Zbrani zapiski za 3. letnik

Patrik Žnidaršič

Prevedeno dne 15. oktober 2023

Kazalo

1 Analiza 3 **5**

2 Mehanika **7**
2.1 Osnove Newtonove mehanike 8

3 Uvod v numerične metode **13**
3.1 Računske napake 14

4 Verjetnost **17**
4.1 Izidi, dogodki, verjetnosti 18
4.1.1 Pogojna verjetnost in neodvisnost 20
4.1.2 Neodvisnost dogodkov 20

1 Analiza 3

Definicija. Naj bo $F : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in I interval v $\mathbb{R}$. NAVADNA DIFERENCIALNA ENAČBA PRVEGA REDA je enačba oblike $F(x, y(x), y'(x)) = 0$, kjer je $y(x)$ neka funkcija. Rešitev enačbe je vsaka funkcija $y_r(x) : I \to \mathbb{R}$, za katero velja enačba.

Opomba. NDE n-tega reda definiramo podobno kot enačbo oblike

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Opomba. Smiselno je opazovati tudi enačbe, kjer je $F = (F_1, \dots, F_m)$ vektorska funkcija. Temu pravimo SISTEM NDE.

Opomba. Naj bo $y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ enačba reda n. Ta enačba je ekvivalentna primernemu sistemu $n \times n$ prvega reda; definirajmo $y_1 = y$, $y_2 = y'$, ..., $y_{n-1} = y^{n-2}$. Tedaj dobimo enačbo $y_n' = F(x, y_1, \dots, y_n)$.

Definicija. INTEGRALSKA KRIVULJA γ vektorskega polja $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ skozi točko $x_0 \in \Omega$ je krivulja $\gamma : [0, b) \to \Omega$, za katero velja

- v vsaki točki t je $\dot{\gamma}(t) = F(\gamma(t))$,
- $\gamma(0) = x_0$.

Vprašanje 1. Definiraj integralske krivulje.

Če prvi pogoj iz definicije zapišemo v koordinatah,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} (t) = \begin{bmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix},$$

dobimo sistem n NDE prvega reda z n neznankami. Ta sistem ni eksplicitno odvisen od t; takim sistemom pravimo AVTONOMNI SISTEMI. Pokazali bomo, da za vsako izbiro x_0 obstajata interval $[0, a)$ in krivulja γ, za katero veljata pogoja v definiciji.

Vsak neavtonomen sistem lahko prepišemo v avtonomnega, z uvedbo nove odvisne spremenljivke $v(t) = t$. Dobimo nov sistem

$$\begin{aligned} \dot{v} &= 1, \\ \dot{x}_1 &= F_1(v, x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= F_n(v, x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Partikularna rešitev tega sistema je tedaj integralska krivulja vektorskega polja $\vec{F}(v, \vec{x})$ V RAZŠIRJENEM FAZNEM PROSTORU $\mathbb{R} \times \Omega$ (Ω je običajen fazni prostor), ki ustreza primernemu začetnemu pogoju.

Vprašanje 2. Kako spremenimo neavtonomni sistem v avtonomnega?

2 Mehanika

2.1 Osnove Newtonove mehanike

Definicija. Afin prostor $\mathcal{A}$ nad vektorskim prostorom V je množica z binarno operacijo $+ : \mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}$, za katero velja:

- Za poljuben $A \in \mathcal{A}$ ter $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ velja $(A + \mathbf{a}) + \mathbf{b} = A + (\mathbf{a} + \mathbf{b})$
- Za poljubna $A, B \in \mathcal{A}$ obstaja natanko določen $\mathbf{a} \in V$, da je $B = A + \mathbf{a}$.

Dimenzija afinega prostora je enaka dimenziji vektorskega prostora V.

Definicija. Naj bo $\mathcal{A}$ afin prostor nad vektorskih prostorom V. Definiramo operacijo odštevanja $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ s predpisom

$$B - A = \mathbf{a} \Leftrightarrow B = A + \mathbf{a}.$$

Trditev. *V afinem prostoru veljajo naslednje zveze:*

- $A - A = \mathbf{0}$.
- $(A - B) + (B - A) = \mathbf{0}$.
- $(A - B) + (B - C) + (C - A) = \mathbf{0}$.
- $(A - B) + \mathbf{a} = (A + \mathbf{a}) - B$.
- $(A - B) + C = (C - B) + A$.

