Kako se lotiš: Diferencialnih enačb

Patrik Žnidaršič

Prevedeno 2. junij 2024

Navadne diferencialne enačbe

Navadna diferencialna enačba k-tega reda je enačba oblike

$$\vec{F}(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(k)}(t)) = 0,$$

kjer je $x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funkcija, ki reši enačbo. Če je x vektorska funkcija ($n > 1$), enačbi pravimo sistem NDE. Za enačbo pravimo, da je avtonomna, če F ni eksplicitno odvisna od t. Neavtonomen sistem lahko spravimo v avtonomnega tako, da uvedemo še eno odvisno spremenljivko $v(t)$, ter enačbo $\dot{v} = 1$.

1 Prvi integral

Splošna rešitev enačbe $y' = f(x, y)$ je enoparametrična družina funkcij $y = y(x, C)$. Če obstaja funkcija $u(x, y)$, za katero velja $u(x, y(x, C)) = \text{konst.}$ za vsak C, jo imenujemo prvi integral enačbe. Vsaka implicitno podana krivulja $y(x)$ z enačbo $u(x, y) = D$, kjer je u prvi integral neke diferencialne enačbe, je rešitev te diferencialne enačbe. Iskanje prvega integrala je torej kvečjemu močnejše od reševanja diferencialne enačbe.

Če imamo dano vektorsko polje $F = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, lahko poiščemo ortogonalne krivulje nanj z diferencialno enačbo

$$y' = -\frac{P}{Q}.$$

Če je polje potencialno s potencialom u, iste krivulje poiščemo z

$$y' = -\frac{\partial_x u}{\partial_y u},$$

torej je u prvi integral te enačbe. Ker potencial načeloma znamo poiskati z integralom, lahko enačbo rešimo. Če pa polje ni potencialno, mora obstajati funkcija $\lambda = \lambda(x, y)$, ki jo imenujemo integrirujoči množitelj, za katero je polje $(\lambda P, \lambda Q)$ potencialno. Če nam tako funkcijo uspe najti, smo enačbo rešili, njen prvi integral je enak

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} \lambda P dx + \lambda Q dy.$$

Ko iščemo λ, si lahko pomagamo z enakostjo $\partial_x(\lambda Q) = \partial_y(\lambda P)$.

Včasih dobimo enačbo oblike $Pdx + Qdy = 0$. Če velja $P_y = Q_x$, je enačba eksaktna, s prvih integralom u, za katerega velja $u_x = P, u_y = Q$. Rešitev je potem implicitno podana z nivojnico $u = C$. Če ni eksaktna, poskušamo najti integrirujoči množitelj.

2 Parametrično reševanje

Če imamo implicitno podano NDE prvega reda $F(x, y, y') = 0$, lahko nanjo gledamo kot na ploskev v $\mathbb{R}^3$ s substitucijo $p = y'$. Potem lahko enačbo obravnavamo na tri načine:

- Če y ne nastopa v F, parametriziramo nastalo krivuljo z $x = x(t)$ in $p = p(t)$. Parametrizacijo odvajamo in uporabimo dejstvo $dy = pdx$. Iz tega dobimo krivuljo $x \mapsto (x, y(x))$, ki je rešitev enačbe.
- Če x ne nastopa v F, spet parametriziramo $y = y(t)$ in $p = p(t)$, ter uporabimo $dy = pdx$. Iz tega lahko izračunaš krivuljo $t \mapsto (x(t), y(t))$, ki je rešitev DE.
- Če lahko enega od x, y, p eksplicitno izraziš, ta predpis direktno vstaviš v $dy = pdx$, in rešitev izraziš parametrično.

3 Tok

Naj bo dano vektorsko polje V. Tokovnica tega polja je taka krivulja γ, da velja $\dot{\gamma}(t) = V(\gamma(t))$. Tok je preslikava $(x, t) \mapsto \phi_t(x) \in \mathbb{R}^n$, da je $t \mapsto \phi_t(x)$ tokovnica za vsak x, in $\phi_0(x) = x$ za vse x.

