Zbrani zapiski

Patrik Žnidaršič

Prevedeno dne 1. julij 2023

Kazalo

1 Splošna topologija

Opomba: zapiski za splošno topologijo imajo veliko napak. Z veseljem popravim vse napake, ki so mi sporočene.

1.1 Prostori in preslikave

Definicija. METRIČNI PROSTOR je množica M skupaj s funkcijo $d : M^2 \to \mathbb{R}^+$, da velja:

- $\forall x, y \in M . d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall x, y \in M . d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x, y, z \in M . d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, z)$

Vprašanje 1. Povej definicijo zveznosti za preslikave med metričnimi prostori.

Odgovor: Funkcija $f : (X, d_x) \to (Y, d_Y)$ je zvezna v točki $a \in X$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da za vse točke $x \in X$, ki so od a oddaljene za manj kot δ, velja $d(f(a), f(x)) < \varepsilon$.

Definicija. Naj bo X množica. TOPOLOGIJA na X je družina $\mathcal{T}$ podmnožic X, ki ustreza pogojem

- $\varnothing, X \in \mathcal{T}$
- $\forall T \subseteq \mathcal{T} . \bigcup T \in \mathcal{T}$
- $\forall T \subseteq \mathcal{T} . T$ končna $\implies \bigcap T \in \mathcal{T}$

Vprašanje 2. Definiraj topologijo na X.

Definicija. Elementom topologije pravimo ODPRTE MNOŽICE.

Definicija. Prostor je METRIZABILEN ali METRIČEN, če obstaja metrika, s katero je prostor porojen.

Definicija. Prostor X je TRIVIALEN, če sta edini odprti množici X in $\varnothing$.

Definicija. Prostor X je DISKRETEN, če velja $\mathcal{T} = 2^X$.

Opomba. Diskreten prostor je metrizabilen.

Definicija. Naj bo $x \in X$. Odprtim množicam, ki vsebujejo x, pravimo OKOLICE x.

Definicija. Množica $A \subset X$ je ZAPRTA, če je A^{c} odprta.

Definicija. Naj bo $x \in X$ ter $A \subseteq X$.

- x je NOTRANJA TOČKA A, če obstaja okolica $U \ni x$, da velja $U \subseteq A$.

- x je MEJNA TOČKA A, če vsaka okolica x seka tako A kot A^{c}.
- NOTRANJOST A je unija vseh odprtih množic v A.
- MEJA A je množica vseh mejnih točk A.
- ZAPRTJE A je presek vseh zaprtih nadmnožic A.
- x je STEKALIŠČE MNOŽICE A, če vsaka okolica x seka $A\backslash\{x\}$

Opomba. Ekvivalentna definicija meje: $\operatorname{Fr} A = \operatorname{Cl} A \backslash \operatorname{Int} A$.

Vprašanje 3. Definiraj naslednje pojme: zaprta množica, notranja točka, mejna točka, notranjost, meja, zaprtje, stekališče

Definicija. Naj bo $(x_n)_n$ zaporedje v X. Točka $x \in X$ je LIMITA zaporedja $(x_n)_n$, če vsaka okolica točke x vsebuje nek rep zaporedja.

Vprašanje 4. Kaj je topologija končnih komplementov? Ali je metrizabilna?

Odgovor: To je topologija, v kateri so odprte množice natanko komplementi končnih, ter cel prostor. Ni metrizabilna.

Vprašanje 5. Kako pokažeš, da je supremum metrika topološko ekvivalentna evklidski metriki na $\mathbb{R}^n$?

Odgovor: Vsaka krogla v supremum metriki vsebuje neko kroglo v evklidski metriki, vsaka ta pa vsebuje neko (manjšo) kroglo v supremum metriki.

Vprašanje 6. Dokaži, da omejenost <u>ni</u> topološka lastnost.

Odgovor: Vsaka metrika je topološko ekvivalentna metriki

$$\hat{d}(x,y) = \begin{cases} d(x,y) & d(x,y) < 1 \\ 1 & \text{sicer} \end{cases}$$

Metrični prostor s to metriko pa je omejen.

1.2 Zvezne preslikave

Definicija. Funkcija $f : X \to Y$ je ZVEZNA, če je praslika vsake odprte množice pod Y odprta pod X.

Definicija. PRESLIKAVA je zvezna funkcija.

Izrek. *Naj bo $f : X \to Y$ funkcija. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

1. *f je zvezna*
2. *Praslika glede na f od zaprte množice pod Y je zaprta množica pod X.*
3. *Za vsako množico $A \subseteq X$ velja $f_*(\overline{A}) \subseteq \overline{f_*(A)}$.*

Dokaz. Iz prve v drugo trditev in obratno je preprosto.

Dokaz iz druge trditve v tretjo: Naj bo $A \subseteq X$. Velja $A \subseteq f^*(f_*(A)) \subseteq f^*(\overline{f_*(A)})$. Ker je $f^*(\overline{f_*(A)})$ zaprta, je $\overline{A} \subseteq f^*(\overline{f_*(A)})$. Torej je $f_*(\overline{A}) \subseteq \overline{f_*(A)}$.

Dokaz iz tretje trditve v drugo: Naj bo B zaprta podmnožica Y. Tedaj $B = \overline{B} \supseteq \overline{f_*(f^*(B))} \supseteq f_*(\overline{f^*(B)})$. Torej je $f^*(B) \supseteq \overline{f^*(B)}$, torej je $f^*(B)$ zaprta pod X. □

Vprašanje 7. Dokaži, da je trditev $\forall A \subset X \,.\, f_*(\overline{A}) \subseteq \overline{f_*(A)}$ ekvivalentna pogoju za zveznost f.

Definicija. Funkcija $f : X \to Y$ je HOMEOMORFIZEM, če je bijekcija ter inducira bijekcijo med $\mathcal{T}_X$ in $\mathcal{T}_Y$.

Definicija. Prostora X in Y sta HOMEOMORFNA, če obstaja homeomorfizem $X \to Y$.

Definicija. Funkcija $f : X \to Y$ je ODPRTA, če slika odprte množice v odprte množice.

Funkcija $f : X \to Y$ je ZAPRTA, če slika zaprte množice v zaprte množice.

Vprašanje 8. Kaj velja za odprtost in zaprtost bijektivnih funkcij?

Odgovor: Če je f bijekcija, je odprta natanko tedaj, ko je zaprta.

Trditev. *Naj bo $f : X \to Y$ funkcija. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

- *f je homeomorfizem*
- *f je bijektivna, zvezna in odprta*
- *f je bijektivna, zvezna in zaprta*

Vprašanje 9. Kdaj je funkcija homeomorfizem? Podaj 3 ekvivalentne definicije.

Odgovor:

- Če je bijekcija in inducira bijekcijo med topologijama domene in kodomene.
- Če je bijekcija, zvezna in odprta
- Če je bijekcija, zvezna in zaprta

Vprašanje 10. Povej primer homeomorfizma $\mathbb{R} \to (-1, 1)$ in njegovega inverza.

Odgovor:

$$f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$$
$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

$$g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = \frac{x}{1 - |x|}$$

Vprašanje 11. Kaj pomenita oznaki S^n ter B^n?

Odgovor:

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 \leq 1\}$$
$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|^2 = 1\}$$

Definicija. TOPOLOŠKA LASTNOST je lastnost prostora, ki se ohranja pri homeomorfizmih.

1.3 Baze in predbaze

Definicija. Naj bo $x \in X$. Množica $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}$ je LOKALNA BAZA ali BAZA OKOLIC točke x, če vsaka okolica x vsebuje neko odprto množico v lokalni bazi.

Definicija. Množica $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ je BAZA prostora X, če vsako odprto množico v X lahko zapišemo kot unijo nekih množic iz $\mathcal{B}$.

Opomba. Zveznost lahko preverjamo na bazi.

Vprašanje 12. Kateri pogoji morajo veljati za množico $\mathcal{B}$, da jo lahko vzamemo za bazo (neke) topologije na X?

Odgovor: Biti mora pokritje za X, poleg tega pa mora biti presek dveh množic unija nekih elementov množice $\mathcal{B}$.

Definicija. Naj bosta X in Y topološka prostora. Topologija na $X \times Y$, generirana z bazo

$$\mathcal{B} = \{U \times V \,|\, U \in \mathcal{T}_X \wedge V \in \mathcal{T}_Y\},$$

se imenuje PRODUKTNA TOPOLOGIJA.

Vprašanje 13. Kako definiraš produktno topologijo z uporabo baz za X in Y?

Odgovor: Množica

$$\mathcal{B} = \{U \times V \,|\, U \in \mathcal{B}_X \wedge V \in \mathcal{B}_Y\}$$

je baza za $\mathcal{T}_{X \times Y}$.

Vprašanje 14. Kakšni sta projekciji $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ ter $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$?

Odgovor: Zvezni in odprti.

Definicija. Množica $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$ je PREDBAZA topologije $\mathcal{T}$, če je $\mathcal{P}$ pokritje X, in če je množica vseh končnih presekov elementov $\mathcal{P}$ baza za $\mathcal{T}$.

Vprašanje 15. Ali lahko zveznost in odprtost preslikave preverjamo le na bazi? Kaj pa le na predbazi?

Odgovor: Oboje lahko preverjamo na bazi, na predbazi pa lahko preverjamo le zveznost.

Vprašanje 16. Kako definiramo produktno topologijo s predbazami?

Odgovor: Za elemente predbaze vzamemo trakove $U \times Y$ oz. $X \times V$, kjer sta U in V odprti množici pod pripadajočima prostoroma. Ker je presek takih trakov škatla, je topologija ekvivalentna običajni produktni topologiji.

Vprašanje 17. Dokaži: funkcija $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ je zvezna natanko tedaj, ko so zvezne njene komponente.

Odgovor:

V desno: Če je f zvezna, je za vsak i tudi $\mathrm{pr}_i \circ f = f_i$ zvezna.

V levo: Naj bo U predbazna množica za produkt. Tedaj velja $U = \mathrm{pr}_i^*(V)$ za neka i in V^{odp}. Torej je $f^*(U) = f^*(\mathrm{pr}_i^*(V)) = f_i^*(V)$ odprta.

Definicija. Prostor X je 1-ŠTEVEN, če ima vsaka točka $x \in X$ neko števno bazo okolic.

Definicija. Prostor X je 2-ŠTEVEN, če ima neko števno bazo.

Definicija. Množica $A \subseteq X$ je POVSOD GOSTA, če seka vsako odprto množico v X.

Definicija. Prostor X je SEPARABILEN, če v njem obstaja kakšna števna gosta podmnožica.

Izrek. *Naj bo M metričen prostor. Tedaj je 2-števen natanko tedaj, ko je separabilen.*

Dokaz. V desno: Iz vsake bazične okolice si izberemo neko točko.

V levo: Naj bo A povsod gosta v X. Naj bo $\mathcal{B} = \{K(x, q) \,|\, x \in A, q \in \mathbb{Q}^+\}$.

Naj bo U okolica točke $x \in X$. Tedaj vsebuje neko kroglo $K(x, r)$, krogla $K(x, \frac{r}{3})$ pa vsebuje neko točko $a \in A$. Za $q \in (\frac{r}{3}, \frac{r}{2}) \cap \mathbb{Q}$ velja $x \in K(a, q) \subseteq K(a, \frac{r}{2}) \subseteq U$. Dobili smo števno bazo za X. $\square$

Vprašanje 18. Dokaži, da je metrični prostor 2-števen natanko tedaj, ko je separabilen.

1.4 Podprostori

Definicija. Naj bo X topološki prostor in $A \subseteq X$ podmnožica. Topologijo $\mathcal{T}_A = \{A \cap U \,|\, U \in \mathcal{T}_X\}$ imenujemo PODEDOVANA TOPOLOGIJA, dvojico $(A, \mathcal{T}_A)$ pa TOPOLOŠKI PODPROSTOR.

Vprašanje 19. Kaj je topološki podprostor?

Vprašanje 20. Kdaj je množica $B \subseteq A \subseteq X$ zaprta pod A? Dokaži.

Odgovor: Natanko tedaj, ko obstaja $F^{\text{zap}} \subseteq X$, da velja $B = A \cap F$.

B je zaprta v A natanko tedaj, ko je $A \backslash B$ odprta v A. To je natanko tedaj, ko je $A \backslash B = U \cap A$ za nek $U \in \mathcal{T}_X$. Velja $B = A \cap U^{\mathsf{c}}$.

Če je $B = F \cap A$, je F^{c} odprta v X in $F^{\mathsf{c}} \cap A$ odprta v A. Torej je $F \cap A$ zaprta v A.

Trditev. *Naj bo $B \subseteq A \subseteq X$. Veljajo naslednje formule:*

- $\operatorname{Cl}_A B = A \cap \operatorname{Cl}_X B$
- $\operatorname{Int}_A B \supseteq A \cap \operatorname{Int}_X B$

- $\mathrm{Fr}_A B \subseteq A \cap \mathrm{Fr}_X B$

Dokaz. Naj bo $x \in \mathrm{Cl}_A B$. Tedaj vsaka okolica x seka B. Okolice v A so natanko okolice v X, sekane z A, torej vsaka okolica x v X seka B (ker je $x \in A$).

Naj bo $x \in A \cap \mathrm{Cl}_X B$. Tedaj vsaka okolica x v X seka B. Ker je $x \in A$, vsaka okolica x v A seka B.

Naj bo $x \in A \cap \mathrm{Int}_X B$. Tedaj obstaja okolica x v X, ki je vsebovana v B. Ta okolica, sekana z A, je okolica x v A, ki je vsebovana v B.

Naj bo $x \in \mathrm{Fr}_A B$. Tedaj $x \in A$ in vsaka okolica x v A seka tako B kot $A \backslash B$. Ker je $A \subseteq X$, bo vsaka okolica x v X sekala tako B kot $X \backslash B$. □

Vprašanje 21. Postavi inkluzije med $\mathrm{Cl}_X B, \mathrm{Cl}_A B, \mathrm{Fr}_X B, \mathrm{Fr}_A B, \mathrm{Int}_X B, \mathrm{Int}_A B$ za $B \subseteq A \subseteq X$.

Vprašanje 22. Kaj velja za odprte množice odprtega podprostora? Ali velja analogna trditev tudi za zaprte množice zaprtega podprostora?

Odgovor: So odprte natanko tedaj, ko so odprte v večjem prostoru. Da.

Vprašanje 23. Dokaži, da je zožitev zvezne funkcije na podprostor zvezna.

Odgovor: Zožitev je le kompozitum $f \circ i$, kjer je i inkluzija.

Inkluzija je zvezna, ker je praslika odprte množice U, $i^*(U) = A \cap U$, odprta v A.

Definicija. Topološka lastnost je DEDNA, če se prenese na vse topološke podprostore.

Definicija. Topološka lastnost je PRODUKTNA, če se prenese na produkte.

Vprašanje 24. Določi, če so naslednje lastnosti dedne: separabilnost, 2-števnost, diskretnost, trivialnost, metrizabilnost, 1-števnost

Odgovor:

Separabilnost je dedna le na odprte podprostore, ostale so dedne.

Definicija. Družina funkcij $f_\lambda : X_\lambda \to Y$ je USKLAJENA, če se funkcije paroma ujemajo na presekih X_λ.

Lema. *Naj bo $\{X_\lambda\}_\lambda$ odprto pokritje X. Naj bo $A \subseteq X$. A je odprt v X natanko tedaj, ko je za vsak λ množica $X_\lambda \cap A$ odprta v X_λ.*

Dokaz. V desno: Če je A odprt, so odprti vsi njegovi končni preseki.

V levo: Velja

$$A = \bigcup_{\lambda} X_\lambda \cap A.$$

Torej je A unija odprtih množic. $\square$

Definicija. Pokritje $\{X_\lambda\}_\lambda$ je LOKALNO KONČNO, če ima vsaka točka $x \in X$ okolico, ki seka le končno mnogo X_λ.

Lema. *Naj bo $\{X_\lambda\}_\lambda$ lokalno končno zaprto pokritje X. Naj bo $A \subseteq X$. Tedaj je A zaprta v X natanko tedaj, ko je $X_\lambda \cap A$ zaprta v X_λ za vse λ.*

Dokaz. V desno: Presek dveh zaprtih množic je zaprta množica.

V levo: Naj bo $x \in A^{\mathsf{c}}$. Tedaj obstaja okolica $U \ni x$, ki seka končno mnogo X_λ, imenujmo jih $X_{\lambda_1}, \ldots, X_{\lambda_n}$. Za vsak $i = 1, \ldots, n$ je $X_{\lambda_i} \cap A$ zaprt v X_{λ_i}, torej tudi v X. Potem je

$$U \cap \bigcap_{i=1}^{n} (X_{\lambda_i} \cap A)^{\mathsf{c}}$$

odprta okolica x, ki ne vsebuje A. Torej je A^{c} odprta, torej je A zaprta. $\square$

Vprašanje 25. Dokaži, da za lokalno končno zaprto pokritje X_λ velja: če je $A \cap X_\lambda$ zaprta v X_λ za vse λ, je A zaprta v X.

Izrek. *Naj bo $\{X_\lambda\}_\lambda$ pokritje, ki je bodisi odprto bodisi lokalno končno zaprto. Naj bo $f_\lambda : X_\lambda \to Y$ usklajena družina zveznih funkcij. Tedaj obstaja natanko določena zvezna preslikava $f : X \to Y$, za katero je skrčitev na X_λ enaka f_λ.*

Dokaz. Obstoj in enoličnost sledita iz usklajenosti. Dokazati moramo le zveznost.

Naj bo $U^{\mathrm{odp}} \subseteq Y$ Če je pokritje odprto, je za vsak λ tudi $X_\lambda \cap f^*(U) = (f|_{X_\lambda})^*(U) = f_\lambda^*(U)$ odprta v X. Po lemi je potem tudi $f^*(U)$ odprta.

Naj bo $F^{\mathrm{zap}} \subseteq Y$. Če je pokritje zaprto, je $X_\lambda \cap f^*(F) = f_\lambda^*(F)$ zaprta v X, torej je po lemi $f^*(F)$ zaprta v X. $\square$

Vprašanje 26. Povej in dokaži izrek o odsekoma definiranih preslikavah.

Definicija. Preslikava $f : X \to Y$ je VLOŽITEV, če je homemorfizem na svojo sliko s podedovano topologijo.

Trditev. *Naj bo $f : X \to Y$ injektivna zvezna preslikava. Če je $f_*(X)$ odprta v Y, je f vložitev natanko tedaj, ko je odprta. Če je $f_*(X)$ zaprta v Y, je f vložitev natanko tedaj, ko je zaprta.*

Vprašanje 27. Dokaži: če je $f : X \to Y$ injektivna zvezna preslikava in $f_*(X)$ odprta v Y, je f odprta natanko tedaj, ko je vložitev.

Odgovor:

Če je $f_*(X)$ odprta v Y, je za vsak $U^{\text{odp}} \subseteq X$ množica $f_*(U)$ odprta v $f_*(X)$ natanko tedaj, ko je odprta v Y. Če je f vložitev, je homeomorfizem na sliko in zato odprta v obeh kodomenah. Če je f odprta, je homeomorfizem na sliko, torej vložitev.

Vprašanje 28. Kateri pomembni razred funkcij med metričnimi prostori so avtomatsko vložitve?

Odgovor: Izometrije.

1.5 Ločljivost

Definicija. Naj bo X topološki prostor.

- X je T_0, če za vsak par točk eno loči od druge
- X je T_1, če loči točke
- X je T_2, če ostro loči točke
- X je T_3, če ostro loči točke od zaprtih množic
- X je T_4, če ostro loči zaprte množice

Definicija. Naj bo X topološki prostor.

- X je Kolmogorov, če je T_0.
- X je Fréchetov, če je T_1.
- X je Hausdorffov, če je T_2.
- X je regularen, če je T_3 in T_0.
- X je normalen, če je T_4 in T_1.

Vprašanje 29. Dokaži: V Fréchetovem prostoru so enojci zaprti.

Odgovor: Naj bo X Fréchetov prostor, in $x \in X$. Naj bo $x' \in \{x\}^{\mathsf{c}}$. Tedaj obstajata okolici x, x', ki ju ločita. Okolica x' je vsebovana v $\{x\}^{\mathsf{c}}$. Torej je $\{x\}^{\mathsf{c}}$ odprt.

Trditev. *Naj bo X topološki prostor. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

- *X je Hausdorffov.*
- *Za vsak $x \in X$ je presek zaprtja vseh okolic x enak $\{x\}$.*
- *Diagonala je zaprt podprostor v $X \times X$.*

Dokaz. Naj bo X Hausdorffov in $x, y \in X$ različni točki. Tedaj obstajata okolici U, V, ki ju ostro ločita; to pomeni, da y ni v $\overline{U}$, torej y ni v preseku zaprtij vseh okolic x.

Naj bo $(x, y) \in X \times X$ zunaj diagonale. Obstaja odprta okolica x, katere zaprtje ne vsebuje y (sicer bi bil y v preseku zaprtij okolic x). $U \times \overline{U}^{\mathsf{c}}$ je odprta okolica (x, y), ki ne seka diagonale.

Naj bosta $x, y \in X$. Obstaja škatlasta okolica $U \times V$ točke (x, y), ki ne seka diagonale. Torej $U \cap V = \varnothing$. Ti odprti množici ostro ločita x in y. □

Vprašanje 30. Dvakrat karakteriziraj Hausdorffovo lastnost in dokaži karakterizaciji.

Izrek. *Naj bo Y Hausdorffov prostor.*

1. *Točka $y \in Y$ je stekališče množice $A \subseteq Y$ natanko tedaj, ko vsaka okolica y vsebuje neskončno mnogo točk iz A.*
2. *Zaporedje v Y ima največ eno limito.*
3. *Naj bosta $f, g : X \to Y$ zvezni. Množica rešitev enačbe $f(x) = g(x)$ je zaprta.*
4. *Če se zvezni preslikavi $f, g : X \to Y$ ujemata na gosti podmnožici X, se ujemata na X.*
5. *Graf zvezne preslikave $f : X \to Y$ je zaprt podprostor $X \times Y$.*

Dokaz.

1. Naj bo $y \in Y$ stekališče $A \subseteq Y$. Recimo, da vsaka okolica y vsebuje le končno mnogo točk iz A. Naj bo U neka okolica y. Množico A seka v točkah $y_1, y_2, \ldots, y_n$; za vsako od teh točk najdemo okolico $U_i \ni y$, ki ne vsebuje y_i. Tedaj je $U \cap U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$ ne vsebuje nobenega elementa iz A; torej y ni stekališče.
2. Recimo, da ima zaporedje $(y_n)_n$ dve različni limiti, y_1 in y_2. Tedaj obstajata odprti množici U, V, ki ostro ločita ti točki. Obe U in V morata vsebovati nek rep zaporedja, kar pa ni mogoče, ker sta disjunktni.
3. Funkcija $(f, g) : X \to Y \times Y$ je zvezna. Množica točk ujemanja je praslika diagonale, torej je zaprta.
4. Množica točk ujemanja je zaprta; ker je povsod gosta v X, je to kar cel X.
5. Definiramo $u(x, y) = f(x)$ ter $v(x, y) = y$. Množica točk ujemanja u in v je zaprta, je pa ravno iskani graf.

□

Vprašanje 31. Povej posledice Hausdorffove lastnosti za stekališča, limite in preslikave, ter jih dokaži.

Izrek. *Naj bo X 1-ševen in Y Hausdorffov. Potem je funkcija $f : X \to Y$ zvezna natanko tedaj, ko za vsako konvergentno zaporedje $(x_n)_n$ v X velja*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

Dokaz. V desno: Naj $(x_n)_n$ konvergira k x. Naj bo U okolica $f(x)$ v Y. $f^*(U)$ je okolica x, torej vsebuje rep zaporedja $(x_n)_n$; torej U vsebuje rep zaporedja $(f(x_n))_n$.

V levo: Naj bo $A \subseteq X$ in $x \in \overline{A}$. Naj bo $U_1, U_2, \ldots$ baza okolic za x. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Izberemo točko iz $A \cap U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$, ter jo proglasimo za x_n. Konstruirali smo zaporedje, ki konvergira proti točki x, za katerega velja $f(x_n) \in A$ za vse n. $(f(x_n))_n$ je zaporedje v $f_*(A)$. Če konvergira, ima limito v $\overline{f(A)}$. Tedaj velja $f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) \in \overline{f(A)}$. Torej za vsak $A \subseteq X$ velja $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, torej je f zvezna. □

Vprašanje 32. Kdaj lahko zamenjaš limito in funkcijo? Natančno povej izrek in ga dokaži.

Izrek. *Tihonov Regularen 2-števen prostor je normalen.*

Dokaz. Naj bosta A, B zaprti množici v X. Za vsako točko x lahko najdemo bazično okolico U, ki ne seka neke okolice B, torej $\overline{U}$ ne seka B. Ko to storimo za vse točke iz A, dobimo števno pokritje A z množicami, katerih zaprtja ne sekajo B. Podobno naredimo za B in označimo množice z V_i.

Torej $U = \bigcup_i U_i$ in $V = \bigcup_i V_i$ ločita A in B, a ne nujno ostro. Definiramo

$$U_n' = U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}$$

$$V_n' = V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}$$

Množice U_i' in V_i' so odprte, ker so končni preseki odprtih množic. Ker vsaka točka A pripada nekemu U_i in nobenemu V_j, je U_i' pokritje za A. Podobno je V_i' pokritje za B.

Vsako točko v preseku $U \cap V$ smo na nekem koraku odšteli bodisi iz vseh naslednjih U_i' bodisi iz vseh naslednjih V_j'; torej je v natanko eni izmed $U' = \bigcup_i U_i'$ ali $V' = \bigcup_i V_i'$. □

Vprašanje 33. Povej in dokaži Tihonov izrek.

Trditev. *Prostor X je T_3 natanko tedaj, ko za vsak $x \in X$ in vsako odprto okolico U za x obstaja taka odprta množica V, da velja $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Vprašanje 34. Karakteriziraj lastnost T_3.

Trditev. *Regularnost je produktna lastnost.*

Dokaz. Dokazati je treba le, da je T_3 produktna lastnost. Naj bo W okolica točke (x, x') v $X \times X'$. W vsebuje neko škatlasto okolico $U \times U'$ točke (x, x').

Ker je X regularen, obstaja okolica $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Podobno obstaja okolica $x' \in V' \subseteq \overline{V'} \subseteq U'$.

Zaprtje množice $V \times V'$ je vsebovano v $U \times U'$, torej tudi v W. $\square$

Vprašanje 35. Dokaži, da je regularnost produktna lastnost.

Izrek. *Metričen prostor je normalen.*

Dokaz. Naj bosta A, B disjunktni zaprti množici. Definiramo $U = \{x \in X \mid d(A, x) < d(B, x)\}$ in $V = \{x \in X \mid d(A, x) > d(B, x)\}$.

Očitno sta U in V disjunktni ter vsebujeta eno izmed A, B. Preverimo še, da sta odprti.

Naj bo $x \in U$. Definiramo $r = \frac{1}{2}(d(B, x) - d(A, x)) > 0$. Za $y \in K(x, r)$ velja $d(A, y) < d(A, x) + r = \frac{1}{2}(d(B, x) + d(A, x))$. Velja tudi $d(B, x) < d(B, y) + r$, torej je $d(B, y) > d(B, x) - r = \frac{1}{2}(d(A, X) + d(B, x))$. Ker je $d(A, y) < d(B, y)$, velja $y \in U$, torej je x notranja točka.

Analogno je V odprta. $\square$

Vprašanje 36. Dokaži, da je vsak normalen prostor Hausdorffov.

Odgovor: Naj bosta $x, y \in X$. Množici $\{x\}, \{y\}$ sta zaprti, torej jih ostro ločimo.

Trditev. *Normalnost je dedna na zaprte podprostore.*

Dokaz. Naj bo A zaprt podprostor normalnega prostora X. Če sta B, C disjunktna zaprta podprostora A, sta taka tudi v X; torej jih lahko ostro ločimo. $\square$

Vprašanje 37. Ali je normalnost dedna ali produktna? Če da, dokaži.

Trditev. *Prostor X je T_4 natanko tedaj, ko za vsako zaprto množico $A \subseteq X$ in vsako okolico $U \supseteq A$ obstaja taka odprta množica V, da velja $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

1.6 Povezanost

Definicija. Prostor X je NEPOVEZAN, če obstajata odprti množici U in V, da je X disjunktna unija $U \cup V$.

Definicija. Prostor je POVEZAN, če ni nepovezan.

Trditev. *Naslednje trditve so ekvivalentne:*

- *Prostor X je nepovezan*
- *Prostor X lahko zapišemo kot disjunktno unijo dveh zaprtih množic*
- *V X obstaja prava neprazna podmnožica, ki je hkrati odprta in zaprta.*
- *Obstaja surjektivna preslikava $f : X \to \{0, 1\}$*

Dokaz. Iz 1 sledi 2: Če je $X = U \cup V$, je $U = V^{\mathsf{c}}$ odprta in $V = U^{\mathsf{c}}$ zaprta.

Iz 2 sledi 3: Če je $X = A \cup B$, je A zaprta in $A = B^{\mathsf{c}}$ odprta.

Iz 3 sledi 4: Če je A odprta in zaprta, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$. Funkcija je surjektivna, je pa tudi zvezna: $f^*(\{0\}) = A$, $f^*(\{1\}) = A^{\mathsf{c}}$, ki je odprta, ker je komplement zaprte.

Iz 4 sledi 1: $U = f^*(\{0\}), V = f^*(\{1\})$. To sta disjunktni odprti množici, njuna unija je X, ker je f celovita. $\square$

Vprašanje 38. Karakteriziraj nepovezanost.

Vprašanje 39. Dokaži: v $\mathbb{R}$ so povezani natanko intervali.

Odgovor: Naj bo J interval. Recimo, da je $J = U \cup V$ razcep. Obstaja $a \in U, b \in V$. BŠS $a < b$. Definiramo $c := \sup\{x \in J \,|\, [a, x) \subseteq U\}$. Ker je $a \leq c \leq b$, je $c \in J$; ker je U zaprta, je $c \in U$. Ker je U odprta, je za nek $r > 0$ tudi $(c - r, c + r) \in U$, to pa je protislovje s supremumom.

Recimo, da A ni interval. Potem obstajajo točke $a < c < b$, da je $a, b \in A$ in $c \notin A$. $U := \{x \in A \,|\, x < c\}, V := \{x \in A \,|\, x > c\}$ je razcep A.

Izrek. *Zvezna slika povezanega prostora je povezan prostor.*

Dokaz. Recimo, da je X povezan, $f : X \to Y$ zvezna in $f_*(X)$ nepovezan. Potem obstaja zvezna surjekcija $g : f_*(X) \to \{0, 1\}$. $g \circ f$ je zvezna surjekcija $X \to \{0, 1\}$. $\rightarrow\!\leftarrow$ $\square$

Vprašanje 40. Dokaži: zvezna slika povezanega prostora je povezana.

Vprašanje 41. Povej izrek o vmesni vrednosti.

Odgovor: Naj bo $f : X \to \mathbb{R}$ zvezna in X povezan. Potem za vsaki $x, x' \in X$ funkcija f zavzame vse vrednosti med $f(x)$ in $f(x')$.

Izrek. *Naj bo $\{A_\lambda\}_\lambda$ družina povezanih podprostorov v povezanem prostoru X z nepraznim presekom. Tedaj je $\bigcup_\lambda A_\lambda$ povezan.*

Dokaz. Naj bo $x_0 \in \cap_\lambda A_\lambda$ in $f : \bigcup_\lambda A_\lambda \to \{0,1\}$ zvezna preslikava. Ker so prostori povezani, velja $f(x) = f(x_0)$ za vse $x \in A_\lambda$, torej za vse x v uniji. Torej prostor ni nepovezan. $\square$

Vprašanje 42. Kdaj je unija povezanih prostorov povezana? Dokaži.

Vprašanje 43. Dokaži, da je povezanost produktna lastnost.

Odgovor: Za $x \in X$ ter $y \in Y$ so prostori $\{x\} \times Y \approx Y$ ter $X \times \{y\} \approx X$ povezani. Torej so povezane vse množice oblike $\{x\} \times Y \cup X \times \{y\}$, ker imajo neprazen presek.

Naj bo $x_0 \in X$. Družina množic $\{(X \times \{y\}) \cup (\{x_0\} \times Y) \,|\, y \in Y\}$ ima neprazen presek, njena unija pa je $X \times Y$.

Vprašanje 44. Kaj velja za povezanost zaprtja?

Odgovor: Če je A povezana množica in $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, je B povezana množica.

Vprašanje 45. Kako je definiran Varšavki lok?

Odgovor: L naj bo graf funkcije $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ za $x \in [-1, 0)$. Varšavki lok je tedaj $\overline{L}$.

Definicija. Prostor X je POVEZAN S POTMI, če za vsaki točki $x, x' \in X$ obstaja zvezna pot $\gamma : [0,1] \to X$, da velja $\gamma(0) = x$ in $\gamma(1) = x'$.

Opomba. Zvezna slika s potmi povezanega prostora je povezana s potmi.

Vprašanje 46. Povej primer s potmi povezanega prostora, katerega zaprtje ni povezano s potmi.

Odgovor: Spirala $r = 1 - \frac{1}{\phi}$.

Vprašanje 47. Dokaži: če je prostor povezan s potmi, je povezan.

Odgovor: Naj bo $x_0 \in X$. Za vsak $x \in X$ obstaja zvezna pot $\gamma : [0,1] \to X$, da velja $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x$. Ker je $[0,1]$ povezan, je $\gamma([0,1])$ povezan.

X je unija slik vseh poti. Ker imajo neprazen presek $\{x_0\}$, je X povezan.

Definicija. KOMPONENTA $C(x)$ točke $x \in X$ je unija vseh povezanih podmnožic, ki vsebujejo x.

Vprašanje 48. Dokaži: komponente so zaprte podmnožice.

Odgovor: Zaprtje povezane množice je povezana množica.

Izrek. *Komponente prostora X določajo particijo X na disjunktne povezane zaprte množice. Slika komponente poljubne zvezne preslikave $f : X \to Y$ je v celotni znotraj neke komponente Y.*

Definicija. Prostor je POPOLNOMA NEPOVEZAN, če so vse njegove komponente točke.

Vprašanje 49. Povej primer popolnoma nepovezanega prostora, katerega komponente niso odprte.

Odgovor: $\mathbb{Q}$.

Definicija. Prostor X je LOKALNO POVEZAN, če ima bazo iz povezanih množic.

Trditev. *Prostor X je lokalno povezan natanko tedaj, ko so komponente vsake odprte množice v X odprte.*

Dokaz. V desno: Naj bo $\mathcal{B}$ baza iz povezanih množic. Naj bo x iz komponente v neki odprti podmnožici X. Tedaj obstaja bazna okolica x, ki je povezana. Torej je komponenta odprta.

V levo: Za bazo vzamemo družino vseh podmnožic X, ki so komponenta neke odprte množice. $\square$

Vprašanje 50. Karakteriziraj lokalno povezanost in dokaži karakterizacijo.

Definicija. Za $x \in X$ je $\tilde{C}(x)$ unija vseh s potmi povezanih podmnožic X, ki vsebujejo x. Pravimo ji KOMPONENTA ZA POVEZANOST S POTMI.

Definicija. Prostor X je LOKALNO POVEZAN S POTMI, če ima bazo iz s potmi povezanih množic.

Izrek. *Če je X lokalno povezan s potmi, njegove komponente sovpadajo s komponentami za povezanost s potmi.*

Dokaz. Za $x \in X$ je $\tilde{C}(x) \subseteq C(x)$, torej moramo pokazati le drugo inkluzijo.

Ker je X lokalno povezan s potmi, so komponente za povezanost s potmi odprte. Ker je vsaka taka komponenta komplement unije vseh ostalih, so tudi zaprte; to pa je možno le, če velja $C(x) = \tilde{C}(x)$. $\square$

Vprašanje 51. Kaj velja za komponente prostora, ki je lokalno povezan s potmi? Dokaži.

1.7 Kompaktnost

Definicija. Prostor X je KOMPAKTEN, če ima vsako odprto pokritje X končno podpokritje.

Opomba. Kompaktnost lahko preizkušamo na baznih množicah.

Vprašanje 52. Dokaži: v kompaktnem prostoru ima vsaka neskončna množica stekališče.

Odgovor:

Recimo, da A nima stekališča v X, in je X kompakten. Potem za vsako točko $x \in X$ obstaja okolica U_x, ki vsebuje le končno mnogo elementov A. Te množice tvorijo pokritje, torej obstaja končno podpokritje; torej ima A končno mnogo elementov.

Vprašanje 53. Dokaži: kompaktnost je produktna lastnost.

Odgovor: Naj bosta X in Y kompaktna. Omejimo se lahko na pokritja s škatlastimi množicami. Naj bo $\{U_\lambda \times V_\mu\}_{\lambda,\mu}$ pokritje $X \times Y$.

Za vsak $x \in X$ je podprostor $\{x\} \times Y$ homeomorfen Y, zato kompakten. Tedaj obstaja končna poddružina zgornje, ki pokriva $\{x\} \times Y$. Označimo z U_x (končen) presek vseh množic U_λ, ki sodelujejo v tem končnem podpokritju. Dobljeno podpokritje krije tudi $U_x \times Y$.

U_x tvorijo odprto pokritje X, torej obstaja končno podpokritje $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Unija pripadajočih podpokritij $U_X \times Y$ je končno podpokritje $X \times Y$.

Vprašanje 54. Povej in dokaži Bolzano-Weierstrassov izrek.

Odgovor: Vsako omejeno zaporedje v $\mathbb{R}^n$ ima stekališče.

Kompaktnost je produktna, torej je produkt zaprtih intervalov kompakten. Ker je zaporedje omejeno, je vsebovano v nekem takem produktu. Ker je množica točk zaporedja neskončna v kompaktu, ima stekališče.

Vprašanje 55. Dokaži: kompaktna podmnožica metričnega prostora je omejena.

Odgovor: Naj bo $x \in K$. Množica $\{K(x, r) \,|\, r > 0\}$ je pokritje, torej obstaja končno podpokritje.

Vprašanje 56. Dokaži: kompaktnost je dedna na zaprte podprostore.

Odgovor: Naj bo $A^{\text{zap}} \subseteq K$. Naj bo $\{U_\lambda\}_\lambda$ odprto pokritje A. Tedaj je $\{U_\lambda\}_\lambda \cup A^{\mathsf{c}}$ odprto pokritje X.

Vprašanje 57. Dokaži: v Hausdorffovem prostoru topologija ostro loči kompakte od točk.

Odgovor: Naj bo K kompakt in $x \notin K$ točka zunaj njega. Za vsak $y \in K$ obstajata množici U_y, V_y, ki sta okolici x oz. y.

$\{V_y\}_y$ je odprto pokritje K, torej obstaja končno podpokritje $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$. Množica $U_{y_1} \cap \ldots \cap U_{y_n}$ je okolica x, množica $V_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n}$ pa je okolica K. Ti okolici sta disjunktni.

Vprašanje 58. Dokaži: kompaktna podmnožica v T_2 prostoru je zaprta.

Odgovor: Naj bo $x \in K^{\mathsf{c}}$. Ker v Hausdorffovem prostoru topologija ostro loči kompakte od točk, obstaja okolica x, ki ne seka K.

Vprašanje 59. Dokaži: kompakten Hausdorffov prostor je normalen.

Odgovor: V kompaktnem Hausdorffovem prostoru kompaktne podmnožice sovpadajo z zaprtimi.

Naj bosta A, B kompaktni podmnožici X. Za vsak $x \in A$ obstajata okolici U_x, V_x, ki ostro ločita x in B.

$\{U_x\}_x$ je odprto pokritje, torej obstaja končno podpokritje $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$. Tedaj sta $U_{x_1} \cup \ldots \cup U_{x_n}$ ter $V_{x_1} \cap \ldots \cap V_{x_n}$ odprti množici, ki ostro ločita A in B.

Vprašanje 60. Kaj pravi Heine-Borel-Legesgueov izrek? Dokaži ga.

Odgovor: Kompakti v $\mathbb{R}^n$ so natanko zaprte in omejene množice.

Če je K kompakt, je omejen (velja v vseh metričnih prostorih) in zaprt (velja v vseh T_2 prostorih).

Če je A zaprta in omejena množica, obstaja škatlasta množica (produkt zaprtih intervalov), znotraj katere je. To je kompaktna množica (kompaktnost je produktna, zaprt interval je kompakten po lemi o pokritju), A je njena zaprta podmnožica. Torej je A kompaktna.

Vprašanje 61. Karakteriziraj kompaktnost z zaprtimi množicami.

Odgovor: X je kompakten natanko tedaj, ko ima vsaka družina zaprtih množic s praznim presekom v X končno poddružino s praznim presekom.

Vprašanje 62. Povej Cantorjev izrek.

Odgovor: Vsako padajoče zaporedje nepraznih zaprtih intervalov ima neprazen presek. Če velikost intervalov konvergira k 0, je v preseku samo ena točka.

Izrek. *Zvezna slika kompakta je kompakt.*

Izrek. Lebesgueova lema *Za vsako odprto pokritje metričnega kompakta obstaja $\lambda > 0$, da vsaka krogla s polmerom λ leži v celoti v nekem elementu pokritja.*

Dokaz. Naj bo $\{U_\lambda\}_\lambda$ pokritje X. Obstaja končno podpokritje $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Preslikava $x \mapsto \max_j\{d(x, U_j^\mathsf{c})\}$ je zvezna (indukcija). Označimo jo z f.

Ker je $U_1, U_2, \ldots, U_n$ pokritje, je $f > 0$. Funkcija na kompaktu zavzame minimum, torej lahko vzamemo $\lambda = \min f$. □

Vprašanje 63. Povej in dokaži Lebesgueovo lemo.

Vprašanje 64. Dokaži: če sta X, Y metrična in X kompakten, je zvezna preslikava $f : X \to Y$ enakomerno zvezna.

Odgovor: Definiramo pokritje $\{f^*(K(y, \frac{\varepsilon}{2}))\}_y$. Za δ tedaj vzamemo Lebesgueovo število tega pokritja.

Vprašanje 65. Dokaži: vsaka zvezna preslikava iz kompakta v T_2 prostor je zaprta.

Odgovor: Če je X kompakt, so njegove zaprte podmnožice kompaktne; torej so njihove slike kompaktne. Ker je kodomena Hausdorffova, je kompakt zaprt.

Definicija. Odprta množica U je RELATIVNO KOMPAKTNA, če je $\overline{U}$ kompaktna.

Definicija. Prostor X je LOKALNO KOMPAKTEN, če ima bazo iz relativno kompaktnih množic.

Izrek. *Hausdorffov prostor, v katerem je vsaka točka vsebovana v neki kompaktni množici, je lokalno kompakten.*

Dokaz. Naj bo $x \in X$. Obstaja $K^{\text{komp}} \ni x$. Naj bo $U \ni x$ okolica x. Dokažimo, da ima x v U relativno kompaktno okolico.

K je normalen prostor, ker je T_2 in kompakten. Torej je prostor $K \cap U$ regularen, torej obstaja V^{odp}, da je $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq K \cap U$. Ker je $\overline{V}$ zaprta podmnožica K, je kompaktna, torej je V relativno kompaktna. $\square$

Vprašanje 66. Povej zadostni pogoj, da je Hausdorffov prostor lokalno kompakten, in ga dokaži.

Vprašanje 67. Dokaži: vsak lokalno kompakten Hausdorffov prostor je regularen.

Odgovor: Naj bo $U \ni x$ odprta okolica. Ker je X lokalno kompakten, obstaja relativno kompaktna okolica $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Ker je $\overline{V}$ normalna (je kompaktna in Hausdorffova), je regularna in obstaja okolica $x \in W \subseteq \overline{W} \subseteq V$.

Izrek. *BAIROV IZREK ZA LOKALNO KOMPAKTNE PROSTORE. Naj bo X LCH in $(A_n)_n$ števna družina zaprtih množic s prazno notranjostjo. Tedaj ima njihova unija tudi prazno notranjost.*

Dokaz. Naj bo U_0 odprta množica v X. Pokazati moramo, da U_0 ni vsebovan v $\bigcup_n A_n$, oziroma da velja $U_0 \backslash \bigcup_n A_n \neq \varnothing$.

Ker ima A_1 prazno notranjost, obstaja $x' \in U_0 \backslash A_1$. Obstaja relativno kompaktna okolica $x' \in U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq U_0 \backslash A_1$.

Ker U_1 ni vsebovan v A_2, obstaja relativno kompaktna $U_2 \subseteq \overline{U_2} \subseteq U_1 \backslash A_2$. Postopek nadaljujemo.

Dobimo verigo kompaktov $\overline{U_1} \supseteq \overline{U_2} \supseteq \ldots$, za katero velja $\overline{U_i} \cap A_i = \varnothing$. Njihov presek je neprazen, in je vsebovan v $U_0 \backslash \bigcup_n A_n$. $\square$

Vprašanje 68. Povej in dokaži Bairov izrek za lokalno kompaktne prostore.

Vprašanje 69. S pomočjo Bairovega izreka dokaži, da so iracionalna števila povsod gosta v $\mathbb{R}$.

Odgovor: Točke so v $\mathbb{R}$ zaprte množice s prazno notranjostjo. Ker je $\mathbb{R}$ LCH, ima vsaka števna množica prazno notranjost; to se zgodi natanko tedaj, ko je njen komplement povsod gost v $\mathbb{R}$. Torej je $\mathbb{Q}^\mathsf{c}$ povsod gost v $\mathbb{R}$.

Izrek. Bairov izrek za polne metrične prostore *Naj bo $A_1, A_2, \ldots$ števna družina zaprtih množic s prazno notranjostjo v polnem metričnem prostoru X. Tedaj ima njihova unija prazno notranjost.*

Vprašanje 70. Kako se dokaz Bairovega izreka za polne metrične prostore razlikuje od izreka za lokalno kompaktne prostore?

Odgovor: Pri določanju množic $\overline{U_i}$ skrbimo, da njihovi premeri konvergirajo k 0 (take množice lahko določimo, ker so metrični prostori normalni).

Za končni sklep uporabimo dejstvo, da ima zaporedje z elementi iz teh padajočih množic limito, ki je v njihovem preseku.

Definicija. Kompaktifikacija je gosta vložitev $h : X \to \tilde{X}$, kjer je $\tilde{X}$ nek kompakten Hausdorffov prostor.

Vprašanje 71. Kako poteka kompaktifikacija Aleksandrova? Dokaži, da je res kompaktifikacija.

Odgovor: Naj bo X LCH prostor, ki ni kompakten.

Definiramo $X^+ = X \cup \{\infty\}$. Topologija na X^+ je unija topologije na X ter vse množice, ki vsebujejo ∞, ter katerih komplement je kompakt v X.

Dokažimo, da je to res topologija. Če je $\{U_\lambda\}_\lambda$ družina odprtih množic, imamo dve možnosti: če so vse prvega tipa, je njihova unija prvega tipa in zato vsebovana v topologiji. Če je kakšna drugega tipa, je njen komplement kompakt, zato je komplement unije (ki je presek komplementov) zaprt podprostor kompakta, torej kompakten; torej je unija v topologiji. Podobno za končne preseke.

Res je kompakt (enostavno).

Za dokaz T_2 je dovolj ostro ločiti točke X od ∞. Naj bo $x \in X$. Obstaja relativno kompaktna okolica $x \in U \subseteq \overline{U}$. U in $\overline{U}^\mathsf{c}$ ostro ločita x od ∞.

Očitno je inkluzija $i : X \to X^+$ odprta, torej je vložitev. Ker X ni kompakten, vsaka okolica točke ∞ seka $i_*(X)$, torej je to res kompaktifikacija.

1.8 Prostori preslikav

Definicija. TOPOLOGIJA KONVERGENCE PO TOČKAH na $\mathcal{C}(X,Y)$ je topologija, generirana s predbazo $\mathcal{P} = \{\langle\{x\},U\rangle \mid x \in X, U^{\text{odp}} \subseteq Y\}$.

Definicija. KOMPAKTNO-ODPRTA TOPOLOGIJA na $\mathcal{C}(X,Y)$ je topologija, generirana s predbazo $\mathcal{P} = \{\langle K,U\rangle \mid K^{\text{komp}} \subseteq X, U^{\text{odp}} \subseteq Y\}$.

Vprašanje 72. Povej bazo za $\mathcal{C}(X,Y)$ s co-topologijo v primeru, da je Y metričen, in dokaži, da je to res baza.

Odgovor:

$$\mathcal{B} = \{\langle f,K,\varepsilon\rangle \mid f \in \mathcal{C}(X,Y), K^{\text{komp}} \subseteq X, \varepsilon > 0\}$$

$\mathcal{B}$ očitno pokriva cel $\mathcal{C}(X,Y)$.

Če je $g \in \langle f,K,\varepsilon\rangle \cap \langle f',K',\varepsilon'\rangle$, definiramo

$$\delta = \min_{x\in K}(\varepsilon - d(f(x),g(x)))$$
$$\delta' = \min_{x\in K'}(\varepsilon' - d(f'(x),g(x)))$$

To sta strogo pozitivni števili, torej je $\langle g, K\cup K', \min\{\delta,\delta'\}\rangle \subseteq \langle f,K,\varepsilon\rangle \cap \langle f',K',\varepsilon'\rangle$. Torej je $\mathcal{B}$ res baza neke topologije na $\mathcal{C}(X,Y)$.

Predbazne množice so res v bazi, ker so le bazne okolice konstantnih preslikav.

Naj bo $\langle f,K,\varepsilon\rangle \in \mathcal{B}$. Za vsak $c \in K$ definiramo $U_c = \{x \in K \mid d(f(x),f(c)) < \frac{\varepsilon}{2}\}$. Pokritje $\{U_c\}_c$ ima končno podpokritje $U_{c_1},\dots,U_{c_n}$. Za vsak i je $\overline{U_{c_i}}$ zaprta podmnožica kompakta, torej je kompakt. Torej velja $f \in \bigcap_{i=1}^n \left\langle \overline{U_{c_i}}, K(f(c_i),\frac{\varepsilon}{2})\right\rangle \subseteq \langle f,K,\varepsilon\rangle$.

Vprašanje 73. Podaj inkluzijo $Y \to \mathcal{C}(X,Y)$. Pod katerim pogojem je inkluzija zaprta? Dokaži.

Odgovor: $y \mapsto (x \mapsto y)$.

Za poljubno predbazno množico velja $\langle K,U\rangle \cap i(Y) = i(U)$, torej i res podaja bijekcijo med topologijo na Y in topologijo na $i(Y)$.

Če je Y Hausdorffov, je i zaprta. Dovolj je dokazati, da je $i(Y)$ zaprta; torej, da je $i(Y)^{\mathsf{c}}$ odprta. Naj bo $f \in i(Y)^{\mathsf{c}}$. Tedaj f ni konstantna in obstajata točki $x,x' \in X$, ki se slikata v drugačni vrednosti. Ker je Y Hausdorffov, obstajata okolici U,U', ki ostro ločita $f(x),f(x')$. Tedaj je $f \in \langle\{x\},U\rangle \cap \langle\{x'\},U'\rangle \subseteq i(Y)^{\mathsf{c}}$.

Vprašanje 74. Dokaži; Y je Hausdorffov natanko tedaj, ko je $\mathcal{C}(X, Y)$ Hausdorffov. Za katero ločljivostno lastnost to še velja?

Odgovor: Naj bo Y Hausdorffov in $f, f' \in \mathcal{C}(X, Y)$ različni. Tedaj obstaja $x \in X$, da je $f(x) \neq f'(x)$. Torej obstajata okolici U, U', ki ostro ločita $f(x)$ in $f'(x)$. Tedaj sta $\langle \{x\}, U \rangle$ in $\langle \{x\}, U' \rangle$ disjunktni okolici, ki ostro ločita f in f'.

Obratno: Ker je T_2 dedna lastnost in Y lahko vložimo v $\mathcal{C}(X, Y)$, je Y Hausdorffov.

To velja tudi za regularnost.

Vprašanje 75. Povej primer prostora, v katerem so vse zvezne realne funkcije konstantne.

Odgovor: Neskončna množica s topologijo končnih komplementov.

Izrek. Urisonova lema *Hausdorffov prostor X je normalen natanko tedaj, ko za vsaki disjunktni zaprti množici A, B obstaja preslikava $f : X \to [0, 1]$, da velja $f(A) = 0$, $f(B) = 1$.*

Dokaz. V levo: Če sta A, B disjunktni zaprti množici in f preslikava, ki ju loči, potem množici $f^*([0, \frac{1}{2}))$ in $f^*((\frac{1}{2}, 1])$ ostro ločita A in B.

V desno: Definiramo $U_1 = B^\mathsf{c}$. Ker je prostor normalen, je T_4 in obstaja množica U_0, da je $A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1$. Med $\overline{U_0}$ in U_1 lahko vrinemo $U_{\frac{1}{2}}$, nato vrinemo četrtine, osmine, itd.

Postopek ponavljamo v nedogled. Dobimo neskončno skupino množic $U_{\frac{a}{2^n}}$, $0 \leq a \leq 2^n$, kjer velja $r \leq s \implies U_r \subseteq \overline{U_r} \subseteq U_s$.

Definiramo

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \mid x \in U_r\} & x \notin B \\ 1 & x \in B \end{cases}$$

Recimo, da je $0 < f(x) < 1$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Obstajata r, s, da velja $f(x) - \varepsilon < r < f(x) < s < f(x) + \varepsilon$. Velja $x \in U_s \backslash \overline{U_r}$, to je odprta množica. Velja $f(U_s \backslash \overline{U_r}) \subseteq (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$. □

Vprašanje 76. Povej in dokaži Urisonovo lemo.

Definicija. Zaporedje $(a_n)_n$ je kvadratno sumabilno, če je vsota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ končna.

Definicija. Množico vseh kvadratno sumabilnih realnih zaporedij označimo z l^2.

Izrek. Urisonov metrizacijski izrek *Vsak normalen 2-števen prostor je metrizabilen.*

Dokaz. V l^2 vpeljemo metriko $d((x_n)_n, (y_n)_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_n - y_n)^2}$.

Ker je prostor 2-števen, ima števno bazo $\mathcal{B}$. Za vsak par bazičnih okolic B_n, B_m, kjer je $\overline{B_n} \subseteq B_m$, obstaja Urisonova funkcija $f_{n,m} : X \to [0,1]$, da velja $f_{n,m}(B_n) = 0$, $f_{n,m}(B_m^{\mathsf{c}}) = 1$.

Ta družina preslikav loči točke X; naj bosta $x, x' \in X$. Obstaja bazna okolica $B' \supseteq x$, v kateri ni x'. Tedaj obstaja manjša bazna okolica $B \subseteq B'$, katere zaprtje je v B' (normalnost). Vzamemo preslikavo med njima.

Vpeljemo (poljubno) novo indeksiranje teh funkcij z $(f_n)_n$. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira, zato po Weierstrassovem kriteriju konvergira tudi vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n^2(x)}{n^2}.$$

Predpis $f(x) = (\frac{1}{n} f_n(x))_n$ določa funkcijo $X \to l^2$.

Ker za $x \neq x'$ obstaja funkcija f_n, ki ju loči, velja $f(x) \neq f(x')$, torej je f injektivna.