Definicija. Preslikava $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ med afinima prostoroma je afina, če obstaja $dg \in L(V, V')$, da za vsaka $A, B \in \mathcal{A}$ velja $g(A) - g(B) = dg(A - B)$.

Za afino preslikavo g si lahko izberemo pol O, ter izpeljemo

$$g(A) = g(O) + dg(A - O).$$

Vrednosti funkcije seveda niso odvisne od izbire pola.

Vprašanje 1. Definiraj afin prostor in afino preslikavo.

Definicija. Galilejeva struktura je trojica $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, \mathfrak{t}, \rho)$, kjer je $\mathcal{A}$ štirirazsežni afin prostor nad V, $\mathfrak{t} \in L(V, \mathbb{R})$ in ρ ekvlidska metrika na $\ker \mathfrak{t}$, porojena z normo $\|\cdot\|$. Funkciji $\mathfrak{t}$ pravimo časovnost, elementom $\mathcal{A}$ pa pravimo dogodki. Pretečeni čas med dogodkoma A in B označimo s $\mathfrak{t}(A, B)$. Dogodka sta istočasna, če je $\mathfrak{t}(A, B) = 0$. Za istočasne dogodke lahko definiramo razdaljo $\rho(A, B) = \|B - A\|$ (uporabimo isto oznako kot za metriko v $\ker \mathfrak{t}$).

Definicija. Galilejevi strukturi $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, \mathfrak{t}, \rho)$ in $\mathcal{G}' = (\mathcal{A}', \mathfrak{t}', \rho')$ sta ekvivalentni, če obstaja afina bijekcija $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, ki ohranja časovnost in razdaljo med istočasnimi dogodki;

$$\mathfrak{t}'(g(A) - g(B)) = \mathfrak{t}(A, B), \qquad \rho'(g(A), g(B)) = \rho(A, B).$$

Taki transformaciji pravimo Galilejeva transformacija.

Vprašanje 2. Definiraj Galilejevo strukturo in Galilejeve transformacije.

Modelni primer je naravna Galilejeva struktura na $\mathcal{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{E}$, kjer je $\mathbb{E}$ trirazsežni Evklidski prostor. Za elemente $A_i = (t_i, \mathbf{P}_i) \in \mathcal{A}$ naravne strukture velja

- $\mathfrak{t}(A_1 - A_2) = t_1 - t_2$,
- $\rho(A_1, A_2) = \|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2\|$.

Definicija. KOORDINATNI SISTEM na $\mathcal{A}$ je bijekcija $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \times \mathbb{E}$ s komponentami $\phi(A) = (\tau\phi(A), \pi\phi(A))$, in pri kateri je $\tau \circ \phi$ linearna preslikava.

Opomba. Če sta ϕ in ϕ' koordinatna sistema, je preslikava $\phi' \circ \phi^{-1} : \mathbb{R} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R} \times \mathbb{E}$ bijekcija.

Vprašanje 3. Kaj je koordinantni sistem?

Izrek. *Galilejeva transformacija $g : \mathbb{R} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R} \times \mathbb{E}$ je oblike*

$$g(t, \mathbf{P}) = (t_0' + t, \mathbf{P}_0' + \vec{c}t + Q(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0)),$$

kjer je $Q \in O(3)$ ortogonalna transformacija.

