1 Nihanje

Nihanje na splošno opisujemo z naslednjimi količinami:

- AMPLITUDA, kolikšen je največji odmik nihajoče količine od ravnovesne lege,
- NIHAJNI ČAS t_0, merjen v sekundah, je čas med dvema enakima položajema nihala,
- FREKVENCA ν, merjena v Hz $= s^{-1}$, je število nihajev na sekundo,
- KROŽNA FREKVENCA ω je podobna frekvenci, razlikuje se le za faktor.

Veljajo naslednje zveze:

$$\nu = \frac{1}{t_0} \qquad \omega = 2\pi\nu \qquad t_0 = \frac{2\pi}{\omega}$$

1.1 Osnove

Osnovni postopek za reševanje nalog iz nihanja je naslednji;

1. Analiziraj sile/navore v neravnovesni situaciji in zapiši drugi Newtonov zakon v eni spremenljivki.
2. Enačbo spravi v obliko, prikazano spodaj.
3. Iz zapisa enačbe preberi konstanti β in ω_0, s katerimi je sistem poznan.

Ko analiziramo sile/navore v določeni situaciji ter za njih zapišemo drugi Newtonov zakon (torej $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ ali $\Sigma M = J\alpha$), dobimo enačbo nihanja

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0. \tag{1}$$

Za izpeljavo enačbe moramo včasih uporabiti Taylorjeve približke za razne funkcije, in morda uvedbo nove spremenljivke (če za zadnji člen dobimo $\omega_0^2(y - y_0)$, kjer je y_0 konstanten). Pogosti Taylorjevi približki so naslednji;

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x \qquad \sin x = x$$
$$\tan x = x \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

Konstanti ω_0 ter β preberemo iz zapisa enačbe. Konstanto β imenujemo KOEFICIENT DUŠENJA.

Glede na vrednost izraza $D = 4\beta^2 - 4\omega_0^2$ se lahko nahajamo v treh primerih. Če je $D < 0$, smo v PODKRITIČNEM DUŠENJU. To je najbolj zanimiv primer, ker nihalo nekaj časa dejansko niha. Rešitev je tedaj

$$y = Be^{-\beta t}\sin(\omega t + \delta) \tag{2}$$

za $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$. Parametra B in δ izračunamo iz začetnih pogojev. Ti so običajno dani v nalogi (npr. *nihalo izmaknemo iz ravnovesne lege za* 5 *stopinj in spustimo*). Na splošno izraz *spustimo* pomeni, da ima nekaj začetno hitrost 0. Konstanto ω imenujemo LASTNA KROŽNA FREKVENCA. To je tista frekvenca, ki jo dejansko izmerimo. V primeru nedušenega nihanja je enaka ω_0, v primeru dušenega pa ne.

Če je $D = 0$, primer imenujemo KRITIČNO DUŠENJE. Tedaj je $\omega = 0$, in rešitev je oblike

$$y = (B_1 + B_2 t)e^{-\beta t}.$$

Če je $D < 0$, smo v NADKRITIČNEM DUŠENJU. Ta primer ni posebej zanimiv, rešitev pa je oblike

$$y = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t},$$

kjer sta λ_1, λ_2 rešitvi enačbe $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$ (torej $\lambda_{1,2} = -\beta \pm |\omega|$ za $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 < 0$).

1.2 Rešeni primeri

1.2.1 Vijačna vzmet

Pritrdimo utež z maso m na vijačno vzmet s koeficientom k ter vzmet obesimo na strop. Predpostavimo linearni zakon upora (torej imamo uporno silo $F_u = C\dot{y}$), in po izpeljavi pridemo do

$$\beta = \frac{C}{2m} \qquad\qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

1.2.2 Nitno/matematično nihalo

Utež z maso m pritrdimo na lahko vrvico dolžine l. Predpostavimo, da ni dušenja. Izpeljemo enačbo nihanja

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = 0$$

za $\phi << 1$. Velja torej $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, in je nihajni čas neodvisen od mase uteži.

1.2.3 Fizično nihalo

Obesimo kos krompirja z maso m na palico in ga zanihamo. Predpostavimo, da je nihanje nedušeno. Dobimo

$$\omega_0^2 = \frac{mgl^*}{J_z},$$

kjer je l^* razdalja od osi vrtenja do težišča, J_z pa vztrajnostni moment za vrtenje *okoli osi*.