Naj bo $x \in X$, $\varepsilon > 0$ ter N tak, da je $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Za $n = 1, \ldots, N$ definiramo množice

$$U_n = \{y \in X \mid (f_n(x) - f_n(y))^2 < \frac{\varepsilon}{2N}\}.$$

To je končno število odprtih množic, torej je njihov presek $U = \bigcap_{n \leq N} U_n$ tudi odprt.

Naj bo $y \in U$.

$$\begin{aligned}
(d(f(x), f(y)))^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(f_n(x) - f_n(y))^2 \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}(f_n(x) - f_n(y))^2 + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}(f_n(x) - f_n(y))^2 \\
&< N\frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Torej se U slika v ε-okolico točke $f(x)$, torej je f zvezna.

Naj bo $x \in X$ ter $U \ni x$ poljubna okolica. Obstajata bazni množici B, B', da velja $x \in B \subseteq \overline{B} \subseteq B' \subseteq U$. Naj bo f_n Urisonova preslikava za ti množici. Naj bo $y \in X$. Naj velja $d(f(x), f(y)) < \frac{1}{n}$. Velja

$$\left|\frac{1}{n} f_n(y)\right| = \left|\frac{1}{n} f_n(y) - \frac{1}{n} f_n(x)\right| < d(f(x), f(y)),$$

torej

$$|f_n(y)| = |f_n(y) - f_n(x)| < nd(f(x), f(y)) < 1.$$

Ker f_n slika $(B')^{\mathrm{c}}$ v 1, mora veljati $y \in B' \subseteq U$. Torej za $f(y)$, ki je dovolj blizu $f(x)$, velja $y = f^{-1}(f(y)) \in U$ (f je injektivna). Torej je f^{-1} zvezna kot funkcija $f_*(X) \to X$, torej je f homeomorfizem na sliko.

Torej je X podprostor metrizabilnega l^2, torej je X metrizabilen. $\square$

Vprašanje 77. Povej in dokaži Urisonov metrizacijski izrek.

Lema. *Naj bo X normalen in $A^{\mathrm{zap}} \subseteq X$. Naj bo $f : A \to \mathbb{R}$ zvezna in naj obstaja $c \in \mathbb{R}$, da je $|f(a)| \leq c$ za vse $a \in A$. Potem obstaja $h : X \to \mathbb{R}$, da velja $|h(x)| \leq \frac{1}{3}c$ za vse $x \in X$ ter $|f(a) - h(a)| \leq \frac{2}{3}c$ za vse $a \in A$.*

Dokaz. Definiramo

$$A_+ = \{a \in A \,|\, f(a) \geq \frac{1}{3}c\}$$
$$A_- = \{a \in A \,|\, f(a) \leq -\frac{1}{3}c\}$$

To sta disjunktni zaprti množici, torej po Urisonovi lemi obstaja preslikava $h : X \to [-\frac{1}{3}c, \frac{1}{3}c]$, ki slika A_- v $-\frac{1}{3}c$, ter A_+ v $\frac{1}{3}c$. $\square$

Izrek. TIETZEJEV RAZŠIRITVENI IZREK *Naj bo X normalen prostor in $A^{\mathrm{zap}} \subseteq X$. Naj bo $J \subseteq \mathbb{R}$ interval in $f : A \to J$ zvezna. Potem jo lahko razširimo na zvezno preslikavo $f : X \to J$.*

Dokaz. Brez škode za splošnost velja $J = [-1, 1]$.

Po lemi obstaja taka preslikava $h_0 : X \to \mathbb{R}$, da velja $|h_0(x)| \leq \frac{1}{3}$ ter $|f(a) - h_0(a)| \leq \frac{2}{3}$. Lemo nato uporabimo na preslikavi $f - h_0$, dobimo preslikavo h_1. Nato lemo uporabimo na preslikavi $f - h_0 - h_1$, in postopek nadaljujemo.

Dobimo preslikave $h_n : X \to \mathbb{R}$, za katere velja $|h_n(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ter

$$\left| f(a) - \sum_{i=0}^{n-1} h_i(a) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Definiramo $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i(x)$. Po Weierstrassovem kriteriju konvergira enakomerno na X, torej je F zvezna. Velja $F(a) = f(a)$ za $a \in A$. Velja $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 3$, torej je $|F(x)| \leq 1$. $\square$

Vprašanje 78. Povej in dokaži Tietzejev razširitveni izrek.

Definicija. Prostor E je ABSOLUTNI EKSTENZOR, če za vsako preslikavo $f : A \to E$, kjer je $A^{\mathrm{zap}} \subseteq X$ in X normalen, obstaja razširitev $f' : X \to E$.

Definicija. Prostor $A \subseteq X$ je RETRAKT, če obstaja preslikava $r : X \to A$ z lastnostjo $r(a) = a$ za vse $a \in A$. Tako preslikavo imenujemo RETRAKCIJA.

Vprašanje 79. Kaj je absolutni ekstenzor in kaj retrakt?

Vprašanje 80. Ali je produkt absolutnih ekstenzorjev tudi absolutni ekstenzor?

Odgovor: Da.

Vprašanje 81. Dokaži: retrakt Hausdorffovega prostora je zaprt podprostor.

Odgovor: Naj bo $r : X \to A$ retrakcija in $i : A \to X$ inkluzija. Potem je A ravno množica točk ujemanja preslikave $i \circ r$ ter identitete.

Vprašanje 82. Dokaži: retrakt absolutnega ekstenzorja je absolutni ekstenzor.

Odgovor: Naj bo $r : E \to B$ retrakt absolutnega ekstenzorja E na podprostor B. Naj bo X normalen, $A^{\text{zap}} \subseteq X$ ter $f : A \to B$ zvezna. f lahko obravnavamo kot preslikavo $A \to E$, torej jo lahko razširimo na preslikavo $f' : X \to E$. Tedaj je $r \circ f'$ razširitev preslikave f.

1.9 Stone-Weierstrassov izrek

Definicija. Naj bo $f : X \to \mathbb{R}$ zvezna preslikava. NOSILEC preslikave f je množica $\overline{f^*(\mathbb{R}\backslash\{0\})}$.

Definicija. Naj bo $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ pokritje prostora X. RAZČLENITEV ENOTE je množica preslikav $\rho_i : X \to [0, 1]$, kjer je nosilec preslikave ρ_i vsebovan v U_i in velja $\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_n = 1$ povsod na X.

Vprašanje 83. Kaj je razčlenitev enote?

Vprašanje 84. Dokaži: za vsako odprto pokritje $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ normalnega prostora X obstaja neka podrejena razčlenitev enote.

Odgovor: Ker je X normalen in $A_1 = \bigcap_{i=2}^n U_i^{\mathsf{c}} \subseteq U_1$ zaprta, obstaja odprta množica V_1, da $A_1 \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U_1$. Enako naredimo tudi za druge U_i. Družina $(V_i)_i$ je še vedno pokritje X. Enak postopek naredimo na tej družini; dobimo družino $(W_i)_i$, ki še vedno pokriva X, in za katero velja $W_i \subseteq \overline{W_i} \subseteq V_i$.

Izberemo Urisonove funkcije $f_i : X \to [0,1]$, za katere velja $f(V_i^{\mathsf{c}}) = 0$ ter $f(\overline{W_i}) = 1$. Definiramo $f = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$. Ker W_i pokrivajo X, je f strogo pozitivna. Preslikave $\rho_i = \frac{f_i}{f}$ tvorijo razčlenitev enote, ker je nosilec ρ_i vsebovan v $\overline{V_i} \subseteq U_i$.

Vprašanje 85. Povej Weierstrassov izrek.

Odgovor: Polinomi so gosti v $\mathcal{C}([a,b])$, opremljenim s supremum metriko.

Definicija. Množica preslikav M LOČI TOČKE, če za vsaki različni točki x, x' obstaja funkcija $f \in M$, da velja $f(x) \neq f(x')$.

Izrek. *STONE-WEIERSTRASS Naj bo X normalen prostor. Naj bo A podalgebra v $\mathcal{C}(X)$ (opremljeno s co-topologijo). Če A vsebuje konstantno preslikavo in loči točke, je $\overline{A} = \mathcal{C}(X)$.*

Dokaz. Za nenegativen $f \in A$ velja $\sqrt{f} \in \overline{A}$, ker kvadratni koren lahko predstavimo kot enakomerno limito polinomov (Taylorjeva vrsta). Torej velja $|f| \in \overline{A}$, ker je $|x| = \sqrt{x^2}$. Torej za $f_1, f_2 \in A$ velja $\max f_1, f_2 \in \overline{A}$, ker lahko maksimum izrazimo z absolutno vrednostjo. Podobno za minimum.

Za poljubna $x, y \in X$ ter $a, b \in \mathbb{R}$ obstaja preslikava $f \in A$, da velja $f(x) = a$, $f(y) = b$. Naj bo $f \in \mathcal{C}(X)$ ter $\langle f, K, \varepsilon \rangle$ njegova bazična okolica. Za vsaki točki $u, v \in K$ izberemo preslikavo $h_{u,v}$, da velja $h_{u,v}(u) = f(u)$ ter $h_{u,v}(v) = f(v)$.

Naj bo $u \in K$. Množice

$$U_v = \{x \in K \mid h_{u,v}(x) < f(x) + \varepsilon\}$$

so odprte v X in pokrivajo K, torej obstaja končno podpokritje $U_{v_1}, \ldots, U_{v_n}$. Velja $h_u = \min\{h_{u,v_1}, \ldots, h_{u,v_n}\} \in \overline{A}$. Velja $h_u(x) < f(x) + \varepsilon$ za $x \in K$. Velja $h_u(u) = f(u)$.

Podobno naredimo za spodnjo mejo; definiramo

$$V_u = \{x \in K \mid h_u(x) > f(x) - \varepsilon\}.$$

To je odprto pokritje K, torej obstaja končno podpokritje $V_{u_1}, \ldots, V_{u_m}$. Definiramo $h = \max\{h_{u_1}, \ldots, h_{u_m}\}$. Velja $h \in \overline{A}$. Velja $f(x) - \varepsilon < h(x) < f(x) + \varepsilon$ za vse $x \in K$. Torej $h \in \langle f, K, \varepsilon \rangle$. Torej velja $\overline{A} \cap \langle f, K, \varepsilon \rangle$. □

Vprašanje 86. Povej in dokaži Stone-Weierstrassov izrek.

2 Diskretna matematika 1

2.1 Osnovna načela kombinatorike

Trditev. *Načelo produkta Če so $A_1, A_2, \ldots, A_n$ končne množice, je $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|$.*

Trditev. *Načelo vsote Če so $A_1, A_2, \ldots, A_n$ paroma disjunktne končne množice, je $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$.*

Trditev. *Načelo enakosti Če obstaja bijekcija $A \to B$, je $|A| = |B|$.*

Trditev. *Načelo dvojnega preštevanja Če izraza I_1 in I_2 preštevata elemente iste množice, imata enako vrednost.*

Trditev. *Dirichletovo načelo (načelo golobnjaka) Če je $m > n$, potem ne obstaja injekcija $[m] \to [n]$.*

Vprašanje 1. Katera so osnovna načela kombinatoričnega preštevanja? Kako Dirichletovo načelo izrazimo v jeziku funkcij?

Odgovor:

Osnovna načela kombinatoričnega preštevanja so:

- načelo produkta
- načelo vsote
- načelo enakosti
- Dirichletovo načelo

Dirichletovo načelo: če je $m > n$, ne obstaja injekcija $[m] \to [n]$.

2.2 Število preslikav in binomski izrek

Definicija. $n^{\underline{k}} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$, $n^{\overline{k}} = n(n+1)\ldots(n+k-1)$.

Trditev. *Naj bo A n-množica in B m-množica. Tedaj velja*

- $\left|B^A\right| = m^n$.
- *Število injektivnih preslikav $A \to B$ je $n^{\underline{k}}$.*
- *Število bijektivnih preslikav $A \to B$ je $n!$, če je $m = n$, sicer 0.*

Dokaz. Zapišimo $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Naj bo $f \in B^A$. Priredimo mu $\mathcal{F}(f) = (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)) \in K^n$.

F je bijekcija $B^A \to B^n$, po načelu produkta pa velja $|B^n| = m^n$.

Drugo točko dokažemo podobno, tretja pa direktno sledi iz druge. $\square$

Definicija. Za $x \in \mathbb{C}$ in $k \in \mathbb{N}_0$ definiramo

$$\binom{x}{k} = \frac{x^{\underline{k}}}{k!}.$$

Za vse druge k je $\binom{x}{k} = 0$.

Trditev. *Če je $n \in \mathbb{N}_0$ in $k \leq n$, je*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Posledica. *Za $0 \leq k \leq n$ velja*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Definicija. Za $k \in \mathbb{N}$ in končno množico X je

$$\binom{X}{k} = \{S \subseteq X \mid |S| = k\}.$$

Trditev. *Če je N n-množica in $k \in \mathbb{N}_0$, je $\left|\binom{N}{k}\right| = \binom{n}{k}$.*

Trditev. *Za $1 \leq k \leq n$ velja*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Dokaz. Naj bo N n-množica. Velja $\left|\binom{N}{k}\right| = \binom{n}{k}$. Naj bo $x \in N$. Razdelimo k-podmnožice N v tiste, ki vsebujejo x, in tiste, ki ga ne vsebujejo. Moč prve skupine je $\binom{n-1}{k-1}$, moč druge pa $\binom{n-1}{k}$. $\square$

Izrek. Binomski izrek *Za vsak $n \geq 0$ ter elementa a, b nekega komutativnega kolobarja velja*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Dokaz.

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n \text{ členov}}$$

To je vsota produktov, kjer iz vsakega oklepaja izberemo en člen. Torej

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k b^{n-k}$$

za neke c_k. To pa je ravno število načinov, da izmed n oklepajev izberemo k oklepajev (iz katerih vzamemo a namesto b). Torej $c_k = \binom{n}{k}$. □

Vprašanje 2. Koliko je vseh preslikav med končnima množicama, koliko je vseh injektivnih preslikav, bijektivnih preslikav in surjektivnih preslikav?

Odgovor:

Naj bo N n-množica in K k-množica. Vseh preslikav $N \to K$ je k^n, injektivnih preslikav je $n^{\underline{k}}$, bijektivnih pa $n!$, če je $n = k$, in 0, če $n \neq k$.

Vseh surjektivnih preslikav je $k! S(n, k)$

Vprašanje 3. Zapišite binomski izrek.

Odgovor: Naj bo $n \geq 0$ in naj bosta a, b elementa nekega komutativnega kolobarja. Tedaj velja

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2.3 Izbori

Trditev. *Število neurejenih izborov iz n-množice dolžine k s ponavljanjem je*

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Dokaz. Naj bo $N = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Naj bo $\{x_1, x_1, \ldots, x_1, x_2, x_2, \ldots x_2, \ldots, x_n, x_n, \ldots x_n\}$ neurejen izbor dolžine k.

Uredimo ta izbor po zapisanih indeksih elementov, ter ga zapišimo kot binarni niz, kjer enice predstavljajo elemente (jih je natanko k), ničle pa predstavljajo meje med različnimi elementi N. Ničel je natanko $n - 1$ (lahko so tudi zaporedne).

Vsak tak binarni niz predstavlja en izbor (postopek izvršimo v drugi smeri), vsak izbor nam da natanko en tak niz. Našli smo torej bijekcijo. Teh binarnih nizov je

$$\binom{n+k-1}{k},$$

ker si lahko poljubno izberemo položaj ničel v nizu. □

Vprašanje 4. Koliko je urejenih in neurejenih izborov z in brez ponavljanja? Utemeljite formulo za neurejene izbore s ponavljanjem.

Odgovor:

	ponavljanje	brez ponavljanja
urejen izbor	n^k	$n^{\underline{k}}$
neurejen izbor	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Za vsak izbor lahko tvorimo binarni niz, kjer enice predstavljajo elemente, ničle pa meje med različnimi elementi (če elemente uredimo tako, da so enaki skupaj). Tak niz bo imel k enic in $n-1$ ničel, postopek podaja bijekcijo med nizi in izbori. Nize lahko izberemo na $\binom{n+k-1}{k}$ načinov.

2.4 Permutacije

Definicija. Permutacija množice A je bijekcija $f: A \to A$. Množico vseh permutacij množica A označimo z S_A.

Opomba. $|S_A| = |A|!$

Definicija. Multimnožica je par (S, ν), kjer je S množica, $\nu : S \to \mathbb{N}_0$ pa preslikava, ki šteje število pojavitev elementov v multimnožici.

Definicija. Permutacija multimnožice $M = (S, \nu)$ je zaporedje $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kjer je $x_i \in S$ ter se vsak x_i v zaporedju pojavi natanko $\nu(x_i)$-krat.

Definicija. Multinomski koeficient za števila $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ter $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ je zapis

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

Opomba. Velja

$$\binom{n}{n_1, n_2} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2}.$$

Trditev. *Število permutacij multimnožice $\{x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_k^{\alpha_k}\}$ je*

$$\binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k},$$

za $n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$.

Dokaz. Najprej izberemo α_1 mest, kjer se pojavi x_1. Nato izmed $n - \alpha_1$ izberemo α_2 mest, kjer se pojavi x_2. Postopek nadaljujemo. Na vsakem koraku imamo

$$\binom{n - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_i - 1}{\alpha_i}$$

možnosti izbire. Vseh možnosti je torej

$$\binom{n}{\alpha_1}\binom{n-\alpha_1}{\alpha_2}\cdots\binom{\alpha_k}{\alpha_k} = \binom{n}{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}.$$

□

Izrek. *Multinomski izrek Za vsak $n \geq 0$ ter elemente $x_1, x_2, \ldots, x_k$ komutativnega kolobarja velja*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}.$$

Vprašanje 5. Kaj je permutacija multimnožice? Definirajte multinomske koeficiente in zapišite multinomski izrek.

Odgovor:

Permutacija multimnožice $M = (S, \nu) = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_k^{\alpha_k}\}$ je tako zaporedje $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, da velja $y_j \in S$ za vse j, ter da se x_i v zaporedju pojavi natanko α_i-krat, za vse i.

Multinomski koeficient je zapis

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!},$$

kjer so n_i števila in velja $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Multinomski izrek pravi, da za vse $n \geq 0$ ter elemente $x_1, x_2, \ldots, x_k$ poljubnega komutativnega kolobarja velja

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}.$$

2.5 Kompozicije

Definicija. Kompozicija naravnega števila n je tak vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, da velja $\lambda_i \geq 1$ ter $\sum_i \lambda_i = n$.

Opomba. Kompozicija dolžine k je ravno rešitev enačbe $x_1+x_2+\ldots+x_k = n$ v naravnih številih.

Trditev. *Število kompozicij velikosti n je 2^{n-1}, število kompozicij dolžine k pa $\binom{n-1}{k-1}$.*

Dokaz. Predstavljamo si n kot n elementov, položenih v ravno črto. Med vsaka dva elementa lahko bodisi postavimo črto, bodisi ne; torej imamo 2^{n-1} možnosti, kako te črte postavimo.

Če se omejimo le na kompozicije dolžine k, moramo postaviti $k-1$ črt na $n-1$ možnih mest. $\square$

Vprašanje 6. Kaj je kompozicija naravnega števila? Koliko je vseh kompozicij števila n in koliko jih ima k členov?

Odgovor:

Kompozicija naravnega števila n je vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, da velja $\forall i. \lambda_i \geq 1$ in $\sum_i \lambda_i = n$.

Vseh kompozicij je 2^{n-1}, kompozicij dolžine k pa $\binom{n-1}{k-1}$.

Definicija. Šibka kompozicija števila n je vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, kjer velja $\lambda_i \geq 0$, ter $\sum_i \lambda_i = n$.

Trditev. *Število šibkih kompozicij velikosti n in dolžine k je $\binom{n+k-1}{k-1}$.*

Dokaz. Če vsakemu elementu šibke kompozicije prištejemo 1, dobimo ravno kompozicijo velikosti $n+k$. Teh je $\binom{n+k-1}{k-1}$. $\square$

Vprašanje 7. Kaj je šibka kompozicija naravnega števila in koliko je takih kompozicij števila n s k členi?

Odgovor:

Šibka kompozicija naravnega števila n je vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, kjer velja $\lambda_i \geq 0$ ter $\sum_i \lambda_i = n$.

Kompozicij števila n dolžine k je $\binom{n+k-1}{k-1}$.

2.6 Razčlenitve

Definicija. RAZČLENITEV naravnega števila n je vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, kjer velja $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq 1$ in $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$.

Definicija.
- $p(n)$ je število razčlenitev števila n.
- $p_k(n)$ je število razčlenitev števila n s k členi.
- $\overline{p}_k(n)$ je število razčlenitev števila n s k ali manj členi.

Trditev.
- $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$.
- $\overline{p}_k(n) = \overline{p}_{k-1}(n) + \overline{p}_k(n-k)$.

Dokaz.
- Razčlenitve s k členi razdelimo na tiste, kjer je $\lambda_k = 1$ in druge. Prvih je $p_{k-1}(n-1)$, drugih pa $p_k(n-k)$ (v diagramu odmislimo prvi stolpec).
- Razčlenitve razdelimo na tiste, ki imajo k členov, in tiste, ki imajo manj kot k členov; $\overline{p}_k(n) = \overline{p}_{k-1}(n) + p_k(n) = \overline{p}_{k-1}(n) + \overline{p}_k(n-k)$.

□

Vprašanje 8. Kaj je razčlenitev naravnega števila? Koliko je vseh razčlenitev števila n s k členi in koliko s kvečjemu k členi?

Odgovor:

Razčlenitev naravnega števila n je vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, kjer velja $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq 1$ in $\sum_i \lambda_i = n$.

Razčlenitev n s k členi je $p_k(n)$, razčlenitev s kvečjemu k členi pa $\overline{p}_k(n)$. Določitev teh vrednosti je težek problem, veljata pa rekurzivni formuli $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$ ter $\overline{p}_k(n) = \overline{p}_{k-1}(n) + \overline{p}_k(n-k)$.

Vprašanje 9. Kako prestavljamo razčlenitve?

Odgovor: S Ferrerrovimi diagrami ali Youngovimi tabelami.

2.7 Stirlingova in Lahova števila

Definicija. Za $1 \leq k \leq n$ je STIRLINGOVO ŠTEVILO 1. VRSTE $c(n,k)$ število permutacij množice $[n]$, ki se zapišejo s k disjunktnimi cikli.

Trditev. *Za* $1 \leq k \leq n$ *velja* $c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1)c(n-1,k)$.

Dokaz. Razdelimo permutacije $[n]$ glede na to, kam se slika element n. Če je n negibna točka, dobimo $c(n-1, k-1)$ možnosti. Če je n v ciklu dolžine vsaj 2, ga lahko odstranimo in dobimo permutacijo množice $[n-1]$ s k cikli. Isto permutacijo štejemo natanko $(n-1)$-krat; v vsako permutacijo $[n-1]$ lahko vrinemo n na $n-1$ mestih. □

Vprašanje 10. Kako so definirana Stirlingova števila prve vrste in kako jih izračunamo? Zapišite začetni del Stirlingove matrike prve vrste.

Odgovor:

Stirlingovo število prve vrste $c(n, k)$ je število permutacij $[n]$, ki se jih zapiše s k disjunktnimi cikli. Izračunamo jih s pomočjo pogojev $c(0, 0) = 1$, $c(n, 0) = 0$ in rekurzivne zveze $c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k)$.

	0	1	2	3	4	k
0	1					
1	0	1				
2	0	1	1			
3	0	2	3	1		
4	0	6	11	6	1	
n						

Definicija. Naj bo X množica. Množica $\{X_i \mid i \in I\}$ je razdelitev množice X, če velja:

- $\bigcup_i X_i = X$
- $X_i \cap X_j = \varnothing$ za $i \neq j$
- $X_i \neq \varnothing$ za vse i

Definicija. Za $1 \leq k \leq n$ je STIRLINGOVO ŠTEVILO 2. VRSTE $S(n, k)$ število razdelitev $[n]$ v k blokov.

Trditev. *Za $1 \leq k \leq n$ velja $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$.*

Dokaz. Naj bo X n-množica in $a \in X$. Razdelimo razdelitve v dve skupini. Razdelitev, ki vsebujejo blok $\{a\}$, je $S(n-1, k-1)$. Razdelitev, ki ne vsebujejo bloka $\{a\}$, je $S(n-1, k) \cdot k$, ker lahko a vrinemo v poljuben blok. □

Vprašanje 11. Kako so definirana Stirlingova števila druge vrste in kako jih izračunamo? Zapišite začetni del Stirlingove matrike druge vrste. Kakšna je povezava med temi števili in ekvivalenčnimi relacijami?

Odgovor:

Stirlingovo število druge vrste $S(n,k)$ je število razdelitev $[n]$ v k disjunktnih nepraznih blokov. To ustreza številu ekvivalenčnih relacij na množici $[n]$, ki jo razdelijo v k ekvivalenčnih razredov.

Stirlingova števila druge vrste izračunamo s pogojema $S(0,0) = 1$, $S(n,0) = 0$, ter rekurzivno zvezo $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$.

	0	1	2	3	4	k
0	1					
1	0	1				
2	0	1	1			
3	0	1	3	1		
4	0	1	7	6	1	
n						

Definicija. Za $1 \leq k \leq n$ je Lahovo število $L(n,k)$ število razdelitev n-množice v k linearno urejenih nepraznih blokov.

Trditev. $L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n-1+k)L(n-1,k)$.

Dokaz. Razdelimo razdelitve na tiste, kjer nastopa blok (n) in ostale. V prvem primeru dobimo $L(n-1,k-1)$ možnosti, v drugem pa lahko vsaki razdelitvi brez n vrinemo n na $n+k-1$ mest: na $n-1$ načinov med elemente, in na k načinov na konec bloka. $\square$

Vprašanje 12. Kako so definirana Lahova števila in kako jih izračunamo — kako rekurzivno in kako eksplicitno?

Odgovor:

Lahovo število $L(n,k)$ je število razdelitev n elementov v k linearno urejenih blokov. Izračunamo ga lahko z rekurzivno formulo $L(n,k) = L(n-1,k-1)+(n+k-1)L(n-1,k)$ ali eksplicitno s formulo $L(n,k) = \frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}$.

2.8 Dvanajstera pot

Vprašanje 13. Kaj je dvanastera pot? Zapišite in napolnite ustrezno tabelo.

Odgovor: Naj bo N n-množica in K k-množica. Preslikave $N \to K$ razdelimo glede na to, ali ločijo elemente N, ali ločijo elemente K, ter glede na to, ali so injektivne, surjektivne, ali če nimamo dodatnih zahtev. Dvanajstera pot poda način izračuna števila teh preslikav.

	injektivne	surjektivne	kakršnekoli
loči predmete, loči predale	$k^{\underline{n}}$	$k!S(n,k)$	k^n
loči predmete, ne loči predalov	$\begin{cases} 1 & n \leq k \\ 0 & n > k \end{cases}$	$S(n,k)$	$\sum_{i=1}^{k} S(n,i)$
ne loči predmetov, loči predale	$\binom{k}{n}$	$\binom{n-1}{k-1}$	$\binom{n+k-1}{k-1}$
ne loči predmetov, ne loči predalov	$\begin{cases} 1 & n \leq k \\ 0 & n > k \end{cases}$	$p_k(n)$	$\overline{p}_k(n)$

2.9 Načelo vključitev in izključitev

Izrek. Načelo vključitev in izključitev *Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ množice. Tedaj*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_j,$$

kjer je

$$a_j = \sum_{I \in \binom{[n]}{j}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Dokaz. Naj bo $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. x prispeva 1 k levi strani formule. Če dokažemo, da prispeva 1 tudi k desni strani formule, bo izrek dokazan.

Recimo, da se x pojavi v k izmed množic $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

- a_1 prispeva k
- a_2 prispeva $\binom{k}{2}$
- a_3 prispeva $\binom{k}{3}$
- ...
- a_k prispeva 1
- vsi višji a_i prispevajo 0

Skupen prispevek x je torej

$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \binom{k}{i}.$$

Po binomskem izreku velja $0 = (1-1)^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+1} \binom{k}{i}$.

Torej je prispevek x enak

$$0 - (-1)^{0+1} = 1.$$

$\square$

Vprašanje 14. Formulirajte in dokažite načelo vključitev in izključitev.

Odgovor: Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ množice. Tedaj

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_j,$$

kjer je

$$a_j = \sum_{I \in \binom{[n]}{j}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Izberemo poljuben element $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. K levi strani vsote prispeva 1; dokazati moramo, da toliko prispeva tudi k desni strani vsote.

Naj bo k število množic izmed $A_1, A_2, \ldots, A_n$, kjer se pojavi x. a_i k prispevku x prišteje oz. odšteje $\binom{k}{i}$.

Vsoto $\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \binom{k}{i}$ izračunamo s pomočjo binomskega izreka za $0 = (1-1)^k$; sledi, da je prispevek x na desni strani enak 1.

2.10 Linearne rekurzivne enačbe

Vprašanje 15. Pojasnite pojem linearne rekurzivne enačbe s konstantnimi koeficienti. Kako lahko zapišemo splošno rešitev dvočlene rekurzije? Kako formulo dokažemo?

Odgovor:

To je enačba, katere rešitev je zaporedje $(a_n)_n$, enačba sama pa je podana z linearno rekurzivno zvezo $c_d a_{n+d} + c_{d-1} a_{n+d-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_o a_n = 0$.

Splošna rešitev dvočlene rekurzije: za rekurzivno enačbo $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$ je rešitev sledeča: tvorimo karakteristično enačbo $x^2 = \alpha x + \beta$, ter označimo rešitvi z λ_1, λ_2.

Če je $\lambda_1 = \lambda_2$, obstajata taki konstanti A, B, da je $a_n = (A + nB)\lambda_1^n$. Če je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, pa obstajata konstanti A, B, da je $a_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$. V obeh primerih konstanti izračunamo iz začetnih pogojev.

V primeru $\lambda_1 \neq \lambda_2$ velja $a_0 = A + B$ in $a_1 = \lambda_1 A + \lambda_2 B$; tedaj je enačba rešljiva za A, B za začetne pogoje. Za splošen n dokažemo po indukciji;

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} \\ &= \alpha(A\lambda_1^{n-1} + B\lambda_2^{n-1}) + \beta(A\lambda_1^{n-2} + B\lambda_2^{n-2}) \\ &= A\lambda_1^{n-2}(\alpha\lambda_1 + \beta) + B\lambda_2^{n-2}(\alpha\lambda_2 + \beta) \\ &= A\lambda_1^n + B\lambda_2^n \end{aligned}$$

Če je $\lambda_1 = \lambda_2$, prvo izločimo primer $\lambda_1 = 0$; takrat dobimo ničelno zaporedje. Ponovno je enačba rešljiva za prva dva člena zaporedja. Po indukciji se razširi na celotno zaporedje;

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} \\ &= \alpha(A + nB - B)\lambda^{n-1} + \beta(A + nB - 2B)\lambda^{n-2} \\ &= \lambda^{n-2}(\lambda\alpha A + \lambda\alpha nB - \lambda\alpha B + \beta A + \beta nB - 2B\beta) \\ &= \lambda^{n-2}(A\lambda^2 + nB\lambda^2 - B(\lambda\alpha + 2\beta)) \end{aligned}$$

Ker je λ edina ničla $x^2 = \alpha x + \beta$, je $\alpha^2 + 4\beta = 0$. Tedaj $\lambda = \frac{\alpha}{2}$, torej $\lambda\alpha + 2\beta = 0$.

Vprašanje 16. Kakšna je splošna rešitev d-člene linearne rekurzivne enačbe s konstantnimi koeficienti? Opišite korake dokaza te formule.

Odgovor:

Naj bo dana enačba

$$a_{n+d} + c_{d-1}a_{n+d-1} + \ldots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = f(n).$$

Če je $f(n) = 0$, obravnavamo homogen primer. Tedaj enačbo predelamo v polinom $\lambda^d + c_{d-1}\lambda^{d-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0$. Označimo ničle tega polinoma z $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ter njihove stopnje z $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Rešitev je tedaj oblike

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} A_i(n)\lambda_i^n,$$

kjer so A_i polinomi stopenj $\operatorname{st} A_i \leq s_i - 1$.

Če velja $f(n) \neq 0$, je a_n oblike $a_n = z_n + w_n$, kjer je z_n rešitev nehomogenega primera, w_n pa neka partikularna rešitev enačbe.

Dokaz je sledeč: Tako $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ kot $\operatorname{End}\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ sta vektorska prostora nad $\mathbb{C}$. Definiramo preslikavo $E \in \operatorname{End}\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ s predpisom

$$E : a_0, a_1, a_2, \ldots \mapsto a_1, a_2, a_3, \ldots .$$

Definiramo tudi funkcijo $Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s predpisom

$$Q(x) = x^d + c_{d-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0.$$

Velja

$$\begin{aligned}(a_n)_n \in \ker Q(E) &\Leftrightarrow Q(E).(a_n)_n = 0\\ &\Leftrightarrow (E^d + \ldots + c_1 E + c_0 I).(a_n)_n = 0\\ &\Leftrightarrow (a_d + c_{d-1}a_{d-1} + \ldots + a_1 c_1 + a_0 c_0, \ldots, \ldots) = 0\\ &\Leftrightarrow (a_n)_n \text{ustreza rekurzivni enačbi}\end{aligned}$$

Velja $Q(x) = (x - \lambda_1)^{s_1} \ldots (x - \lambda_k)^{s_k}$, $s_1 + s_2 + \ldots + s_k = d$.

Iz linearne algebre vemo $\ker Q(E) = \ker (E - \lambda_1 I)^{s_1} \oplus \ldots \oplus \ker (E - \lambda_k)^{s_k}$. Ni se težko prepričati, da je $\dim \ker (E - \lambda_i I)^{s_i} = s_i$ (definiramo preslikavo iz zaporedij v $\mathbb{C}^{s_i}$, ki ohrani prvih s_i členov zaporedja. Ta preslikava je bijekcija, ker je zaporedje tukaj določeno s prvimi s_i členi).

Velja: $(\lambda^n)_{n\geq 0}, (n\lambda^n)_{n\geq 0}, \ldots, (n^{s-1}\lambda^n)_{n\geq 0}$ je baza za $\ker (E - \lambda I)^s$. Dokaz izpustimo. Torej je $(a_n)_n \in \ker(E - \lambda I)^s \Leftrightarrow a_n = A(n)\lambda^n$, in $\operatorname{st} A \leq s - 1$.

2.11 Rodovne funkcije

Definicija. Naj bo $(a_n)_n$ zaporedje. Formalna potenčna vrsta je zapis

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Definicija. Rodovna funkcija je formalna potenčna vrsta, katere zaporedje je rešitev kombinatoričnega problema.

Trditev. *Formalna potenčna vrsta $A(x)$ premore inverz natanko tedaj, ko je $a_0 \neq 0$.*

Dokaz. Desno: naj bo $B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ inverz $A(x)$. Tedaj $a_0 b_0 = 1$, torej $a_0 \neq 0$.

Levo: Definiramo $b_0 = a_0^{-1}$. Velja $a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0$, torej lahko b_1 enolično določimo. Če postopek ponavljamo, lahko izračunamo vse b_i, torej inverz lahko določimo. □

Vprašanje 17. Kaj je formalna potenčna vrsta in kaj rodovna funkcija? Katere formalne potenčne vrste so obrnljive? Kakšen je splošen recept za reševanje rekurzivnih enačb s pomočjo rodovnih funkcij?

Odgovor:

Formalna potenčna vrsta je zapis $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, kjer je $(a_n)_n$ neko zaporedje. Če je to zaporedje rešitev kombinatoričnega problema, vrsto imenujemo rodovna funkcija. Formalna potenčna vrsta je obrnljiva (z inverzom 1) natanko tedaj, ko velja $a_0 \neq 0$.

Splošen princip uporabe rodovnih funkcij za reševanje rekurzivnih enačb je sledeč: Najprej z uporabo rekurzivne enačbe zapišemo enačbo, kateri mora ustrezati rodovna funkcija. To enačbo rešimo, da dobimo rodovno funkcijo, izraženo kot racionalno funkcijo v spremenljivki x. S pomočjo algebre nad rodovnimi funkcijami nato dobljeno funkcijo razvijemo v formalno potenčno vrsto, iz katere preberemo koeficiente.

Vprašanje 18. Kaj so Catalanova števila? Naštejte nekaj primerov kombinatoričnih objektov, ki jih preštejejo Catalanova števila.

Odgovor:

Catalanova števila so zaporedje C_n naravnih števil, ki se pogosto pojavljajo v kombinatoriki. Velja $C_1 = C_2 = 1, C_3 = 2, C_4 = 5$. Poznamo rekurzivno zvezo $C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$ ter eksplicitno formulo $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Med drugim Catalanova števila štejejo:

- Število poti od $(0, 0)$ do $(n, 0)$, kjer sta edina dovoljena koraka $(1, 1)$ in $(1, -1)$, ki ne padejo pod abscisno os.
- Število oklepajskih izrazov z n oklepaji in n zaklepaji.
- Število možnih zaporedij, v katerih lahko množimo n števil, če paroma množimo dve sosednji števili.
- Število načinov, da razrežemo stopnice višine (in širine) n na n pravokotnikov.

2.12 Teorija grafov

Definicija. GRAF G je urejen par $(V(G), E(G))$, kjer je $V(G)$ množica vozlišč grafa in $E(G)$ množica povezav grafa, pri čemer je $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$.

Definicija. SOSEŠČINA vozlišča $v \in V(G)$ je množica

$$N_G(v) = \{w \mid v, w \in E(G)\}$$

Definicija. STOPNJA vozlišča $u \in V(G)$ je $|N_G(u)|$.

Definicija. Graf je REGULAREN, če imajo vsa vozlišča isto stopnjo.

Izrek. Lema o rokovanju *V vsakem grafu G velja*

$$\sum_{u \in V(G)} deg_G(u) = 2\,|E(G)|\,.$$

Dokaz. Zgradimo matriko s toliko vrsticami kot vozlišči in toliko stolpci kot povezavami. Na mesto, ki pripada povezavi e in vozlišču v, postavimo 1, če je u del povezave e, in 0 sicer.

Če preštejemo enice po vrsticah, dobimo $\sum_{u \in V(G)} \deg_G(u)$, če pa jih preštejemo po stolpcih, dobimo $2\,|E(G)|$. ☐

Vprašanje 19. Kaj je stopnja vozlišča grafa in kaj pravi lema o rokovanju? Kako dokažemo to lemo?

Odgovor:

Stopnja vozlišča $v \in V(G)$ je $|N_G(v)|$. Lema o rokovanju pravi, da je vsota stopenj vseh vozlišč ravno dvakratnik števila povezav. Dokažemo jo tako, da zgradimo incidenčno matriko z vozlišči v vrsticami in povezavami v stolpcih, v polja pa damo 1, če je vozlišče del povezave, in 0 sicer. Po načelu dvojnega preštevanja lema velja.

Definicija. Graf H je podgraf grafa G, če je $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$.

Definicija. Podgraf H je porojen ali induciran, če velja sklep

$$\forall u, v \in H. uv \in E(G) \implies uv \in E(H).$$

Definicija. Podgraf H je vpeti podgraf grafa G, če je $V(H) = V(G)$.

Definicija. Sprehod v grafu G je zaporedje $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vozlišč, da velja $v_i v_{i+1} \in E(G)$ za vse i. Sprehod je sklenjen, če je $v_1 = v_k$. Sprehod je enostaven, če so vsa vozlišča v njem paroma različna.

Definicija. Pot v grafu je podgraf, ki je graf pot.

Definicija. Cikel je enostaven sklenjen sprehod.

Definicija. Dolžina sprehoda je število povezav, ki jih sprehod prehodi.

Vprašanje 20. Pojasnite sprehod, sklenjen sprehod, pot v grafu, cikel v grafu. Pokažite, da vsak graf, ki vsebuje sklenjen sprehod lihe dolžine, vsebuje tudi cikel lihe dolžine.

Odgovor:

Sprehod je zaporedje vozlišč $v_1, v_2, \ldots, v_k$, da velja $v_i \sim v_{i+1}$ za $i = 1, \ldots, k-1$.

Sprehod je sklenjen, če je $v_k = v_1$.

Pot v grafu je podgraf, ki je izomorfen P_n za nek $n \in \mathbb{N}$.

Cikel je določen s sklenjenim enostavnim sprehodom.

Dokažemo z indukcijo na dolžini sprehoda. Baza indukcije je trikotnik, ki vsebuje lih cikel. Če je sklenjen sprehod enostaven, je to že cikel. Sicer se v njem neko vozlišče ponovi. Sprehod lahko pri tem vozlišču razdelimo na dva sklenjena sprehoda; vsaj eden od njiju je lihe dolžine. Po indukcijski predpostavki ima torej graf lih cikel.

Definicija. POVEZANE KOMPONENTE grafa G so ekvivalenčni razredi za relacijo R:

$$uRv \Leftrightarrow \text{obstaja pot med } u \text{ in } v.$$

Definicija. Število povezanih komponent označimo z $\Omega(G)$. Graf je POVEZAN, če ima le eno povezano komponento.

Definicija. RAZDALJA med vozliščema u in v je dolžina najkrajše u, v poti.

Definicija. PREMER grafa G je $\max\{d(u,v) \mid u, v \in V(G)\}$.

Definicija. Graf je DVODELEN, če obstaja razdelitev $V(G)$ na X in Y, da velja sklep: če je uv povezava, je $u \in X$ ter $v \in Y$, ali obratno.

Izrek. *Graf G je dvodelen natanko tedaj, ko ne vsebuje lihih ciklov.*

Dokaz. Izrek velja natanko tedaj, ko velja za vsako komponento posebej; BŠS je graf povezan.

V desno: Naj bo G dvodelen in X, Y njegova dvodelna razdelitev. Naj bo $C = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ cikel in $v_0 = v_k$. Recimo, da je $v_0 \in X$. Tedaj je $v_1 \in Y$, $v_2 \in X$, itd. Velja $v_{k-1} \in Y$, torej je $k - 1$ liho in k sodo.

V levo: Naj bo G graf brez lihih ciklov. Naj bo $w_0 \in V(G)$ poljubno vozlišče. Definiramo množici

$$L = \{u \in G \mid d(w_0, u) \text{ je liho}\}$$
$$S = \{v \in G \mid d(w_0, v) \text{ je sodo}\}.$$

$V(G)$ je disjunktna unija L in S. Dokažimo, da vozlišča znotraj L niso sosednja, in da vozlišča znotraj S niso sosednja. Razdelimo L in S v sloje glede na razdaljo vozlišča od w_0. Vsaka povezava mora biti med dvema sosednjima slojema ali znotraj sloja; ne moramo imeti povezave iz sloja k v sloj $k + i$ za $i > 1$.

Recimo, da sta u in v povezani vozlišči v istem sloju; $d(u, w_0) = d(v, w_0) = k$. Tedaj obstaja pot dolžine k med w_0 in u ter med w_0 in v. Če ti poti združimo, dobimo sklenjen sprehod dolžine $2k + 1$; tedaj ima graf lih cikel. $\rightarrow\!\leftarrow$ $\square$

Vprašanje 21. Kaj so dvodelni grafi? Kako jih karakteriziramo? Kako dokažemo to karakterizacijo?

Odgovor:

Graf je dvodelen, če lahko vozlišča razdelimo na dve disjunktni množici X in Y tako, da vse povezave potekajo med tema množicama, in ni povezave med dvema vozliščema znotraj ene množice.

Graf je dvodelen natanko tedaj, ko nima lihih ciklov. V desno je implikacija trivialna; če ima lih cikel, potem eno vozlišče ne mora biti v nobeni od množic. Če graf nima lihih ciklov, ga razdelimo glede na sodost oz. lihost razdalje od poljubnega vozlišča w. Če bi potekala kakšna povezava med vozliščema z isto parnostjo razdalje, jo lahko uporabimo, da sestavimo lih cikel; to pa je protislovno.

2.13 Morfizmi grafov

Definicija. Naj bosta G in H grafa. Preslikava $f : V(G) \to V(H)$ je HOMOMORFIZEM, če velja sklep: Če je uv povezava v G, je $f(u)f(v)$ povezava v H.

Definicija. EPIMORFIZEM ali VLOŽITEV je injektiven homomorfizem.

Definicija. Vložitev je IZOMETRIČNA, če ohranja razdalje.

Opomba. Takrat je $f(G)$ induciran podgraf v H.

Definicija. Homomorfizem f je IZOMORFIZEM, če je bijekcija, in če je f^{-1} homomorfizem.

Definicija. AVTOMORFIZEM je izomorfizem $G \to G$. Grupo avtomorfizmov grafa G označimo z $\mathrm{Aut}\,(G)$.

Definicija. Graf je ASIMETRIČEN, če je grupa avtomorfizmov trivialna.

Vprašanje 22. Kaj je homomorfizem grafov, izomorfizem grafov in avtomorfizem grafa? Kaj je to $\mathrm{Aut}\,(G)$? Kakšno algebrsko strukturo ima?

Odgovor:

Homomorfizem je preslikava $f : V(G) \to V(H)$, ki ohranja povezave (velja $u \sim_G v \implies f(u) \sim_H f(v)$).

Izomorfizem je bijektiven homomorfizem, katerega inverz je tudi homomorfizem.

Avtomorfizem je izomorfizem $G \to G$. Grupo vseh avtomorfizmov označimo z $\mathrm{Aut}\,(G)$.

2.14 Operacije z grafi

Definicija. Graf H je MINOR grafa G, če lahko H dobimo iz nekega podgrafa G s skrčitvijo nekaterih povezav.

Opomba. Do minorja pridemo z zaporedjem operacij odstrani vozlišče, odstrani povezavo, skrči povezavo.

Definicija. Naj bosta G in H grafa. KARTEZIČNI PRODUKT $G \square H$ je graf z:

- $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$
- $E(G \square H) = \{(g,h)(g',h') \mid g = g' \wedge h \sim_H h' \vee g \sim_G g' \wedge h = h'\}$

Definicija. SUBDIVIZIJA povezave $e \in E(G)$ je operacija na grafu, ki povezavo razdeli na dve in med njiju vstavi vozlišče stopnje 2. Označimo jo z $G^+(e)$.

Definicija. SUBDIVIZIJA grafa G je graf, ki ga dobimo iz G tako, da zaporedoma subdividiramo nekatere povezave.

Definicija. Grafa G in H sta HOMEOMORFNA, če obstaja graf X, ki je subdivizija od G in od H.

Definicija. GLAJENJE vozlišča stopnje 2 je obratna operacija subdiviziji povezave.

Vprašanje 23. Kaj pomeni, da je graf H minor grafa G? Kdaj sta dva grafa homeomorfna? Pojasnite operacijo kartezičnega produkta grafov.

Odgovor:

Graf H je minor grafa G, če lahko H dobimo iz podgrafa G tako, da zaporedoma krčimo nekaj povezav.

Grafa G in H sta homeomorfna, če obstaja graf X, ki je subdivizija od G in od H; torej če lahko s subdivizijami povezav pridemo do X začenši z G ali začenši s H.

Kartezični produkt grafov G in H je graf $G \square H$, katerega vozlišča so urejeni pari $(g,h) \in V(G) \times V(H)$, para (g,h) in (g',h') pa sta povezana natanko tedaj, ko je $g = g' \wedge h \sim_H h'$ ali $h = h' \wedge g \sim_G g'$.

2.15 Povezanost

Definicija. Vozlišče $v \in V(G)$ je PREREZNO VOZLIŠČE, če je $\Omega(G - v) > \Omega(G)$.

Opomba. Podobne definicije za prerezne povezave, množice in množice povezav.

Definicija. Povezan graf je k-POVEZAN, če ima vsaj $k + 1$ vozlišč in je vsaka prerezna množica moči večje ali enake k.

Definicija. Največji tak k, za katerega je graf k-povezan, imenujemo POVEZANOST grafa. Označimo jo s $\kappa(G)$. Če G ni povezan, je $\kappa(G) = 0$.

Vprašanje 24. Kaj so to prerezna vozlišča in prerezne povezave grafa? Kdaj je graf k-povezan in kaj je to povezanost grafa?

Odgovor:

Vozlišče $v \in V(G)$ je prerezno vozlišče, če je $\Omega(G - v) > \Omega(G)$. Podobno je povezava e prerezna, če je $\Omega(G - e) > \Omega(G)$.

Graf je k-povezan, če ima vsaj $k + 1$ vozlišč in je vsaka prerezna množica moči vsaj k. Največji k, za katerega to velja, je povezanost grafa.

Izrek. *WHITNEY Naj bo G graf z vsaj tremi vozlišči. Tedaj je G 2-povezan natanko tedaj, ko za vsak par vozlišč u in v obstajata notranje disjunktni uv poti.*

Dokaz. V levo: očitno.

V desno: Naj bosta $u, v \in V(G)$. Dokažimo z indukcijo na $d(u, v)$.

Če je $d(u, v) = 1$, je $uv \in E(G)$. Če $G - uv$ ni povezan, ima 2 komponenti. V vsaj eni od njiju je še eno vozlišče, ker je $|V(G)| \geq 3$. BŠS zraven u. Tedaj je u prerezno vozlišče in graf ni 2-povezan. $\rightarrow\!\leftarrow$

Naj bo P najkrajša pot med u in v ter w sosed od v na poti P. Ker je $d(u, v) \geq 2$, je $w \neq u$. Po indukcijski predpostavki obstajata notranje disjjunktni poti med u in w. Označimo ju z R in S.

Če je v na eni izmed teh poti, je $R \cup S$ cikel in obstajata poti od u do v.

Če v ni na nobeni od teh poti; graf $G - w$ je povezan, ker je G 2-povezan. Torej v $G - w$ obstaja pot med u in v; označimo jo s T. Na tej poti si izberimo zadnje vozlišče x, ki je na eni izmed poti R ali S. BŠS $x \in V(R)$. Definiramo novi poti; prva gre od u do x po R, in nato do v po T, druga pa od u od w po S, in nato stopi do w. Ti poti sta notranje disjunktni. $\square$

Izrek. *MENGER Graf G je k-povezan natanko tedaj, ko za vsak par vozlišč obstaja k notranje disjunktnih poti med njima.*

Vprašanje 25. Pojasnite Whitney-ev izrek, ki karakterizira 2-povezane grafe. Skicirajte dokaz tega izreka. Zapišite Mengerjev izrek.

Odgovor:

Mengerjev izrek: Graf je k-povezan natanko tedaj, ko za vsak par vozlišč obstaja k notranje disjunktnih poti med njima. Whitney-ev izrek je poseben primer Mengerjevega izreka za $k = 2$.

Implikacija v levo je očitna, implikacijo v desno pa dokazujemo s pomočjo indukcije na razdalji $d(u,v)$ (kjer sta u, v vozlišči, za kateri iščemo pot).

Za bazo indukcije vzamemo primer, ko sta u in v sosednji vozlišči. Dovolj je pokazati, da je $G - uv$ povezan. Ker je G 2-povezan, ima vsaj tri vozlišča; torej obstaja še tretje vozlišče w. Če bi bil $G - uv$ nepovezan, bi razpadel na dve komponenti. BŠS je w v isti komponenti kot u. Tedaj pa je u prerezno vozlišče grafa G, torej G ni 2-povezan. $\rightarrow\!\leftarrow$

Če u in v nista soseda, obstaja pot med njima. Na tej poti vzamemo vozlišče, ki je povezano z v, in ga imenujemo w. Po indukcijski predpostavki obstajata notranje disjunktni poti med u in w. Imenujmo jih R, S. Če je v na eni od njih, smo končali. Sicer je graf $G - w$ povezan (ker je G 2-povezan), torej obstaja pot med u in v, ki ne obišče w. Imenujmo jo T. Z x označimo zadnje vozlišče, ki je na poti T in na eni od R, S. Lahko velja tudi $x = u$. BŠS $x \in V(R)$. Novi poti med u in v definiramo na sledeč način: ena gre po R do x, in nato po T do v, druga pa po S do w, in nato do v po povezavi.

2.16 Drevesa

Definicija. DREVO je povezan graf brez ciklov.

Definicija. GOZD je graf brez ciklov.

Definicija. LIST drevesa je vozlišče stopnje 1.

Vprašanje 26. Kaj je drevo in kaj gozd? Katere karakterizacije dreves poznate?

Odgovor:

Gozd je graf brez ciklov.

Drevo je:

- Povezan graf brez ciklov.
- Vsak par vozlišč v G je povezan z enolično potjo.
- Povezan graf, v katerem je vsaka povezava most.
- Povezan graf z $|V(G)| - 1 = |E(G)|$.

Definicija. VPETO DREVO grafa G je njegov vpet podgraf, ki je drevo. Število vpetih dreves grafa G označimo s $\tau(G)$.

Trditev. *Če je G graf in $e \in E(G)$, je $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G|e)$.*

Dokaz. Vsa vpeta drevesa razdelimo na tista, ki vsebujejo e, in tista, ki ga ne vsebujejo. □

Vprašanje 27. Kaj je vpeto drevo grafa? Kateri grafi premorejo vpeta drevesa? Kako lahko rekurzivno določimo število vpetih dreves povezanega grafa?

Odgovor:

Vpeto drevo grafa je njegov vpet podgraf, ki je drevo.

Vsi povezani grafi premorejo vpeta drevesa.

Število vpetih dreves lahko rekurzivno izrazimo z

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G|e),$$

kjer je e poljubna povezava v G. Pri tem skrčitev povezave ohranja dvojne povezave med vozliščema.

Definicija. Laplaceova matrika grafa G je matrika s členi l_{ij}, kjer je

$$l_{ij} = \begin{cases} \deg_G(v_i) & i = j \\ -1 & i \neq j. \end{cases}$$

Izrek. *Kirchoff $\tau(G)$ je enak determinanti matrike, ki jo dobimo iz $L(G)$ tako, da odstranimo poljuben stolpec in pripadajočo vrstico.*

Vprašanje 28. Kaj je Laplaceova matrika multigrafa? Kaj pravi Kirchoffov izrek o številu vpetih dreves multigrafa?

Odgovor:

Laplaceova matrika je matrika s členi l_{ij}, kjer je $l_{ii} = \deg v_i$, in $l_{ij} = -1$ za $i \neq j$.

Kirchoffov izrek pravi, da je $\tau(G)$ enak determinanti matrike, ki jo dobimo iz $L(G)$ tako, da odstranimo poljuben stolpec in pripadajočo vrstico.

2.17 Eulerjevi grafi

Definicija. Sprehod v grafu je Eulerjev, če vsebuje vse povezave, vsako samo enkrat. Če je sprehod sklenjen, je to Eulerjev obhod.

Definicija. Graf je Eulerjev, če premore Eulerjev obhod.

Izrek. *Povezan graf je Eulerjev natanko tedaj, ko so vsa vozlišča v G sode stopnje.*

Dokaz. V desno: Vedno, ko v obhodu vstopimo v neko vozlišče, iz njega tudi izstopimo. Ker tako prepotujemo po vsaki povezavi natanko enkrat, imajo vozlišča sode stopnje.