Dokaz. Ker je g afina preslikava, jo lahko zapišemo kot

$$g(t, \mathbf{P}) = g(t_0, \mathbf{P}_0) + dg(t - t_0, \mathbf{P} - \mathbf{P}_0),$$

kjer je $dg \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$. Če označimo $g(t_0, \mathbf{P}_0) = (t_0', \mathbf{P}_0')$, in zapišemo dg kot bločno matriko, dobimo

$$g(t, \mathbf{P}) = (t_0', \mathbf{P}_0') + \begin{bmatrix} \alpha & \vec{a}^T \\ \vec{c} & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t - t_0 \\ \mathbf{P} - \mathbf{P}_0 \end{bmatrix} = (t_0', \mathbf{P}_0') + \begin{bmatrix} \alpha(t - t_0) + \vec{a} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) \\ (t - t_0).\vec{c} + Q(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) \end{bmatrix}.$$

Za dogodka $(t_1, \mathbf{P}_1)$ in $(t_2, \mathbf{P}_2)$ zahtevamo

$$t_2 - t_1 = \tau(g(t_2, \mathbf{P}_2) - g(t_1, \mathbf{P}_1)).$$

Če razvijemo desno stran zahteve po izpeljani formuli, dobimo pogoj

$$t_2 - t_1 = \alpha(t_2 - t_1) + \vec{a} \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1).$$

Iz tega sledi $\alpha = 1$ in $\vec{a} = \vec{0}$. Drug pogoj je, da se mora razdalja med istočasnimi dogodki ohranjati. Iz spodnjega dela bločne matrike dobimo pogoj

$$\|\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1\| = \|Q(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)\|,$$

torej mora biti Q ortogonalna. □

Vprašanje 4. Kakšno obliko imajo Galilejeve transformacije $\mathbb{R}\times\mathbb{E}\to\mathbb{R}\times\mathbb{E}$? Dokaži.

Če definiramo $\vec{v}=\dot{\mathbf{P}}$ in $\vec{a}=\dot{\vec{v}}$, lahko opazujemo, kako se ti količini obnašata pri Galilejevi transformaciji. V koordinatnem sistemu $\phi'(t',\mathbf{P}')$ velja $\vec{v}'=\partial_{t'}\mathbf{P}'=\dot{\mathbf{P}}'$ in $\vec{a}'=\dot{\vec{v}}'$. Izpeljemo $\vec{v}'=\vec{c}+Q\dot{\mathbf{P}}(t'-t'_0)=\vec{c}+Q\dot{\mathbf{P}}(t)$ in $\vec{a}'=Q\ddot{\mathbf{P}}(t)$.

Za sistem materialnih točk $\mathcal{P}=\{\mathbf{P}_1,\dots,\mathbf{P}_n\}$ lahko definiramo

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{P}}&=(\mathbf{P}_1,\dots,\mathbf{P}_n)\\ \underline{\mathbf{P}}'_0&=(\mathbf{P}'_0,\dots,\mathbf{P}'_0)\\ \underline{\vec{c}}&=(\vec{c},\dots,\vec{c})\\ \underline{\mathbf{P}}'=(\mathbf{P}'_1,\dots,\mathbf{P}'_n)&=\underline{\mathbf{P}}'_0+\underline{\vec{c}}t+\underline{Q}(\underline{\mathbf{P}}-\underline{\mathbf{P}}_0)\end{aligned}$$

Gibanje lahko tedaj zapišemo s tremi principi.

- *Princip determiniranosti*: Trajektorija sistema materialnih točk $\mathcal{P}$ je v danem koordinantnem sistemu natanko določena z začetnim položajem in hitrostjo. To pomeni, da obstaja funkcija interakcije $\underline{\vec{f}}$, da velja

  $$\ddot{\underline{\mathbf{P}}}=\underline{\vec{f}}(t,\underline{\mathbf{P}},\dot{\underline{\mathbf{P}}}).$$

- *Princip relativnosti*: Obstaja tak razred koordinatnih sistemov, v katerem je funkcija interakcije invariantna na Galilejeve transformacije. Temu razredu pravimo RAZRED INERCIALNIH KOORDINATNIH SISTEMOV. To pomeni, da je funkcija interakcije invariantna v tem razredu,

  $$\ddot{\underline{\mathbf{P}}}'=\underline{\vec{f}}(t',\underline{\mathbf{P}}',\dot{\underline{\mathbf{P}}}').$$

- *Princip o sorazmernosti*: Obstajajo pozitivne konstante α_{ij}, da za vsako interakcijo med materialnimi točkami sistema $\mathcal{P}=(\mathbf{P}_1,\dots,\mathbf{P}_n)$ velja

  $$\vec{f}_i=-\sum_{j\neq i}\alpha_{ji}\vec{f}_j.$$

  Te konstante so enake za vse možne interakcije v sistemu.

