

# **Kako se lotiš: Diferencialnih enačb**

Patrik Žnidaršič

Prevedeno 15. februar 2024

# Navadne diferencialne enačbe

NAVADNA DIFERENCIALNA ENAČBA  $k$ -TEGA REDA je enačba oblike

$$\vec{F}(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(k)}(t)) = 0,$$

kjer je  $x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  funkcija, ki reši enačbo. Če je  $x$  vektorska funkcija ( $n > 1$ ), enačbi pravimo SISTEM NDE. Za enačbo pravimo, da je AVTONOMNA, če  $F$  ni eksplicitno odvisna od  $t$ . Neavtonomen sistem lahko spravimo v avtonomnega tako, da uvedemo še eno odvisno spremenljivko  $v(t)$ , ter enačbo  $\dot{v} = 1$ .

## 1 Prvi integral

Splošna rešitev enačbe  $y' = f(x, y)$  je enoparametrična družina funkcij  $y = y(x, C)$ . Če obstaja funkcija  $u(x, y)$ , za katero velja  $u(x, y(x, C)) = \text{konst.}$  za vsak  $C$ , jo imenujemo PRVI INTEGRAL ENAČBE. Vsaka implicitno podana krivulja  $y(x)$  z enačbo  $u(x, y) = D$ , kjer je  $u$  prvi integral neke diferencialne enačbe, je rešitev te diferencialne enačbe. Iskanje prvega integrala je torej kvečjemu močnejše od reševanja diferencialne enačbe.

Če imamo dano vektorsko polje  $F = (P, Q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , lahko poiščemo ortogonalne krivulje nanj z diferencialno enačbo

$$y' = -\frac{P}{Q}.$$

Če je polje potencialno s potencialom  $u$ , iste krivulje poiščemo z

$$y' = -\frac{\partial_x u}{\partial_y u},$$

torej je  $u$  prvi integral te enačbe. Ker potencial načeloma znamo poiskati z integralom, lahko enačbo rešimo. Če pa polje ni potencialno, mora obstajati funkcija  $\lambda = \lambda(x, y)$ , ki jo imenujemo INTEGRIRUJOČI MNOŽITELJ, za katero je polje  $(\lambda P, \lambda Q)$  potencialno. Če nam tako funkcijo uspe najti, smo enačbo rešili, njen prvi integral je enak

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \lambda P dx + \lambda Q dy.$$

Ko iščemo  $\lambda$ , si lahko pomagamo z enakostjo  $\partial_x(\lambda Q) = \partial_y(\lambda P)$ .

Včasih dobimo enačbo oblike  $Pdx + Qdy = 0$ . Če velja  $P_y = Q_x$ , je enačba EKSAKTNA, s prvih integralom  $u$ , za katerega velja  $u_x = P, u_y = Q$ . Rešitev je potem implicitno podana z nivojnico  $u = C$ . Če ni eksaktna, poskušamo najti integrirujoči množitelj.

## 2 Parametrično reševanje

Če imamo implicitno podano NDE prvega reda  $F(x, y, y') = 0$ , lahko nanjo gledamo kot na ploskev v  $\mathbb{R}^3$  s substitucijo  $p = y'$ . Potem lahko enačbo obravnavamo na tri načine:

- Če  $y$  ne nastopa v  $F$ , parametriziramo nastalo krivuljo z  $x = x(t)$  in  $p = p(t)$ . Parametrizacijo odvajamo in uporabimo dejstvo  $dy = p dx$ . Iz tega dobimo krivuljo  $x \mapsto (x, y(x))$ , ki je rešitev enačbe.
- Če  $x$  ne nastopa v  $F$ , spet parametriziramo  $y = y(t)$  in  $p = p(t)$ , ter uporabimo  $dy = p dx$ . Iz tega lahko izračunamo krivuljo  $t \mapsto (x(t), y(t))$ , ki je rešitev DE.
- Če lahko enega od  $x, y, p$  eksplicitno izraziš, ta predpis direktno vstaviš v  $dy = p dx$ , in rešitev izraziš parametrično.

