院試相当の数学と物理簡易まとめ (理物系の人向け)

Koji Higasa

2021 年吉日

まえがき

この文書では私がよく使うくせに, 自己の記憶媒体から時々抜ける数学と物理の諸定理, 諸法則をまとめたものである. 内容は理学部物理系の大学院入試相当のレベルまでに限る. そのため数理的な色彩は淡い.

目次

第 I 部

数学

算数

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{1}$$
$$\text{cf. } (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

note: 適当な微分.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+A}}\,\mathrm{d}x = \log\Bigl(x+\sqrt{x^2+A}\Bigr) + \text{const. } (A>0) \tag{2}$$

note: 被積分函数分母の双曲線を見て $x = \sqrt{A}\sinh t$ と置換, なんて気怠いことはしない.

$$\operatorname{arcsinh} x = \log\Bigl(x+\sqrt{x^2+1}\Bigr) \tag{3}$$
$$\text{cf. } \operatorname{arccosh} x = \log\Bigl(x\pm\sqrt{x^2-1}\Bigr)$$

note: 逆双曲線函数が現れる奇妙さを覚えておくのもいい.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + \text{const.} \tag{4}$$
$$\text{cf. } \int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + \text{const.}$$

note: 三角関数についても全く同様.

$$\int \sqrt{x^2+A}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Bigl(x\sqrt{x^2+A} + A\log\Bigl(x+\sqrt{x^2+A}\Bigr)\Bigr) + \text{const. } (A>0) \tag{5}$$
$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Bigl(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\Bigr) + \text{const.} \tag{6}$$

note: 不定積分 (2) と (4) のまとめ的なものとして.

$a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$, $p, q, r, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ として,

$$\frac{px+q}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{\alpha}{ax+b} + \frac{\beta}{cx+d} \tag{7}$$

$$\frac{px+q}{(ax+b)^2} = \frac{\alpha}{ax+b} + \frac{\beta}{(ax+b)^2} \tag{8}$$

$$\frac{px^2+qx+r}{(ax+b)(cx+d)(ex+f)} = \frac{\alpha}{ax+b} + \frac{\beta}{cx+d} + \frac{\gamma}{ex+f} \tag{9}$$

$$\frac{px^2+qx+r}{(ax+b)^2(cx+d)} = \frac{\alpha}{ax+b} + \frac{\beta}{(ax+b)^2} + \frac{\gamma}{cx+d} \tag{10}$$

$$\frac{px^2+qx+r}{(ax+b)(cx^2+dx+e)} = \frac{\alpha}{ax+b} + \frac{\beta x+\gamma}{cx^2+dx+e} \tag{11}$$

note: 部分分数分解.

第 1 章

線形代数

1.1　量

Def.1.1.1

aaa

$$E = mc \tag{1.1}$$

Th.1.1.2

aaa

$$E = mc \tag{1.2}$$

Prop.1.1.3

aaa

Lem.1.1.4

aaa

Cor.1.1.5

aaa

第 2 章

微分方程式

2.1　常微分方程式

Th.2.1.1（定数係数 2 階線形微分方程式）
a, b を実定数とし, 2 階斉次微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ を考える. 特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の 2 根を λ_1, λ_2 とする. このとき, 一般解 $y(x)$ は, C_1, C_2 を任意定数として,

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} & \text{when } \lambda_1 \neq \lambda_2, (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}) \\ C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t} & \text{when } \lambda_1 = \lambda_2 \\ e^{\alpha t}(C_1 cos\beta t + C_2 sin\beta t) & \text{when } \lambda_2 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta, (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0) \end{cases} \tag{2.1}$$

で与えられる.

第 II 部

物理学

第 3 章

近似式