arrow[dr, "f=q_Y\circ h"] & Y \arrow[d, "q_Y"] \\
X/_{\sim_X} \arrow[r, "\overline{f}"'] & Y/_{\sim_Y}
\end{tikzcd}
$$

Dokazati moramo, da je $\overline{f}$ homeomorfizem. Preslikava $f = q_Y \circ h$ je kvocientna (homeomorfizem je kvocientna preslikava). Poleg tega naredi iste identifikacije kot q_X, ker h ekvivalenčne razrede za $\sim_X$ slika v ekvivalenčne razrede za $\sim_Y$. □

Definicija. Topološka lastnost L je DELJIVA, če se iz vsakega topološkega prostora X z lastnostjo L prenese na vsak njegov kvocient, oziroma ekvivalentno, če se ohranja pri kvocientnih preslikavah.

Vprašanje 10. Katere topološke lastnosti so deljive?

Odgovor: Povezanost (s potmi), kompaktnost, separabilnost, lokalna povezanost (s potmi), diskretnost, trivialnost.