Kako se lotiš: UGT

Patrik Žnidaršič

Prevedeno 19. april 2023

1 Kvocientne strukture

Osnovni pojem tega razdelka je definicija topologije na kvocinentnem prostoru $X/_\sim$. Želimo, da je kvocientna projekcija $q : X \to X/_\sim$ zvezna, in da je topologija na $X/_\sim$ čim bolj podobna tisti na X. V ta namen definiramo

$$V^{\text{odp}} \subseteq X/_\sim \Leftrightarrow q^*(V)^{\text{odp}} \subseteq X$$
$$Z^{\text{zap}} \subseteq X/_\sim \Leftrightarrow q^*(Z)^{\text{zap}} \subseteq X.$$

V splošnem q ni niti odprta niti zaprta, v posebnem primeru pa je; q je odprta natanko tedaj, ko je nasičenje vsake odprte množice odprto. Podobno velja tudi za zaprtost in zaprte množice.

Pojem kvocientne preslikave lahko še posplošimo;

Definicija. Preslikava $f : X \to Y$ je KVOCIENTNA, če je surjektivna in če velja

$$\forall V \subseteq Y \,.\, V^{\text{odp}} \subseteq Y \Leftrightarrow f^*(V)^{\text{odp}} \subseteq X.$$

Podoben pogoj bi lahko postavili tudi za zaprte podmnožice Y. Implikacija v desno v zgornji definiciji pove, da je f zvezna; implikacija v levo pa, da je KVOCIENTNA V OŽJEM SMISLU.

Pomen te razširitve je v naslednjem izreku:

Izrek. *Naj bo X prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X. Naj bo $f : X \to Y$ kvocientna preslikava. Če f naredi iste identifikacije kot $\sim$, potem je inducirana preslikava $\overline{f} : X/_\sim \to Y$ homeomorfizem.*

Izrek običajno uporabimo postopoma. Prvi korak je, da si narišemo diagram situacije.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X/_\sim \arrow[r, dotted, "\approx"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Dokazati želimo, da sta prostora $X/_\sim$ in Y homeomorfna. V ta namen si izmislimo predpis za f in začnemo dokazovati, da lahko uporabimo izrek. Prvo moramo preveriti, da je f sploh dobro definirana; to je implikacija v desno v zapisu $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Pogosto lahko obe implikaciji dokažemo hkrati. Implikacija v levo tu pove, da je f injektivna med ekvivalenčnimi razredi (oz. da je inducirana preslikava injektivna). Če dokažemo zveznost f, dobimo zveznost $\overline{f}$. Podobno nam surjektivnost f poda surjektivnost $\overline{f}$. Za konec nam ostane še kvocientnost v ožjem smislu.

Tega si ne želimo preverjati po definiciji, zato imamo na razpolago več kriterijev. Predpostavimo, da je $f : X \to Y$ zvezna surjekcija;

- Če je f še odprta ali zaprta, je kvocientna.
- Če je X kompakt in Y T_2, je f zaprta, torej kvocientna.
- Če obstaja (zvezna) i, da je $f \circ i = \mathrm{id}$, je i vložitev in f kvocientna v ožjem smislu.
- Če je $(A_i)_i$ lokalno končno kompaktno pokritje X, $(f_*(A_i))_i$ lokalno končno zaprto pokritje Y, ter če sta oba prostora T_2, je inducirana preslikava zaprta; če že vemo, da je zvezna bijekcija, sledi, da je homeomorfizem.
- Če je q surjektivna na kompaktnem podprostoru X, je $X/_\sim$ kompakt, zato je inducirana preslikava zaprta; če že vemo, da je zvezna bijekcija, sledi, da je homeomorfizem.

1.1 Operacije s kvocienti

Kompozitum dveh kvocientnih preslikav je znova kvocientna, velja pa tudi drug sklep; če je $g \circ f$ kvocientna in sta f, g zvezni, je g kvocientna.

Najpomembnejši pojem v tem razdelku je deljivost topoloških lastnosti. Lastnost je deljiva, če se prenese na vsak kvocient prostora, oziroma če se ohranja pri kvocientnih preslikavah. Deljivost je prikazana v naslednji tabeli;

Deljive lastnosti	Nedeljive lastnosti
povezanost (s potmi)	T_i
kompaktnost	1-števnost
separabilnost	2-števnost
lokalna povezanost (s potmi)	metrizabilnost
diskretnost	lokalna kompaktnost
trivialnost	popolna nepovezanost

Ker ločljivostne lastnosti niso deljive, imamo lahko hude težave s predstavo kvocientnih prostorov. Za lastnost T_1 imamo na voljo karakterizacijo; $X/_\sim$ je T_1 natanko tedaj, ko so ekvivalenčni razredi zaprti v X.

1.2 Topološke grupe

Naj bo G grupa. Kot množico jo lahko opremimo s topologijo. Če sta operaciji množenja in invertiranja zvezni, taki strukturi pravimo TOPOLOŠKA GRUPA. Analogno lahko definiramo tudi ostale algebraične strukture; posebej pomembni so topološki obsegi $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Enostavna posledica definicije je, da so translacije $g \mapsto ag$ za $a \in G$ homeomorfizmi.

