Zbrani zapiski za 3. letnik

Patrik Žnidaršič

Prevedeno dne 7. oktober 2023

Kazalo

1 Analiza 3

2 Mehanika

2.1 Osnove Newtonove mehanike

Definicija. Afin prostor $\mathcal{A}$ nad vektorskim prostorom V je množica z binarno operacijo $+ : \mathcal{A} \times V \to \mathcal{A}$, za katero velja:

- Za poljuben $A \in \mathcal{A}$ ter $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ velja $(A + \mathbf{a}) + \mathbf{b} = A + (\mathbf{a} + \mathbf{b})$
- Za poljubna $A, B \in \mathcal{A}$ obstaja natanko določen $\mathbf{a} \in V$, da je $B = A + \mathbf{a}$.

Dimenzija afinega prostora je enaka dimenziji vektorskega prostora V.

Definicija. Naj bo $\mathcal{A}$ afin prostor nad vektorskih prostorom V. Definiramo operacijo odštevanja $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$ s predpisom

$$B - A = \mathbf{a} \Leftrightarrow B = A + \mathbf{a}.$$

Trditev. *V afinem prostoru veljajo naslednje zveze:*

- $A - A = \mathbf{0}$.
- $(A - B) + (B - A) = \mathbf{0}$.
- $(A - B) + (B - C) + (C - A) = \mathbf{0}$.
- $(A - B) + \mathbf{a} = (A + \mathbf{a}) - B$.
- $(A - B) + C = (C - B) + A$.

Definicija. Preslikava $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ med afinima prostoroma je afina, če obstaja $dg \in L(V, V')$, da za vsaka $A, B \in \mathcal{A}$ velja $g(A) - g(B) = dg(A - B)$.

Za afino preslikavo g si lahko izberemo pol O, ter izpeljemo

$$g(A) = g(O) + dg(A - O).$$

Vrednosti funkcije seveda niso odvisne od izbire pola.

Vprašanje 1. Definiraj afin prostor in afino preslikavo.

Definicija. Galilejeva struktura je trojica $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, \mathfrak{t}, \rho)$, kjer je $\mathcal{A}$ štirirazsežni afin prostor nad V, $\mathfrak{t} \in L(V, \mathbb{R})$ in ρ ekvlidska metrika na $\ker \mathfrak{t}$, porojena z normo $\|\cdot\|$. Funkciji $\mathfrak{t}$ pravimo časovnost, elementom $\mathcal{A}$ pa pravimo dogodki. Pretečeni čas med dogodkoma A in B označimo s $\mathfrak{t}(A, B)$. Dogodka sta istočasna, če je $\mathfrak{t}(A, B) = 0$. Za istočasne dogodke lahko definiramo razdaljo $\rho(A, B) = \|B - A\|$ (uporabimo isto oznako kot za metriko v $\ker \mathfrak{t}$).

Definicija. Galilejevi strukturi $\mathcal{G} = (\mathcal{A}, \mathfrak{t}, \rho)$ in $\mathcal{G}' = (\mathcal{A}', \mathfrak{t}', \rho')$ sta ekvivalentni, če obstaja afina bijekcija $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, ki ohranja časovnost in razdaljo med istočasnimi dogodki;

$$\mathfrak{t}'(g(A) - g(B)) = \mathfrak{t}(A, B), \qquad \rho'(g(A), g(B)) = \rho(A, B).$$

Taki transformaciji pravimo Galilejeva transformacija.

Vprašanje 2. Definiraj Galilejevo strukturo in Galilejeve transformacije.

Modelni primer je naravna Galilejeva struktura na $\mathcal{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{E}$, kjer je $\mathbb{E}$ trirazsežni Evklidski prostor. Za elemente $A_i = (t_i, \mathbf{P}_i) \in \mathcal{A}$ naravne strukture velja

- $\mathfrak{t}(A_1 - A_2) = t_1 - t_2$,
- $\rho(A_1, A_2) = \|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2\|$.

Definicija. KOORDINATNI SISTEM na $\mathcal{A}$ je bijekcija $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \times \mathbb{E}$ s komponentami $\phi(A) = (\tau\phi(A), \pi\phi(A))$, in pri kateri je $\tau \circ \phi$ linearna preslikava.

Opomba. Če sta ϕ in ϕ' koordinatna sistema, je preslikava $\phi' \circ \phi^{-1} : \mathbb{R} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R} \times \mathbb{E}$ bijekcija.

Vprašanje 3. Kaj je koordinantni sistem?

