

Kako se lotiš: Verjetnost

Patrik Žnidaršič

Prevedeno 27. december 2023

1 Pojmi, splošno

IZID je en od možnih rezultatov nekega verjetnostnega poskusa (met kovanca, met kocke, mešanje kupa kart, ipd.). Množico vseh izidov običajno označimo z Ω . Množica nekih izidov se imenuje DOGODEK. Dogodkom pripisujemo verjetnosti s preslikavo $P : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$, kjer velja $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$. Za števno družino disjunktnih dogodkov velja

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i).$$

Dodatno velja $P(A^c) = 1 - P(A)$ in formula za vključitve in izključitve

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} P\left(\bigcap_j A_{i_j}\right)$$

POGOJNA VERJETNOST dogodka A glede na dogodek B je

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Dogodka sta neodvisna, če velja $P(A|B) = P(A)$, oziroma $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Če je družina dogodkov H_i particija množice Ω , lahko uporabimo formulo za popolno verjetnost

$$P(A) = \sum_i P(A|H_i)P(H_i).$$

Poleg tega velja Bayesova formula

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}.$$

SLUČAJNA SPREMENLJIVA X je funkcija $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Pri tem si mislimo, da krempelj našega Velikega Škampa, Boga Vsemogočnega, izbere en izid, ki ga vstavi kot argument v funkcijo X ; na funkciji sami po sebi ni ničesar naključnega. Pišemo

$$P(X = k) = P(X^{-1}(\{k\})).$$

Najpomembnejše pri slučajnih spremenljivkah so njihove porazdelitve, t.j. vrednosti $P(X = k)$ za vse možne k . Porazdelitve so našteje v Bronštejnu na strani 602 in v razdelku 3 spodaj. Poseben tip spremenljivk so slučajni vektorji; namesto $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ so to funkcije $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$. Označimo $\underline{X} = (X_1, \dots, X_k)$ in pišemo

$$P(\underline{X} = \underline{x}) = P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k).$$

2 Reševanje nalog

Najpomembnejši korak pri vsaki nalogi je določitev množice možnih izidov Ω . Običajno je to neko zaporedje ali urejena k -terica. Neurejenih k -teric se izogibaj, razen če znaš utemeljiti, zakaj ti da pravi odgovor. Vsakemu izidu potem prirediš verjetnost — običajno kar vsem enako, ne pa nujno.

3 Verjetnostne porazdelitve

3.1 Diskretne porazdelitve

- BINOMSKA PORAZDELITEV: n -krat vržemo kovanec z verjetnostjo grba p . Če je X število grbov v n metih, je

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \sim \text{Bin}(n, p).$$

- NEGATIVNA BINOMSKA PORAZDELITEV: Mečemo kovanec in čakamo na m grbov. Naj bo X potrebno število metov. Velja

$$P(X = k) = \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m} \sim \text{NegBin}(m, p).$$

- GEOMETRIJSKA PORAZDELITEV: Mečemo kovanec in čakamo na prvi grb. Če je X število potrebnih metov, je

$$P(X = k) = q^{k-1} p \sim \text{Geom}(p).$$

- HIPERGEOMETRIJSKA PORAZDELITEV: Imamo posodo z B belimi in R rdečimi kroglicami, naključno izberemo $n \leq N = B + R$ kroglic iz posode. Če je X število izbranih belih kroglic, dobimo

$$P(X = k) = \frac{\binom{B}{k} \binom{N-B}{n-k}}{\binom{N}{n}} \sim \text{HiperGeom}(n, B, N).$$

- POISSONOVA PORAZDELITEV: Tu je

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \sim \text{Po}(\lambda).$$

3.2 Porazdelitve slučajnih vektorjev

- MULTINOMSKA PORAZDELITEV: Imamo r škatel, v katere mečemo n kroglic. Vsako škatlo zadenemo z verjetnostjo p_i , kjer je $\sum_i p_i = 1$. Naj bo X_i število kroglic v i -ti škatli na koncu metov. Tedaj

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_r = k_r) = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} \sim \text{Multinom}(n, \underline{p}).$$

3.3 Zvezne porazdelitve

Slučajna spremenljivka ima zvezno porazdelitev, če obstaja taka funkcija $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, da je

$$P(X \in (a, b]) = \int_a^b f_X(x) dx.$$

Taki funkciji pravimo GOSTOTA PORAZDELITVE. Znale zvezne porazdelitve so naslednje:

- NORMALNA PORAZDELITEV:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- EKSPONENTNA PORAZDELITEV:

$$f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$$

za $x \geq 0$.

- GAMA PORAZDELITEV:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-\lambda x)$$

za $x \geq 0$.

- ENAKOMERNA PORAZDELITEV:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}.$$

- BETA PORAZDELITEV:

$$f_X(x) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}$$

za $0 < x < 1$.