Če imamo dano polje v polarnih koordinatah $(\dot{r}, \dot{\varphi}) = W(r, \varphi)$, ga lahko transformiramo v kartezične koordinate z

$$V = (\dot{x}, \dot{y}) = D_\psi(\eta(t))(\dot{r}, \dot{\varphi}),$$

kjer je $\eta(t) = (r(t), \varphi(t))$ in $\psi(r, \varphi) = (x, y)$.

4 Enačbe drugega reda

Naj bo dan sistem

$$\begin{aligned} \dot{\vec{q}} &= \vec{G}(\vec{q}, \vec{p}), \\ \dot{\vec{p}} &= \vec{F}(\vec{q}, \vec{p}). \end{aligned}$$

Če obstaja taka funkcija $H : M \subseteq \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, da je

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{q}} H &= -\vec{F}, \\ \partial_{\vec{p}} H &= \vec{G}, \end{aligned}$$

potem pravimo, da je sistem hamiltonski, funkciji H pa pravimo Hamiltonian. Tedaj je H tudi prvi integral enačbe. Da je sistem hamiltonski, mora biti vektorsko polje $(-\vec{F}, \vec{G})$ potencialno.

5 Cauchyjeve naloge

CAUCHYJEVA NALOGA ali ZAČETNI PROBLEM je sistem enačb

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y), \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Izrek (Eksistenčni izrek)**.** *Dana je Cauchyjeva naloga $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$. Če je $f : C_{a,b} \to \mathbb{R}$ zvezna in Lipscitzova v spremenljivki y, kjer je*

$$C_{a,b} = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b],$$

obstaja enolična rešitev $\tilde{y}$, definirana na $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, kjer je

$$\begin{aligned} \alpha &= \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}, \\ M &= \max_{C_{a,b}} |f(x,y)|\,. \end{aligned}$$

Če je $f \in \mathcal{C}^k$, je tok tudi $\mathcal{C}^k$.

Lipscitzov pogoj lahko zamenjamo s pogojem, da je f zvezno odvedljiva. Izrek je pomemben, ker poleg obstoja zagotavlja tudi enoličnost rešitve. Če moramo dokazati, da je rešitev tudi globalno enolična, lahko uporabo izreka verižimo od začetne točke; če dobimo, da je rešitev enolična na razdalji α od začetne točke, se postavimo v točko $\frac{1}{2}\alpha$, tam uporabimo izrek, in (pod predpostavko, da se maksimalna razdalja ne zmanjša) dobimo obstoj in enoličnost do $\frac{3}{2}\alpha$. Postopek lahko potem nadaljujemo. Obstoj globalne rešitve pa lahko pokažemo tudi z naslednjo lemo:

Lema. *Naj rešitev Cauchyjeve naloge obstaja na nekem intervalu (σ, ω) za $\sigma, \omega \in [-\infty, \infty]$.*

- *Če je $\omega < \infty$, potem*
$$\lim_{x \to \omega} |y(x)| = \infty.$$
- *Če je $\sigma > \infty$, potem*
$$\lim_{x \to \sigma} |y(x)| = \infty.$$

6 Linearni sistemi NDE

Rešitev sistema $\dot{x} = Ax + b$ je vsota homogene in partikularne rešitve. Za homogen sistem $\dot{x} = Ax$ poiščemo fundamentalno rešitev

$$\phi = e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1},$$

kjer je $A = PJP^{-1}$ Jordanov razcep. Za dobljeno matriko velja $\dot{\phi} = A\phi$ in $\phi(0) = I$, njeni stolpci podajajo bazo rešitev sistema. Če je $x(0) = x_0$ začetni pogoj, je ϕx_0 rešitev začetnega problema.

