

# Kako se lotiš: Uvod v funkcionalno analizo

Patrik Žnidaršič

28. januar 2025

*Zahvala Matiji Fajfarju za skrbno urejene zapiske z vaj.*

## 1 Normirani prostori

Vektorski prostor  $X$  nad poljem  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  je **NORMIRAN**, če ima definirano normo, torej preslikavo  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$  z naslednjimi lastnostmi:

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  za vsak  $x \in X$ ,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  za vsak  $\lambda \in \mathbb{F}$  in  $x \in X$ ,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  za vsaka  $x, y \in \mathbb{F}$ .

Prostor je **BANACHOV**, če je normiran in poln za metriko, porojeno z normo,  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

Poznamo nekaj standardnih primerov normiranih prostorov:

- Za  $1 \leq p < \infty$  je

$$l^p = \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p < \infty \right\},$$

opremljen z normo

$$\|(x_n)_n\|_p = \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p \right)^{1/p},$$

Banachov prostor.

- Prostor

$$l^\infty = \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sup_n |x_n| < \infty \right\},$$

opremljen z normo

$$\|(x_n)_n\|_\infty = \sup_n |x_n|,$$

Banachov prostor.

- Imamo tudi nekaj standardnih podprostorov  $l^\infty$ ;

$$c = \{(x_n)_n \in l^\infty \mid (x_n)_n \text{ je konvergentno zaporedje}\}$$

$$c_0 = \{(x_n)_n \in l^\infty \mid \lim x_n = 0\}$$

$$c_{00} = \{(x_n)_n \in l^\infty \mid \text{rep } (x_n)_n \text{ je konstantno enak } 0\}$$

Prva dva prostora sta Banachova, zadnji pa ni. Njegovo zaprtje glede na  $l^p$ -normo je  $l^p$ , glede na  $l^\infty$ -normo pa je  $c_0$ .

Pri dokazovanju dejstev o  $l^p$  prostorih prideta prav sledeči neenakosti.

**Trditev 1.1** (Hölderjeva neenakost). Če za  $1 < p, q < \infty$  velja  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ , potem za poljubna  $x \in l^p$  ter  $y \in l^q$  velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

**Trditev 1.2** (Minkowski). Če je  $1 \leq p < \infty$  ter  $x, y \in l^p$ , potem velja  $\|x + y\|_p = \|x\|_p + \|y\|_p$ .

Slednja trditev je seveda le trikotniška neenakost za  $\|\cdot\|_p$ . Ker med drugim obravnavamo Banachove prostore, marsikaj delamo z zaporedji, in se je vredno spomniti naslednjega dejstva iz topologije: (topološki) podprostor je zaprt natanko tedaj, ko ima vsako konvergentno zaporedje z elementi iz tega podprostora tudi limito v tem podprostoru. Iz tega lahko enostavno pokažemo naslednjo trditev.

**Trditev 1.3.** Naj bo  $Y$  vektorski podprostor v normiranem prostoru  $X$ . Če je  $Y$  poln, je zaprt v  $X$ . Če je  $X$  Banachov, je  $Y$  Banachov natanko tedaj, ko je zaprt v  $X$ .

Če imamo normiran prostor  $X$  in zaprt podprostor  $Y \subseteq X$ , lahko tvorimo kvocient  $X/Y$ , ki ga opremimo z normo

$$\|x + Y\| = \inf\{\|x + y\| \mid y \in Y\}.$$

Potem je  $X$  Banachov natanko tedaj, ko sta  $X/Y$  in  $Y$  Banachova. Kvocientna preslikava  $q : X \rightarrow X/Y$  je omejena z  $\|q\| \leq 1$ , hkrati pa je surjektivna in odprta. Če je  $X$  še Banachov in  $T : X \rightarrow Y$  omejen operator, potem je  $\tilde{T} : X/\ker T \rightarrow Y$ , definiran s  $\tilde{T}(x + \ker T) = Tx$ , tudi omejen in velja  $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ .

Za linearen operator  $T : X \rightarrow Y$  definiramo normo z

$$\|T\| = \inf\{C > 0 \mid \forall x. \|Tx\| \leq C \|x\|\},$$

če ta infimum obstaja. Izkaže se

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|<1} \|Tx\|.$$

Potem z  $B(X, Y)$  označimo množico vseh omejenih operatorjev med  $X$  in  $Y$ . Operatorska norma je submultiplikativna. Če je  $Y$  Banachov, je tudi  $B(X, Y)$  Banachov; obratno velja le, če je  $\dim X \geq 1$ .

