

院試相当の数学と物理簡易まとめ (理物系の人向け)

Koji Higasa

2021 年吉日

まえがき

この文書では私がよく使うくせに、自己の記憶媒体から時々抜ける数学と物理の諸定理、諸法則をまとめたものである。内容は理学部物理系の大学院入試相当のレベルまでに限る。そのため数理的な色彩は淡い。

目次

第 I 部	数学	3
第 1 章	線形代数	6
1.1	量	6
第 2 章	微分方程式	7
2.1	常微分方程式	7
第 II 部	物理学	8
第 3 章	近似式	9

第 I 部

数学

算数

$$\begin{aligned}(\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} \\ \text{cf. } (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}\tag{1}$$

note: 適当な微分.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}} dx = \log\left(x + \sqrt{x^2 + A}\right) + \text{const.} \quad (A > 0)\tag{2}$$

note: 被積分函数分母の双曲線を見て $x = \sqrt{A} \sinh t$ と置換, なんて気怠いことはしない.

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsinh} x &= \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \\ \text{cf. } \operatorname{arccosh} x &= \log\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)\end{aligned}\tag{3}$$

note: 逆双曲線函数が現れる奇妙さを覚えておくのもいい.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \arcsin \frac{x}{a} + \text{const.} \\ \text{cf. } \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + \text{const.}\end{aligned}\tag{4}$$

note: 三角関数についても全く同様.

$$\int \sqrt{x^2 + A} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{x^2 + A} + A \log\left(x + \sqrt{x^2 + A}\right) \right) + \text{const.} \quad (A > 0)\tag{5}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + \text{const.}\tag{6}$$

note: 不定積分 (2) と (4) のまとめ的なものとして.

$a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}, p, q, r, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ として,

$$\frac{px + q}{(ax + b)(cx + d)} = \frac{\alpha}{ax + b} + \frac{\beta}{cx + d} \quad (7)$$

$$\frac{px + q}{(ax + b)^2} = \frac{\alpha}{ax + b} + \frac{\beta}{(ax + b)^2} \quad (8)$$

$$\frac{px^2 + qx + r}{(ax + b)(cx + d)(ex + f)} = \frac{\alpha}{ax + b} + \frac{\beta}{cx + d} + \frac{\gamma}{ex + f} \quad (9)$$

$$\frac{px^2 + qx + r}{(ax + b)^2(cx + d)} = \frac{\alpha}{ax + b} + \frac{\beta}{(ax + b)^2} + \frac{\gamma}{cx + d} \quad (10)$$

$$\frac{px^2 + qx + r}{(ax + b)(cx^2 + dx + e)} = \frac{\alpha}{ax + b} + \frac{\beta x + \gamma}{cx^2 + dx + e} \quad (11)$$

note: 部分分数分解.

場合の数での用途を想定し, $n, k \in \mathbb{N}$ として,

$$\text{重複 Combination: } nHk = \frac{(n + k - 1)!}{k!(n - 1)!} \quad (12)$$

$$\text{cf. Combination: } nCk = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

$$\text{cf. Permutation: } nPk = \frac{n!}{(n - k)!}$$

note: 代数表示.

第 1 章

線形代数

1.1 量

Def.1.1.1

aaa

$$E = mc \tag{1.1}$$

Th.1.1.2

aaa

$$E = mc \tag{1.2}$$

Prop.1.1.3

aaa

Lem.1.1.4

aaa

Cor.1.1.5

aaa

第 2 章

微分方程式

2.1 常微分方程式

Th.2.1.1 (定数係数 2 階線形微分方程式)

a, b を実定数とし, 2 階斉次微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ を考える. 特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の 2 根を λ_1, λ_2 とする. このとき, 一般解 $y(x)$ は, C_1, C_2 を任意定数として,

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} & \text{when } \lambda_1 \neq \lambda_2, (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}) \\ C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t} & \text{when } \lambda_1 = \lambda_2 \\ e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) & \text{when } \lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0) \end{cases} \quad (2.1)$$

で与えられる.

第 II 部

物理学

第 3 章

近似式