Vprašanje 5. Kateri so principi gibanja?

Z ozirom na princip relativnosti izpeljemo $\underline{Q}\ddot{\underline{\mathbf{P}}}=\underline{Q}\underline{\vec{f}}(t,\underline{\mathbf{P}},\dot{\underline{\mathbf{P}}})$. Če v to enakost vstavimo vrednosti $t'=t'_0+t$, $\vec{c}=\vec{0}$, $Q=I$ ter $\mathbf{P}'_0=\mathbf{P}_0$, dobimo $\underline{\vec{f}}(t'_0+t,\underline{\mathbf{P}},\dot{\underline{\mathbf{P}}})=\underline{\vec{f}}(t,\underline{\mathbf{P}},\underline{\mathbf{P}}_0)$, kar mora veljati za vsak t'_0. Sledi, da funkcija $\vec{f}$ ne mora biti eksplicitno odvisna od časa. Tej ugotovitvi pravimo HOMOGENOST ČASA.

Če sedaj vstavimo $\vec{c}=\vec{0}$, $Q=I$ in $\mathbf{P}'_0=\mathbf{P}_0+\vec{a}$, kjer je $\vec{a}$ poljuben vektor (in ne pospešek), izpeljemo $\mathbf{P}'=\mathbf{P}+\vec{a}$, in sledi $\underline{\vec{f}}(\underline{\mathbf{P}}+\underline{\vec{a}},\dot{\underline{\mathbf{P}}})=\underline{\vec{f}}(\underline{\mathbf{P}},\dot{\underline{\mathbf{P}}})$, torej $\vec{f}$ ne more biti odvisna od absolutnih položajev. Seveda je še vedno lahko odvisna od relativnih položajev (v tem primeru se $\vec{a}$ odšeteje). Tej lastnosti pravimo HOMOGENOST PROSTORA.

S poljubno izbiro vektorja $\vec{c}$ in $Q = I$ lahko podobno izpeljemo, da je $\underline{\vec{f}}$ lahko odvisna le od relativnih hitrosti, čemur pravimo HOMOGENOST PROSTORA HITROSTI.

Če nenazadnje relaksiramo še pogoj na Q, dobimo

$$\underline{\vec{f}}(Q(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j), Q(\dot{\mathbf{P}}_i, \dot{\mathbf{P}}_j)) = \underline{Q\vec{f}}(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j, \dot{\mathbf{P}}_i - \dot{\mathbf{P}}_j).$$

Funkcijam, ki zadoščajo ta pogoj, pravimo IZOTROPIČNE FUNKCIJE.

V posebnem primeru za $n = 1$ je $\vec{f}$ konstantna funkcija (ker ne more biti odvisna od ničesar). Ker za vsak $Q \in O(3)$ velja $\vec{f} = Q\vec{f}$, mora biti $\vec{f} = \vec{0}$. Torej se prosta materialna točka v inercialnem koordinantem sistemu premika premočrtno s konstantno hitrostjo. To je ena od implikacij v prvem Newtonovem zakonu.

Vprašanje 6. Izpelji homogenost časa in faznega prostora iz principov gibanja.

Definicija. Interakcija $\vec{f}$ je PARSKA, če lahko zapišemo

$$\vec{f_i} = \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ji}(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_i, \dot{\mathbf{P}}_j - \dot{\mathbf{P}}_i)$$

za vse indekse i.

Definicija. Interakcija $\vec{f}$ je LOKALNA, če je parska in če velja

$$\lim_{\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_j \to \infty} \vec{f}_{ji} = \vec{0}.$$

Vprašanje 7. Definiraj parske in lokalne interakcije.

