

Kako se lotiš: Mehanika 1

Patrik Žnidaršič

Prevedeno 2. januar 2024

1 Potencialno gibanje

Praktično vse naloge v mehaniki vsebujejo obravnavo gibanja nekega telesa. Da to naredimo, analiziramo sile na telo, in zapišemo drugi Newtonov zakon

$$m\ddot{\vec{x}} = \sum \vec{F}.$$

Ker je sila \vec{F} lahko odvisna od časa t , položaja telesa \vec{x} ter od njegove hitrosti $\dot{\vec{x}}$, dobimo diferencialno enačbo drugega reda. Te rešujemo z običajnimi triki za reševanje diferencialnih enačb.

Če za silo \vec{F} obstaja funkcija $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, da je $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$, pravimo, da je \vec{F} POTENCIALNA ali KONZERVATIVNA sila. Delo take sile je odvisno le od začetnega in končnega položaja točke; velja $W + U = E_0$, kjer je W kinetična energija in E_0 neka konstanta. Pri obravnavi premočrtnega gibanja pod vplivom potencialne sile naredimo dve stvari. Najprej narišemo graf danega potenciala $U(x)$, s katerim naredimo kvalitativno analizo gibanja. Če k grafu narišemo še horizontalno črto za E_0 , lahko povemo, kaj se bo zgodilo z delcem na tem energijskem nivoju;

- Če je E_0 popolnoma nad grafom $U(x)$, bo gibanje neomejeno. Tukaj lahko dodatno povemo, če dosežemo točko v neskončnosti v končnem ali neskončnem času, kar je odvisno od grafa $U(x)$; razlika med E_0 in $U(x)$ pove kinetično energijo, ki jo bo delec imel v x .
- Če E_0 seka graf $U(x)$ v dveh točkah, bo gibanje omejeno (in periodično). V tem primeru lahko izračunamo periodo gibanja, kot piše spodaj.
- Če se E_0 dotika grafa v lokalnem maksimumu, bo gibanje v to smer omejeno, ker v točko dotika ne moramo priti v končnem času.
- Če se E_0 dotika grafa v lokalnem minimumu, smo v stabilnem ravnovesju, in se ne bomo nikdar premaknili iz te točke.

Pri reševanju naloge zapišemo vse možnosti za gibanje v odvisnosti od E_0 .

Pogosto moramo izračunati tudi periodo nihanja v primeru druge točke, kar lahko naredimo direktno, ali pa z eno od dveh aproksimacij. Recimo, da se gibljemo med točkama $a < b$. Tedaj lahko periodo izračunamo kot

$$T = \sqrt{2m} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{E_0 - U(x)}}.$$

To ni le integral, pač pa celo posplošen integral (ker je $U(x) = E_0$ v krajiščih). Sicer je vedno končen, a ga je pogosto težko (nemogoče) izračunati. Pri računu si lahko pomagamo z integralom

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \pi,$$

kjer pazimo, da sta vrednosti v ulomku enaki mejam integrala.

V posebnem primeru harmoničnega oscilatorja velja $U = \frac{1}{2}kx^2$ za neko konstanto k . Tedaj so vsa gibanja periodična s periodo $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Če je perioda gibanja neodvisna od E_0 , kakor je tu, pravimo, da je gibanje IZHRONIČNO. Izkaže se, da je edini potencial, ki je hkrati izohroničen in simetričen glede na svoj minimum, harmonični. Naj bo potencial U sedaj neharmonični. Če v lokalnem minimumu x_0 velja $E_0 - U(x) \ll 1$, se lahko poslužimo harmonične aproksimacije. Pri njej se predstavljamo, da je potencial kvadratna funkcija v tej točki, in izračunamo približek

$$T \doteq 2\pi\sqrt{\frac{m}{U''(x_0)}}.$$

Druga možna aproksimacija je LIBRACIJSKA, kjer prvo zapišemo

$$E_0 - U(x) = (b-x)(x-a)\chi(x),$$

in ocenimo integral po trapezni formuli, tako da dobimo približek

$$T \doteq \pi\sqrt{\frac{m}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{\chi(a)}} + \frac{1}{\sqrt{\chi(b)}} \right),$$

kar je natančna ocena v primeru, da je funkcija $(\chi(z))^{-1/2}$ afina.