## 3 Tok

Naj bo dano vektorsko polje  $V$ . TOKOVNICA tega polja je taka krivulja  $\gamma$ , da velja  $\dot{\gamma}(t) = V(\gamma(t))$ . TOK je preslikava  $(x, t) \mapsto \phi_t(x) \in \mathbb{R}^n$ , da je  $t \mapsto \phi_t(x)$  tokovnica za vsak  $x$ , in  $\phi_0(x) = x$  za vse  $x$ .

Če imamo dano polje v polarnih koordinatah  $(\dot{r}, \dot{\varphi}) = W(r, \varphi)$ , ga lahko transformiramo v kartezične koordinate z

$$V = (\dot{x}, \dot{y}) = D_\psi(\eta(t))(\dot{r}, \dot{\varphi}),$$

kjer je  $\eta(t) = (r(t), \varphi(t))$  in  $\psi(r, \varphi) = (x, y)$ .

## 4 Enačbe drugega reda

Naj bo dan sistem

$$\begin{aligned}\dot{\vec{q}} &= \vec{G}(\vec{q}, \vec{p}), \\ \dot{\vec{p}} &= \vec{F}(\vec{q}, \vec{p}).\end{aligned}$$

Če obstaja taka funkcija  $H : M \subseteq \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ , da je

$$\begin{aligned}\partial_{\vec{q}} H &= -\vec{F}, \\ \partial_{\vec{p}} H &= \vec{G},\end{aligned}$$

potem pravimo, da je sistem HAMILTONSKI, funkciji  $H$  pa pravimo HAMILTONIAN. Tedaj je  $H$  tudi prvi integral enačbe. Da je sistem hamiltonski, mora biti vektorsko polje  $(-\vec{F}, \vec{G})$  potencialno.

## 5 Cauchyjeve naloge

CAUCHYJEVA NALOGA ali ZAČETNI PROBLEM je sistem enačb

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0.\end{aligned}$$

**Izrek** (Eksistenčni izrek). *Dana je Cauchyjeva naloga  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$ . Če je  $f : C_{a,b} \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna in Lipschitzova v spremenljivki  $y$ , kjer je*

$$C_{a,b} = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b],$$

*obstaja enolična rešitev  $\tilde{y}$ , definirana na  $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ , kjer je*

$$\begin{aligned}\alpha &= \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}, \\ M &= \max_{C_{a,b}} |f(x, y)|.\end{aligned}$$

*Če je  $f \in \mathcal{C}^k$ , je tok tudi  $\mathcal{C}^k$ .*

Lipschitzov pogoj lahko zamenjamo s pogojem, da je  $f$  zvezno odvedljiva. Izrek je pomemben, ker poleg obstoja zagotavlja tudi enoličnost rešitve. Če moramo dokazati, da je rešitev tudi globalno enolična, lahko uporabo izreka verižimo od začetne točke; če dobimo, da je rešitev enolična na razdalji  $\alpha$  od začetne točke, se postavimo v točko  $\frac{1}{2}\alpha$ , tam uporabimo izrek, in (pod predpostavko, da se maksimalna razdalja ne zmanjša) dobimo obstoj in enoličnost do  $\frac{3}{2}\alpha$ . Postopek lahko potem nadaljujemo. Obstoj globalne rešitve pa lahko pokažemo tudi z naslednjo lemo:

**Lema.** *Naj rešitev Cauchyjeve naloge obstaja na nekem intervalu  $(\sigma, \omega)$  za  $\sigma, \omega \in [-\infty, \infty]$ .*

- Če je  $\omega < \infty$ , potem

$$\lim_{x \rightarrow \omega} |y(x)| = \infty.$$

- Če je  $\sigma > -\infty$ , potem

$$\lim_{x \rightarrow \sigma} |y(x)| = \infty.$$

## 6 Linearni sistemi NDE

Rešitev sistema  $\dot{x} = Ax + b$  je vsota homogene in partikularne rešitve. Za homogen sistem  $\dot{x} = Ax$  poiščemo fundamentalno rešitev

$$\phi = e^{At} = P e^{Jt} P^{-1},$$

kjer je  $A = PJP^{-1}$  Jordanov razcep. Za dobljeno matriko velja  $\dot{\phi} = A\phi$  in  $\phi(0) = I$ , njeni stolpci podajajo bazo rešitev sistema. Če je  $x(0) = x_0$  začetni pogoj, je  $\phi x_0$  rešitev začetnega problema.

