

## Homework 4, Gaussian-Elimination and QR-decomposition for Least Square Fitting

資工 3B 00957144 蔣佳純

日期:2022/12/6

### 1. 產生取樣點及建造 A 矩陣

Create sample points:

Xi:

2.0000	2.1000	2.2000	2.3000	2.4000	2.5000	2.6000
2.7000	2.8000	2.9000	3.0000	3.1000	3.2000	3.3000
3.4000	3.5000	3.6000	3.7000	3.8000	3.9000	4.0000

Yi:

255.0000	342.9351	456.4656	601.6230	785.5380	1016.5859	1304.5442
1660.7620	2098.3444	2632.3495	3280.0000	4060.9097	4997.3256	6114.3853
7440.3913	9007.1016	10850.0381	13008.8128	15527.4719	18454.8595	21845.0000

Build matrix:

A:

1.0000	2.0000	4.0000	8.0000	16.0000	32.0000	64.0000	128.0000
1.0000	2.1000	4.4100	9.2610	19.4481	40.8410	85.7661	180.1089
...							
1.0000	3.9000	15.2100	59.3190	231.3441	902.2420	3518.7438	13723.1007
1.0000	4.0000	16.0000	64.0000	256.0000	1024.0000	4096.0000	16384.0000

Y:

255.0000	342.9351	456.4656	601.6230	785.5380	1016.5859	1304.5442
1660.7620	2098.3444	2632.3495	3280.0000	4060.9097	4997.3256	6114.3853
7440.3913	9007.1016	10850.0381	13008.8128	15527.4719	18454.8595	21845.0000

### 2. 利用 precondition 產生新矩陣

Precondition:

B:

21.0000	63.0000	196.7000	636.3000	2121.8666	7257.9990	25352.4478	90091.1300
63.0000	196.7000	636.3000	2121.8666	7257.9990	25352.4478	90091.1300	324681.4927
...							

25352.4478	90091.1300	324681.4927	1183773.1788	4357728.2388	16171711.9139	60425303.9904	227101031.2369
90091.1300	324681.4927	1183773.1788	4357728.2388	16171711.9139	60425303.9904	227101031.2369	857847673.3188

d:

125740.4434	450400.9362	1634111.1150	5991642.6537	22162718.2676	82585900.3914	309679673.6293	1167501994.5002
-------------	-------------	--------------	--------------	---------------	---------------	----------------	-----------------

### 3. method 1: 使用高斯消去法解新系統

Gauss elimination:

B:

90091.1300	324681.4927	1183773.1788	4357728.2388	16171711.9139	60425303.9904	227101031.2369	857847673.3188
0.0000	-1277.1390	-8442.8418	-42530.4288	-193135.7836	-832507.7651	-3482952.4761	-14304958.0578
0.0000	0.0000	43.5686	411.6742	2631.5298	14209.6628	69927.5027	324906.3170
0.0000	0.0000	0.0000	1.5299	18.9298	148.1753	938.6358	5259.5789
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0946	1.4408	13.3077	96.5570

-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0019	0.0345	0.3686
0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0013
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000

d:

1167501994.5002	-18865804.4922	412130.2551	6366.8497	111.4001	0.4050	0.0014	-0.0000
-----------------	----------------	-------------	-----------	----------	--------	--------	---------

Back substitute:

c:

-2.1182	8.6919	-7.0501	5.6341	-0.5850	1.3222	0.9640	1.0017
---------	--------	---------	--------	---------	--------	--------	--------

1 norm error is: 25.43924104

4. method 2: 使用 QR 分解解新系統

Householder vector:

93918.7484	63.0000	196.7000	636.3000	2121.8666	7257.9990	25352.4478	90091.1300
------------	---------	----------	----------	-----------	-----------	------------	------------

B:

-93897.7484	-337983.0863	-1231037.9276	-4528006.4949	-16792207.1980	-62708028.2442	-235566479.0509	-889456283.2749
0.0000	-30.0588	-189.6031	-915.9134	-4007.5124	-16716.5011	-67942.1235	-272019.6188
0.0000	-71.6914	-456.7863	-2226.6252	-9820.9822	-41257.4773	-168733.4433	-679260.2916
0.0000	-168.3974	-1083.6219	-5329.1302	-23690.5351	-100214.8916	-412362.6819	-1668952.9876
0.0000	-379.3334	-2464.3159	-12222.5832	-54745.6877	-233126.7842	-964898.4655	-3925433.4626
0.0000	-771.6030	-5058.1330	-25290.0031	-114085.0825	-488881.1166	-2034719.7710	-8318443.1637
0.0000	-1161.1056	-7678.2560	-38689.6629	-175736.6783	-757666.3813	-3170407.3202	-13023314.6038
0.0000	412.3302	2716.9919	13648.3444	61828.5488	265952.4198	1110644.0877	4554381.0172

d:

-1210713923.0252	-361821.3311	-901827.2973	-2211802.2457	-5193270.6324	-10987248.8728	-17174654.0081	6009583.7400
------------------	--------------	--------------	---------------	---------------	----------------	----------------	--------------

...

Householder vector:

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

B:

-93897.7484	-337983.0863	-1231037.9276	-4528006.4949	-16792207.1980	-62708028.2442	-235566479.0509	-889456283.2749
0.0000	1513.8851	9970.4774	50060.1100	226669.6656	974566.6636	4068157.7589	16675542.9545
0.0000	-0.0000	-60.3589	-569.9879	-3641.5702	-19654.1991	-96678.9916	-449028.9748
0.0000	-0.0000	0.0000	2.4293	29.9366	233.4332	1473.3409	8227.4710
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0833	1.2682	11.7036	84.8543
0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0021	-0.0387	-0.4127
0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0008
0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000

d:

-1210713923.0252	22006481.5151	-569634.0825	9966.6110	97.9094	-0.4535	0.0008	-0.0000
------------------	---------------	--------------	-----------	---------	---------	--------	---------

Back substitute:

c:

87.0862	-210.9519	222.4065	-126.2181	44.4319	-7.8117	1.9840	0.9533
---------	-----------	----------	-----------	---------	---------	--------	--------

1 norm error is: 699.93690135

5. method 3: 使用 QR 分解解原系統

Householder vector:

5.5826	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

B:

-4. 5826	-13. 7477	-42. 9235	-138. 8520	-463. 0293	-1583. 8252	-5532. 3577	-19659. 4963
0. 0000	-0. 7209	-3. 9953	-17. 0444	-66. 3598	-248. 5998	-916. 7026	-3364. 4013
0. 0000	-0. 6209	-3. 5653	-15. 6574	-62. 3823	-237. 9045	-889. 0888	-3295. 0744
...							
0. 0000	1. 0791	6. 8047	33. 0136	145. 5362	612. 8012	2516. 2750	10178. 5905
0. 0000	1. 1791	7. 5947	37. 6946	170. 1921	734. 5592	3093. 5313	12839. 4898

d:

-27438.8143	-4617.8242	-4504.2937	-4359.1363	-4175.2213	-3944.1734	-3656.2151
-3299.9973	-2862.4149	-2328.4098	-1680.7593	-899.8496	36.5663	1153.6260
2479.6320	4046.3423	5889.2788	8048.0535	10566.7126	13494.1002	16884.2407

...

Householder vector:

0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0696	0.0201	0.0157	0.0065	-0.0031	-0.0082	-0.0059
0.0035	0.0160	0.0246	0.0222	0.0073	-0.0079	0.0141

B:

[illegible]

d:

-27438.8143	26372.0994	-11527.0338	-2944.0721	462.6135	44.0665	-2.3338
-0.0526	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	-0.0000
0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0000