V levo: Indukcija na številu povezav. Baza indukcije je graf K_3, za katerega izrek velja. Naj bo G poljuben povezan graf s samimi sodimi vozlišči. Ker nima listov, ni drevo. Torej ima cikel C. Tudi v grafu $H = G - E(C)$ so vsa vozlišča sode stopnje. Po indukcijski predpostavki imajo vse komponente H Eulerjev obhod. Konstruiramo Eulerjev obhod za G tako; gremo po povezavah cikla C. Ko pridemo v vozlišče, prvo obiščemo celotno njegovo komponento v H (če še ni obiskana). Nato nadaljujemo. □

Vprašanje 29. Kaj pomeni, da je graf Eulerjev? Kako karakteriziramo Eulerjeve grafe? Skicirajte dokaz slednjega rezultata.

Odgovor:

Graf je Eulerjev, če v njem obstaja Eulerjev obhod, torej če obstaja tak sprehod po grafu, ki obišče vsako povezavo natanko enkrat, in se vrne na začetek.

Povezan graf je Eulerjev natanko tedaj, ko so vsa vozlišča sode stopnje. V desno je to očitno, v levo pa dokažemo z indukcijo na številu povezav. Za bazo indukcije vzamemo trikotnik, za katerega izrek velja. Graf G nima listov, torej ni drevo. Sledi, da v njem obstaja cikel C. Graf $H = G - E(C)$ ima prav tako vsa vozlišča sode stopnje; za njegove komponente velja indukcijska predpostavka. Eulerjev obhod v G konstruiramo tako, da se pomikamo po ciklu C, ter ob prihodu v vozlišče prvo preiščemo celotno njegovo komponento v H, nato pa nadaljujemo po ciklu.

2.18 Hamiltonovi grafi

Definicija. HAMILTONOVA POT v grafu G je taka pot, ki vsebuje vsa vozlišča grafa. HAMILTONOV CIKEL je tak cikel, ki vsebuje vsa vozlišča grafa.

Definicija. Graf je HAMILTONOV, če premore Hamiltonov cikel.

Trditev. *Če je G Hamiltonov graf in $X \subseteq V(G)$, je $\Omega(G - X) \leq |X|$.*

Vprašanje 30. Kdaj je graf Hamiltonov? Navedite in pojasnite potrebni pogoj z razpadom grafa za obstoj Hamiltonovega cikla v grafu.

Odgovor:

Graf je Hamiltonov, če premore Hamiltonov cikel, torej če obstaja cikel v grafu, ki obišče vsa vozlišča.

Če je G Hamiltonov graf in $X \subseteq V(G)$ množica nekaterih vozlišč, potem velja $\Omega(G-X) \leq |X|$.

Pogoj velja, ker, če postavimo vsa vozlišča v cikel, ter jih nekaj odstranimo, nam nujno ostane vsaj $|X|$ komponent; to bodo namreč deli cikla med vozlišči, ki smo jih odstranili. Še vedno imamo lahko manj komponent, če so katera od preostalih vozlišč med seboj povezana zunaj cikla, ali če sta bili dve od odstranjenih vozlišč v ciklu sosednji.

Izrek. *ORE Će za vsak par vozlišč u, v povezanega grafa G velja*

$$u \nsim v \implies deg(u) + deg(v) \geq |V(G)|,$$

je G Hamiltonov.

Dokaz. Dokaz z metodo najmanjšega protiprimera. Recimo, da izrek ne velja. Tedaj imamo protiprimere. Med njimi izberimo takega, ki ima najmanj vozlišč, med temi pa takega, ki ima največ povezav. G ni polni graf, ker bi bil sicer Hamiltonov. Izberimo vozlišči u, v, ki nista povezani. Naj bo H graf, ki ga dobimo, če G dodamo povezavo uv. H je Hamiltonov, ker je G maksimalni protiprimer s toliko vozlišči. Torej H vsebuje Hamiltonov cikel C. Ta cikel gotovo vsebuje povezavo uv. Označimo $C = ux_2 \dots x_{n-1}v$. V G definiramo množici $S = \{i \mid ux_{i+1} \in E(G)\}$ ter $T = \{i \mid vx_i \in E(G)\}$.

Velja $|S \cup T| + |S \cap T| = |S| + |T| = \deg u + \deg v \geq |V(G)|$.

V $S \cup T$ ni vozlišča v, torej $|S \cup T| < |V(G)|$. Torej $S \cap T \neq \varnothing$.

Naj bo $j \in S \cap T$. Pot $u \to x_j \to v \to x_{j+1} \to u$ je Hamiltonov cikel v grafu G (premikamo se po C do x_j, nato skočimo na v, nato pa nazaj po C do x_{j+1}, in skočimo do u). $\rightarrow\!\leftarrow$ $\square$

Vprašanje 31. Navedite Orejev zadostni pogoj za obstoj Hamiltonovega cikla v grafu. Skicirajte dokaz tega izreka.

Odgovor:

Če v grafu G za vsak par vozlišč u, v velja sklep

$$u \nsim v \implies \deg(u) + \deg(v) \geq |V(G)|,$$

potem je G Hamiltonov.

Dokaz poteka z metodo najmanjšega protiprimera. Izmed vseh protiprimerov izberemo tiste grafe, ki imajo najmanj vozlišč, od teh pa (enega) takega, ki ima maksimalno število povezav. Imenujmo ga G. Ta graf ni Hamiltonov, torej ni poln; torej obstajata vozlišči u, v, ki nista povezani.

Če v G dodamo povezavo uv, dobimo Hamiltonov graf (G je maksimalni protiprimer s tem številom vozlišč). Naj bo $C = ux_2x_3\dots x_{n-1}v$ Hamiltonov cikel v tem večjem grafu.

Definiramo množici $S = \{i \mid ux_{i+1} \in E(G)\}$ ter $T = \{i \mid vx_i \in E(G)\}$. Po načelu vključitev in izključitev velja

$$|S \cup T| + |S \cap T| = |S| + |T| \geq |V(G)|\,.$$

Velja $v \notin S \cup T$, torej je $|S \cup T| < |V(G)|$, torej velja $S \cap T \neq \varnothing$.

Naj bo $j \in S \cap T$. Konstruiramo Hamiltonov cikel: Prvo gremo po C od u do x_j, nato skočimo na v, zatem gremo v drugi smeri po C do x_{j+1}, od tam pa skočimo na u. $\rightarrow\!\leftarrow$

2.19 Ravninski grafi

Definicija. Graf G je RAVNINSKI, če ga lahko narišemo v ravnini tako, da se nobeni njegovi povezavi ne križata. Taki risbi rečemo RAVNINSKA RISBA.

Definicija. Dolžini najkrajšega cikla v grafu pravimo OŽINA in jo označimo z $g(G)$.

Definicija. Sklenjena območja v ravnini, ki jih dobimo z ravninsko vložitvijo grafa G, imenujemo LICA VLOŽITVE. Množico vseh lic označimo z $F(G)$.

Izrek. EULERJEVA FORMULA *Če je G ravninski graf, vložen v ravnino, potem je*

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 1 + \Omega(G)$$

Dokaz. Dokažimo za povezane grafe; $\Omega(G) = 1$.

Označimo $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$ in $f = |F(G)|$.

Indukcija po m. Za $m = 0$ ter $m = 1$ izrek velja. Recimo, da velja za vse $m' < m$. Če je G drevo, je $m = n - 1$ ter $f = 1$ in izrek velja. Če G ni drevo, ima cikel C, ki omejuje neko lice. Naj bo e povezava tega cikla. Naj bo $H = G - e$. Za H velja indukcijska predpostavka, torej $n - (m - 1) + (f - 1) = 2$, torej $n - m + f = 2$. □

Posledica. *Če je G povezan graf, vložen v ravnino, in ni drevo, potem je*

$$|E(G)| \leq \frac{g(G)}{g(G) - 2}(|V(G)| - 2)$$

Dokaz.

$$|F(G)| \leq \frac{2}{g(G)}\,|E(G)|$$

(lema o rokovanju za lica)

$$|F(G)| = 2 - |V(G)| + |E(G)|$$

Torej

$$|E(G)|\,(1 - \frac{2}{g(G)}) \leq |V(G)| - 2$$

□

Vprašanje 32. Kaj so ravninski grafi? Kaj so lica ravninske vložitve grafa in čemu je enaka vsota dolžin vseh lic ravninske vložitve grafa? Kako lahko omejimo število povezav ravninskega grafa s pomočjo njegove ožine?

Odgovor:

Graf je ravninski, če ga lahko narišemo v ravnini tako, da se nobeni povezavi ne sekata.

Lica ravninske vložitve so sklenjena območja v ravnini, ki jih dobimo z ravninsko vložitvijo grafa.

Po lemi o rokovanju za lica velja

$$2\,|E(G)| = \sum_{f \in F(G)} l(f).$$

Velja

$$|E(G)| \leq \frac{g(G)}{g(G) - 2}(|V(G)| - 2)$$

Vprašanje 33. Kaj pravi Eulerjeva formula za ravninske grafe? Skicirajte njen dokaz. Katere posledice Eulerjeve formule poznate?

Odgovor:

Eulerjeva formula poda enačbo (za ravninske grafe):

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 1 + \Omega(G).$$

Obravnavamo lahko samo povezane grafe. Dokaz je z indukcijo na številu povezav. Za bazo vzamemo grafa P_1 ter P_2, za katera izrek velja.

V koraku indukcije ločimo primera, ko je G drevo ali ne. Če je drevo, eksplicitno poznamo število lic in število povezav, tedaj formula velja. Če ni drevo, vzamemo poljuben cikel, ter mu odstranimo povezavo. Dobimo graf, ki je še vedno povezan, za katerega velja indukcijska predpostavka. Iz tega takoj sledi izrek za G.

Posledica Eulerjeve formule je, da je število lic konstantno ne glede na risbo. Poleg tega izrek uporabimo v dokazu zgornje meje za število povezav zgoraj.

2.20 Barvanja grafov

Definicija. Preslikava $f : V(G) \to [k]$ je k-BARVANJE grafa G, če velja

$$uv \in E(G) \implies f(u) \neq f(v).$$

Definicija. KROMATIČNO ŠTEVILO $\chi(G)$ je najmanjši tak k, da obstaja k-barvanje grafa G.

Trditev. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Trditev. *Naj bo $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ zaporedje stopenj grafa G. Tedaj velja*

$$\chi(G) \leq \max_i(\min\{i-1, d_i\}) + 1$$

Vprašanje 34. Kaj je kromatično število $\chi(G)$ grafa G? Pojasnite požrešni algoritem barvanja grafa. Kako lahko z njegovo pomočjo navzgor omejimo $\chi(G)$?

Odgovor:

Kromatično število $\chi(G)$ je najmanjše število k, za katerega obstaja k-barvanje grafa G (preslikava $V(G) \to [k]$, ki sosednjim vozliščem priredi različne barve).

Požrešni algoritem si izbere vrstni red vozlišč v grafu, ter na vsakem koraku vozlišču priredi najmanjšo barvo, s katero ni že pobarvan noben njegov sosed. Algoritem ne daje vedno optimalnih rezultatov, obstaja pa vrstni red vozlišč, za katerega bo algoritem dal pravi rezultat.

Če algoritem poženemo na poljubnem vrstnem redu, lahko ocenimo, da bo $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$; v najslabšem primeru bodo vsi sosedje vozlišča s stopnjo $\Delta(G)$ drugače pobarvani, in bomo potrebovali $\Delta(G) + 1$ barv.

Če algoritem poženemo na zaporedju vozlišč s padajočimi stopnjami $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$, dobimo boljšo zgornjo mejo

$$\chi(G) \leq \max_i(\min\{d_i, i-1\}) + 1.$$

Vozlišče i lahko gotovo pobarvamo z barvo i, ker je to i-to po vrsti. S podobnih argumentom kot prej pa je na voljo tudi barva $d_i + 1$.

Izrek. *Brooks Če je G povezan graf, ki ni polni graf ali lih cikel, je $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Definicija. Preslikava $c : E(G) \to [k]$ je k-barvanje povezav, če velja

$$uv, uw \in E(G) \implies c(uv) \neq c(uw)$$

Definicija. Najmanjši k, za katerega obstaja k-barvanje povezav, imenujemo kromatični indeks grafa G in označimo $\chi'(G)$.

Izrek. *Vizing Za vsak graf G velja $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Definicija. Če je $\chi'(G) = \Delta(G)$, je G razreda 1. Če je $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, je G razreda 2.

Vprašanje 35. Kaj je kromatični indeks $\chi'(G)$ grafa G? Kaj pravi Vizingov izrek in kako na njegovi osnovi razdelimo vse grafe v dva razreda?

Odgovor:

Kromatični indeks je najmanjši tak k, za katerega obstaja k-barvanje povezav grafa G. Barvanje povezav je preslikava $E(G) \to [k]$, ki povezavama s skupnim vozliščem priredi različni barvi.

Vizingov izrek pravi, da je kromatični indeks bodisi enak $\Delta(G)$ bodisi enak $\Delta(G) + 1$. Grafe tako razdelimo glede na to, katera enakost tu drži; če drži prva, je graf razreda 1, sicer je razreda 2.

---

3 Analiza 2b

3.1 Hilbertovi prostori in Fourierov razvoj

Vprašanje 1. Definiraj skalarni produkt na realnem vektorskem prostoru X.

Odgovor: Skalarni produkt na vektorskem prostoru X je preslikava $\cdot,\cdot : X \times X \to \mathbb{R}$, za katero velja:

- $\langle x, x \rangle \geq 0$
- $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$

Vprašanje 2. Kaj pravi Cauchy-Schwarzova neenakost?

Odgovor: Za vektorja x, y velja

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 .$$

Enakost velja natanko tedaj, ko sta vektorja linearno odvisna.

Definicija. Vektorski prostor X s skalarnim produktom je Hilbertov prostor, če je poln metrični prostor za porojeno metriko.

Vprašanje 3. Definiraj Hilbertov prostor.

Vprašanje 4. Dokaži, da $\mathcal{C}([a, b])$ z integralskim skalarnim produktom ni Hilbertov prostor.

Odgovor: Definiramo zaporedje funkcij

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ nx & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -1 & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$$

za $x \in [-1, 1]$. To zaporedje je Cauchyjevo, vendar ne konvergira k zvezni funkciji; če konvergira k f, mora veljati $f(x) = 1$ za $x > 0$ in $f(x) = -1$ za $x < 0$.

Definicija. Napolnitev metričnega prostora M je izometrična vložitev M v prostor $\overline{M}$, ki je poln, in kjer je M gosta v $\overline{M}$.

Vprašanje 5. Kaj je napolnitev $\mathcal{C}([a,b])$?

Odgovor: Množica $L^2([a,b])$ kvadratno integrabilnih funkcij.

Definicija. Naj bo Y podprostor X in $x \in X$. PRAVOKOTNA PROJEKCIJA vektorja x na Y, če obstaja, je tak vektor $P_Y(x) \in Y$, da je $x - P_Y(x)$ pravokoten na vse vektorje iz Y.

Trditev. *Naj bo A podmnožica vektorskega prostora X. ORTOGONALNI KOMPLEMENT množice A je množica $A^\perp = \{x \in X \mid \forall a \in A. a \perp x\}$.*

Trditev. *$A^\perp$ je vektorski podprostor v X.*

Opomba. Velja $(A^\perp)^\perp \supset A$. Če je X končnodimenzionalen, in je A vektorski podprostor, velja enakost; sicer pa ne nujno.

Za $X = L^2([a,b])$ in $A = \mathcal{C}([a,b])$ velja $A^\perp = \{0\}$, ker so na vse zvezne funkcije za integralski skalarni produkt pravokotne natanko tiste funkcije, ki so enake nič skoraj povsod; te pa spadajo v isti ekvivalenčni razred, torej so predstavljene z 0 v L^2.

Velja $(A^\perp)^\perp = L^2([a,b]) \neq \mathcal{C}([a,b])$.

Opomba. $A^\perp$ je zaprt podprostor, ker vsebuje limite vseh zaporedij v A. Skalarni produkt je zvezna preslikava, torej velja

$$0 = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, a\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} x_n, a \right\rangle .$$

Opomba. Če je V zaprt podprostor Hilbertovega prostora, je $(V^\perp)^\perp = V$.

Vprašanje 6. Dokaži: naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom, Y njegov podprostor in $x \in X$. Če obstaja pravokotna projekcija x na Y, je enolično določena in je najboljša aproksimacija x z vektorji iz Y.

Odgovor: Recimo, da sta y_1 in y_2 pravokotni projekciji x na Y. Tedaj velja $x-y_1, x-y_2 \in Y^\perp$, torej $x - y_1 - (x - y_2) \in Y^\perp$ (ker je podprostor). Torej $y_2 - y_1 \in Y^\perp$, velja pa tudi $y_2 - y_1 \in Y$. Torej $y_2 - y_1 \perp y_2 - y_1$, torej $y_1 = y_2$.

Naj bo $w \in Y$. Dokazujemo, da velja $\|x - w\| \geq \|x - P_Y(x)\|$.

$$x - w = \underbrace{x - P_Y(x)}_{\in Y^\perp} + \underbrace{P_Y(x) - w}_{\in Y}$$

Po Pitagorovem izreku torej velja

$$\|x - w\|^2 = \|x - P_Y(x)\|^2 + \|P_Y(x) - w\|^2 \geq \|x - P_Y(x)\|^2$$

Opomba. Projekcija je idempotent; $P_Y^2 = P_Y$ (za kompozitum).

Vprašanje 7. Dokaži: če ima x pravokotno projekcijo na Y, ima tudi pravokotno projekcijo na $Y^\perp$.

Odgovor:

$x - P_Y(x)$ je pravokotna projekcija na $Y^\perp$; velja $x - (x - P_Y(x)) \in Y \subseteq (Y^\perp)^\perp$.

Vprašanje 8. Naj bo Y končnodimenzionalni vektorski podprostor prostora X s skalarnim produktom. Naj bo $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ njegova ortonormirana baza. Kako izračunaš pravokotno projekcijo $x \in X$ na Y?

Odgovor:

$$P_Y(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle \, e_j.$$

Opomba. Za vsak podprostor Y v X, ki ima končno kodimenzijo, obstaja pravokotna projekcija za vse $x \in X$.

Definicija. Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom. ORTOGONALEN SISTEM je nabor vektorjev $(e_j)_j \subseteq X$, da velja $\forall i, j. e_i \perp e_j$.

Ortogonalen sistem je ORTONORMIRAN, če so vektorji normirani.

Trditev. *BESSELOVA NEENAKOST Naj bo X vektorski prostor s skalarnim produktom. Naj bo $(e_j)_j$ ONS in $x \in X$. Tedaj je*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Dokaz. Tvorimo $Y_n = \mathrm{Lin}(\{e_1, e_2, \ldots, e_n\})$. Ti vektorji so ONB za Y_n, torej za $x \in X$ velja

$$P_{Y_n}(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle \, e_j.$$

Po Pitagorovem izreku je $\|P_{Y_n}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$. □

Vprašanje 9. Povej in dokaži Besselo neenakost.

Trditev. *Naj bo X Hilbertov prostor. Naj bodo $(c_j)_j$ taka števila, da je $\sum_j |c_j|^2 < \infty$. Naj bo $(e_n)_n$ ONS. Obstaja vektor $x \in X$, da velja $\langle x, e_n \rangle = c_n$ za vse n.*

Dokaz. Definiramo $s_n = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j$. Ker je to zaporedje Cauchyjevo (vrsta kvadratov konvergira), in je X Hilbertov, ima zaporedje limito, ki očitno ustreza pogoju. $\square$

Definicija. ONS je KOMPLETEN, če za vsak $x \in X$ velja $x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j$.

Izrek. *Naj bo X Hilbertov prostor in $(e_n)_n$ ONS. Naslednje izjave so ekvivalentne:*

1. $(e_n)_n$ *je KONS.*
2. $\forall x, y \in X.\, \langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle \overline{\langle y, e_j \rangle}$.
3. $\forall x \in X.\, \|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2$.
4. $(e_n)_n$ *ni vsebovan v nobenem strogo večjem KONS.*
5. *Edini vektor, pravokoten na vse* e_n*, je* 0.
6. *Končne linearne kombinacije vektorjev* e_n *so goste v* X.

Dokaz. 1 v 2: Naj bosta $x, y \in X$. Razvijemo x po sistemu:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j.$$

Tedaj

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j, y \right\rangle \\ &= \left\langle \lim_{N \to \infty} \sum_{j=1}^{N} \langle x, e_j \rangle e_j, y \right\rangle\end{aligned}$$

Zaradi zveznosti skalarnega produkta velja

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \lim_{N \to \infty} \left\langle \sum_{j=1}^{N} \langle x, e_j \rangle e_j, y \right\rangle \\ &= \lim_{N \to \infty} \sum_{j=1}^{N} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, y \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, y \rangle .\end{aligned}$$

2 v 3: Uporabimo predpostavko za $x = y$.

3 v 4: Denimo, da obstaja strogo večji ONS. Tedaj obstaja e_0, da je $e_0 \perp e_j$ za vse $j > 1$, in $\|e_0\| = 1$. Velja

$$\|e_0\| = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle e_0, e_j \rangle|^2 = \sum 0 = 0.$$

—×—

4 v 5: Če imamo neničelni vektor, pravokoten na vse ostale, ga lahko normiramo in dobimo strogo večji ONS.

5 v 1: Naj bo $x \in X$ in $\tilde{x} = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j$. Definiramo $v = x - \tilde{x}$.

Velja

$$\begin{aligned}\langle v, e_n \rangle &= \left\langle x - \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j, e_n \right\rangle \\ &= \langle x, e_n \rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j, e_n \right\rangle \\ &= \langle x, e_n \rangle - \langle x, e_n \rangle = 0.\end{aligned}$$

Torej je v pravokoten na vse e_n, torej je $v = 0$.

1 v 6: Za $x \in X$ velja $x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j \rangle e_j = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \langle x, e_j \rangle e_j$. Za vsak $\varepsilon > 0$ lahko najdemo N, da bo x blizu linearne kombinacije prvih N členov.

6 v 5: Naj bo $x \perp e_j$ za vse j. Naj bo $\varepsilon > 0$. Obstajajo $N \in \mathbb{N}$ ter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$, da je

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j e_j \right\| < \varepsilon.$$

Tedaj $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle x, x \rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{N} \lambda_j e_j, x \right\rangle$ (e_j vektorji so pravokotni na x). Po Cauchy-Schwarzovi neenakosti torej velja

$$\|x\|^2 \leq \|x\| \left\| x - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j e_j \right\|.$$

Če $\|x\| \neq 0$, je $\|x\| < \varepsilon$ za vse $\varepsilon > 0$. Torej je $\|x\| = 0$. □

Vprašanje 10. Karakteriziraj kompletnost ortonormiranega sistema in dokaži karakterizacijo.

Vprašanje 11. Kaj je Parsevalova enakost?

Odgovor: Pogoj $\forall x \in X.\, \|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2$ za KONS.

Vprašanje 12. Izpelji koeficiente v Fourierovi vrsti.

Odgovor: Vemo, da je $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)\}$ ONS za $L^2([-\pi, \pi])$.

Želimo dobiti

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

za enakost v smislu prostora L^2.

Velja

$$\frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

ter

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx,$$

in podobno $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx$.

Vprašanje 13. Kaj je Riemann-Lebesgueova lema? Kako se jo dokaže?

Odgovor: Trdi, da je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ in $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ za koeficiente Fourierovega razvoja. Sledi iz Besselove neenakosti.

Vprašanje 14. Kako predstaviš Parsevalovo enakost za Fourierov razvoj?

Odgovor:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Definicija. Če ima $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na vsakem končnem intervalu kvečjemu končno mnogo točk nezveznosti, in če ima v vseh teh točkah levo in desno limito, je ODSEKOMA ZVEZNA.

Definicija. Če ima $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na vsakem končnem intervalu kvečjemu končno mnogo točk, kjer ni odvedljiva, in če ima v vsaki od teh točk levi in desni odvod, je ODSEKOMA ODVEDLJIVA.

Vprašanje 15. Definiraj odsekoma zvezne in odsekoma odvedljive funkcije.

Trditev. *Če je f periodična s periodo p in integrabilna na vsakem končnem intervalu, je za vsak $a \in \mathbb{R}$:*

$$\int_{a}^{a+p} f(t)dt = \int_{0}^{p} f(t)dt.$$

Dokaz.

$$\int_a^{a+p} f(t)dt = \int_a^p f(t)dt + \int_p^{a+p} f(t)dt.$$

Uvedemo $x = t - p$ in dobimo

$$= \int_a^p f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = \int_0^p f(t)dt.$$

□

Vprašanje 16. Dokaži: integral po območju dolžine p za p-periodično funkcijo je enak ne glede na izbrano območje.

Definicija. Dirichletovo jedro je funkcija $D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx)$.

Vprašanje 17. Čemu je Dirichletovo jedro enako? Dokaži.

Odgovor:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) =& \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \\
=& \frac{1}{2}(1 + e^{-ix} + e^{-i2x} + \ldots + e^{-inx} + e^{ix} + \ldots + e^{inx}) \\
=& \frac{1}{2} e^{-inx}(1 + e^{ix} + \ldots + e^{i2nx}) \\
=& \frac{1}{2} e^{-inx} \frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}} \\
=& \frac{1}{2} \frac{e^{(n+1)ix} - e^{-inx}}{e^{ix} - 1} \\
=& \frac{1}{2} \frac{e^{(n+\frac{1}{2})ix} - e^{-(n+\frac{1}{2})ix}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \\
=& \frac{1}{2} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}
\end{aligned}$$

Izrek. *Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodična funkcija, ki je odsekoma zvezna in odsekoma odvedljiva. Tedaj za vsak $x_0 \in \mathbb{R}$ velja*

$$\frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx_0) + b_n \sin(nx_0)).$$

Dokaz. Definiramo $S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx_0) + b_k\sin(kx_0))$.

$$\begin{aligned} S_n =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\cos(kx_0)dt + \frac{1}{\pi}f(t)\sin(kt)\sin(kx_0)dt\right) \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n} f(t)\cos(kt-kx_0)dt. \end{aligned}$$

Uvedemo $y = t - x_0$;

$$\begin{aligned} S_n =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n} f(y+x_0)\cos(ky)dy \\ =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y+x_0)(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(ky))dy \\ =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y+x_0)D_n(y)dy \\ =& \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(-y'+x_0)D_n(-y')dy' + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(y+x_0)D_n(y)dy \\ =& \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (f(-y+x_0) + f(y+x_0))D_n(y)dy. \end{aligned}$$

Integral razbijemo na dva člena in posebej obravnavamo razliko z $\frac{1}{2}f(x_0\pm)$. Pri tem uporabimo dejstvo $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(y)dy = \frac{1}{2}$. Prvi člen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x_0+y) - f(x_0+))D_n(y)dy \\ =& \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{f(x_0+y) - f(x_0+)}{y} yD_n(y)dy \\ =& \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{f(x_0+y) - f(x_0+)}{y} y\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\frac{y}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\sin(ny) + \cos(ny)\right)dy \end{aligned}$$

Za $F(y) = \frac{f(x_0+y)-f(x_0+)}{y}\frac{y}{\sin\frac{y}{2}}\cos\frac{y}{2}$ velja

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi F(y)\sin(ny)dy = 0$$

po Besselovi neenakosti, ker je $F \in L^2$. Podobne ocene naredimo za ostale člene. $\square$

Vprašanje 18. Povej in dokaži izrek o vsoti Fourierove vrste po točkah.

Definicija. Integral oblike

$$(f * g)(x) = \int_a^b f(t)g(x-t)dt$$

se imenuje KONVOLUCIJA.

Vprašanje 19. Povej primer ortogonalnega sistema za interval $[-l, l]$.

Odgovor: $\{1, \cos(n\pi\frac{x}{l}), \sin(n\pi\frac{x}{l})\}$.

Vprašanje 20. Kako rastejo Fourierovi koeficienti za $\mathcal{C}^k$ funkcijo f? Pri katerem k vrsta nujno konvergira absolutno proti f?

Odgovor: Velja

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = -\frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin(nt)dt.$$

Integral na koncu je Fouerierov koeficient za f'. Sledi $a_n, b_n = O(\frac{1}{n^k})$. Fouerierova vrsta konvergira absolutno že za $k = 2$ ali več.

Definicija. Naj bo f zvezna 2π-periodična funkcija. CESÁROVA vsota za f je izraz $\Sigma_N(x) = \frac{1}{N}(S_0(x) + \ldots + S_{N-1}(x))$, kjer je $S_K(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{K}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$.

Trditev. *Definiramo* FEJÉRJEVO JEDRO

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x).$$

Veljajo naslednje lastnosti:

1. $F_N(x) = \frac{1}{2N}\left(\frac{\sin(\frac{1}{2}Nx)}{\sin(\frac{1}{2}x)}\right)^2$.
2. $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)dx = 1$.
3. $\forall x. F_N(x) \geq 0$, F *je soda funkcija.*
4. $\lim_{N\to\infty} F_N(x) = 0$ *enakomerno za* $a \leq |x| \leq \pi$ *za vsak* $a \in (0, \pi)$.

Dokaz. Vsako točko dokažemo posebej:

1. Pokažemo z računom:

$$\begin{aligned}
F_N(x) =& \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{2}\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} \\
=& \frac{1}{2N}\frac{1}{\sin^2(\frac{1}{2}x)}\sum_{n=0}^{N-1}\sin((n+\frac{1}{2})x)\sin(\frac{1}{2}x) \\
=& \frac{1}{2N}\frac{1}{\sin^2(\frac{1}{2}x)}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{2}(\cos nx - \cos(n+1)x)
\end{aligned}$$

Zaporedni členi v vsoti se odštejejo, ostaneta nam le dva; zanju uporabimo adicijski izrek:

$$F_N(x) = \frac{1}{2N}\frac{1}{\sin^2(\frac{1}{2}x)}\frac{1}{2}(\cos 0 - \cos(Nx)) = \frac{1}{2N}\frac{\sin^2(\frac{1}{2}Nx)}{\sin^2(\frac{1}{2}x)}$$

2. Sledi iz definicije in $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = 1$.
3. Direktno sledi iz prve točke.
4. Opazimo naslednjo lastnost sinusa: Naj bo t tak, da je $|t| \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Tedaj je graf sinusa nad daljico $(0,0) \to (t, \sin t)$, torej velja

$$\frac{2\,|t|}{\pi} \leq |\sin t|\,.$$

Torej

$$\frac{1}{|\sin t|} \leq \frac{\pi}{2\,|t|}.$$

Naj bo $|x| \leq \pi$. Za $0 < a \leq |x|$ tedaj velja

$$\frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}x\right|} \leq \frac{\pi}{|x|} \leq \frac{\pi}{a}.$$

Torej

$$|F_N(x)| \leq \frac{1}{2N}\frac{\pi^2}{a^2} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

enakomerno na opisanem območju.

□

Izrek. *Naj bo f zvezna 2π-periodična funkcija na $\mathbb{R}$. Tedaj Cesárova vsote konvergirajo k f enakomerno na $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Po drugi točki pomožne trditve velja

$$\Sigma_N(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+y) - f(x))F_N(y)dy.$$

Ker je F_N nenegativna, je

$$|\Sigma_N(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+y) - f(x)|\,F_N(y)dy.$$

Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je f enakomerno zvezna, obstaja $\delta > 0$, da velja sklep

$$|y| < \delta \implies |f(x+y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Integral razbijemo na dva dela; prvo obravnavamo interval $[-\delta, \delta]$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x+y)-f(x)|\, F_N(y)dy < \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} F_N(y)dy \leq \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{2}\pi = \frac{\varepsilon}{2}$$

Za drug del intervala uporabimo oceno za f v supremum normi:

$$\int_{\delta\leq|y|\leq\pi} |f(x+y)-f(x)|\, F_N(y)dy \leq \frac{1}{\pi}\int_{\delta\leq|y|\leq\pi} 2\,\|f\|\, F_N(y)dy \leq \frac{2\,\|f\|}{\pi}2\pi \max_{\delta\leq|y|\leq\pi} |F_N(y)|\,.$$

Po zadnji točki pomožne trditve $\max F_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ enakomerno, torej je za dovolj velike N tudi ta kos integrala omejen z $\frac{\varepsilon}{2}$. □

Vprašanje 21. Povej in dokaži izrek o Cesárovih vsotah, vključno s pomožno trditvijo.

Opomba. Če je f zvezna na $[-\pi, \pi]$, in $f(-\pi) \neq f(\pi)$, lahko f predstavimo kot limito funkcij

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & -\pi + \frac{1}{n} \leq x \leq \pi - \frac{1}{n} \\ -nf(\pi - \frac{1}{n})(x-\pi) & \pi - \frac{1}{n} \leq x \leq \pi \\ nf(-\pi + \frac{1}{n})(x+\pi) & -\pi \leq x \leq -\pi + \frac{1}{n} \end{cases}$$

v L^2 smislu. Te funkcije so periodične in zvezne (oba konca sta na ničli), torej ustrezajo izreku. Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja zvezna periodična funkcija g, da je $d_2(f, g) < \varepsilon$. Po izreku za g obstaja trigonometrični polinom T, da je $\|g - T\|_\infty < \varepsilon$. Velja $d(g, T) < \varepsilon\sqrt{2\pi}$. Torej so trigonometrični polinomi gosti v L^2, zato je

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\}$$

KONS.

Vprašanje 22. S pomočjo izreka o Cesárovih vsotah dokaži, da je Fouerierov sistem KONS.

Vprašanje 23. S pomočjo Fourierovega razvoja dokaži Weierstrassov izrek.

Odgovor: Dokazujemo, da so polinomi gosti na $\mathcal{C}([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$. Sledilo bo, da so gosti na vsakem zaprtem intervalu (linearne transformacije ohranjajo polinome). Naj bo $f \in \mathcal{C}([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$. Funkcijo lahko zvezno razširimo do zvezne periodične $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ (linearno povežemo z 0). Naj bo $\varepsilon > 0$. Po izreku obstaja trigonometrični polinom T, da je $\|f - T\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Velja $T(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx))$ za neke α_i, β_i. Sinuse in kosinuse v tem izrazu lahko poljubno dobro aproksimiramo s Taylorjevimi polinomi; obstaja torej polinom p, da je $\|T - p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$.

3.2 Vektorska analiza

Definicija. ONB $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ je POZITIVNO ORIENTIRANA, če velja $\vec{b}_3 = \vec{b}_1 \times \vec{b}_2$.

Definicija. Funkcije $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ imenujemo SKALARNA POLJA, preslikave $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pa VEKTORSKA POLJA.

Opomba. Med različnimi ortonormiranimi bazami lahko pretvarjamo z ortogonalnimi matrikami.

Definicija. Naj bo $u : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalarno polje, $a \in D$ ter $\vec{s} \neq 0$. SMERNI ODVOD SKALARNEGA POLJA u V TOČKI a IN SMERI VEKTORJA s je

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{u(a + h\vec{s}) - u(a)}{h},$$

če ta limita obstaja.

Opomba. Velja $\partial_{\vec{e}_1} = \partial_x$, $\partial_{\vec{e}_2} = \partial_y$, $\partial_{\vec{e}_3} = \partial_z$.

Opomba. Če je u diferenciabilna v a, je $t \mapsto u(a+t\vec{s})$ diferenciabilna z odvodom $Du(a)\cdot\vec{s}$. Seveda velja $\partial_{\vec{s}}u(a) = \partial_t(t \mapsto a + t\vec{s})$. V standardni bazi je

$$Du(a) = \begin{bmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{bmatrix} (a).$$

Za $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ je tedaj

$$Du(a)\vec{s} = \partial_{\vec{s}}\, u(a) = \partial_x u(a)s_1 + \partial_y u(a)s_2 + \partial_z u(a)s_3 = (\partial_x u(a), \partial_y u(a), \partial_z u(a)) \cdot \vec{s}.$$

Definicija. Naj bo $u : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciabilna na D. GRADIENT u je vektorsko polje $\vec{\nabla}.u = (\partial_x u, \partial_y u, \partial_z u)$.

Opomba. Ker sta diferencial in skalarni produkt neodvisna od baze, je tudi gradient neodvisen od izbire baze.

Trditev. *Naj bo $u : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalarno polje. Naj bo $a \in D$ in u diferenciabilna v a. Predpostavimo $\vec{\nabla}.u \neq 0$. Naj bo $\|\vec{s}\| = 1$. Smerni odvod $\partial_{\vec{s}}u(a)$ je največji, če $\vec{s}$ kaže v smeri gradienta in najmanjši, če $\vec{s}$ kaže v nasprotni smeri.*

Dokaz. $\partial_{\vec{s}}u = \vec{\nabla}.u \cdot \vec{s} = \left\|\vec{\nabla}.u\right\| \cos\phi$, kjer je ϕ kot med $\vec{s}$ in $\vec{\nabla}.u$. □

Vprašanje 24. Kdaj je smerni odvod skalarnega polja največji?

Definicija. DIVERGENCA vektorskega polja $\vec{R} \in \mathcal{C}^1(D)$ je skalarno polje $\vec{\nabla} \cdot \vec{R}$, kjer za $\vec{R} = (X, Y, Z)$ velja $\vec{\nabla} \cdot \vec{R} = X_x + Y_y + Z_z$ (v običajnih koordinatah).

Definicija. ROTOR vektorskega polja $\vec{R} \in \mathcal{C}^1(D)$ je vektorsko polje $\vec{\nabla} \times \vec{R}$. Za $\vec{R} = (X, Y, Z)$ velja

$$\vec{\nabla} \times \vec{R} = \begin{bmatrix} Z_y - Y_z \\ X_z - Z_x \\ Y_x - X_y \end{bmatrix}$$

Vprašanje 25. Definiraj gradient, divergenco in rotor.

Trditev. *Naj bo* $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^3$*. Naj bo* $u \in \mathcal{C}^2(D)$ *skalarno polje. Tedaj* $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}.u = 0$*. Naj bo* $\vec{R} \in \mathcal{C}^2(D)$ *vektorsko polje. Tedaj* $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{R}) = 0$*.*

Dokaz. $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}.u) = ((u_x)_y - (u_y)_x, (u_x)_z - (u_z)_x, (u_y)_x - (u_x)_y) = 0$. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{R}) = (Z_y)_x - (Y_z)_x + (X_z)_y - (Z_x)_y + (Y_x)_z - (X_y)_z = 0$. □

Vprašanje 26. Katera para vektorskih operacij se izničita? Povej trditev in jo dokaži.

Definicija. LAPLACEOV OPERATOR skalarnega polja je $\Delta u = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}.u)$.

Opomba. $\Delta = \partial^2_{x^2} + \partial^2_{y^2} + \partial^2_{z^2}$.

Definicija. Funkcija u je HARMONIČNA na D, če je $\Delta u = 0$ na D.

Vprašanje 27. Kaj je Laplaceov operator? Kdaj je funkcija harmonična?

Definicija. Vektorsko polje $\vec{R} : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je POTENCIALNO, če ostaja skalarno polje $u : D \to \mathbb{R}$, da je $\vec{R} = \vec{\nabla}.u$. Tedaj je u POTENCIAL polja $\vec{R}$.

Vprašanje 28. Koliko potencialov ima potencialno polje? Kakšni so med seboj?

Odgovor: Ima neštevno mnogo potencialov. Velja $\vec{\nabla}.u = \vec{\nabla}.v \Leftrightarrow \vec{\nabla}.(u - v) = 0$, gradient $\vec{\nabla}.w$ pa je ničeln natanko tedaj, ko je $w_x = w_y = w_z = 0$. Funkcija w mora biti konstantna na povezanih komponentah. Če je D povezan, so vse funkcije oblike $u_0 + C$ potenciali, kjer je u_0 neka partikularna rešitev.

Definicija. Vektorsko polje $\vec{R}$ je IROTACIONALNO, če je $\vec{\nabla} \times \vec{R} = 0$.

Opomba. Če je $\vec{R}$ potencialno, je tudi irotacionalno.

Vprašanje 29. Podaj primer $\mathcal{C}^2(D)$ vektorskega polja, ki je potencialno, ne pa tudi irotacionalno.

Odgovor: Tako polje ne obstaja.

Definicija. Vektorsko polje $\vec{R}$ je SOLENOIDALNO, če je $\vec{\nabla} \cdot \vec{R} = 0$.

Izrek. *Naj bo* $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^3$ *zvezdasto območje. Naj bo* $\vec{R} \in \mathcal{C}^1(D)$ *vektorsko polje.*

- *Polje* $\vec{R}$ *je potencialno na* D *natanko tedaj, ko je* $\vec{\nabla} \times \vec{R} = 0$*.*
- *Polje* $\vec{R}$ *ima vektorski potencial (obstaja* $\vec{g} \in \mathcal{C}^2(D)$*, da je* $\vec{R} = \vec{\nabla} \times \vec{g}$*) natanko tedaj, ko je* $\vec{\nabla} \cdot \vec{R} = 0$*.*

Dokaz. Brez škode za splošnost je D zvezdasto glede na 0. Naj bo $(x,y,z) \in D$ in $\vec{R} = (X,Y,Z)$.

- Definiramo

$$u(x,y,z) = \int_0^1 (xX(tx,ty,tz) + yY(tx,ty,tz) + zZ(tx,ty,tz))dt.$$

Velja

$$\begin{aligned} u_x(x,y,z) &= \partial_x \int_0^1 (xX(tx,ty,tz) + yY(tx,ty,tz) + zZ(tx,ty,tz))dt \\ &= \int_0^1 (X(tx,ty,tz) + xtX_x(tx,ty,tz) + ytY_x(tx,ty,tz) + ztZ_x(tx,ty,tz))dt \end{aligned}$$

Ker je

$$\vec{\nabla} \times \vec{R} = (Z_y - Y_z, X_z - Z_x, Y_x - X_y) = 0,$$

je $Y_x = X_y$ in $Z_x = X_z$. Torej

$$\begin{aligned} u_x &= \int_0^1 (X + xtX_x(tx,ty,tz) + ytX_y(tx,ty,tz) + ztX_z(tx,ty,tz))dt \\ &= \int_0^1 \partial_t(tX(tx,ty,tz))dt \\ &= X(x,y,z). \end{aligned}$$

Podobno ugotovimo $u_y = Y$ in $u_z = Z$.

- Definiramo

$$\begin{aligned} \alpha(x,y,z) &= \int_0^1 tX(tx,ty,tz)dt \\ \beta(x,y,z) &= \int_0^1 tY(tx,ty,tz)dt \\ \gamma(x,y,z) &= \int_0^1 tZ(tx,ty,tz)dt. \end{aligned}$$

Ker je D zvezdasto območje, so te funkcije dobro definirane. Velja $\vec{\nabla} \cdot \vec{R} = X_x + Y_y + Z_z = 0$. Za polje (α, β, γ) velja:

$$\alpha_x + \beta_y + \gamma_z = \int_0^1 (t^2 X_x + t^2 Y_y + t^2 Z_z)dt = \int_0^1 (t^2 \cdot 0)dt = 0.$$

Definiramo $\vec{G}(x,y,z) = (\alpha, \beta, \gamma) \times (x,y,z)$. Poglejmo prvo komponento $\vec{\nabla} \times \vec{G}$. To je

$$\begin{aligned}
&\alpha + y\alpha_y - x\beta_y - x\gamma_z + \alpha + z\alpha_z \\
&= 2\alpha + y\alpha_y + z\alpha_z - x(\beta_y + \gamma_z) \\
&= 2\alpha + y\alpha_y + z\alpha_z - x(-\alpha_x) \\
&= \int_0^1 (2tX + xt^2X_x + yt^2X_y + zt^2X_z)dt \\
&= \int_0^1 \partial_t(t^2X(tx,ty,tz))dt \\
&= X(x,y,z).
\end{aligned}$$

Zadnji sklep sledi iz osnovnega izreka o analizi. Podobno naredimo na drugih dveh komponentah.

□

Vprašanje 30. Karakteriziraj potencialnost in vektorsko potencialnost vektorskega polja na zvezdasti množici in dokaži karakterizacijo.

Opomba. Če je $\vec{\nabla} \times \vec{R} = 0$, je $\vec{R}$ potencialno; koliko potencialov pa ima?

Naj bo u_0 potencial $\vec{R}$. Potem so tudi $u_0 + c$ za $c \in \mathbb{R}$ potenciali za $\vec{R}$; so tudi natanko vsi.

Če je $\vec{\nabla} \cdot \vec{R} = 0$, ima $\vec{R}$ vektorski potencial; recimo, da velja

$$\vec{R} = \vec{\nabla} \times \vec{f} = \vec{\nabla} \times \vec{g}.$$

Potem je

$$\vec{\nabla} \times (\vec{f} - \vec{g}) = 0,$$

torej je $\vec{f} - \vec{g}$ potencialno, in je gradient nekega polja u. Vektorski potenciali se razlikujejo za gradient skalarnega polja.

Vprašanje 31. Koliko potencialov ima potencialno polje na zvezdasti množici? Koliko ima vektorskih potencialov?

3.3 Površina ploskve

Naj bo $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ regularna parametrizacija ploskve Σ. Površino ploskve izračunamo s pomočjo paralelogramskih približkov: Pravokotnike $(u_0, v_0) \to (u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$ slikamo z $\vec{r}$. Dobimo približke:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \vec{r}(u_0, v_0) &\approx \vec{r}_u \Delta u \\
\vec{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0) &\approx \vec{r}_v \Delta v \\
P &\approx |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, \Delta u \Delta v
\end{aligned}$$

Definicija. Naj bo $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ regularna parametrizacija ploskve Σ. Potem je POVRŠINA ploskve enaka

$$P(\Sigma) = \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, dudv = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, dudv$$

Ta definicija je dobra; dokaz sledi. Naj bosta $\vec{r}, \vec{\rho}$ regularni parametrizaciji ploskve Σ. Označimo $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $\vec{\rho} = \vec{\rho}(s, t)$. Med njima obstaja difeomorfizem $\phi = \vec{r}^{-1} \circ \vec{\rho}$; to je res difeomorfizem, ker sta parametrizaciji maksimalnega ranga. Če zapišemo $\vec{\rho}(s, t) = \vec{r}(U(s, t), V(s, t))$, nam račun pokaže, da je

$$|\vec{\rho}_s \times \vec{\rho}_t| = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, |\det D\phi| \, .$$

Ploščina je tedaj enaka po izreku o uvedbi novih spremenljivk.

Vprašanje 32. Kako je definirana površina ploskve? Dokaži, da je definicija dobra.

Vprašanje 33. Kako izračunaš površino grafa $\mathcal{C}^1(D)$ funkcije f? Dokaži.

Odgovor: $\displaystyle\iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$.

Velja $E = 1 + f_x^2$, $F = f_x f_y$, $G = 1 + f_y^2$.

Vprašanje 34. Kaj je Schwarzova laterna? Kaj nam pokaže?

Odgovor: Vzamemo plašč valja z radijem r in višino h ter števili $n, m \in \mathbb{N}$. Višino razdelimo na n kosov, s čimer dobimo krožnice, položene ena nad drugo. Na vsako od teh krožnic enakomerno razporedimo m točk tako, da so točke v sosednjih krožnicah zamaknjene za polovico razdalje med točkami. Te točke nato na pričakovan način povežemo med sabo v trikotnike. Na vsakem pasu med dvema krožnicama je $2m$ trikotnikov, torej je vseh trikotnikov $2mn$.

Laterno sedaj uporabimo za aproksimacijo ploščine plašča, a ne dobimo vedno pravega rezultata. Res, velja

$$P(n, m) \approx 2rmn \sin\frac{\pi}{m} \sqrt{\frac{h^2}{m^2} + 4r^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}}.$$

Za $n = m$ aproksimacija prinese pravi rezultat, če pa postavimo $n = m^3$, pa v limiti dobimo neskončen rezultat.

3.4 Orientacija

Definicija. ORIENTACIJA gladke krivulje je zvezen izbor enotskega tangentnega vektorja na krivuljo.

Opomba. Če je gladka krivulja povezana, ima dve možni orientaciji; $\vec{T}$ in $-\vec{T}$.

Definiramo tudi krivuljo z robom; to je zaprtje krivulje brez roba. Model take krivulje je zaprt interval $[0,1]$ (in vse, kar je njemu difeomorfno). Parametrizacija določi robni točki $\vec{r}(0)$ in $\vec{r}(1)$, njun vrstni red pa določi orientacijo roba (torej para točk). Eno od teh točk označimo za začetno, drugo za končno.

Vprašanje 35. Kako orientiraš krivuljo?

Definicija. ODSEKOMA GLADKA KRIVULJA je taka krivulja $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_n$, da so Γ_i gladke krivulje, kjer se zaporedni dve sekata v eni robni točki, krivulji Γ_1 in Γ_n se lahko tudi sekata v eni robni točki, ostalih presekov pa ni. Orientacija Γ je podana z orientacijami Γ_i, ki na presečiščih inducirajo nasprotno orientacijo.

Končna točka Γ_i je začetna točka Γ_{i+1}.

Vprašanje 36. Definiraj odsekoma gladke krivulje. Kaj je njihova orientacija?

Definicija. ORIENTACIJA GLADKE PLOSKVE je zvezen izbor enotske normale na ploskev, če obstaja. Takrat pravimo, da je ploskev ORIENTABILNA.

En možen izbor orientacije na Σ je $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$. Če je Σ povezana in orientabilna, ima dve možni orientaciji.

Primer neorientabilne ploskve je Möbiusov trak.

Vprašanje 37. Kako orientiraš ploskev? Kaj je primer neorientabilne ploskve?

Definicija. ROB PLOSKVE Σ je končna unija odsekoma gladkih krivulj, ki pokrivajo $\overline{\Sigma} \backslash \Sigma$, če je to možno storiti.

Definicija. USKLAJENA ORIENTACIJA ROBA PLOSKVE Σ je taka orientacija roba, da je ploskev na levi strani, ko se premikamo v smeri orientacije, če normala kaže navzgor.

Vprašanje 38. Kaj je usklajena orientacija roba ploskve?

Definicija. ODSEKOMA GLADKA PLOSKEV Σ je unija $\Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_n$, da velja bodisi $\overline{\Sigma}_j \cap \overline{\Sigma}_k = \varnothing$ bodisi $\overline{\Sigma}_j \cap \overline{\Sigma}_k \subseteq \partial\Sigma_j \cap \partial\Sigma_k$ za vse j, k, in da je v preseku treh ali več robov kvečjemu končno mnogo točk.

Definicija. ORIENTACIJA ODSEKOMA GLADKE PLOSKVE $\Sigma = \Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_n$ je taka izbira normalnih vektorjev, da vzdolž skupnih robov orientacije Σ_i podajo nasprotne usklajene orientacije krivulj.

Vprašanje 39. Definiraj odsekoma gladko ploskev. Kako jo orientiramo?

3.5 Krivuljni in ploskovni integrali

Definicija. Naj bo u zvezno skalarno polje. INTEGRAL u PO GLADKI KRIVULJI Γ, parametrizirani z $\vec{r} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$, je

$$\int_\Gamma u ds = \int_\alpha^\beta u(\vec{r}(t)) \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| dt.$$

Opomba. Kot pri dolžini krivulje se pokaže, da je integral neodvisen od parametrizacije.

Definicija. Naj bo $\vec{R}$ zvezno vektorsko polje. INTEGRAL $\vec{R}$ PO GLADKI ORIENTIRANI KRIVULJI $\vec{\Gamma} = (\Gamma, \vec{T})$ je

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{R} d\vec{r} = \int_\Gamma \vec{R} \cdot \vec{T} ds.$$

Opomba. Če obrnemo orientacijo na $\vec{\Gamma}$, dobimo nasprotno predznačen rezultat.

Opomba. Če je $\vec{r} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ regularna parametrizacija, usklajena z orientacijo, je

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{R} d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \vec{R}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt.$$

Opomba. Če je krivulja odsekoma gladka, oba integrala definiramo kot vsoto po gladkih kosih.

Definicija. Naj bo u zvezno skalarno polje. INTEGRAL u PO PLOSKVI Σ, parametrizirani z $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \Sigma$, je

$$\iint_\Sigma u dS = \iint_D u(\vec{r}(s,t)) \sqrt{EG - F^2}\, dsdt = \iint_D u(\vec{r}(s,t)) \left|\vec{r}_s \times \vec{r}_t\right| dsdt.$$

Definicija. Naj bo $\vec{R}$ zvezno vektorsko polje. INTEGRAL $\vec{R}$ PO ORIENTIRANI PLOSKVI Σ z normalo $\vec{N}$ je

$$\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{R} d\vec{S} = \iint_\Sigma \vec{R} \cdot \vec{N} dS.$$

Opomba. Če je $\vec{r} : D \to \Sigma$ usklajena z orientacijo;

$$\vec{N} = \frac{\vec{r}_s \times \vec{r}_t}{|\vec{r}_s \times \vec{r}_t|},$$

potem velja

$$\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{R} d\vec{S} = \iint_D \vec{R}(\vec{r}(s,t)) \cdot (\vec{r}_s(s,t) \times \vec{r}_t(s,t)) dsdt.$$

Vprašanje 40. Definiraj integrale skalarnih in vektorskih polj po krivuljah in ploskvah.

Trditev. *Integral potencialnega vektorskega polja po orientirani odsekoma gladki krivulji je enak razliki potenciala med končno in začetno točko krivulje.*

Dokaz. Naj bo $\vec{R} = (u_x, u_y, u_z)$ za $u \in \mathcal{C}^1(D)$ ter $\vec{\Gamma} \subseteq D$. Parametriziramo Γ z $\vec{r} : [a, b] \to \Gamma$. Velja

$$\int_\Gamma \vec{R} d\vec{r} = \int_\Gamma \vec{\nabla}.ud\vec{r} = \int_a^b (u_x, u_y, u_z) \cdot \dot{\vec{r}}(t)dt = \int_a^b \partial_t u(\vec{r}(t))dt = u(\vec{r}(b)) - u(\vec{r}(a)).$$

□

Vprašanje 41. Kako izračunaš integral potencialnega polja po orientirani krivulji? Dokaži.

Definicija. Orientirana krivulja Γ je SKLENJENA, če je njena začetna točka enaka končni točki.

Trditev. *Naj bo $\vec{R} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zvezno vektorsko polje. Naslednje izjave so ekvivalentne:*

- *$\vec{R}$ je potencialno.*
- *Integral $\vec{R}$ po orientirani krivulji med poljubnima dvema točkama je neodvisen od krivulje.*
- *Integral $\vec{R}$ po poljubni sklenjeni poti v D je ničeln.*

Dokaz. 1 v 3: Direktno sledi iz prejšnje trditve.

3 v 2: Sklenjeno pot med točkama A in B dobimo tako, da gremo po prvi krivulji od A do B in nato po drugi od B do A. Nastala struktura ni nujno krivulja, je pa pot.

2 v 1: Predpostavimo, da je D povezana s potmi. Če ni, obratujemo na vsaki komponenti posebej. Naj bosta $T_0, T \in D$. Izberemo poljubno pot $T_0 \to T$ in jo imenujemo $\vec{\Gamma}$. S pomočjo te poti definiramo

$$u(T) = \int_\Gamma \vec{R} d\vec{r}.$$

Zaradi točke 2 je nastala preslikava dobro definirano skalarno polje. Pišemo $\vec{R} = (X, Y, Z)$.