Partikularno rešitev poiščemo z nastavkom

$$x_p(t) = \int_0^t \phi(t)\phi(s)^{-1}b(s)ds = Pe^{Jt} \int_0^t e^{-Js}P^{-1}b(s)ds.$$

## 7 Linearne NDE višjega reda

Za homogeno enačbo

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0$$

zapišemo karakteristični polinom

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Rešitve enačbe so vsote funkcij oblike

$$p(x)e^{\lambda_i x},$$

kjer je ničla  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  in  $\deg_f \lambda_i - 1$ , ter funkcij oblike

$$q_1(x)e^{\Re \lambda_i \cdot x} \cos(\Im \lambda_i \cdot x) \quad q_2(x)e^{\Re \lambda_i \cdot x} \sin(\Im \lambda_i \cdot x)$$

za  $\deg q_1 = \deg q_2 = \deg_f \lambda - 1$  in kompleksno ničlo  $\lambda_i$ .

Če je desna stran oblike  $p(x)e^{\mu x}$ , je postopek reševanja opisan v razdelku 9.10, za splošno desno stran pa vzamemo linearno neodvisne rešitve homogenega dela  $y_1, \dots, y_n$ , in poiščemo še partikularno rešitev z variacijo konstante

$$y_p = C_1(x)y_1 + \dots + C_n(x)y_n.$$

## 8 Variacijski račun

Dana je  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^2$  ter funkcional

$$\mathcal{L}(y) = \int_a^b L(x, y, y')dx$$

na prostoru vseh  $\mathcal{C}^2$  funkcij  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , za katere veljata robna pogoja  $y(a) = A$  in  $y(b) = B$ . Iščemo ekstreme tega funkcionala. Le-ti zadoščajo Euler-Lagrangeovi enačbi

$$L_y(x, y, y') - \partial_x L_{y'}(x, y, y') = 0,$$

kjer si pri odvajanju po  $y$  in  $y'$  (indeksa) mislimo, da sta to neodvisni spremenljivki, pri odvajanju po  $x$  ( $\partial_x$ ) pa upoštevamo  $y = y(x)$ . Ko enačbo rešiš, dobiš predpis za  $y$  z dvema konstantama; konstanti določiš tako, da predpis vstaviš v robna pogoja. Če kakšnega robnega pogoja ne poznaš, ga nadomestiš z

$$L_{y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0)) = 0,$$

kjer je  $x_0$  tisti izmed  $a, b$ , za katerega ne poznaš začetne vrednosti.

Poznamo tudi dva posebna primera:

- Če je  $L = L(x, y')$ , velja  $Ly' = \text{konst.}$ . V tem primeru ne potrebujemo vstavljati v Euler-Lagrangeovo enačbo.
- Če je  $L = L(y, y')$ , uporabimo Bertranijevo identiteto  $L - y'L_{y'} = \text{konst.}$ . V tem primeru moraš preveriti, da je dobljena rešitev dejansko rešitev Euler-Lagrangeove enačbe.

Podobno lahko delamo tudi v več dimenzijah; če je  $y = (y_1, \dots, y_n)$  iskana preslikava, preprosto uporabimo Euler-Lagrangeovo za vsako komponento posebej;

$$L_{y_i} - \partial_x(L_{y'_i}) = 0.$$

Če je  $L$  odvisen tudi od odvodov višjih redov, uporabiš Euler-Poissonovo enačbo

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\frac{d}{dx}\right)^k L_{y^{(k)}} = 0.$$

## 9 Pogosti postopki reševanja

### 9.1 Enačba z ločljivima spremenljivkama

Če imamo enačbo oblike

$$\dot{x} = f(t)g(x),$$

jo predelamo v

$$\frac{\dot{x}}{g(x)} = f(t),$$

in integriramo obe strani. Če je  $H$  primitivna funkcija  $1/g$ , in  $F$  primitivna funkcija  $f$ , velja

$$x(t) = H^{-1}(F(t) + C)$$

za poljubno konstanto  $C \in \mathbb{R}$ .