Lema. *Za števila α_{ij} iz principa sorazmernosti velja*

- $\alpha_{ij}\alpha_{ji} = 1$,
- $\alpha_{ij}\alpha_{jk}\alpha_{kj} = 1$.

Dokaz. Prva točka: Izberemo si take interakcije $\vec{f_k}$, ki so parske in lokalne in ki so neodvisne od relativnih hitrosti. Vse točke razen i in j pošljemo v neskončnost, da je njihov vpliv ničeln. Tedaj velja $\vec{f_i} = -\alpha_{ji}\vec{f_j}$ in $\vec{f_j} = -\alpha_{ij}\vec{f_i}$, torej $\vec{f_i} = \alpha_{ij}\alpha_{ji}\vec{f_i}$.

Druga točka: Izberemo si indekse i, j, k in podobno kot prej pošljemo druge točke v neskončnost. Ob predpostavki parske in lokalne interakcije tako dobimo

$$\begin{aligned}\vec{f_i} &= -\alpha_{ji}\vec{f_j} - \alpha_{ki}\vec{f_k},\\ \vec{f_j} &= -\alpha_{ij}\vec{f_i} - \alpha_{kj}\vec{f_k}.\end{aligned}$$

Če vstavimo drugo enačbo v prvo,

$$\vec{f_i} = \alpha_{ji}\alpha_{ij}\vec{f_i} + \alpha_{ji}\alpha_{kj}\vec{f_k} - \alpha_{ki}\vec{f_k},$$

nam člen na levi in prvi člen na desni po prvi točki odpadeta. Dobljeno enačbo še pomnožimo z α_{ik} in nam ostane

$$\vec{f}_k = \alpha_{ji}\alpha_{kj}\alpha_{ik}\vec{f}_k.$$

□

Lema. *Naj za pozitivna števila* α_{ij} *velja ugotovitev prejšnje leme. Potem obstajajo števila* m_i*, da je* $\alpha_{ji} = {}^{m_j}/_{m_i}$*.*

Dokaz. Števila α_{ij} so definirana le za $i \neq j$. Definicijo lahko razširimo, da je $\alpha_{ii} = 1$. Definiramo $l_{ij} = \log \alpha_{ij}$. Velja $l_{ii} = 0$ in $L_{ij} = -l_{ji}$, poleg tega pa tudi $l_{ij} + l_{jk} + l_{ki} = 0$.

Izberemo si indeks i_0, ki nam bo definiral enoto mase. Velja $l_{i_0 j} + l_{jk} + l_{ki_0} = 0$, kar odštejemo od prejšnje vsote treh členov in dobimo

$$l_{ij} - l_{i_0 j} + l_{ki} - l_{ki_0} = 0.$$

Od tu izpeljemo, da za poljubna j in k velja

$$l_{ij} - l_{i_0 j} = l_{ik} - l_{i_0 k},$$

torej je $n_{ii_0} = l_{ij} - l_{i_0 j}$ dobro definirana količina. Opazimo, da za $i = j$ velja $n_{ii_0} = l_{ii_0}$.

Definiramo $m_i = \exp n_{ii_0}$. Sledi

$$\log \alpha_{ij} = l_{ij} = l_{i_0 j} + n_{ii_0} = -l_{ji} + n_{ii_0} = -n_{ji_0} + n_{ii_0} = \log m_i - \log m_j = \log \frac{m_i}{m_j}.$$

□

Opomba. Številom m_i pravimo INERCIJSKE MASE.

Vprašanje 8. Kaj so inercijske mase? Dokaži, da res obstajajo.

3 Uvod v numerične metode

3.1 Računske napake

Kadar z numerično metodo nekaj izračunamo, ne dobimo točne vrednosti, vendar nek približek. ABSOLUTNO NAPAKO definiramo kot razliko med približkom in točno vrednostjo:

$$d_a = \hat{x} - x.$$

Po drugi strani je RELATIVNA NAPAKA kvocient

$$d_r = \frac{\hat{x} - x}{x}.$$

Približek lahko izrazimo kot $\hat{x} = x(1 + d_r)$.

Vprašanje 1. Definiraj absolutno in relativno napako.