Velja

$$u_x = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(u(x + h, y, z) - u(x, y, z))$$

Naj bo Q_h daljica med (x, y, z) in $(x+h, y, z)$; za dovolj majhne h je ta daljica podmnožica D. Uvedemo $\Gamma' = \Gamma \cup Q_h$ z orientacijo od začetne točke Γ do točke $(x + h, y, z)$. Tedaj velja

$$u_x = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{Q_h} \vec{R} d\vec{r} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 (X, Y, Z) \cdot (h, 0, 0)dt$$

za parametrizacijo $t \mapsto (x+th, y, z)$. To je nadalje enako

$$u_x = \lim_{h \to 0} \int_0^1 X(x+th, y, z)dt = X(x, y, z).$$

Podobno naredimo za druga dva odvoda; dobimo $\vec{\nabla}.u = \vec{R}$. □

Vprašanje 42. Podaj dve karakterizaciji potencialnih polj in ju dokaži.

3.6 Integralski izreki

Izrek. GAUSS *Naj bo D omejena odprta podmnožica v $\mathbb{R}^3$, katere rob je sestavljen iz končnega števila odsekoma gladkih ploskev, orientiranih z zunanjo normalo glede na D. Naj bo $\vec{R} \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$ vektorsko polje. Tedaj velja zveza*

$$\iint_{\partial D} \vec{R} d\vec{S} = \iiint_D \vec{\nabla} \cdot \vec{R} dV.$$

Izrek. GREENOVA FORMULA *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ omejena odprta množica v ravnini, katere rob je sestavljen iz končnega števila odsekoma gladkih krivulj, orientiranih pozitivno glede na D. Naj bosta $X, Y \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$. Tedaj velja zveza*

$$\int_{\partial D} X dx + Y dy = \iint_D (Y_x - X_y) dx dy.$$

Izrek. STOKES *Naj bo Σ omejena odsekoma gladka orientirana ploskev v $\mathbb{R}^3$, katere rob je sestavljen iz končnega števila odsekoma gladkih krivulj, orientiranih skladno s Σ. Naj bo $\vec{R} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Sigma})$ vektorsko polje. Tedaj velja zveza*

$$\int_{\partial \Sigma} \vec{R} d\vec{r} = \iint_\Sigma \vec{\nabla} \times \vec{R} d\vec{S}.$$

Vprašanje 43. Povej Gaussov izrek, Greenovo formulo in Stokesov izrek.

Izrek. GAUSSOV IZREK V 2D *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ omejena odprta množica in ∂D končna unija odsekoma gladkih krivulj, ter $\vec{n}$ enotska zunanja normala. Naj bo $\vec{R} = (M, N) \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$ vektorsko polje. Potem velja*

$$\int_{\partial D} \vec{R} \cdot \vec{n} ds = \iint_D (M_x + N_y) dS.$$

Dokaz Greenove formule. Predpostavimo Gaussov izrek v $\mathbb{R}^2$. Naj bosta $X, Y \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$. Tedaj velja

$$I = \int_{\partial D} X dx + Y dy = \int_{\partial D} (X, Y) \cdot \vec{T} ds.$$

Zunanja normala je pravokotna na $\vec{T}$; vključno z orientacijo bo veljajo $\vec{T} = (-N_2, N_1)$. Torej

$$I = \int_{\partial D} (YN_1 - XN_2) ds = \int_{\partial D} (Y, -X) \cdot \vec{N} ds = \iint_D (Y_x + (-X)_y) ds.$$

□

Vprašanje 44. Dokaži Greenovo formulo s predpostavko Gaussovega izreka v 2D.

Gaussov izrek v 2D se dokaže na podoben način kot v 3D; ta sledi na koncu. Stokesov in Gaussov izrek bomo dokazali za množice posebnih oblik, nato pa pokazali, da veljata na končnih unijah takih množic.

Trditev. *Naj bo* $\overline{\Sigma} = \overline{\Sigma}_1 \cup \overline{\Sigma}_2$ *in* $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$. *Če velja Stokesov izrek za* Σ_1 *in* Σ_2, *velja tudi za njuno unijo, ob predpostavki usklajenih orientacij.*

Dokaz. Naj bo $\vec{R} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Sigma})$ in naj velja Stokesov izrek zanj na Σ_1 in Σ_2. Integral rotorja se sešteva, ker ima mejna krivulja mero 0. Integral po robu se sešteva, ker se na skupnem robu zaradi orientacije integrala odštejeta. □

Vprašanje 45. Dokaži, da lahko Stokesov izrek sestavljamo.

Dokaz Stokesovega izreka. Predpostavimo, da velja Greenova formula. Zaradi trditve je dovolj, da izrek dokažemo za grafe.

Naj bo torej Σ graf nad XY ravnino; $\Sigma = (\{(x, y, f(x, y)) \mid x, y \in D\})$, kjer je D omejena odprta množica v $\mathbb{R}^2$, katere rob je sestavljen iz končnega števila odsekoma gladkih krivulj. Izberemo si orientacijo za Σ:

$$\vec{N} = \frac{(-f_x, f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Na tej točki naredimo dodatno predpostavko; $f \in \mathcal{C}^2(D)$. Naj bo $\vec{R} = (X, Y, Z) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Sigma})$. Če uporabimo parametrizacijo $z = f(x, y)$ in $dz = f_x dx + f_y dy$, dobimo

$$I = \int_{\partial\Sigma} \vec{R} d\vec{r} = \int_{\partial\Sigma} X dx + Y dy + Z dz = \int_{\partial D} (X + Z f_x) dx + (Y + Z f_y) dy.$$

Sedaj uporabimo Greenovo formulo;

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D (Y + Zf_y)_x - (X + Zf_x)_y dxdy \\
&= \iint_D (Y_x + Y_z f_x + Z_x f_y + Z_z f_x f_y + Z f_{yx} - (X_y + X_z f_y + Z_y f_x + Z_z f_x f_y + Z f_{xy}))dxdy \\
&= \iint_D ((Y_x - X_y) + (-f_y)(X_z - Z_x) + (-f_x)(Z_y - Y_z))dxdy \\
&= \iint_D \vec{\nabla} \times \vec{R} \cdot (-f_x, f_y, 1)dxdy \\
&= \iint_D \vec{\nabla} \times \vec{R} \cdot \vec{N}.\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}dxdy \\
&= \iint_\Sigma \vec{\nabla} \times \vec{R} d\vec{S}.
\end{aligned}$$

□

Vprašanje 46. Dokaži Stokesov izrek s pomočjo Greenove formule.

Trditev. *Naj bosta D_1, D_2 taki, da je $\overline{D} = \overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$ ter $D_1 \cap D_2 = \varnothing$. Če Gaussov izrek velja za obe množici, velja tudi za njuno unijo.*

Dokaz. Naj $\vec{R}$ ustreza predpostavkam Gaussovega izreka na D_1 in na D_2. Velja

$$\iiint_{D_1} \vec{\nabla} \cdot \vec{R} + \iiint_{D_2} \vec{\nabla} \cdot \vec{R} = \iiint_D \vec{\nabla} \cdot \vec{R},$$

ker ima mejna ploskev med množicama mero 0. Vsota integralov po skupnem robu se zaradi orientacije izniči, zato velja

$$\iint_{\partial D_1} \vec{R} d\vec{S} + \iint_{\partial D_1} \vec{R} d\vec{S} = \iint_{\partial D} \vec{R} d\vec{S}.$$

□

Vprašanje 47. Dokaži, da lahko Gaussov izrek sestavljamo.

Dokaz Gaussovega izreka. Samo za odprte množice z lastnostjo, da vsaka premica, vzporedna z eno od koordinatnih osi, ki seka D, seka ∂D v natanko dveh točkah. To je ekvivalentno temu, da D nad katerokoli koordinatno ravnino leži med dvema grafoma. Naj bo $\vec{R} \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$ vektorsko polje, $\vec{R} = (X, Y, Z)$. Naj bo $\vec{N}$ enotska zunanja normala na ∂D. Označimo $\vec{N} = (N^X, N^Y, N^Z)$.

Dokazali bomo

$$\iint_{\partial D} Z N^Z dS = \iiint_D Z_z dV.$$

Podobno bomo sklepali za ostali komponenti; sledilo bo $\iint_{\partial D} \vec{R} \cdot \vec{N} = \iiint_D \vec{\nabla} \cdot \vec{R} dV$.

Nad ravnino xy leži D med dvema grafoma. Obstaja torej območje $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ in funkciji $f, g : \Omega \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$, da velja

$$D = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \Omega \wedge f(x, y) < z < g(x, y)\}.$$

Rob D je tako sestavljen iz treh delov; grafa obeh funkcij ter navpičnega dela med njima. Normala na navpični del je pravokotna na Z os. Tedaj velja

$$\iiint_D Z_z dV = \iint_\Omega dS \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} Z_z dz = \iint_\Omega (Z(x, y, g(x, y)) - Z(x, y, f(x, y))).$$

Za drug integral pa dobimo

$$I' = \iint_{\partial D} ZN^Z dS = \iint_{\Gamma_f} ZN^Z dS + \iint_{\Gamma_g} ZN^Z dS + \iint_{\text{navpični del}} ZN^Z dS.$$

Ker je v navpičnem delu normala pravokotna na Z os, je N^Z tam 0, torej zadnji integral odpade. Na ostalih dveh delih lahko normalo zapišemo;

$$\vec{N} = -\frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

kjer bo pri g predznak pozitiven namesto negativen. Sledi

$$I' = \iint_{\Gamma_f} Z \frac{-1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} dS + \iint_{\Gamma_g} Z \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} dS.$$

Ker je $dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy$, je

$$I' = \iint_\Omega (Z(x, y, g(x, y)) - Z(x, y, f(x, y)))dxdy.$$

□

Opomba. Da se pokazati, da lahko vsako območje, ki ustreza predpostavkam Gaussovega izreka, sestavimo iz takih množic.

Vprašanje 48. Dokaži Gaussov izrek.

Posledica. *Greenovi identiteti Naj bo $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^3$ omejena odprta množica z odsekoma gladkim robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih sklenjenih ploskev, orientiranih z zunanjo normalo. Naj bosta $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{D})$. Tedaj velja*

$$\iint_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} dS = \iiint_D \vec{\nabla}.u \cdot \vec{\nabla}.v \, dV + \iiint_D u \Delta v dV.$$

Dokaz. Definiramo $\vec{R} = u\vec{\nabla}.v = (uv_x, uv_y, uv_z)$. Tedaj je

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{R} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z + uv_{xx} + uv_{yy} + uv_{zz}.$$

□

Opomba. Če je $v = 1$ in u harmonična, je

$$\iint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS = 0.$$

Vprašanje 49. Povej in dokaži Greenovi identiteti.

3.6.1 Brezkoordinatna definicija divergence

Naj bo $\vec{R} \in \mathcal{C}^1(D)$ in $a \in D$. Naj bo $r > 0$ takšen, da je $\overline{K(a,r)} \subseteq D$. Po Gaussovem izreku velja

$$\iint_{\partial \overline{K(a,r)}} \vec{R} d\vec{S} = \iiint_{\overline{K(a,r)}} \vec{\nabla} \cdot \vec{R} dV = \vec{\nabla} \cdot \vec{R}(\xi) V(K(a,r))$$

za nek $\xi \in K(a,r)$ po izreku o povprečju. Definiramo lahko

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{R}(a) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{V(K(a,r))} \iint_{S(a,r)} \vec{R} d\vec{S}.$$

Vprašanje 50. Kakšna je brezkoordinatna definicija divergence?

3.6.2 Brezkoordinatna definicija rotorja

Naj bo $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^3$ in $\vec{R} \in \mathcal{C}^1(D)$. Naj bo $a \in D$ ter $\vec{n}$ poljuben vektor dolžine 1. S Π označimo ravnino skozi a z normalo $\vec{n}$.

Naj bo $r > 0$. Definiramo $\Sigma = \Pi \cap K(a,r)$; orientacija je podana z normalo $\vec{n}$. Po Stokesovem izreku velja

$$\int_{\partial \Sigma} \vec{R} d\vec{r} = \iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{R} d\vec{S} = \vec{\nabla} \times \vec{R}(\xi) \cdot \vec{n} P(\Sigma)$$

po izreku o povprečju. Tedaj lahko definiramo

$$\vec{\nabla} \times \vec{R}(a) \cdot \vec{n} = \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{P(\Sigma)} \int_{\partial \Sigma} \vec{R} d\vec{r}.$$

Vprašanje 51. Kakšna je brezkoordinatna definicija rotorja?

3.6.3 Izražava operatorja Δ v krivočrtnih pravokotnih koordinatah

Poznamo dva primera pravokotnih krivočrtnih koordinat; valjne (polarne) in sferične. V točki $\vec{r}(u_1, u_2, u_3) = (x, y, z)$ lahko definiramo KOORDINATNE KRIVULJE

$$
\begin{aligned}
t &\mapsto \vec{r}(t, u_2, u_3)\\
t &\mapsto \vec{r}(u_1, t, u_3)\\
t &\mapsto \vec{r}(u_1, u_2, t).
\end{aligned}
$$

Naša zahteva je, da se te krivulje sekajo pod pravim kotom. V vsaki točki so te krivulje ortogonalna baza, ki pa ni nujno normirana.

Definiramo

$$
\begin{aligned}
H_1 &:= |\vec{r}_{u_1}|\\
H_2 &:= |\vec{r}_{u_2}|\\
H_3 &:= |\vec{r}_{u_3}|.
\end{aligned}
$$

Za Jacobijevo matriko velja

$$J\vec{r} = \left[\vec{r}_{u_1}, \vec{r}_{u_2}, \vec{r}_{u_3}\right] = H_1H_2H_3\left[\tfrac{\vec{r}_{u_1}}{H_1}, \tfrac{\vec{r}_{u_2}}{H_2}, \tfrac{\vec{r}_{u_3}}{H_3}\right].$$

Desna matrika je ortogonalna, torej velja $|J\vec{r}| = \pm H_1H_2H_3$. Za $\vec{\eta}_i = \frac{1}{H_i}\vec{r}_i$ je v vsaki točki množica $\{\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_3\}$ ortonormirana baza prostora.

Naj bo sedaj $u(x, y, z)$ skalarno polje in $U(u_1, u_2, u_3) = u(\vec{r}(u_1, u_2, u_3))$. Potem je $\partial_{u_i}U = du(\vec{r}(u_1, u_2, u_3)) \cdot \vec{r}_{u_i} = \vec{\nabla}.u(\vec{r}) \cdot \vec{r}_{u_i}$, oziroma

$$\frac{1}{H_i}\partial_{u_i}U = \vec{\nabla}.u(\vec{r}) \cdot \vec{\eta}_i.$$

Velja torej

$$\vec{\nabla}.u(\vec{r}) = \frac{1}{H_1}\partial_{u_1}U\vec{\eta}_1 + \frac{1}{H_2}\partial_{u_2}U\vec{\eta}_2 + \frac{1}{H_3}\partial_{u_3}U\vec{\eta}_3.$$

Torej lahko zapišemo

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{H_1}\partial_{u_1}\vec{\eta}_1 + \frac{1}{H_2}\partial_{u_2}\vec{\eta}_2 + \frac{1}{H_3}\partial_{u_3}\vec{\eta}_3.$$

V nadaljevanju potrebujemo dve stranski trditvi:

Trditev. *Naj bosta v in $\vec{f}$ skalarno in vektorsko polje, obe $\mathcal{C}^1$. Potem je*

$$\vec{\nabla} \cdot (v.\vec{f}) = v\vec{\nabla} \cdot \vec{f} + \vec{\nabla}.v \cdot \vec{f}.$$

Trditev. *Naj bosta $\vec{A}, \vec{B} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Potem je*

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}).$$

Posledica. *Če sta $\vec{A}, \vec{B}$ potencialni, je $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$.*

Opazimo, da za $U(u_1, u_2, u_3) = u_1$ velja $\vec{\nabla}.u = \frac{1}{H_1}\vec{\eta}_1$, torej je polje $\frac{1}{H_1}\vec{\eta}_1$ potencialno; podobno za ostala indeksa.

Naj bo $\vec{R}$ vektorsko polje. Velja $\vec{R} = R_1\vec{\eta}_1 + R_2\vec{\eta}_2 + R_3\vec{\eta}_3$. Sedaj denimo, da je ortonormirana baza od prej pozitivno orientirana (deluje tudi za negativno orientirane);

$$\frac{1}{H_2H_3}\vec{\eta}_1 = \frac{1}{H_2}\vec{\eta}_2 \times \frac{1}{H_3}\vec{\eta}_3,$$

torej je $\vec{\nabla} \cdot (\frac{1}{H_2H_3}\vec{\eta}_1) = 0$. Podobno velja za ostala indeksa.

Upoštevajoč linearnost operatorja $\vec{\nabla}\cdot$ izpeljemo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{R} = \vec{\nabla}.(R_1H_2H_3).\frac{1}{H_2H_3}\vec{\eta}_1 + \vec{\nabla}.(R_2H_1H_3).\frac{1}{H_1H_3}\vec{\eta}_2 + \vec{\nabla}.(R_3H_1H_2).\frac{1}{H_1H_2}\vec{\eta}_3.$$

Če je

$$\vec{R} = \frac{1}{H_1}\partial_{u_1}U\vec{\eta}_1 + \frac{1}{H_2}\partial_{u_2}U\vec{\eta}_2 + \frac{1}{H_3}\partial_{u_3}U\vec{\eta}_3,$$

izpeljemo

$$\Delta u = \frac{1}{H_1H_2H_3}(\partial_{u_1}(\frac{H_2H_3}{H_1}\partial_{u_1}U) + \partial_{u_2}(\frac{H_1H_3}{H_2}\partial_{u_2}U) + \partial_{u_3}(\frac{H_1H_2}{H_3}\partial_{u_3}U)).$$

Vprašanje 52. Izpelji izražavo operatorja Δ v krivočrtnih pravokotnih koordinatah.

3.7 Kompleksna analiza

Definicija. Območje je povezana odprta množica v $\mathbb{C}$.

Definicija. Odprt disk s središčem v $\alpha \in \mathbb{C}$ in polmerom $r > 0$ označimo z $\Delta(\alpha, r)$.

Opomba. Riemannova sfera $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ je kompaktifikacija $\mathbb{C}$ z eno točko.

Vprašanje 53. Kaj je Riemannova sfera?

Definicija. Naj bo $\alpha \in \mathbb{C}$, $D^{\mathrm{odp}} \subseteq \mathbb{C}$ okolica α in $f : D \to \mathbb{C}$ funkcija. Če obstaja limita

$$\lim_{z \to \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = f'(\alpha),$$

je f v kompleksnem smislu odvedljiva v α. Če je f v kompleksnem smislu odvedljiva v vseh $\alpha \in D$, je f holomorfna na D. Množico holomorfnih funkcij na D označimo z $\mathcal{O}(D)$.

Opomba. Sopomenka: analitična.

Vprašanje 54. Kaj je holomorfna funkcija?

Trditev. *Naj bo $\alpha \in D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{C}$ in $f : D \to \mathbb{C}$ kompleksna funkcija. Če je f v točki α v kompleksnem smislu odvedljiva, je v α zvezna in diferenciabilna. Velja $df_\alpha(h) = f'(\alpha)h$.*

Dokaz.

$$f'(\alpha) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \eta(h) = 0$$

za $\eta(h) = \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} - f'(\alpha)$. Dobimo $f(\alpha + h) = f(\alpha) + f'(\alpha)h + \eta(h)h$, torej je $\lim_{h \to 0} f(\alpha + h) = f(\alpha)$ in je f zvezna v α. Diferenciabilnost sledi iz zgornje limite. □

Vprašanje 55. Dokaži: holomorfne funkcije so zvezne in diferenciabilne.

Izrek. *Množica holomorfnih funkcij $\mathcal{O}(()D)$ je algebra nad $\mathbb{C}$.*

Opomba. Pravila za odvajanje so enaka kot na realni osi.

Izrek. *Kompozitum holomorfnih funkcij je holomorfen.*

Dokaz. Naj bosta $f : D \to \Omega$ in $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfni. Naj bo $\alpha \in D$ ter $\beta = f(\alpha)$. Velja

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + f'(\alpha)h + h\eta_f(h)$$
$$g(\beta + k) = g(\beta) + g'(\beta)k + k\eta_g(k).$$

Označimo $k = f'(\alpha)h + h\eta_f(h)$. Velja $\lim_{h \to 0} k = 0$ zaradi zveznosti.

Tedaj je

$$(g \circ f)(\alpha + h) = g(f(\alpha + h)) = g(f(\alpha) + k) = g(\beta) + g'(\beta)k + k\eta_g(k).$$

Če razpišemo k, dobimo

$$(g \circ f)(\alpha + h) = g(\beta) + g'(\beta)(f'(\alpha)h + h\eta_f(h)) + (f'(\alpha)h + h\eta_f(h))\eta_g(k).$$

Če vse razen prvega člena delimo s h in pogledamo limito $h \to 0$, dobimo rezultat 0. □

Vprašanje 56. Dokaži, da je kompozitum holomorfnih funkcij holomorfen.

Izrek. Cauchy-Riemannov sistem *Naj bo $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ preslikava. Naj bo $\alpha = a + ib \in D$. Veljata naslednji točki;*

- *Če je f v kompleksnem smislu odvedljiva v α, sta u in v diferenciabilni in parcialno odvedljivi v točki (a, b). Dodatno velja $u_x = v_y$ ter $u_y = -v_x$ v tej točki. Ti enačbi imenujemo* Cauchy-Riemannov sistem enačb.
- *Če sta u, v diferenciabilni v (a, b) in zanju velja CR-sistem (v tej točki), je f v točki α v kompleksnem smislu odvedljiva.*

Dokaz. • Velja

$$f'(\alpha) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(\alpha+h)-u(\alpha)}{h} + \lim_{h\to 0} i\frac{v(\alpha+h)-v(\alpha)}{h}$$

in ta limita obstaja. Za $h \in \mathbb{R}$ je ta limita enaka $f'(\alpha) = u_x(\alpha) + iv_x(\alpha)$, za $h \in i\mathbb{R}$ pa je enaka $-iu_y(\alpha) + v_y(\alpha)$.

• Naj bosta $h, k \in \mathbb{R}$. Ker sta u, v diferenciabilni v α, velja

$$\begin{aligned} u(a+h, b+k) &= u(a,b) + u_x(a,b)h + u_y(a,b)k + o_u(h,k), \\ v(a+h, b+k) &= v(a,b) + v_x(a,b)h + v_y(a,b)k + o_v(h,k). \end{aligned}$$

Tedaj je limita

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{f(\alpha+(h,k))-f(\alpha)}{h+ik} = \lim_{h,k\to 0} \left(\frac{u(a+h,b+k)-u(a,b)}{h+ik} + i\frac{v(a+h,b+k)-v(a,b)}{h+ik} \right).$$

Za $o = o_u + io_v$ velja $\lim o(h,k) = 0$, torej je zgornja limita enaka

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{u_x(\alpha)h + u_y(\alpha)k - iu_y(\alpha)h + iu_x(\alpha)k}{h+ik} = u_x(\alpha) - u_y(\alpha).$$

□

Vprašanje 57. Povej in dokaži Cauchy-Riemannov sistem.

Definicija.

$$\begin{aligned} \partial_z &= \frac{1}{2}\partial_x + \frac{1}{2}\frac{1}{i}\partial_y \\ \partial_{\overline{z}} &= \frac{1}{2}\partial_x - \frac{1}{2}\frac{1}{i}\partial_y \end{aligned}$$

Trditev. *Naj bo $f : D^{\text{odp}} \to \mathbb{C}$ in $\alpha \in D$. Naj bo f diferenciabilna v α. Potem je v kompleksnem smislu odvedljiva v α natanko tedaj, ko je $\partial_{\overline{z}} f = 0$.*

Vprašanje 58. Kako sta definirana odvoda po z in po $\overline{z}$? Kako sta povezana s holomorfnostjo funkcije?

Definicija. Če je $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, je CELA HOLOMORFNA FUNKCIJA.

Izrek. *Naj bo $\sum_n a_n(z-\alpha)^n$ potenčna vrsta. Obstaja število $R \in [0, \infty]$, da velja*

- *Za vsak r, $0 < r < R$, potenčna vrsta konvergira absolutno in enakomerno na $\overline{\Delta(\alpha, r)}$.*
- *Za vsak $z \notin \overline{\Delta(\alpha, R)}$ vrsta divergira.*

Velja $\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$.

Dokaz. BŠS $\alpha = 0$. Dokaz samo za $0 < R < \infty$.

- Če je $|z| > R$, je $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z|}$, torej za neskončno mnogo n velja $\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z|}$. Sledi $|a_n z^n| > 1$ za neskončno mnogo n, torej vrsta divergira.
- Če je $|z| \leq r < q < R$, potem velja

$$\frac{1}{|z|} \geq \frac{1}{r} > \frac{1}{q} > \frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

torej obstaja n_0, da za vse $n > n_0$ velja $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{q} < \frac{1}{|z|}$, oziroma

$$|a_n z^n| < \frac{|z|^n}{q^n} \leq \left(\frac{R}{q}\right)^n < 1.$$

Po Weierstrassovem kriteriju vrsta konvergira enakomerno na $\overline{\Delta(0, r)}$.

$\square$

Opomba. Če je $R > 0$, lahko vrsto členoma odvajamo in integriramo.

Definicija. Naj bo $f : D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funkcija. Naj bo $\alpha \in D$. Funkcijo f se da razviti v potenčno vrsto v okolici točke α, če obstaja $0 < r < R$ in potenčna vrsta $\sum_n a_N (z-\alpha)^n$, da je na disku $\Delta(\alpha, r)$ vrsta enaka funkciji.

Trditev. *Naj bo $f(z) = \sum_n a_n (z-\alpha)^n$ potenčna vrsta na $\Delta(\alpha, r)$ za $r \leq R$. Tedaj je f holomorfna na $\Delta(\alpha, r)$ in velja*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z-\alpha)^{n-1}.$$

Dokaz. Za $0 \leq \rho < r$ vrsta konvergira enakomerno na $\overline{\Delta(\alpha, \rho)}$. Označimo s $P_N(z)$ N-to delno vsoto vrste. Velja

$$\partial_{\overline{z}} P_N(z) = 0$$

in

$$\partial_z P_N(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n n (z-\alpha)^{n-1}.$$

Ker je

$$\frac{1}{R'} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n n|} = \frac{1}{R},$$

sta konvergenčna polmera vrst enaka. Torej na $\overline{\Delta(\alpha, \rho)}$ vrsta odvodov konvergira enakomerno, torej je f razreda $\mathcal{C}^1$ na $\Delta(\alpha, r)$ in $\partial_{\overline{z}} f = 0$, torej je f holomorfna na $\Delta(\alpha, r)$. $\square$

Vprašanje 59. Dokaži, da so vse funkcije, ki jih lahko razvijemo v potenčno vrsto v okolici vsake točke iz $D^{\mathrm{odp}} \subseteq \mathbb{C}$, holomorfne na D.

Vprašanje 60. Dokaži $e^{z+w} = e^z e^w$.

Odgovor: Definiramo

$$F(t) = e^{-t}e^{t+z+w}.$$

Velja $F'(t) = -e^{-t}e^{t+z+w} + e^{-t}e^{t+z+w} = 0$, torej je F konstantna. Sledi $F(0) = e^{z+w} = F(-z) = e^z e^w$.

Vprašanje 61. Kakšne so rešitve enačbe $e^z = w$?

Odgovor: $z = x + iy$, kjer je $x = \ln|w|$ in $y = \arg w + 2k\pi$ za $k \in \mathbb{Z}$.

3.7.1 Krivuljni integral v $\mathbb{C}$

Naj bo $\gamma \subseteq \mathbb{C}$ orientirana odsekoma gladka krivulja. Naj bo $f : \gamma \to \mathbb{C}$ zvezna funkcija. Definiramo

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t))dt$$

za $\mathcal{C}^1$ parametrizacijo krivulje γ s predpisom

$$t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$$

za $t \in [\alpha, \beta]$, ki je usklajena z orientacijo krivulje.

Vprašanje 62. Definiraj krivuljni integral v $\mathbb{C}$.

Vprašanje 63. Pokaži, da je krivuljni integral v $\mathbb{C}$ neodvisen od parametrizacije.

Odgovor: Velja

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\dot{x}dt + i\int_\alpha^\beta f(z(t))\dot{y}dt = \int_\gamma f(z)dx + if(z)dy.$$

Upoštevajoč $f = u + iv$ je to nadalje enako

$$\int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy.$$

Trditev. *Naj bo* $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{C}$ *in* $F \in \mathcal{O}(D)$. *Naj bo* $F' \in \mathcal{C}(D)$. *Naj bo* γ *orientirana odsekoma gladka krivulja v* D *z začetno točko* α *in končno točko* β. *Tedaj je*

$$\int_\gamma F'(z)dz = F(\beta) - F(\alpha).$$

Dokaz.

$$\int_\gamma F'(z)dz = \int_\gamma dF = \int_\gamma du + idv.$$

Tu integriramo funkciji $\vec{\nabla}.u, \vec{\nabla}.v$ po γ, torej je to enako

$$(u + iv)(\beta) - (u + iv)(\alpha) = F(\beta) - F(\alpha).$$

□

Vprašanje 64. Povej in dokaži analog osnovnega izreka analize za kompleksni integral.

Izrek (Greenova formula v $\mathbb{C}$)**.** *Naj bo* $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{C}$ *omejena odprta množica z odsekoma gladkim robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih sklenjenih krivulj, orientiranih pozitivno glede na* D. *Naj bosta* $f, g : \overline{D} \to \mathbb{C}$ *funkciji razreda* $\mathcal{C}^1$. *Tedaj je*

$$\int_{\partial D} f(z)dz + g(z)d\overline{z} = 2i \iint_D (\partial_{\overline{z}} f - \partial_z g)(z)dxdy.$$

Dokaz. Dokaz z računom:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} fdz + gd\overline{z} &= \int_{\partial D} f(dx + idy) + g(dx - idy) \\
&= \int_{\partial D} (f + g)dx + i(f - g)dy \\
&= \iint_D ((if - ig)_x - (f + g)_y)dxdy \\
&= 2i \iint_D (\frac{1}{2}(f_x + if_y) - \frac{1}{2}(g_x - ig_y))dxdy \\
&= 2i \iint_D (\partial_{\overline{z}} f - \partial_z g)dxdy.
\end{aligned}$$

□

Vprašanje 65. Povej in dokaži Greenovo formulo v $\mathbb{C}$.

Posledica (Cauchyjev izrek)**.** *Pri istih predpostavkah in za* $f \in \mathcal{O}(D)$ *velja*

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

Vprašanje 66. Povej Cauchyjev izrek.

Izrek (Cauchyjeva formula)**.** *Naj bo* $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{C}$ *omejena odprta množica z odsekoma gladkim robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih krivulj, orientiranih pozitivno glede na* D*. Naj bo* $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}^1(\overline{D})$*. Naj bo* $\alpha \in D$*. Tedaj je*

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz.$$

Dokaz. Obstaja $r_0 > 0$, da je $\Delta(\alpha, r_0) \subseteq D$. Definiramo $D_r = D \backslash \overline{\Delta(\alpha, r)}$ za $0 < r \leq r_0$. Funkcija

$$z \mapsto \frac{f(z)}{z - \alpha}$$

je holomorfna na D_r in zvezno odvedljiva na zaprtju D_r, torej po Cauchyjevem izreku

$$0 = \int_{\partial D_r} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz - \int_{\partial \Delta(\alpha, r)} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz.$$

Izberemo si parametrizacijo $z = \alpha + re^{i\phi}$ za $\phi \in [0, 2\pi]$, s čimer izračunamo

$$\int_{\partial \Delta(\alpha, r)} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz = i \int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{i\phi}) d\phi.$$

To je integral s parametrom r. V limiti $r \to 0$ dobimo $if(\alpha)2\pi$. □

Vprašanje 67. Povej in dokaži Cauchyjevo formulo.

Opomba. Holomorfna funkcija je popolnoma določena z vrednostmi na robu.

Vprašanje 68. Povej primer $\mathcal{C}^1(\partial D)$ funkcije, za katero ne obstaja holomorfna razširitev na D.

Odgovor: Za $D = \Delta$ je $f(z) = \overline{z}$ takšna.

Trditev. *Naj bo* $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{C}$ *kot v Greenovi formuli. Naj bo* $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}^1(\overline{D})$*. Tedaj je* $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$ *in vsi odvodi* f *so holomorfne funkcije na* D*. Za* $\alpha \in D$ *velja*

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{n+1}} dz.$$

Dokaz. Definiramo

$$F(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - w} dz.$$

To je integral s parametrom w. Velja

$$\partial_w F = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - w)^2} dz$$

in $\partial_{\overline{w}} F = 0$. Sledi, da F ustreza predpostavkam trditve. Postopek ponovimo za $F', F'', \ldots$. Pri tem pri odvajanju dobimo še fakultete. Velja $F = f$ po Cauchyjevi formuli. □

Opomba. Vse te lastnosti so lokalne, zato lahko odstranimo predpostavke Greenove formule.

Vprašanje 69. Dokaži; če je $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{C}$ in $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}^1(\overline{D})$, je $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$. Vsi odvodi so holomorfne funkcije.

Izrek (Morera)**.** *Naj bo $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{C}$ zvezdasta množica in $f \in \mathcal{C}(D)$. Denimo, da za vsak trikotnik $T \subseteq D$ velja*

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

Tedaj obstaja $F \in \mathcal{O}(D)$, da je $F' = f$ in $f, F \in \mathcal{C}^\infty(D)$.

Dokaz. Naj bo D zvezdasto glede na 0. Preslikava

$$F(z) = \int_0^z f(\xi)d\xi,$$

definirana z integralom po daljici, je dobro definirana. Velja

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_0^{z+h} f(\xi)d\xi - \int_z^{z+h} f(\xi)d\xi\right).$$

Ker je integral po trikotniku z oglišči $0, z, z+h$ enak 0, dobimo

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(\xi)d\xi = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)hdt = f(z).$$

Torej je $F \in \mathcal{C}^1(D) \cap \mathcal{O}(D)$, torej je $F \in \mathcal{C}^\infty(D)$. □

Vprašanje 70. Povej in dokaži Morerov izrek.

Izrek (Coursatov)**.** *Naj bo $f \in \mathcal{O}(D)$. Potem je $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$.*

Dokaz. Dokazati moramo še, da so integrali holomorfnih funkcij po robu trikotnikov enaki nič. Naj bo T trikotnik v D. Naj bo $I_0 = \int_{\partial T} f(\xi)f\xi$ in $T_0 = T$. Razdelimo T_0 na štiri skladne trikotnike, ki so podobni T_0. Izberemo si usklajene orientacije teh trikotnikov. Tedaj velja

$$\int_{\partial T} f = \int_{\partial T_0^1} f + \int_{\partial T_0^2} f + \int_{\partial T_0^3} f + \int_{\partial T_0^4} f.$$

Vsaj eden od teh integralov mora biti po absolutni vrednosti večji ali enak $\frac{1}{4}|I_0|$. Označimo ga s T_1. Postopek ponavljamo za T_1, T_2, itd. Velja

$$\left|\int_{\partial T_n} f\right| \geq \frac{1}{4^n}|I_0|.$$

Najdaljša stranica trikotnika T_n je polovica najdaljše stranice T_{n-1}.

Velja

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n = \{\alpha\}.$$

V točki α je f v kompleksnem smislu odvedljiva. Velja torej

$$f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + (z-\alpha)\eta(z-\alpha),$$

kjer $\lim_{z\to\alpha}\eta(z-\alpha) = 0$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Obstaja $\delta > 0$, da velja $|z-\alpha| < \delta \implies |\eta(z-\alpha)| < \varepsilon$. Dodatno obstaja n_0, da za $n \geq n_0$ velja $T_n \subseteq \Delta(\alpha,\delta)$. Naj bo $n \geq n_0$. Tedaj

$$\int_{\partial T_n} f(\xi)d\xi = \int_{\partial T_n} (f(\alpha)+f'(\alpha)(\xi-\alpha)+(\xi-\alpha)\eta(\xi-\alpha))d\xi = 0+0+\int_{\partial T_n}(\xi-\alpha)\eta(\xi-\alpha)d\xi.$$

Ta integral lahko omejimo;

$$\frac{1}{4^n}|I_0| \leq \left|\int_{\partial T_n} f(\xi)d\xi\right| \leq \int_{\partial T_n} |\xi-\alpha|\,|\eta(\xi-\alpha)|\,|d\xi| < \frac{1}{2^n}s(T_0)\varepsilon\frac{1}{2^n}o(T_0),$$

kjer $s(T_0)$ označuje najdaljšo stranico T_0, $o(T_0)$ pa njegov obseg. Velja torej $|I_0| < \varepsilon s(T_0)o(T_0)$, torej $I_0 = 0$. □

Vprašanje 71. Povej in dokaži Coursatov izrek.

Definicija. Če je $f : D \to \mathbb{C} \in \mathcal{O}(D)$, sta $u = \operatorname{Re} f$ in $v = \operatorname{Im} f$ HARMONIČNI KONJUGIRANKI.

Trditev. *Naj bo D zvezdasto območje v $\mathbb{C}$ in $u : D \to \mathbb{R}$ harmonična funkcija. Tedaj na D obstaja harmonična konjugiranka k u.*

Dokaz. Če harmonična konjugiranka obstaja, je $u_x = v_y$ in $v_x = -u_y$. Torej

$$\vec{\nabla}.v = \begin{bmatrix} -u_y \\ u_x \end{bmatrix}.$$

Dovolj je, da je rotor nič, kar je res. To vektorsko polje torej ima potencial v, določen do konstante natančno. □

Vprašanje 72. Dokaži, da je harmonična funkcija na zvezdastem območju gladka.

Odgovor: Pokažemo lahko (glej trditev), da tedaj obstaja harmonična konjugiranka v. Tedaj je $f = u + iv$ holomorfna, torej je u gladka.

Trditev. *Naj bo $f \in \mathcal{O}(D)$ in $\alpha \in D$. Naj bo $\overline{\Delta(\alpha, r)} \subseteq D$. Tedaj se f na $\Delta(\alpha, r)$ da razviti v potenčno vrsto*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n,$$

kjer je

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha,r)} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz.$$

Dokaz. Velja

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - \alpha) - (z - \alpha)} = \frac{1}{(\xi - \alpha)\left(1 - \frac{z-\alpha}{\xi-\alpha}\right)}.$$

Naj bo ρ tak, da je $|z - \alpha| \leq \rho < r$. Tedaj je

$$\left|\frac{z-\alpha}{\xi-\alpha}\right| \leq \frac{\rho}{r} < 1,$$

torej lahko zapišemo

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\alpha)^n}{(\xi-\alpha)^n},$$

ta vrsta pa konvergira enakomerno za $z \in \overline{\Delta(\alpha, \rho)}$ in $\xi \in \partial\Delta(\alpha, r)$. Za $z \in \Delta(\alpha, r)$ velja

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Tedaj velja

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\alpha)^n}{(\xi-\alpha)^n} d\xi.$$

Ker vrsta konvergira enakomerno, lahko zamenjamo integral in vrsto; torej

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi-\alpha)^{n+1}} d\xi \right) (z-\alpha)^n.$$

□

Vprašanje 73. Pod katerim pogojem se da holomorfno funkcijo zapisati kot potenčno vrsto? Kakšni so koeficienti? Dokaži.

Izrek (Liouville)**.** *Naj bo $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Denimo, da obstajata $c > 0$ in $n \in \mathbb{N}_0$, da za vsak $z \in \mathbb{C}$ velja*

$$|f(z)| \leq c(1 + |z|^n).$$

Tedaj je f polinom stopnje največ n.

Dokaz. Velja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

na celem $\mathbb{C}$. Ocenimo

$$|a_n| = \frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!} = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{S(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right| \leq \frac{1}{2\pi}2\pi r\frac{\sup|f|}{r^{n+1}} = \frac{\sup|f|}{r^n}$$

za vsak $r > 0$. Po predpostavki velja

$$|a_n| \leq c\frac{1+r^N}{r^n},$$

kar za $n > N$ in $r \to \infty$ konvergira k 0. □

Vprašanje 74. Povej in dokaži Liouvilleov izrek.

Izrek (Osnovni izrek algebre)**.** *Naj bo p nekonstantni polinom s kompleksnimi koeficienti. Tedaj ima p ničlo v $\mathbb{C}$.*

Dokaz. Naj bo $p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ polinom stopnje n. Denimo, da nima ničle v $\mathbb{C}$. Potem je $\frac{1}{p} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Ocenimo

$$|p(z)| \geq |z|^n \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{z} - \ldots - \frac{|a_0|}{|z|^n}\right).$$

Obstaja $R > 0$, da je za $|z| > R$ drugi faktor večji od $\frac{1}{2}|a_n|$. Tedaj za $|z| > R$ velja

$$\frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{1}{R^n}\frac{2}{|a_n|},$$

na $\overline{\Delta(0,R)}$ pa je $\frac{1}{|p(z)|}$ zvezna in zato omejena. Sledi, da je $\frac{1}{p}$ omejena na $\mathbb{C}$, torej po Liouvilleovem izreku konstantna. □

Vprašanje 75. Dokaži osnovni izrek algebre.

3.7.2 Princip maksima

Izrek. *Naj bo D območje in $f \in \mathcal{O}(D)$. Denimo, da je f omejena na D. Če f ni konstantna, velja $|f(z)| < \sup_D |f|$ za vsak $z \in D$.*

Dokaz. Denimo, da obstaja $\alpha \in D$, da je $|f(\alpha)| = \sup_D |f|$.

Pokažimo vmesno trditev: če je $|f|$ konstantna, je tudi f konstantna: če je $f(z)\overline{f(z)} = A$, odvajamo obe strani po $\overline{z}$ in dobimo $f\overline{f'} = 0$. Če to odvajamo po z, dobimo $f'\overline{f'} = 0$, torej je $|f'| = 0$, torej je f konstantna, ker je D območje.

Naj bo $A = \{z \in D \mid |f(z)| = \sup_D |f|\}$. Dokazali bomo, da je A neprazna, odprta in zaprta. Sledilo bo, da je $A = D$, ker je D povezana. Velja $\alpha \in A$. Ker je $|f(z)|$ zvezna, je A zaprta. Za odprtost uporabimo lastnost povprečne vrednosti. Naj bo $z_0 \in A$. Obstaja $r_0 > 0$, da je $\overline{\Delta(z_0, r_0)} \subseteq D$. Naj bo $0 < r < r_0$. Po lastnosti povprečne vrednosti velja

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\phi}) d\phi,$$

torej

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(z_0 + re^{i\phi}) \right| d\phi.$$

Če levo stran enačbe nesemo na desno in pod integral, dobimo

$$0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\left| f(z_0 + re^{i\phi}) \right| - |f(z_0)|) d\phi,$$

ker pa je $f(z_0)$ maksimum, je integrand nepozitiven. Sledi $\left| f(z_0 + re^{i\phi}) \right| = |f(z_0)|$ za vse $\phi \in [0, 2\pi]$. Povprečje pa ne mora biti večje od maksimuma, torej so te točke v A za vsak $r < r_0$. □

Vprašanje 76. Povej in dokaži princip maksima.

Posledica. *Naj bo D omejena odprta množica v $\mathbb{C}$. Naj bo $f \in \mathcal{O}(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$. Tedaj je $\max_{\overline{D}} |f| = \max_{\partial D} |f|$.*

Dokaz. Preslikava $|f|$ je zvezna na kompaktu $\overline{D}$, torej obstaja maksimum. Podobno velja za rob. Očitno je $\max_{\overline{D}} |f| \geq \max_{\partial D} |f|$. Denimo, da obstaja $\alpha \in D$, da je $|f(\alpha)| = \max_{\overline{D}} |f|$. Naj bo D_0 povezana komponenta, ki vsebuje α. To je območje, torej je f konstantna na D_0. Torej je $|f(z)| = |f(\alpha)|$ tudi na robu komponente. □

Trditev. *Naj bo $f \in \mathcal{O}(\Delta(\alpha, r))$ nekonstantna in naj ima v α ničlo. Potem obstajata tak $N \in \mathbb{N}$ in $g \in \mathcal{O}(\Delta(\alpha, r))$, da g nima ničle v α, in velja $f(z) = g(z)(z - \alpha)^N$.*

Dokaz. Funkcijo f lahko razvijemo v vrsto $f(z) = \sum_n a_n (z - \alpha)^n$. Konvergenčni polmer te vrste je vsaj r. Velja $f(\alpha) = a_0 = 0$. Če obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $a_n \neq 0$, lahko izberemo najmanjšega takega, in ga imenujemo N. Potem

$$f(z) = (z - \alpha)^N (a_N + a_{N+1}(z - \alpha) + \ldots).$$

Drug oklepaj je potenčna vrsta s konvergenčnim polmerom vsaj r. □

Izrek (Princip identičnosti)**.** *Naj bo D območje in $A \subseteq D$ podmnožica s stekališčem v D. Naj bo $f \in \mathcal{O}(D)$, za katero velja $f(a) = 0$ za vsak $a \in A$. Potem je $f = 0$ na D.*

Dokaz. Definiramo $B = \{z \in D \mid f(z) = f'(z) = f''(z) = \cdots = 0\}$. Dokazali bomo, da je B zaprta, odprta in neprazna, iz česar bo sledilo $B = D$ in $f = 0$ na D.

Velja
$$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{(n)*}(\{0\}),$$
torej je B zaprta. Če je $z_0 \in B$, obstaja $r_0 > 0$, da je $K(z_0, r_0) \subseteq D$. Tam lahko f razvijemo v Taylorjevo vrsto; sestavljena je samo iz ničel, ker so v z_0 vsi odvodi enaki 0. Torej je $K(z_0, r_0) \subseteq B$. Torej je odprta.

Naj bo $A \subseteq D$ taka kot v predpostavki, in $\alpha \in D$ stekališče A. Obstaja $r > 0$, da je $\Delta(\alpha, r) \subseteq D$. Po pomožni trditvi velja $f = 0$ na $\Delta(\alpha, r)$ ali $f(z) = (z-\alpha)^N g(z)$ za $g \in \mathcal{O}(\Delta(\alpha, r))$ in $g(\alpha) \neq 0$. V prvem primeru smo končali. V drugem primeru obstaja zaporedje točk $(a_n)_n \in A$ točk, različnih od α, ki konvergirajo k α. Obstaja $\varepsilon > 0$, da je $g(z) \neq 0$ za $z \in \Delta(\alpha, \varepsilon)$. Torej so edine ničle na $\Delta(\alpha, \varepsilon)$ v točki α. $\rightarrow\!\leftarrow$ □

Vprašanje 77. Povej in dokaži princip identičnosti.

3.7.3 Izolirane singularne točke

Naj bo $\alpha \in D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{C}$ in $D^* = D \backslash \{\alpha\}$ prebodena okolica. Funkcija, holomorfna na D^* ima IZOLIRANO SINGULARNO TOČKO v α.

Izrek (Razvoj v Laurantovo vrsto)**.** *Naj bo $f \in \mathcal{O}(\Delta^*(\alpha, R))$. Tedaj se f na $\Delta^*(\alpha, R)$ da razviti v Laurantovo vrsto*
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n,$$
ki konvergira absolutno na $\Delta^*(\alpha, R)$ ter enakomerno na kompaktnih podmnožicah. Za $0 < r < R$ ter $n \in \mathbb{Z}$ je
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - \alpha| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - \alpha)^{n+1}} d\xi.$$
Regularni del vrste konvergira absolutno na $\Delta(\alpha, R)$ in enakomerno na kompaktnih podmnožicah. Glavni del konvergira absolutno na $\mathbb{C} \backslash \alpha$ in enakomerno na kompaktnih podmnožicah.

Dokaz. Za vsak kompakt K v tej množici obstajata $0 < \rho < r$, da je $K \subseteq A(\alpha, \rho, r)$. Za vsak z iz tega kolobarja je
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$
Integral lahko razpišemo na dva:
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta(\alpha, r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta(\alpha, \rho)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

kjer negativni predznak pride iz orientacije. Podobno kot pri razvoju v Taylorjevo vrsto od prej pokažemo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(\alpha,r)}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(\alpha,r)}\frac{f(\xi)}{(\xi-\alpha)^{n+1}}d\xi\right)(z-\alpha)^n.$$

S skoraj enakimi argumenti pokažemo podobno tudi za drugi integral; ta sedaj konvergira absolutno za vse $z\neq\alpha$. □

Vprašanje 78. Povej in dokaži izrek o razvoju v Laurantovo vrsto.

Definicija. Naj bo α izolirana singularnost funkcije $f\in\mathcal{O}(\Delta^*(\alpha,R))$. Naj bodo $(a_n)_n$ členi Laurantovega razvoja za to funkcijo. Točka α je ODPRAVLJIVA SINGULARNOST za f, če je $a_{-n}=0$ za vse $n\in\mathbb{N}$. Točka α je POL stopnje $N\in\mathbb{N}$ za f, če je $a_{-N}\neq 0$ in $a_m=0$ za vse $m<-N$. Točka α je BISTVENA SINGULARNOST za f, če je $a_{-n}\neq 0$ za neskončno mnogo $n\in\mathbb{N}$.

Izrek. *Naj ima f v α izolirano singularno točko. Tedaj je α odpravljiva singularna točka natanko tedaj, ko obstaja $r>0$, da je f omejena na $\Delta^*(\alpha,r)$.*

Dokaz. Če ima f odpravljivo singularnost, jo lahko razširimo do holomorfne funkcije, ki bo na $\overline{\Delta(\alpha,r)}$ omejena. Če je f omejena na $\Delta(\alpha,r)$ za nek $r>0$: naj bo $n\in\mathbb{N}$. Za $r'<r$ velja

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(\alpha,r')}\frac{f(\xi)}{(\xi-\alpha)^{-n+1}}d\xi.$$

Obstaja $M<\alpha$, da je $|f(z)|\leq M$ na $\Delta^*(\alpha,r)$, torej

$$|a_{-n}|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Delta(\alpha,r')}M\,|\xi-\alpha|^{n-1}\,|d\xi|=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Delta(\alpha,r')}M(r')^{n-1}\,|d\xi|=M(r')^n,$$

to pa konvergira k 0 za $r'\to 0$. Torej je $a_{-n}=0$, torej je α odpravljiva singularnost. □

Vprašanje 79. Karakteriziraj odpravljive singularnosti in dokaži karakterizacijo.

Trditev. *Naj bo $f\in\mathcal{O}(\Delta^*(\alpha,R))$. Funkcija f ima v α pol stopnje N natanko tedaj, ko obstaja $g\in\mathcal{O}(\Delta(\alpha,R))$, da je $g(\alpha)\neq 0$ in*

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-\alpha)^n}.$$

Dokaz. V desno: $g(z)=a_{-N}+\ldots+a_0(z-\alpha)^N+\ldots$. Konvergenčni polmer je vsaj R. V levo: Razvijemo g v Taylorjevo vrsto in dobimo Laurantovo vrsto za f. Ta konvergira na $\Delta^*(\alpha,R)$ absolutno in enakomerno na kompaktih. □

Izrek. *Naj ima $f\in\mathcal{O}(\Delta^*(\alpha,R))$ v α izolirano singularno točko. Tedaj ima f v α pol natanko tedaj, ko je $\lim_{z\to\alpha}|f(z)|=\infty$.*

Dokaz. V desno: uporabimo pomožno trditev in zapišemo limito. V levo: Za vsak $M > 0$ obstaja $\varepsilon > 0$, da velja sklep

$$0 < |z - \alpha| < \varepsilon \implies |f(z)| \geq M.$$

Tedaj f nima ničel na $\Delta^*(\alpha, \varepsilon)$. Na tej množici definiramo

$$F(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

Velja $\lim_{z \to \alpha} |F(z)| = 0$, torej je F omejena v okolici α, torej ima tam odpravljivo singularnost. Velja $F(z) = (z - \alpha)^N h(z)$ za nek $N > 0$ in $h \in \mathcal{O}(\Delta^*(\alpha, \varepsilon'))$, da $h(\alpha) \neq 0$. Tedaj je

$$f(z) = \frac{\frac{1}{h(z)}}{(z - \alpha)^N}$$

v neki okolici α, torej ima po pomožni trditvi f pol v α. $\square$

Vprašanje 80. Karakteriziraj in dokaži karakterizacijo: izolirana singularnost je pol.

Izrek. *Naj bo $f \in \mathcal{O}(\Delta^*(\alpha, R))$. Funkcija f ima v α bistveno singularnost natanko tedaj, ko za vsak dovolj majhen $0 < r < R$ velja $\overline{f_*(\Delta^*(\alpha, r))} = \mathbb{C}$.*

Dokaz. Dokazujemo, da f nima bistvene singularnosti natanko tedaj, ko obstaja preboden disk, slika katerega ni gosta v $\mathbb{C}$. V desno: f ima v α odpravljivo singularnost ali pol. Denimo, da ima odpravljivo singularnost. Potem je f omejena v neki okolici α, in slika ni gosta v $\mathbb{C}$. Denimo, da ima pol. Tedaj je slika okolica točke ∞, in ni gosta v $\mathbb{C}$.

V levo: Denimo, da za nek $0 < r \leq R$ slika $f_*(\Delta^*(\alpha, r))$ ni gosta v $\mathbb{C}$. Tedaj obstajata $A \in \mathbb{C}$ ter $\rho > 0$, da $\Delta^*(A, \rho) \cap f_*(\Delta^*(\alpha, r)) = \varnothing$. Torej je $|f(z) - A| \geq \rho > 0$ za vse $z \in \Delta^*(\alpha, r)$. Definiramo

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - A} \in \mathcal{O}(\Delta^*(\alpha, r)).$$

Velja $|h(z)| \leq \frac{1}{\rho}$, torej je h omejena in ima odpravljivo singularnost v α. Torej je $h(z) = (z - \alpha)^N g(z)$ za nek $N \in \mathbb{N}_0$, in holomorfno g, da velja $g(\alpha) \neq 0$, lahko velja tudi $g = h$. Velja

$$\frac{1}{f(z) - A} = (z - \alpha)^N g(z),$$

torej

$$f(z) = A + \frac{\frac{1}{g(z)}}{(z - \alpha)^N}$$

na nekem manjšem disku, kjer g nima ničel. Če je $N = 0$, ima f odpravljivo singularnost; sicer ima pol. $\square$

Vprašanje 81. Karakteriziraj in dokaži karakterizacijo: izolirana singularnost je bistvena singularnost.

Izrek (Veliki Picardov izrek)**.** *Naj bo $f \in \mathcal{O}(\Delta^*(\alpha, R))$. Funkcija f ima v α bistveno singularnost natanko tedaj, ko f zavzame vse vrednosti v $\mathbb{C}$, razen morda ene, neskončno mnogokrat v vsaki okolici točke α.*

Vprašanje 82. Povej veliki Picardov izrek.

Izrek (Mali Picardov izrek)**.** *Naj bo f nekonstantna cela holomorfna funkcija. Tedaj f zavzame vse vrednosti v $\mathbb{C}$, razen morda ene.*

Dokaz. Točka 0 je izolirana singularna točka funkcije $g(z) = f(\frac{1}{z})$. Če je odpravljiva singularnost, obstajata $r > 0$ in $M < \infty$, da je g omejena z M na $0 < |z| < r$. Torej za $\frac{1}{r} < \frac{1}{|z|}$ velja $\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq M$. Za $|z| \leq r$ pa je f omejena, ker je zvezna na kompaktu. Torej je f omejena in zato konstantna.

