Kako se lotiš: ANA2b

Patrik Žnidaršič

Prevedeno 22. april 2023

1 Fourierove vrste

Osnovna vrsta naloge je razvoj neke funkcije $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ v Fourierovo vrsto

$$FV(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

kjer se koeficiente izračuna po formulah

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Razvijanje v vrsto poteka čisto po postopku, lahko pa si pomagaš z raznimi triki. Lahko npr. izračunaš integral

$$\int_{\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx,$$

ter nato vzameš njegovo realno in imaginarno komponento.

Če je funkcija soda oz. liha, si lahko prihraniš nekaj računanja, saj bodo bodisi koeficienti pred sinusi bodisi koeficienti pred kosinusi enaki 0. Pogosto se pojavi tudi naloga, kjer imaš dano funkcijo $[0, \pi] \to \mathbb{R}$, in jo moraš razviti v kosinusno ali sinusno vrsto (morda piše tudi soda ali liha razširitev). To je enak primer, kot če bi bila funkcija definirana na $[-\pi, \pi]$ ter soda oz. liha.

Vredno je omeniti, da razvoj v Fourierovo vrsto ne garantira enakosti povsod. Zunaj intervala $(-\pi, \pi)$ bo dobljena vrsta periodična, na robu intervala pa bo vrednost enaka povprečju vrednosti obeh vej. Bolj specifično; za odsekoma odvedljivo 2π-periodično funkcijo f velja

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Druga pogosta naloga je, da izračunaš neko vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pri čemer je običajno podana funkcija, katere Fourierov razvoj lahko pretvoriš v to vrsto, če ga evaluiraš v neki pametno izbrani točki.

Včasih pride prav Parsevalova enakost;

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

2 Vektorska analiza

Tri pomembne operacije v vektorski analizi so

- GRADIENT: $\vec{\nabla}.u = (\partial_x u, \partial_y u, \partial_z u)$.
- DIVERGENCA: $\vec{\nabla} \cdot \vec{R} = (X_x, Y_y, Z_z)$.
- ROTOR: $\vec{\nabla} \times \vec{R} = (Z_y - Y_z, X_z - Z_x, Y_x - X_y)$.

Operator nabla ($\vec{\nabla}$) si lahko mislimo kot vektor $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, vendar ga ne smemo obravnavati kot vektor; formula za dvojni vektorski produkt recimo ne velja za $\vec{\nabla}$.

Za smerni odvod funkcije velja $\partial_{\vec{s}} u = \vec{\nabla}.u \cdot \vec{s}$.

Zaporedje operacij, kakor je napisano spodaj, je posebno; če naredimo dva zaporedna koraka, vedno pridemo do rezultata 0.

$$S \xrightarrow{\text{grad}} V \xrightarrow{\text{rot}} V \xrightarrow{\text{div}} S$$

Divergenca rotorja je vedno 0, prav tako je rotor gradienta vedno 0. Divergenca gradienta pa ni nujno 0, temveč je nov operator $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$. Glede teh stvari imamo nekaj novih pojmov:

- Polje u je HARMONIČNO, če je $\Delta u = 0$.
- Polje $\vec{R}$ je POTENCIALNO, če je $\vec{R} = \vec{\nabla}.u$ za neko skalarno polje u. Različni potenciali se med seboj razlikujejo za funkcijo, konstantno na povezanih komponentah.
- Polje $\vec{R}$ ima VEKTORSKI POTENCIAL, če je $\vec{R} = \vec{\nabla} \times \vec{f}$ za neko vektorsko polje $\vec{f}$.
- Polje $\vec{R}$ je IROTACIONALNO, če je $\vec{\nabla} \times \vec{R} = 0$.
- Polje $\vec{R}$ je SOLENOIDALNO, če je $\vec{\nabla} \cdot \vec{R} = 0$.

Pogost tip naloge je, da dobiš predpis vektorskega polja $\vec{f} = (X, Y, Z)$, ter moraš dokazati, da je polje potencialno in poiskati njegov potencial. Naloge se lotiš tako, da predpostaviš obstoj potenciala u, ter zapišeš enačbe

$$\partial_x u = X \qquad \partial_y u = Y \qquad \partial_z u = Z.$$

Za enačbo, ki je najbolj preprosta, izračunaš določeni integral; recimo, da je to zadnja enačba. Potem je $u = \int Z dz + C_z(x, y)$, kjer je C neka preslikava, odvisna od x in y ter neodvisna od z. Ta predpis odvajaš po y (ali x), primerjaš s pripadajočo enačbo zgoraj in zapišeš $u = \cdots + C_{yz}(x)$, kjer je C sedaj neka druga preslikava, odvisna le od x (oz. y). Naposled to odvajaš še po zadnji spremenljivki, primerjaš z enačbo zgoraj in zapišeš rezultat.