Partikularno rešitev poiščemo z nastavkom

$$x_p(t) = \int_0^t \phi(t)\phi(s)^{-1}b(s)ds = Pe^{Jt}\int_0^t e^{-Js}P^{-1}b(s)ds.$$

7 Linearne NDE višjega reda

Za homogeno enačbo

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0$$

zapišemo karakteristični polinom

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Rešitve enačbe so vsote funkcij oblike

$$p(x)e^{\lambda_i x},$$

kjer je ničla $\lambda_i \in \mathbb{R}$ in $\deg p = \deg_f \lambda_i - 1$, ter funkcij oblike

$$q_1(x)e^{\Re\lambda_i\cdot x}\cos(\Im\lambda_i\cdot x) \qquad\qquad q_2(x)e^{\Re\lambda_i\cdot x}\sin(\Im\lambda_i\cdot x)$$

za $\deg q_1 = \deg q_2 = \deg_f \lambda - 1$ in kompleksno ničlo λ_i.

Če je desna stran oblike $p(x)e^{\mu x}$, je postopek reševanja opisan v razdelku 9.10, za splošno desno stran pa vzamemo linearno neodvisne rešitve homogenega dela $y_1, \ldots, y_n$, in poiščemo še partikularno rešitev z variacijo konstante

$$y_p = C_1(x)y_1 + \ldots + C_n(x)y_n.$$

8 Variacijski račun

Dana je $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2$ ter funkcional

$$\mathcal{L}(y) = \int_a^b L(x, y, y')dx$$

na prostoru vseh $\mathcal{C}^2$ funkcij $y : [a, b] \to \mathbb{R}$, za katere veljata robna pogoja $y(a) = A$ in $y(b) = B$. Iščemo ekstreme tega funkcionala. Le-ti zadoščajo Euler-Lagrangeovi enačbi

$$L_y(x, y, y') - \partial_x L_{y'}(x, y, y') = 0,$$

kjer si pri odvajanju po y in y' (indeksa) mislimo, da sta to neodvisni spremenljivki, pri odvajanju po x (∂_x) pa upoštevamo $y = y(x)$. Ko enačbo rešiš, dobiš predpis za y z dvema konstantama; konstanti določiš tako, da predpis vstaviš v robna pogoja. Če kakšnega robnega pogoja ne poznaš, ga nadomestiš z

$$L_{y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0)) = 0,$$

kjer je x_0 tisti izmed a, b, za katerega ne poznaš začetne vrednosti.

Poznamo tudi dva posebna primera:

- Če je $L = L(x, y')$, velja $Ly' =$ konst.. V tem primeru ne potrebujemo vstavljati v Euler-Lagrangeovo enačbo.
- Če je $L = L(y, y')$, uporabimo Bertranijevo identiteto $L - y'L_{y'} =$ konst.. V tem primeru moraš preveriti, da je dobljena rešitev dejansko rešitev Euler-Lagrangeove enačbe.

Podobno lahko delamo tudi v več dimenzijah; če je $y = (y_1, \ldots, y_n)$ iskana preslikava, preprosto uporabimo Euler-Lagrangeovo za vsako komponento posebej;

$$L_{y_i} - \partial_x(L_{y_i'}) = 0.$$

Če je L odvisen tudi od odvodov višjih redov, uporabiš Euler-Poissonovo enačbo

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\frac{d}{dx})^k L_{y^{(k)}} = 0.$$

9 Pogosti postopki reševanja

9.1 Enačba z ločljivima spremenljivkama

Če imamo enačbo oblike

$$\dot{x} = f(t)g(x),$$

jo predelamo v

$$\frac{\dot{x}}{g(x)} = f(t),$$

in integriramo obe strani. Če je H primitivna funkcija $1/g$, in F primitivna funkcija f, velja

$$x(t) = H^{-1}(F(t) + C)$$

za poljubno konstanto $C \in \mathbb{R}$.