Če je 0 pol stopnje N za g, obstaja $h \in \mathcal{O}(\Delta(0,2))$, $h(0) \neq 0$ in $g(z) = \frac{h(z)}{z^N}$. Obstaja $M < \infty$, da je $|h(z)| \leq M$ na $\overline{\Delta(0,1)}$. Tedaj je $|g(z)| \leq \frac{M}{|z|^N}$ za $0 < |z| \leq 1$, torej za $|z| \geq 1$ velja $|f(z)| \leq M\,|z|^N$. Na $\overline{\Delta(0,1)}$ je f tudi omejena; torej je f polinom. Ker po predpostavki ni konstanten, za vsak $A \in \mathbb{C}$ obstaja rešitev $f(z) = A$.

Če je 0 bistvena singularnost za g, trditev velja po velikem Picardovem izreku. □

Vprašanje 83. Povej in dokaži mali Picardov izrek.

Posledica. *Vsaka cela holomorfna funkcija, ki ne zavzame dveh vrednosti, je konstantna.*

3.7.4 Meromorfne funkcije

Definicija. Naj bo D območje in $A \subseteq D$ diskretna podmnožica brez stekališč v D. Naj bo $f \in \mathcal{O}(D \backslash A)$ in naj ima f v vsaki točki A pol. Tedaj je f MEROMORFNA na D.

Vprašanje 84. Definiraj meromorfne funkcije.

Trditev. *Naj bo D območje in f meromorfna na D. Če ima množica ničel f stekališče v D, je $f = 0$.*

Definicija. Naj bo $f \in \mathcal{O}(\Delta^*(\alpha, R))$. Če je $f(z) = \sum_n a_n(z-\alpha)^n$ razvoj v Laurantovo vrsto, je RESIDUUM f v α enak a_{-1}.

Izrek (izrek o residuumih)**.** *Naj bo D omejena odprta množica v $\mathbb{C}$ z odsekoma gladkim robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih sklenjenih krivulj, orientiranih pozitivno glede na D. Naj bodo $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in D$ in $f \in \mathcal{O}(D\backslash\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}) \cap \mathcal{C}^1(\overline{D}\backslash\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\})$. Tedaj je*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f(z)dz = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{Res}(f, \alpha_i).$$

Dokaz. Naj bo $r > 0$ tak, da $\overline{\Delta(\alpha_i, r)} \subseteq D$ in $\overline{\Delta(\alpha_i, r)} \cap \overline{\Delta(\alpha_j, r)} = \varnothing$. Za $D_r = D \setminus \cup_{i=1}^N \overline{\Delta(\alpha_i, r)}$ je $f \in \mathcal{O}(D_r) \cap \mathcal{C}^1(\overline{D_r})$. Tedaj velja Cauchyjev izrek, torej

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) dz - \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{N} \operatorname{Res}(f, \alpha_i).$$

□

Vprašanje 85. Povej in dokaži izrek o residuumih.

Trditev. *Naj bo $f \in \mathcal{O}(\Delta^*(\alpha, R))$ in naj ima f v α pol stopnje N. Tedaj je*

$$\operatorname{Res}(f, \alpha) = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \to \alpha} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}((z-\alpha)^N f(z)).$$

Dokaz. f razvijemo v vrsto in odvajamo. □

Izrek. *Naj bosta p, q polinoma. Naj velja $q(x) \neq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ ter $st\, q \geq st\, p + 2$. Tedaj je*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Res}(\frac{p}{q}, \alpha_j),$$

kjer so α_j poli funkcije $\frac{p}{q}$ v zgornji polravnini.

Dokaz. Iz predpostavk integral obstaja. Naj bo R tako velik, da so vsi poli v zgornji polravnini v množici

$$D_R = K(0, R) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Na tej množici uporabimo izrek o ostankih. S preprosto oceno pokažemo, da za $R \to 0$ integral po zgornjem loku konvergira k 0. □

Vprašanje 86. Kako izračunaš integral racionalne funkcije po realni osi? Dokaži.

Izrek (princip argumenta)**.** *Naj bo $D \subseteq \overline{D} \subseteq \Omega$ omejena odprta množica, ∂D kot v Cauchyjevem izreku in f meromorfna na Ω. Denimo, da f nima polov in ničel na ∂D. Tedaj je*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f - P_f,$$

kjer je N_f število ničel f na D, P_f pa število polov; oboje štelo s kratnostjo.

Dokaz. Singularnosti $\frac{f'}{f}$ so poli in ničle f. Naj bo α ničla ali pol f. Potem $f(z) = (z-\alpha)^N g(z)$ za $g \in \mathcal{O}(\Delta(\alpha, R))$, $g(\alpha) \neq 0$ in $N \in \mathbb{Z}$. Velja

$$f'(z) = N(z-\alpha)^{N-1} g(z) + (z-\alpha)^N g'(z),$$

torej

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{N}{z-\alpha} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Desni člen je holomorfen, ker je $g(z) \neq 0$ na okolici; torej je $\operatorname{Res}(f,\alpha) = N$. Po izreku o ostankih velja. $\square$

Vprašanje 87. Povej in dokaži princip argumenta.

Izrek (Rouche)**.** *Naj bosta D in Ω tako kot v principu argumenta. Naj bo $f : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{C}$ homotopija holomorfnih funkcij. Denimo, da je $f(t,z) \neq 0$ za vse $t \in [0,1]$ in $z \in \partial D$. Tedaj je število ničel $f(0,\cdot)$ enako številu ničel $f(1,\cdot)$, šteto s kratnostjo.*

Dokaz. Funkcija

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f'(t,z)}{f(t,z)} dz = (\text{št. ničel})$$

je integral s parametrom, torej je zvezna na $[0,1]$, torej je konstantna. $\square$

Vprašanje 88. Povej in dokaži Rouchejev izrek.

Trditev. *Naj bo $\overline{\Delta(\alpha,r)} \subseteq D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{C}$. Naj bo $f \in \mathcal{O}(D)$ in naj velja $|f(\alpha)| < \min_{\partial\Delta(\alpha,r)} |f(z)|$. Tedaj ima f ničlo na $\Delta(\alpha,r)$.*

Dokaz. Naj bo $F(z) = f(z) + (-f(\alpha))$. Potem imata F in f enako ničel na disku. Velja $F(\alpha) = 0$. $\square$

Izrek (izrek o odprti preslikavi)**.** *Naj bo D območje v $\mathbb{C}$ in $f : D \to \mathbb{C}$ nekonstantna holomorfna funkcija. Tedaj je f odprta preslikava.*

Dokaz. Dovolj je, da za vsak $\alpha \in D$ najdemo okolico $\Delta(\alpha,r)$, ki se slika v okolico $f(\alpha)$. Velja $f(z) - f(\alpha) = (z-\alpha)^N g(z)$ za nek $N \in \mathbb{N}$ in $g \in \mathcal{O}(D)$, in $g(\alpha) \neq 0$. Naj bo $\overline{\Delta(\alpha,r)} \subseteq D$ taka, da je $g(z) \neq 0$ na njej. Na robu je

$$|z-\alpha|^N |g(z)| = r^N |g(z)| \geq r^N \min_{\partial\Delta(\alpha,r)} |g(z)| =: r'.$$

Naj bo $w \in \Delta(f(\alpha), r')$. Velja

$$f(z) - w = f(\alpha) + (z-\alpha)^N g(z) - w = (z-\alpha)^N g(z) + (f(\alpha) - w).$$

Po Rouchejevem izreku ima $f(z) - w$ toliko ničel na $\Delta(\alpha,r)$, kolikor jih ima $(z-\alpha)^N g(z)$; ta jih ima N, torej je $w \in f_*(\Delta(\alpha,r))$. $\square$

Vprašanje 89. Povej in dokaži izrek o odprti preslikavi.

Trditev (obstoj logaritma)**.** *Naj bo D zvezdasto območje in $f \in \mathcal{O}(D)$ brez ničel. Tedaj obstaja $g \in \mathcal{O}(D)$, da je $f = e^g$.*

Dokaz. Naj bo α tista točka iz D, iz katere vidimo vse ostale. Definiramo

$$g(z) = \int_{\alpha \to z} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi.$$

Enako kot v dokazu Morerovega izreka vidimo, da je $g \in \mathcal{O}(D)$ in $g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$. Preverimo lahko, da velja $(fe^{-g})' = 0$, torej je to konstantna funkcija. Torej $f = e^{g+B}$. $\square$

Vprašanje 90. Povej in dokaži trditev o obstoju logaritma.

3.7.5 Holomorfne funkcije kot preslikave

Definicija. Holomorfna bijekcija s holomorfnim inverzom je BIHOLOMORFIZEM.

Izrek. *Naj bo $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{C}$. Naj bo $f \in \mathcal{O}(D)$ in $\alpha \in D$ taka točka, da je $f'(\alpha) \neq 0$. Tedaj obstaja okolica $U \subseteq D$ točke α in okolica V točke $f(\alpha)$, da je $f : U \to V$ biholomorfizem.*

Dokaz. Ker je $f'(\alpha) \neq 0$, je df_α nesingularna $\mathbb{R}$-linearna preslikava. Po izreku o inverzni preslikavi obstajata okolici U, V, da je $f : U \to V$ difeomorfizem. Torej obstaja $\mathcal{C}^\infty$ inverz g. Vemo $f \circ g = \mathrm{id}_V$. Če odvajamo po $\overline{w}$, dobimo

$$f_z g_{\overline{w}} + f_{\overline{z}} \overline{g_w} = 0.$$

Ker je $f_{\overline{z}} = 0$ in $f_z(\alpha) \neq 0$, obstaja okolica α, na kateri je $g_{\overline{w}} = 0$, torej je g holomorfna na tej okolici. $\square$

Vprašanje 91. Povej in dokaži izrek o biholomorfizmu.

Izrek (izrek o lokalni strukturi holomorfnih funkcij)**.** *Naj bo D območje, $f \in \mathcal{O}(D)$ nekonstantna in $\alpha \in D$. Naj bo N stopnja ničle funkcije $z \mapsto f(z) - f(\alpha)$ v točki α. Potem obstajajo taka okolica $U \ni \alpha$, $\phi \in \mathcal{O}(U)$ in $r > 0$, da je*

- $f(z) = f(\alpha) + (\phi(z))^N$ *na* U,
- $\phi'(z) \neq 0$ *na* U, $\phi(\alpha) = 0$,
- $\phi : U \to \Delta(0, r)$ *je biholomorfizem.*

Dokaz. Ker f ni konstantna in je D območje, obstaja $N \in \mathbb{N}$, da je $f(z) = f(\alpha) + (z - \alpha)^N g(z)$ in $g(z) \neq 0$ na $\overline{\Delta(\alpha, R)} \subseteq D$. Obstaja $h \in \mathcal{O}(\Delta(\alpha, R))$, da je $h^N = g$. Definiramo $\phi(z) = (z - \alpha)h(z)$. $\square$

Vprašanje 92. Povej in dokaži izrek o lokalni strukturi holomorfnih funkcij.

Posledica. *Naj bo $f : D \to f_*(D)$ injektivna holomorfna preslikava. Potem je $f'(z) \neq 0$ na D in f biholomorfizem.*

Dokaz. Funkcija je nekonstantna na vsaki komponenti D. Tedaj je f odprta in $f_*(D)^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{C}$. Naj bo $\alpha \in D$. Lokalno velja $f(z) = f(\alpha) + (\phi(z))^N$ za biholomorfizem $\phi : U \to \Delta(0, r)$. Ker je f injektivna, mora veljati $N = 1$. Tedaj $f'(\alpha) \neq 0$. Po izreku o inverzni preslikavi za holomorfne funkcije je f^{-1} lokalno holomorfna. □

3.7.6 Möbiusove transformacije

Preslikave oblike

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

kjer je $ad - bc = 1$, tvorijo grupo. Izkaže se, da je enaka $\operatorname{Aut}(\mathbb{CP}^1)$.

Osnovne Möbiusove transformacije so sledeče:

- translacija $z \mapsto z + b$,
- množenje z neničelnim številom $z \mapsto az$,
- inverzija na krožnico $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Preverimo lahko, da te preslikave res generirajo zgoraj omenjeno grupo.

Trditev. *Naj bodo $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in \mathbb{CP}^1$ različni. Naj bodo $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{CP}^1$ različni. Tedaj obstaja Möbiusova transformacija, ki slika α_1 v α_2, β_1 v β_2 in γ_1 v γ_2.*

Dokaz. Dovolj je pokazati, da lahko tri točke slikamo v $0, 1, \infty$. Slikati želimo $\alpha \mapsto 0, \beta \mapsto 1, \gamma \mapsto \infty$. Obravnavamo primere.

- Če so $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$:
$$z \mapsto \frac{z-\alpha}{z-\gamma}\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}.$$
- Če je $\alpha = \infty, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$:
$$z \mapsto \frac{\beta-\gamma}{z-\gamma}.$$
- Če je $\beta = \infty, \alpha, \gamma \in \mathbb{C}$:
$$z \mapsto \frac{z-\alpha}{z-\gamma}.$$
- Če je $\gamma = \infty, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$:
$$z \mapsto \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}.$$

□

Vprašanje 93. Dokaži, da lahko z Möbiusovo transformacijo slikaš vsake tri točke v vsake tri točke.

Trditev. *Vsaka Möbiusova transformacija slika množico premic in krožnic v $\mathbb{C}$ v množico premic in krožnic v $\mathbb{C}$.*

Dokaz. Trditev moramo pokazati za generatorje množice. Za translacijo in množenje očitno velja. Poglejmo si inverzijo.

Premica je definirana z enačbo $\mathrm{Re}\,(\overline{\alpha}z) = c$ za $\alpha \neq 0$. S sliko $w = \frac{1}{z}$ dobimo

$$\overline{\alpha w} + \alpha w = 2cw\overline{w}.$$

Če je $c = 0$, je $\mathrm{Re}\,(\alpha w) = 0$ in je slika tudi premica. Če je $c \neq 0$, pišemo $w = u + iv$ in $\alpha = a + ib$ ter izpeljemo

$$(u - \frac{a}{2c})^2 + (v + \frac{b}{2c})^2 = \frac{a^2 + b^2}{4c^2}.$$

Krožnica je definirana z enačbo $|z - \alpha|^2 = r^2$ oziroma

$$|z|^2 - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z + (|\alpha|^2 - r^2) = 0.$$

Z inverzijo $w = \frac{1}{z}$ dobimo

$$1 - \alpha w - \overline{\alpha w} + (|\alpha|^2 - r^2) = 0.$$

V primeru $|\alpha|^2 = r^2$ je to enačba premice, v primeru $|\alpha|^2 \neq r^2$ pa izpeljemo

$$|w|^2 - \frac{\alpha}{|\alpha|^2 - r^2}w - \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}\overline{w} + \frac{1}{|\alpha|^2 - r^2} = 0,$$

kar je enačba krožnice. □

Vprašanje 94. Pokaži, da Möbiusove transformacije ohranjajo krožnice v $\mathbb{CP}^1$.

3.7.7 Konformne preslikave

Definicija. Če sta (M, d) in (N, ρ) metrična prostora, je preslikava $f : M \to N$ IZOMETRIJA, če za vsaka $x, y \in M$ velja $d(x, y) = \rho(f(x), f(y))$.

Vprašanje 95. Kaj so izometrije ravnine?

Odgovor: Translacije, rotacije in zrcaljenja.

Definicija. Naj bo $D^{\mathrm{odp}} \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funkcija in $\alpha \in D$. Rečemo, da f OHRANJA KOTE V α, če obstaja tak $\phi \in [0, 2\pi]$, da za vsak $\theta \in [0, 2\pi]$ velja

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{f(\alpha + re^{i\phi}) - f(\alpha)}{|f(\alpha + re^{i\phi}) - f(\alpha)|} = e^{i\phi}e^{i\theta}.$$

Če f ohranja kote v vsaki točki iz D, je KONFORMNA na D.

Vprašanje 96. Definiraj konformne preslikave.

Izrek. *Naj bo $f : D \to \mathbb{C}$ funkcija.*

- *Če je $f \in \mathcal{O}(D)$ in je $f'(z) \neq 0$ za $z \in D$, je f konformna na D.*
- *Naj bo f diferenciabilna in konformna na D. Potem je f holomorfna na D in $f'(z) \neq 0$ za vse $z \in D$.*

Dokaz. V prvi točki za $\alpha \in D$ definiramo $\phi = \arg f'(\alpha)$ ter izračunamo limito s pomočjo diferenciala. Druga točka: Velja

$$f(\alpha + re^{i\phi}) - f(\alpha) = f_z(\alpha)re^{i\phi} + f_{\overline{z}}(\alpha)re^{-i\phi} + o(r)$$

in $f_z(\alpha)re^{i\phi} + f_{\overline{z}}(\alpha)re^{-i\phi} = df_\alpha(re^{i\phi})$.

Če je diferencial ničelna funkcija, je $f_{\overline{z}}(\alpha) = 0$. Sicer obstajata največ dva kota $\theta_0, \pi+\theta_0$, da je $df_\alpha(re^{i\theta_0}) = 0$ in $df_\alpha(re^{i\theta_0+i\pi}) = 0$. Naj bo θ različen od obeh teh kotov. Ker je f konformna, obstaja ϕ, da je

$$\frac{f_z(\alpha)e^{i\phi} + f_{\overline{z}}(\alpha)e^{-i\phi}}{|f_z(\alpha)e^{i\phi} + f_{\overline{z}}(\alpha)e^{-i\phi}|} = e^{i\phi}e^{i\theta}.$$

Velja torej

$$(f_z(\alpha)e^{i\phi} + f_{\overline{z}}(\alpha)e^{-i\phi})^2 = e^{2i\phi}e^{2i\theta}(f_z(\alpha)e^{i\phi} + f_{\overline{z}}(\alpha)e^{-i\phi})(\overline{f_z(\alpha)}e^{-i\theta} + \overline{f_{\overline{z}}(\alpha)}e^{i\phi}).$$

Ker so funkcije zvezne v θ, enakost velja tudi za θ_0 in $\pi + \theta_0$. Izraz na desni nima člena $e^{-2i\theta}$, izraz na levi pa ga ima. Ker primerjamo dve Fourierovi vrsti, mora veljati $f_{\overline{z}}(\alpha) = 0$.

Če je $f'(\alpha) = 0$ v neki točki α, je f lokalno ekvivalentna preslikavi $w \mapsto w^n$ za nek $n \geq 2$; te preslikave ne ohranjajo kotov. □

Vprašanje 97. Karakteriziraj konformnost diferenciabilne preslikave f in dokaži karakterizacijo.

Definicija. Odprti množici D, Ω sta KONFORMNO EKVIVALENTNI, če med njima obstaja biholomorfna preslikava.

Izrek (Riemannov upodobitveni izrek)**.** *Naj bo D enostavno povezano območje, različno od $\mathbb{C}$. Tedaj je D konformno ekvivalentno Δ.*

Vprašanje 98. Povej Riemannov upodobitveni izrek.

Izrek. *$Aut(\mathbb{C}) = \{\alpha z + \beta \mid \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, \beta \in \mathbb{C}\}$.*

Dokaz. Inkluzija v levo je očitna. Inkluzija v desno: Naj bo f avtomorfizem $\mathbb{C}$. Točka ∞ je izolirana singularna točka za f. Če bi bila bistvena singularnost, bi bila potem slika $f_*(\mathbb{C}\backslash\overline{\Delta})$ gosta v $\mathbb{C}$, množica $f_*(\Delta)$ pa odprta (ker je f nekonstantna, je odprta), torej imata točko v preseku, kar je nemogoče zaradi injektivnosti f. Če bi bila ∞ odpravljiva singularnost, bi bila f omejena in zato konstantna.

Torej ima f v ∞ pol, torej je polinom (glej dokaz malega Picardovega izreka). Ker je f biholomorfna, je $f'(z) \neq 0$ za vse z, zato je f' konstanten polinom in je f polinom stopnje 1. $\square$

Vprašanje 99. Kaj so avtomorfizmi $\mathbb{C}$? Dokaži.

Trditev. $Aut(\mathbb{CP}^1) = \{z \mapsto \frac{az+b}{cd+d} \mid ad - bc = 1\}$.

Dokaz. Inkluzija v levo velja. Inkluzija v desno: Naj bo f avtomorfizem Riemannove sfere. Označimo $f(0) = \alpha, f(1) = \beta, f(\infty) = \gamma \in \mathbb{CP}^1$. To so paroma različne vrednosti, ker je f injektivna. Potem obstaja Möbiusova transformacija ϕ, ki slika $\phi(\alpha) = 0$, $\phi(\beta) = 1$ in $\phi(\gamma) = \infty$. Tudi $g = \phi \circ f$ je avtomorfizem; ker slika $\infty \mapsto \infty$, je tudi avtomorfizem $\mathbb{C}$. Ker velja $g(0) = 0$ in $g(1) = 1$, je g identiteta. Torej $f = \phi^{-1}$. $\square$

Vprašanje 100. Dokaži, da so avtomorfizmi $\mathbb{CP}^1$ natanko Möbiusove transformacije.

Izrek (Schwarzova lema)**.** *Naj bo $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ taka, da velja $f : \Delta \to \overline{\Delta}$ in $f(0) = 0$. Potem velja $|f(z)| \leq |z|$ in $|f'(0)| \leq 1$. Če v katerem od teh rezultatov velja enakost, obstaja tak $\theta \in [0, 2\pi]$, da je $f(z) = ze^{i\phi}$.*

Dokaz. Naj bo $g(z) = \frac{f(z)}{z} \in \mathcal{O}(\Delta \backslash \{0\})$. V točki 0 ima izolirano singularnost. Velja $\lim_{z \to 0} g(z) = f'(0)$, torej je to odpravljiva singularnost. Naj bo $0 < r < 1$. Funkcija g je holomorfna na okolici $\Delta(0, r)$, torej velja princip maksima. Za $|z| \leq r$ velja $|g(z)| \leq \max_{|z|=r} |g(z)| \leq \frac{1}{r} \leq 1$, ker je $|f| \leq 1$ po predpostavkah. Torej velja $|g(z)| \leq 1$ oziroma $|f(z)| \leq |z|$. Če velja kakšna od enakosti, je g konstantna po principu maksima, in njena absolutna vrednost je 1. $\square$

Vprašanje 101. Povej in dokaži Schwarzovo lemo.

Trditev. $Aut(\Delta) = \{z \mapsto e^{i\phi} \frac{a-z}{1-\overline{a}z} \mid \theta \in [0, 2\pi], |a| < 1\}$.

Dokaz. Naj bo f avtomorfizem diska. Naj bo $a = f(0)$. Poglejmo si $F(z) = \psi_a(f(z)) \in \operatorname{Aut} \Delta$ za

$$\psi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}.$$

Ker je $F(0) = 0$, po Schwarzovi lemi velja $|F'(0)| \leq 1$. Tudi F^{-1} je avtomorfizem, torej velja $|F'(0)| = 1$ in obstaja $\theta \in [0, 2\pi]$, da je $F(z) = ze^{i\theta}$. Izračunamo

$$f(z) = \psi_a^{-1}(ze^{i\phi}) = e^{i\phi} \frac{ae^{-i\theta} - z}{1 - \overline{ae^{-i\theta}}z}.$$

$\square$

Vprašanje 102. Kaj so avtomorfizmi diska? Dokaži.

Trditev. *Naj bo D enostavno povezano območje v $\mathbb{C}$, ki ni enako $\mathbb{C}$. Naj bo $\alpha \in D$. Tedaj obstaja natanko en biholomorfizem $f : D \to \Delta$, da $f(\alpha) = 0$ in $f'(\alpha) > 0$.*

Dokaz. Enoličnost; recimo, da sta f_1, f_2 taki. Potem je $g = f_1 \circ f_2^{-1}$ avtomorfizem diska, torej
$$g(z) = ze^{i\theta}.$$
Velja torej $f_1(z) = e^{i\phi} f_2(z)$. Ker sta tako $f_1'(\alpha)$ kot $f_2'(\alpha)$ pozitivni realni vrednosti, mora veljati $e^{i\phi} = 1$.

Po Riemannovem izreku obstaja biholomorfizem $H : D \to \Delta$. Naj bo $H(\alpha) = a$ in $\psi_a = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$. Preslikava $\psi_a^{-1} \circ H$ je biholomorfizem $D \to \Delta$, ki slika α v 0. Za $H_1 = \psi_a \circ H$ velja $H_1'(\alpha) \neq 0$, torej lahko definiramo $\phi = \arg H_1'(\alpha)$. Potem je $F(z) = e^{-i\phi} H_1(z)$ iskana preslikava. ☐

Vprašanje 103. Dokaži; če je D enostavno povezano območje v $\mathbb{C}$, različno od $\mathbb{C}$, potem za vsak $\alpha \in D$ obstaja natanko en biholomorfizem $D \to \Delta$, ki slika α v 0, in odvod katerega je v točki α pozitivno realno število.

3.7.8 Schwarzov princip zrcaljenja

Definicija. Naj bo D območje v $\mathbb{C}$. Potem je $D^* = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \bar{z} \in D\}$ zrcalna slika D glede na $\mathbb{R}$.

Trditev. *Naj bo D območje in $f \in \mathcal{O}(D)$. Tedaj je $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})} \in \mathcal{O}(D^*)$.*

Izrek (Schwarzov princip zrcaljenja)**.** *Naj bo D območje, simetrično glede na $\mathbb{R}$. Za $D^+ = D \cap \mathbb{R}^2_+$ in $D^0 = D \cap \mathbb{R}$ naj bo f zvezna na $D^+ \cup D^0$, holomorfna na D^+ in realna na D^0. Potem lahko f razširimo do holomorfne funkcije na D.*

Dokaz. Preslikava
$$F(z) = \begin{cases} f(z) & z \in D^+ \cap D^0 \\ \overline{f(\bar{z})} & z \in D^- \cap D^0 \end{cases}$$
je dobro definirana zvezna. Po prejšnji trditvi je holomorfna na $D^+ \cup D^-$.

Naj bo $T \subseteq D^+$ trikotnik. Velja
$$\int_{\partial T} F(z)dz = 0,$$
in podobno za trikotnik v D^-. Če je T trikotnik v $D^+ \cup D^0$, ga lahko malce zmanjšamo, in je integral po robu enak nič; ker se integral zvezno spreminja, je
$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$
Trikotnik, ki seka vse množice, lahko razdelimo na 2 dela; integral po robu vsakega od njih je enak 0. Po Morerovem izreku je F holomorfna na D. ☐

Vprašanje 104. Povej in dokaži Schwarzov princip zrcaljenja.

4 Fizika 2

4.1 Sile

Grobo rečeno je sila skupni vpliv okolice na neko telo. Naj bo dano neko telo. Z m označimo njegovo maso, z $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ hitrost ter z $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t)$ pospešek.

Za vsako možno okolico definiramo $d_{\min}$ kot najmanjšo razdaljo med danim telesom in katerimkoli telesom iz okolice.

Definicija. Naj bo S koordinatni sistem. Če $\vec{v}$ limitira k konstantni funkciji v okolicah za $d_{\min} \to \infty$, je S NEPOSPEŠEN (INERCIALEN) KOORDINATNI SISTEM.

Opomba. To je prvi Newtonov zakon.

Definicija. Naj bo S nepospešen koordinatni sistem. SKUPNA SILA OKOLICE NA OPAZOVANO TELO je $\vec{F} = m\vec{a}$.

Opomba. To je drugi Newtonov zakon.

Predpostavimo, da velja $\lim\limits_{d_{\min} \to \infty} \vec{F} = \vec{0}$.

Trditev. *NAČELO SUPERPOZICIJE Z $\vec{F_i}$ označimo silo i-tega okoliškega telesa na opazovano telo. Tedaj velja $\vec{F} = \sum_i \vec{F_i}$.*

Definicija. Naj bosta dani dve telesi. Z $\vec{F}_{1\to 2}$ označimo silo prvega telesa na drugega, z $\vec{F}_{2\to 1}$ pa silo drugega telesa na prvega. Za sili $\vec{F}_{1\to 2}$ in $\vec{F}_{2\to 1}$ velja TRETJI NEWTONOV ZAKON, če je $\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$.

Vprašanje 1. Povej pet točk, s katerimi se definira silo.

4.1.1 Gibalna količina

Uvedemo dve novi količini:

SUNEK SIL na telo je $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt$, kjer je $\vec{F}$ skupna sila na to telo.

GIBALNA KOLIČINA telesa je vektor $\vec{G} = m\vec{v}$, kjer je m masa telesa in $\vec{v}$ njegova hitrost.

Opazujmo sistem n teles. Pri tem definiramo $\vec{F_i}$ kot skupno silo na i-to telo, m_i kot maso i-tega telesa in $\vec{v_i}$ kot hitrost i-tega telesa.

Za vsako telo velja

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F_i}(t)dt = \vec{G_i}(t_2) - \vec{G_i}(t_1).$$

To dejstvo imenujemo IZREK O GIBALNI KOLIČINI in ga dokažemo s preprostim računom:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i(t)dt &= \int_{t_1}^{t_2} m_i\vec{a}_i(t)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} m_i\dot{\vec{v}}_i(t)dt \\ &= m_i(\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)).\end{aligned}$$

Količino $\vec{G}_i(t_2) - \vec{G}_i(t_1)$ imenujemo SPREMEMBA GIBALNE KOLIČINE in označimo z $\Delta\vec{G}_i$.

Vprašanje 2. Povej in dokaži izrek o gibalni količini.

Sedaj uvedemo $\vec{F}_{i\to j}$ kot silo i-tega telesa na j-to telo. Podrobneje si poglejmo primer $n = 2$. Označimo $\vec{F}_{i,z} = \vec{F}_i - \vec{F}_{j\to i}$, kar imenujemo SKUPNA ZUNANJA SILA NA TELO i (odstranimo silo drugega telesa na to telo). Velja

$$\Delta\vec{G}_i = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_i(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_{i,z} + \vec{F}_{j\to i})(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{i,z}(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{j\to i}(t)dt$$

Ob predpostavki, da za $\vec{F}_{1\to 2}$ in $\vec{F}_{2\to 1}$ velja tretji Newtonov zakon, seštejemo enačbi in dobimo

$$\int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_{1,z} + \vec{F}_{2,z})(t)dt = (\vec{G}_1 + \vec{G}_2)(t_2) - (\vec{G}_1 + \vec{G}_2)(t_1).$$

Oziroma, z oznakama $\vec{F}_z = \vec{F}_{1,z} + \vec{F}_{2,z}$ in $\vec{G} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2$,

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_z(t)dt = \Delta\vec{G}.$$

Vprašanje 3. Izpelji enačbo, ki povezuje sunek zunanjih sil s spremembo gibalne količine za sistem dveh teles.

V posebnem primeru, če je sunek zunanjih sil ničeln (pravimo, da je sistem IZOLIRAN OD OKOLICE), velja $\vec{G}(t_1) = \vec{G}(t_2)$.

4.2 Galilejeve transformacije

Želja tega razdelka je pretvarjanje med dvema koordinatnima sistemoma. Naj bosta torej dana sistema S in S'. Označimo njuni izhodišči z O in O'. Definiramo $\vec{r}_0 = \vec{O'} - \vec{O}$. Naj bo sedaj T poljubna točka v prostoru. Opazovali bomo vektorja $\vec{r} = \vec{T} - \vec{O}$ ter $\vec{r}' = \vec{T} - \vec{O'}$.

Predpostavljamo $\vec{r}_0(t) = \vec{v}_0 t$, kjer je $\vec{v}_0$ konstanta. Velja $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$, torej $\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{v}_0 t$. Dodatno predpostavimo, da je čas neodvisen od izbire koordinatnega sistema.

To (bizarno) v splošnem ni res, velja pa pri majhnih hitrostih. Za $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ in $\vec{v}' = \dot{\vec{r}}'$ velja $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$. Z dodatnim odvajanjem dobimo $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \vec{a}' = \dot{\vec{v}}'$.

Sklepamo, da je S inercialen natanko tedaj, ko je S' inercialen. Ker je masa neodvisna od izbire koordinatnega sistema, je tudi skupna sila na dano telo neodvisna od koordinatnega sistema po drugem Newtonovem zakonu.

Za nadaljevanje si olajšajmo delo in predpostavimo, da so bazni vektorji obeh sistemov enaki (paroma vzporedni in enako dolgi), ter da je $\vec{v}_0 = v_0\,\vec{e}_x$.

Pišemo $\vec{r} = (x, y, z)$ in $\vec{r}' = (x', y', z') = (x - v_0\,t, y, z)$. Uvedemo nov štiridimenzionalen vektor prostor-časa:

$$X = \begin{bmatrix} c_0\,t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Količina c_0 označuje hitrost svetlobe v vakuumu. Transformacijo lahko tedaj predstavimo z matriko

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

za $\beta_0 = \frac{v_0}{c_0}$. Če želimo transformirati skozi več koordinatnih sistemov, lahko to storimo z množenjem matrik.

Vprašanje 4. Kaj je prostor-čas? Razloži povezavo z Galilejevimi transformacijami.

4.3 Nihanje

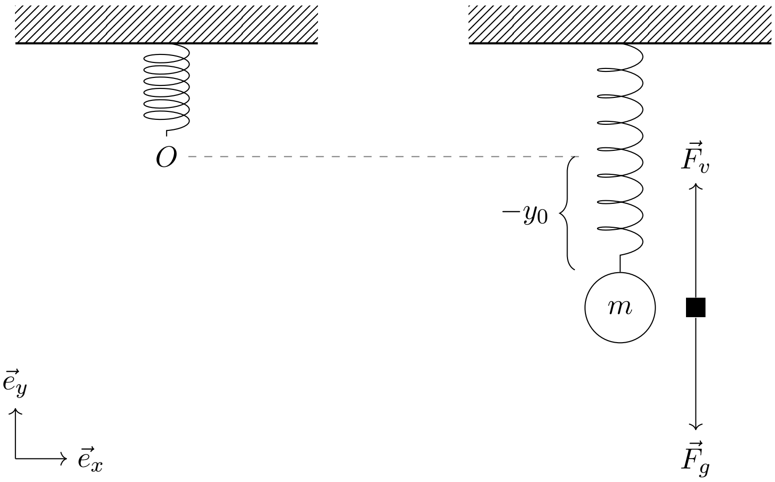
4.3.1 Utež na vijačni vzmeti

Na strop priredimo vzmet s koeficientom k ter označimo spodnjo točko vzmeti kot središče koordinatnega sistema (točka O na sliki 4.1). Za tem na vzmet obesimo utež z maso m, ter označimo y_0 kot velikost raztezka vzmeti (razlika v dolžini pred in po dodajanju uteži). Na utež delujeta dve sili; sila gravitacije in sila vzmeti. Zanju velja

$$\vec{F}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{F}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ -ky_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

po gravitacijskem in Hookovem zakonu. Ker je sistem v ravnotežju, velja $\vec{F}_v = -\vec{F}_g$, torej $mg = -ky_0$. Utež sedaj izmaknemo iz ravnovesne lege in označimo nov položaj z y. Velja $\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_v + \vec{F}_u$. Ob predpostavki linearnega zakona upora tako dobimo

$$m\ddot{y} = -mg - ky - C\dot{y}$$



Slika 4.1: Skica uteži na vijačni vzmeti.

za neko konstanto $C > 0$. Pospešek v drugih dveh smereh je ničeln, torej je hitrost konstantno 0, torej velja $x = z = 0$ (kot funkciji t). Ob preureditvi zgornje enačbe in zamenjavi $mg = -ky_0$ dobimo enačbo

$$m\ddot{y} + C\dot{y} + ky - ky_0 = 0. \tag{4.1}$$

Obe strani te enačbe delimo z m in definiramo $\beta = \frac{C}{2m}$ (KOEFICIENT DUŠENJA) ter $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Naša enačba ima tedaj obliko

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2(y - y_0) = 0.$$

Da jo še malo polepšamo, redefiniramo $y_{\text{nov}} = y_{\text{star}} - y_0$. Končna oblika enačbe lastnega dušenega nihanja je tako

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0. \tag{4.2}$$

Enačbo (4.2) rešimo z nastavkom $y(t) = Ae^{\lambda t}$. Veljati mora

$$\lambda^2 y + 2\beta\lambda y + \omega_0^2 y = 0$$

oziroma

$$(\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2)Ae^{\lambda t} = 0.$$

Prvi člen tega produkta imenujemo KARAKTERISTIČNI POLINOM. Njegovo diskriminanto izrazimo z $D = 4\beta^2 - 4\omega_0^2 =: -4\omega^2$. Obravnavamo tri primere.

Prvi primer: $D < 0$.

Ta primer imenujemo PODKRITIČNO DUŠENJE. Velja $\sqrt{D} = 2i\omega$, torej $\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega$. Rešitev enačbe dobimo kot linearno kombinacijo rešitev za λ_1 in λ_2;

$$y = e^{-\beta t}(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}).$$

Z uporabo Eulerjeve identitete prevedemo to na izraz s kotnimi funkcijami:

$$y = e^{-\beta t}((A_1 + A_2)\cos\omega t + i(A_1 - A_2)\sin\omega t),$$

kjer za $B_1 := A_1 + A_2$ in $B_2 := i(A_1 - A_2)$ dobimo

$$y = e^{-\beta t}(B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t).$$

Kombinacijo kotnih funkcij želimo prevesti na izraz z eno kotno funkcijo s faznim zamikom $\sin(\omega t + \delta)$. Če slednje razvijemo po adicijskem izreku, dobimo $\cos\delta \sin\omega t + \sin\delta\cos\omega t$. Za $B^2 = B_1^2 + B_2^2$ bo veljalo $B\sin\delta = B_1$ in $B\cos\delta = B_2$. Če ta izraza delimo, dobimo $\tan\delta = \frac{B_1}{B_2}$. Končna rešitev bo tedaj

$$y = Be^{-\beta t}\sin(\omega t + \delta). \tag{4.3}$$

V praksi takoj po zapisu enačbe uporabimo nastavek, parametra B in δ pa izračunamo iz začetnih pogojev.

Vprašanje 5. Izpelji rešitev lastnega dušenega nihanja za primer podkritičnega dušenja.

Vprašanje 6. Obravnavaj energijo nedušenega nihanja.

Odgovor: Velja $\omega^2 = \omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Energija nihala je sestavljena iz treh komponent;

$$\begin{aligned}
W_k &= \frac{1}{2}mv^2\\
W_{pr} &= \frac{1}{2}k(y + y_0)^2\\
W_p &= mg\,(y + y_0)
\end{aligned}$$

Pri zapisu prožnostne in potencialne energije moramo biti pozorni, da vzamemo pravilen raztezek; med izpeljavo smo redefinirali y, v teh enačbah dejansko potrebujemo starega. Za kinetično energijo popravek ni potreben, ker je nov y od starega le zamaknjen, torej sta odvoda enaka.

Vsota teh energij je

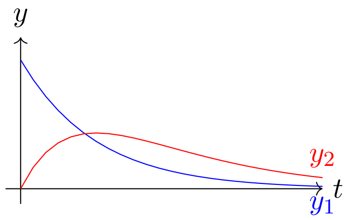
$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}mB^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t + \delta) + \frac{1}{2}k(B\sin(\omega_0 t + \delta) + y_0)^2 + mg\,(B\sin(\omega_0 t + \delta) + y_0)\\
&= \frac{1}{2}B^2k\cos^2(\omega_0 t + \delta) + \frac{1}{2}kB^2\sin^2(\omega_0 t + \delta) + kB\sin(\omega_0 t + \delta) + \frac{1}{2}ky_0^2 + mg\,(B\sin(\omega_0 t + \delta) + y_0)\\
&= \frac{1}{2}kB^2 + kB\sin(\omega_0 t + \delta)y_0 + mgB\sin(\omega_0 t + \delta) + mgy_0 + \frac{1}{2}ky_0^2\\
&= \frac{1}{2}kB^2 + \frac{1}{2}ky_0^2 + mgy_0 + B\sin(\omega_0 t + \delta)(ky_0 + mg)
\end{aligned}$$

Ker je $ky_0 = -mg$, se zadnji člen izniči in je W neodvisna od t.

Drugi primer: $D = 0$.

Ta primer imenujemo KRITIČNO DUŠENJE. Velja $\omega = 0$. Poleg očitne rešitve $y_1 = B_1 e^{-\beta t}$ moramo upoštevati tudi rešitev $y_2 = B_2 t e^{-\beta t}$, torej dobimo skupno rešitev

$$y = (B_1 + B_2 t) e^{-\beta t}. \tag{4.4}$$



Slika 4.2: Prikaz rešitev kritičnega dušenja.

Vprašanje 7. Kaj je kritično dušenje? Kakšna je rešitev zanj?

Tretji primer: $D > 0$.

Ta primer imenujemo NADKRITIČNO DUŠENJE. Označimo $\omega = \pm i\,|\omega|$. Tedaj velja $\lambda_{1,2} = -\beta \pm |\omega|$, torej je rešitev oblike

$$y = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Ker utež ne odleti v vesolje, mora veljati $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, torej $|\omega| < \beta$. To lahko utemeljimo tudi računsko: $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 < 0$ (to je ravno $-D/4$), torej $-\omega^2 = \beta^2 - \omega_0^2 = |\omega|^2$. Sledi

$$|\omega|^2 = \beta^2 \underbrace{(1 - \frac{w_0^2}{\beta^2})}_{<1}$$

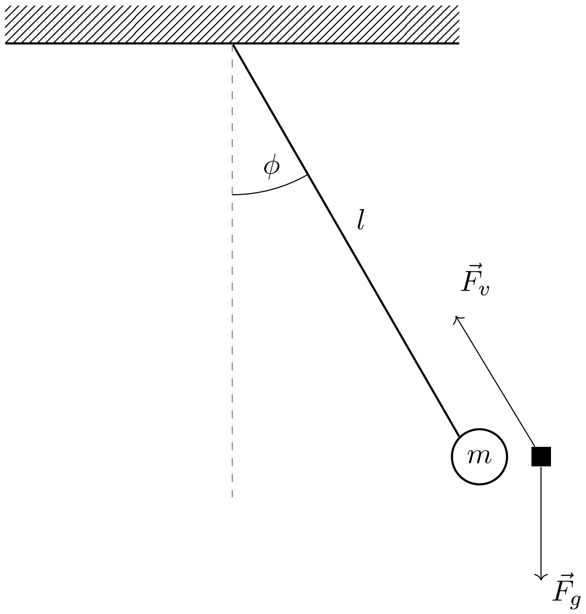
in je $|\omega| < \beta$.

4.3.2 Nitno (matematično) nihalo

Pritrdimo utež z maso m na lahko vrvico, ki jo pritrdimo na strop. Izhodišče O koordinatnega sistema postavimo v točko, kjer je vrvica pritrjena na stop. Z $\vec{r}$ označimo vektor od izhodišča do uteži, z l označimo dolžino vrvice ($= |\vec{r}|$), z $\vec{F}_v$ pa silo vrvice na utež. Velja $\vec{r} = l(\sin\phi, -\cos\phi)$.

Za utež lahko zapišemo drugi Newtonov zakon za rotacijo okoli osi:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_g + \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}_v}_{=0}.$$



Slika 4.3: Skica nitnega nihala.

Delujejo tudi druge sile (npr. sila, ki drži vrvico pritrjeno na strop), vendar imajo prijemališče v osi vrtenja, torej se njihov navor izniči.

Celoten navor deluje v smeri z osi, njegova vrednost pa je $-mgl\sin\phi$ (izračunamo vektorski produkt). Velja $M = J\alpha = J\ddot{\phi}$ in $J = ml^2$. Torej

$$ml^2\ddot{\phi} = -mgl\sin\phi$$

oziroma

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\sin\phi = 0.$$

Uporabimo predpostavko $\phi \ll 1$ in dobimo

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = 0. \tag{4.5}$$

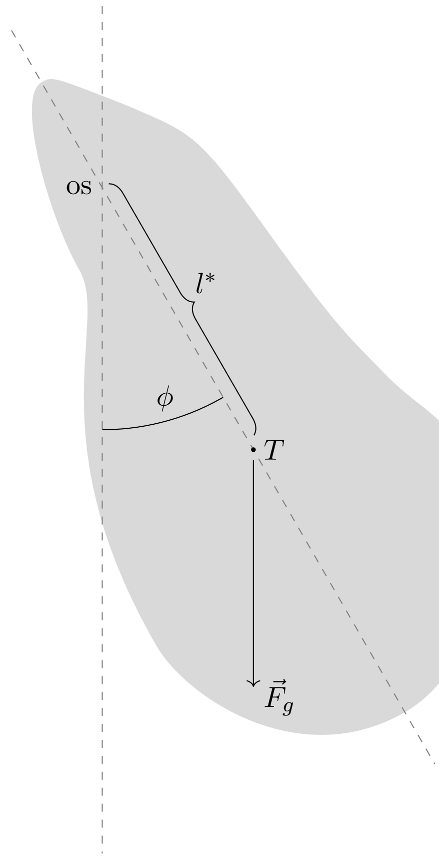
Opazimo, da $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ ni odvisen od mase uteži ali od začetnega odklona.

Vprašanje 8. Izpelji enačbo nihanja za matematično nihalo.

4.3.3 Fizično nihalo

Obesimo kos krompirja na palico in ga zanihamo. S T označimo težišče nihala, z l^* pa razdaljo od težišča do osi. Zapišemo drugi Newtonov zakon za vrtenje okoli osi:

$$M_z = -mgl^*\sin\phi = J_z\ddot{\phi}.$$



Slika 4.4: Skica fizičnega nihala.[1]

Iz tega izpeljemo enačbo nihanja z uporabo približka $\sin\phi \approx \phi$ za $\phi \ll 1$.

$$\ddot{\phi} + \frac{mgl^*}{J_z}\phi.$$

Nihajni čas takega nihala je tako $t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, kjer je $\omega_0 = \frac{mgl^*}{J_z}$.

Vprašanje 9. Kakšen je nihajni čas fizičnega nihala?

4.3.4 Vsiljeno/dušeno nihanje

Spomnimo se primera uteži na vijačni vzmeti iz razdelka 4.3.1. Privzeli smo linearni zakon upora, ter izpeljali enačbo (4.1);

$$m\ddot{y} + C\dot{y} + ky = 0.$$

[1]Slika adaptirana iz `https://texample.net/tikz/examples/physical-pendulum/`

Sedaj v ta izraz uvedemo novo silo vsiljevanja $\vec{F}_v = F_0 \sin(\omega_v t)\vec{e}_y$. Dobimo t.i. NEHOMOGENO ENAČBO NIHANJA:

$$m\ddot{y} + C\dot{y} + ky = F_0 \sin(\omega_v t),$$

oziroma, ko delimo z maso:

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \sin \omega_v t$$

za $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ in $2\beta = \frac{C}{m}$. Rešitev take enačbe je vsota rešitve homogenega sistema ter neke partikularne rešitve; $y = y_h + y_p$. Po izpeljavi iz razdelka 4.3.1 je $y_h = Be^{-\beta t} \sin(\omega t + \delta)$, partikularno rešitev pa iščemo z nastavkom $y_p = B_p \sin(\omega_v t - \delta_p)$. Če izračunamo odvoda, dobimo

$$\begin{aligned} \dot{y}_p &= B_p \omega_v \cos(\omega_v t - \delta_p) \\ \ddot{y}_p &= -B_p \omega_v^2 \sin(\omega_v t - \delta_p). \end{aligned}$$

Vse tri izraze lahko razvijemo z uporabo adicijskih izrekov;

$$\begin{aligned} y_p &= B_p (\sin \omega_v t \cos \delta_p - \cos \omega_v t \sin \delta_p) \\ \dot{y}_p &= B_p \omega_v (\cos \omega_v t \cos \delta_p + \sin \omega_v t \sin \delta_p) \\ \ddot{y}_p &= -B_p \omega_v^2 (\sin \omega_v t \cos \delta_p - \cos \omega_v t \sin \delta_p). \end{aligned}$$

Ko te enačbe vstavimo v $\ddot{y}_p + 2\beta\dot{y}_p + \omega_0^2 y_p = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_v t)$, dobimo

$$B_p(-\omega_v^2 + \omega_0^2)(\sin \omega_v t \cos \delta_p - \cos \omega_v t \sin \delta_p) + B_p \omega_v 2\beta (\cos \omega_v t \cos \delta_p + \sin \omega_v t \sin \delta_p) = \frac{F_0}{m} \sin \omega_v t.$$

Ta enačba velja za vse t, torej tudi za $t = 0$:

$$-B_p(\omega_0^2 - \omega_v^2) \sin \delta_p + B_p \omega_v 2\beta \cos \delta_p = 0.$$

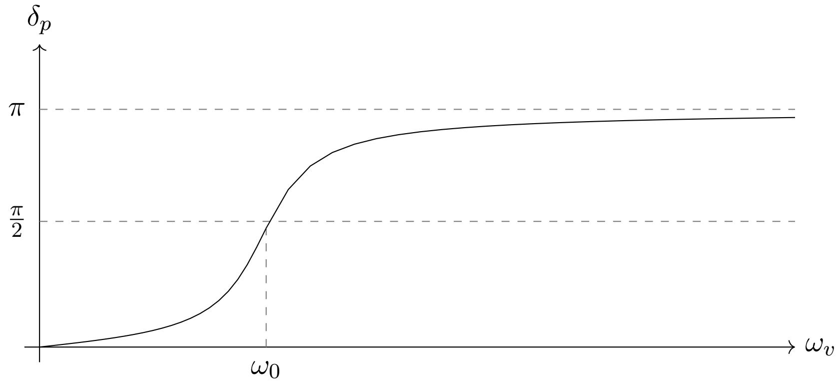
Seveda velja $B_p \neq 0$ (ker nihanja ne vsiljujemo z ničelno funkcijo), torej

$$\tan \delta_p = \frac{2\omega_v \beta}{\omega_0^2 - \omega_v^2}.$$

Z nekaj dodatnega premetavanja izrazov pridemo naposled do

$$\begin{aligned} \cos \delta_p &= \pm \frac{\omega_0^2 - \omega_v^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_v^2)^2 + \omega_v^2 4\beta^2}} \\ \sin \delta_p &= \pm \frac{\omega_v 2\beta}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_v^2)^2 + \omega_v^2 4\beta^2}} \end{aligned}$$

Odvisnost δ_p od ω_v je prikazana na sliki 4.5.



Slika 4.5: Odvisnost δ_p od ω_v.

Za $\omega_v = 0$ dobimo $\delta_p = 0$, torej $\cos\delta_p = 1$. Ker je $\delta_p \in [0, \pi]$, velja $\sin\delta_p > 0$, torej

$$\cos\delta_p = \frac{\omega_0^2 - \omega_v^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_v^2)^2 + \omega_v^2 4\beta^2}}$$
$$\sin\delta_p = \frac{\omega_v 2\beta}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_v^2)^2 + \omega_v^2 4\beta^2}}$$

Za $t = \frac{\pi}{2\omega_v}$ dobimo

$$B_p(\omega_0^2 - \omega_v^2)\cos\delta_p + 2B_p\beta\omega_v \sin\delta_p = \frac{F_0}{m}.$$

Sledi

$$B_p = \frac{F_0}{m\omega_v} \frac{1}{\sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega_v^2)^2}{\omega_v^2} + 4\beta^2}}.$$

Na tem mestu vpeljemo IMPEDANCO $z \in \mathbb{C}$:

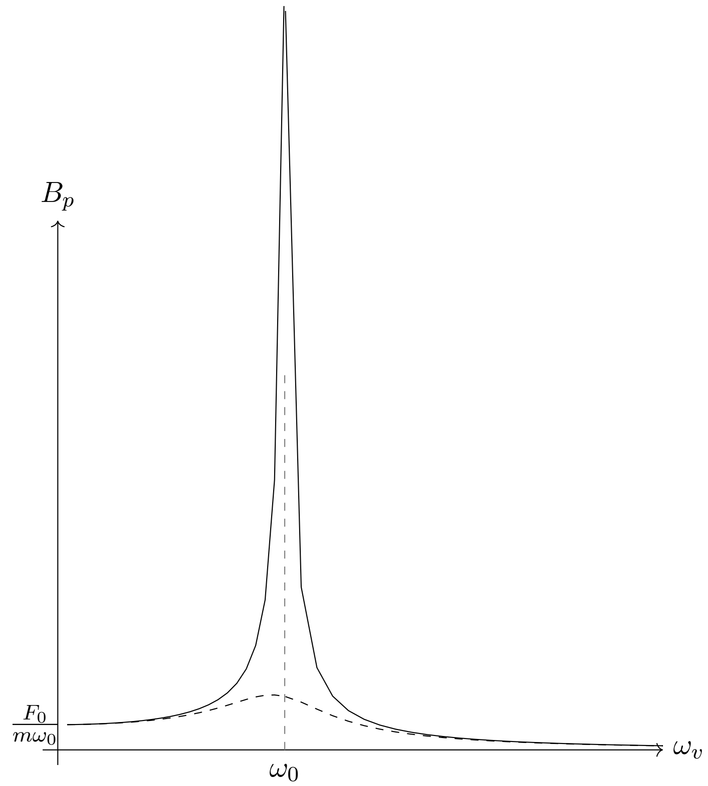
$$|z| = \frac{B_p m\omega_v}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega_v^2)^2}{\omega_v^2} + 4\beta^2}},$$
$$z = |z|\, e^{i\delta_p}.$$

Vprašanje 10. Kakšne so rešitve vsiljenega dušenega nihanja?

Vprašanje 11. Kaj je impedanca?

Lahko se vprašamo, kakšen mora biti ω_v, da je B_p maksimalen možen, oziroma ekvivalentno, da je $\left(\omega_0^2 - \omega_v^2\right)^2 + 4\omega_v^2\beta^2$ minimalen. Tedaj je odvod tega izraza po ω_v enak nič in dobimo

$$\omega_v = \omega_0\sqrt{1 - \frac{2\beta^2}{\omega_0^2}}.$$



Slika 4.6: Resonančna krivulja.

Na sliki 4.6 je prikazana resonančna krivulja opisanega nihanja. V primeru šibkega dušenja je najboljši ω_v kar ω_0, kar je na grafu prikazano s polno črto. Črtkana črta predstavlja bolj splošen primer, kjer optimalen ω_v ni več ω_0, temveč je nekaj manjši.

Vprašanje 12. Skiciraj resonančno krivuljo in jo razloži.

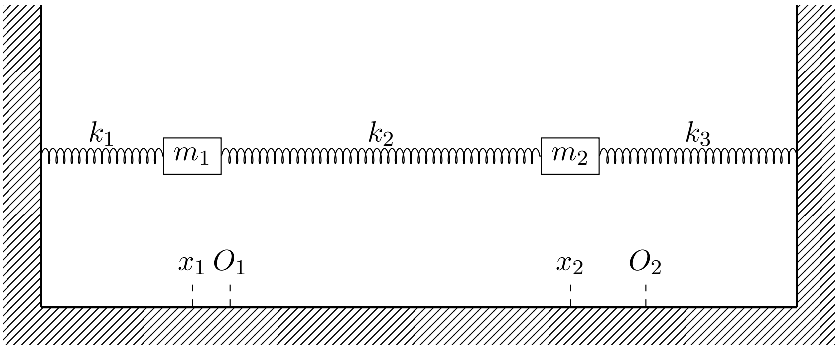
4.3.5 Sklopljeno nihanje

Z vzmetmi sklopimo dva vozička na zračni klopi, kakor je prikazano na sliki 4.7.

