Kako se lotiš: Mehanika 1

Patrik Žnidaršič

Prevedeno 7. april 2024

1 Potencialno gibanje

Praktično vse naloge v mehaniki vsebujejo obravnavo gibanja nekega telesa. Da to naredimo, analiziramo sile na telo, in zapišemo drugi Newtonov zakon

$$m\ddot{\vec{x}} = \sum \vec{F}.$$

Ker je sila $\vec{F}$ lahko odvisna od časa t, položaja telesa $\vec{x}$ ter od njegove hitrosti $\dot{\vec{x}}$, dobimo diferencialno enačbo drugega reda. Te rešujemo z običajnimi triki za reševanje diferencialnih enačb.

Če za silo $\vec{F}$ obstaja funkcija $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, da je $\vec{F} = -\vec{\nabla}.U$, pravimo, da je $\vec{F}$ POTENCIALNA ali KONZERVATIVNA sila. Delo take sile je odvisno le od začetnega in končnega položaja točke; velja $W + U = E_0$, kjer je W kinetična energija in E_0 neka konstanta. Pri obravnavi premočrtnega gibanja pod vplivom potencialne sile naredimo dve stvari. Najprej narišemo graf danega potenciala $U(x)$, s katerim naredimo kvalitativno analizo gibanja. Če k grafu narišemo še horizontalno črto za E_0, lahko povemo, kaj se bo zgodilo z delcem na tem energijskem nivoju;

- Če je E_0 popolnoma nad grafom $U(x)$, bo gibanje neomejeno. Tukaj lahko dodatno povemo, če dosežemo točko v neskončnosti v končnem ali neskončnem času, kar je odvisno od grafa $U(x)$; razlika med E_0 in $U(x)$ pove kinetično energijo, ki jo bo delec imel v x.
- Če E_0 seka graf $U(x)$ v dveh točkah, bo gibanje omejeno (in periodično). V tem primeru lahko izračunamo periodo gibanja, kot piše spodaj.
- Če se E_0 dotika grafa v lokalnem maksimumu, bo gibanje v to smer omejeno, ker v točko dotika ne moramo priti v končnem času.
- Če se E_0 dotika grafa v lokalnem minimumu, smo v stabilnem ravnovesju, in se ne bomo nikdar premaknili iz te točke.

Pri reševanju naloge zapišemo vse možnosti za gibanje v odvisnosti od E_0.

Pogosto moramo izračunati tudi periodo nihanja v primeru druge točke, kar lahko naredimo direktno, ali pa z eno od dveh aproksimacij. Recimo, da se gibljemo med točkama $a < b$. Tedaj lahko periodo izračunamo kot

$$T = \sqrt{2m} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{E_0 - U(x)}}.$$

To ni le integral, pač pa celo posplošen integral (ker je $U(x) = E_0$ v krajiščih). Sicer je vedno končen, a ga je pogosto težko (nemogoče) izračunati. Pri računu si lahko pomagamo z integralom

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \pi,$$

kjer pazimo, da sta vrednosti v ulomku enaki mejam integrala.

V posebnem primeru harmoničnega oscilatorja velja $U = \frac{1}{2}kx^2$ za neko konstanto k. Tedaj so vsa gibanja periodična s periodo $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Če je perioda gibanja neodvisna od E_0, kakor je tu, pravimo, da je gibanje IZHRONIČNO. Izkaže se, da je edini potencial, ki je hkrati izohroničen in simetričen glede na svoj minimum, harmonični. Naj bo potencial U sedaj neharmonični. Če v lokalnem minimumu x_0 velja $E_0 - U(x) \ll 1$, se lahko poslužimo harmonične aproksimacije. Pri njej se predstavljamo, da je potencial kvadratna funkcija v tej točki, in izračunamo približek

$$T \doteq 2\pi\sqrt{\frac{m}{U''(x_0)}}.$$

Druga možna aproksimacija je LIBRACIJSKA, kjer prvo zapišemo

$$E_0 - U(x) = (b-x)(x-a)\chi(x),$$

in ocenimo integral po trapezni formuli, tako da dobimo približek

$$T \doteq \pi\sqrt{\frac{m}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\chi(a)}} + \frac{1}{\sqrt{\chi(b)}}\right),$$

kar je natančna ocena v primeru, da je funkcija $(\chi(z))^{-1/2}$ afina.