9.2 Enačba s homogeno desno stranjo

Če je $\dot{x} = f(t,x)$, kjer velja $f(t,x) = f(\lambda t, \lambda x)$ za vse $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, vpeljemo spremenljivko

$$v = \frac{x}{t} \qquad\qquad \dot{x} = t\dot{v} + v.$$

Ker velja $\dot{x} = f(1,v)$, dobimo enačbo

$$\dot{v} = \frac{1}{t}(f(1,v) - v),$$

to je enačba z ločljivima spremenljivkama, nadaljuješ kot v razdelku 9.1.

9.3 Enačbe višjega reda

Dana je enačba $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$. Imamo tri pristope:

- Če F ni odvisna od y, znižamo red z $z = y'$.
- Če F ni odvisna od x, znižamo red z $z(x) = y'(y)$; pri tem velja $\partial_y z = {}^{y''}/_{y'}$.
- Če je $F(x, \lambda y, \ldots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^k F(x, y, \ldots, y^{(n)})$, znižamo red z $z = {}^{y'}/_{y}$.

9.4 Linearna NDE prvega reda

Linearna NDE prvega reda je enačba oblike

$$y' = f(x)y + g(x).$$

Rešiš jo tako, da prvo rešiš homogeno enačbo

$$y' = f(x)y,$$

ki je enačba z ločljivimi spremenljivkami, rešitev poiščeš kot v razdelku 9.1. Vedno dobiš

$$y_h = C \exp\left(\int_a^x f(\xi)d\xi\right).$$

Splošna rešitev bo enaka vsoti homogene in partikularne rešitve. Slednjo poiščemo z nastavkom

$$y_p = C(x) \exp\left(\int_a^x f(\xi)d\xi\right),$$

postopku pravimo VARIACIJA KONSTANTE. Če nastavek vstavimo v originalno diferencialno enačbo, dobimo

$$C'(x) \exp\left(\int_a^x f(\xi)d\xi\right) = g(x).$$

Ko to integriramo, dobimo preslikavo $C(x)$, in rešitev

$$y = C(x) \exp\left(\int_a^x f(\xi)d\xi\right) + D \exp\left(\int_a^x f(\xi)d\xi\right),$$

kjer je $D \in \mathbb{R}$ poljuben parameter (ki pride od homogene rešitve).

9.5 Bernoullijeva enačba

Bernoullijeva enačba je enačba oblike

$$p(x)y' + q(x)y = r(x)y^\alpha(x)$$

za nek $\alpha \in \mathbb{R}$. Če je $\alpha = 0$ ali $\alpha = 1$, sistem rešimo po razdelku 9.4. V nasprotnem primeru vpeljemo

$$z(x) = (y(x))^{1-\alpha}, \qquad z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x).$$

Če začetno enačbo delimo z $y^{-\alpha}$, dobimo

$$py'y^{-\alpha} + qy^{1-\alpha} = r,$$

oziroma

$$z' + \frac{q}{p}(1-\alpha)z = \frac{r}{p}(1-\alpha),$$

kar je nehomogena NDE prvega reda, ki jo rešimo po razdelku 9.4.

9.6 Riccatijeva enačba

Riccatijeva enačba je enačba oblike

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x),$$

ki je v splošnem ne znamo rešiti. Če uganemo neko partikularno rešitev y_p, lahko uporabimo nastavek $y = y_p + z$, ki nam enačbo reducira na

$$z' = (2ay_p + b)z + az^2,$$

kar je Bernoullijeva enačba za $p = 1$, $q = (-2ay_p + b)$, $r = a$ in $\alpha = 2$. Rešimo jo po postopku v razdelku 9.5.

9.7 Clairontova enačba

Clairontova enačba je enačba oblike

$$y = xy' + \psi(y').$$

Rešujemo jo parametrično, torej zapišemo $p = y'$ in uporabimo $dy = pdx$. Ko dobimo splošno rešitev $y = Cx + \psi(C)$, zapišemo $G(x, y, C) = y - Cx - \psi(C)$, izračunamo še singularno rešitev z enačbama $G = 0$ in $\partial_C G = 0$.

