

Izvorni znanstveni članak
Original scientific paper

Prispjelo - *Received*: 11.11.2002.
Prihvaćeno - *Accepted*: 12.03.2003.

UDK: 630* 522+53 (*Quercus robur*) 001

Karlo Bezak*

PRISILNO VISINSKO RASTENJE SASTOJINA HRASTA LUŽNJAKA (*Quercus robur* L.)

FORCED HEIGHT GROWTH OF PEDUNCLED OAK STANDS (*Quercus robur* L.)

SAŽETAK

Autor istražuje zakonitost, analitički oblik i brzinu sastojinskog visinskog rasta i prirasta hrasta lužnjaka (*Quercus robur* L.). Oslanjajući se na osobna eksperimentalna mjerenja, autor modelom prisilnih gibanja postavlja temeljne principe visinskog rasta šumskih sastojina. Druga derivacija visinskog rasta indicira prisilna gibanja. Diferencijalna jednadžba prisilnih gibanja je model visinskog rasta, koju autor modificira i postavlja kompleksnu jednadžbu visinskog rasta stabla i sastojina. Modelom prisilnog gibanja u sastojinskom visinskom rastenju, autor osvjetljava mnoge pojave koje do danas šumarska grana znanosti nije objasnila. Osvjetljava oscilacije visinskog rasta i inverzije visinskih krivulja u starijim sastojinama.

Kompleksna jednadžba visinskog rasta suvremeni je alat za procjenu brzine, dinamiku pomaka i konstrukciju visinskih krivulja. Nezaobilazni je alat u dendrokronologiji visinskog rasta i prirasta.

Ključne riječi: hrast lužnjak, rast i prirast, prigušena i prisilna gibanja, visinske krivulje, kompleksne jednadžbe rasta

PROBLEM I CILJ ISTRAŽIVANJA

PROBLEM AND RESEARCH OBJECTIVE

Visinski rast i prirast hrasta lužnjaka (*Quercus robur* L.) u nizinskim šumama Hrvatske dobro su proučili naši istaknuti znanstvenici: (LEVAKOVIĆ 1913, 1935), (NENADIĆ 1931), (EMROVIĆ 1953), (KLEPAC 1963, 1971), (PRANJIĆ 1970, 1979, 1980) i drugi. U stranoj stručnoj literaturi postoje također značajni

*Dr. sc. Karlo Bezak, Hrvatske šume d.o.o. Zagreb, Lj.F. Vukotinovića 2, Zagreb

radovi sastojinskog visinskog rasta i pojedinačnih stabala. Istraživanja (WIEDEMANN 1951) i (HALAJA 1953) pokazuju, kako nema razlike u tijeku visinskog rasta dominantnih i kodominantnih stabala čiste i mješovite sastojine.

Levaković (1935) u svom radu *Analitički oblik za sastojinsku visinsku krivulju* objavljuje analitički izraz koji glasi:

$$h = b_o (d/1+d)^{b_1} + 1.3 \quad (1)$$

Pod Levakovićevim utjecajem Mihajlov je našao nešto pojednostavljeni i praktičniji analitički izraz za visinsku krivulju:

$$Y = b_o e^{-b_1/x} + 1.3 \quad (2)$$

Analitički izraz Mihajlova za visinsku krivulju (MIHAJLOV 1949) našao je veliku praktičnu primjenu u dendrometriji i uređivanju šuma.

Visinske krivulje jednodobnih sastojina prolaznog su karaktera i tijekom vremena mijenjaju položaj i oblik. Visine i visinske krivulje u prvom dijelu proizvodnog procesa, tj. u mladosti, značajno se pomiču na više, a u drugom dijelu pomak je smanjen ili ga uopće nema.

Kako se pomiče visinska krivulja hrasta lužnjaka po dobnim razredima istraživao je i akademik Klepac (1971). Taj razvojni tijek akademik Klepac podijelio je na dva dijela, na sastojine intenzivnog visinskog pomaka do 70. godine i na sastojine u kojima je taj pomak slabije izražen.