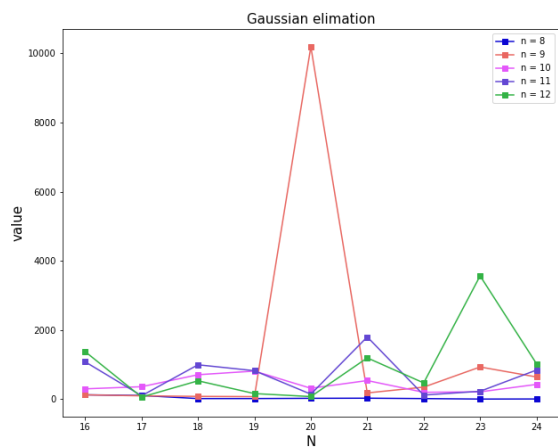
Back substitute:

C:

1.0000      1.0000      1.0000      1.0000      1.0000      1.0000      1.0000      1.0000

```
1 norm error is: 0.00000015
```

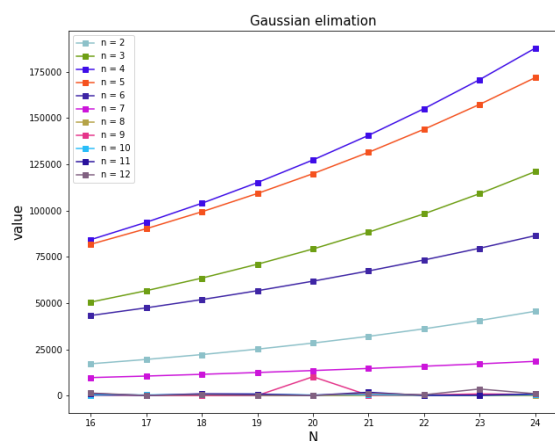
## 6. method 1: 使用高斯消去法解新系統分析(n:degree,N:number of sample point)



此圖顯示：

在  $n=8\sim 12$  時，相同  $N$  但  $n$  變大時誤差並沒有什麼改變。

在  $n=9, N=20$  時誤差特別大。

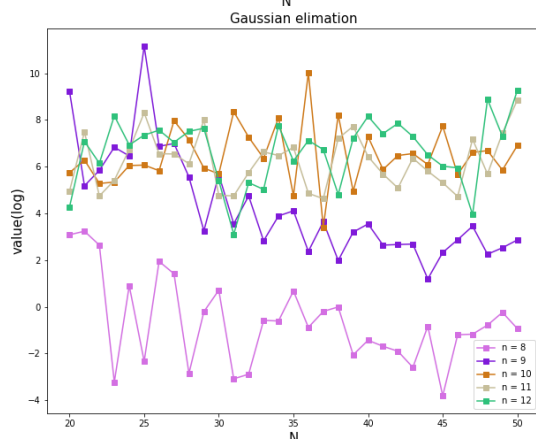


此圖顯示：

$n$  從 2 到 7 的誤差趨勢是慢慢往上，然後到了  $n=4$  為最高，接著又往下。

而  $n>7$  的誤差則較小。

對  $n=2\sim n=7$  之間， $N$  越大誤差會越大，但對  $n>7$  則看起來無關聯。



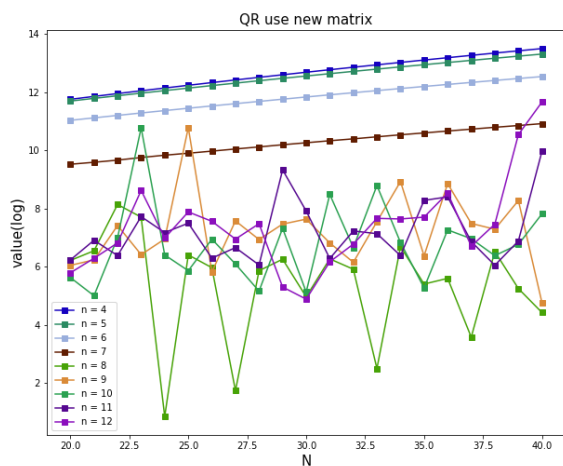
此圖顯示：

讓  $N$  的範圍更大，則  $n=8$  和  $n=9$  都會在  $N$  變大之後誤差有一點下降的趨勢。

$n=8$  的誤差最小， $n=9$  的誤差次小，但其他  $n$  的誤差則沒有明顯的大小關係。

(縱坐標誤差為取 log 後的值)

