

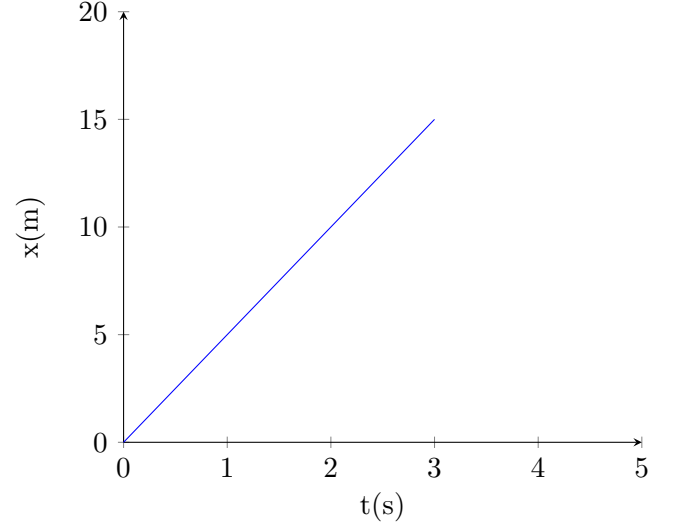
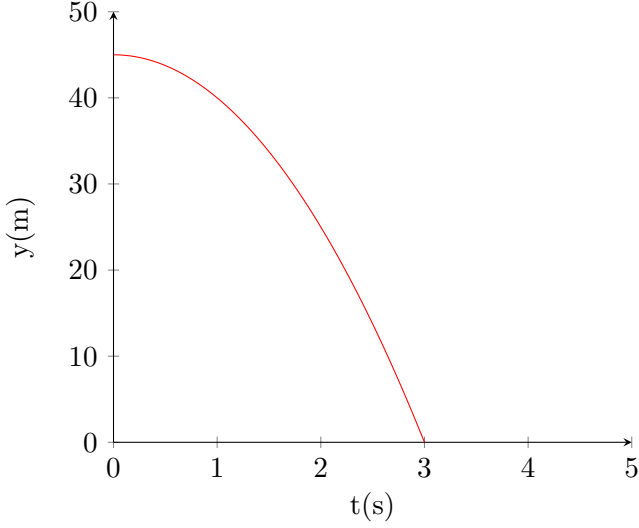
Atışlar

Umut Barış Doğan

Ağustos 2022

Atışlar, dikeyde yerçekimi ivmesinin olduğu ve yatayda ivme olmayıp sabit bir hızın olduğu hareketlerdir.

Diyelim ki bir cismi 45m sağa doğru $5\frac{m}{s}$ hızla fırlattık. Dikeydeki hareketi serbest bir şekilde $10\frac{m}{s^2}$ ivme etkisi altında hızlanarak aşağı düşmek olacaktır.



Bu fırlatılan cismin x ve y yönlerindeki, y yükseklik ve x yatay yol olarak düşünülürse, hareketi yukarıda gösterildiği gibi olacaktır. Sonuçları hesaplırsak da:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}gt^2 &= y \\ \frac{1}{2}gt^2 &= 45 \\ 5t^2 &= 45 \\ t^2 &= 9 \\ t &= 3\text{ s}\end{aligned}$$

Geçen zamanı 3 saniye olarak bulduğumuza göre düşene kadar yatayda gittiği süreyi hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned}vt &= x \\ 5 * 3 &= 15\text{ m}\end{aligned}$$

Her zaman bir cismin hızı sadece yatayda olmayabilir. Eğer hızı yataya açılsa, hız vektörünü bileşenlerine ayırıp öyle hesap yaparız.

Diyelim ki bir cisim $\vec{v} = 15(\frac{m}{s})\hat{i} + 20(\frac{m}{s})\hat{j}$ hızıyla yerden atılıyor. Biz ise bu cismin çıktığı maksimum yüksekliği, uçuş süresini ve yatayda aldığı mesafeyi hesaplamak istiyoruz. Yerçekimi ivmesini $g = 10$ kabul edersek:

$$\begin{aligned}v_x &= 15 \frac{m}{s} \\v_y &= 20 \frac{m}{s} \\y &= v_y t - \frac{1}{2} g t^2 \\y &= 20t - \frac{1}{2} 10 t^2 \\y &= 20t - 5t^2\end{aligned}$$

Uçuş süresini bulmak için y 'nin 0 olduğu yani cismin yere indiği ana bakmamız gerekli fakat bu iki farklı vakit için geçerli. Bizim aradığımız $t = 0$ vaktinde olmayıp $y = 0$ veren t değeri.

$$\begin{aligned}0 &= 20t - 5t^2 \\5t^2 &= 20t \\5t &= 20 \\t &= 4 s\end{aligned}$$