Če so v taki nalogi parametri (*izračunaj a, b, da bo $\vec{f}_{a,b}(x, y, z)$ potencialno*), uporabiš dejstvo, da ima potencialno polje rotor vedno enak 0.

3 Krivuljni in ploskovni integrali

Osnovni način izračuna integrala skalarnega oz. vektorskega polja po krivulji ali ploskvi je, da krivuljo (ploskev) parametriziramo, ter uporabimo ustrezno formulo;

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma u ds = \int_\alpha^\beta u(\vec{r}(t)) \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| dt \\
&\int_{\vec{\Gamma}} \vec{R} d\vec{r} = \int_\Gamma \vec{R} \cdot \vec{T} ds = \int_\alpha^\beta \vec{R}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt \\
&\iint_\Sigma u dS = \iint_D u(\vec{r}(s,t)) \sqrt{EG - F^2}\, dsdt = \iint_D u(\vec{r}(s,t)) \left|\vec{r}_s \times \vec{r}_t\right| dsdt \\
&\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{R} d\vec{S} = \iint_D \vec{R} \cdot \vec{N} dS = \iint_D \vec{R}(\vec{r}) \cdot (\vec{r}_s \times \vec{r}_t)\, dsdt
\end{aligned}$$

Če je krivulja sklenjena, se integral zapiše s krogcem in se mu reče CIRKULACIJA.

Če imamo za integral podano diferencialno formo, jo prevedemo formuli:

$$\int_\Gamma X dx + Y dy + Z dz = \int_K (X, Y, Z) d\vec{r}$$

$$\iint_\Sigma X dzdy + Y dxdz + Z dxdy = \iint_\Sigma (X, Y, Z) d\vec{S}$$

Pri drugem primeru moramo paziti; če je kakšen od diferencialov napisan v drugem vrstnem redu, ga obrnemo in dodamo njegovemu členu negativen predznak.

Ker v splošnem nočeš parametrizirati ničesar, si je za integriranje dobro zapomniti kakšen trik. Če imaš potencialno vektorsko polje, je integral tega polja po orientirani krivulji enak razliki med končno in začetno vrednostjo potenciala. Druga pomoč so integralski izreki

Izrek. *GAUSS Naj bo D omejena odprta množica v $\mathbb{R}^3$, katere rob je sestavljen iz končnega števila odsekoma gladkih ploskev,* orientiranih z zunanjo normalo D. *Potem je integral polja $\vec{R} \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$*

$$\oiint_{\partial D} \vec{R} d\vec{S} = \iiint_D \vec{\nabla} \cdot \vec{R} dV.$$

Izrek. *GREENOVA FORMULA Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ omejena odprta množica v ravnini, katere rob je sestavljen iz končnega števila odsekoma gladkih krivulj, orientiranih pozitivno glede na D. Za $X, Y \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$ velja*

$$\oint_{\partial D} X dx + Y dy = \iint_D (Y_x - X_y) dx dy.$$

Izrek. *STOKES Naj bo Σ omejena odsekoma gladka orientirana ploskev v $\mathbb{R}^3$, katere rob je sestavljen iz končnega števila odsekoma gladkih krivulj, orientiranih skladno s Σ. Za $\vec{R} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Sigma})$ velja*

$$\oint_{\partial \Sigma} \vec{R} d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{R} d\vec{S}.$$

Izreke lahko uporabljaš tudi v neočitno smer; če imaš za nalogo npr. izračun integrala po neki nesklenjeni ploskvi, lahko to ploskev poljubno skleneš z eno drugo, ter uporabiš Gaussov izrek. Tedaj moraš izračunati dva integrala, vendar je integral po izbrani ploskvi pogosto lažji kot integral po dani ploskvi.

Če ima funkcija na območju, ki ga določijo ti izreki, kakšno singularnost, se ji morda lahko izogneš tako, da jo "izrežeš"; dodaš sfero (krožnico) okoli singularnosti, ter to uporabiš kot rob območja.

3.1 Površine ploskev

Površina ploskve Σ, parametrizirane z $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je

$$\iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du dv = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv$$

za $E = |\vec{r}_u|^2$, $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$ in $G = |\vec{r}_v|^2$.

Za izračun površine grafa $\mathcal{C}^1(D)$ funkcije f obstaja lažja formula:

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx dy.$$

Če moraš izračunati površino torusa s polmeroma $0 < a < R$, lahko uporabiš

$$P = 2\pi a 2\pi R.$$