Izrek. *Galilejeva transformacija* $g : \mathbb{R} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R} \times \mathbb{E}$ *je oblike*

$$g(t, \mathbf{P}) = (t_0' + t, \mathbf{P}_0' + \vec{c}t + \mathbf{Q}(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0)),$$

kjer je $\mathbf{Q} \in O(3)$ *ortogonalna transformacija.*

Dokaz. Ker je g afina preslikava, jo lahko zapišemo kot

$$g(t, \mathbf{P}) = g(t_0, \mathbf{P}_0) + dg(t - t_0, \mathbf{P} - \mathbf{P}_0),$$

kjer je $dg \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$. Če označimo $g(t_0, \mathbf{P}_0) = (t_0', \mathbf{P}_0')$, in zapišemo dg kot bločno matriko, dobimo

$$g(t, \mathbf{P}) = (t_0', \mathbf{P}_0') + \begin{bmatrix} \alpha & \vec{a}^T \\ \vec{c} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t - t_0 \\ \mathbf{P} - \mathbf{P}_0 \end{bmatrix} = (t_0', \mathbf{P}_0') + \begin{bmatrix} \alpha(t - t_0) + \vec{a} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) \\ (t - t_0).\vec{c} + \mathbf{Q}(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) \end{bmatrix}.$$

Za dogodka $(t_1, \mathbf{P}_1)$ in $(t_2, \mathbf{P}_2)$ zahtevamo

$$t_2 - t_1 = \tau(g(t_2, \mathbf{P}_2) - g(t_1, \mathbf{P}_1)).$$

Če razvijemo desno stran zahteve po izpeljani formuli, dobimo pogoj

$$t_2 - t_1 = \alpha(t_2 - t_1) + \vec{a} \cdot (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1).$$

Iz tega sledi $\alpha = 1$ in $\vec{a} = \vec{0}$. Drug pogoj je, da se mora razdalja med istočasnimi dogodki ohranjati. Iz spodnjega dela bločne matrike dobimo pogoj

$$\|\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1\| = \|\mathbf{Q}(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)\|,$$

torej mora biti $\mathbf{Q}$ ortogonalna. □

Vprašanje 4. Kakšno obliko imajo Galilejeve transformacije $\mathbb{R}\times\mathbb{E} \to \mathbb{R}\times\mathbb{E}$? Dokaži.

3 Uvod v numerične metode

3.1 Računske napake

Kadar z numerično metodo nekaj izračunamo, ne dobimo točne vrednosti, vendar nek približek. ABSOLUTNO NAPAKO definiramo kot razliko med približkom in točno vrednostjo:

$$d_a = \hat{x} - x.$$

Po drugi strani je RELATIVNA NAPAKA kvocient

$$d_r = \frac{\hat{x} - x}{x}.$$

Približek lahko izrazimo kot $\hat{x} = x(1 + d_r)$.

Vprašanje 1. Definiraj absolutno in relativno napako.

Števila predstavljamo s plavajočo vejico, ki je pravzaprav eksponentni zapis

$$x = \pm m \cdot b^e,$$

kjer je m MANTISA, zapisana kot $m = 0.c_1c_2\ldots c_t$ za $c_i \in \{0, \ldots, b-1\}$, število b je BAZA zapisa, e pa EKSPONENT v mejah $L \leq e \leq U$. Števila običajno zapišemo NORMALIZIRANA, torej s $c_1 \neq 0$. V primeru najnižje možne potence dovoljujemo tudi SUBNORMALIZIRANA števila, kjer je $c_1 = 0$. Predstavljiva števila v takšnem zapisu označujemo s $P(b, t, L, U)$.

V standardu IEEE imamo dve števili:

- Enojni zapis: $P(2, 24, -125, 128)$,
- Dvojni zapis: $P(2, 53, -1021, 1023)$.

Vprašanje 2. Kaj je $P(b, t, L, U)$? Kakšne vrednosti imata `float` in `double`?

Pri zaokoževanju številu odrežemo decimalke za neko vrednostjo, in po potrebi prištejemo b^{-t}. Boljšega od teh približkov označimo s $\mathrm{fl}(x)$.

Izrek. *Če za x velja, da $|x|$ leži na intervalu med najmanjšim in največjim pozitivnim predstavljivim normaliziranim številom, potem velja*

$$\frac{|\mathrm{fl}(x) - x|}{|x|} \leq u,$$

za OSNOVNO ZAOKROŽITVENO NAPAKO $u = \frac{1}{2}b^{1-t}$.

Vprašanje 3. Kaj je osnovna zaokrožitvena napaka? Povej izrek.

Standard IEEE zagotovlja omejeno napako tudi pri osnovnih operacijah:

- $\mathrm{fl}(x \oplus y) = (x \oplus y)(1 + \delta)$ za $|\delta| \leq u$ za osnovne operacije $+, -, \cdot, /$,
- $\mathrm{fl}(\sqrt{x}) = \sqrt{x}(1 + \delta)$ za $|\delta| \leq u$.