Števila predstavljamo s plavajočo vejico, ki je pravzaprav eksponentni zapis

$$x = \pm m \cdot b^e,$$

kjer je m MANTISA, zapisana kot $m = 0.c_1c_2 \ldots c_t$ za $c_i \in \{0, \ldots, b-1\}$, število b je BAZA zapisa, e pa EKSPONENT v mejah $L \leq e \leq U$. Števila običajno zapišemo NORMALIZIRANA, torej s $c_1 \neq 0$. V primeru najnižje možne potence dovoljujemo tudi SUBNORMALIZIRANA števila, kjer je $c_1 = 0$. Predstavljiva števila v takšnem zapisu označujemo s $P(b, t, L, U)$.

V standardu IEEE imamo dve števili:

- Enojni zapis: $P(2, 24, -125, 128)$,
- Dvojni zapis: $P(2, 53, -1021, 1023)$.

Vprašanje 2. Kaj je $P(b, t, L, U)$? Kakšne vrednosti imata `float` in `double`?

Pri zaokoževanju številu odrežemo decimalke za neko vrednostjo, in po potrebi prištejemo b^{-t}. Boljšega od teh približkov označimo s $\mathrm{fl}(x)$.

Izrek. *Če za x velja, da $|x|$ leži na intervalu med najmanjšim in največjim pozitivnim predstavljivim normaliziranim številom, potem velja*

$$\frac{|\mathrm{fl}(x) - x|}{|x|} \leq u,$$

za OSNOVNO ZAOKROŽITVENO NAPAKO $u = \frac{1}{2} b^{1-t}$.

Vprašanje 3. Kaj je osnovna zaokrožitvena napaka? Povej izrek.

Standard IEEE zagotovlja omejeno napako tudi pri osnovnih operacijah:

- $\mathrm{fl}(x \oplus y) = (x \oplus y)(1 + \delta)$ za $|\delta| \leq u$ za osnovne operacije $+, -, \cdot, /$,
- $\mathrm{fl}(\sqrt{x}) = \sqrt{x}(1 + \delta)$ za $|\delta| \leq u$.

Drug vir napak je občutljivost problema, ki ni povezana z numeriko. Obravanavamo vprašanje, kako se pri majhni spremembi v vhodnih podatkih spremeni pravilni odgovor. Za zvezno odvedljivo f lahko absolutno občutljivost merimo z odvodom

$$|f(x+\delta x) - f(x)| \approx \left|f'(x)\right| |\delta x| \,.$$

Poznamo tri vrste napak, ki skupaj sestavljajo celotno napako:

- Neodstranljiva napaka: napaka zaradi zaokroževanja podatkov
- Napaka metode: nenatančnost metode
- Zaokrožitvena napaka: napaka zaradi zaokroževanja znotraj metode

Vprašanje 4. Katere vrste napak poznamo?

4 Verjetnost

Komentar za učenje: poglej si tudi vserazne primere v zvezku, in jih poračunaj za vajo.

4.1 Izidi, dogodki, verjetnosti

Vprašanje 1. Kaj je množica Ω vseh možnih izidov? Povej nekaj primerov.

Odgovor: To je množica, ki hrani vse možne rezultate nekega poskusa. Pri mešanju kupa n kart velja $\Omega = S_n$, pri n-kratnem metu kovanca je to $\Omega = \{G, S\}^n$, itd. ⊠

Definicija. Družina $\mathcal{F}$ podmnožic množice Ω je σ-ALGEBRA, če velja:

- $\Omega \in \mathcal{F}$,
- $A \in \mathcal{F} \implies A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{F}$,
- $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$.

Definicija. Naj bo Ω množica možnih izidov, in $\mathcal{F}$ σ-algebra nad Ω. VERJETNOST je preslikava $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$, za katero velja $P(\Omega) = 1$, in kjer za disjunktne dogodke $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ velja $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$.

Opomba. To sta *aksioma Kolmogorova.*

Vprašanje 2. Kaj je verjetnost?