2 Vezano gibanje

Če je gibanje vezano na neko krivuljo $\tau \to \vec{\gamma}(\tau)$, na telo poleg ostalih sil deluje tudi vezna sila, ki ga drži na krivulji. Za obravnavo takega sistema vedno prvo napišemo drugi Newtonov zakon $\vec{F} + \vec{F}_v = m\vec{a}$, kjer je $\vec{F}_v$ neznana sila vezi. Vektorsko enačbo tokrat razpišemo v ortonormirani bazi krivulje. Bazne vektorje lahko izračunamo kot

$$\vec{e}_t = \frac{\vec{\gamma}'(\tau)}{\|\vec{\gamma}'(\tau)\|}, \qquad \vec{e}_n = \frac{\vec{e}_t'(\tau)}{\|\vec{e}_t'(\tau)\|}, \qquad \vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n.$$

Pri tem ne pozabimo, da

$$\partial_s \vec{e}_t = \kappa \vec{e}_n$$

velja le v primeru, da je s naravni parameter. Parameter κ najlažje izračunamo kot

$$\kappa = \frac{\left\| \vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}'' \right\|}{\left\| \vec{\gamma}'^3 \right\|} = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

če je $\vec{\gamma} : \tau \mapsto (x(\tau), y(\tau))$ regularna parametrizacija krivulje.

Če je krivulja gladka (brez trenja), je pospešek vedno v smeri tangente in normale na krivuljo, komponenta binormale je ničelna; poleg tega je hitrost vedno le v smeri tangente. Vrednost vseh komponent pospeška pravzaprav točno poznamo:

$$a_t = \dot{v}, \qquad a_n = \kappa v^2, \qquad a_b = 0.$$

V primeru gladke krivulje sila vezi deluje le v normalni in binormalni komponenti, in ne prispeva nič k velikosti hitrosti (le k smeri). Iz drugega Newtonovega zakona izrazimo predpis za $\vec{F}_v$. Če iščemo trenutek, ko se telo odklopi od predpisanega tira, bo to ravno trenutek, ko velja $\vec{F}_v = \vec{0}$. Veliko ostalih vprašanj se da rešiti s pomočjo energijskega zakona. Ker je sila vezi vedno pravokotna na smer premika, namreč ne opravi nobenega dela.

3 Gibanje v polju centralne sile

3.1 Polarne koordinate

V polju centralne sile so najbolj smiselne polarne koordinate s središčem v viru sile. Seveda jih lahko uporabljamo tudi drugje, če je to lažje. Bazna vektorja sta v tem primeru

$$\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}, \qquad \vec{e}_\theta = \partial_\theta \vec{e}_r = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}.$$

Za vektorje položaja, hitrosti in pospeška velja

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r\vec{e}_r, \\ \vec{v} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

Hitrost in pospešek imata pri tem RADIALNO in OBODNO komponento. Za vrtilno količino velja

$$\vec{l} = \vec{r} \times m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{k},$$

kjer je $\vec{k}$ normala na ploskev.

3.2 Centralna sila

Sila je centralna, če obstaja pol sile, t.j. taka točka, da sila deluje v smeri zveznice med telesom in polom, njena velikost pa je odvisna le od razdalje telesa do pola. Gibanje v polju centralne sile je ravninsko, vrtilna količina telesa okoli pola je konstantna (in podaja normalo ravnine). Poleg tega so zvezne centralne sile konzervativne, torej je tudi energija konstanta gibanja.