Ker imajo algebraično strukturo, so topološke grupe zelo lepi prostori; veljajo namreč naslednje trditve:

- Množica $A \subseteq G$ je okolica točke $a \in G$ natanko tedaj, ko je $ba^{-1}A$ okolica točke $b \in G$.
- Če je $H \leq G$ podgrupa in okolica enote, je priprta v G.
- Če je C komponenta za povezanost, ki vsebuje enoto, je C zaprta edinka.
- Lastnosti $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ so ekvivalentne.

Pri topologiji so grupe pomembne predvsem zaradi delovanja.

Definicija. Naj bo X topološki prostor in G topološka grupa. DELOVANJE G na X je zvezna preslikava $\phi : G \times X \to X$, da velja

- $\phi(1, x) = x$,
- $\phi(a, \phi(b, x)) = \phi(ab, x)$.

Tudi pri delovanjih velja, da so translacije $x \mapsto a \cdot x$ homeomorfizmi.

Delovanje grupe nam porodi ekvivalenčno relacijo

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists a \in G \,.\, a \cdot x = y.$$

Ekvivalenčne razrede (to so množice $G \cdot x$ za $x \in X$) imenujemo ORBITE. Kvocientni prostor označimo z $X/_G$. Če je $G \subseteq X$, se ta oznaka križa s prejšnjo oznako; pri kvocientu pa <u>ne</u> dobimo enakega rezultata!

Če topološka grupa deluje na prostor X, je kvocientna projekcija po delovanju odprta.

1.3 Zlepki

Zlepek je kvocient direktne vsote dveh prostorov po predelu, definiranim s funkcijo f. Naj bosta X, Y prostora, $A \subseteq X$ poljubna podmnožica ter $f : A \to Y$ zvezna preslikava. Potem je zlepek

$$X \cup_f Y = X \amalg Y/_\sim$$

za ekvivalenčno relacijo $x \in A \sim f(x) \in Y$. V praksi to pomeni, da točke iz množice A nalepimo na njihove slike v prostoru Y.

Zlepki so lepi primeri kvocientov, ker v posebnih primerih ohranijo veliko ljubih lastnosti.

- Če sta X in Y normalna ter $A^{\text{zap}} \subseteq X$, je zlepek $X \cup_f Y$ normalen.
- Če je A zaprta, in f zaprta vložitev, se ohranjata tudi 2-števnost in T_2.

1.4 Znani kvocienti

Poznamo nekaj standardnih konstrukcij.

- Naj bo X topološki prostor. Stožec nad X je $CX = X \times [0,1]/X \times \{1\}$.
- Naj bo X topološki prostor. Suspenzija nad X je $\Sigma X = X \times [-1,1]/(X \times \{1\}, X \times \{-1\})$.

Velja $CS^{n-1} \approx B^n$ in $\Sigma S^{n-1} \approx S^n$.

2 Projektivni prostori

Definicija. Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$ in $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. n-RAZSEŽNI PROJEKTIVNI PROSTOR NAD $\mathbb{F}$ je kvocientni prostor

$$\mathbb{F}P^n = \mathbb{F}^{n+1} \backslash \{0\} \,/\, \mathbb{F}^*.$$

Običajno gledamo prostore $\mathbb{R}P^n$, ki si jih lahko predstavljamo kot običajen $\mathbb{R}^n$, ki smo mu dodali točke v neskončnosti. V teh točkah naj bi se sekale vzporedne premice. Velja $\mathbb{R}P^n \approx S^n/S^0 = S^n/(x \sim -x) \approx B^n/(x \sim -x, x \in S^{n-1})$.

Iz teorije vemo, da je $\mathbb{F}P^n$ homogen prostor (torej za vsak par točk obstaja homeomorfizem, ki eno točko slika v drugo). Dodatne lastnosti so naslednje:

- (lokalna) povezanost s potmi,
- separabilnost,
- 2-števnost,
- normalnost,
- kompaktnost,
- lokalna kompaktnost.

Izkaže se, da so projektivni prostori strašno trapasti za dokazovanje česarkoli. Da jih vsaj malo ukrotimo, lahko za $\mathbb{R}P^n$ uvedemo HOMOGENE KOORDINATE;

$$[x_1, \dots, x_{n+1}] = [(x_1, \dots, x_{n+1})].$$

Množice $U_k = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \,|\, x_k \neq 0\}$ tvorijo odprto pokritje za $\mathbb{R}P^n$. Vsak od njih je homeomorfen $\mathbb{R}^n$.

3 Retrakti, homotopije

Definicija. Množica $A \subseteq X$ je RETRAKT prostora X, če obstaja zvezna preslikava $r : X \to A$, da je $r(a) = a$ za $a \in A$.

Retrakcije ohranjajo povezanost (s potmi) in kompaktnost.

Retrakt Hausdorffovega prostora je vedno zaprt.

Definicija. Naj bosta X, Y topološka prostora, ter $f, g : X \to Y$ zvezni preslikavi. HOMOTOPIJA med f in g, če obstaja, je preslikava

$$H : X \times I \to Y,$$

za katero velja $H(x, 0) = f(x)$ in $H(x, 1) = g(x)$. Homotopnost funkcij označimo z $f \simeq g$.

Definicija. Prostor X je KONTRAKTIBILEN, če je identiteta homotopna kaki konstantni preslikavi $X \to X$.

Vsi konveksni prostori so kontraktibilni. Primer nekontraktibilnega prostora je S^1.

Če je prostor kontraktibilen, je povezan s potmi.