## 7. method 2: 使用 QR 分解解新系統分析



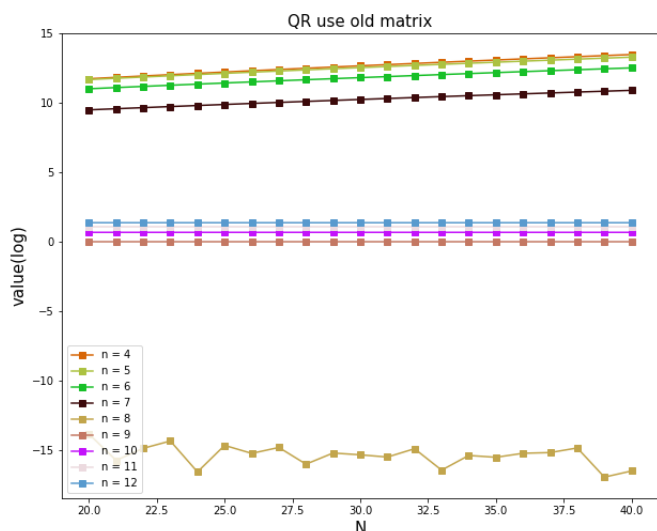
此圖顯示：

$n=4\sim n=7$  時， $N$  越大誤差會越大，但對  $n>7$  則看起來無關聯。

$n=4\sim n=7$  時，誤差逐漸變小，而更大的  $n$  值看起來沒有規律。

(縱坐標誤差為取 log 後的值)

## 8. method 3: 使用 QR 分解解原系統分析



此圖顯示：

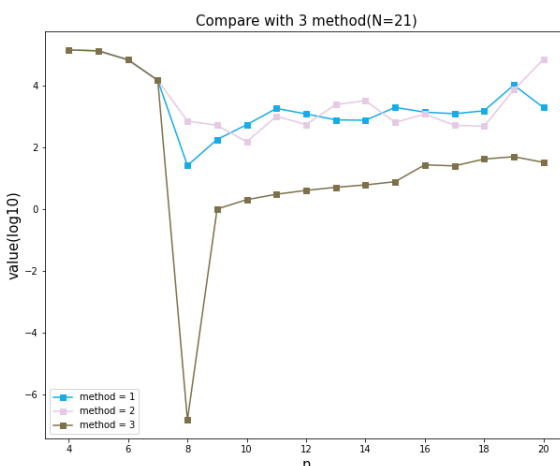
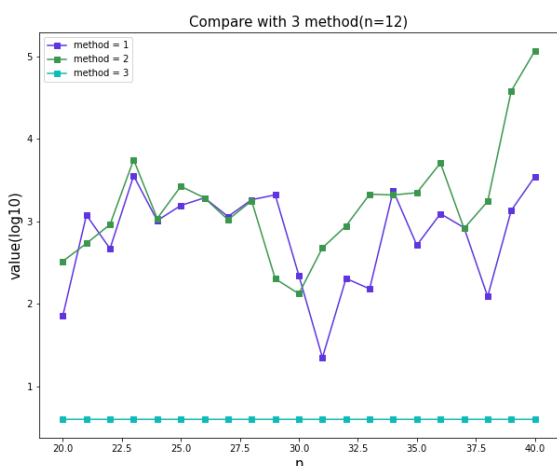
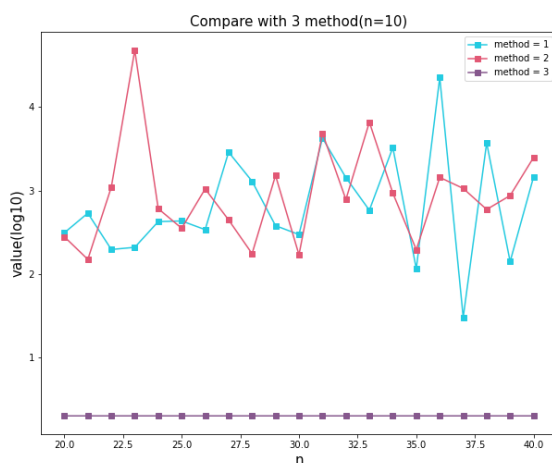
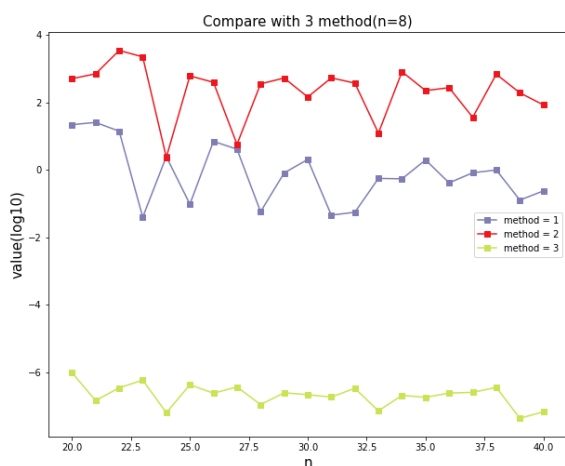
n=4~n=7 時，N 越大誤差會越大，而 n=8~n=12 則看起來無關聯。