V takem gibanju je smiselno gledati tudi ploščino, ki jo vektor $\vec{r}$ obarva med premikom. Velja namreč, da je ploščinska hitrost konstantna, in jo lahko kdaj uporabimo za merjenje časa. Za DVOJNO PLOŠČINSKO HITROST

$$C_0 = r^2\dot{\theta} = rv_\theta$$

velja $\dot{A} = \frac{1}{2}C_0$ in $l = mC_0$, kjer je $v_\theta = \vec{v} \cdot \vec{e}_\theta$. Pomagamo si lahko tudi z Binetovo formulo; če je $u = 1/r$, velja

$$a_r = -C_0^2 u^2 (u'' + u),$$

kjer je u'' drugi odvod po θ. Dodatno velja

$$u' = -\frac{\dot{r}}{C_0},$$

iz česar lahko izračunamo $\dot{r}$, radialno komponento hitrosti. Če želimo določiti tir poti, lahko uporabljamo bodisi preslikavo $\vec{r}(t)$ bodisi $r(\theta)$; tu je dovolj, da znaš tir narisati. Za trajektorijo pa moraš nujno izračunati $\vec{r}(t)$, bodisi v običajnih bodisi v polarnih koordinatah, torej $(r(t), \theta(t))$.

Vsako gibanje pod vplivom centralne sile je potencialno. Efektivni potencial je funkcija r, ki jo lahko izračunaš tako, da prvo integriraš nasprotno predznačeno silo po r

$$V(r) = -\int F(r)dr,$$

in nato temu prišteješ člen $l^2/2mr^2$:

$$U(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r).$$

Pri tem je treba paziti, da je to potencial le po r; stacionarne točke ne ustrezajo mirovanju, pač pa enakomernemu kroženju okoli centra sil na konstantni razdalji. Poleg tega za kinetično energijo upoštevamo le radialno komponento hitrosti:

$$E_0 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r) = \text{konst.}$$

Če imaš določen potencial, lahko z njim določiš tudi tir poti, s pomočjo

$$\theta - \theta_0 = \operatorname{sgn}(\dot{r})\frac{l}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2\sqrt{E_0 - U(r)}}.$$

4 Relativno gibanje

Celotno poglavje se obrača okoli pretvarjanja med relativnih in absolutnim koordinatnim sistemom. Če so $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ položaj, hitrost in pospešek v absolutnem koordinatnem sistemu, in $\vec{\zeta}, \vec{v}_{\text{rel}}, \vec{a}_{\text{rel}}$ pripadajoče količine v relativnem koordinatnem sistemu, imamo transformacije

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \vec{r}_0 + Q(\vec{r} - \vec{r}_0) \\
\vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\zeta} + \vec{v}_{\text{rel}} \\
\vec{a} &= \vec{a}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\zeta} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{a}_{\text{rel}}
\end{aligned}$$

kjer je $\vec{\omega}$ kotna hitrost, t.j. osni vektor matrike $Q^T \dot{Q}$, količine z indeksom 0 pa so pozicija, hitrost in pospešek središča relativnega koordinatnega sistema glede na absolutnega.

Običajno je obravnava gibanja v relativnem koordinatnem sistemu lažja, zato je smiselno izraziti drugi Newtonov zakon v relativnem sistemu; torej na levi $m\vec{a}_{\text{rel}}$, na desni pa prave in sistemske sile po zgornji enačbi. Pogosto je to relativno gibanje tudi vezano; v tem primeru se preprosto pretvarjaš, da je relativni pospešek vsota tangentnega in normalnega, kakor v poglavju višje. Sistemske sile pri tem obravnavaš kot pač neke sile z nadpovprečno kompliciranim predpisom. Tukaj tudi pogosto dobiš navodilo, da podaš „opis gibanja“ – to je diferencialna enačba, ki določa, kako se nek parameter, ki določa položaj, spreminja, v odvisnosti od sebe. Tako navodilo je dano, ker ni mišljeno, da diferencialno enačbo rešiš.