## 9.2 Enačba s homogeno desno stranjo

Če je  $\dot{x} = f(t, x)$ , kjer velja  $f(t, x) = f(\lambda t, \lambda x)$  za vse  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , vpeljemo spremenljivko

$$v = \frac{x}{t} \qquad \dot{x} = t\dot{v} + v.$$

Ker velja  $\dot{x} = f(1, v)$ , dobimo enačbo

$$\dot{v} = \frac{1}{t}(f(1, v) - v),$$

to je enačba z ločljivima spremenljivkama, nadaljuješ kot v razdelku 9.1.

## 9.3 Enačbe višjega reda

Dana je enačba  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ . Imamo tri pristope:

- Če  $F$  ni odvisna od  $y$ , znižamo red z  $z = y'$ .
- Če  $F$  ni odvisna od  $x$ , znižamo red z  $z(x) = y'(y)$ ; pri tem velja  $\partial_y z = y''/y'$ .
- Če je  $F(x, \lambda y, \dots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^k F(x, y, \dots, y^{(n)})$ , znižamo red z  $z = y'/y$ .

## 9.4 Linearna NDE prvega reda

Linearna NDE prvega reda je enačba oblike

$$y' = f(x)y + g(x).$$

Rešiš jo tako, da prvo rešiš homogeno enačbo

$$y' = f(x)y,$$

ki je enačba z ločljivimi spremenljivkami, rešitev poiščeš kot v razdelku 9.1. Vedno dobiš

$$y_h = C \exp \left( \int_a^x f(\xi) d\xi \right).$$

Splošna rešitev bo enaka vsoti homogene in partikularne rešitve. Slednjo poiščemo z nastavkom

$$y_p = C(x) \exp \left( \int_a^x f(\xi) d\xi \right),$$

postopku pravimo VARIACIJA KONSTANTE. Če nastavek vstavimo v originalno diferencialno enačbo, dobimo

$$C'(x) \exp \left( \int_a^x f(\xi) d\xi \right) = g(x).$$

Ko to integriramo, dobimo preslikavo  $C(x)$ , in rešitev

$$y = C(x) \exp \left( \int_a^x f(\xi) d\xi \right) + D \exp \left( \int_a^x f(\xi) d\xi \right),$$

kjer je  $D \in \mathbb{R}$  poljuben parameter (ki pride od homogene rešitve).

## 9.5 Bernoullijeva enačba

Bernoullijeva enačba je enačba oblike

$$p(x)y' + q(x)y = r(x)y^\alpha(x)$$

za nek  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Če je  $\alpha = 0$  ali  $\alpha = 1$ , sistem rešimo po razdelku 9.4. V nasprotnem primeru vpeljemo

$$z(x) = (y(x))^{1-\alpha}, \quad z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x).$$

Če začetno enačbo delimo z  $y^{-\alpha}$ , dobimo

$$py'y^{-\alpha} + qy^{1-\alpha} = r,$$

oziroma

$$z' + \frac{q}{p}(1-\alpha)z = \frac{r}{p}(1-\alpha),$$

kar je nehomogena NDE prvega reda, ki jo rešimo po razdelku 9.4.

## 9.6 Riccatijeva enačba

Riccatijeva enačba je enačba oblike

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x),$$

ki je v splošnem ne znamo rešiti. Če uganemo neko partikularno rešitev  $y_p$ , lahko uporabimo nastavek  $y = y_p + z$ , ki nam enačbo reducira na

$$z' = (2ay_p + b)z + az^2,$$

kar je Bernoullijeva enačba za  $p = 1$ ,  $q = (-2ay_p + b)$ ,  $r = a$  in  $\alpha = 2$ . Rešimo jo po postopku v razdelku 9.5.