誤差大小為： $n_4 > n_5 > n_6 > n_7 > n_{12} > n_{11} > n_{10} > n_9 > n_8$

由此圖也可以看出 method 3 比前兩種作法更穩定。

(縱坐標誤差為取 log 後的值)

## 9. 3 種 method 比較



由圖可知，第三種方法的誤差會是最小的，而第一種方法和第二種方法的誤差差不多。

N=12 和 N=21 時，誤差有隨著 n 變大而變高的趨勢。

如果範圍很大，有可能看不出差別，因此特別將某些地方放大觀察，為了讓觀察更方便，我使用 log 讓誤差值更明顯。

## 10. 在 y 上添加一些小誤差並觀察結果

use method 1:

**minimum: 0.058428523610 maximum: 233.535764600406 average: 49.902783255612**

**minimum: 0.038232966822 maximum: 194.469115719082 average: 59.831320518784**

**minimum: 0.031667929025 maximum: 252.586505390243 average: 52.916316785002**

have 41 perturbations.

y\_p:

```
0.0000000000000000 0.0000000000000000 0.0000016400000000 0.0000000000000000 0.0000000000000000 0.0000000000000000 0.0000000000000000
0.0000000000000000 0.0000000000000000 0.0000000000000000 0.0000000000000000 0.0000000000000000 0.0000000000000000 0.0000000000000000
0.0000000000000000 0.0000000000000000 0.0000000000000000 0.0000000000000000 0.0000000000000000 0.0000000000000000 0.0000000000000000
1 norm erros is: 0.72263316
```

use method 2:

**minimum: 0.144757566047 maximum: 2622.306392577511 average: 627.435362159259**

**minimum: 0.099873829020 maximum: 2607.704359325733 average: 652.923779990671**

**minimum: 0.199710997218 maximum: 2636.340330206484 average: 648.270083167647**

have 44 perturbations.

y\_p:

```
0.0000000700000000 0.0000001240000000 0.0000000000000000 0.0000110000000000 0.0000003800000000 0.0000040050000000 0.0000060080000000
0.0000000000000000 0.0000116010000000 0.0000090080000000 0.0000001000000000 0.0000004120000000 0.0000000000000000 0.0000050200000000
0.0000000050000000 0.0000000700000000 0.0000000000000000 0.0000100000000000 0.0000000730000000 0.0000020540000000 0.0000000000000000
1 norm erros is: 15.45488872
```

use method 3:

**minimum: 0.035876972687 maximum: 253.349448760787 average: 140.859208869124**

**minimum: 0.011652640646 maximum: 129.778199659431 average: 37.928698834586**

**minimum: 0.017299028451 maximum: 155.360842589139 average: 55.111954751344**

have 43 perturbations.