Slične pojave, ali na pomaku krivulja dužina krošanja, uočili su V. Hren, i V. Krejči (HREN, KREJČI 1990) na uzorku od 137 ploha. Intenzivan je razvoj dužine krošanja do IV. dobnog razreda, a potom je taj pomak neznatan. Pritom je uočena interesantna pojava, a to je inverzija visinskih krivulja u starijim sastojinama. Visinske krivulje hrasta lužnjaka VI. dobnog razreda (121- 140 godina) za isti debljinski stupanj imaju niže visine nego mlađa stabla V. dobnog razreda (101-120 godina). Razvidno je pomicanje dužina krošanja i u sastojinama suhog tipa (EGT: II-G-10) iz prvog u drugi, iz drugog u treći te naročito kod sedmog dobnog razreda, značajno su odijeljena, za razliku od dužina krošanja trećeg, četvrtog, petog i šestog dobnog razreda koje su međusobno izrazito blizu. To znači kako dužine krošanja u mladim sastojinama rastu intenzivno u dužinu, u srednjedobnim slabije, a povećanje dužina krošanja u najstarijim sastojinama sedmog dobnog razreda (121-140 godina) uvjetovano je gospodarskim zahvatima zbog uzgojnih radova tijekom naplodbog razdoblja u fazi oplodnih sječa (DUBRAVAC 2002). Ta pojava, na prvi pogled nelogična, lijepo se uočava u visinskim krivuljama akademika Klepca. Inverzija visinskih krivulja česta je i interesantna, ali do sada nije objašnjena u literaturi.

Mnogi istraživači tu pojavu tumače neadekvatnim uzgojnim zahvatom. Inverziju srednjih visina dviju starijih sastojina uočila je i Pranjić (1980), a objašnjenje nalazi u uzgojnom zahvatu. Uzgojnim zahvatom obuhvaćena su vjerojatno jača i starija stabla.

Istraživanja u šumama hrasta lužnjaka suhog tipa, pokazuju vrlo jaku linearnu vezu između parametara b_0 i srednje sastojinske visine. To vrijedi i za regresijski koeficijent b_1 (PRANJIC 1979).

Autor je istraživajući u šumama lužnjaka vlažnog tipa zakonitost i brzinu pomaka visinskih krivulja, uočio slične pojave, ali i drugu kulminaciju visinskog prirasta oko 70. godine starosti sastojine. Istraživanja su pokazala i korelaciju između regresijske konstante b_0 sa starošću sastojine. Oblik veze je krivocrtan, jer je razlika kvadrata korelacijskog odnosa i koeficijenta korelacije veća od 0.1. Jaka do potpuna korelacija postoji i između regresijskog koeficijenta b_1 i starosti. Oblik veze je pravocrtan, jer je razlika kvadrata korelacijskog odnosa i koeficijenta korelacije manja od 0.1. Funkcija Mihajlova (2) pokazala se najboljom crtom izjednačenja, jer je indeks korelacije I_{xy} najpovoljniji za sve spomenute veze. Na temelju te spoznaje, konstruirane su standardne visinske krivulje i jednoulazne tablice hrasta lužnjaka vlažnog tipa (BEZAK 1997). Međutim, te standardne visinske krivulje nisu obuhvatile inverziju visinskih krivulja u starijim sastojinama hrasta lužnjaka.

Ključni je problem u uređivanju šuma kako predvidjeti budući položaj visinske krivulje, utvrditi brzinu pomaka krivulja u visinu, dinamiku i zakonitost visinskog rastenja.

Cilj istraživanja je pronaći analitički oblik zakonitosti visinskog rastenja koji bi obuhvatio sve specifičnosti razvojnog tijeka visinskih krivulja, istražiti principe gibanja i brzinu visinskog rastenja, te objasniti inverziju visinskih krivulja u starijim sastojinama hrasta lužnjaka.