## 1.1 Dualni prostor

Če je  $X$  normiran prostor, je  $X^* = B(X, \mathbb{F})$  njegov dualni prostor. Ta je vedno Banachov. V splošnem je dualni prostor težko določiti, vemo pa naslednje:

- $c_0^* \cong l^1$ ,
- $(l^1)^* \cong l^\infty$
- $(l^p)^* \cong l^q$  za  $p^{-1} + q^{-1} = 1$ ,
- $(l^2)^* \cong l^2$ .

Tukaj  $\cong$  označuje izometrično izomorfno.

Za normiran prostor  $X$  in  $f \in X^*$  lahko definiramo  $\hat{x}(f) = f(x)$ . Potem je  $\hat{x} \in X^{**}$  in velja  $\|\hat{x}\| = \|x\|$ .

Če je  $A : X \rightarrow Y$  omejen linearen operator, lahko za  $f \in Y^*$  definiramo adjungirani operator (v smislu Banachovih prostorov)  $A^*f = f \circ A$ . Tudi ta je omejen z  $\|A^*\| = \|A\|$ .

## 2 Temeljni izreki

### 2.1 Hahn-Banachov izrek

Imamo več njih. Pick your poison.

**Izrek 2.1** (realni Hahn-Banach). *Naj bo  $Y \leq X$  vektorski prostor in  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  sublinearni funkcional. Naj bo  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  tak linearni funkcional, da za vsak  $y \in Y$  velja  $f(y) \leq p(y)$ . Tedaj obstaja linearni funkcional  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ , da je  $F|_Y = f$  in  $F(x) \leq p(x)$  za vsak  $x \in X$ .*

**Izrek 2.2** (kompleksni Hahn-Banach). *Naj bo  $X$  vektorski prostor nad  $\mathbb{F}$ ,  $Y \leq X$  in  $p$  polnorma na  $X$ . Če je  $f : Y \rightarrow \mathbb{F}$  linearni funkcional, da za vse  $y \in Y$  velja  $|f(y)| \leq p(y)$ , potem obstaja linearni funkcional  $F : X \rightarrow \mathbb{F}$ , za katerega je  $F|_Y = f$  in  $|F(x)| \leq p(x)$  za vsak  $x \in X$ .*

**Izrek 2.3** (Hahn-Banachov izrek za normirane prostore). *Naj bo  $Y \leq X$  podprostor normiranega prostora  $X$  in  $f : Y \rightarrow \mathbb{F}$  omejen. Tedaj obstaja  $F : X \rightarrow \mathbb{F}$ , da je  $F|_Y = f$  ter  $\|F\| = \|f\|$ .*

### 2.2 Bairov izrek

**Izrek 2.4** (Baire). *Naj bo  $(X, d)$  poln metričen prostor in  $(U_n)_n$  števna družina odprtih gostih množic v  $X$ . Tedaj je presek  $\bigcap_n U_n$  gost v  $X$ .*

**Posledica 2.5.** *Naj bo  $X$  poln metrični prostor in  $(A_n)_n$  zaporedje zaprtih množic, da je  $X = \bigcup_n A_n$ . Tedaj obstaja  $m \in \mathbb{N}$ , da je  $\mathring{A}_m \neq \emptyset$ .*

Kot posledico imamo tudi dejstvo, da noben neskončnorazsežen Banachov prostor nima števne algebraične baze. Iz tega npr. sledi, da  $\mathbb{F}[X]$  ni Banachov v nobeni normi, ker ima vedno števno bazo.

