Kako se lotiš: Verjetnost

Patrik Žnidaršič

Prevedeno 18. november 2023

1 Pojmi, splošno

Izid je en od možnih rezultatov nekega verjetnostnega poskusa (met kovanca, met kocke, mešanje kupa kart, ipd.). Množico vseh izidov običajno označimo z Ω. Množica nekih izidov se imenuje dogodek. Dogodkom pripisujemo verjetnosti s preslikavo $P : 2^\Omega \to [0,1]$, kjer velja $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$. Za števno družino disjunktnih dogodkov velja

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i).$$

Dodatno velja $P(A^\mathsf{c}) = 1 - P(A)$ in formula za vključitve in izključitve

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k} P\left(\bigcap_j A_{i_j}\right)$$

Pogojna verjetnost dogodka A glede na dogodek B je

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Dogodka sta neodvisna, če velja $P(A \mid B) = P(A)$, oziroma $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Če je družina dogodkov H_i particija množice Ω, lahko uporabimo formulo za popolno verjetnost

$$P(A) = \sum_i P(A \mid H_i) P(H_i).$$

Poleg tega velja Bayesova formula

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)}.$$

Slučajna spremenljiva X je funkcija $\Omega \to \mathbb{R}$. Pri tem si mislimo, da krempelj našega Velikega Škampa, Boga Vsemogočnega, izbere en izid, ki ga vstavi kot argument v funkcijo X; na funkciji sami po sebi ni ničesar naključnega. Pišemo

$$P(X = k) = P(X^{-1}(\{k\})).$$

Najpomembnejše pri slučajnih spremenljivkah so njihove porazdelitve, t.j. vrednosti $P(X = k)$ za vse možne k. Porazdelitve so naštete v Bronštejnu na strani 602 in v razdelku 2 spodaj. Poseben tip spremenljivk so slučajni vektorji; namesto $\Omega \to \mathbb{R}$ so to funkcije $\Omega \to \mathbb{R}^k$. Označimo $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ in pišemo

$$P(\underline{X} = \underline{x}) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k).$$

2 Reševanje nalog

Najpomembnejši korak pri vsaki nalogi je določitev množice možnih izidov Ω. Običajno je to neko zaporedje ali urejena k-terica. Neurejenih k-teric se izogibaj, razen če znaš utemeljiti, zakaj ti da pravi odgovor. Vsakemu izidu potem prirediš verjetnost — običajno kar vsem enako, ne pa nujno.

3 Verjetnostne porazdelitve

3.1 Diskretne porazdelitve

- Binomska porazdelitev: n-krat vržemo kovanec z verjetnostjo grba p. Če je X število grbov v n metih, je
$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \sim \mathrm{Bin}(n, p).$$
- Negativna binomska porazdelitev: Mečemo kovanec in čakamo na m grbov. Naj bo X potrebno število metov. Velja
$$P(X = k) = \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m} \sim \mathrm{NegBin}(m, p).$$
- Geometrijska porazdelitev: Mečemo kovanec in čakamo na prvi grb. Če je X število potrebnih metov, je
$$P(X = k) = q^{k-1} p \sim \mathrm{Geom}(p).$$
- Hipergeometrijska porazdelitev: Imamo posodo z B belimi in R rdečimi kroglicami, naključno izberemo $n \leq N = B + R$ kroglic iz posode. Če je X število izbranih belih kroglic, dobimo
$$P(X = k) = \frac{\binom{B}{k}\binom{N-B}{n-k}}{\binom{N}{n}} \sim \mathrm{HiperGeom}(n, B, N).$$
- Poissonova porazdelitev: Tu je
$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \sim \mathrm{Po}(\lambda).$$

3.2 Porazdelitve slučajnih vektorjev

- Multinomska porazdelitev: Imamo r škatel, v katere mečemo n kroglic. Vsako škatlo zadenemo z verjetnostjo p_i, kjer je $\sum_i p_i = 1$. Naj bo X_i število kroglic v i-ti škatli na koncu metov. Tedaj

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_r = k_r) = p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r}. \sim \text{Multinom}(n, \underline{p}).$$

3.3 Zvezne porazdelitve

Slučajna spremenljivka ima zvezno porazdelitev, če obstaja taka funkcija $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, da je

$$P(X \in (a, b]) = \int_a^b f_X(x) dx.$$

Taki funkciji pravimo gostota porazdelitve. Znane zvezne porazdelitve so naslednje:

- Normalna porazdelitev:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Eksponentna porazdelitev:

$$f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$$

  za $x \geq 0$.

- Gama porazdelitev:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-\lambda x)$$

  za $x \geq 0$.

- Enakomerna porazdelitev:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}.$$

- Beta porazdelitev:

$$f_X(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}$$

  za $0 < x < 1$.