

Izrek Šarkovskega

Patrik Žnidaršič

Fakulteta za matematiko in fiziko

25. april 2023

Definicije

- I interval na realni osi
- $f : I \rightarrow I$ zvezna funkcija
- $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$

- I interval na realni osi
- $f : I \rightarrow I$ zvezna funkcija
- $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$

Definicije

- Točka $p \in I$ je periodna točka, če obstaja $m \in \mathbb{N}$, da je $f^m(p) = p$. Perioda je najmanjši tak m .
- Orbita okoli p je množica $\{f^k(p) \mid k \in \mathbb{N}\}$.

$$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft 9 \triangleleft \dots$$

$$\triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft 2 \cdot 7 \triangleleft 2 \cdot 9 \triangleleft \dots$$

$$\triangleleft 4 \cdot 3 \triangleleft 4 \cdot 5 \triangleleft 4 \cdot 7 \triangleleft 4 \cdot 9 \triangleleft \dots$$

$$\triangleleft 8 \cdot 3 \triangleleft 8 \cdot 5 \triangleleft 8 \cdot 7 \triangleleft 8 \cdot 9 \triangleleft \dots$$

$$\triangleleft \dots$$

$$\triangleleft \dots \triangleleft 16 \triangleleft 8 \triangleleft 4 \triangleleft 2 \triangleleft 1$$

Izrek

Če ima f točko s periodo m , in $m \triangleleft k$, ima f točko s periodo k .

Izrek

Če ima f točko s periodo m , in $m \triangleleft k$, ima f točko s periodo k .

Posledica

Če ima f točko s periodo 3, ima tudi točke vseh drugih period.

Lema 1

Naj bo $[a, b] \subseteq I$. Če $f_([a, b]) \supseteq [a, b]$, potem ima f v $[a, b]$ fiksno točko.*

Lema 1

Naj bo $[a, b] \subseteq I$. Če $f_([a, b]) \supseteq [a, b]$, potem ima f v $[a, b]$ fiksno točko.*

Izrek (Izrek o vmesni vrednosti)

Naj bo $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Za vsaka $a, b \in I$ velja: f na $[a, b]$ zavzame vse vrednosti med $f(a)$ in $f(b)$.

Lema 1

Naj bo $[a, b] \subseteq I$. Če $f_([a, b]) \supseteq [a, b]$, potem ima f v $[a, b]$ fiksno točko.*

Izrek (Izrek o vmesni vrednosti)

Naj bo $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Za vsaka $a, b \in I$ velja: f na $[a, b]$ zavzame vse vrednosti med $f(a)$ in $f(b)$.

Definicija

Naj bosta I in J intervala. Če je $f_*(I) \supseteq J$, označimo $I \rightarrow J$.

Lema 2 (Potopisna lema)

Naj bodo J_0, J_1, \dots, J_{n-1} taki kompaktni intervali, da velja $J_i \rightarrow J_{i+1}$ za vse $0 \leq i < n-1$ ter $J_{n-1} \rightarrow J_0$. Potem obstaja fiksna točka p funkcije f^n , da velja $f^k(p) \in J_k$ za vse $0 \leq k < n$.

Lema 2 (Potopisna lema)

Naj bodo J_0, J_1, \dots, J_{n-1} taki kompaktni intervali, da velja $J_i \rightarrow J_{i+1}$ za vse $0 \leq i < n-1$ ter $J_{n-1} \rightarrow J_0$. Potem obstaja fiksna točka p funkcije f^n , da velja $f^k(p) \in J_k$ za vse $0 \leq k < n$.

Definicija

Takim intervalom pravimo n -zanka, za točko p pa rečemo, da sledi zanki.

Lema 2 (Potopisna lema)

Naj bodo J_0, J_1, \dots, J_{n-1} taki kompaktni intervali, da velja $J_i \rightarrow J_{i+1}$ za vse $0 \leq i < n-1$ ter $J_{n-1} \rightarrow J_0$. Potem obstaja fiksna točka p funkcije f^n , da velja $f^k(p) \in J_k$ za vse $0 \leq k < n$.

Definicija

Takim intervalom pravimo n -zanka, za točko p pa rečemo, da sledi zanki.

Lema 3

Naj bo J_0, J_1, \dots, J_{n-1} zanka kompaktnih intervalov, katerih krajišča so elementi orbite O . Če nobena točka iz O ne sledi zanki, in če je $\text{Int}J_0$ disjunktna z J_i za $i > 0$, potem imajo vse točke, ki sledijo zanki, periodo n .

Trditev

Če ima f točko s periodo 3, ima tudi točke vseh ostalih period.

Izrek

Naj bo P_f množica period funkcije f . Za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja funkcija g_n , da je $P_{g_n} = \{m \in \mathbb{N} \mid n \trianglelefteq m\}$. Obstaja funkcija g_∞ , da je $P_{g_\infty} = \{1, 2, 4, 8, \dots\}$.