9.8 Lagrangeova enačba

Lagrangeova enačba je enačba oblike

$$y = x\phi(y') + \psi(y').$$

Rešujemo jo parametrično, torej zapišemo $p = y'$ in uporabimo $dy = pdx$. S tem se enačba prevede na linearno, ki jo rešimo kot v razdelku 9.4.

9.9 Eulerjeva enačba

Za reševanje Eulerjeve enačbe

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$$

uporabimo nastavek $y(x) = x^\lambda$. V postopku poiščemo ničle polinoma

$$q(\lambda) = a_0\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1) + a_1\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+2) + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

Rešitev je vsota funkcij

$$p(\ln x)x^\lambda$$

za realno ničlo λ in $\deg p = \deg_f \lambda - 1$. Za kompleksen λ pa

$$q_1(\ln x)x^{\Re\lambda}\cos(\Im\lambda \cdot x) \qquad\qquad q_2(\ln x)x^{\Re\lambda}\sin(\Im\lambda \cdot x).$$

9.10 Posebne nehomogene linearne NDE višjega reda

Za enačbo oblike

$$a_0 y^{(n)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = p(x)e^{\mu x}$$

je rešitev oblike $y_h + y_p$. Homogen del poiščemo kot v razdelku 7, partikularen del pa je oblike

$$y_p = e^{\mu x}q(x)x^k,$$

kjer je $\deg q = \deg p$ in $k = \deg_f \mu$ za polinom f iz razdelka 7.

Podobno rešimo tudi enačbo oblike

$$a_0 x^n y^{(n)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_n y = x^\mu p(\ln x)$$

kot $y = y_h + y_p$, kjer homogen del poiščemo kot v razdelku 9.9, partikularen pa z

$$y_p = x^\mu r(\ln x)(\ln x)^k$$

za $\deg r = \deg p$ in $k = \deg_q \mu$. Tu smo se sklicali na polinom q iz razdelka 9.9.

10 Razno

10.1 Iskanje ortogonalnih krivulj

Če imamo dano krivuljo $y(x)$, in iščemo nanjo pravokotne krivulje, prvo odvajamo predpis za to krivuljo, da dobimo enačbo $y = f(x, y')$. V tej enačbi nato zamenjamo pojavitve y' z $-1/y'$, da dobimo enačbo za ortogonalne trajektorije.

10.2 Determinanta Wronskega

Če imamo homogeno linearno NDE višjega reda

$$a_0 y^{(n)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

in zložimo bazne rešitve ter njihove odvode v matriko

$$\phi = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix},$$

lahko zapišemo determinanto Wronskega kot $W(x) = \det \phi(x)$. Zanjo velja $W'(x) = \operatorname{tr}(A) W(x)$.

V dvodimenzionalnem primeru, ko ima enačba obliko

$$y'' + py' + qy = 0,$$

lahko z determinanto Wronskega poiščemo drugo rešitev, če prvo že imamo. Če sta u in v dve linearno neodvisni rešitvi, za determinanto $W = uv' - u'v$ namreč velja $W' + pW = 0$ ter

$$v = u \int \frac{W}{u^2} dx.$$

Če imamo enačbo in eno rešitev, prvo poiščemo W z diferencialno enačbo $W' + pW = 0$ (če je $p = 0$, pride $W =$ konst., kar je popolnoma sprejemljivo), nato pa poiščemo drugo rešitev z zgornjim integralom.