## 2.3 Izrek o odprti preslikavi

**Izrek 2.6** (o odprti preslikavi). *Naj bo  $T$  omejen surjektiven linearen operator med Banachovima prostoroma  $X$  in  $Y$ . Tedaj je  $T$  odprta preslikava.*

**Posledica 2.7.** *Naj bo  $T$  omejen linearen bijektiven operator med Banachovima prostoroma. Potem je njegov inverz tudi omejen.*

To je povezano z naslednjima dejstvoma za linearen operator  $T$  med Banachovima prostoroma:

- $T$  je injektiven in ima zaprto zalogo vrednosti natanko tedaj, ko je navzdol omejen, torej ko obstaja  $C > 0$ , da za vsak  $x$  velja  $C \|x\| \leq \|Tx\|$ ,
- $T$  ima zaprto zalogo vrednosti natanko tedaj, ko obstaja  $C > 0$ , da za vsak  $x$  velja

$$\|Tx\| \geq C \inf_{z \in \ker T} \|x - z\|.$$

## 2.4 Princip enakomerne omejenosti

**Izrek 2.8** (princip enakomerne omejenosti). *Naj bo  $X$  Banachov,  $Y$  normiran prostor in  $\mathcal{A} \subseteq B(X, Y)$ . Če je za vsak  $x \in X$  množica  $\{\|Ax\| \mid A \in \mathcal{A}\}$  omejena, potem je množica  $\{\|A\| \mid A \in \mathcal{A}\}$  omejena.*

## 2.5 Izrek o zaprtem grafu

**Izrek 2.9** (o zaprtem grafu). *Naj bo  $T : X \rightarrow Y$  linearna preslikava, ter  $X$  in  $Y$  Banachova prostora. Potem je  $T$  omejena natanko tedaj, ko je graf  $\Gamma_T$  zaprt v  $X \times Y$ .*

Za zaprtost grafa je dovolj preveriti, da za poljubno zaporedje  $(x_n)_n$  v  $X$ , ki konvergira k  $x$ , velja  $\lim Tx_n = Tx$ .

## 2.6 Stone-Weierstrass

**Izrek 2.10** (Stone-Weierstrass). *Naj bo  $K$  kompakten Hausdorffov prostor in  $A \subseteq C(K)$  podalgebra, ki loči točke in vsebuje konstante. Tedaj je  $A$  gosta v  $C(K)$ .*

# 3 Hilbertovi prostori

Prostor je Hilbertov, če je norma porojena s skalarnim produktom, torej predpisom  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , za katero velja

- $\langle x, x \rangle \geq 0$  (realno in nenegativno),
- $\langle x, x \rangle = 0$  natanko tedaj, ko je  $x = 0$ ,
- $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ ,
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ .

Imamo nekaj pomembnih lastnosti:

- Cauchy-Schwarz:  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ ; enakost velja natanko tedaj, ko sta  $x$  in  $y$  linearno odvisna,
- paralelogramska enakost:  $\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ ,
- $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$  natanko tedaj, ko sta  $x$  in  $y$  linearno odvisna in je  $\langle x, y \rangle \geq 0$ ,
- $x \perp y$  natanko tedaj, ko je  $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$  za vsak  $\lambda \in \mathbb{F}$ .

Če je  $H$  Hilbertov prostor in  $M \subseteq H$  zaprt podprostor, potem za vsak  $x \in H$  obstaja enolično določen  $x_0 \in M$ , za katerega velja  $d(x, M) = d(x, x_0)$ . Pravimo mu PRAVOKOTNA PROJEKCIJA  $x$  NA  $M$ , velja  $x - x_0 \in M^\perp$ . Potem lahko definiramo preslikavo  $P : H \rightarrow M$ , ki slika vektor v pravokotno projekcijo, in ima naslednje lastnosti:

- $P$  je linearen operator  $H \rightarrow M$ ,
- $\|Px\| \leq \|x\|$ ,
- $P^2 = P$ ,
- $\text{im } P = M$ ,  $\ker P = M^\perp$ ,
- $H = M \oplus M^\perp$  in  $M^{\perp\perp} = M$ .

**Izrek 3.1** (Riesz). *Naj bo  $H$  Hilbertov prostor in  $f \in H^*$ . Tedaj obstaja natanko en  $y \in H$ , da je  $f(x) = \langle x, y \rangle$  in  $\|f\| = \|y\|$ .*

**Izrek 3.2.** *Naj bo  $H$  Hilbertov prostor in  $K \leq H$  podprostor. Tedaj ima vsak  $f \in K^*$  natanko eno Hahn-Banachovo razširitev na  $H$ .*

Če je  $H$  Hilbertov prostor, je  $E \subseteq H$  ortogonalen sistem, če je  $\|e\| = 1$  za vsak  $e \in E$  ter  $e \perp f$  za vsak par  $e, f \in E$ . Sistem je kompleten, če je maksimalen v množici vseh ortonormiranih sistemov glede na inkluzijo. Imamo tudi naslednjo karakterizacijo.