## 9.7 Clairontova enačba

Clairontova enačba je enačba oblike

$$y = xy' + \psi(y').$$

Rešujemo jo parametrično, torej zapišemo  $p = y'$  in uporabimo  $dy = p dx$ . Ko dobimo splošno rešitev  $y = Cx + \psi(C)$ , zapišemo  $G(x, y, C) = y - Cx - \psi(C)$ , izračunamo še singularno rešitev z enačbama  $G = 0$  in  $\partial_C G = 0$ .

## 9.8 Lagrangeova enačba

Lagrangeova enačba je enačba oblike

$$y = x\phi(y') + \psi(y').$$

Rešujemo jo parametrično, torej zapišemo  $p = y'$  in uporabimo  $dy = p dx$ . S tem se enačba prevede na linearno, ki jo rešimo kot v razdelku 9.4.



## 9.9 Eulerjeva enačba

Za reševanje Eulerjeve enačbe

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

uporabimo nastavek  $y(x) = x^\lambda$ . V postopku poiščemo ničle polinoma

$$q(\lambda) = a_0 \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-n+1) + a_1 \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-n+2) + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

Rešitev je vsota funkcij

$$p(\ln x) x^\lambda$$

za realno ničlo  $\lambda$  in  $\deg p = \deg_f \lambda - 1$ . Za kompleksen  $\lambda$  pa

$$q_1(\ln x) x^{\Re \lambda} \cos(\Im \lambda \cdot x) \quad q_2(\ln x) x^{\Re \lambda} \sin(\Im \lambda \cdot x).$$

## 9.10 Posebne nehomogene linearne NDE višjega reda

Za enačbo oblike

$$a_0 y^{(n)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = p(x) e^{\mu x}$$

je rešitev oblike  $y_h + y_p$ . Homogen del poiščemo kot v razdelku 7, partikularen del pa je oblike

$$y_p = e^{\mu x} q(x) x^k,$$

kjer je  $\deg q = \deg p$  in  $k = \deg_f \mu$  za polinom  $f$  iz razdelka 7.

Podobno rešimo tudi enačbo oblike

$$a_0 x^n y^{(n)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = x^\mu p(\ln x)$$

kot  $y = y_h + y_p$ , kjer homogen del poiščemo kot v razdelku 9.9, partikularen pa z

$$y_p = x^\mu r(\ln x) (\ln x)^k$$

za  $\deg r = \deg p$  in  $k = \deg_q \mu$ . Tu smo se sklicali na polinom  $q$  iz razdelka 9.9.

## 10 Razno

### 10.1 Iskanje ortogonalnih krivulj

Če imamo dano krivuljo  $y(x)$ , in iščemo nanjo pravokotne krivulje, prvo odvajamo predpis za to krivuljo, da dobimo enačbo  $y = f(x, y')$ . V tej enačbi nato zamenjamo pojavitve  $y'$  z  $-1/y'$ , da dobimo enačbo za ortogonalne trajektorije.

## 10.2 Determinanta Wronskega

Če imamo homogeno linearno NDE višjega reda

$$a_0 y^{(n)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

in zložimo bazne rešitve ter njihove odvode v matriko

$$\phi = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix},$$

lahko zapišemo determinanto Wronskega kot  $W(x) = \det \phi(x)$ . Zanja velja  $W'(x) = \text{tr}(A)W(x)$ .

V dvodimenzionalnem primeru, ko ima enačba obliko

$$y'' + py' + qy = 0,$$

lahko z determinanto Wronskega poiščemo drugo rešitev, če prvo že imamo. Če sta  $u$  in  $v$  dve linearno neodvisni rešitvi, za determinanto  $W = uv' - u'v$  namreč velja  $W' + pW = 0$  ter

$$v = u \int \frac{W}{u^2} dx.$$

Če imamo enačbo in eno rešitev, prvo poiščemo  $W$  z diferencialno enačbo  $W' + pW = 0$  (če je  $p = 0$ , pride  $W = \text{konst.}$ , kar je popolnoma sprejemljivo), nato pa poiščemo drugo rešitev z zgornjim integralom.