Parcialne diferencialne enačbe

11 Kvazilinearna enačba prvega reda

To je enačba oblike
$$a_1 u_{x_1} + \cdots + a_n u_{x_n} = c,$$
kjer so $a_1, \ldots, a_n, c$ dovolj lepe funkcije. Običajno so podani tudi začetni pogoji $u(x) = g(x)$ za $x \in \Gamma$, kjer je Γ neka krivulja. Rešitev dobimo z reševanjem karakterističnega sistema
$$\begin{aligned}\dot{z}_y(t) &= c(x_y(t), z_y(t)),\\ \dot{x}_y(t) &= a(x_y(t), z_y(t)),\\ x_y(0) &= y,\\ z_y(0) &= g(y).\end{aligned}$$
Pri tem predpostavimo, da sta z_y in x_y le funkciji časa t, y v indeksu pa je dodaten parameter, ki nam pove, na kateri karakteristiki se nahajamo. Ko rešimo sistem, rešitve obrnemo, da dobimo $t(x)$ in $y(x)$, ki ju nato vstavimo v predpis za z. Če je začetni pogoj podan vzdolž neke karakteristične krivulje, ne dobimo dovolj informacij, da sistem razrešimo.

Drug način reševanja so prvi integrali (energije). Pri uporabi metode karakteristik iščemo predpise, ki so konstantni vzdolž rešitve, torej funkcije $E(x_1(t), \ldots, x_n(t), z(t))$, da je $\partial_t E = 0$. Potem iščemo funkcijo $H(E_1, \ldots, E_m)$, ki bo na rešitvah konstantna. Za iskanje H uporabimo začetne pogoje. Vstavimo
$$H(E_1(x(0), z(0)), E_2(x(0), z(0)), \ldots, E_m(x(0), z(0))) = 0$$
in poskusimo razrešiti. Če nam uspe, to obrnemo, da najdemo z, s čimer smo magično rešili enačbo.

12 Nelinearna enačba prvega reda

Podobno kot pri kvazilinearnih enačbah tudi nelinearne rešujemo z metodo karakteristik. Za enačbo oblike $F(x, u, \vec{\nabla}.u) = 0$ iščemo polje $t \mapsto (x(t), z(t), p(t))$, ki reši karakteristični sistem

$$\begin{aligned}\dot{p} &= -(\nabla_x + p\nabla_z)F(x,z,p)\\ \dot{z} &= p\cdot\nabla_p F(x,z,p)\\ \dot{x} &= \nabla_p F(x,z,p)\end{aligned}$$

tu sta x in p lahko vektorja (iste dimenzije), z pa je skalar. Ko najdemo rešitev sistema, vstavimo začetne pogoje (in morda njihove odvode), da dobimo funkciji $x(t,\omega)$ in $z(t,\omega)$, kjer je ω parameter karakteristike. Na koncu obrnemo v $\omega(x)$ in $t(x)$ ter vstavimo v $z(\omega,t)$, da dobimo rešitev $u(x) = z(t(x),\omega(x))$.

13 Enačbe drugega reda

Za enačbo oblike

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + f(u) = 0,$$

kjer f vsebuje odvode nižjega reda, definiramo

$$\Delta = -\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}.$$

Če je $\Delta > 0$, enačbo lahko prevedemo v obliko $w_{\xi\eta} + g(w) = 0$ tako, da rešimo diferencialno enačbo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{a}$$

oz. c v imenovalcu, če je $a = 0$. Dobimo $y_+ = f_+(x)$ in $y_- = f_-(x)$ ter izrazimo konstante integracije tako, da je $y_+ = f_+(x,\eta(x,y))$ in $y_- = f_-(x,\xi(x,y))$.

Če je $\Delta = 0$, lahko enačbo pretvorimo v obliko $w_{\xi\xi} + g(w) = 0$ tako, da rešimo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}.$$

Dobimo $y(x) = f(x,C)$ in izrazimo integracijsko konstanto v $\eta(x,y)$. Za $\xi(x,y)$ lahko vzamemo karkoli, kar je funkcijsko neodvisno od η.

Če je $\Delta < 0$, lahko enačbo pretvorimo v $w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + g(w) = 0$ z rešitvijo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm i\sqrt{-\Delta}}{a}.$$

Rešitev je kompleksna, oblike $y(x) = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$, potem vzamemo ξ in η kot realni in imaginarni del razlike $y - f(x)$.