**Izrek 3.3.** *Za ONS  $E \subseteq H$  v Hilbertovem prostoru  $H$  so naslednje trditve ekvivalentne:*

- $E$  je KONS,
- $E^\perp = \{0\}$ ,
- $\overline{\text{Lin } E} = H$ ,
- za vsak  $x \in H$  velja

$$x = \sum_{e \in E} \langle x, e \rangle e,$$

- Parsevalova enakost: za vsak  $x \in H$  velja

$$\|x\|^2 = \sum_{e \in E} |\langle x, e \rangle|^2.$$

Poljubna KONS-a Hilbertovega prostora imata isto kardinalnost, tako da lahko enolično definiramo dimenzijo. Hilbertova prostora sta izomorfna natanko tedaj, ko imata enako dimenzijo.

### 3.1 Adjungirani operator

Če je  $A : H \rightarrow K$  omejen operator, potem operatorju  $A^*$ , za katerega velja  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ , pravimo ADJUNGIRANI OPERATOR. Tak operator vedno obstaja, velja naslednje:

- $I^* = I$  (identiteta),
- $0^* = 0$ ,
- $(A + B)^* = A^* + B^*$ ,
- $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$ ,
- $A^{**} = A$ ,
- $(BA)^* = A^* B^*$ ,
- $A$  je obrnljiv natanko tedaj, ko je  $A^*$  obrnljiv,
- če je  $A$  obrnljiv, je  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ ,
- $\ker A^* = (\operatorname{im} A)^\perp$ ,
- $(\ker A)^\perp = \overline{\operatorname{im} A^*}$ .

Pravimo, da je  $A \in B(H)$

- SEBI ADJUNGIRAN, če je  $A^* = A$ ,
- NORMALEN, če je  $A^* A = A A^*$ ,
- UNITAREN, če je  $A^* A = A A^* = I$ . To je natanko tedaj, ko je izomorfizem prostora  $H$ .

Če je  $A$  sebi adjungiran, potem je

$$\|A\| = w(A) = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|.$$

## 4 Kompaktni operatorji

Operator  $T : X \rightarrow Y$  med normiranimi prostoroma je KOMPAKTEN, če slika (zaprt) enotsko kroglo v relativno kompaktno množico, torej množico, katere zaprtje je kompaktno. To je ekvivalentno naslednjima točkama:

- $T$  slika omejene množice v relativno kompaktno množico,
- če je  $(x_m)_m$  omejeno zaporedje v  $X$ , ima  $(Tx_m)_m$  stekališče v  $Y$ .

V splošnem je kompaktnost težko dokazati. Poznamo pa naslednja dejstva:

- če je  $A \in B(X)$  operator s končnorazsežno sliko, je kompakten,
- $K(X)$ , tj. množica vseh kompaktnih operatorjev  $X \rightarrow X$ , je ideal v  $B(X)$ ,
- identiteta  $I : X \rightarrow X$  je kompaktna natanko tedaj, ko je  $X$  končnorazsežen,
- diagonalen operator z diagonalno  $(d_n)_n$  je kompakten natanko tedaj, ko je  $\lim d_n = 0$ .

**Izrek 4.1.** *Naj bo  $T \in B(H, K)$ . Naslednje trditve so ekvivalentne:*

- $T$  je kompakten,
- $T^*$  je kompakten,
- obstaja zaporedje  $(T_n)_n$  v  $F(H, K)$ , da  $T_n \rightarrow T$ .

Tu je  $F(H, K)$  množica operatorjev  $H \rightarrow K$  končnega ranga.

Naj bo  $K$  kompakten Hausdorffov prostor. Pravimo, da je množica  $H \subseteq C(K)$  ENAKOZVEZNA, če za vsak  $x \in K$  in  $\varepsilon > 0$  obstaja odprta okolica  $U_x \ni x$ , da je  $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$  za vse  $y \in U_x$  ter  $f \in H$ .

**Izrek 4.2** (Arzela-Ascoli). *Naj bo  $K$  kompakten Hausdorffov prostor in  $H \subseteq C(K)$  družina funkcij. Tedaj je  $H$  relativno kompaktna natanko tedaj, ko je enakozvezna in po točkah omejena.*

## 5 Spektralna teorija

Za kompleksno Banachovo algebro  $A$  in  $a \in A$  definiramo RESOLVENTO

$$\rho(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - a \text{ je obrnljiv v } A\}.$$

Potem je SPEKTER  $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a)$ .