Označimo k_i kot koeficiente vzmeti, m_i masa uteži, O_i *ravnovesna* lega i-te uteži, x_i pa trenutna lega i-te uteži. Trenutno lego merimo glede na ravnovesno lego (x_i je odmik od O_i).

Sprva obravnavamo simetričen primer: $k_3 = k_1, m_2 = m_1$. Z $\vec{F}_{i\to j}$ označimo silo i-te vzmeti na j-ti voziček. Velja $F_{1\to 1,r} = -k_1 \Delta l_{1,r}$, $F_{2\to 2,r} = -k_2 \Delta l_{2,r} = -F_{2\to 1,r}$, $F_{3\to 2,r} = k_3 \Delta l_{3,r}$ (Δl_i je raztezek i-te vzmeti).

V ravnovesju velja $k_1 \Delta l_{1,r} = k_2 \Delta l_{2,r}$ in $k_2 \Delta l_{2,r} = k_3 \Delta l_{3,r}$. Ko vozička izmaknemo iz ravnovesne lege, dobimo $F_{1\to 1} = F_{1\to 1,r} - k_1 x_1$ ter $F_{2\to 1} = F_{2\to 1,r} - k_2(x_1 - x_2)$.



Slika 4.7: Skica sklopljenih vozičkov.

Velja torej

$$-m_1\ddot{x}_1 = k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2)$$

oziroma

$$0 = \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \omega_2^2(x_1 - x_2)$$

za $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}$ in $\omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}$. Po podobni izpeljavi za x_2 dobimo

$$0 = \ddot{x}_2 + \omega_1^2 x_2 - \omega_2^2(x_1 - x_2).$$

Dobimo sistem dveh diferencialnih enačb z dvema neznankama, ki ga lahko prevedemo v lažji sistem s substitucijami

$$x_a = x_1 + x_2 \qquad\qquad x_b = x_1 - x_2.$$

Enačbi se tedaj prevedeta v

$$\begin{aligned} \ddot{x}_a + \omega_1^2 x_a &= 0 \\ \ddot{x}_b + (\omega_1^2 + 2\omega_2^2)x_b &= 0. \end{aligned}$$

Enačbi še malo olepšamo z uvedbo $\omega_a = \omega_1$ in $\omega_b^2 = \omega_1^2 + 2\omega_2^2$. Sedaj enačbi lahko rešimo za x_a in x_b, končno rešitev za x_1 in x_2 pa dobimo s kombinacijo teh rešitev;

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 \sin(\omega_a t + \delta_a) + C_2 \sin(\omega_b t + \delta_b) \\ x_2 &= C_1 \sin(\omega_a t + \delta_a) - C_2 \sin(\omega_b t + \delta_b). \end{aligned}$$

Parametre v teh enačbah določimo iz začetnih pogojev.

Vprašanje 13. Opiši rešitev sistema dveh nihajočih vozičkov na zračni klopi, ki sta sklopljena z vzmetmi.

Poglejmo si primer začetnih pogojev; $x_1(t=0) = x_0$, $\dot{x}_1(t=0) = 0$, $x_2(t=0) = 0$ in $\dot{x}_2(t=0) = 0$.

Izpeljemo

$$\begin{aligned}
x_1(t=0) &= x_0 = C_1 \sin(\delta_a) + C_2 \sin(\delta_b)\\
x_2(t=0) &= 0 = C_1 \sin(\delta_a) - C_2 \sin(\delta_b)\\
\dot{x}_1(t=0) &= 0 = C_1\omega_a \cos(\delta_a) + C_2\omega_b \cos(\delta_b)\\
\dot{x}_2(t=0) &= 0 = C_1\omega_a \cos(\delta_a) - C_2\omega_b \cos(\delta_b).
\end{aligned}$$

Sledi $\delta_a, \delta_b = \pm\frac{\pi}{2}$, $C_1 \sin\delta_a = C_2 \sin\delta_b = \frac{x_0}{2}$.

Poglejmo si možnost $\delta_a = \delta_b = \frac{\pi}{2}$. Tedaj $C_1 = C_2 = \frac{x_0}{2}$, torej

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{x_0}{2}\cos(\omega_a t) + \frac{x_0}{2}\cos(\omega_b t)\\
x_2 &= \frac{x_0}{2}\cos(\omega_a t) - \frac{x_0}{2}\cos(\omega_b t).
\end{aligned}$$

Formuli lahko faktoriziramo in dobimo

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 \cos(\frac{\omega_a + \omega_b}{2}\, t) \cos(\frac{\omega_a - \omega_b}{2}\, t)\\
x_2 &= x_0 \sin(\frac{\omega_a + \omega_b}{2}\, t) \sin(\frac{\omega_a - \omega_b}{2}\, t).
\end{aligned}$$

V primeru šibke sklopitve velja $k_2 \ll k_1$, iz česar sledi

$$\frac{\omega_a + \omega_b}{2} = \omega_1 \qquad\qquad \frac{\omega_a - \omega_b}{2} \ll \omega_1.$$

Takemu nihanju pravimo UTRIPANJE; energija nihanja se prenaša iz prvega vozička na drugega in nazaj.

Vprašanje 14. Kaj je utripanje?

4.3.6 Lastna nihanja sestavljenega nihala

Privzemimo nihalo od prej z rešitvijo

$$x_1 = B_1 \sin(\omega_a t + \delta_a) + B_2 \sin(\omega_b t + \delta_b), \quad x_2 = B_1 \sin(\omega_a t + \delta_a) - B_2 \sin(\omega_b t + \delta_b).$$

Poiskati želimo začetne pogoje, da bosta obe nihali imeli enako LASTNO FREKVENCO ν_l;

$$x_1 = C \sin(\omega_l t + \delta_1) \qquad\qquad x_2 = D \sin(\omega_l t + \delta_2).$$

Spomnimo se osnovnih enačb za obe nihali

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \omega_2^2(x_1 - x_2) = 0, \qquad\qquad \ddot{x}_2 + \omega_1^2 x_2 - \omega_2^2(x_1 - x_2) = 0.$$

Če enačbi rešimo z nastavkoma $x_1 = C\exp(i\lambda t)$ ter $x_2 = D\exp(i\lambda t)$, dobimo enačbi

$$-\lambda^2 x_1 + \omega_1^2 x_1 + \omega_2^2(x_1 - x_2) = 0, \qquad -\lambda^2 x_2 + \omega_1^2 x_2 - \omega_2^2(x_1 - x_2) = 0.$$

Če rešitvi zložimo v vektor $\vec{x} = (x_1, x_2)$, enačbi lahko zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 + \omega_2^2 - \lambda^2 & -\omega_2^2 \\ -\omega_2^2 & \omega_1^2 + \omega_2^2 - \lambda^2 \end{bmatrix} \cdot \vec{x} = 0.$$

Velja $\vec{x} = (C, D)\exp(i\lambda t)$. Ker matrična enačba velja za vse t, velja tudi za $t = 0$;

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 + \omega_2^2 - \lambda^2 & -\omega_2^2 \\ -\omega_2^2 & \omega_1^2 + \omega_2^2 - \lambda^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = 0.$$

Netrivialno rešitev tega sistema imamo natanko tedaj, ko je determinanta matrike ničelna. To je natanko tedaj, ko je $\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 - \lambda^2\right)^2 - \omega_2^4 = 0$, oziroma $\omega_1^2 + \omega_2^2 - \lambda^2 = \pm\omega_2^2$. V prvem primeru dobimo $\lambda = \pm\omega_1 = \pm\omega_a$, v drugem pa $\lambda = \pm\omega_b$. Podrobneje si poglejmo prvi primer. Velja enačba

$$\omega_2^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = 0,$$

torej $C = D$. Označimo s C_1 in D_1 rešitev za $\lambda = \omega_a$, ter s C_2 in D_2 rešitev za $\lambda = \omega_b$. Rešitev sistema je neka linearna kombinacija teh rešitev;

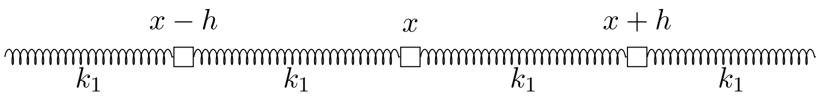
$$x_1 = C_1 \exp(i\omega_a t) + C_2 \exp(-i\omega_a t), \qquad x_2 = C_1 \exp(i\omega_a t) + C_2 \exp(-i\omega_a t).$$

Velja $x_1 = x_2$. Od tod izpeljemo, da mora veljati $B_1 = B_2$ ter $\delta_1 = \delta_2$.

Vprašanje 15. Kaj je lastna frekvenca sestavljenega nihala? Izpelji nek začetni pogoj, pri katerem se pojavi.

4.4 Valovanje

Za model mehanskega valovanja po vijačni vzmeti vzamemo diskretni model masivne vzmeti (glej sliko 4.8).



Slika 4.8: Skica sklopljenih vozičkov.

Med vzmeti postavimo n klad z maso m_1 (vse uteži imajo koeficient k_1). Predpostavimo, da konca vzmeti nista vpeta, ter da na vzmet ne deluje sila gravitacije. Izberimo si poljubno klado ter njen ravnovesni položaj označimo z x. S h označimo razdaljo med ravnovesnimi legami sosednjih uteži (ki je enaka za vsak par sosednjih uteži). S k označimo koeficient celotne vzmeti, z l njeno dolžino, z m pa skupno maso. Velja

$$n = \frac{l}{h}, \qquad k_1 = k\frac{l}{h}, \qquad m_1 = \frac{m}{n}.$$

Z zapisom $u(y, t)$ označimo odmik uteži, katere ravnovesna lega je v točki y, od te ravnovesne lege ob času t. Pozitivna vrednost u pomeni premik v desno, negativna pa premik v levo. Sedaj klado x premaknemo na $u(x, t)$, naslednjo klado pa premaknemo na $u(x + h, t)$. Označimo novo razdaljo med kladama s h'. Geometrijsko velja

$$u(x, t) + h' = h + u(x + h, t),$$

torej $\Delta h = h' - h = u(x + h, t) - u(x, t)$. Na klado x delujeta dve sili; sila levega in sila desnega soseda. Velja

$$F_l = F_{l,r} - k_1(u(x, t) - u(x - h, t)), \qquad F_d = F_{d,r} + k_1(u(x + h, t) - u(x, t)).$$

Po prvem Newtonovem zakonu v ravnovesju velja

$$F_{l,r} + F_{d,r} = 0.$$

Izpeljemo, da je vsota sil na klado x enaka

$$F = k_1(u(x + h, t) - u(x, t) - u(x, t) + u(x - h, t)).$$

Po drugem Newtonovem zakonu za to klado velja

$$m_1 \frac{d^2u(x, t)}{dt^2} = F,$$

torej (ker je $\dot{x} = 0$)

$$m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = k_1(u(x + h, t) + u(x - h, t) - 2u(x, t)).$$

V to enačbo vstavimo izraza za maso klade in koeficient posamične vzmeti od zgoraj. Po poenostavitvi izraza dobimo

$$\frac{m}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = kl \frac{1}{h} \left(\frac{u(x + h, t) - u(x, t)}{h} - \frac{u(x, t) - u(x - h, t)}{h} \right).$$

Sedaj na tem izrazu uporabimo Lagrangeov izrek in pogledamo limito, ko gre $n \to \infty$ (ekvivalentno $h \to 0$);

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{kl^2}{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Na tej točki uvedemo konstanto $c^2 = \frac{kl^2}{m}$, ki jo imenujemo HITROST VALOVANJA. Dobljena enačba se imenuje VALOVNA ENAČBA:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Vprašanje 16. Izpelji valovno enačbo za primer vijačne vzmeti.

4.4.1 Valovanje po elastični palici

Elastično kovinsko palico udarimo z vrha s kladivom in nas zanima, kakšen zvok se giblje po palici. Uporabimo analogijo Hookovega zakona

$$\Delta F = -\frac{ES}{l}\Delta l,$$

kjer je E ELASTIČNI MODUL, merjen v $\mathrm{N\,m^{-2}}$. Če to vstavimo v predpis od prej, dobimo

$$c^2 = \frac{E}{\rho}.$$

Vprašanje 17. Izpelji predpis za hitrost zvoka v prožni palici.

4.4.2 Valovanje v tekočini, zaprti v tanki dolgi palici

Predpostavimo, da tekočina ni viskozna (torej ni strižnih sil), in da je prečni presek palice konstanten. Tedaj

$$\frac{\Delta F}{S} = \Delta p = -\frac{1}{\chi}\frac{\Delta V}{V},$$

torej

$$\Delta F = -\frac{S}{\chi}\frac{\Delta V}{V} = -\frac{S}{\chi l}\delta l.$$

Če to vstavimo v predpis od prej, dobimo

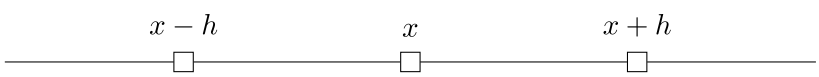
$$c^2 = \frac{1}{\chi\rho}.$$

Vprašanje 18. Izpelji predpis za hitrost zvoka v tekočini v tanki dolgi palici.

4.4.3 Valovanje po napeti vrvi

Do sedaj so bila vsa obravnavana valovanja longitudinalna; premik je bil vzporeden s smerjo gibanja valovanja. Sedaj temu ni tako; premik bo pravokoten na smer gibanja. Tako valovanje imenujemo TRANSVERZALNO.

Uporabimo diskretni model uteži, ki so povezane z lahkimi vrvmi, kakor je prikazan na sliki 4.9. Z $u(x,t)$ označimo odmik uteži z ravnovesno lego v $(x,0)$ od te ravnovesne lege



Slika 4.9: Skica sestavljene vrvi.

v smeri y osi, ob času t. Po podobni izpeljavi kot prej dobimo valovno enačbo

$$\partial_{t^2} u(x,t) = c^2 \partial_{x^2} u(x,t)$$

za $c^2 = \frac{Fl}{m}$, kjer je F sila, s katero napenjamo vrv, l njena dolžina, ter m masa. Oziroma v treh dimenzijah

$$c^2 \nabla^2 u = \partial_{t^2} u.$$

Vprašanje 19. Kakšen model uporabiš za izpeljavo valovanja po napeti vrvi? Kakšna je tedaj hitrost razširjanja motnje?

4.4.4 Rešitve 1D valovne enačbe

Naj bo $f \in \mathcal{C}^2$. Tedaj je $u(x,t) = f(x - ct)$ rešitev enodimenzionalne valovne enačbe;

$$\partial_{t^2} u(x,t) = \partial_{t^2} f(x - ct) = c^2 f''(x - ct)$$

in

$$\partial_{x^2} u(x,t) = \partial_{x^2} f(x - ct) = f''(x - ct).$$

To rešitev lahko interpretiramo na več načinov;

- Ker je $u(x,t) = u(x - ct, 0)$, je val točno določen z začetnimi pogoji.
- Ker je $u(x,t) = u(0, t - \frac{x}{c})$, je val točno določen z robnimi pogoji.

Poleg tega se iz te rešitve vidi, da je c hitrost potovanja motnje, oz. hitrost valovanja. V splošnem pa <u>ni</u> enaka hitrost premikanja snovi (velja $v = |\partial_t u|$).

Obstajajo tudi druge rešitve valovne enačbe. Tudi $u(x,t) = g(x+ct)$ je rešitev za $g \in \mathcal{C}^2$, s tem da se bo motnja pri tem razširjala v drugo smer. Tudi linearna kombinacija dveh rešitev je sama po sebi rešitev. Če želimo v splošnem rešiti tako enačbo, torej potrebujemo dva začetna pogoja.

Vprašanje 20. Kako izgleda splošna rešitev enodimenzionalne valovne enačbe?

Ena možnost rešitve je d'Alembertova; če je $u(x,0) = A(x)$ in $\partial_t u(x,0) = B(x)$, je

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(A(x - ct) + A(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} B(\chi) d\chi.$$

Vprašanje 21. Kakšna je d'Alembertova rešitev valovne enačbe?

4.4.5 Potujoče sinusno valovanje

Predpostavimo, da je naše valovanje oblike $u(x,t) = f(x - ct)$ ter da velja $u(0,t) = u_0 \sin(-\omega t + \delta)$. Potem je $u(x,t) = u(0, t - \frac{x}{c}) = u_0 \sin(-\omega t + \omega \frac{x}{c} + \delta)$. Konstanto $k = \frac{\omega}{c}$ imenujemo VALOVNO ŠTEVILO in ga merimo v m^{-1}. Enačbo tedaj zapišemo kot

$$u(x,t) = u_0 \sin(kx - \omega t + \delta).$$

Izračunamo lahko tudi valovno dolžino $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, ki predstavlja razdaljo med istoležnima točkama na sosednjih valovih.

Vprašanje 22. Izpelji enačbo za potujoče sinusno valovanje. Kaj je valovno število?

4.4.6 Robni pogoji in stojno valovanje

Ker naša snov ni neskončna, moramo nekje uvesti robne pogoje. Obravnavamo jih za primer vpete prožne palice; poznamo dve vrsti pogojev.

- Če je palica na nekem koncu vpeta, tam velja $u(x,t) = 0$ za vse t.
- Če je palica na nekem koncu prosta, tam velja $\partial_x u(x,t) = 0$ za vse t.

Vprašanje 23. Kakšni so robni pogoji za valovno enačbo v primeru vpete ali proste palice?

Slednji pogoj izpeljemo s pomočjo modela diskretne masivne vzmeti. Imejmo utež z ravnovesno lego x, na desni strani katere ni nobene uteži več. Tedaj za

$$u(x-h,t) + h' = h + u(x,t)$$

uvedemo $\Delta h = h' - h = u(x,t) - u(x-h,t)$. Velja

$$F_{x-h\to x} = F_{x-h\to x,r} - k_1 \Delta h,$$

ker pa palica v ravnovesju ni prenapeta, je ravnovesna sila ničelna in dobimo

$$F_{x-h\to x} = -k_1 \Delta h = -\frac{kl}{h}(u(x,t) - u(x-h,t)).$$

Iz 2. Newtonovega zakona sledi

$$F_{x-h\to x} = m_1 \ddot{u}(x,t) = \frac{m}{n}\ddot{u}(x,t) = \frac{mh}{l}\ddot{u}(x,t),$$

torej

$$-\frac{kl^2}{m}\frac{u(x,t) - u(x-h,t)}{h} = h\ddot{u}(x,t).$$

V limiti $h \to 0$ bo torej veljalo $\partial_x u(x,t) = 0$.

Vprašanje 24. Izpelji robni pogoj valovne enačbe za prosti konec palice.

Obravnavajmo primer palice, proste na obeh koncih, po kateri potujeta dve sinusni valovanji z enakima amplitudama ter frekvencama, a različno smerjo;

$$u(x,t) = u_0 \sin(kx - \omega t + \delta_1) + u_0 \sin(kx + \omega t + \delta_2).$$

Odvod ima tedaj obliko

$$\partial_x u(x,t) = 2u_0 k \cos(kx + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}) \cos(-\omega t + \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}).$$

Če v to enačbo vstavimo $x = 0$, dobimo nujen pogoj

$$\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = \frac{\pi}{2},$$

iz česar dobimo $\partial_x u = 2u_0 k \sin(kx) \cos(-\omega t + \frac{\delta_1 - \delta_2}{2})$ (ker velja $\cos(a + \frac{\pi}{2}) = \sin a$). Sedaj v to enačbo vstavimo še $x = l$ (in zopet upoštevamo robne pogoje), izpeljemo $\sin kl = 0$, torej $kl = n\pi$ za nek $n \in \mathbb{N}$. Pridemo do izraza

$$\nu_n = \frac{nc}{2l},$$

iz česar vidimo, da mora biti frekvenca takega valovanja večkratnik $\frac{c}{2l}$. Takim frekvencam pravimo LASTNE FREKVENCE. Če je $n = 1$, jo imenujemo OSNOVNA LASTNA FREKVENCA, za višje n pa VIŠJA LASTNA FREKVENCA.

Vprašanje 25. Izpelji predpis za lastne frekvence valovanja v prožni palici, prosti na obeh koncih.

Če dobro pogledamo dobljeno enačbo, vidimo, da velja

$$u(x,t) = 2u_0 \cos(k_n x) \cos(\omega_n t + \frac{\delta_2 - \delta_1}{2}).$$

Ta zapis implicira, da valovanje nikamor ne potuje, temveč je STOJNO VALOVANJE.

Vprašanje 26. Kaj je stojno valovanje? Kje ima vozle za dano lastno frekvenco?

4.4.7 Energija valovanja

Obravnavamo energijo v diskretnem modelu masivne vzmeti. Za utež na položaju x velja

$$W_k = \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{n} \dot{u}^2 = \frac{1}{2} \frac{mh}{l} \dot{u}^2,$$
$$W_{pr} = \frac{1}{2} k_1 (\Delta h)^2 = \frac{1}{2} klh (u(x+h,t) - x(x,t))^2 = \frac{1}{2} klh \left(\frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} \right)^2 = \frac{1}{2} klh (\partial_x u(x^*,t))^2$$

kjer smo v drugi enačbi uporabili Lagrangeov izrek. Velja

$$\frac{1}{2} kl = \frac{1}{2} \frac{kl^2}{m} \frac{m}{l} = \frac{1}{2} \frac{m}{l} c^2.$$

Dobimo torej enačbi

$$\frac{W_k}{h} = \frac{1}{2}\frac{m}{l}\dot{u}^2 \qquad\qquad \frac{W_{pr}}{h} = \frac{1}{2}c^2\frac{m}{l}(\partial_x u)^2.$$

V prožni palici velja $m = \rho S l$ in $k = \frac{ES}{l}$ in dobimo

$$\frac{W_k}{h} = \frac{1}{2}\rho S\dot{u}^2 \qquad\qquad \frac{W_{pr}}{h} = \frac{1}{2}c^2\rho S(\partial_x u)^2,$$

torej za $\Delta V = hS$, $w = \frac{W}{\Delta V}$ velja

$$w_k = \frac{1}{2}\rho\dot{u}^2 \qquad\qquad w_{pr} = \frac{1}{2}E(\partial_x u)^2.$$

Sedaj predpostavimo, da je naše valovanje sinusno s predpisom

$$u(x,t) = u_0 \sin(kx - \omega t + \delta).$$

Velja

$$w_k = \frac{1}{2}\rho\omega^2 u_0^2 \cos^2(kx - \omega t + \delta) \qquad\qquad w_{pr} = \frac{1}{2}\omega^2\rho u_0^2 \cos^2(kx - \omega t + \delta),$$

torej je $w_k = w_{pr}$. Skupna energija $w = w_k + w_{pr} = \omega^2\rho u_0^2 \cos^2(kx - \omega t + \delta)$ je funkcija prostora in časa. Definiramo povprečno vrednost $\overline{w} = \frac{1}{2}u_0^2\omega^2\rho$. Če je S prečni presek, pravokoten na smer razširjanja valovanja, za $\Delta\overline{W} = \Delta V\overline{w} = cS\Delta t\overline{w}$ lahko zapišemo

$$P = \frac{\Delta\overline{W}}{\Delta t} = cS\overline{w},$$

kar imenujemo ENERGIJSKI TOK VALOVANJA. Uvedemo še eno novo količino, GOSTOTO ENERGIJSKEGA TOKA

$$j = \frac{P}{S} = c\overline{w}.$$

Vprašanje 27. Izpelji predpis za energijo sinusnega valovanja v prožni palici.

Vprašanje 28. Kaj je gostota energijskega toka?

4.4.8 Hitrost zvoka v plinu

Predpostavimo, da za plin velja model masivne vzmeti. Po drugem Newtonovem zakonu velja

$$m_1\ddot{u} = F_{x-h\to x} + F_{x+h\to x},$$

torej za $m_1 = mh/l$ in $h \to 0$ dobimo $F_{x-h\to x} + F_{x+h\to x} = 0$. Zapišemo

$$p = \frac{F_{x-h\to x}}{S} = \frac{1}{S}\left(F_{x-h\to x,r} - k_1(u(x,t) - u(x-h,t))\right) = p_0 - \frac{k_1}{S}\left(u(x,t) - u(x-h,t)\right).$$

Količino p_0 imenujemo ravnovesni tlak. Za tlačno razliko tedaj velja

$$\Delta p = p - p_0 = -\frac{kl}{hS}\left(u(x,t) - u(x-h,t)\right) \xrightarrow[h\to 0]{} -\frac{kl}{S}\partial_x u.$$

Velja tudi

$$\Delta p = -\frac{1}{\chi}\partial_x u,$$

torej $c^2 = \frac{1}{\chi\rho}$.

Vprašanje 29. Izpelji predpis za hitrost zvoka v plinu.

4.4.9 Zvok v treh dimenzijah in interferenca

V treh dimenzijah ima valovna enačba obliko

$$c^2\nabla^2 u = \partial_{t^2} u.$$

Ena možna rešitev te enačbe je t.i. RAVNI VAL:

$$\vec{u}(\vec{r},t) = \vec{u}_0 \sin(kx - \omega t + \delta).$$

Malce bolj zanimiva rešitev pa je krogelno valovanje;

$$\vec{u}(\vec{r},t) = u(r,t)\frac{\vec{r}}{r},$$

za $u(r,t) = \frac{u_0}{r}\sin(kr - \omega t + \delta)$. To pa je rešitev samo za primer $r \gg \lambda$.

Vprašanje 30. Kaj je ravni val? Kaj je krogelno valovanje?

Imejmo dva zvočnika, oddaljena za razdaljo a, ki oddajata krogelno valovanje z enačbama

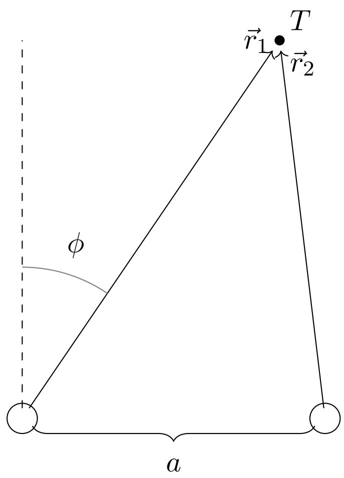
$$\vec{u}_1(\vec{r},t) = \frac{u_0}{r_1}\sin(kr_1 - \omega t + \delta_1),$$
$$\vec{u}_2(\vec{r},t) = \frac{u_0}{r_2}\sin(kr_2 - \omega t + \delta_2).$$

Označimo $\vec{r}(\vec{r}) = \vec{u}_1(\vec{r}) + \vec{u}_2(\vec{r})$. Osredotočimo se na primer, ko je opazovana točka T daleč od zvočnikov, torej $r_1, r_2 \gg a$. Zaradi tega lahko naredimo nekaj približkov; trikotnik ima sedaj dva prava kota, velja $\Delta r = r_1 - r_2 = a\sin\phi$ in vektorja $\vec{r}_1$ ter $\vec{r}_2$ sta vzporedna. Velja

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2}(1 - \frac{a}{r_2}\sin\phi) = \frac{1}{r_2},$$

torej lahko enačimo recipročni vrednosti r_1, r_2. Tedaj velja

$$\begin{aligned} u &= \frac{u_0}{r}(\sin(kr_1 - \omega t + \delta_1) + \sin(kr_2 - \omega t + \delta_2)) \\ &= \frac{2u_0}{r}\sin(\frac{k(r_1+r_2)}{2} - \omega t + \frac{\delta_1+\delta_2}{2})\cos(\frac{k\Delta r}{2} + \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}) \end{aligned}$$



Slika 4.10: Shema interference

Uvedemo $\tilde{u}_0 = 2u_0 \cos(\frac{k\Delta r}{2} + \frac{\delta_1 - \delta_2}{2})$ in zapišemo

$$u = \frac{\tilde{u}_0}{r} \sin(\frac{k(r_1 + r_2)}{2} - \omega t + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}).$$

Vprašanje 31. Izpelji predpis za izračun interference dveh zvočnikov, ki oddajata krogelno valovanje.

4.4.10 Dopplerjev pojav

Dana sta oddajnik, ki oddaja krogelno valovanje, ter sprejemnik. Z v_1 označimo hitrost oddajnika, z v_2 hitrost sprejemnika. Dodatno označimo z ν frekvenco, s katero oddaja oddajnik, z ν' pa frekvenco, kakršno sliši sprejemnik. Obravnavamo dva primera.

Če se oddajnik giblje, sprejemnik pa stoji ($v_1 \neq 0, v_2 = 0$): Recimo, da se oddajnik giblje proti sprejemniku. Ob $t_1 = 0$ odda prvo valovno čelo, ob $t_2 = t_0$ to čelo prepotuje razdaljo ct_0, oddajnik pa $v_1 t_0$. Takrat oddajnik odda naslednji signal. Valovna dolžina slišanega vala je tedaj

$$\lambda = ct_0 - v_1 t_0 = \frac{c - v_1}{\nu},$$

torej velja

$$\nu' = \frac{\nu}{1 - \frac{v_1}{c}}.$$

Če se oddajnik giblje stran od sprejemnika, se obrne predznak in dobimo

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{v_1}{c}}.$$

Če oddajnik stoji na mestu, sprejemnik pa se giblje ($v_1 = 0, v_2 \neq 0$): Recimo, da se sprejemnik približuje oddajniku. Čas začnemo šteti, ko do sprejemnika pride prva motnja. Naslednja motnja pride ob času $t = t_0'$, ko je sprejemnik prepotoval razdaljo $v_2 t_0'$, druga motnja pa ct_0'. Velja torej

$$t_0' = \frac{c}{\nu(c + v_2)}$$

oziroma

$$\nu' = \nu(1 + \frac{v_2}{c}).$$

Podobno kot prej pri drugi smeri premikanja dobimo

$$\nu' = \nu(1 - \frac{v_2}{c}).$$

V primeru, da se obe telesi gibljeta, lahko združimo enačbi in dobimo

$$\nu' = \nu \frac{1 \pm \frac{v_2}{c}}{1 \mp \frac{v_1}{c}}.$$

Vprašanje 32. Izpelji enačbe Dopplerjevega pojava.

4.5 Elektrostatika

Električna sila je nova sila, ki je privlačna med različno nabitimi delci in odbojna med enako nabitimi delci. Uvedemo novo količino, NABOJ, merjeno v A s, ki je lahko bodisi pozitivna bodisi negativna. Vedno je večkratnik osnovnega naboja

$$q_0 = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19}\,\mathrm{A\,s}.$$

Za električno silo velja Coulombov zakon:

$$\vec{F}_{el} = \frac{q'q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3},$$

kjer sta $\vec{r}$ in $\vec{r}'$ vektorja do nabojev q in q'. Konstanta ε_0 ima vrednost $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{A\,s\,V^{-1}\,m^{-1}}$, enota V pa je sestavljena; $\mathrm{V = N\,m\,A^{-1}\,s^{-1}}$.

Zgornja enačba določa silo, ki jo naboj q' povzroča na naboj q. Mislimo si lahko, da naboj q' spremeni lastnosti prostora, v katerem je; pravimo, da ustvari ELEKTRIČNO POLJE. Z $\vec{E}_{q'}(\vec{r})$ označimo JAKOST električnega polja v točki $\vec{r}$ na račun naboja q'. To polje lahko "izmerimo" s pomočjo Coulombovega zakona;

$$\vec{E}_{q'}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{q' \to q}}{q}.$$

Pri tem si mislimo, da postavimo naboj q v točko $\vec{r}$ ter izmerimo silo, ki kaže nanj. Jakost električnega polja ima enoto V m^{-1}. Lahko ga eksplicitno zapišemo kot

$$\vec{E}_{q'}(\vec{r}) = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}.$$

V primeru, da imamo več izvorov električnega polja (več nabojev), lahko uporabimo princip superpozicije in izpeljemo

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i'}{\|\vec{r}-\vec{r}_i'\|^3}.$$

Vprašanje 33. Kaj je jakost električnega polja? Kako je povezana s Coulombovim zakonom?

V okolici "zvezno" porazdeljenega naboja (dejanska zvezna porazdelitev je nemogoča, ker je naboj kvantificiran) lahko uporabimo posplošeno fizikalno indukcijo in iz načela superpozicije izpeljemo

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}dV',$$

kjer ρ predstavlja GOSTOTO NABOJA $\frac{dq'}{dV'}$.

Vprašanje 34. Obravnavaj električno polje na simetrali zelo dolge ravne enakomerno nabite žice.

Odgovor: Z l označimo dolžino žice, predpostavimo $\|\vec{r}\| << l$. Tedaj je

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{\rho(\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}dV'\\ &= \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l}\frac{(x_r,-y,0)}{(x_r^2+y^2)^{3/2}}dy\\ &= \ldots = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r.\end{aligned}$$

Vprašanje 35. Obravnavaj električno polje v ploščatem kondenzatorju.

Odgovor: Za začetek pogledamo samo primer ene plošče; če vse integriramo, dobimo $\vec{E} = \pm\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\vec{r}_r$, in je polje neodvisno od razdalje (ob predpostavki $\|\vec{r}\| << l$). Če zraven postavimo še eno nasprotno nabito ploščo, dobimo med ploščama $\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, zunaj plošč pa se električni polji odštejeta.

4.5.1 Električna napetost, potencial in delo električne sile

Izberimo si točki $\vec{r}_a$ in $\vec{r}_b$ ter poljubno krivuljo C med njima. Krivuljo parametriziramo z $\vec{r}(t)$. Definiramo ELEKTRIČNO NAPETOST med tema točkama po dani krivulji:

$$U(\vec{r}_a \to \vec{r}_b, C) = -\int_C \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Poleg tega definiramo ELEKTRIČNI POTENCIAL v točki $\vec{r}$:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\vec{r'})}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV'.$$

Obe ti količini sta merjeni v enoti V. Gradient lahko v naslednji enačbi nesemo pod integral;

$$\vec{\nabla}.\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla}.\frac{\rho(\vec{r'})}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} dV'.$$

Ker je $\rho(\vec{r}')$ neodvisen od $\vec{r}$, pride izven gradienta:

$$\vec{\nabla}.\phi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dV' = -\vec{E}.$$

Vprašanje 36. Kaj je električni potencial? Pojasni zvezo med njim in jakostjo električnega polja.

Sledi torej $\vec{E} = -\vec{\nabla}.\phi$. Pravimo, da je $\vec{E}$ GRADIENTNO. Iz tega sledi $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, kar imenujemo IZREK O ELEKTRIČNI NAPETOSTI V DIFERENCIALNI OBLIKI.

Posledica je, da je napetost neodvisna od poti; velja

$$U(\vec{r}_a \to \vec{r}_b, C) = -\int_C \vec{E} d\vec{s} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{\nabla}.\phi \cdot \dot{\vec{r}} dt = \int_{t_a}^{t_b} \dot{\phi} dt = \phi(t_b) - \phi(t_a).$$

Vprašanje 37. Dokaži, da je napetost neodvisna od poti.

Enak argument pokaže, da je napetost po zaključeni poti enaka 0;

$$\oint_{\partial S} \vec{E} d\vec{s} = 0.$$

To dejstvo imenujemo IZREK O ELEKTRIČNI NAPETOSTI V INTEGRALNI OBLIKI.

Vprašanje 38. Povej izrek o električni napetosti v diferencialni in v integralni obliki.

Vprašanje 39. Kakšna je napetost med ploščama kondenzatorja? Kaj je kapaciteta kondenzatorja?

Odgovor: Izberemo si parametrizacijo poti $t \mapsto (t, 0, 0)$ za $t \in [0, l]$, kjer je l razdalja med ploščama. Tedaj je

$$U = -\int_C \vec{E} d\vec{s} = -\int_0^l \frac{\rho_S}{\varepsilon_0} dt = -\frac{ql}{S\varepsilon_0}.$$

Kapaciteta kondenzatorja je tedaj

$$C = \frac{|q|}{|U|} = \frac{S\varepsilon_0}{l}.$$

Za zapis dela električne sile postavimo testni naboj q v statično električno polje $\vec{E}$. Tedaj je

$$A_{el} = \int_C \vec{F} d\vec{s} = \int_C q\vec{E} d\vec{s} = -qU(\vec{r}_a \to \vec{r}_b).$$

Ker je napetost neodvisna od poti, vidimo, da je električna sila konservativna (to pomeni, da delo ni odvisno od poti). Definiramo lahko ELEKTRIČNO POTENCIALNO ENERGIJO

$$W_{ep} = q\phi,$$

in zapišemo

$$A_{el} = -qU(\vec{r}_a \to \vec{r}_b) = -q\phi(\vec{r}_a) + q\phi(\vec{r}_b) = -\Delta W_{ep}.$$

Vprašanje 40. Kaj je električna potencialna energija?

4.5.2 Pretok električnega polja

Pretok električnega polja skozi ploskev S definiramo kot

$$\phi_E = \iint_S \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{S}.$$

Intuitivna definicija je, da štejemo, koliko silnic prebode ploskev S. Pretok je skalar, torej nima smeri; ima pa predznak, odvisen od izbire orientacije ploskve S.

Če je ploskev sklenjena (torej rob nekega območja V), velja

$$\iint_{\partial V} \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = \iiint_V \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$

po Gaussovem izreku ob predpostavki zunanje normale.

Po drugi strani se izkaže, da je pretok skozi tako ploskev enak količini zaobjetega naboja; silnice zunanjih nabojev sekajo ploskev sodo mnogokrat. Velja torej

$$\iint_{\partial V} \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = \iiint_V \rho dV.$$

Ker za vsako območje V velja enakost zgornjih integralov, morata biti integranda enaka; velja torej

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Vprašanje 41. Kaj je električni pretok? Izpelji Gaussov zakon o električnem pretoku.

4.5.3 Novi temelji

Elektriko smo izpeljali iz Coulombovega zakona (in še nekaj drugih fizikalnih zakonov), lahko pa jo izpeljemo tudi iz drugih temeljev;

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \qquad\qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Poleg tega bomo predpostavili $\vec{F} = q\vec{E}$ ter Helmholtzov izrek

Izrek (Helmholtz)**.** *Naj bo $\vec{E}(r) \in O(\frac{1}{r})$ (pada vsaj tako hitro kot $\frac{1}{r}$). Potem velja*

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}.\phi + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

za

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{E}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \qquad\qquad \vec{A} = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{E}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Ker je $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, sledi $\vec{E} = -\vec{\nabla}.\phi$. Iz tega izpeljemo Coulombov zakon, ki je sedaj le posledica povedanega.

4.6 Električni tok

Imejmo polje N gibljivih nabojev. S q_1 označimo naboj enega delca (vsi so enaki), z $n = N/V$ označimo gostoto delcev, z $\rho_e = q_1 n$ pa gostoto gibljivega naboja. Dodatno označimo povprečno hitrost nabojev z $\vec{v}$. Tedaj je

$$\vec{j}_e = \rho_e.\vec{v},$$

merjena v $\mathrm{A\,m^{-2}}$, GOSTOTA ELEKTRIČNEGA TOKA.

Sedaj v taisti prostor postavimo ploščo s površino dS in normalo $\vec{n}$. Predpostavimo, da je ta ploskev dovolj majhna, da je $\vec{j}_e$ skoznjo homogeno polje; tedaj je električni tok skozi ploskev enak $\vec{j}_e \cdot d\vec{S}$. Bolj splošno; če je S poljubna ploskev in $\vec{j}_e$ ni homogeno, definiramo ELEKTRIČNI TOK

$$I = \iint_S \vec{j}_e d\vec{S}.$$

Merimo ga v A. Električni tok nima smeri; je skalar, njegov predznak pa je odvisen od izbire orientacije ploskve.

Vprašanje 42. Definiraj električni tok.

Električni tok interpretiramo kot količina naboja, ki se v nekem času pretoči skozi ploskev; če je dS zelo majhna ravna ploskev, je

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \vec{S} \partial t} = q_1 dN = q_1 n \vec{n}_S \cdot \vec{v} dt dS = \vec{j}_e \cdot d\vec{S} dt$$

torej

$$\partial_t q = \iint_S \vec{j}_e d\vec{S} = I.$$

Če bi vzeli nasprotno normalo, dobimo nasprotno predznačen rezultat; $dq = -Idt$.

Vzemimo poljubno omejeno območje V z dovolj lepim robom. Za rob si izberimo zunanjo normalo $\vec{n}$. S q' označimo celoten naboj, zaobjet v V. Zanimalo nas bo, če lahko naboj ustvarimo, oz. ekvivalentno, če bo sprememba naboja enaka spremembi skozi rob. Z dq'_∂ označimo spremembo q' zaradi pretoka skozi rob območja, z dq' pa celotno spremembo.

Obravnava primerov, v kombinaciji z opazko od prej, pokaže, da velja

$$dq'_\partial = -Idt.$$

Ker je

$$q' = \iiint_V \rho dV,$$

velja

$$dq' = dt \iiint_V \partial_t \rho dV.$$

Tu nastopi fizikalni zakon o ohranitvi električnega naboja, ki pravi, da naboja ne moremo niti ustvariti niti uničiti. Formalno $dq' = dq'_\partial$. Velja torej

$$\iiint_V \partial_t \rho dV = -I = -\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_e dV.$$

Ker to velja za katerikoli V, morata biti integranda enaka in izpeljemo

$$\partial_t \rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_e.$$

Temu pravimo KONTINUITETNA ENAČBA V DIFERENCIALNI OBLIKI.

Vprašanje 43. Kaj je kontinuitetna enačba? Izpelji jo.

Če so razmere stacionarne (torej $\partial_t \rho = 0$), bo veljalo $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_e = 0$. Iz tega sledi PRVI KIRCHHOFFOV ZAKON; če imamo vozlišče N žic, je

$$\oiint_{\partial V} \vec{j}_e d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N} \iint_{S_i} \vec{j}_e d\vec{S} = 0,$$

torej velja

$$\sum_i I_i = 0,$$

če predpostavimo, da so vse ploskve enako orientirane.

Vprašanje 44. Kaj je prvi Kirchhoffov zakon? Izpelji ga.

4.6.1 Ohmov zakon

V običajnih razmerah velja zakon

$$\vec{j}_e = \frac{1}{\zeta}\vec{E},$$

kjer je ζ SPECIFIČNA UPORNOST SNOVI, merjena v $\Omega\,\mathrm{m}$ oziroma pogosto $\Omega\,\mathrm{mm}^2\,\mathrm{m}^{-1}$. Velja $\Omega = \mathrm{V\,A}^{-1}$.

Vprašanje 45. Povej Ohmov zakon v mikroskopski obliki. Kaj je specifična upornost? Kako razstaviš enoto Ω?

Glavna težava z Ohmovim zakonom je, da je $\vec{j}_e$ sorazmeren s hitrostjo delcev, električno polje $\vec{E}$ pa s silo; zdi se, da je to v nasprotju z drugim Newtonovim zakonom. Na delce mora delovati še neka uporna sila.

Če imamo žico dolžine l, v kateri je homogeno električno polje $\vec{E}$, lahko zapišemo Ohmov zakon v makroskopski obliki;

$$U = -\vec{E}\cdot\vec{n}l = -\zeta\vec{j}_e\cdot\vec{n}l = -\frac{\zeta l I}{S} = -RI.$$

Pri tem smo predpostavili, da je parametrizacija pri meritvi napetosti usklajena z normalo ploskve. Če si izberemo nasprotno parametrizacijo, dobimo pozitiven predznak.

Količini $R = \frac{\zeta l}{S}$ pravimo ELEKTRIČNA UPORNOST in jo merimo v Ω.

Vprašanje 46. Izpelji Ohmov zakon v makroskopski sliki.

4.6.2 Drugi Kirchhoffov izrek

Zakon o električni napetosti

$$-\oint_K \vec{E}d\vec{s} = 0$$

velja, če predpostavimo $\partial_t\vec{B} = 0$. Če v električnem vezju najdemo sklenjen tokokrog, kjer napetost na i-tem elementu pade za U_i, bo veljalo

$$\sum_i U_i = 0.$$

Vprašanje 47. Povej drugi Kirchhoffov izrek.

4.6.3 Električno delo in električna moč

Obravnavajmo homogen valj dolžine l s prečnim presekom S in upornostjo R. Valj priključimo na izvor napetosti, zaradi česar se na ploskvah valja začnejo nabirati naboji, in nastane električno polje $\vec{E}$. Sedaj predpostavimo, da je $\vec{E}$ homogeno; velja

$$\vec{F} = q_1\vec{E},$$

torej za $dq = \rho dV = \rho S dx$ in $d\vec{F} = dq\vec{E}$ dobimo

$$\begin{aligned} d^2A = d\vec{F} \cdot d\vec{s} &= \rho S\vec{E}dx \cdot \vec{v}dt \\ &= \rho S\vec{v} \cdot \vec{E}dtdx \\ &= S\vec{j}_e \cdot \vec{E}dtdx \\ &= S\zeta j^2 dtdx \\ &= I_R^2 \frac{\zeta}{S} dtdx, \end{aligned}$$

za tok skozi valj $I_R = jS$. Če integriramo po x, dobimo

$$dA = \frac{\zeta l}{S} I_R^2 dt = RI_R^2 dt$$

oziroma

$$P = \frac{dA}{dt} = RI_R^2 = \pm U_R I_R.$$

Vprašanje 48. Povej in izpelji formulo za izračun moči električnega toka.

Vprašanje 49. Obravnavaj primer žarnice, priključene na izmenični tok. Kaj je podatek na žarnici?

Odgovor: Velja $U_g = U_0 \sin(2\pi\nu t)$, kjer je podana efektivna napetost $U_0/\sqrt{2} = 220\text{V}$. Ker se električno polje s časom spreminja, ne moramo zagotovo vedeti, da velja zakon o električni napetosti; vseeno ga predpostavimo.

Po drugem Kirchhoffovem zakonu velja $U_R + U_g = 0$, torej $U_R = -U_0 \sin(\omega t)$. Velja tudi $I_R = \pm U_R/R = \mp U_0/R \sin(\omega t)$. Zapišemo $U_0/R = I_0$.

Velja $P = U_R^2/R$; po integralu po času dobimo

$$A = \frac{U_0^2}{2R} t.$$

Integral smo izračunali samo za cele večkratnike nihajnega časa t_0. Definiramo lahko povprečno električno moč

$$\overline{P} = \frac{U_0^2}{2R},$$

ki je podatek, napisan na žarnici; za dano efektivno napetost žarnica v povprečju porabi zapisano moč.

4.7 Magnetno polje

Vprašanje 50. Opiši eksperiment, ki potrdi magnetno silo.

Odgovor: Imamo dva nevtralna vzporedna vodnika. Če poženemo tok skozi enega od vodnikov, se ne zgodi nič; če pa poženemo tok skozi oba vodnika, pa med njima deluje sila.

Magnetna sila na testni naboj q ima naslednjo obliko (fizikalni zakon);

$$\vec{F}_m = q\vec{v}_q \times \vec{B},$$

kjer je $\vec{B}$ GOSTOTA MAGNETNEGA POLJA, merjena v enotah $\mathrm{T} = \mathrm{V\,s\,m^{-2}}$.

Magnetno polje izračunamo z Biot-Savarrovim zakonom; za točkast naboj q', ki se giblje s konstantno hitrostjo $\vec{v}_{q'}$, ima obliko

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q'}{4\pi}\vec{v}_{q'} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}.$$

Enačba poda magnetno polje v točki $\vec{r}$ na račun naboja q', postavljenega v $\vec{r}'$. Konstanta $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{V\,s\,A^{-1}\,m^{-1}}$ se imenuje MAGNETNA KONSTANTA.

Vprašanje 51. Kako izračunamo magnetno silo? V katerih enotah merimo gostoto magnetnega polja? Povej Biot-Savarrov zakon za točkast naboj. Kakšno vrednost ima μ_0?

Če imamo veliko gibajočih se nabojev; $dq' = \rho dV'$, torej

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\rho(\vec{r}')dV'\vec{v}_{q'} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV'$$

oziroma

$$\vec{B}(\vec{r}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}dV'.$$

Vprašanje 52. Izpelji izraz za gostoto magnetnega polja v primeru električnega toka.

Magnetnemu polju lahko priredimo tudi potencial

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'.$$

Pri tem velja $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$;

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \\
&= \vec{B},
\end{aligned}
$$

ker velja

$$
\vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{\nabla} \times \vec{j}(\vec{r}') . \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla} . \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|},
$$

prvi člen tega izraza pa je 0, ker je $\vec{r}'$ neodvisen od $\vec{r}$ (odvajamo po x, y, z in ne po x', y', z').

Vprašanje 53. Kaj je magnetni potencial? Dokaži zvezo z gostoto magnetnega polja.

Posledica tega dejstva je izrek o magnetnem pretoku. če je S orientabilna ploskev, je pretok magnetnega polja količina

$$
\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}.
$$

Magnetni pretok skozi rob območja V je enak

$$
\iint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0.
$$

Povedano drugače; $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Interpretacija tega zakona je, da v naravi ni magnetnih monopolov; vsaka gostotnica, ki gre izven območja, se vanj tudi vrne.

Vprašanje 54. Kaj je zakon o magnetnem pretoku? Kako ga interpretiramo?

V primeru električnega toka vzdolž tanke žice lahko izpeljemo

$$
dV' = d\vec{S}' d\vec{s}' \qquad\qquad dI = \vec{j}(\vec{r}') d\vec{S}',
$$

iz česar dobimo

$$
\begin{aligned}
\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dI d\vec{s}' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_Z \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{s}' \iint_{dS'} dI \\
&= \frac{\mu_0 \, |I|}{4\pi} \int_Z \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{s}'.
\end{aligned}
$$

Sedaj lahko izračunamo gostoto magnetnega polja kot

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ &= \frac{\mu_0 |I|}{4\pi} \int_Z \vec{\nabla} \times \frac{d\vec{s'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \\ &= \frac{\mu_0 |I|}{4\pi} \int_Z (\vec{\nabla}. \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|}) \times d\vec{s'} \\ &= \frac{\mu_0 |I|}{4\pi} \int_Z d\vec{s'} \times \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}.\end{aligned}$$

To je originalen Biot-Savarrov zakon.

Vprašanje 55. Povej in izpelji Biot-Savarrov zakon.

Vprašanje 56. Kakšna je gostota magnetnega polja na simetrali dolgega ravnega vodnika, v tuljavi s tokom, in v okolici drobne zanke s tokom?

Odgovor: Na simetrali dolgega ravnega vodnika velja

$$B = \frac{\mu_0 |I|}{2\pi r}.$$

V tuljavi s tokom velja

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N |I|}{l} \vec{e},$$

kjer je $\vec{e}$ enak $\pm\vec{e}_z$ (predpostavimo, da je tuljava postavljena vzdolž z osi), predznak pa je pozitiven natanko tedaj, ko se $\vec{j}$ vrti v pozitivni smeri, če se sprehajamo po z osi navzgor.

V okolici drobne zanke s tokom $|I|$ in prečnim presekom S' velja

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}(3\vec{e}_r.(\vec{e}_r \cdot \vec{p}_m) - \vec{p}_m),$$

kjer je $\vec{p}_m = |I| \vec{S'}$ magnetni dipolni moment.

Vprašanje 57. Kako razlagamo trajne magnete?

Odgovor: Atome si predstavljamo kot drobne zanke s tokom (elektron se vrti okoli jedra). Dobimo veliko magnetnih dipolov; ker so naključni, se seštejejo v 0. Če jih orientiramo usklajeno, dobimo trajni magnet.

Vprašanje 58. Kaj je induktivnost tuljave?

Odgovor: Tok skozi tuljavo povzroča magnetno polje, to pa povzroči magnetni pretok. Predpostavimo $\phi_B \propto I$. Velja

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 NI}{l}\vec{e}_z(\vec{e}_j \cdot \vec{n})(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_\phi),$$

torej za $\phi_B = N\vec{B} \cdot \vec{S}_1$ dobimo

$$\phi_B = \frac{\mu\mu_0 N^2 I}{l}(\vec{e}_j\vec{n})(\vec{e}_j\vec{e}_\phi)(\vec{e}_z\vec{n}_1)S_1.$$

Definiramo induktivnost tuljave

$$L = \frac{\mu\mu_0 N^2 S_1}{l},$$

ki jo merimo v enotah $\mathrm{H} = \mathrm{V\,s\,A^{-1}}$.

4.7.1 Magnetna sila na vodnik s tokom

Imejmo zunanje magnetno polje $\vec{B}$. Na testni naboj q s hitrostjo $\vec{v}$ deluje sila $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$. Če imamo več nabojev;

$$d\vec{F} = dq\vec{v} \times \vec{B} = \rho\vec{v} \times \vec{B}dV = \vec{j}_e \times \vec{B}dV,$$

torej

$$\vec{F} = \iiint_V \vec{j}_e \times \vec{B}dV = \int_Z ds \iint_S \vec{j}_e \times \vec{B}dS.$$

Predpostavimo, da je magnetno polje konstantno na ploskvi S;

$$\vec{F} = \int_Z |I|\,\vec{e}_j \times \vec{B}ds = |I| \int_Z d\vec{s} \times \vec{B}.$$

Vprašanje 59. Izpelji izraz za magnetno silo na vodnik s tokom.

Vprašanje 60. Kolikšna je magnetna sila na ravno žico?

Odgovor:

$$\vec{F} = |I|\, l\vec{e}_j \times \vec{B}.$$

Vprašanje 61. Opiši nekdanjo definicijo ampera.

Odgovor: Imejmo dva vzporedna vodnika z enakim električnim tokom, oddaljena za $R = 1\text{m}$. Recimo, da je drugi vodnik dolg $l_2 = 1\text{m}$. Tedaj je sila med vodnikoma

$$F = |I|\, l_2 B_1 = |I|\, l_2 \frac{\mu_0 |I|}{2\pi R} = \frac{\mu_0 |I|^2 l_2}{2\pi R}.$$

Sila med vodnikoma je privlačna; če je $F = 2 \times 10^{-7}\text{N}$, je $I = 1\text{A}$.

4.7.2 Navor magnetne sile

Imejmo pravokotno zanko s stranicama a, b v zunanjem magnetnem polju $\vec{B} = B\vec{e}_x$. Označimo stranice

$$\vec{l}_1 = b\vec{e}_y \qquad \vec{l}_2 = a(-\vec{e}_x)$$
$$\vec{l}_3 = b(-\vec{e}_y) \qquad \vec{l}_4 = a\vec{e}_x.$$

Preverimo lahko, da je vsota sil enaka nič; to pa ne velja za vsoto navorov. Postavimo os vrtenja v središče zanke, z ročicama

$$\vec{r}_1 = \frac{a}{2}\vec{e}_x \qquad \vec{r}_3 = -\frac{a}{2}\vec{e}_x.$$

Tedaj sta neničelna navora enaka

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \frac{a}{2}|I|\, bB\vec{e}_y, \qquad \vec{M}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \frac{a}{2}|I|\, bB\vec{e}_y.$$

Skupni navor je torej $\vec{M} = S\,|I|\,B\vec{e}_y$ za $S = ab$. Velja tudi

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}.$$

Po enem polobratu se vsi predznaki obrnejo; zanka se začne vrteti v drugo smer. Če želimo dobiti elektromotor, moramo vsake pol obrata tok obrniti.