Najpogostejše drugo vprašanje na tako nalogo je, da poiščeš ravnovesne položaje, in jih klasificiraš. Če gibanje parametriziramo z $\varphi \mapsto \vec{r}(\varphi)$, v ravnovesnem položaju velja $\dot{\varphi} = 0$ in posledično $\ddot{\varphi} = 0$. To lahko vstaviš v diferencialno enačbo od prej, in dobiš pogoj na φ, ki ti točno pove, kje najdeš stacionarne točke. Če uporabimo nastavek $\dot{\varphi} = z(\varphi)$, in odvajamo $\ddot{\varphi} = z'z$, lahko to stvar takoj nazaj integriramo v

$$\frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = \int \ddot{\phi}.$$

Dobljen izraz je prvi integral enačbe, in se ohranja vzdolž neke rešitve. Ker vsebuje $\dot{\varphi}^2$, ga lahko predelamo v nekaj, kar izgleda kot kinetične energija, in preostale člene (razen morda konstanta), ki jih zapakiramo v efektivni potencial. Če si ta potencial narišemo, lahko klasificiramo negibne točke.

Če obravnavamo gibanje v okolici Zemlje pod vplivom gravitacijske sile, lahko postavimo absolutni koordinatni sistem v središče in relativni koordinatni sistem v opazovalca ter zapišemo

$$m\vec{a}_{\text{rel}} = -\frac{mMG}{r_0^2}\vec{e}_3 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_0) - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}},$$

kjer je $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ in $\vec{e}_3$ enotski vektor v smeri od središča Zemlje do opazovalca. Ob predpostavki, da je $\zeta \ll r_0$ ter $\vec{g} = -g\vec{e}_3$ in za oznake

$$\vec{\zeta} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$
$$\vec{v}_{\text{rel}} = \dot{x}\vec{e}_1 + \dot{y}\vec{e}_2 + \dot{z}\vec{e}_3$$
$$\vec{a}_{\text{rel}} = \ddot{x}\vec{e}_1 + \ddot{y}\vec{e}_2 + \ddot{z}\vec{e}_3$$

se to poenostavi v

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y}\sin\varphi$$
$$\ddot{y} = 2\omega(-\dot{z}\cos\varphi - \dot{x}\sin\varphi)$$
$$\ddot{z} = -g + 2\omega\dot{y}\cos\varphi$$

kjer je φ kot med ravnino XY v absolutnem koordinatnem sistemu in opazovalcem.

5 Sistem materialnih točk

V sistemu materialnih točk velja posebna oblika drugega Newtonovega zakona z masnim središčem (težiščem)

$$\sum \vec{F}_{\text{zun.}} = m\vec{a}_*.$$

Če so vse notranje sile centralne (t.j. vzporedne z zveznico med točkama), potem velja izrek o vrtilni količini; odvod vrtilne količine je enak rezultanti navora zunanjih sil

$$\dot{\vec{l}} = \sum \vec{N}_{\text{rel}}.$$

Tako vrtilna količina kot navor sta merjena od nekega pola; izrek deluje, če je pol fiksna točka, ali če je pol masno središče.

6 Togo telo

Pri obravnavi togega telesa je pomembno težišče (masno središče). Velja namreč

$$\sum \vec{F}_{\text{zun.}} = m\vec{a}_*.$$

Pogosto smo v situaciji, kjer so zunanje sile bolj enostavne kot notranje, in lahko hitro ugotovimo, kako se giblje težišče. Gibanje posameznih delov lahko potem izrazimo relativno na težišče, s čimer si marsikaj poenostavimo. Druga komponenta gibanja so Eulerjeve dinamične enačbe

$$\vec{N}_* = J_*\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times J_*\vec{\omega}.$$