Yani cismimiz atıldıktan 4 saniye sonra yere geri inmiş. Bu dört saniyede yatayda gittiği yol:

$$\begin{aligned}x &= v_x t \\x &= 15 * 4 \\x &= 60 m\end{aligned}$$

Peki çıktığı en yüksek y 'yi nasıl hesaplayabiliriz? İki yöntemimiz var. Birincisi biraz düşünmek :D. Dikeyde olan hızımız sıfıra ulaştığında yükselmeyi bırakıp alçalmaya başlayacağımız için, v_y hızının sıfıra ulaştığı ana cismin çıkabileceği en yüksek yüksekliğe çıktığı an yani t diyebiliriz. Hesaplayalım:

$$\begin{aligned}v_y' &= v_y - g t \\0 &= 20 - 10t \\10t &= 20 \\t &= 2 s\end{aligned}$$

Görebildiğimiz üzere hızımız tam 2. saniyede 0'a ulaşmış yani hareketin tam ortasında. Bu bir tesadüf mü sizce? Biraz düşünün. Şimdi zamanı bildiğimize göre yüksekliği hesaplayabiliriz.

$$y = 20t - 5t^2$$

$$y = 20 * 2 - 5 * 2^2$$

$$y = 40 - 20$$

$$y = 20 \text{ m}$$

Diğer yöntemimiz ise y zamana göre pozisyon denklemimizin zamana göre türevini almak ve sıfıra eşitlemek. Onu da yapalım:

$$y = 20t - 5t^2$$

$$\frac{dy}{dt} = v = 20 - 10t$$

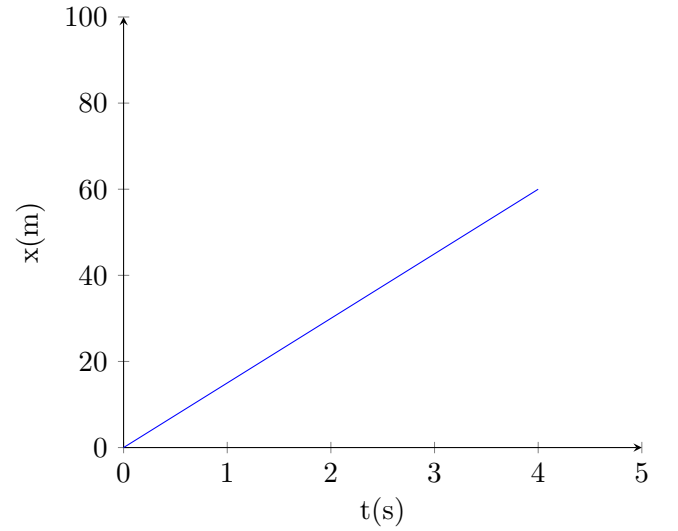
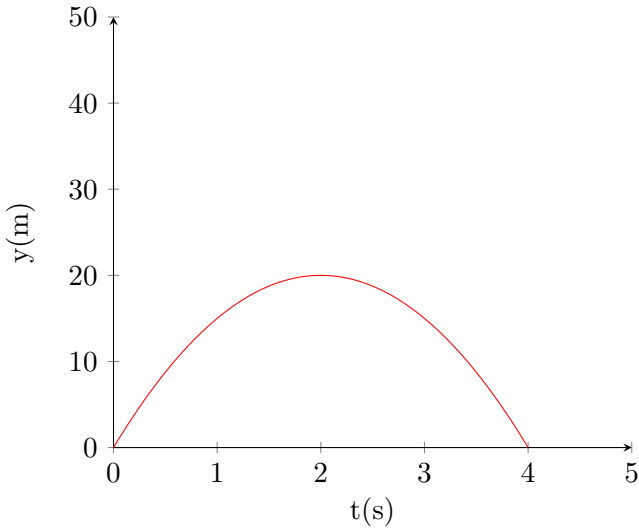
$$v = 20 - 10t$$

$$0 = 20 - 10t$$

$$10t = 20$$

$$t = 2 \text{ s}$$

Bunu yaparak da zaman için aynı sonuca ulaştık. Konum hesabımız ise yukarıda yaptığımızla aynı o yüzden tekrar yapmayacağım. Dikkat çekmek istediğim şey pozisyon fonksiyonumuz olan y 'nin türevinin hız olarak tanımlandığı ve sıfıra eşitleyerek zamanı bulduğumuz. Mantıksal olarak düşündüğümüzde de yaptığımız işlem aslında tamamen aynıydı. Bunun üzerine de biraz düşünmenizi istiyorum. Şimdi bir de hareketimizin grafiğini görelim.

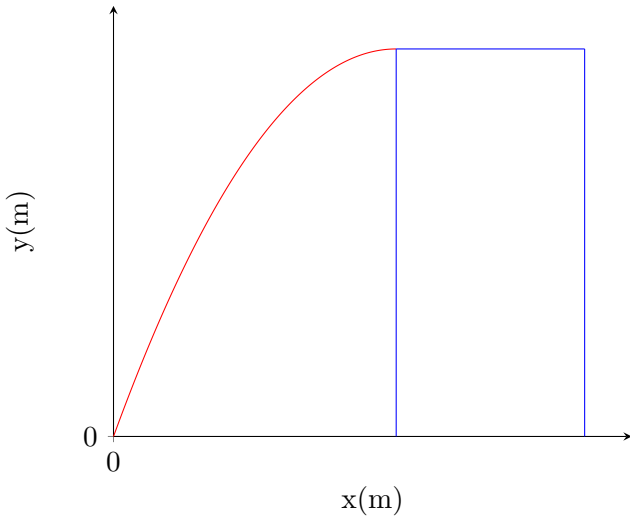


Şimdi de diyelim ki bir cismi bulunduğu yerden daha yüksekte bir yüzeye atmak istiyoruz ve yüzeye indiğinde sekmesini değil de yatayda sabit hızla hareket etmesini istiyoruz. Bu durumu içeren bir soru düşünelim.