Izrek (Formula za vključitve in izključitve)**.** *Naj bodo $A_1, \ldots, A_n$ dogodki. Potem velja*

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i).$$

Dokaz. Definirajmo dogodke

$$B_r = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \text{ je vsebovan v natanko } r \text{ množicah } A_i\}.$$

To so disjunktni dogodki, za katere velja $\bigcup_i A_i = \bigcup_r B_r$. Sledi

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{r=1}^{n} P(B_r).$$

Poglejmo si, kolikokrat smo v formuli v izreku šteli vsako izmed množic B_r. Ta množica je vsebovana v preseku do r dogodkov, torej se v prvem členu pojavi r-krat, v drugem $\binom{r}{2}$, v tretjem $\binom{r}{3}$, itd. Vsota je tedaj

$$\binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \ldots + (-1)^r \binom{r}{r} = 1,$$

kar lahko izpeljemo iz razvoja izraza $0 = (1 - 1)^r$. □

Vprašanje 3. Povej formulo za izključitve in izključitve. Kaj je ideja dokaza?

Lema. *Naj bodo $A_1, A_2, \ldots$ dogodki. Če je $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$, je verjetnost unije*

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Če namesto tega velja $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$, je

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Dokaz. Druga formula sledi iz De Morganovih pravil, dokažemo samo prvo. Zapišemo

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup (A_3 \backslash (A_1 \cup A_2)) \cup \ldots$$

To so disjunktni dogodki, torej zanje velja

$$\begin{aligned}
P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &= P(A_1) + \sum_{k=2}^{\infty} P(A_k \backslash (A_1 \cup \ldots \cup A_{k-1})) \\
&= \lim_{n\to\infty} (P(A_1) + \sum_{k=2}^{n} P(A_k \backslash (A_1 \cup \ldots \cup A_{k-1}))) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \backslash (A_1 \cup \ldots \cup A_{k-1})) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_n).
\end{aligned}$$

□

Lema (Prva Borel-Cantorjeva lema)**.** *Naj bodo $A_1, A_2, \ldots$ dogodki, za katere velja $\sum_i P(A_i) < \infty$. Definiramo $\overline{A} = \{\omega \in \Omega \mid \omega$ je vsebovan v neskončno mnogo A_k $\}$. Tedaj velja $P(\overline{A}) = 0$.*

Dokaz. Prepričamo se lahko, da velja $\overline{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$. Te unije so padajoče za $n \to \infty$, zatorej po prejšnji lemi velja

$$P(\overline{A}) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m).$$

Iz dokaza prešnje leme vidimo, da velja sklep

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \implies P(\bigcup_{k=1}^{\infty}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Torej velja

$$P(\overline{A}) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k).$$

Izraz na desni pa je rep konvergenčne vrste, torej je limita enaka 0. □

Vprašanje 4. Povej in dokaži prvo Borel-Cantorjevo lemo.

4.1.1 Pogojna verjetnost in neodvisnost

Definicija. Naj bo B dogodek s $P(B) > 0$. POGOJNA VERJETNOST dogodka A glede na B je

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Vprašanje 5. Kaj je pogojna verjetnost?

Primer (Bertrandov paradoks). Imamo tri škatle. V prvi sta dva zlatnika, v drugi zlatnik in srebrnik, in v zadnji dva srebrnika. Izberemo eno škatlo tako, da ima vsaka verjetnost $1/3$. Iz izbrane škatle tedaj naključno izberemo kovanec. Definiramo dogodka A, drugi kovanec v škatli je zlatnik, in B, izbrani kovanec je zlatnik. Z izpisom izidov izračunamo $P(A \mid B) = 2/3$.

Definicija. Družina dogodkov $\{H_1, \ldots, H_n, \ldots\}$ je PARTICIJA Ω, če je njihova unija enaka Ω in če so paroma disjunktni.

Vprašanje 6. Kaj je družina dogodkov? Izpelji formulo za popolno verjetnost.