Če gibanje poteka v ravnini, velja $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, relevantna je le ena komponenta J_* (spodnja desna). Enačba se poenostavi v

$$N_* = J_*\dot{\omega}.$$

Pri obravnavi vrtenja potrebujemo vztrajnostni tenzor okoli neke točke, ki ga izračunamo z

$$J = \iiint \left|\vec{\zeta}\right|^2 I - \vec{\zeta} \otimes \vec{\zeta} \, dm = \iiint \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} dm$$

za tenzorski produkt $(\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{c} = (\vec{b} \cdot \vec{c}).\vec{a}$. Velja $\vec{l} = J\vec{\omega}$. Zgornji zapis je podan v telesnem koordinatnem sistemu; če moraš tenzor izraziti v prostorskem koordinatnem sistemu, ga moraš ali integrirati v teh koordinatah (kar je težko, ker se stvar verjetno vrti), ali pa rezultat pretvoriš s formulo

$$J' = QJQ^T$$

kjer je Q matrika ki pove, kako se premikajoča baza izraža s fiksno; če je $\vec{w} = w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2 + w_3\vec{e}_3$, je $Q\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Če imamo znan vztrajnostni tenzor okoli nekega pola, ga lahko pretvorimo v vztrajnostni tenzor okoli nekega drugega pola skozi težišče

$$J_0 = J_* + m \left|P_* - P_0\right|^2 I - m(P_* - P_0) \otimes (P_* - P_0).$$

Formuli pravimo Steinerjev izrek. V ravnini ima bolj preprosto obliko $J_0 = J_* + md^2$.

Kinetična energija ima pri togem telesu obliko

$$T = \frac{1}{2} m \left|\vec{v}\right|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot J_* \vec{\omega}.$$

V nalogah nam pogosto zmanjka kakšna enačba gibanja; ponavadi ne poznamo kakšne dodatne sile trenja/vrvi/vezi, za katero pa poznamo zgornjo mejo, ali pa lahko položaj izrazimo s kotom vrtenja. Če trenja ni, pravimo, da telo drsi brez kotaljenja; če je trenja dovolj, se telo kotali brez drsenja, če pa je trenja nekje vmes, pa imamo neko mešanico. Če ne veš, kaj od tega se dogaja, lahko poskusiš vse možnosti, in preveriš, da je rešitev smiselna. Načeloma je sila trenja omejena s produktom nekega koeficienta in normalne sile; lahko je manjša, večja pa ne. Deluje v točki dotika in vedno v nasprotni smeri gibanja te točke.

Včasih je težko ugotoviti, kako se telesni koordinatni sistem izraža s prostorskim. Če je težava v rotacijah, jih lahko razbijemo v več komponent

$$Q = R_1(\vec{e}_1, \theta_1) R_2(\vec{e}_2, \theta_2) \ldots R_m(\vec{e}_m, \theta_m),$$

kjer je rotacijska matrika definirana kot

$$R(\vec{e}, \theta)\vec{x} = \cos\theta I + (1 - \cos\theta)\, \vec{e} \otimes \vec{e} + \sin\theta\, \vec{e} \times \vec{x}.$$

Pri tem zapisu si lahko pomagamo z

$$\vec{e} \times \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}.$$

Če imamo dano rotacijsko matriko R, lahko os rotacije izračunamo kot lastni vektor za lastno vrednost 1, kot pa računamo s sledjo matrike; velja $\mathrm{sl}\, R(\vec{e}, \theta) = 1 + 2\cos\theta$. Če imaš izračunano (ali dano) takšno razbitje Q na več komponent, lahko ta predpis odvajaš in množiš z leve s Q^T. Ob uporabi formule $A(\vec{x} \times \vec{y}) = A\vec{x} \times A\vec{y}$ lahko iz dobljenega predpisa (z nekaj krajšanja) hitro izraziš $\vec{\omega}$.