Kako se lotiš: Uvod v funkcionalno analizo

Patrik Žnidaršič

12. januar 2025

Zahvala Matiji Fajfarju za skrbno urejene zapiske z vaj.

1 Normirani prostori

Vektorski prostor X nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ je NORMIRAN, če ima definirano normo, torej preslikavo $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ z naslednjimi lastnostmi:

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ za vsak $x \in X$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\, x$ za vsak $\lambda \in \mathbb{F}$ in $x \in X$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ za vsaka $x, y \in \mathbb{F}$.

Prostor je BANACHOV, če je normiran in poln za metriko, porojeno z normo, $d(x, y) = \|x - y\|$.

Poznamo nekaj standardnih primerov normiranih prostorov:

- Za $1 \leq p < \infty$ je
$$l^p = \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty \right\},$$
opremljen z normo
$$\|(x_n)_n\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p \right)^p$$
Banachov prostor.
- Prostor
$$l^\infty = \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sup_n |x_n| < \infty \right\},$$
opremljen z normo
$$\|(x_n)_n\|_\infty = \sup_n |x_n|,$$
Banachov prostor.

- Imamo tudi nekaj standardnih podprostorov l^∞;

$$c = \{(x_n)_n \in l^\infty \,|\, (x_n)_n \text{ je konvergentno zaporedje}\}$$
$$c_0 = \{(x_n)_n \in l^\infty \mid \lim x_n = 0\}$$
$$c_{00} = \{(x_n)_n \in l^\infty \,|\, \text{rep } (x_n)_n \text{ je konstantno enak } 0\}$$

  Prva dva prostora sta Banachova, zadnji pa ni. Njegovo zaprtje glede na l^p-normo je l^p, glede na l^∞-normo pa je c_0.

Pri dokazovanju dejstev o l^p prostorih prideta prav sledeči neenakosti.

Trditev 1.1 (Hölderjeva neenakost)**.** *Če za $1 < p, q < \infty$ velja $p^{-1} + q^{-1} = 1$, potem za poljubna $x \in l^p$ ter $y \in l^q$ velja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q .$$

Trditev 1.2 (Minkowski)**.** *Če je $1 \leq p < \infty$ ter $x, y \in l^p$, potem velja $\|x + y\|_p = \|x\|_p + \|y\|_p$.*

Slednja trditev je seveda le trikotniška neenakost za $\|\cdot\|_p$. Ker med drugim obravnavamo Banachove prostore, marsikaj delamo z zaporedji, in se je vredno spomniti naslednjega dejstva iz topologije: (topološki) podprostor je zaprt natanko tedaj, ko ima vsako konvergentno zaporedje z elementi iz tega podprostora tudi limito v tem podprostoru. Iz tega lahko enostavno pokažemo naslednjo trditev.

Trditev 1.3. *Naj bo Y vektorski podprostor v normiranem prostoru X. Če je Y poln, je zaprt v X. Če je X Banachov, je Y Banachov natanko tedaj, ko je zaprt v X.*