Omejimo se na algebro  $B(X)$  za kompleksen Banachov prostor  $X$ . Če je  $A \in B(X)$ , lahko spekter razdelimo na tri dele:

- točkasti spekter  $\sigma_p(A)$  vsebuje lastne vrednosti  $A$ ,

- zvezni spekter  $\sigma_c(A)$  vsebuje tiste  $\lambda$ , za katere je  $\lambda I - A$  injektiven in njegova slika gosta v  $X$ ,
- residualni spekter  $\sigma_r(A)$  vsebuje tiste  $\lambda$ , za katere je  $\lambda I - A$  injektiven, a njegova slika ni gosta.

Če je  $X$  Hilbertov, lahko nekaj povemo o adjungiranem operatorju. Vemo, da je  $\sigma(A^*) = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ . Če je  $A$  normalen, so lastni vektorji med seboj pravokotni in velja  $\sigma_r(A) = \emptyset$ , če pa je še sebi adjungiran, je  $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ . V splošnem imamo naslednje:

- če je  $\lambda \in \sigma_r(A)$ , je  $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$ ,
- če je  $\lambda \in \sigma_p(A)$ , je  $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*) \cup \sigma_r(A^*)$ .

Za diagonalen operator  $D \in B(l^2)$  z diagonalo  $(d_n)_n$  velja naslednje:

- $\|D\| = \sup |d_n|$ ,
- $D$  je sebi adjungiran natanko tedaj, ko so vsi  $d_n \in \mathbb{R}$ ,
- $D$  je normalen,
- $D$  je unitaren natanko tedaj, ko velja  $|d_n| = 1$  za vse  $n$ ,
- $D$  je kompakten natanko tedaj, ko  $d_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ,
- $\sigma(D) = \overline{\{d_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$ .

Če je  $X$  Banachov in  $K \in K(X)$ , potem velja

- če  $\lambda \neq 0$ , je  $\dim \ker(K - \lambda I) < \infty$ ,
- $\text{im}(K - \lambda I)$  je zaprta v  $X$ ,
- za vsak  $\varepsilon > 0$  ima  $K$  le končno mnogo linearno neodvisnih lastnih vektorjev za lastne vrednosti  $\lambda$  z  $|\lambda| \geq \varepsilon$ ,
- če  $\dim X = \infty$ , je  $0 \in \sigma(K)$ ,
- če  $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ , je  $\lambda$  lastna vrednost  $K$ ,
- $\sigma(K)$  je kvečjemu števni,
- če je  $\sigma(K)$  neskončen in so  $(\lambda_n)_n$  lastne vrednosti, velja  $\lim \lambda_n = 0$ .

Če je  $X$  Hilbertov in je  $K$  kompakten in sebi adjungiran, potem obstaja zaporedje  $(\lambda_n)_n \subseteq \mathbb{R}$  in ONS  $(e_n)_n$  (lahko sta končna) z

- $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$ ,  $\lambda_n \neq 0$  in če je zaporedje neskončno,  $\lim \lambda_n = 0$ ,
- $Ke_n = \lambda_n e_n$ ,
- če je  $\lambda \in \sigma_p(K) \setminus \{0\}$ , se  $\lambda$  pojavi v  $(\lambda_n)_n$  natanko tolikokrat, kot je  $\dim \ker(K - \lambda I)$ ,
- $Kx = \sum_n \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$ .



## 5.1 Spekter v kompleksni Banachovi algebri

Naj bo  $A$  kompleksna Banachova algebra in  $a \in A$ . Potem je  $\rho(a)$  odprta v  $\mathbb{C}$ , torej je  $\sigma(a)$  kompakt, saj je vsebovana v  $B(0, \|a\|)$ . Če je  $|\lambda| > \|a\|$ , je potem  $\lambda \in \rho(a)$ , torej

$$(\lambda - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Izrek pravi, da je spekter vedno neprazen.

Definiramo lahko SPEKTRALNI RADIJ

$$r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda| = \max_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|,$$

za katerega Geldandova formula pravi, da je

$$r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{1/n}.$$

Če je  $A$  sebi adjungiran operator na Hilbertovem prostoru, velja  $r(A) = \|A\|$ .