Drug vir napak je občutljivost problema, ki ni povezana z numeriko. Obravanavamo vprašanje, kako se pri majhni spremembi v vhodnih podatkih spremeni pravilni odgovor. Za zvezno odvedljivo f lahko absolutno občutljivost merimo z odvodom

$$|f(x + \delta x) - f(x)| \approx \left|f'(x)\right| |\delta x| .$$

Poznamo tri vrste napak, ki skupaj sestavljajo celotno napako:

- Neodstranljiva napaka: napaka zaradi zaokroževanja podatkov
- Napaka metode: nenatančnost metode
- Zaokrožitvena napaka: napaka zaradi zaokroževanja znotraj metode

Vprašanje 4. Katere vrste napak poznamo?

4 Verjetnost

4.1 Izidi, dogodki, verjetnosti

Vprašanje 1. Kaj je množica Ω vseh možnih izidov? Povej nekaj primerov.

Odgovor: To je množica, ki hrani vse možne rezultate nekega poskusa. Pri mešanju kupa n kart velja $\Omega = S_n$, pri n-kratnem metu kovanca je to $\Omega = \{G, S\}^n$, itd. ⊠

Definicija. Družina $\mathcal{F}$ podmnožic množice Ω je σ-ALGEBRA, če velja:

- $\Omega \in \mathcal{F}$,
- $A \in \mathcal{F} \implies A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{F}$,
- $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$.

Definicija. Naj bo Ω množica možnih izidov, in $\mathcal{F}$ σ-algebra nad Ω. VERJETNOST je preslikava $P : \mathcal{F} \to [0,1]$, za katero velja $P(\Omega) = 1$, in kjer za disjunktne dogodke $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ velja $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$.

Opomba. To sta *aksioma Kolmogorova.*

Vprašanje 2. Kaj je verjetnost?

Izrek (Formula za vključitve in izključitve)**.** *Naj bodo $A_1, \ldots, A_n$ dogodki. Potem velja*

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i).$$

Dokaz. Definirajmo dogodke

$$B_r = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \text{ je vsebovan v natanko } r \text{ množicah } A_i\}.$$

To so disjunktni dogodki, za katere velja $\bigcup_i A_i = \bigcup_r B_r$. Sledi

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{r=1}^{n} P(B_r).$$

Poglejmo si, kolikokrat smo v formuli v izreku šteli vsako izmed množic B_r. Ta množica je vsebovana v preseku do r dogodkov, torej se v prvem členu pojavi r-krat, v drugem $\binom{r}{2}$, v tretjem $\binom{r}{3}$, itd. Vsota je tedaj

$$\binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \binom{r}{3} - \ldots + (-1)^r \binom{r}{r} = 1,$$

kar lahko izpeljemo iz razvoja izraza $0 = (1-1)^r$. □

Vprašanje 3. Povej formulo za izključitve in izključitve. Kaj je ideja dokaza?

Lema. *Naj bodo $A_1, A_2, \ldots$ dogodki. Če je $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$, je verjetnost unije*

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Če namesto tega velja $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$, je

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Dokaz. Druga formula sledi iz De Morganovih pravil, dokažemo samo prvo. Zapišemo

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup (A_3 \backslash (A_1 \cup A_2)) \cup \ldots$$

To so disjunktni dogodki, torej zanje velja

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &= P(A_1) + \sum_{k=2}^{\infty} P(A_k \backslash (A_1 \cup \ldots \cup A_{k-1})) \\ &= \lim_{n\to\infty} (P(A_1) + \sum_{k=2}^{n} P(A_k \backslash (A_1 \cup \ldots \cup A_{k-1}))) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \backslash (A_1 \cup \ldots \cup A_{k-1})) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(A_n). \end{aligned}$$

□

Lema (Prva Borel-Cantorjeva lema)**.** *Naj bodo $A_1, A_2, \ldots$ dogodki, za katere velja $\sum_i P(A_i) < \infty$. Definiramo $\overline{A} = \{\omega \in \Omega \mid \omega$ je vsebovan v neskončno mnogo $A_k\}$. Tedaj velja $P(\overline{A}) = 0$.*

Dokaz. Prepričamo se lahko, da velja $\overline{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$. Te unije so padajoče za $n \to \infty$, zatorej po prejšnji lemi velja

$$P(\overline{A}) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m).$$

Iz dokaza prešnje leme vidimo, da velja sklep

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \implies P(\bigcup_{k=1}^{\infty}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Torej velja

$$P(\overline{A}) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k).$$

Izraz na desni pa je rep konvergenčne vrste, torej je limita enaka 0. □

Vprašanje 4. Povej in dokaži prvo Borel-Cantorjevo lemo.

4.1.1 Pogojna verjetnost in neodvisnost

Definicija. Naj bo B dogodek s $P(B) > 0$. Pogojna verjetnost dogodka A glede na B je

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Vprašanje 5. Kaj je pogojna verjetnost?