y\_p:

```
0.0000000600000000 0.0000100680000000 0.0000003000000000 0.0000000700000000 0.0000088000000000 0.0000090400000000 0.0000000000000000
0.0000000000000000 0.0000091030000000 0.0000148000000000 0.0000020000000000 0.0000000300000000 0.0000001280000000 0.0000050000000000
0.0000000000000000 0.0000093600000000 0.0000025410000000 0.0000040000000000 0.0000000000000000 0.0000000700000000 0.0000000000000000
1 norm erros is: 1.87070250
```

method 1 和 method 3 比較穩定，最大和最小誤差不會差距很大；method 2 的平均誤差最大。  
三種方法都有可能有很小的誤差。

和原做法(不添加 perturbation)的比較：

method 1: 25.43924104 → 50-60 (較差)

method 2: 699.93690135 → 627-648 (較好)

method 3: 0.00000015 → 37-140 (較差)

11. 在 A 上添加一些小誤差並觀察結果

use method 1:

minimum: 0.046635054963 maximum: 28.739254414323 average: 1.784373838063

minimum: 0.034591456001 maximum: 22.899045457027 average: 0.841401503406

minimum: 0.022832544771 maximum: 26.762133851569 average: 1.649634492428

use method 2:

minimum: 0.057024658379 maximum: 106630.861549944020 average: 3.871441878023

minimum: 0.021935684817 maximum: 1335.598633134441 average: 1.985490784246

minimum: 0.071349292004 maximum: 3325.077650286993 average: 2.071117203290

use method 3:

minimum: 0.032463442021 maximum: 5.190972412588 average: 1.684535804053

minimum: 0.023879640624 maximum: 4.372385109843 average: 1.966080039946

minimum: 0.030091435634 maximum: 4.643682393869 average: 2.002844567272

穩定程度: method 3 > method 1 > method 2; 三種方法的平均誤差差不多, 且都有可能有很小的誤差。

和原做法(不添加 perturbation)的比較:

method 1: 25.43924104 → 0.84-1.78 (較好)

method 2: 699.93690135 → 1.98-3.87 (較好)

method 3: 0.00000015 → 1.68-2.00 (較差)

12. 在 A 和 y 上添加一些小誤差並觀察結果

use method 1:

minimum: 0.043443917863 maximum: 18.665313307083 average: 3.003605989625

minimum: 0.013348677330 maximum: 21.918799049312 average: 2.032260412283

minimum: 0.016419248735 maximum: 12.941830996163 average: 3.824503284758

use method 2:

minimum: 0.080561770107 maximum: 2266.347450474938 average: 2.964777854168

minimum: 0.019633120751 maximum: 938.939987049417 average: 2.007742846507

minimum: 0.076965785842 maximum: 1275.497085392747 average: 3.045244854548

use method 3:

minimum: 0.038311010340 maximum: 4.261151881435 average: 1.650767261022

minimum: 0.013165697069 maximum: 5.879376649396 average: 1.698134307565

minimum: 0.009208603782 maximum: 5.306085961232 average: 1.245864053599

穩定程度: method 3 > method 1 > method 2; method 3 的平均誤差比較小, 三種方法都有可能有很小的誤差。

和原做法(不添加 perturbation)的比較:

method 1: 25.43924104 → 2.03-3.82 (較好)

method 2: 699.93690135 → 2.00-3.04 (較好)

method 3: 0.00000015 → 1.25-1.69 (較差)

結論: method 3 有加 perturbation 誤差就會變大, 而 method 1 和 method 2 則不一定。使用 method 2 時, 可在 A 上添加 perturbation, 可以使平均誤差變低。而使用 method 1 時則可在 A 和 y 上都添加 perturbation。

### 13. 心得

QR 分解直接解原方程式的效果是最好的，高斯消去法次之，QR 分解解改方陣後的方程式最差。添加一些 perturbation，有時會讓誤差變大，有時可以讓誤差很小，可以看出最穩定的是 method 3，產生的最大誤差不到 10。