PODRUČJE I MATERIJAL

INVESTIGATED AREA AND MATERIAL

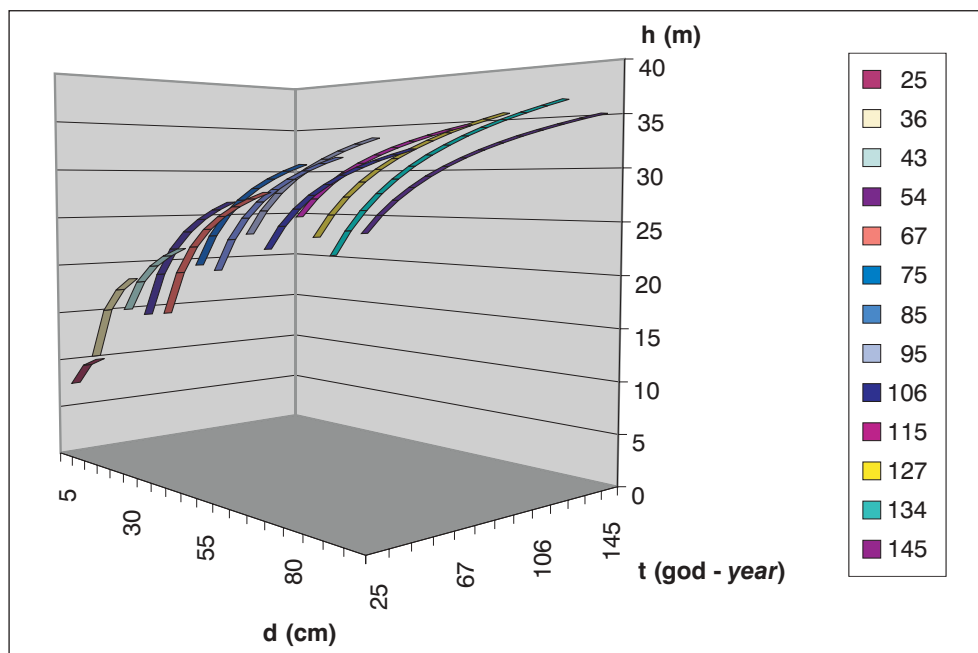
Istraživanja analitičkog oblika i zakonitosti razvojnog tijeka sastojinske visinske strukture obavljena su u šumi hrasta lužnjaka s velikom žutilovkom, u njenoj subasocijaciji s rastavljenim šašem (*Genisto elate - Quercetum roboris subass. caricetosum remotae* Horv. 38.), ekološko-gospodarskom tipu II-G-20. To je model šuma vlažnog tipa u kojem autor proučava temeljni fenomen prirode.

Proučavanja temeljnog fenomena prirode, rastenja hrasta lužnjaka, oslanjaju se na prijašnja istraživanja autora (BEZAK, 1990, 1992, 1993, 1995, 1997, 2000). Osnovicu mjerenja čini 80 pokusnih ploha na kojima je tijekom 1973. - 1984. godine izmjereno 5028 totalnih visina lužnjakovih stabala.

Budući je izmjerom obuhvaćen vrlo veliki broj podataka, autor nije u mogućnosti iznijeti sve rezultate izmjere u ovom radu. Osnovni i taksacijski podaci istraživanih sastojina nalaze se u disertaciji autora (BEZAK 1990). Osnovni elementi strukture sastojina obrađeni su po dobnim razredima, starosne širine od 10 godina i prikazani u *Tablici 1*. U istoj tablici nalazi se pročišćeni ansambl dendrometrijskih podataka i parametara Mihajlove funkcije (2) visinskih krivulja istraživanih sastojina, a predočene su grafički na *Slici 1*.

Tablica 1.: Osnovni dendrometrijski podaci za istraživane sastojine
Table 1: Basic dendrometric data from investigated stands

Dobni razred Age class	Broj ploha Number of plots	Srednja starost Mean age	Srednji broj stabala Mean number of trees	Srednja temeljnica Mean basal area	Srednji sast. prsni promjer Mean dbh of stand	Srednji sastojin. visina Mean height of stand	Broj izmjerenih visina Number of measured heights	Regresijska konstanta Regression constant	Regresijski koeficijent Regression coefficient
	n	t	N/ha	G/ha	d _g	h _g	n	b ₀	b ₁
	kom. pieces	god. year	kom. pieces	m ²	cm	m	kom. pieces	$Y = b_0 e^{b_1/x} + 1.3$	
21-30	3	25	2270	12.87	8.50	9,34	82	11,387	3,004
31-40	7	36	1416	22,47	13.65	17,37	322	22,107	4,558
41-50	2	43	890	20.72	17.22	19,29	97	25,364	6,003
51-60	13	54	590	22.97	22.26	22,94	750	31,646	8,726
61-70	4	67	362	24.32	29.25	24,57	277	32,194	8,940
71-80	11	75	317	25.22	31.83	27,62	693	35,403	9,784
81-90	10	85	254	28.12	37.54	28,70	669	36,188	10,681
91-100	8	95	204	27.32	41.60	30,64	568	38,199	11,262
101-110	8	106	131	24.50	48.80	30,50	571	36,919	12,249
111-120	5	115	139	29.50	51.98	31,21	375	38,664	12,336
121-130	5	127	128	29.29	53.98	31,57	366	41,905	16,939
131-140	3	134	104	27.37	57.87	32,65	204	44,270	20,978

