[7th]Mathematical Methods for Physicists 解答

Koji Higasa

2020 年吉日

まえがき

本ノートは文献 [1] の解答をまとめたものである.

目次

第 1 章

Mathematical Preliminaries

1.1 Infinite Series

1.1 Infinite Series

I. (1) 極限 $\lim_{n\to\infty} n^p u_n = A < \infty,\ p > 1$ が存在し, u_n が単調増加数列であるとき, 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ が収束することを示せ.

Proof. $n \to \infty$ で $u_n = A/n^p$ であり, 数列 u_n が単調増加であるので,

$$u_n < \frac{A}{n^p}\ (1 < n < \infty)$$

である. したがって不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n^p}$$

を得る. いま数列 u_n は振動せず, 各項は正の値で考えているので $-\infty$ への発散も考えなくてよく, $\sum_{n=1}^{\infty}(A/n^p)$ が収束することだけ示せばよい. 次に示す積分は

$$\int_1^{\infty} \frac{A}{x^p}\mathrm{d}x = A\left[(1-p)x^{1-p}\right]_1^{\infty} = 0$$

$$\int_1^{\infty} \frac{A}{x^p}\mathrm{d}x + u_1 = u_1 < \infty$$

□

(2) 極限 $\lim_{n\to\infty} nu_n = A > 1$ が存在するとき, 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ が発散する条件を求めよ.

$n \to \infty$ で $u_n = A/n$ である．ここで調和級数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ を考えると，これは Example1.1.2 [1] に載っているように部分和が発散するため発散する．したがって, 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ が発散するためには,

$$\frac{A}{n} < u_n \text{ for } \forall n$$

と評価されれば良い．これがいま求めたい発散条件である．

II. $0 < \lim_{n\to\infty}(b_n/a_n) = K < \infty$. このとき, $\sum_n a_n$ が収束 or 発散で $\sum_n b_n$ はどうなるか.

$n \to \infty$ で $b_n = Ka_n$ である．$\sum_n a_n$ が収束 (発散) するなら, $\sum_n Ka_n$ も収束 (発散) する．したがって, $\sum_n a_n$ の収束性は $\sum_n b_n$ の収束性と一致する．

1.2 Series of Functions

1.2 Series of Functions

I.

II.

III.

IV.

V.

VI.

VII.

VIII.

IX.

X.

XI.

XII.

XIII. $n > 1$ のとき次の不等式を示せ.

(1) $\dfrac{1}{n} - \log\left(\dfrac{n}{n-1}\right) < 0$

Proof. $1/|n| < 1$ なので, Maclaurin 展開を用いて,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} - \log\left(\frac{n}{n-1}\right) &= \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \cdots\right) \\ &= -\left(\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \cdots\right) < 0\end{aligned}$$

となり示された. □

(2) $\dfrac{1}{n} - \log\left(\dfrac{n+1}{n}\right) > 0$

Proof. 小問 (1) と同様にして,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} - \log\left(\frac{n+1}{n}\right) &= \frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots\right) \\ &= \left(\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3}\right) + \left(\frac{1}{4n^4} - \frac{1}{5n^5}\right) + \cdots > 0\end{aligned}$$

となり示された. □

(3) 小問 (1) , (2) の結果を用いて, Euler-Mascheroni の定数がどのような範囲に収まるか求めよ.

小問 (1) の不等式を $n = 2$ から ∞ まで和を取ると,

$$\begin{aligned}0 &> \sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{1}{n} - \log\left(\frac{n}{n-1}\right)\right\} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} - \log\left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\right) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} - \lim_{n\to\infty}\log n \\ &= \gamma - 1\end{aligned}$$

$$\therefore \gamma < 1$$

を得る．また小問 (2) の不等式を $n=2$ から ∞ まで和を取ると，

$$
\begin{aligned}
0 &< \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\log\left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\lim_{n\to\infty}\log n \\
&= \gamma \\
\therefore \gamma &> 0
\end{aligned}
$$

を得る．したがって, Euler-Mascheroni の定数は

$$0<\gamma<1$$

の範囲にあると結論できる．

XIV. 数値解析において次の近似はしばしば便利である，

$$\psi^{(2)}(x)\approx\frac{1}{h^2}\{\psi(x+h)-2\psi(x)+\psi(x-h)\}. \tag{1.1}$$

この近似における誤差を求めよ．

$$
\begin{aligned}
&\psi(x+h)-2\psi(x)+\psi(x-h) \\
=&\left(\psi(x)+h\psi^{(1)}(x)+\frac{h^2}{2!}\psi^{(2)}(x)+\frac{h^3}{3!}\psi^{(3)}(x)+\frac{h^4}{4!}\psi^{(4)}(x)+\cdots\right) \\
&-2\psi(x) \\
&+\left(\psi(x)-h\psi^{(1)}(x)+\frac{h^2}{2!}\psi^{(2)}(x)-\frac{h^3}{3!}\psi^{(3)}(x)-\frac{h^4}{4!}\psi^{(4)}(x)+\cdots\right) \\
=&h^2\psi^{(2)}(x)+\frac{h^4}{12}\psi^{(4)}(x)+\cdots \\
\therefore&\ \frac{1}{h^2}\{\psi(x+h)-2\psi(x)+\psi(x-h)\}\approx\psi^{(2)}(x)+\frac{h^2}{12}\psi^{(4)}(x)
\end{aligned}
$$

したがってこの近似における誤差は

$$\frac{h^2}{12}\psi^{(4)}(x)$$

程度である．

XV.

参考文献

[1] Arfken Weber Harris. 2005. *[7th]Mathematical Methods for Physicists*. ACADEMIC PRESS. https://www.academia.edu/32064399/_7th_Mathematical_Methods_for_Physicists_Arfken_pdf