Odgovor: Za definicijo glej zgoraj. Naj bo A dogodek. Računamo

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \Omega) \\ &= P(A \cap \bigcup_i H_i) \\ &= P(\bigcup_i A \cap H_i) \\ &= \sum_i P(A \cap H_i) \\ &= \sum_i \frac{P(A \cap H_i)}{P(H_i)} P(H_i) \\ &= \sum_i P(A \mid H_i) P(H_i). \end{aligned}$$

Če je $P(H_i) = 0$, lahko člen izpustimo. ⊠

4.1.2 Neodvisnost dogodkov

Definicija. Dogodki $\{A_i\}_{i \in I}$ so NEODVISNI, če za vsako končno poddružino $A_1, A_2, \ldots, A_n$ velja

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \ldots P(A_n).$$

Vprašanje 7. Kdaj so dogodki neodvisni?

Definicija. Družina dogodkov $\mathcal{P} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ je π-SISTEM, če za vsaka $A_i, A_j \in \mathcal{P}$ velja $A_i \cap A_j \in \mathcal{P}$.

Opomba. Če π-sistemu dodamo $\varnothing$ in Ω, spet dobimo π-sistem.

Izrek. *Če je $\mathcal{P} = \{B_1, \ldots, B_n\}$ π-sistem in je A neodvisen od vseh B_k, je A neodvisen od vseh dogodkov, ki jih lahko sestavimo iz dogodkov v $\mathcal{P}$ s komplementiranjem, preseki in unijami.*

Dokaz. S preprostim izračunom lahko pokažemo, da če je A neodvisen od dogodkov $C_1, \ldots, C_m$, ki so vsi disjunktni od A, je A neodvisen tudi od njihove unije. Poleg tega opazimo, da so vsi dogodki, ki jih sestavimo v izreku, končne unije dogodkov $B_1^* \cap \ldots \cap B_m^*$, kjer je B_i^* bodisi enak B_i bodisi B_i^{c}.

V luči teh ugotovitev je dovolj dokazati, da je A neodvisen od vsakega dogodka $B_1^* \cap \ldots \cap B_m^*$. Če izberemo vse dogodke, kjer ni komplementa, je presek v $\mathcal{P}$, zato jih lahko nadomestimo z enim samim. Brez škode za splošnost se torej omejimo na dogodke oblike $B_1^{\mathsf{c}} \cap \ldots \cap B_m^{\mathsf{c}} \cap B_{m+1}$. Velja

$$P\left(A \cap \left(\bigcup_i B_i\right)^{\mathsf{c}} \cap B_{m+1}\right) = P(A \cap B_{m+1}) - P\left(\left(\bigcup_i B_i\right) \cap A \cap B_{m+1}\right),$$

kjer smo uporabili pomožni sklep $P(A \cap B^{\mathsf{c}}) = P(A) - P(A \cap B)$, ki ga izpeljemo iz dejstva $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^{\mathsf{c}})$. Zgornji izraz je nadalje enak

$$P(A)P(B_{m+1}) - P\left(\bigcup_i A \cap B_i \cap B_{m+1}\right),$$

ker sta A in B_{m+1} neodvisna. Drugi člen razvijemo po formuli za vključitve in izključitve in dobimo

$$P(A)P(B_{m+1}) - \sum_i P(A \cap B_i \cap B_{m+1}) + \sum_{i,j} P(A \cap B_i \cap B_j \cap B_{m+1}) - \ldots + (-1)^m P(A \cap B_1 \cap \ldots \cap B_{m+1}).$$

V vseh členih dobimo presek A z dogodkom v $\mathcal{P}$, torej lahko izpostavimo $P(A)$;

$$P(A)\left(P(B_{m+1}) - \sum_i P(B_i \cap B_{m+1}) + \ldots\right).$$

V drugem členu produkta smo dobili razvoj dogodka po formuli za vključitve in izključitve, ki ga lahko skrčimo v

$$P(A)\left(P(B_{m+1}) - P\left(\bigcup_i B_i \cap B_{m+1}\right)\right).$$

Nazadnje še uporabimo zgornji sklep v drugo smer in dobimo

$$P(A)P\left(B_{m+1}\left(\bigcup_i B_i\right)^{\mathsf{c}}\right),$$

kar zaključi dokaz. □