Vprašanje 62. Izpelji predpis za navor na zanko v magnetnem polju. Navor izrazi tudi z magnetnim dipolnim momentom. Kaj se dogaja z zanko?

4.7.3 Magnetna napetost

Postavimo dolgo ravno žico na z os. Imejmo zanko C v ravnini xy, ki obkroži z os in izračunajmo magnetno napetost

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{s}.$$

Velja

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 |I|}{2\pi r} \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{bmatrix}.$$

S parametrizacijo $\vec{r}(t) = r(t)(\cos\phi, \sin\phi)$ in odvodom

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t) \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{bmatrix} + r(t)\dot{\phi}(t) \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{bmatrix}$$

dobimo

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 |I|}{2\pi r} r\dot{\phi} dt = \mu_0 |I|.$$

V splošnem bomo na desni strani izraza dobili zaobjeti tok ploskve, ki jo določa krivulja;

$$I = \iint_S \vec{j}_e \cdot d\vec{S}.$$

Temu pravimo IZREK O MAGNETNI NAPETOSTI. Z uporabo Stokesovega izreka dobimo isti izrek še v diferencialni obliki

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_e.$$

Pri tem moramo predpostaviti $\partial_t \rho = 0$ in $j(r) \in O(\frac{1}{r})$.

Vprašanje 63. Izpelji izrek o magnetni napetosti v integralni obliki in povej isti izrek v diferencialni obliki.

4.7.4 Invarianca magnetne sile na Galilejeve transformacije

Iz fizikalnih zakonov $m' = m$ in $q' = q$ sklepamo, da mora biti sila

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

invariantna na Galilejeve transformacije.

Poglejmo si poseben primer. V sistemu S imejmo naboj q s hitrostjo $\vec{v}_q$ v magnetnem polju $\vec{B}$. Za $\vec{\beta}_q = \vec{v}_q / c_0$ velja

$$\vec{F}_m = qc_0 \vec{\beta}_q \times \vec{B} \neq 0.$$

V sistemu S' naj naboj miruje; $\vec{F}'_m = 0$. Dobljena sila torej ni invariantna na Galilejevo transformacijo!

Da težavo rešimo, moramo uvesti Lorentzovo silo

$$\vec{F}_L = \vec{F}_m + \vec{F}_e = qc_0 \left(\frac{\vec{E}}{c_0} + \vec{\beta}_q \times \vec{B} \right).$$

Poleg tega dopuščamo, da se $\vec{E}$ in $\vec{B}$ spreminjata z Galilejevo transformacijo. V zgornjem primeru velja $\vec{F}_L' = q\vec{E}'$, torej izpeljemo

$$\frac{\vec{E}'}{c_0} = \frac{\vec{E}}{c_0} + \vec{\beta}_0 \times \vec{B}.$$

Poglejmo si drug primer; v sistemu S naj naboj q miruje, v sistemu S' pa naj velja $\vec{v}_q' = -\vec{v}_0$. Velja

$$\vec{B}'(\vec{r}') = \vec{v}_q' \times \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{r}' - \vec{r}_q'}{\left|\vec{r}' - \vec{r}_q'\right|^3}$$

po Biot-Savarrovem zakonu za točkaste naboje. Upoštevajoč $c_0^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$ dobimo

$$\vec{B}'(\vec{r}') = -\frac{\vec{v}_0}{c_0} \times \frac{1}{c_0} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{\left|\vec{r} - \vec{r}_q\right|^3},$$

ker se $\vec{v}_0 t$ v števcu in imenovalcu odšteje. To je nadalje enako

$$\vec{B}' = \vec{B} - \vec{\beta}_0 \times \frac{\vec{E}}{c_0},$$

kjer smo upoštevali $\vec{B} = 0$. V splošnem velja

$$\vec{F}_L' = \vec{F}_L - qc_0\vec{\beta}_q \times (\vec{\beta}_0 \times \frac{\vec{E}}{c_0}).$$

V linearnem približku za $\beta_0, \beta_q \ll 1$ drugi faktor odpade; da pa zares rešimo ta problem, moramo uporabiti relativnost.

Vprašanje 64. Zakaj magnetna sila ni invariantna na Galilejeve transformacije? Kako rešiš problem?

4.7.5 Magnetna sila in tretji Newtonov zakon

Imejmo dva naboja q, q', za katera velja

$$\begin{aligned} q' &: \vec{r}' = 0, \vec{v}' = v'(-\vec{e}_y), \\ q &: \vec{r} = d\vec{e}_y, \vec{v} = v\vec{e}_x. \end{aligned}$$

Velja

$$\begin{aligned} \vec{F}_m(q' \to q) &= q\vec{v} \times \vec{B}_{q'} = 0 \\ \vec{F}_m(q \to q') &= q'\vec{v}' \times \vec{B}_q = \frac{qq'vv'}{c_0^2 4\pi\varepsilon_0 d^2}\vec{e}_x \neq 0. \end{aligned}$$

Ker zakon o ohranitvi gibalne količine predpostavi tretji Newtonov zakon, ta ne velja nujno.

Vprašanje 65. Povej primer, v katerem magnetna sila ne spoštuje tretjega Newtonovega zakona.

4.8 Elektrodinamika

4.8.1 Zakon o magnetni napetosti

Če bi v splošnem veljalo
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j},$$
bi veljalo tudi $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$, kar pa ni res, ker je v splošnem
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\partial_t \rho.$$

Maxwellov popravek zakona o magnetni napetosti doda še en člen;
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c_0^2} \partial_t \vec{E}.$$

V integralni obliki dobimo
$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{B} d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{1}{c_0^2} \iint_S \partial_t \vec{E} d\vec{S}.$$

Vprašanje 66. Kakšen je Maxwellov popravek zakona o magnetni napetosti?

Sedaj lahko kontinuitetno enačbo izpeljemo iz Maxwellovih enačb;
$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{1}{c_0^2} \vec{\nabla} \cdot (\partial_t \vec{E}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{1}{c_0^2} \partial_t (\frac{\rho}{\varepsilon_0}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \partial_t \rho.$$

Velja torej $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\partial_t \rho$.

Vprašanje 67. Izpelji kontinuitetno enačbo iz Maxwellovih zakonov.

4.8.2 Zakon o električni napetosti

Osnovni motivator je Faradayjev poskus z dvema tuljavama. Če vstavimo manjšo tuljavo v večjo, in skozi večjo tuljavo poženemo električni tok, opazimo, da sunek toka steče tudi po manjši tuljavi. Podobno velja, ko tok ugasnemo. Tok v manjši zanki se vklopi tako, da nasprotuje spremembi magnetnega polja zaradi vklopa toka v večji zanki (Lenzovo pravilo). Ta poskus je v protislovju z znanimi dejstvi; če je $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ in $\vec{E} = \zeta \vec{j}$, se v zanki v spodnji tuljavi pojavi napetost v skladu z Ohmovih zakonom ($U = RI$), hkrati pa mora biti integral po tej zanki
$$-U = \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{E} d\vec{S} = \iint_S 0 d\vec{S} = 0.$$

Popravek je četrta Maxwellova enačba, oziroma zakon o električni napetosti
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}.$$

V integralni obliki dobimo

$$\oint_{\partial S} \vec{E} d\vec{s} = -\iint_S \partial_t \vec{B} d\vec{S}.$$

Opazimo, da sedaj odpade drugi Kirchhoffov izrek, ki je predpostavil $\partial_t \vec{B} = 0$. Na tem dejstvu je temeljil tudi dokaz, da je napetost neodvisna od poti; to sedaj ni več res.

Poleg tega električno polje ni več potencialno; v splošnem ne velja $\vec{E} = -\vec{\nabla}.\phi$. Velja pa

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} = -\partial_t \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Pišemo lahko $\vec{E} = -\vec{\nabla}.\phi - \partial_t \vec{A}$, ti količini pa nista enolično določeni.

Vprašanje 68. Opiši Faradayjev poskus in popravek zakona o električni napetosti, ki ga razloži. Katera dejstva odpadejo zaradi popravka?

4.8.3 Drugi Kirchhoffov zakon in električni nihajni krog

V tokokrogu želimo sedaj imeti spremenljivo napetost in tok, ter kondenzatorje in tuljave. Za tuljavo predpostavimo, da so žice idealno prevodne; $\zeta = 0$. Sledi $U_L = 0$. Za kondenzator velja $U_C = \pm \frac{q}{C}$.

Vprašanje 69. Kakšen je padec napetosti na tuljavi in kakšen na kondenzatorju?

Poglejmo si vezje, kjer so zaporedno vezani kondenzator, upornik in tuljava. Tokokrog sklenemo ob času $t = 0$, takrat je v kondenzatorju naboj $q_c = q_0 \neq 0$. Velja

$$U_C + U_L + U_R = \partial_t \phi_B,$$

ter $\partial_t \phi_B = L \partial_t I$. Iz teh dejstev dobimo

$$-\frac{q_c}{C} - IR = L\dot{I}$$

oziroma

$$\ddot{q}_c + \frac{R}{L}\dot{q}_c + \frac{1}{LC} q_c = 0. \tag{4.6}$$

To je enačba dušenega nihanja za $\beta = \frac{R}{2L}$ in $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

V primeru $L = 0$ dobimo enačbo $\dot{q}_c R + \frac{1}{C} q_c = 0$, rešitev katere je

$$q_c(t) = q_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

za karakteristični čas $\tau = RC$. Časovni odvod poda enačbo za tok

$$I(t) = \frac{-q_0}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

Iz tega izpeljemo

$$P = I^2 R = R I_0^2 \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)$$

za $I_0 = q_0/\tau$. Sledi $A = \frac{q_0^2}{2C}$. Temu pravimo “energija upornika”. Če je sistem izoliran, je (nasprotno) enaka energiji kondenzatorja

$$W_C = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{1}{2}\frac{(CU)^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2.$$

Iz tega dobimo izraz za ENERGIJO ELEKTRIČNEGA POLJA

$$W_C = \frac{1}{2}\varepsilon_0 V E^2,$$

kjer V označuje volumen med ploščama kondenzatorja (oziroma v splošnem volumen polja). Če nismo v vakuumu, dodamo še materialno konstanto ε.

V drugem primeru $R = 0$ ima enačba (4.6) obliko

$$\ddot{q}_c + \omega_0^2 q_c = 0$$

in rešitev $q_c = A\sin(\omega_0 t + \delta)$. Iz začetnih pogojev $q_c(t = 0) = q_0$ in $I(t = 0) = 0$ dobimo

$$q_c = q_q \cos\omega_0 t \qquad\qquad I = -q_0\omega_0 \sin\omega_0 t = -I_0 \sin\omega_0 t.$$

Energija kondenzatorja se tedaj izmenjuje z energijo tuljave, oz. energijo magnetnega polja. Velja

$$W_L = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{I_0^2}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{2}L I_0^2$$

ob času $t = \frac{\pi}{2\omega_0}$. Definiramo ENERGIJO TULJAVE kot

$$W_L = \frac{1}{2}L I^2$$

in ENERGIJO MAGNETNEGA POLJA kot

$$W_B = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu\mu_0}V_B B^2.$$

Vprašanje 70. Kaj je električni nihajni krog? Obravnavaj primera $L = 0$ in $R = 0$. Kako izračunamo energijo električnega in magnetnega polja?

4.8.4 Falsch indukcija

Imejmo vodnik dolžine l v magnetnem polju $\vec{B}$, ki se premika s hitrostjo $\vec{v}_p$. Zaradi magnetnega polja se na krajiščih vodnika (ki je postavljen pravokotno na svojo hitrost) nabere presežek naboja. Ker se elektroni premikajo, se pojavi tok; ta s časom zamre, ker mu nasprotuje električna sila. Velja

$$\vec{F}_m = -q_0 v_p B \vec{e}_y,$$

kjer je $\vec{e}_y$ enotski vektor v smeri vodnika. Izračunamo lahko tudi električno silo

$$\vec{F}_e = -q_0 E \vec{e}_y.$$

Ko sta ti sili nasprotno enaki, velja $E = v_p B$, torej $|U| = v_p B l$. V splošnem velja

$$U = \int_C \vec{v}_p \cdot (\vec{B} \times d\vec{l}).$$

Vprašanje 71. Razloži primer vodnika, ki ga premikamo v magnetnem polju. Kako v splošnem izračunaš inducirano napetost?

Vprašanje 72. Kaj je Faradayjev disk? Kako izračunaš inducirano napetost?

Odgovor: Poskus, kjer vrtimo kovinski disk v prisotnosti magnetnega polja. Če priključimo voltmeter na središče in na krajišče diska, razberemo napetost

$$U = \frac{1}{2}\omega B r^2.$$

4.8.5 Elektromagnetno valovanje

V praznem prostoru, kjer velja $j = 0$, iz Maxwellovih enačb in dejstva

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{R}) = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \cdot \vec{R}) - \vec{\nabla}^2 \vec{R}$$

izpeljemo

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{c_0^2}\partial_{t^2}\vec{E}, \qquad \vec{\nabla}^2 \vec{B} = \frac{1}{c_0^2}\partial_{t^2}\vec{B}.$$

To sta valovni enačbi s hitrostjo razširjanja motnje $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$. Problem je, da se to ne ujema z Galilejevimi transformacijami.

Vprašanje 73. Izpelji enačbi za elektromagnetno valovanje. Kaj je fundamentalni problem s tem valovanjem?

Ker je $B = E/c_0$, lahko skupno gostoto energije izrazimo kot

$$w = \varepsilon_0 E^2.$$

Prenos električne energije zaradi elektromagnetnega valovanja predstavlja Poyntingov vektor

$$\vec{p} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0}.$$

Vprašanje 74. Kako izračunamo gostoto energijskega toka zaradi elektromagnetnega valovanja? Kaj je Poyntingov vektor?

4.9 Posebna teorija relativnosti

Namesto Galilejevih transformacij sedaj uvedemo Lorentzove transformacije

$$c_0 t' = \gamma_0 (c_0 t - \beta_0 x) \qquad x' = \gamma_0 (x - \beta_0 c_0 t)$$
$$y' = y \qquad z' = z$$

za $\beta_0 = v_0/c_0$ in

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$$

. Uvedemo matriko

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma_0 & -\beta_0\gamma_0 & 0 & 0 \\ -\beta_0\gamma_0 & \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Štiridimenzionalni vektor X imenujemo VEKTOR-ČETVEREC, če se pri prehodu med sistemoma $S \to S'$ transformira kot $X' = \Lambda X$. Preverimo lahko

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \beta_0\gamma_0 & 0 & 0 \\ \beta_0\gamma_0 & \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

iz česar sledi, da matrika Λ ni ortogonalna, torej <u>ne</u> ohranja razdalj.

Vprašanje 75. Kaj je vektor-četverec? Kakšne oblike je matrika Lorentzovih transformacij Λ?

4.9.1 Lorentzove transformacije hitrosti

Velja

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\left(\frac{dt'}{dt}\right)^{-1}$$

upoštevajoč izrek o inverzni preslikavi. Izračunamo lahko

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{dx}{dt} = -\gamma_0\beta_0 c_0 + v_x\gamma_0 = \gamma_0(v_x - v_0)$$

in

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \gamma_0 - v_x\gamma_0\frac{\beta_0}{c_0} = \gamma_0\left(1 - \frac{v_x v_0}{c_0^2}\right).$$

Skupaj torej dobimo

$$v_x' = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_x v_0}{c_0^2}}.$$

Na podoben način izpeljemo

$$v_y' = \frac{v_y}{\gamma_0\left(1 - \frac{v_x v_0}{c_0^2}\right)}$$

in

$$v_z' = \frac{v_z}{\gamma_0\left(1 - \frac{v_x v_0}{c_0^2}\right)}.$$

Celokupna transformacija hitrosti je torej

$$v'^2 = c_0^2\left(1 - \frac{(1-\beta^2)(1-\beta_0^2)}{\left(1 - \frac{v_x v_0}{c_0^2}\right)^2}\right).$$

Vprašanje 76. Kako se transformira hitrost pri Lorentzovih transformacijah? Izpelji.

Vprašanje 77. Razloži poskus, ki pokaže, da absolutni čas ne obstaja.

Odgovor: Mioni $\mu^{\pm}$ v lastnem sistemu razpadejo v povprečnem času $\tau = 2$µs. Če bi čas za mion v vseh sistemih tekel enako hitro, bi le-ta mogel razpasti, preden prepotuje razdaljo $c_0\tau = 600$m, prepotuje pa dlje.

4.9.2 c_0 in kavzalnost

Imejmo dva dogodka, ki se v sistemu S zgodita ob časih t_1 in t_2, kjer je $t_2 > t_1$. Dogodka naj se zgodita na mestih x_1 in x_2. V sitemu S' velja

$$t_1' = \gamma_0\left(t_1 - \frac{\beta_0}{c_0}x_1\right) \qquad t_2' = \gamma_0\left(t_2 - \frac{\beta_0}{c_0}x_2\right),$$

torej $\Delta t' = \gamma_0(\Delta t - \beta_0\Delta_x/c_0)$. Velja $\Delta t' < 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} > c_0/\beta_0$. Če bi se nekaj lahko gibalo hitreje od svetlobe, bi lahko povzročilo dogodek brez vzroka.

Vprašanje 78. Razloži, kako hitrost svetlobe vpliva na kavzalnost.

4.9.3 Neobstoj absolutne razdalje

Imejmo raketo s koncema $x_1 = 0$ ter $x_2 = l$ v mirovnem sistemu S. V sitemu S' se ti točki transformirata v

$$x_1'(t_1') = -\gamma_0 v_0 t_1$$

ter

$$x_2'(t_2') = \gamma_0(l - v_0 t_2).$$

Razdaljo izmerimo ob istem času $t_1' = t_2'$, pri čemer določimo

$$t_2 = t_1 + \frac{\beta_0}{c_0} l.$$

Tedaj velja

$$l' = \frac{l}{\gamma_0}.$$

V drugem sistemu se raketa skrči; razdalja je v mirovnem sistemu vedno maksimalna.

Vprašanje 79. Obravnavaj primer, ki pokaže, da absolutna razdalja ne obstaja.

4.9.4 Skalarji v posebni teoriji relativnosti

SKALAR je fizikalna količina, ki je invariantna na Lorentzovo transformacijo.

Za prostor pravimo, da je evklidski, če za vektorje četverce velja

$$\left\langle IX', X' \right\rangle = \langle IX, X \rangle .$$

Če velja enakost

$$\left\langle \eta X', X' \right\rangle = \langle \eta X, X \rangle$$

za matriko

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I_3 \end{bmatrix},$$

pa je prostor PSEVDO-EVKLIDSKI. Izkaže se, da velja $\Lambda \eta \Lambda = \eta$, torej je vesolje res psevdo-evklidski prostor, ni pa evklidski.

Vprašanje 80. Kaj je psevdo-evklidski prostor?

Pri obravnavi Dopplerjevega pojava pri mehanskem valovanju smo lahko gledali hitrost valovanja glede na snov, pri elektromagnetnem valovanju pa to ni možno. Zatorej opazujemo relativne hitrosti sprejemnika in oddajnika. Naj bo S mirovni sistem oddajnika, ki odda dva bliska; prvega ob $t_1 = t, x_1 = 0$, drugega pa ob $t_2 = t_1 + t_0, x_2 = 0$. Valovna dolžina je tedaj $\lambda = c_0 t_0$.

Naj bo S' mirovni sistem sprejemnika, ki se giblje s hitrostjo v_0 glede na S. Izračunamo $t_1' = \gamma_0 t_1$, $x_1'(t_1') = -v_0 t_1'$, $t_2' = t_1' + \gamma_0 t_0$ in $x_2'(t_2') = -v_0 t_2'$. Potrebujemo še $x_1'(t_2')$. Ker se tudi v S' bliska gibljeta s hitrostjo c_0, velja $x_1'(t_2') = x_1'(t_1') + c_0(t_2' - t_1') = -v_0 t_1' + c_0\gamma_0 t_0$. Velja torej

$$\lambda' = \frac{c_0 + v_0}{\sqrt{1 + \frac{v_0^2}{c_0^2}}} = \lambda\sqrt{\frac{c_0 + v_0}{c_0 - v_0}}.$$

Vprašanje 81. Analiziraj relativistični Dopplerjev pojav.

4.9.5 Četverci

Definiramo štiridimenzionalno hitrost

$$U = \gamma \frac{d}{dt} X$$

za $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$. Velja $U' = \gamma' \frac{d}{dt'} X'$, torej

$$U' = \gamma' \frac{d}{dt} X \frac{dt}{dt'} = \gamma' \Lambda \frac{U}{\gamma} \frac{\gamma}{\gamma'} = \Lambda U,$$

upoštevajoč dejstvo $\frac{dt}{dt'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$, ki se ga lahko izpelje iz enačbe za transformacijo v. Velja

$$U = \begin{bmatrix} \gamma c_0 \\ \gamma \vec{v} \end{bmatrix}.$$

Štiridimenzionalni pospešek je definiran kot

$$B = \gamma \frac{d}{dt} U = \begin{bmatrix} \gamma^4 \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c_0} \\ \gamma^4 \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c_0^2}\vec{v} + \gamma\vec{a} \end{bmatrix}.$$

Vprašanje 82. Kaj sta štiridimenzionalna hitrost in pospešek?

V mirovnem sistemu lahko izmerimo maso m_0 ter gostoto naboja ρ_0, s čimer definiramo četverce gibalne količine, sile in gostote električnega toka;

$$^4P = m_0 U \qquad\qquad ^4F = m_0 B \qquad\qquad ^4j = \rho_0 U.$$

Prva komponenta vektorja ^4P je $m_0\gamma c_0$; velja

$$m_0\gamma c_0 = \frac{m_0 c_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 c_0 (1 + \frac{1}{2}\beta^2)$$

v linearnem približku. To je nadalje enako

$$m_0\gamma c_0 = \frac{1}{c_0}(m_0 c_0^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2).$$

Kinetično energijo označimo s T, člen $E_0 = m_0 c_0^2$ pa imenujemo MIROVNA ENERGIJA. Za $E = m_0 c_0^2 \gamma$ velja $E = E_0 + T$. Četverec gibalne količine ima tedaj obliko

$$^4P = \begin{bmatrix} E/c_0 \\ \vec{p} \end{bmatrix}.$$

Vektor $\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v}$ imenujemo KRAJEVNI DEL ČETVERCA GIBALNE KOLIČINE. Velja $E^2 - p^2 c_0^2 = m_0^2 c_0^4$, torej $\langle \eta P, P \rangle = m_0^2 c_0^2$ in je ta skalarni produkt neodvisen od koordinatnega sistema.

Vprašanje 83. Izpelji Einsteinovo slavno enačbo.

4.9.6 Četverec Lorentzove sile

Nerelativistično ima Lorentzova sila obliko

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v}_q \times \vec{B}),$$

sila pa se ne ohranja pri Lorentzovih transformacijah. Kot popravek tega uvedemo nov zakon narave;

$$^4F_L = qM\eta U,$$

kjer je M naslednja matrika;

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -E_x/c_0 & -E_y/c_0 & -E_Z/c_0 \\ E_x/c_0 & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c_0 & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c_0 & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Vprašanje 84. Zapiši predpis za relativistično Lorentzovo silo.

Da bo veljal relativistični princip mora veljati $^4F_L' = q'M'\eta U'$; iz tega sledi

$$^4F_L' = qM'\eta\Lambda U = qM'\Lambda^{-1}\eta U.$$

To mora biti enako $\Lambda^4 F_L$, torej

$$^4F_L = q\Lambda^{-1}M'\Lambda^{-1}\eta U.$$

Veljati mora torej $M' = \Lambda M \Lambda$. Matriki, za katero to velja, pravimo LORENTZOV TENZOR. Iz enačb po komponentah dobimo

$$\begin{aligned} E_x' &= E_x & B_x' &= B_x \\ E_y' &= \gamma_0(E_y - \beta_0 c_0 B_z) & B_y' &= \gamma_0(B_y + \beta_0 \frac{E_z}{c_0}) \\ E_z' &= \gamma_0(E_z + \beta_0 c_0 B_y) & B_z' &= \gamma_0(B_z - \beta_0 \frac{E_y}{c_0}). \end{aligned}$$

V linearnem približku za $\beta_0 \ll 1$ se to ujema z nerelativistično sliko.

Vprašanje 85. Kako transformiramo električno in magnetno polje?

4.9.7 Maxwellove enačbe in posebna teorija relativnosti

Podobno kot M v prejšnjem poglavju uvedemo matriko

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z/c_0 & -E_y/c_0 \\ B_y & -E_z/c_0 & 0 & E_x/c_0 \\ B_z & E_y/c_o & -E_x/c_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Preverimo lahko $N' = \Lambda N \Lambda$. Uvedemo diferencialne operatorje

$$\partial_0 = \frac{1}{c_0}\partial_t, \partial_1 = \partial_x, \partial_2 = \partial_y, \partial_3 = \partial_z,$$

ki jih lahko zložimo v stolpec

$$_4\partial = \begin{bmatrix} \partial_0 \\ \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix}.$$

Preverimo lahko, da se ta stolpec transformira kot $_4\partial' = \Lambda_4^{-1}\partial$. Za $\rho = \rho_0\gamma$ velja

$$^4j = \begin{bmatrix} \rho c_0 \\ \vec{j} \end{bmatrix},$$

s čimer lahko zapišemo Maxwellove enačbe v obliki

$$\left(_4\partial^T M\right)^T = \mu_0^4 j, \qquad \left(_4\partial^T N\right)^T = 0.$$

Vprašanje 86. Kako zapišeš Maxwellove enačbe v relativistični obliki?

4.9.8 Veliki zaključek

Imamo naslednje zakone narave:

- $X' = \Lambda X$,
- $^4F_L = qM\eta U$,
- $\left(_4\partial^T M\right)^T = \mu_0^4 j$,
- $\left(_4\partial^T N\right)^T = 0$,
- $\vec{E} = \zeta\vec{j}$.

Iz tega lahko izpeljemo vse.

5 Uvod v Geometrijsko Topologijo

5.1 Kvocientni prostori

Opomba. Da bo kvocientna projekcija zvezna, mora biti praslika vsake odprte množice v $X/_\sim$ tudi odprta. Lahko bi vzeli šibkejšo topologijo na $X/_\sim$, in bi bila projekcija toliko bolj zvezna. Prava topologija bo torej tista, ki je najmočnejša možna. S tem bo najbolj podobna topologiji na X.

Definicija. Naj bo X topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X. Kvocientna topologija na $X/_\sim$ je družina množic

$$\{V \subseteq X/_\sim \,|\, q^*(V)^{\text{odp}} \subseteq X\}.$$

Vprašanje 1. Karakteriziraj odprtost in zaprtost množic v $X/_\sim$.

Odgovor: $V^{\text{odp}} \subseteq X/_\sim \Leftrightarrow q^*(V)^{\text{odp}} \subseteq X$.

$Z^{\text{zap}} \subseteq X/_\sim \Leftrightarrow q^*(Z)^{\text{zap}} \subseteq X$.

Opomba. V splošnem q ni niti odprta niti zaprta.

Definicija. Naj bo X topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija. Naj bo $A \subseteq X$. Nasičenje množice A je množica $q^*(q_*(A)) = \bigcup_{x \in A}[x]$.

Vprašanje 2. Definiraj nasičenje množice.

Trditev. *Za $A \subseteq X$ velja: $q_*(A)$ je odprta v $X/_\sim$ natanko tedaj, ko je nasičenje A odprto v X. Podobno velja za zaprte množice.*

Vprašanje 3. Kdaj je kvocientna projekcija q odprta?

Odgovor: Natanko tedaj, ko je nasičenje vsake odprte množice odprto.

Trditev. *Naj bosta X in Y topološka prostora, $\sim$ ekvivalenčna relacija na X in $f : X \to Y$ zvezna. Če je f konstantna na ekvivalenčnih razredih, enolično določa preslikavo $\overline{f} : X/_\sim \to Y$ s predpisom $f([x]) = f(x)$. Če je dodatno surjektivna, je $\overline{f}$ surjektivna. Če f loči ekvivalentne razrede, je $\overline{f}$ injektivna.*

Dokaz. Dokazati moramo le, da je $\overline{f}$ zvezna; ostalo je očitno. Naj bo $V^{\text{odp}} \subseteq Y$. Velja $q^*(\overline{f}^*(V)) = f^*(V)^{\text{odp}} \subseteq X$, torej je $\overline{f}^*(V)$ odprta v $X/_\sim$. □

Definicija. Naj bosta X, Y topološka prostora in $f : X \to Y$ funkcija. f je kvocientna preslikava, če je surjektivna in če velja $\forall V \subseteq Y . V^{\text{odp}} \subseteq Y \Leftrightarrow f^*(V)^{\text{odp}} \subseteq X$.

Vprašanje 4. Kako obravnavaš kvocientno preslikavo kot kvocientno projekcijo za neko ekvivalenčno relacijo?

Odgovor: Relacija je določena z razbitjem X na f-praslike točk.

Vprašanje 5. Povej in dokaži kriterij za kvocientnost zvezne surjekcije f.

Odgovor: Naj bo $f : X \to Y$ zvezna surjekcija. Če je še odprta ali zaprta, je kvocientna.

Če je $V^{\text{odp}} \subseteq Y$, je $f^*(V)^{\text{odp}} \subseteq X$ zaradi zveznosti. Recimo, da je f odprta. Naj bo $V \subseteq Y$ taka, da je $f^*(V)^{\text{odp}} \subseteq X$. Velja $f_*(f^*(V)) = V$ zaradi surjektivnosti, in ta množica je odprta pod X.

Vprašanje 6. Kako pravimo nasprotni implikaciji od zveznosti v definiciji kvocientne preslikave?

Odgovor: Kvocientnost v ožjem smislu.

Opomba. Če je X kompakt in Y Hausdorffov, je vsaka zvezna preslikava zaprta, torej tudi kvocientna (če je le surjektivna).

Izrek. *Naj bo X prostor, $\sim$ ekvivalenčna relacija na X in $f : X \to Y$ kvocientna preslikava. Če f naredi iste identifikacije kot $\sim$, je inducirana preslikava $\overline{f} : X/_\sim \to Y$ homeomorfizem.*

Vprašanje 7. Povej izrek za homeomorfen opis kvocientnega prostora.

Vprašanje 8. Dokaži, da je kompozitum kvocientnih preslikav kvocientna preslikava.

Odgovor: Naj bosta $f : X \to Y, g : Y \to Z$ kvocientni. Tedaj je $g \circ f$ zvezna in surjektivna. Naj bo $(g \circ f)^*(V)^{\text{odp}} \subseteq X$. Velja $(g \circ f)^*(V) = f^*(g^*(V))$. Ker je f kvocientna v ožjem smislu, je $g^*(V)$ odprta. Ker je g kvocientna v ožjem smislu, je V odprta.

Vprašanje 9. Dokaži: če je $g \circ f$ kvocientna in sta f, g zvezni, je g kvocientna.

Odgovor: Ker je $g \circ f$ surjektivna, je g surjektivna. Naj bo $g^*(V)^{\text{odp}} \subseteq Y$. Tedaj $(g \circ f)^*(V) = f^*(g^*(V))^{\text{odp}} \subseteq X$, torej je $V^{\text{odp}} \subseteq Z$.

Trditev. *Naj bo $h : X \to Y$ homeomorfizem in $\sim_X$ ekvivalenčna relacija na X. Definiramo $y_1 \sim_Y y_2 \Leftrightarrow h^{-1}(y_1) \sim_X h^{-1}(y_2)$. Potem je $X/_{\sim_X} \approx Y/_{\sim_Y}$.*

Dokaz.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q_X"'] \arrow[dr, "f=q_Y\circ h" description] & Y \arrow[d, "q_Y"] \\
X/_{\sim_X} \arrow[r, "\overline{f}"'] & Y/_{\sim_Y}
\end{tikzcd}$$

Dokazati moramo, da je $\overline{f}$ homeomorfizem. Preslikava $f = q_Y \circ h$ je kvocientna (homeomorfizem je kvocientna preslikava). Poleg tega naredi iste identifikacije kot q_X, ker h ekvivalenčne razrede za $\sim_X$ slika v ekvivalenčne razrede za $\sim_Y$. □

Definicija. Topološka lastnost L je DELJIVA, če se iz vsakega topološkega prostora X z lastnostjo L prenese na vsak njegov kvocient, oziroma ekvivalentno, če se ohranja pri kvocientnih preslikavah.

Vprašanje 10. Katere topološke lastnosti so deljive?

Odgovor: Povezanost (s potmi), kompaktnost, separabilnost, lokalna povezanost (s potmi), diskretnost, trivialnost.

Vprašanje 11. Dokaži, da je lokalna povezanost deljiva lastnost.

Odgovor: Lokalna povezanost je ekvivalentna pogoju, da so komponente vsake odprte množice tudi same odprte. Naj bo $f : X \to Y$ kvocientna in X lokalno povezan. Naj bo $V^{\text{odp}} \subseteq Y$. Naj bo $V = \bigcup_\lambda V_\lambda$ zapis V kot unija povezanih komponent za V. Ker je $f^*(V)^{\text{odp}} \subseteq X$ in X lokalno povezan, so komponente $\{W_\mu\}_\mu$ od $f^*(V)$ odprte v X. Ker je f zvezna, za vsak λ obstaja μ, da velja $f_*(W_\mu) \subseteq V_\lambda$. Tedaj velja $W_\mu \subseteq f^*(V_\lambda)$. Torej je $f^*(V_\lambda)$ unija nekaterih komponent prostora $f^*(V)$, torej je odprta podmnožica X. Ker je f kvocientna, je V_λ odprta pod Y. Torej so komponente odprte množice odprte, torej je Y lokalno povezan.

Vprašanje 12. Podaj primer, ki dokaže, da T_2 ni deljiva lastnost.

Odgovor: $X = \mathbb{R} \times \{0, 1\}$, $(x, 0) \sim (, 1)$ za $x < 0$. V kvocientni množici $(0, 0)$ ni možno ločiti od $(0, 1)$.

Vprašanje 13. Podaj primer, ki dokaže, da 1-števnost ni deljiva lastnost.

Odgovor:

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0,1] \times \{n\}.$$

Za $A = \{0\} \times \mathbb{N}$ gledamo $X/_A$. Recimo, da je B števna lokalna baza $q(A)$ v $X/_A$. Označimo $B = \{V_j \mid j \in \mathbb{N}\}$. Velja $A \subseteq q^*(V_j)^{\text{odp}} \subseteq X$. Potem za vsaka n in j obstajajo $b_{j,n} > 0$, da je $[0, b_{j,n}) \times \{n\} \subseteq q^*(V_j)$. Definiramo

$$C = q_*(\underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0, \frac{1}{2} b_{n,n}) \times \{n\}}_{\text{nasičena množica}}).$$

Velja $C^{\text{odp}} \subseteq X/_A$. Pri vsaki množici V_j je delček na j-tem intervalu premajhen, zato velja $C \not\supseteq V_j$. Torej smo konstruirali odprto množico, ki ne vsebuje nobene bazne množice.

Vprašanje 14. Kdaj je kvocient $X/_R$ po razdelitvi R T_1?

Odgovor: Natanko tedaj, ko so članice R zaprte v X.

5.2 Topološke grupe in delovanja

Definicija. Naj bo G grupa in topološki prostor. G je TOPOLOŠKA GRUPA, če sta operaciji množenja in invertiranja zvezni.

Opomba. Podobno lahko definiramo za ostale algebraične strukture.

Razni primeri:

- Pomembni topološki obsegi; $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.
- Zanimiv primer so p-adična števila; to je napolnitev $\mathbb{Q}$ v p-adični metriki. p-adično normo definiramo kot
$$\left\| \frac{a}{b} \right\|_p = p^{-k},$$
kjer velja $\frac{a}{b} = p^k \frac{a'}{b'}$ za a', b', ki sta tuji s p.
- Če je X topološki prostor, je $\mathcal{C}(X)$ topološka algebra s co-topologijo.
- Vsaka grupa z diskretno topologijo je (zelo dolgočasna) topološka grupa.
- Za $\mathbb{F}$ in $\{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ je $M_n(\mathbb{F})$ topološka algebra.

- Za $\mathbb{F}$ in $\{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ sta $(\mathbb{F}, +)$ in $(\mathbb{F}^x, \cdot)$ topološki grupi.
- $S^1 \leq \mathbb{C}^x$ in $S^3 \leq \mathbb{H}^x$ sta topološki grupi.
- Cantorjeva množica $C = \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ je topološka grupa.

Trditev. *Naj bo G topološka grupa in $a \in G$. Leva translacija l_a je homeomorfizem. Analogno velja tudi za desno.*

Dokaz. Ker je skrčitev zvezne funkcije, je zvezna. Enako velja za inverz $l_{a^{-1}}$. □

Definicija. Prostor X je HOMOGEN, če za vsak par $x, y \in X$ obstaja homeomorfizem $h : X \to X$, da velja $h(x) = y$.

Posledica. *Topološka grupa je homogen prostor.*

Dokaz. $h = l_{yx^{-1}}$. □

Vprašanje 15. Kaj je topološka grupa? Kaj so (leve) translacije? Kaj je njihova posebna lastnost?

Definicija. Naj bo X topološki prostor in G topološka grupa. LEVO DELOVANJE G na X je zvezna preslikava $\phi : G \times X \to X$, da velja $\phi(1, x) = x$ in $\phi(a, \phi(b, x)) = \phi(ab, x)$. Označimo $g \cdot x = \phi(g, x)$. Prostoru X skupaj z delovanjem grupe G rečemo G-prostor.

Opomba. Delovanje G na X določa translacije $l_a(x) = a \cdot x$. Iz lastnosti delovanja sledi, da je $l_a : X \to X$ homeomorfizem (je zvezno po definiciji, $l_{a^{-1}}$ je inverz). Ne sledi pa, da je X homogen; nimamo (nujno) inverzov za elemente X.

Delovanje na G določa ekvivalenčno relacijo na X;

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists a \in G \,.\, a \cdot x = y.$$

Ekvivalenčni razred elementa $x \in X$ imenujemo ORBITA TOČKE x PRI DELOVANJU GRUPE G. Velja $[x] = G \cdot x = \{a \cdot x \,|\, a \in G\}$. Kvocientni prostor pri tej relaciji imenujemo PROSTOR ORBIT in označimo $X/_G$.

Pozor: Če je $G \subseteq X$, lahko tvorimo kvocient po G v dveh smislih; $X/_G$ po delovanju grupe G ali $X/_G$ po podmnožici. Oznaki tu sta sicer enaki, vendar v splošnem ne dobimo enakega rezultata!

Za $x \in X$ definiramo STABILIZATORSKO PODGRUPO (ali IZOTROPNO PODGRUPO) $G_X := \{a \in G \,|\, a \cdot x = x\}$. V algebraičnem smislu velja $G \cdot x \simeq G/_{G_x}$.

Vprašanje 16. Kaj je delovanje grupe?

Trditev. *Če topološka grupa G deluje na topološki prostor X, je kvocientna projekcija $q : X \to X/_G$ odprta.*

Dokaz. Dokazujemo, da je nasičenje vsake odprte množice odprto. Naj bo $V^{\text{odp}} \subseteq X$. Velja
$$q^*(q_*(V)) = \{g \cdot x \mid x \in V, g \in G\} = \bigcup_{g \in G} \{g \cdot x \mid x \in V\},$$
torej je $q^*(q_*(V))$ unija odprtih množic (slike leve translacije), torej je odprta. □

Vprašanje 17. Dokaži: kvocientna projekcija $X \to X/_G$, kjer je G grupa, je odprta.

5.3 Projektivni prostori

V $\mathbb{R}^2$ pri obravnavi premic nastopita dva primera; premici se lahko sekata v natanko eni točki, ali pa sta vzporedni. V izogib temu prostoru dodamo še točke "v neskončnosti", kjer se seka snop vzporednih premic. Takim točkam pravimo IDEALNE TOČKE.

Bolj formalna konstrukcija je sledeča; točke v $\mathbb{R}^2$ bomo predstavili kot premice. Točko $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ identificiramo s premico, ki poteka skozi $(x, y, 1)$ in izhodišče; korespondenca je dobro definirana. Manjkajo nam le premice (skozi izhodišče), ki so vzporedne ravnini $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$; te nam predstavljajo nove točke. Dobimo torej bijektivno korespondenco $\mathbb{RP}^2 \to \{\text{premice skozi izhodišče}\}$. Te premice so enodimenzionalni vektorski podprostori. Vsi se sekajo natanko v točki 0; če pa izhodišče izločimo, nam premice določajo razbitje $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$.

Definicija. Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$ in $\mathbb{F}$ topološki obseg. n-RAZSEŽNI PROJEKTIVNI PROSTOR NAD $\mathbb{F}$ je kvocientni prostor
$$\mathbb{FP}^n = \mathbb{F}^{n+1} \backslash \{0\}/_{\mathbb{F}^*}.$$

Vprašanje 18. Definiraj $\mathbb{FP}^n$ in razloži definicijo.

Trditev. *Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$ in $\mathbb{F}$ topološki obseg. Prostor $\mathbb{FP}^n$ je homogen.*

Dokaz. Naj bo $q : \mathbb{F}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{FP}^n$ kvocientna projekcija. Naj bosta $x, y \in \mathbb{FP}^n$, da velja $x = [v], y = [w]$. Iščemo tako preslikavo $A : \mathbb{F}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{F}^{n+1} \backslash \{0\}$, da bo A homeomorfizem $\mathbb{F}^{n+1} \backslash \{0\}$, in da bo v slikal v w.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^{n+1} \backslash \{0\} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{F}^{n+1} \backslash \{0\} \arrow[d, "q"] \\
\mathbb{FP}^n \arrow[r, dotted, "\approx"'] & \mathbb{FP}^n
\end{tikzcd}$$

Preslikavo A bomo definirali kot linearno preslikavo; s tem bo porodila homeomorfizem $\mathbb{FP}^n \to \mathbb{FP}^n$. Dopolnimo $\{v\}$ do baze $\{v, v_1, \ldots, v_n\}$ in $\{w\}$ do $\{w, w_1, \ldots, w_n\}$. Definiramo $Av = w$ in $Av_i = w_i$. S tem je A enolično določena, in res obstaja. Ker sta to bazi, je A res izomorfizem. Ker je linearen, slika premice v premice; torej ekvivalenčne razrede v ekvivalenčne razrede. Zaradi injektivnosti A loči ekvivalenčne razrede. Ker je linearen (in ker ima linearen inverz), je A res homeomorfizem. □

Vprašanje 19. Dokaži, da so projektivni prostori homogeni.

Vprašanje 20. Kaj so prostori $\mathbb{FP}^0$ in $\mathbb{FP}^1$?

Odgovor: $\mathbb{FP}^0$ je ena točka.

$\mathbb{FP}^1$ je kompaktifikacija $\mathbb{F}$ z eno točko. To je ravno $S^{\dim \mathbb{F}}$.

Definicija. SFERA v $\mathbb{F}^k$ je množica $S(\mathbb{F}^k) = \{x \in \mathbb{F}^k \mid \|x\| = 1\}$.

Opomba. Velja $S(\mathbb{F}) = S^{\dim \mathbb{F}}$ za topološki obseg $\mathbb{F}$.

Trditev. *Projektivni prostor* $\mathbb{FP}^n$ *je homeomorfen* $S(\mathbb{F}^{n+1})/_{S(\mathbb{F})}$.

Dokaz. Definiramo $r : \mathbb{F}^{n+1}\backslash\{0\} \to S(\mathbb{F}^{n+1})$ s predpisom $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Prvo bomo dokazali, da je r kvocientna. Očitno je surjektivna in zvezna. Za kvocientnost v ožjem smislu bomo pokazali, da je r odprta; v ta namen se spomnimo, da velja $\mathbb{F}^{n+1} = \mathbb{R}^k$ za nek $k \in \mathbb{N}$. Definiramo $h : \mathbb{R}^k\backslash\{0\} \to S^{k-1} \times (0, \infty)$ s predpisom

$$h(x) = (\frac{x}{\|x\|}, \|x\|).$$

To je homeomorfizem z inverzom $(y, t) \mapsto ty$. Preslikava r je kompozitum h s projekcijo na prvo komponento; $r = \mathrm{pr}_1 \circ h$. Tako homeomorfizem kot projekcija sta odprti preslikavi, zato je r odprta.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^{n+1}\backslash\{0\} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "p\circ r"] & S(\mathbb{F}^{n+1}) \arrow[d, "p"] \\
\mathbb{FP}^n \arrow[r, dotted, "\approx"'] & S(\mathbb{F}^{n+1})/_{S(\mathbb{F})}
\end{tikzcd}$$

S p označimo kvocientno projekcijo $S(\mathbb{F}^{n+1})/_{S(\mathbb{F})}$. Ker sta tako p kot r kvocientni, je $p \circ r$ kvocientna. Dokazati moramo še, da naredi iste identifikacije kot q.

Točki $x, y \in \mathbb{F}^{n+1}\backslash\{0\}$ sta ekvivalentni glede na q natanko tedaj, ko obstaja $\lambda \in \mathbb{F}^*$, da je $y = \lambda x$. Če sta x in y ekvivalentna, velja

$$y \xrightarrow{r} \frac{y}{\|y\|} = \frac{\lambda x}{\|\lambda x\|} = \frac{x}{\|x\|}\frac{\lambda}{|\lambda|}.$$

Drug ulomek je element $S(\mathbb{F})$, torej je $p \circ r(x) = p \circ r(y)$

Obratno; če velja $p \circ r(x) = p \circ r(y)$, je

$$\frac{x}{\|x\|} \sim_p \frac{y}{\|y\|},$$

torej $\exists \mu \in S(\mathbb{F}) \,.\, \frac{y}{\|y\|} = \mu\frac{x}{\|x\|}$. Sledi $y = \mu\frac{\|y\|}{\|x\|}x$, torej $y \sim_q x$. □

Vprašanje 21. Izrazi $\mathbb{FP}^n$ s pomočjo sfer in dokaži enakost.

Trditev. *Prostor $\mathbb{FP}^n$ je kompakten, separabilen, (lokalno) povezan s potmi, 2-števen in lokalno kompakten.*

Dokaz. Kompaktnost sledi iz kompaktnosti $S(\mathbb{F}^{n+1})$. Separabilnost in povezanost so deljive lastnosti. Ker sta projekciji odprti (sta projekciji po delovanju), je prostor 2-števen in lokalno kompakten. $\square$

Vprašanje 22. Katere topološke lastnosti imajo projektivni prostori?

Trditev. *Za projektivne prostore veljajo naslednji homeomorfizmi:*

- $\mathbb{RP}^n \approx B^n/_{x\sim -x, x\in S^{n-1}}$
- $\mathbb{CP}^n \approx B^{2n}/_{x\sim e^{i\phi}x, x\in S^{2n-1}, \phi\in\mathbb{R}}$
- $\mathbb{HP}^n \approx B^{4n}/_{x\sim \lambda x, x\in S^{4n-1}, \lambda\in S^3}$

Dokaz. Dokaz naredimo samo za $\mathbb{RP}^n$.

Naj bo $x \in S(\mathbb{F}^{n+1}), x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$. Če je $x_{n+1} \neq 0$, je $\lambda = \frac{x_{n+1}}{\|x_{n+1}\|} \in S(\mathbb{F})$. Sledi $x = \lambda(\frac{x_1}{\lambda}, \ldots, \|x_{n+1}\|)$. Ker je x na enotski sferi, je

$$\|x_{n+1}\| = \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2}.$$

Torej je

$$x \sim \left(\underbrace{y_1, \ldots, y_n}_{\in B^n}, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} \|y_i\|^2}\right).$$

Na nivoju množic opis res poda pravi rezultat. Še na nivoju topologije;

$$\begin{tikzcd}
B^n \arrow[r, dotted, "h{,}\approx"'] \arrow[d, "q"] & S^n_+ \arrow[r, hook, "i"'] \arrow[d, "p\circ i"'] & S^n \arrow[dl, "p"] \\
B^n/_{x\sim -x, x\in S^{n-1}} & S^n/_{x\sim -x} &
\end{tikzcd}$$

Oznaka S^n_+ pomeni $\{x \in S^n \,|\, x_{n+1} \geq 0\}$. Preslikavi h in p sta kvocientni, preslikava i pa ni. Dokažimo, da je kljub temu $p \circ i$ kvocientna. Ta preslikava je zaprta; naj bo $A \subseteq S^n/_{x\sim -x}$ taka, da je

$$(p \circ i)^*(A)^{\text{zap}} \subseteq S^n_+.$$

Ker je i inkluzija, je dovolj pokazati, da je $p^*(A)$ zaprta. Naj bo $B = (p \circ i)^*(A)$. Množica $p^*(A)$ je unija ekvivalenčnih razredov točk iz B; $p^*(A) = B \cup -B$. Ker je $B^{\text{zap}} \subseteq S^n_+$ po predpostavki, je $B^{\text{zap}} \subseteq S^n$, torej je $(B \cup -B)^{\text{zap}} \subseteq S^n$ (negacija je homeomorfizem). $\square$

Vprašanje 23. Opiši $\mathbb{FP}^n$ s pomočjo krogel. Za $\mathbb{RP}^n$ enakost tudi dokaži.

5.4 Konstrukcije kvocientov

Vprašanje 24. Naj bo X topološki prostor. Kaj je stožec in kaj suspenzija nad X?

Odgovor: Stožec: $CX = X \times [0,1]/_{X \times \{1\}}$.

Suspenzija: $\Sigma X = X \times [-1,1]/_{X \times \{1\}, X \times \{-1\}}$.

Vprašanje 25. Čemu sta enaki suspenzija in stožec nad S^{n-1}?

Odgovor: $CS^{n-1} \approx B^n, \Sigma S^{n-1} \approx S^n$.

Vprašanje 26. Kaj je simetrični produkt?

Odgovor: To je $X^n/_{S_n}$, kjer S_n deluje s permutacijami faktorjev.

Vprašanje 27. Kaj je limita prostorov?

Odgovor: Naj bodo $(X_i)_i$ topološki prostori in $f_i : X_i \to X_{i+1}$ preslikave med njimi. Definiramo $f_{ij} = f_{j-1} \circ f_{j-2} \circ \ldots \circ f_i : X_i \to X_j$. Limita prostorov je tedaj

$$\lim_{\to}(X_i, f_i) = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} X_i/_\sim$$

za ekvivalenčno relacijo

$$x_i \in X_i \sim x_j \in X_j \Leftrightarrow \exists k. f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j).$$

Definicija. Naj bosta X in Y prostora, $A \subseteq X$ podmnožica in $f : A \to Y$ zvezna preslikava. Zlepek X in Y vzdolž f je $X \cup_f Y = X \sqcup Y/_{x \in A \sim f(x) \in Y}$.

Vprašanje 28. Definiraj zlepke.

Vprašanje 29. Kaj je preslikavni cilinder?

Odgovor: Če sta X, Y prostora ter $f : X \to Y$ zvezna preslikava, je zlepek $X \times I$ ter Y s preslikavo $X \times \{0\} \xrightarrow{f} Y$ preslikavni cilinder.

Izrek. *Naj bosta X, Y normalna, $A^{\text{zap}} \subseteq X$ in $f : A \to Y$ zvezna. Potem je $X \cup_f Y$ normalen.*

Dokaz. Zlepek je Frechétov: Ker sta X in Y Frechétova, so enojci zaprti. Za poljuben $y \in f_*(A)$ je $f^*(\{y\}) \sqcup \{y\}$ zaprta, ker je A zaprta v X. Vsi ekvivalenčni razredi so take oblike, torej so vsi zaprti.

Zlepek je T_4: Uporabimo Urisonovo lemo; prostor je T_4 natanko tedaj, ko za vsaki disjunktni zaprti množici A, B obstaja preslikava $\phi : (X, A, B) \to (I, 0, 1)$.

Naj bosta B, C disjunktni zaprti neprazni podmnožici $X \cup_f Y$. Definiramo $B_X \sqcup B_Y = q^*(B)$ in $C_X \sqcup C_Y = q^*(C)$ za $B_X, C_X^{\text{zap}} \subseteq X$ in $B_Y, C_Y^{\text{zap}} \subseteq Y$. V X in Y uporabimo Urisonovo lemo; izberemo prvo Urisonovo funkcijo za Y:

$$\phi_Y : (Y, B_Y, C_Y) \to (I, 0, 1).$$

Sedaj definiramo

$$\psi_X : A \cup B_X \cup C_X \to I$$

s predpisom

$$\psi_X(x) = \begin{cases} \phi_Y(f(x)) & x \in A \\ 0 & x \in B_X \\ 1 & x \in C_X. \end{cases}$$

Predpisi se ujemajo na preseku končnega zaprtega pokritja, torej je funkcija res zvezna. Po Tietzejevem razširitvenem izreku jo lahko zvezno razširimo do $\phi_X : X \to I$, s čimer dobimo Urisonovo funkcijo za B_X in C_X.

$$\begin{tikzcd} X \sqcup Y \arrow[rr, "\phi_X \sqcup \phi_Y"] \arrow[dr, "q"'] & & I \\ & X \cup_f Y \arrow[ur, dotted, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Preslikava $\phi_X \sqcup \phi_Y$ inducira zvezno preslikavo $\phi : X \cup_f Y \to I$, velja $\phi_*(B) = \{0\}$ ter $\phi_*(C) = \{1\}$. Preverimo lahko, da se ekvivalentni točki slikata v isto vrednost. $\square$

Vprašanje 30. Pod katerim pogojem se normalnost prostorov prenaša na zlepke? Dokaži.

Vprašanje 31. Dokaži, da je $\mathbb{RP}^n$ normalen.

Odgovor: Velja $\mathbb{RP}^{n-1} \approx S^{n-1}/_{x\sim -x}$. Označimo s $p : S^{n-1} \to \mathbb{RP}^{n-1}$ kvocientno projekcijo. Ker je $\mathbb{RP}^n \approx B^n_{x\sim -x, x\in S^{n-1}}$, je $\mathbb{RP}^n \approx B^n \cup_p \mathbb{RP}^{n-1}$, torej je zlepek. Velja $\mathbb{RP}^0 = \{0\}$, torej je normalen. Induktivno so vsi naslednji normalni, ker so krogle normalne.

Trditev. *Naj bo $A^{\text{zap}} \subseteq X$ in $f : A \to Y$ zaprta vložitev. Če sta X in Y 2-števna, je $X \cup_f Y$ 2-števen. Če sta X in Y Hausdorffova, je $X \cup_f Y$ Hausdorffov.*

Dokaz. 2-števnost: Naj bo $B_X = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ baza za X ter $B_Y = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ baza za Y. Definiramo

$$W_{n,m} = V_n \cap f^*(U_m \cap f_*(A)).$$

Ker je f vložitev, je homeomorfizem na sliko in zato odprt. Torej je $U_m \cap f_*(A)$ odprto pod $f_*(A)$, in je $W_{n,m}$ odprt pod A. Če $W_{n,m}$ ni prazen, obstaja odprta množica $W^X_{n,m}$, da velja $W^X_{n,m} \cap A = W_{n,m}$ ter $W^X_{n,m} \subseteq V_n$.

