Izrek Šarkovskega

Patrik Žnidaršič

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

25. april 2023

Definicije

- I interval na realni osi
- $f : I \to I$ zvezna funkcija
- $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$

Definicije

- I interval na realni osi
- $f : I \to I$ zvezna funkcija
- $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$

Definicije

- Točka $p \in I$ je periodna točka, če obstaja $m \in \mathbb{N}$, da je $f^m(p) = p$. Perioda je najmanjši tak m.
- Orbita okoli p je množica $\{f^k(p) \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Ureditev Šarkovskega

$$
\begin{aligned}
& 3 \lhd 5 \lhd 7 \lhd 9 \lhd \cdots \\
\lhd\ & 2 \cdot 3 \lhd 2 \cdot 5 \lhd 2 \cdot 7 \lhd 2 \cdot 9 \lhd \cdots \\
\lhd\ & 4 \cdot 3 \lhd 4 \cdot 5 \lhd 4 \cdot 7 \lhd 4 \cdot 9 \lhd \cdots \\
\lhd\ & 8 \cdot 3 \lhd 8 \cdot 5 \lhd 8 \cdot 7 \lhd 8 \cdot 9 \lhd \cdots \\
\lhd\ & \cdots \\
\lhd\ & \cdots \lhd 16 \lhd 8 \lhd 4 \lhd 2 \lhd 1
\end{aligned}
$$

Izrek

Če ima f točko s periodo m, in $m \lhd k$, ima f točko s periodo k.

Izrek

Če ima f točko s periodo m, in $m \lhd k$, ima f točko s periodo k.

Posledica

Če ima f točko s periodo 3, ima tudi točke vseh drugih period.

Lema 1

Naj bo $[a, b] \subseteq I$. Če $f_*([a, b]) \supseteq [a, b]$, potem ima f v $[a, b]$ fiksno točko.

Lema 1

Naj bo $[a,b] \subseteq I$. *Če* $f_*([a,b]) \supseteq [a,b]$, *potem ima* f *v* $[a,b]$ *fiksno točko.*

Izrek (Izrek o vmesni vrednosti)

Naj bo $f : I \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija. Za vsaka* $a, b \in I$ *velja:* f *na* $[a,b]$ *zavzame vse vrednosti med* $f(a)$ *in* $f(b)$.

Lema 1

Naj bo $[a,b] \subseteq I$. *Če* $f_*([a,b]) \supseteq [a,b]$, *potem ima* f *v* $[a,b]$ *fiksno točko.*

Izrek (Izrek o vmesni vrednosti)

Naj bo $f : I \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija. Za vsaka* $a, b \in I$ *velja:* f *na* $[a,b]$ *zavzame vse vrednosti med* $f(a)$ *in* $f(b)$.

Definicija

Naj bosta I in J intervala. Če je $f_*(I) \supseteq J$, označimo $I \to J$.

Lema 2 (Potopisna lema)

Naj bodo $J_0, J_1, \ldots, J_{n-1}$ taki kompaktni intervali, da velja $J_i \to J_{i+1}$ za vse $0 \leq i < n-1$ ter $J_{n-1} \to J_0$. Potem obstaja fiksna točka p funkcije f^n, da velja $f^k(p) \in J_k$ za vse $0 \leq k < n$.

Lema 2 (Potopisna lema)

Naj bodo $J_0, J_1, \ldots, J_{n-1}$ *taki kompaktni intervali, da velja* $J_i \to J_{i+1}$ *za vse* $0 \leq i < n-1$ *ter* $J_{n-1} \to J_0$*. Potem obstaja fiksna točka* p *funkcije* f^n*, da velja* $f^k(p) \in J_k$ *za vse* $0 \leq k < n$*.*

Definicija

Takim intervalom pravimo n-zanka, za točko p pa rečemo, da sledi zanki.

Lema 2 (Potopisna lema)

Naj bodo $J_0, J_1, \ldots, J_{n-1}$ *taki kompaktni intervali, da velja* $J_i \to J_{i+1}$ *za vse* $0 \leq i < n-1$ *ter* $J_{n-1} \to J_0$*. Potem obstaja fiksna točka* p *funkcije* f^n*, da velja* $f^k(p) \in J_k$ *za vse* $0 \leq k < n$*.*

Definicija

Takim intervalom pravimo *n*-zanka, za točko p pa rečemo, da sledi zanki.

Lema 3

Naj bo $J_0, J_1, \ldots, J_{n-1}$ *zanka kompaktnih intervalov, katerih krajišča so elementi orbite* O*. Če nobena točka iz* O *ne sledi zanki, in če je* $\mathrm{Int} J_0$ *disjunktna z* J_i *za* $i > 0$*, potem imajo vse točke, ki sledijo zanki, periodo* n*.*

Naš cilj

Trditev

Če ima f točko s periodo 3, ima tudi točke vseh ostalih period.

Izrek realizacije

Izrek

Naj bo P_f množica period funkcije f. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja funkcija g_n, da je $P_{g_n} = \{m \in \mathbb{N} \mid n \trianglelefteq m\}$. Obstaja funkcija g_∞, da je $P_{g_\infty} = \{1, 2, 4, 8, \ldots\}$.