Soru/Bir cisim yerden 53° açıyla bir v_0 hızıyla fırlatılıyor. Bu cisim fırlatıldığı yerden 60 m uzakta ve 90 m yüksekte olan bir duvarın tepesine sekmeden, yatayda sabit bir hızla ilerleyecek şekilde düştüğüne göre (a) cisim kaç $\frac{m}{s}$ hızla fırlatılmıştır? (b) cisim kaç saniyede duvara varmıştır? ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

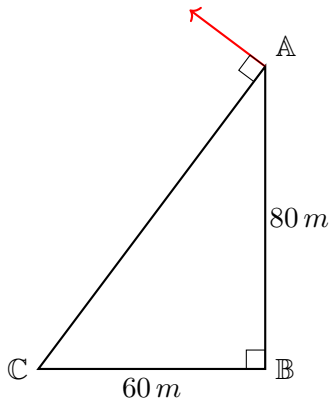
!Telafi dersinde çözeceğiz o sırada kendiniz üzerinde düşünün ve çözmeye çalışın! İpucu:

(Mavi duvarı, kırmızı cismin hareketini gösteriyor.)



Son bakacağımız şey ise eğimli bir yüzeye cisim atarsak ne kadar yükseğe veya alçağa düşeceği.

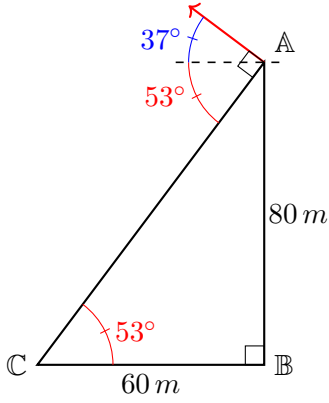
Yüksekliği 80 m ve yatay uzunluğu 60 m olan bir eğik düzlemin tepesinden bir cisim, düzleme dik bir v_0 hızıyla havaya atılıyor. $v_0 = 15 \frac{m}{s}$ olduğuna göre (a) cisim kaç saniye havada kalır? (b) cisim atıldığı yükseklikten kaç metre aşağıda düzleme iner? (c) cisim yatayda kaç metre ilerlemiş olur? ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)



Bu soruda düşünmemiz gereken ilk şey cismin gidiceği yatay uzunluk ve yüksekliğin oranının eğik düzlemin yatay kenarı ve dik uzunluğuna oranlı olacağı.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}gt^2 - v_y t &= y \\ v_x t &= x \\ \frac{\frac{1}{2}gt^2 - v_y t}{v_x t} &= \frac{y}{x}\end{aligned}$$

v_x ve v_y 'yi bulmak için v_0 'ın yatayla yaptığı açiya ihtiyacımız var ve hız vektörünün düzleme dik olduğunu bildiğimize göre,



Böylece v_0 hızımızın yatayla yaptığı açının 37° olduğunu bulduk. O zaman v_x ve v_y 'yi v_0 'a göre yazabiliriz.

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{2}gt^2 - v_y t}{v_x t} &= \frac{y}{x} \\ \frac{\frac{1}{2}gt^2 - \frac{3}{5}v_0 t}{\frac{4}{5}v_0 t} &= \frac{80}{60} \\ \frac{\frac{1}{2}gt - \frac{3}{5}v_0}{\frac{4}{5}v_0} &= \frac{4}{3} \\ \frac{3}{2}gt - \frac{9}{5}v_0 &= \frac{16}{5}v_0 \\ \frac{3}{2}gt &= \frac{25}{5}v_0 \\ \frac{3}{2} * 10 * t &= 5v_0 \\ 15t &= 5v_0 \\ 3t &= v_0 \\ 3t &= 15 \\ t &= 5 \text{ s} \quad \text{Uçuş süremiz 5 saniyeymiş.}\end{aligned}$$

Dikey ve yatayda gidilen mesafe için sırasıyla:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 - v_y t$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 - \frac{3}{5}v_0 t$$

$$y = \frac{1}{2} * 10 * 5^2 - \frac{3}{5} * 15 * 5$$

$$y = 125 - 45$$

$$y = 80 \text{ m} \quad \text{Cismimiz } 80 \text{ m aşağı gitmiş.}$$

$$x = v_x t$$

$$x = \frac{4}{5}v_0 t$$

$$x = \frac{4}{5} * 15 * 5$$

$$x = 60 \text{ m} \quad \text{Cismimiz } 60 \text{ m yatayda gitmiş.}$$

Bulduğumuz sonuca göre anlayabiliriz ki cisim, eğik düzlemin en üst noktasından tam en alt noktasına atılmış.