2 Vezano gibanje

Če je gibanje vezano na neko krivuljo $\tau \rightarrow \vec{\gamma}(\tau)$, na telo poleg ostalih sil deluje tudi vezna sila, ki ga drži na krivulji. Za obravnavo takega sistema vedno prvo napišemo drugi Newtonov zakon $\vec{F} + \vec{F}_v = m\vec{a}$, kjer je \vec{F}_v neznana sila vezi. Vektorsko enačbo tokrat razpišemo v ortonormirani bazi krivulje. Bazne vektorje lahko izračunamo kot

$$\vec{e}_t = \frac{\vec{\gamma}'(\tau)}{\|\vec{\gamma}'(\tau)\|}, \quad \vec{e}_n = \frac{\vec{e}_t'(\tau)}{\|\vec{e}_t'(\tau)\|}, \quad \vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n.$$

Pri tem ne pozabimo, da

$$\partial_s \vec{e}_t = \kappa \vec{e}_n$$

velja le v primeru, da je s naravni parameter. Parameter κ najlažje izračunamo kot

$$\kappa = \frac{\|\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}''\|}{\|\vec{\gamma}'\|^3} = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

če je $\vec{\gamma} : \tau \mapsto (x(\tau), y(\tau))$ regularna parametrizacija krivulje.

Če je krivulja gladka (brez trenja), je pospešek vedno v smeri tangente in normale na krivuljo, komponenta binormale je ničelna; poleg tega je hitrost vedno le v smeri tangente. Vrednost vseh komponent pospeška pravzaprav točno poznamo:

$$a_t = \dot{v}, \quad a_n = \kappa v^2, \quad a_b = 0.$$

V primeru gladke krivulje sila vezi deluje le v normalni in binormalni komponenti, in ne prispeva nič k velikosti hitrosti (le k smeri). Iz drugega Newtonovega zakona izrazimo predpis za \vec{F}_v . Če iščemo trenutek, ko se telo odklopi od predpisanega tira, bo to ravno trenutek, ko velja $\vec{F}_v = \vec{0}$. Veliko ostalih vprašanj se da rešiti s pomočjo energijskega zakona. Ker je sila vezi vedno pravokotna na smer premika, namreč ne opravi nobenega dela.

3 Gibanje v polju centralne sile

3.1 Polarne koordinate

V polju centralne sile so najbolj smiselne polarne koordinate s središčem v viru sile. Seveda jih lahko uporabljamo tudi drugje, če je to lažje. Bazna vektorja sta v tem primeru

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}, \quad \vec{e}_\theta = \partial_\theta \vec{e}_r = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}.$$

Za vektorje položaja, hitrosti in pospeška velja

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r \vec{e}_r, \\ \vec{v} &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta, \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) \vec{e}_\theta. \end{aligned}$$

Hitrost in pospešek imata pri tem RADIALNO in OBODNO komponento. Za vrtilno količino velja

$$\vec{l} = \vec{r} \times m \vec{v} = m r^2 \dot{\theta} \vec{k},$$

kjer je \vec{k} normala na ploskev.

3.2 Centralna sila

Sila je centralna, če obstaja pol sile, t.j. taka točka, da sila deluje v smeri zveznice med telesom in polom, njena velikost pa je odvisna le od razdalje telesa do pola. Gibanje v polju centralne sile je ravninsko, vrtilna količina telesa okoli pola je konstantna (in podaja normalo ravnine). Poleg tega so zvezne centralne sile konzervativne, torej je tudi energija konstanta gibanja.

V takem gibanju je smiselno gledati tudi ploščino, ki jo vektor \vec{r} obarva med premikom. Velja namreč, da je ploščinska hitrost konstantna, in jo lahko kdaj uporabimo za merjenje časa. Za DVOJNO PLOŠČINSKO HITROST

$$C_0 = r^2 \dot{\theta} = r v_\theta$$

velja $\dot{A} = \frac{1}{2} C_0$ in $l = m C_0$, kjer je $v_\theta = \vec{v} \cdot \vec{e}_\theta$. Pomagamo si lahko tudi z Binetovo formulo; če je $u = 1/r$, velja

$$a_r = -C_0^2 u^2 (u'' + u),$$

kjer je u'' drugi odvod po θ . Dodatno velja

$$u' = -\frac{\dot{r}}{C_0},$$

iz česar lahko izračunamo \dot{r} , radialno komponento hitrosti. Če želimo določiti tir poti, lahko uporabljamo bodisi preslikavo $\vec{r}(t)$ bodisi $r(\theta)$; tu je dovolj, da znaš tir narisati. Za trajektorijo pa moraš nujno izračunati $\vec{r}(t)$, bodisi v običajnih bodisi v polarnih koordinatah, torej $(r(t), \theta(t))$.