1.3 Vsiljeno nihanje

Kadar na naš sistem deluje (sinusna) sila vsiljevanja, enačbo nihanja zapišemo v obliki

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0^2 y = A_0 \sin(\omega_v t), \tag{3}$$

kjer je A_0 povezana z amplitudo sile, ω_v pa krožna frekvenca vsiljevanja. Rešitev take enačbe je vsote rešitve homogenega sistema in neke partikularne rešitve;

$$y = y_h + y_p.$$

Za rešitev homogenega sistema uporabimo enačbo (2), za y_p pa nastavek

$$B_p \sin(\omega_v t - \delta_p).$$

Velja

$$\tan\delta_p = \frac{2\omega_v\beta}{\omega_0^2 - \omega_v^2}, \qquad B_p = \frac{A_0}{\omega_v}\frac{1}{\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega_v^2)^2}{\omega_v^2} + 4\beta^2}}.$$

Uvedemo IMPEDANCO $z \in \mathbb{C}$, ki združi ti rešitvi:

$$z = \frac{B_p\omega_v}{A_0}e^{i\delta_p}.$$

Amplituda partikularne rešitve B_p je funkcija ω_v, zato je naravno vprašanje, pri kakšnem ω_v je B_p maksimalen. Odgovor temu je

$$\omega_m = \omega_0\sqrt{1 - \frac{2\beta^2}{\omega_0^2}}.$$

Če narišemo odvisnost B_p od ω_v, dobimo resonančno krivuljo. V primeru šibkega dušenja je optimalen ω_m kar ω_0, sicer pa je ω_m nekaj manjši.

1.3.1 Greenove funkcije

Če imamo nihalo z maso m ter lastno frekvenco ω, ki ga vzbujamo s silo $F(t)$, lahko odmik nihala izračunamo s pomočjo metode Greenovih funkcij;

$$x(t) = \int_0^t \frac{F(\tau)}{m\omega}e^{-\beta(t-\tau)}\sin(\omega t - \omega\tau)d\tau.$$

1.4 Sklopljeno nihanje

Sklopljeno nihanje se pojavi, ko imamo dve povezani nihali. Nalog se lotimo tako, da zapišemo drugi Newtonov zakon za vsako nihalo posebej in prevedemo dobljene enačbe v obliko

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \omega_2^2 (x_1 - x_2) = 0 \tag{4}$$
$$\ddot{x}_2 + \omega_1^2 x_2 - \omega_2^2 (x_1 - x_2) = 0 \tag{5}$$

S substitucijama $x_a = x_1 + x_2$ in $x_b = x_1 - x_2$ lahko sistem prevedemo v dve neodvisni diferencialni enačbi, ki ju rešimo. Rešitvi sta oblike

$$x_1 = C_1 \sin(\omega_a t + \delta_a) + C_2 \sin(\omega_b t + \delta_b)$$
$$x_2 = C_1 \sin(\omega_a t + \delta_a) - C_2 \sin(\omega_b t + \delta_b)$$

za $\omega_a^2 = \omega_1^2$ in $\omega_b^2 = \omega_1^2 + 2\omega_2^2$.

Ekvivalentno (in lažje za račun):

$$x_1 = A \sin(\omega_a t) + B \cos(\omega_a t) - C \sin(\omega_b t) - D \cos(\omega_b t)$$
$$x_2 = A \sin(\omega_a t) + B \cos(\omega_a t) + C \sin(\omega_b t) + D \cos(\omega_b t)$$

Parametre v enačbah izračunamo iz začetnih pogojev.

2 Valovanje

Pri reševanju nalog iz valovanja običajno ne potrebuješ izpeljati enačbe; če pa jo, pa je oblike

$$\ddot{u} = c^2 \partial_{x^2} u, \tag{6}$$

oziroma v treh dimenzijah

$$\ddot{u} = c^2 \nabla^2 u. \tag{7}$$

Konstanto c imenujemo HITROST VALOVANJA. To je dejansko hitrost širjenja motnje v snovi; ni pa to nujno enako hitrosti premikanja snovi. Rešitev te enačbe je v splošnem komplicirana, za enodimenzionalni primer pa rešitve poznamo; naj bosta $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Potem je $u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ rešitev enačbe (6). Vse vrednosti $u(x,t)$ lahko zapišemo kot $u(0,\ldots)$ ali $u(\ldots,0)$, zato je valovanje natanko določeno z začetnimi pogoji. Če imamo dana začetna pogoja $u(x,0) = A(x)$ ter $\partial_t u(0,t) = B(t)$, lahko splošno rešitev zapišemo kot

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(A(x - ct) + A(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} B(\chi) d\chi.$$

Poznamo dve vrsti valovanja; longitudinalno in transverzalno. Zvok je primer longitudinalnega valovanja, primer transverzalnega pa valovanje po vrvi, ki jo premetavaš levo in desno.

2.1 Robni pogoji

Ker snov običajno ni neskončna, moramo predpostaviti neke robne pogoje. Na modelu prožne palice poznamo dva možna pogoja:

- Če je konec palice vpet na steno v krajišču x, je $u(x,t) = 0$.
- Če je konec palice v krajišču x prost, je $\partial_x u(x,t) = 0$.