14 Valovna enačba

Za valovno enačbo
$$u_{tt} - u_{xx} = F(t, x)$$
so običajni začetni pogoji $u(0, x) = f(x)$ in $u_t(0, x) = g(x)$. V tem primeru lahko uporabimo d'Alembertovo formulo
$$u(t, x) = \frac{1}{2}(f(x - t) + f(x + t)) + \int_{x-t}^{x+t} g(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x,t)} F(\tau, \xi) d\tau d\xi$$
za $\Delta(x, t) = \{(\tau, \xi) \,|\, 0 \leq \tau \leq t, |\xi - x| \leq t - \tau\}$.

Če imamo valovno enačbo na omejenem območju, bomo imeli težave z odbijanjem valov od roba. Pristopa tu sta dva; lahko po kosih razširjamo rešitev u, pri čemer upoštevamo informacije o robu, ali pa se pretvarjamo, da rob ne obstaja, in primerno razširimo začetni pogoj. Če to naredimo prav, bo rešitev ustrezala robnim pogojem.

Običajna energija za valovno enačbo $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ na definicijskem območju $(t, x) \in (0, \infty) \times [0, L]$ je oblike
$$E = \frac{1}{2} \int_0^L (u_t^2 + c^2 u_x^2) dx$$

15 Toplotna enačba

Toplotna enačba je oblike
$$u_t - u_{xx} = 0.$$
Rešujemo jo z ločevanjem spremenljivk $u(t, x) = T(t)X(x)$. Dobimo sistem
$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X}.$$
Ker je leva stran odvisna le od t in desna le od x, torej je ta izraz konstanta λ. Iz robnih pogojev izračunamo možne vrednosti za λ. Običajno pride $\lambda = -k^2$ za $k \in \mathbb{Z}$. Splošna rešitev bo potem (neskončna) vsota takih členov. Zahtevamo tudi, da je u realna funkcija, torej se kompleksni členi v izražavi združijo, in dobimo u kot linearno kombinacijo sinusov in kosinusov. Koeficiente v kombinaciji izračunamo s pomočjo Fourierovega razvoja začetnega pogoja.

Če imamo nehomogen problem $u_t = ku_{xx} + F(x, t)$ s pogoji $u(0, t) = a(t)$, $u(\pi, t) = b(t)$ in $u(x, 0) = f(x)$, potem rešitev sestavimo iz treh bolj enostavnih delov:

$$\begin{array}{lll}
u_t - ku_{xx} = F(x, t) & u_t = ku_{xx} & u_t = ku_{xx} \\
u(0, t) = 0 & u(0, t) = a(t) & u(0, t) = 0 \\
u(\pi, t) = 0 & u(\pi, t) = b(t) & u(\pi, t) = 0 \\
u(x, 0) = 0 & u(x, 0) = 0 & u(x, 0) = f(x)
\end{array}$$

Včasih pri reševanju pride prav energija

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} u^2 dx.$$

Če robni pogoji dajo $uu_x = 0$ na 0 in na 2π, potem je $E'(t) < 0$, torej se ta energija ne viša s časom.

16 Eliptične enačbe

Standardna energija eliptične enačbe $u_{xx} + u_{yy} = 0$ je

$$\int \left\| \vec{\nabla}.u \right\|^2 dxdy = \int (u_x^2 + u_y^2) dxdy.$$

To je skalar, za dovolj lepe probleme konstanta. Če ima enačba pred členoma še koeficiente, lahko poskusimo dodati podobne koeficiente v zgornji predpis (v upanju, da spet dobimo energijo).

17 Harmonične funkcije

Funkcija $u \in \mathcal{C}^2$ je harmonična, če je $\Delta u = 0$. Za te funkcije velja lastnost povprečne vrednosti:

$$u(z_0) = \int_{\partial K(z_0,r)} uds.$$