Vsako gibanje pod vplivom centralne sile je potencialno. Efektivni potencial je funkcija r , ki jo lahko izračunaš tako, da prvo integriraš nasprotno predznačeno silo po r

$$V(r) = - \int F(r) dr,$$

in nato temu prišteješ člen $l^2/2mr^2$:

$$U(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r).$$

Pri tem je treba paziti, da je to potencial le po r ; stacionarne točke ne ustrezajo mirovanju, pač pa enakomernemu kroženju okoli centra sil na konstantni razdalji. Poleg tega za kinetično energijo upoštevamo le radialno komponento hitrosti:

$$E_0 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U(r) = \text{konst.}$$

Če imaš določen potencial, lahko z njim določiš tudi tir poti, s pomočjo

$$\theta - \theta_0 = \text{sgn}(\dot{r}) \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{E_0 - U(r)}}.$$

4 Relativno gibanje

Celotno poglavje se obrača okoli pretvarjanja med relativnih in absolutnim koordinatnim sistemom. Če so $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ položaj, hitrost in pospešek v absolutnem koordinatnem sistemu, in $\vec{\zeta}, \vec{v}_{\text{rel}}, \vec{a}_{\text{rel}}$ pripadajoče količine v relativnem koordinatnem sistemu, imamo transformacije

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_0 + Q(\vec{r} - \vec{r}_0) \\ \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\zeta} + \vec{v}_{\text{rel}} \\ \vec{a} &= \vec{a}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\zeta} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{a}_{\text{rel}}\end{aligned}$$

kjer je $\vec{\omega}$ kotna hitrost, t.j. osni vektor matrike $Q^T \dot{Q}$, količine z indeksom 0 pa so pozicija, hitrost in pospešek središča relativnega koordinatnega sistema glede na absolutnega.

Če obravnavamo gibanje v okolici Zemlje pod vplivom gravitacijske sile, lahko postavimo absolutni koordinatni sistem v središče in relativni koordinatni sistem v opazovalca ter zapišemo

$$m\vec{a}_{\text{rel}} = -\frac{mMG}{r_0^2}\vec{e}_3 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_0) - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}},$$

kjer je $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ in \vec{e}_3 enotski vektor v smeri od središča Zemlje do opazovalca. Ob predpostavki, da je $\zeta \ll r_0$ ter $\vec{g} = -g\vec{e}_3$ in za oznake

$$\begin{aligned}\vec{\zeta} &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \\ \vec{v}_{\text{rel}} &= \dot{x}\vec{e}_1 + \dot{y}\vec{e}_2 + \dot{z}\vec{e}_3 \\ \vec{a}_{\text{rel}} &= \ddot{x}\vec{e}_1 + \ddot{y}\vec{e}_2 + \ddot{z}\vec{e}_3\end{aligned}$$

se to poenostavi v

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\omega\dot{y} \sin \varphi \\ \ddot{y} &= 2\omega(-\dot{z} \cos \varphi - \dot{x} \sin \varphi) \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega\dot{y} \cos \varphi\end{aligned}$$

kjer je φ kot med ravnino XY v absolutnem koordinatnem sistemu in opazovalcem.

5 Togo telo

Pri obravnavi togega telesa je pomembno težišče (masno središče). Velja namreč

$$\sum \vec{F}_{\text{zun.}} = m\vec{a}_*.$$

Pogosto smo v situaciji, kjer so zunanje sile bolj enostavne kot notranje, in lahko hitro ugotovimo, kako se giblje težišče. Gibanje posameznih delov lahko potem izrazimo relativno na težišče, s čimer si marsikaj poenostavimo.

Pri obravnavi vrtenja potrebujemo vztrajnostni tenzor okoli neke točke, ki ga izračunamo
z

$$J_0 = \iiint \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} dm$$