2.2 Hitrost razširjanja motnje

Hitrosti razširjanja motnje po raznih medijih so znane:

Medij	Hitrost valovanja	Opombe
Prožna palica	$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	E: prožnostni modul, ρ: gostota
Struna	$c = \sqrt{\frac{F}{\rho S}}$	F: sila, s katero napenjamo, ρ: gostota, S: prečni presek
Vijačna vzmet	$c = l\sqrt{\frac{k}{m}}$	l: dolžina, k: koeficient vzmeti, m: masa vzmeti
Kapljevina	$c = \sqrt{\frac{1}{\chi_S \rho}}$	χ_S: adiabatska stisljivost, ρ: gostota
Plin	$c = \sqrt{\frac{\kappa R T}{M}}$	M: molska masa

2.3 Sinusno valovanje

Običajno valovanja niso poljubna, temveč sinusna. Če vzamemo robne pogoje $u(x = 0, t) = u_0 \sin(-\omega t + \delta)$, bo naše valovanje izgledalo kot premikajoč se sinus (ker $u(x,t) = u(0, t - x/c)$). Tedaj izpeljemo

$$u(x,t) = u_0 \sin(kx - \omega t + \delta),$$

kjer je $k = \frac{\omega}{c}$ VALOVNO ŠTEVILO (v m^{-1}). Za $\omega = 2\pi\nu$ in $\lambda = \frac{\nu}{c}$ (VALOVNA DOLŽINA) velja $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

2.3.1 Stojno sinusno valovanje

Recimo, da imamo prožno palico, ki je prosta na obeh koncih. Po palici potuje sinusno valovanje $u(x,t) = u_0 \sin(kx + \omega t + \delta_1) + u_0 \sin(kx - \omega t + \delta_2)$. Ker je palica na obeh koncih prosta, velja $\partial_x u(x,t) = 0$ za $x = 0$ ter $x = l$ (l je dolžina palice). Iz teh enačb izpeljemo

$$k = k_n = \frac{n\pi}{l},$$

torej imamo le nekaj možnosti, kakšna valovanja sploh lahko potujejo po taki palici. Izpeljemo še

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}, \qquad \nu_n = \frac{nc}{2l}.$$

Frekvencam, ki so večkratnimi $\frac{c}{2l}$, pravimo LASTNE FREKVENCE. Pri $n = 1$ dobimo OSNOVNO LASTNO FREKVENCO, za višje n pa višje lastne frekvence. Pri takih frekvencah obstajajo točke x, pri katerih je val konstantno 0. To so točke $\cos k_n x = 0$, torej $x = \frac{ml}{2n}$ za $m \in \mathbb{Z}$.

2.3.2 Energija sinusnega valovanja

V modelu prožne palice lahko opazujemo kinetično in prožnostno energijo posamičnih delcev, kar združimo v eno energijo sinusnega valovanja:

$$w = w_0 \cos^2(kx - \omega t + \delta), \qquad w_0 = u_0^2 \omega^2 \rho,$$

za amplitudo valovanja u_0, krožno frekvenco ω in gostoto snovi ρ. To je funkcija časa, zato je smiselno gledati le njeno povprečno vrednost

$$\bar{w} = \frac{1}{2} u_0^2 \omega^2 \rho.$$

Če je S prečni presek snovi, pravokoten na smer razširjanja valovanja, lahko uvedemo dve novi količini

$$P = cS\bar{w}, \qquad j = c\bar{w}.$$

Količino P imenujemo ENERGIJSKI TOK VALOVANJA in jo merimo v W, količino j pa imenujemo GOSTOTA ENERGIJSKEGA TOKA.

2.3.3 Zvok

Pri zvoku količini j pravimo JAKOST. Za $j = 10^{-12}\, W/m^2$ zvok še ravno slišimo, $j = 1\, W/m^2$ pa je meja bolečine. Druga nova količina je GLASNOST, ki je definirana kot

$$\text{glasnost} = 10 \cdot \log_{10} \frac{j}{j_0}$$

za $j_0 = 10^{-12}\ W/m^2$. Glasnost merimo v dB.

Za zvok je smiselno pogledati tlačno razliko (od ravnovesnega tlaka) kot funkcijo časa; dobimo

$$\Delta p = -\frac{\omega u_0}{\chi c} \cos(kx - \omega t + \delta),$$

kjer χ označuje stisljivost plina;

$$\chi = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p} > 0.$$

Za izotermno stiskanje velja $\chi = \frac{1}{p}$, za adiabatno pa $\chi = \frac{1}{p\kappa}$.

Če smo v treh dimenzijah, je ena možna rešitev enačbe valovanja tudi

$$\vec{u}(\vec{r},t) = \frac{u_0}{|\vec{r}|^2}\sin(k\,|\vec{r}| - \omega t + \delta).\vec{r},$$

ta rešitev velja le za $r >> \lambda$, imenujemo pa jo KROGELNO VALOVANJE.

2.3.4 Dopplerjev pojav

Če se oddajnik ali sprejemnik premikata, bo sprejemnik slišal drugačno frekvenco, kot jo oddajnik oddaja. Popravek izračunamo z

$$\nu_s = \frac{c + v + v_s}{c + v - v_o}\nu_o,$$

kjer indeks s pomeni sprejemnika, o oddajnika, v pa je hitrost vetra (desna smer je vedno pozitivna). Enačba deluje le, če se oddajnik in sprejemnik gibata drug proti drugemu (oz. če je eden na miru) in če je veter vzporeden na te premike. V nasprotnem primeru moramo vzeti tisto komponento hitrosti, ki je vzporedna z vektorjem med oddajnikom in sprejemnikom.