Na podoben način konstruiramo množice $W^Y_{n,m}$. Sedaj definiramo

$$B = \{q_*(V_n) \mid V_n \cap A = \varnothing\} \cup \{q_*(U_m) \mid U_m \cap f_*(A) = \varnothing\} \cup \{q_*(W^X_{n,m}) \cup q_*(W^Y_{n,m}) \mid W_{n,m} \neq \varnothing\}.$$

To je števna množica. Množice iz prvega ali drugega dela so očitno odprte. Velja

$$q^*(q_*(W^X_{n,m}) \cup q_*(W^Y_{n,m})) = W^X_{n,m} \sqcup W^Y_{n,m},$$

ta množica pa je odrta pod $X \sqcup Y$.

Vzemimo poljubno odprto množico $U \subseteq X \cup_f Y$. Naj bo $z \in U$. Obravnavamo primere;

- Če je $z = q(x)$ za nek $x \in X \backslash A$, obstaja V_n, da je $x \in V_n \subseteq (X \backslash A) \cap q^*(U)$, torej je $z \in q_*(V_n) \in B$.
- Če je $z = q(y)$ za $y \in X \backslash f_*(A)$, podobno.
- Če je $z = q(a) = q(f(a))$ za nek $a \in A$: Velja $a \in q^*(U)^{\text{odp}} \subseteq X$, torej obstaja V_n, da je $a \in V_n \subseteq q^*(U)$. Podobno obstaja U_m, da je $f(a) \in U_m \subseteq q^*(U)$. Torej je $a \in W^X_{n,m}$ ter $f(a) \in W^Y_{n,m}$, iz česar sledi $z \in q_*(W^X_{n,m}) \cap q_*(W^Y_{n,m})$.

Dokazati moramo še, da se ohranja Hausdorffova lastnost; naj bosta $z, w \in X \cup_f Y$. Če sta oba iz $X \backslash A$ ali $Y \backslash f_*(A)$, smo končali. Če je vsaj ena od točk v $q_*(A) = q_*(f_*(A))$, okolici v X in Y konstruiramo kot v zgornjem dokazu. □

Vprašanje 32. Kateri lastnosti se še preneseta na zlepke in pod katerimi pogoji? Dokaži.

5.5 Osnovni izreki topologije evklidskih prostorov

Vprašanje 33. Kaj je Banachovo skrčitveno načelo?

Odgovor: Če je X poln metrični prostor in f skrčitev, ima natanko eno negibno točko.

Izrek (Brouwer, A_n)**.** *Vsaka zvezna preslikava $f : B^n \to B^n$ ima negibno točko.*

Definicija. Prostor X ima LASTNOST NEGIBNE TOČKE, če ima vsaka zvezna preslikava $X \to X$ negibno točko.

Vprašanje 34. Kaj je lastnost negibne točke? Kaj pravi Brouwerjev izrek o negibni točki?

Definicija. Prostor $A \subseteq X$ je RETRAKT prostora X, če obstaja zvezna preslikava $r : X \to A$, da je $r(a) = a$ za $a \in A$. To preslikavo imenujemo RETRAKCIJA.

Vprašanje 35. Dokaži: lastnost negibne točke je dedna na retrakte.

Odgovor: Naj ima X lastnost negibne točke in naj bo $r : X \to A \subseteq X$ retrakcija. Naj bo $f : A \to A$ zvezna preslikava. Naj bo $i : A \to X$ inkluzija. Preslikava $g = i \circ f \circ r : X \to X$ je zvezna preslikava, torej ima negibno točko $x \in X$. Ker je $x = i_*(f(r(x))) \in A$ (ker je $i_*(A) = A$), velja $x \in A$. Tedaj $r(x) = x$, torej $f(x) = x$.

Vprašanje 36. Katere lastnosti se še dedujejo na retrakte?

Odgovor: Povezanost (s potmi), kompaktnost.

Vprašanje 37. Dokaži: retrakt Hausdorffovega prostora je zaprt.

Odgovor: Če je A retrakt in r retrakcija;

$$A = \{x \in X \mid id(x) = r(x)\}$$

je množica ujemanja dveh preslikav.

Definicija. Naj bo R razred topoloških prostorov. Prostor Y je ABSOLUTNI EKSTENZOR za R, če za vsak $X \in R$ in vsako $A^{\text{zap}} \subseteq X$ ter vsako zvezno preslikavo $f : A \to Y$ obstaja zvezna preslikava $F : X \to Y$, da je $F(a) = f(a)$ za $a \in A$.

Trditev. *Če je $Y \approx Z$ in Y absolutni ekstenzor za R, je Z absolutni ekstenzor za R.*

Trditev. *Če je $\{Y_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\} \subseteq AE(R)$, je njihov produkt absolutni ekstenzor za R.*

Trditev. *Retrakt absolutnega ekstenzorja je absolutni ekstenzor.*

Vprašanje 38. Kaj je absolutni ekstenzor? Podaj primer in naštej nekaj lastnosti.

Definicija. Prostor $Y \in R$ je absolutni retrakt za razred R topoloških prostorov, če je za vsak $X \in R$ in vsako zaprto vložitev $\phi : Y \to X$ slika $\phi_*(Y)$ retrakt X.

Vprašanje 39. Dokaži: $R \cap AE(R) \subseteq AR(R)$.

Odgovor: Naj bo $Y \in AE(R) \cap R$. Naj bo $X \in R$ ter $\phi : Y \to X$ zaprta vložitev. Označimo $\phi_*(Y) = A^{\text{zap}} \subseteq X$. Ker je vložitev homeomorfizem na sliko, in je Y absolutni ekstenzor, je A absolutni ekstenzor. Torej lahko preslikavo id_A razširimo do zvezne $r : X \to A$.

Izrek (B_n)**.** *Sfera S^{n-1} <u>ni</u> retrakt krogle B^n.*

Definicija. Naj bosta X in Y topološka prostora. Naj bosta $f, g : X \to Y$ zvezni preslikavi. Ti preslikavi sta HOMOTOPNI, če obstaja HOMOTOPIJA med njima; to je zvezna preslikava

$$H : X \times I \to Y,$$

da velja $H(x, 0) = f(x)$ ter $H(x, 1) = g(x)$.

Definicija. Prostor X je KONTRAKTIBILEN, če je identiteta homotopna kaki konstantni preslikavi $X \to X$.

Vprašanje 40. Kaj je homotopija? Kdaj je prostor kontraktibilen?

Izrek (C_n)**.** *S^{n-1} ni kontraktibilen.*

Izrek. *Za vsak $n \in \mathbb{N}$ so trditve A_n, B_n in C_n ekvivalentne.*

Dokaz. Vse implikacije bomo dokazali s kontrapozicijo.

Recimo, da velja $\neg B_n$. Tedaj obstaja retrakcija $r : B^n \to S^{n-1}$. Iščemo zvezno funkcijo $f : B^n \to B^n$ brez negibne točke; definiramo $f(x) = -r(x)$. Če velja $f(x) = x$, je $r(x) = -x$, torej $x \in S^{n-1}$, ampak za take x je $r(x) = x \neq -x$.

Recimo, da velja $\neg A_n$. Naj bo $f : B^n \to B^n$ zvezna preslikava brez negibne točke. Iščemo retrakcijo $B^n \to S^{n-1}$. Za $x \in B^n$ definiramo $r(x)$ kot točko, kjer poltrak od $f(x)$ skozi x seka sfero. Zapisano s formulo:

$$r(x) = f(x) + \frac{\langle f(x), f(x) - x\rangle + \sqrt{(1 - \langle x, f(x)\rangle)^2 - (1 - \langle x, x\rangle)(1 - \langle f(x), f(x)\rangle)}}{\langle x - f(x), x - f(x)\rangle}(x - f(x)).$$

Iz zapisa je razvidno, da je r zvezna. Velja $r(x) = x$ za $x \in S^{n-1}$.

Recimo, da velja $\neg C_n$. Naj bo $F : S^{n-1} \times I \to S^{n-1}$ kontrakcija, torej $F(\cdot, 0) = \mathrm{id}$ in $F(\cdot, 1) = c \in S^{n-1}$. Konstruirati želimo retrakcijo $r : B^n \to S^{n-1}$. Definiramo $f(x,t) = (1-t)x$. To je zvezna surjekcija $S^{n-1} \times I \to B^n$. Edini netrivialni ekvivalenčni razred je $S^{n-1} \times \{1\}$, ki se slika v 0. Ker f slika iz kompakta v T_2, je zaprta in zato kvocientna. Preslikava F je konstantna na ekvivalenčnih razredih f, torej inducira preslikavo $r : B^n \to S^{n-1}$. Za $x \in S^{n-1}$ velja $F(x, 0) = x = f(x, 0)$, torej $r(x) = x$.

Denimo, da obstaja retrakcija $r : B^n \to S^{n-1}$. Iščemo kontrakcijo S^{n-1}, torej homotopijo $F : S^{n-1} \times I \to S^{n-1}$, da je $F(\cdot, 0) = \mathrm{id}$ in $F(\cdot, 1) = c \in S^{n-1}$. Za f kakor prej preslikava $F(x,t) = r(f(x,t))$ ustreza temu pogoju. $\square$

Vprašanje 41. Povej dve trditvi, ekvivalentni Brouwerjemu izreku, ter dokaži ekvivalenco.

5.5.1 Dokaz Brouwerjevega izreka

Dokazali bomo, da sfera S^{n-1} ni retrakt krogle B^n, s pomočjo Brown-Sardovega izreka.

Definicija. Naj bo $f : U^{\mathrm{odp}} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ gladka preslikava. Naj bo $x \in U$. Če je odvod $D_x f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ surjektiven, je točka x REGULARNA TOČKA, sicer je SINGULARNA TOČKA. Točka $y \in R^n$ je SINGULARNA VREDNOST, če obstaja taka singularna točka x, da je $y = f(x)$. Sicer je y REGULARNA VREDNOST.

Naj bo $U^{\mathrm{odp}} \subseteq \mathbb{R}^m$ in $f : U \to \mathbb{R}^n$ gladka. Z S označimo množico singularnih točk preslikave f. Za $i \in \mathbb{N}$ definiramo S_i kot množico točk S, v katerih so vsi parcialni odvodi f do vključno i-tega reda enaki nič.

Lema. *Množica $f_*(S_{\lceil m/n \rceil})$ ima mero nič.*

Dokaz. Označimo $l = \lceil m/n \rceil$. Naj bo w točka iz te množice in $a_0 > 0$ tako majhen, da je $\overline{K}(w, 2a_0)$ vsebovana v U. Pokazati želimo, da lahko f-sliko okolice $L = \overline{K}(w, 2a_0) \cap S_l$ pokrijemo s končno mnogo kockami v $\mathbb{R}^n$, katerih skupni volumen je poljubno majhen. Naj bo $\varepsilon > 0$ in $a \in (0, a_0)$ tako majhen, da je maksimum poljubnega l-tega parcialnega odvoda preslikave f na množici

$$\overline{K}(L, a) = \bigcup_{z \in L} \overline{K}(z, a)$$

manjši od ε. Naj bo $\delta = 2^{-p} < a/\sqrt{m}$ za nek $p \in \mathbb{N}$. Prostor $\mathbb{R}^m$ razdelimo na kocke s stranico δ; premer teh kock je tedaj manjši od a.

Če neka kocka Q vsebuje točko $z \in L$, potem v poljubni točki $x \in Q$ z uporabo Taylorjeve formule pokažemo

$$|f_j(x) - f_j(z)| \leq \frac{1}{l!} \sum_{\sum l_i = l} \left| \frac{\partial^l f_j}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_m^{l_m}}(\xi) \right| |x_1 - z_1|^{l_1} \dots |x_m - z_m|^{l_m} \leq \frac{1}{l!} m^l \varepsilon \delta^l.$$

Sledi, da je za $\eta = 2\frac{1}{l!}m^l\varepsilon$ množica $f_*(Q)$ vsebovana v kocki Q' s stranico $\eta\delta^l$. Če je R unija vseh kock, ki vsebujejo točko iz L, ter R' unija vseh kock Q', potem je razmerje $V(Q')/V(Q) = \eta^n\delta^{nl-m}$ zgornja meja za $V(R')/V(R)$. Ker je $nl - m \geq 0$, velja

$$\lim_{\varepsilon\to 0} V(R')/V(R) = 0.$$

Ker volumen $V(R')$ z naraščajočim p ne narašča, je mera množice $f(L)$ (in zato $f(S_l)$) enaka nič. $\square$

Vprašanje 42. Dokaži: množica $f_*(S_{\lceil m/n\rceil})$ ima mero nič.

Lema. *Množica $f_*(S_1)$ ima mero nič v $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Fiksiramo n, indukcija na m. Za $m \leq n$ je $\lceil m/n\rceil = 1$ in uporabimo prejšnjo lemo. Naj bo $m > n$ in naj trditev velja za vse gladke preslikave v $\mathbb{R}^n$, definirane na prostorih razsežnosti manjše od m. Po prejšnji lemi preslika f množico $S_{\lceil m/n\rceil}$ v množico z mero 0.

Naj bo $z \in S_1 \backslash S_{\lceil m/n\rceil}$ in naj bo l najmanjši red neničelnega parcialnega odvoda komponente f v z; velja $1 < l \leq \lceil m/n\rceil$. Dovolj je pokazati, da ima z okolico v S_{l-1}, katere f-slika ima mero 0, saj potem induktivno z uporabo prejšnje leme sledi, da ima $f_*(S_1)$ mero 0.

Predpostaviti smemo, da je

$$\frac{\partial^l f_1}{\partial x_1^{l_1}\dots\partial x_m^{l_m}}(z) \neq 0$$

za $l_1 > 0$. Za funkcijo

$$h = \frac{\partial^{l-1} f_1}{\partial x_1^{l_1-1}\dots\partial x_m^{l_m}}$$

velja $h(z) = 0$ in $\partial_{x_1}h(z) \neq 0$. Po izreku o implicitni funkciji torej obstajata okolici $V \ni z_1$ v $\mathbb{R}$ in $W \ni (z_2,\dots,z_m)$ v $\mathbb{R}^{m-1}$ ter gladka funkcija $g : W \to V$, da velja $g(z_2,\dots,z_m) = z_1$ in da je $h(v,w) = 0 \Leftrightarrow g(w) = v$ za $v \in V$ ter $w \in W$. Definiramo funkcijo $F : W \to \mathbb{R}^n$ s predpisom

$$F(y) = f(g(y), y).$$

Po indukcijski predpostavki je $F_*(S_1(F))$ množica z mero 0. Ker slika $S_1(F)$ pri preslikavi $x \mapsto (g(x), x)$ vsebuje $S_{l-1} \cap W$, ima z okolico v S_{l-1}, katere f-slika ima mero 0. $\square$

Vprašanje 43. Dokaži: množica $f_*(S_1)$ ima mero nič v $\mathbb{R}^n$.

Izrek. *Množica $f_*(S)$ ima mero* 0.

Dokaz. Naj bo R_r množica točk, v katerih je rang diferenciala f največ r. Ker je števna unija množic z mero 0 množica z mero 0, je dovolj dokazati, da imajo R_r mero 0. Indukcija na r. Velja $R_0 = S_1$, torej ima f-slika te množice mero 0.

Naj bo $r > 0$. Naj bo $z \in R_r \backslash R_{r-1}$. Pokazati želimo, da ima z okolico v množici $R_1 \cup \ldots \cup R_{r-1}$, katere slika ima mero 0 po indukcijski predpostavki. Ker je $r > 0$, obstaja neničeln parcialni odvod f; BŠS $\partial_{x_1} f_1(z) \neq 0$.

Torej je za poljubno točko $x' = (x_2, \ldots, x_m)$ dovolj blizu $z' = (z_2, \ldots, z_m)$ funkcija $f_1(\cdot, x')$ lokalni difeomorfizem v okolici z_1, zato obstajajo okolice $V \ni z_1$, $U \ni f_1(z)$ in $W \ni z'$, ter gladka funkcija $g : W \times U \to V$, da za $x_1 \in V, x' \in W, y_1 \in U$ velja $f_1(x_1, x') = y_1$ natanko tedaj, ko velja $x_1 = g(y_1, x')$.

Iz Fubinijevega izreka sledi, da ima množica mero 0 če ima vsak njen presek s hiperravnino $y_1 = c$ mero 0. Za $c \in U$ in $f' = (f_2, \ldots, f_m)$ definiramo $F_c = f'(g(c, \cdot), \cdot) : W \to \mathbb{R}^{n-1}$. Stolpci Jacobijeve matrike za F_c so oblike

$$\frac{\partial F_c}{\partial x_j} = \frac{\partial f'}{\partial x_1}(g(c, x'), x') \frac{\partial g}{\partial x_j}(c, x') + \frac{\partial f'}{\partial x_j}(g(c, x'), x').$$

Ti so dobljeni iz Jacobijeve matrike za f z množenjem s konstanto in izpuščanjem prve vrstice in prvega stolpca; v izpuščeni vrstici je bil neničeln le prvi element, torej rang dobljene matrike ne more biti večji od $r - 1$, če je bil rang Jf manjši ali enak r. Torej lahko na F_c uporabimo indukcijsko predpostavko, kar zaključi dokaz. $\square$

Vprašanje 44. Dokaži: množica $f_*(S)$ ima mero 0.

Izrek (Brown-Sard)**.** *Naj bo M m-mnt, N n-mnt in $f : M \to N$ gladka preslikava. Potem je množica regularnih vrednosti presek števne družine gostih odprtih podmnožic v N. Če je M kompaktna, je to odprta podmnožica.*

Dokaz. Ker ima mnogoterost števno bazo, ima števen atlas. Atlasa $\Phi = \{\phi_i : U_i \to U_i' \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ za M ter $\Psi = \{\psi_i : V_i \to V_i' \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ za N lahko izberemo tako, da velja $f_*(U_i) \subseteq V_i$. Na preslikavah $f_i = f\big|_{U_i}$ lahko uporabimo prejšnji izrek. Poleg tega lahko privzamemo, da obstajajo kompaktne podmnožice $B_i \subseteq U_i$, katerih notranjosti pokrivajo M. Ker je singularna množica $S(f_i)$ zaprta v U_i, je $S(f_i) \cap B_i$ kompaktna in je takšna tudi njena slika $f_{i*}(S(f_i) \cap B_i)$, ki ima po prejšnjem izreku mero nič, zato je nikjer gosta zaprta množica. Po Baireovem izreku je $f_*(S(f))$ števna unija zaprtih nikjer gostih množic in ima prazno notranjost. $\square$

Vprašanje 45. Povej in dokaži Brown-Sardov izrek.

Lema. *Za poljubna $0 < a < b$ obstaja gladka funkcija $\lambda : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, ki je na $K(0, a)$ enaka ena in je na $K(0, b)^C$ enaka nič.*

Dokaz. Preslikava
$$\psi(t)=\begin{cases}e^{-1/t} & t>0\\ 0 & t\leq 0\end{cases}$$
je gladka. Naj bo $\chi(t)=\psi(t-a)\psi(b-t)$ in
$$\phi(t)=\frac{1}{p}\int_t^b \chi(s)ds,$$
kjer je $p=\int_{\mathbb{R}}\chi(t)dt$ ploščina območja pod grafom χ. Za $t\leq a$ je $\phi(t)=1$, za $t>b$ je $\phi(t)=0$. Definiramo $\lambda(x)=\phi(|x|)$. □

Lema. *Če je $f:B^n\to S^{n-1}$ retrakcija, potem obstaja gladka preslikava $g:B^n\to S^{n-1}$, ki se v okolici sfere ujema s standardno retrakcijo $r:\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\to S^{n-1}$, definirano kot*
$$r(x)=\frac{x}{|x|}.$$

Dokaz. Zvezno preslikavo lahko po Stone-Weierstrassovem izreku poljubno natančno aproksimiramo z gladko preslikavo. Naj bo $h:B^n\to\mathbb{R}^n$ taka gladka preslikava, da za vsak $x\in B^n$ velja
$$|h(x)-f(x)|<\frac{1}{2}.$$
Velja $0\notin h_*(B^n)$. Preslikavi f in r se ujemata na kompaktu S^{n-1}. Tedaj obstaja tak $\varepsilon>0$, da je za vsako točko x na sferi krogla $K(x,2\varepsilon)$ vsebovana v množici $(f-r)^*(K(0,\frac{1}{2}))$, oziroma da sta v poljubni točki, ki je od sfere oddaljena manj kot 2ε, sliki f in r oddaljeni za manj kot $\frac{1}{2}$.

Naj bo $\lambda:\mathbb{R}^n\to[0,1]$ tako kot v prejšnji lemi za $a=1-2\varepsilon$ in $b=1-\varepsilon$. Preslikava $\tilde{g}:B^n\to\mathbb{R}^n$, dana s predpisom
$$\tilde{g}(x)=\lambda(x)\,h(x)+(1-\lambda(x))\,r(x)$$
je gladka in se v ε-okolici sfere ujema z r. Če bi veljalo $\tilde{g}(x)=0$ za nek x, mora veljati $\lambda(x)\in(0,1)$ in zato
$$\lambda(x)\,(h(x)-r(x))=-r(x).$$
To ni mogoče, ker je
$$|h(x)-r(x)|\leq|h(x)-f(x)|+|f(x)-r(x)|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$
in $|r(x)|=1$. Ker se $\tilde{g}$ v okolici sfere ujema z r, enako velja za $g=r\circ\tilde{g}$. □

Vprašanje 46. Dokaži: če imamo dano retrakcijo $f:B^n\to S^{n-1}$, lahko dobimo gladko preslikavo $g:B^n\to S^{n-1}$, ki se v okolici sfere ujema s standardno retrakcijo.

Izrek. *Gladka preslikava $g:B^n\to S^{n-1}$, ki bi se v okolici sfere ujemala s standardno retrakcijo, ne obstaja.*

Dokaz. Recimo, da obstaja. Po Brown-Sardovem izreku obstaja $y \in S^{n-1}$, ki je regularna vrednost te preslikave. Ker se g v okolici sfere ujema z r, je presek $K = g^*(\{y\})$ z dovolj majhno okolico S^{n-1} enak $\{ty \,|\, t \in (1-\varepsilon, 1]\}$. Po izreku o implicitni preslikavi ima vsaka točka v $K \cap \operatorname{Int} B^n$ odprto okolico, difeomorfno odprtemu intervalu. Ker je K kompakt, je komponenta K, ki vsebuje y, kompakten gladek lok z natanko enim krajiščem; to je protislovno. $\rightarrow\!\leftarrow$ $\square$

Vprašanje 47. Dokaži, da gladke preslikave $B^n \to S^{n-1}$, ki bi se v okolici sfere ujemala s standardno retrakcijo, ni.

5.6 Jordan-Brouwerjev delilni izrek

Definicija. Naj bo X povezan topološki prostor in $A \subseteq X$. Množica A DELI X, če je $X \backslash A$ nepovezan.

Izrek (Jordan)**.** *Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^2$ topološka krožnica. Komplement $\mathbb{R}^2 \backslash S$ ima natanko dve komponenti za povezanost. Ena je omejena, druga je neomejena. S je meja obeh komponent.*

Izrek (Jordan-Brouwer)**.** *Naj bo $n \geq 2$ in $S \subseteq \mathbb{R}^n$ topološka $(n-1)$-sfera. Komplement $\mathbb{R}^n \backslash S$ ima natanko dve komponenti, eno omejeno in eno neomejeno. Obe sta odprti v $\mathbb{R}^n$ in povezani s potmi. Meja obeh je enaka S.*

Vprašanje 48. Povej Jordan-Brouwerjev izrek.

Trditev. *Naj bo $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Potem ima $\mathbb{R}^n \backslash X$ natanko eno neomejeno komponento. Vse komponente so odprte v $\mathbb{R}^n$ in povezane s potmi. Meja vsake komponente v $\mathbb{R}^n \backslash X$ je vsebovana v X.*

Dokaz. Ker je X kompakt, je omejen in vsebovan v $K(0, r)$ za nek $r > 0$. Tedaj je $\mathbb{R}^n \backslash X \supseteq \mathbb{R}^n \backslash K(0, r)$, ta množica pa je povezana, torej leži v eni komponenti $\mathbb{R}^n \backslash X$. Ostale komponente morajo tedaj biti omejene.

Ker je X kompakt, je zaprt in je $\mathbb{R}^n \backslash X$ odprt v $\mathbb{R}^n$. Prostor je lokalno povezan natanko tedaj, ko so komponente odprte množice odprte; podobno velja za povezanost s potmi. Ker so odprte, so komponente za povezanost s potmi enake komponentam za povezanost. Če je V poljubna komponenta $\mathbb{R}^n \backslash X$, je odprta, torej je $\operatorname{Fr}_{\mathbb{R}^n} V \subseteq X$. $\square$

Vprašanje 49. Povej in dokaži prvo trditev na poti do Jordanovega izreka.

Izrek. *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$ topološki k-disk, $k \leq n$ in $n \geq 2$. Potem je $\mathbb{R}^n \backslash D$ povezan.*

Dokaz. Recimo, da trditev ne velja. Potem ima $\mathbb{R}^n \backslash D$ omejeno komponento W zaradi prejšnje trditve. Naj bo $w \in W$. Obstaja $R > 0$, da je $W \cup D \subseteq K(w, R)$. Poiskali bomo retrakcijo $K(w, R)$ na $S(w, R)$. Ker je $D \approx B^k$, je absolutni ekstenzor za razred normalnih prostorov. Ker je normalen, je absolutni retrakt; torej obstaja retrakcija

$r : D \cup W \to D$ (ker je $D^{\text{zap}} \subseteq D \cup W$). Retrakcijo r lahko razširimo do retrakcije $\tilde{r} : \overline{K}(w,R) \to \overline{K}(w,R) \backslash W$ na sledeč način;

$$\tilde{r} = \begin{cases} r(x) & x \in D \cup W \\ x & x \in \overline{K}(w,R) \backslash W \end{cases}.$$

Ker je $\partial W \subseteq D$, je $D \cup W$ zaprta v $\overline{K}(w,R)$, $\overline{K}(w,R) \backslash W$ pa je zaprta, ker je komplement odprte. Ker se predpisa ujemata na preseku (D), je preslikava res zvezna. Če jo komponiramo z radialno retrakcijo $\overline{K}(w,R) \backslash \{w\} \to S(w,R)$,

$$x \mapsto \frac{x-w}{|x-w|} R + w,$$

dobimo retrakcijo na krožnico. □

Vprašanje 50. Dokaži, da k-disk ne deli $\mathbb{R}^n$.

Trditev. *Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^n$ topološka $(n-1)$-sfera in naj bo V komponenta $\mathbb{R}^n \backslash S$. Če $V \neq \mathbb{R}^n \backslash S$, je $\partial V = S$.*

Dokaz. Vemo $\partial V \subseteq S$. Dokazujemo $S \subseteq \partial V$. Denimo, da točka $x \in S$ ni v ∂V. Potem obstaja okolica $W \ni x$, ki ne seka V.

Naj bo h homeomorfizem $S^{n-1} \to S$. Naj bo $z = h^{-1}(x)$. Obstaja $r > 0$, da je $\overline{K}(z,r) \cap S^{n-1} \subseteq h^*(W)$. Vemo, da je $\overline{K}(z,r) \cap S^{n-1} \approx B^{n-1}$ s stereografsko projekcijo. Podobno velja $S^{n-1} \backslash (K(z,r) \cap S^{n-1}) \approx B^{n-1}$. Označimo $H = h_*(S^{n-1} \backslash K(z,r) \cap S^{n-1}) \approx B^{n-1}$.

Naj bo $V' \neq V$ še ena komponenta za $\mathbb{R}^n \backslash S$. Izberimo $v \in V, v' \in V'$. Ker disk H ne deli $\mathbb{R}^n$, obstaja pot $\gamma : (I, 0, 1) \to (\mathbb{R}^n \backslash H, v, v')$. Ker sta ti točki v različnih komponentah, ta tir nujno seka S, kar se zgodi znotraj $S \backslash H \subseteq W$. Naj bo $t_0 = \min \gamma^*(S)$. Ker je $\gamma_*([0, t_o)) \subseteq V$, in $\gamma(t_0) \in W^{\text{odp}}$, obstaja $\varepsilon > 0$, da je $\gamma(t_0 - \varepsilon) \in W \cap V$. $\rightarrow\!\leftarrow$ □

Vprašanje 51. Naj bo S topološka $(n-1)$-krožnica. Dokaži, da je rob omejene komponente v $\mathbb{R}^n \backslash S$ enak S.

Lema. *Naj bo $P = [a,b] \times [c,d]$ pravokotnik v ravnini in naj bosta $h, v : [-1,1] \to P$ poti, za kateri velja*

$$\begin{aligned} h_1(-1) &= a & h_1(1) &= b \\ v_2(-1) &= c & v_2(1) &= d. \end{aligned}$$

Tedaj se tira poti sekata; obstajata $s, t \in [-1,1]$, da je $h(s) = v(t)$.

Dokaz. Recimo, da se tira poti ne sekata. Označimo

$$D(s,t) = \max\{|h_1(s) - v_1(t)|, |h_2(s) - v_2(t)|\} > 0.$$

Definiramo preslikavo $F : [-1,1]^2 \to [-1,1]^2$ s predpisom

$$F(s,t) = \frac{1}{D(s,t)}(v_1(t) - h_1(s), h_2(s) - v_2(t)).$$

Ker je vsaj ena komponenta $F(s,t)$ vedno enaka ± 1, F slika v $\partial[-1,1]^2$. Recimo, da je (s_0,t_0) negibna točka F. Potem je $F(s_0,t_0) = (s_0,t_0) \in \partial[-1,1]^2$, torej mora biti ena od teh vrednosti ± 1. Obravnavamo le $s_0 = -1$; tedaj za prvo komponento F velja

$$\frac{v_1(t_0) - h_1(s_0)}{D(s_0,t_0)} = \frac{v_1(t_0) - a}{D(s_0,t_0)} \geq 0,$$

ampak $F(s_0,t_0) = (s_0,t_0)$ in $s_0 = -1$. □

Vprašanje 52. Povej in dokaži lemo o poteh.

Trditev. *Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^2$ topološka krožnica. Potem ima $\mathbb{R}^2 \backslash S$ natanko dve komponenti.*

Dokaz. Ker je S kompakt, obstajata točki $A, A' \in S$, ki sta na S najbolj oddaljeni. Postavimo koordinatni sistem tako, da je A izhodišče, A' pa je na abscisi; $A' = (a,0)$ za nek $a > 0$. Naj bo $P = [0,a] \times [-a,a]$. Krožnica S leži znotraj $\overline{K}(A,a) \cap \overline{K}(A',a) \subseteq P$. Definiramo $T = (\frac{1}{2}a, a)$ in $B = (\frac{1}{2}a, -a)$.

Točki A, A' razdelita S na dva loka, vsak od njiju po lemi seka daljico BT. Naj bo S_T tisti, na katerem leži najvišja točka v preseku $S \cap BT$. To točko označimo z M_T. Najnižje presečišče S_T in BT označimo z m_T. Drugi lok označimo z S_B. Trdimo, da S_B seka daljico Bm_T; če to nebi veljalo, lok S_B nebi sekal poti $B \to m_T \to M_T \to T$ linearno, po S_T in linearno.

Naj bosta M_B in m_B najvišja in najnižja točka v preseku $S_B \cap Bm_T$ in naj bo c središče $M_B m_T$. Trdimo, da c leži v omejeni komponenti $\mathbb{R}^2 \backslash S$. Če to nebi bilo res, bi obstajala pot v $\mathbb{R}^2 \backslash S$ od točke c do točke izven P. Z D označimo prvo presečišče te poti z robom P. Naj bo δ pot $c \to D$.

- Če D leži v zgornji polravnini, potem za pot R po robu P od D do T pot $BC \cup \delta \cup R$ ne seka S_T.
- Če D leži v spodnji polravnini, potem za pot R po robu P od B do D in Z od m_T do M_T po S_T pot $R \cup \delta \cup cm_T \cup Z \cup M_T T$ ne seka S_B.

Torej c leži v omejeni komponenti V. Trdimo, da je to edina omejena komponenta. Denimo, da je tudi W omejena komponenta; tedaj je vsebovana v P. Naj bo v navpična pot s tirom $Bm_B \cup (m_B \xrightarrow{S_B} M_B) \cup M_B m_T \cup (m_T \xrightarrow{S_T} M_T) \cup M_T T$. Pot v ne seka W, ker sestavni deli v vsebovani v komplementu W.

Tir poti v ne vsebuje točk A, A', zato ima do njih pozitivno razdaljo. Naj bo $\varepsilon > 0$ manjši od teh razdalj. Ker sta $A, A' \in \overline{W}$, obstajata točki $A_1 \in K(A,\varepsilon) \cap W$ in $A_1' \in K(A',\varepsilon) \cap W$. Vodoravno pot h, ki ne seka v, dobimo kot

$$AA_1 \cup (A_1 \to A_1') \cup A_1' A',$$

kjer je srednji del znotraj W (to je s potmi povezana množica). □

Vprašanje 53. Dokaži, da ima $\mathbb{R}^2 \backslash S$ natanko dve komponenti.

Izrek (Schoenflies)**.** *Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^2$ topološka krožnica in V omejena komponenta $\mathbb{R}^2 \backslash S$. Potem je $\overline{V} \approx B^2$.*

Vprašanje 54. Kaj pravi Schoenfliesov izrek?

Vprašanje 55. Povej primer topološke 2-sfere, kjer omejena komponenta $\mathbb{R}^3 \backslash S$ ni homeomorfna B^3.

Odgovor: Alexandrova rogata sfera.

Trditev. *Naj bo $X \in \{S^n, \mathbb{R}^n\}$ ter $S \subseteq X$ topološka $(n-1)$-sfera. Naj bo V omejena komponenta $X \backslash S$. Naslednji trditvi sta ekvivalentni;*

- $\overline{V} \approx B^n$,
- *Obstaja homeomorfizem $h : X \to X$, da je $h_*(S) = S^{n-1}$.*

Vprašanje 56. Karakteriziraj homeomorfnost zaprte komponente $\mathbb{R}^n \backslash S$ z B^n.

Definicija. Topološka $(n-1)$-sfera S je LOKALNO PLOŠČATA ali PODMNOGOTEROST, če za vsako točko $x \in S$ obstaja okolica $V \ni x$ in homeomorfizem $h : V \to W$, kjer je $W \ni 0$, da je $h_*(S \cap V) = W \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

Vprašanje 57. Kdaj velja Schoenfliesov izrek v $\mathbb{R}^n$?

Odgovor: Natanko tedaj, ko je S podmnogoterost.

5.7 Invarianca odprtih množic

Vprašanje 58. Povej primer prostorsko-zapolnjujoče krivulje.

Odgovor: Hilbertova krivulja.

Izrek (Izrek o odprti preslikavi)**.** *Naj bo $V^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : V \to \mathbb{R}^n$ zvezna injekcija. Potem je f odprta.*

Dokaz. Naj bo $W^{\text{odp}} \subseteq V$ in $y \in f_*(W)$. Ker je f injektivna, obstaja natanko en $x \in V$, da je $f(x) = y$. Ker je W odprta, obstaja $r > 0$, da je $\overline{K}(x, r) \subseteq W$. Označimo $K = K(x, r), S = S(x, r)$.

Trdimo, da je $f_*(K)^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$. Ker je f zvezna injekcija, S kompakt in $\mathbb{R}^n$ T_2 prostor, je $f_*(S) \approx S^{n-1}$ (ker je $S \approx S^{n-1}$). Podobno velja $f_*(\overline{K}) \approx B^n$. Množica $\mathbb{R}^n \backslash f_*(S)$ ima natanko dve komponenti, ki sta odprti v $\mathbb{R}^n$. Pokazati želimo, da je $\mathbb{R}^n \backslash f_*(S) = \mathbb{R}^n \backslash f_*(\overline{K}) \cup f_*(K)$; dovolj je pokazati, da sta ti množici komponenti, za to pa je dovolj pokazati, da sta povezani. Množica $f_*(K)$ je povezana, ker je slika povezane množice; množica $\mathbb{R}^n \backslash f_*(\overline{K})$ pa je povezana, ker topološki disk ne deli $\mathbb{R}^n$. $\square$

Vprašanje 59. Povej in dokaži izrek o odprti preslikavi.

Posledica (Invarianca odprtih množic)**.** *Naj bo $V^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ in $W \subseteq \mathbb{R}^n$ homeomorfna V. Potem je $W^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Dokaz.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "h"] \arrow[dr, dashed, "f"'] & W \arrow[d, hook, "i"] \\ & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Preslikava $f = i \circ h$ je zvezna injekcija $V \to \mathbb{R}^n$. Potem je odprta, in je $f_*(V) = W^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$. $\square$

Vprašanje 60. Povej in dokaži izrek o invarianci odprtih množic.

Posledica. *Če je $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^m$, je $n = m$.*

Dokaz. Denimo, da je $m < n$. Vložimo $\mathbb{R}^m$ v $\mathbb{R}^n$ kot $\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}$. Ta množica ni odprta v $\mathbb{R}^n$, ker ima prazno notranjost. Po izreku o invarianci odprtih množic je odprta. $\rightarrow\!\!\times\!\!\leftarrow$ $\square$

Vprašanje 61. Dokaži, da je dimenzija topološka invarianta.

Posledica. *Naj bosta $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Naj bo $h : A \to B$ homeomorfizem. Potem velja $h_*(\mathit{Int}_{\mathbb{R}^n} A) = \mathit{Int}_{\mathbb{R}^n} B$ in $h_*(\mathit{Fr}_{\mathbb{R}^n} A \cap A) = \mathit{Fr}_{\mathbb{R}^n} B \cap B$.*

Dokaz. Notranjost je odprta podmnožica A, in h je zvezna injekcija, torej je $h_*(\operatorname{Int} A)^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$, torej je odprta tudi pod $\operatorname{Int} B$. Velja $h_*^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int} A$ s podobnim argumentom, torej velja $\operatorname{Int} B \subseteq h_*(\operatorname{Int} A)$. Če notranjost slikamo v notranjost, moramo ostanek slikati v ostanek. $\square$

Vprašanje 62. Dokaži: če sta $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ homeomorfni množici, se notranjost s homeomorfizmom slika v notranjost.

5.8 Mnogoterosti

Definicija. $\mathbb{R}^0 = \{0\}$, $\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$.

Definicija. Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$. TOPOLOŠKA MNOGOTEROST DIMENZIJE n je 2-števen T_2 topološki prostor M, v katerem ima vsaka točka x okolico V_x^{odp}, homeomorfno $\mathbb{R}^n$ ali $\mathbb{R}^n_+$. Množico V_x imenujemo EVKLIDSKA OKOLICA, homeomorfizem pa KARTA. Množico vseh takih $x \in M$, ki imajo okolico, homeomorfno $\mathbb{R}^n$, imenujemo NOTRANJOST mnogoterosti in označimo z $\operatorname{int} M$. Ostale točke so ROBNE, množica vseh teh točk je ROB mnogoterosti. Označimo ga z ∂M.

Vprašanje 63. Definiraj mnogoterost, njeno notranjost in rob.

Vprašanje 64. Povej nekaj primerov mnogoterosti.

Odgovor: $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n_+$ sta mnogoterosti. Odprta podmnožica mnogoterosti je mnogoterost. Vsaka gladka podmnogoterost v $\mathbb{R}^n$ je mnogoterost. S^1 je mnogoterost.

Vprašanje 65. Kakšne lokalne lastnosti ima mnogoterost? Katere lastnosti dobiš iz tega?

Odgovor: Je lokalno povezana s potmi in lokalno kompaktna. Iz lokalne kompaktnosti in T_2 sledi regularnost, iz regularnosti in 2-števnosti pa metrizabilnost.

Definicija. Kompaktna mnogoterost s praznim robom je SKLENJENA MNOGOTEROST.

Vprašanje 66. Kaj je sklenjena mnogoterost?

Trditev. *Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ in d dimenzija $\mathbb{F}$ nad $\mathbb{R}$. Projektivni prostor $\mathbb{FP}^n$ je sklenjena nd-mnt.*

Dokaz. Kvocientna projekcija $q : F^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{FP}^n$ je odprta, torej je $\mathbb{FP}^n$ 2-števen. Vemo že, da je kompakten.

Dokažimo, da lahko $\mathbb{FP}^n$ pokrijemo z evklidskimi okolicami. Definiramo $V_i = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}$. To je odprta podmnožica $\mathbb{F}^{n+1}$. Družina $V_0, V_1, \ldots, V_n$ je odprto pokritje za $\mathbb{F}^{n+1} \backslash \{0\}$, torej je družina slik odprto pokritje za $\mathbb{FP}^n$. Definiramo $f : V_0 \to \mathbb{F}^n$ s predpisom

$$f(x_0, \ldots, x_n) = x_0^{-1}(x_1, \ldots, x_n).$$

S q' označimo zožitev q na V_0. To je odprta preslikava, zatorej kvocientna.

$$\begin{tikzcd} V_0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q'"'] & \mathbb{F}^n \\ q'_*(V_0) \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Ker je $f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = x_0^{-1}\lambda^{-1}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = f(x_0, \dots, x_n)$, je f konstantna na ekvivalenčnih razredih. Torej je $\overline{f}$ dobro definirana zvezna preslikava. Ima inverz $q' \circ g$ za $g(y_1, \dots, y_n) = (1, y_1, \dots, y_n)$. Sledi, da je $q'_*(V_0)$ homeomorfna $\mathbb{F}^n$. Podobno naredimo za ostale V_i. Dokazali smo, da so vse točke notranje.

Naj bosta $x, y \in \mathbb{FP}^n$. Označimo $x = [a], y = [b]$ za neka $a, b \in \mathbb{F}^{n+1} \backslash \{0\}$ in obravnavamo primere.

- Če so vse komponente $a_i \neq 0$, potem je $x \in \cap_i V_i$. Ker $b \neq 0$, obstaja k, da je $b \in V_k$. Tedaj točki a, b lahko ločimo v $V_k \approx \mathbb{F}^n$.
- V splošnem; ker je prostor homogen, lahko x preslikamo v točko $\tilde{x} = [\tilde{a}]$, da so vse komponente $\tilde{a}$ različne od 0. Naj bo h ta homeomorfizem. Označimo $\tilde{y} = h(y)$. Ti točki lahko ločimo kot prej, ter dobljeni okolici preslikamo s h^{-1}.

Torej je prostor res T_2. □

Vprašanje 67. Kakšna mnogoterost je $\mathbb{FP}^n$? Dokaži.

Trditev. *Komponente n-mnt so n-mnt.*

Dokaz. 2-števnost in T_2 sta dedni. Komponente vsebujejo evklidske okolice v celoti. □

Izrek (Izrek o odprti preslikavi za mnt)**.** *Naj bosta M, N n-mnt, $V^{\text{odp}} \subseteq \operatorname{int} M$, in $f : V \to N$ zvezna injekcija. Potem je f odprta in $f_*(V) \subseteq \operatorname{int} N$.*

Dokaz. Naj bo $W^{\text{odp}} \subseteq V$. Izberimo $y \in f_*(W)$. Označimo $x = f^{-1}(y)$. Točka y ima v N evklidsko okolico U, homeomorfno $\mathbb{R}^n$ ali $\mathbb{R}^n_+$. Ker je $x \in \operatorname{int} M$, ima evklidsko okolico $\tilde{U} \subseteq W \cap f^*(U)$, homeomorfno $\mathbb{R}^n$. Preslikava

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\approx} \tilde{U} \xrightarrow{f} U \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^n_+ \xhookrightarrow{i} \mathbb{R}^n$$

je zvezna injekcija $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, torej je odprta. Torej je njena slika $f_*(\tilde{U})^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$. Če je $U \approx \mathbb{R}^n_+$, množica $f_*(\tilde{U})$ ne seka $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, ker te točke niso notranje, torej $f_*(\tilde{U}) \subseteq \operatorname{int} N$ in je odprta, saj je njena slika v karti odprta. Za $x \in \tilde{U}$ velja $f(x) = y \in f_*(\tilde{U})^{\text{odp}} \subseteq \operatorname{int} N$. □

Vprašanje 68. Povej in dokaži izrek o odprti preslikavi za mnt.

Izrek. *Naj bo M n-mnt in $\partial M \neq \varnothing$. Potem je ∂M $(n-1)$-mnt s praznim robom.*

Dokaz. 2-števnost in T_2 sta dedni. Naj bo $x \in \partial M$. Znotraj M ima evklidsko okolico $V \approx \mathbb{R}^n_+$. Naj bo h ta homeomorfizem. Potem je h, zožan na $V \cap \operatorname{int} M$ zvezna injekcija $V \cap \operatorname{int} M \to \mathbb{R}^n_+$, zatorej je $h_*(V \cap \operatorname{int} M) \subseteq \operatorname{int} R^n_+$. Podobno s h^{-1} sledi $h_*^{-1}(\mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)) \subseteq V \cap \operatorname{int} M$, zato $h_*(V \cap \operatorname{int} M) = \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)$. Ker je h homeomorfizem, slika preostanek v preostanek. □

Vprašanje 69. Kaj je rob mnogoterosti? Povej izrek in ga dokaži.

Izrek. *Naj bo N n-mnt in M m-mnt. Potem je $N \times M$ $(n+m)$-mnt z robom $\partial(N \times M) = \partial N \times M \cup N \times \partial M$.*

Dokaz. 2-števnost in T_2 sta produktni. Naj bo $(x, y) \in N \times M$. Naj bo $V \ni x$ evklidska okolica v N ter $W \ni y$ evklidska okolica v M. Ločimo primere.

- Če sta obe točki notranji; evklidska okolica je $V \times W$.
- Če je x notranja in y robna; $V \times W$ je homeomorfna R^{n+m}_+. Ker ima Y v $W \approx \mathbb{R}^m_+$ zadnjo koordinato enako 0, to velja tudi za par (x, y) v $\mathbb{R}^{n+m}_+$, zato je (x, y) robna točka.
- Če sta obe robni, je $V \times W$ homeomorfna $\mathbb{R}^{n+m}_+$. To je spet robna točka.

□

Vprašanje 70. Kakšen je rob produkta mnogoterosti?

Definicija. Naj bo N n-mnt in $L \subseteq N$ l-mnt. L je PRAV VLOŽENA v N, če je $L \cap \partial N = \partial L$. L je LOKALNO PLOŠČATA (PODMNOGOTEROST), v N, če je prav vložena in če ima vsak $x \in L$ evklidsko okolico V v N s pripadajočo karto $h : V \to \mathbb{R}^n/\mathbb{R}^n_+$, da velja $h_*(V \cap L) = h_*(V) \cap \{0\}^{n-l} \times \mathbb{R}^l$.

Vprašanje 71. Definiraj podmnogoterost.

Izrek. *Naj bosta N, M n-mnt in $L^{\text{zap}} \subseteq \partial N, K^{\text{zap}} \subseteq \partial M$ $(n-1)$-mnt z lokalno ploščatima robovoma. Če je $h : L \to K$ homeomorfizem, potem je zlepek $N \cup_h M$ n-mnt z robom $(\partial N \backslash \operatorname{int} L) \cup_{h'} (\partial M \backslash \operatorname{int} K)$, kjer je h' skrčitev h na ∂L. Poleg tega je $N \backslash L \cup M \backslash K$ vložen v zlepek kot odprta podmnogoterost.*

Dokaz. Ker lepimo z zaprto vložitvijo, definirano na zaprti podmnožici, je zlepek 2-števen in T_2. Naj bo $q : N \coprod M \to N \cup_h M$ kvocientna projekcija. Množica $N \backslash L \cup M \backslash K$ je nasičena odprta množica, torej je zožitev q nanjo odprta vložitev. Točke v sliki te množice imajo enake evklidske okolice kot točke v tej množici.

Pokazati moramo še, da imajo točke v $q_*(L) = q_*(K)$ ustrezne Evklidske okolice. Ločimo primere.

- Za $x \in \operatorname{int} L$ velja $h(x) \in \operatorname{int} K$. Kot v dokazu trditve o ohranjanju 2-števnosti in T_2 pri takem zlepku najdemo okolici za x in $h(x)$, homeomorfni $\mathbb{R}^n_+$, ki se zlepita v $\mathbb{R}^n$. Tedaj je $q(x)$ notranja točka.

- Za $x \in \partial L$ je $h(x) \in \partial K$. Z uporabo lokalne ploščatosti lahko okolice zlepimo in je $q(x)$ robna točka v zlepku.

$\square$

Vprašanje 72. Povej in dokaži izrek o zlepkih mnogoterosti.

Definicija. Naj bosta M, N n-mnt, $D \subseteq \operatorname{int} M$ in $E \subseteq \operatorname{int} N$ topološka n-diska z lokalno ploščatima robovoma. Izberimo homeomorfizem $h : \partial D \to \partial E$. POVEZANA VSOTA M in N je $M\#N = (M\backslash D) \cup_h (N\backslash E)$.

Vprašanje 73. Kaj je povezana vsota?

Vprašanje 74. Pokaži, da je S^n nevtralni element za povezano vsoto.

Odgovor: Izberemo diska $D \subseteq M$ in $E \subseteq S^n$. Ker je ∂E lokalno ploščata $(n-1)$-sfera, po Schoenfliesu obstaja homeomorfizem, ki ∂E slika na ekvator $S^{n-1} \subseteq S^n$ in disk E na spodnjo hemisfero. Privzeti smemo torej $S^n \backslash \operatorname{int} E = S^n_+ \approx B^n$. Izberimo poljuben homeomorfizem $h : \partial D \to S^{n-1}$. Lema, ki smo jo dokazali na vajah, pravi, da lahko h razširimo do homeomorfizma $H : D \to B^n$, kjer poljubno izbrano točko v notranjosti preslikamo v poljubno drugo točko v notranjosti.

$$\begin{tikzcd}
M & M\backslash \operatorname{int} D \coprod D \arrow[l] \arrow[r, "\mathrm{id} \coprod H"] \arrow[d, "q"] \arrow[drr, "f"] & & M\backslash \operatorname{int} D \coprod S^n_+ \arrow[d, "q_h"] \\
& M\backslash \operatorname{int} D \cup_{\mathrm{id}_{\partial D}} D \arrow[ul, dashed, "\approx"] \arrow[rr, dashed, "\approx"] & & M\#S^n
\end{tikzcd}$$

Preslikavi f in q naredita iste identifikacije; preverimo lahko, da je f zaprta.

Trditev (Homogenost notranjosti povezane mnogoterosti)**.** *Naj bo M povezana n-mnt. Potem je $\operatorname{int} M$ homogena; za poljubna $x, y \in \operatorname{int} M$ obstaja homeomorfizem $h : M \to M$, da je $h(x) = y$.*

Dokaz. Ker je M povezana, je $\operatorname{int} M$ povezana. Definirajmo ekvivalenčno relacijo na $\operatorname{int} M$;

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \, \text{homeo} \, h : M \to M, h(x) = y.$$

Trdimo, da so ekvivalenčni razredi odprti. Naj bo $x \in \operatorname{int} M$. Točka x ima evklidsko okolico $U \approx \mathbb{R}^n$. Naj bo ϕ ta homeomorfizem. BŠS $\phi(x) = 0$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{R}^n \\
D \arrow[u, hook] & B^n \arrow[l, "\phi^{-1}"] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Naj bo $D = \phi_*^{-1}(B^n)$. Naj bo $y \in \operatorname{int} D$. Po lemi obstaja homeomorfizem $H : B^n \to B^n$, da je $H(0) = \phi(y)$, in $H(z) = z$ za $z \in S^{n-1}$. Definiramo $\tilde{H} : D \to D$ s predpisom

$$\tilde{H}(z) = \phi^{-1}(H(\phi(z))).$$

Velja $\tilde{H}(x) = y$ in $\tilde{H}(z) = z$ na ∂D, zato lahko $\tilde{H}$ z identiteto razširimo na homeomorfizem $M \to M$. Tedaj velja $x \sim y$. $\square$

Vprašanje 75. Pokaži, da je notranjost povezane mnogoterosti homogena.

5.9 Kompaktne ploskve

Definicija. PLOSKEV je povezana 2-mnt.

Cilj poglavja je klasifikacija sklenjenih ploskev. Poznamo naslednje ploskve:

- S^2,
- $T = S^1 \times S^1$,
- $P = \mathbb{RP}^2$.

Iz teh lahko tvorimo nove z operacijo povezane vsote.

Standardne modele za nT in mP dobimo tako, da štirikotniku oz. dvakotniku izrežemo disk, ki se dotika enega oglišča, nato pa te ploskve postopoma lepimo po izrezanih delih; z besedami lahko zapišemo

- nT: $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$,
- mP: $a_1^2 a_2^2 \dots a_m^2$.

Vprašanje 76. Kaj je standardni model nT in mP?

Trditev. *Naj bo $K = K_1 \cup \ldots \cup K_n$ disjunktna unija mnogokotnikov v ravnini. Na K je dana ekvivalenčna relacija, ki identificira nekatere pare stranic z linearnimi homeomorfizmi. Potem je vsaka komponenta v $K/_\sim$ kompaktna ploskev.*

Dokaz. Naj bo q kvocientna projekcija. Ker je K kompakt, je kvocient kompakt. Ker je K 2-števen in T_2, je tak tudi $K/_\sim$.

- Za $x \in \operatorname{int} K_i$ se evklidska okolica prenese iz K.
- Za $y \in \operatorname{int} L_{ij}$ (na stranici K_i) obravnavamo dva primera
  - če se L_{ij} ne identificira, se okolica prenese iz K.
  - če se L_{ij} identificira, dobimo dve okolici, ki ju lahko zlepimo.
- Točka z, ki je oglišče mnogokotnika, se lahko identificira z več oglišči. Nastopita dve možnosti;

- če se vse stranice paroma identificirajo, okolice zlepimo skupaj in dobimo $\mathbb{R}^n$.
- če se dve od stranic ne identificirata, dobimo okolico, homeomorfno $\mathbb{R}^n_+$.

□

Vprašanje 77. Kaj je poliedrska ploskev?

Izrek (Rado)**.** *Vsaka sklenjena ploskev je homeomorfna poliedrski ploskvi.*

Izrek (Klasifikacijski izrek)**.** *Vsaka sklenjena ploskev je homeomorfna eni od S^2, nT, mP. Vse te ploske so paroma nehomeomorfne.*

Vprašanje 78. Povej klasifikacijski izrek

Ploskve klasificiramo glede na orientabilnost in Eulerjevo karakteristiko. Orientacija mnogokotnika je dana z izbiro cikličnega zaporedja njegovih oglišč. Lepljenje je orientabilno, če izbrani orientaciji mnogokotnikov določata nasprotni orientaciji stranic. Poliedrska ploskev je orientabilna, če lahko izberemo orientacije mnogokotnikov tako, da so vsa lepljenja orientabilna.

Vprašanje 79. Kako definiramo orientabilnost?

Orientabilnost se ohranja pri podploskvah in povezanih vsotah. Posledica tega je, da če ploskev vsebuje Möbiusov trak, ni orientabilna.

Za Eulerjevo karakteristiko pogledamo graf, ki ga določajo slike oglišč in stranic poliedrske ploskve. Oglišča imenujemo 0-celice, povezave 1-celice in lica 2-celice. Eulerjeva karakteristika je tedaj

$$\chi(M) = \#0c - \#1c + \#2c.$$

Izkaže se, da je to topološka invarianta. Velja $\chi(nT) = 2 - 2n$ in $\chi(mP) = 2 - m$.

Vprašanje 80. Kaj je Eulerjeva karakteristika?