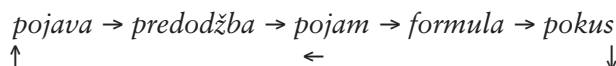


Slika 1.: Razvojni tijek visinskih krivulja istraživanih sastojina hrasta lužnjaka
Figure 1: Progression of Height curves in examined stands of Pedunculated Oak

METODA ISTRAŽIVANJA

RESEARCH METHOD

Autor primjenjuje jedinstvenu metodu istraživanja, zajedničku za sve znanstvenike svijeta (PONOMAREV 1988):



Gibanje je jedan od najsloženijih pojmova u fizici. Predodžbe vezane uz gibanje protežu se od treperenja lišća, povećanja obujma krošanja, rasta u debljinu, rasta u visinu pa sve do pada stabla tijekom sječa. Fizički je zakon stalna veza između neke pojave i odgovarajućih veličina, a koja se može opisati matematičkim simbolima u obliku jednadžbi.

Pojave, pojmovi, formule i slično, uzeti zajedno, čine egzaktnu znanost. Kako bi pronašao sveobuhvatnu formulu rastenja, autor se poslužio teorijama i modelima koji su bili uspješni u sličnim situacijama. Zakon prigušenih sinusoidnih oscilacija su jedan takav model, jer se temelji na klasičnoj fenomenološkoj teoriji o titranjima. U istraživanjima nekih problema iz područja fizike i mehanike susrećemo se s oscilacijama kojima se amplitude tijekom vremena smanjuju zbog otpora kojim se, tim oscilacijama, suprotstavlja neka sila. Zakon promjene amplituda takvih oscilacija izražava se diferencijalnim jednadžbama, a predočuje krivuljama prigušenih i prisilnih gibanja.

Diferencijalne jednadžbe prigušenih i prisilnih gibanja ključ su razumijevanja zakonitosti debljinskog i visinskog rastenja. Diferencijalna jednadžba prigušenih gibanja glasi:

$$s = A e^{-kt} \sin(\omega t - \varphi) \quad (3)$$

a diferencijalna jednadžba prisilnih gibanja:

$$s = A e^{-kt} \sin(\omega t - \varphi) + A_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1) \quad (4)$$

Pojedini simboli u jednadžbama su: s - udaljenost, A , A_1 - amplitude, e - prirodni logaritam, k - koeficijent otpora, t - vrijeme, ω , ω_1 - koeficijenti elastičnosti, φ , φ_1 - faze.

U prvoj jednadžbi (3) sustav radi gibanja i to prigušeno. Amplituda tih gibanja nije konstanta kao kod harmoničnih gibanja, već je funkcija vremena t i to eksponencijalna funkcija s negativnim eksponentom Ae^{-kt} , koja teži nuli, kad vrijeme t teži u beskonačnost. Sustav teži položaju ravnoteže radeći oko tog položaja gibanje, kojim amplitude postepeno opadaju po eksponencijalnom zakonu.

U slučaju kada je $k > \omega$ gibanje postaje neperiodično, a uzrok tome je velika sila otpora koja sprječava sustav postići položaj ravnoteže.

U drugoj jednadžbi (4) prvi član, koji također sadrži eksponencijalnu funkciju s negativnim eksponentom e^{-kt} brzo teži nuli, kad vrijeme t raste, gibanje će biti određeno nakon kratkog vremena samo drugim članom:

$$A_1 \sin(\omega_1 t - \varphi_1)$$

Vanjska je sila nametnula svoj period sustavu, stoga se to gibanje zove prisilno.
Diferencijalna jednadžba prigušenih gibanja je model debljinskog rasta, a diferencijalna jednadžba prisilnih gibanja je model visinskog rasta.

MODEL VISINSKOG RASTENJA

MODEL OF HEIGHT GROWTH

Debljinsko rastenje je prigušeno gibanje, jer na koeficijent unutarnje strukture koji se giba ω_t djeluju sile otpora k . Visinski rast i prirast hrasta lužnjaka ima sve karakteristike prisilnog gibanja.

Remeti li slobodna gibanja neka vanjska sila $f(t)$, gibanja su prisilna.

Jednadžbu je autor modificirao i u predloženom obliku kompleksna jednadžba visinskog rastenja Ψ_h glasi:

$$\Psi_h = A e^{-kt} \sin(\omega_{ph} t - \varphi) - A_1 \sin(\omega_{ph1} t) \quad (5)$$

U kompleksnoj jednadžbi visinskog rastenja Ψ_h je simbol druge derivacije visinskog rasta, A je amplituda, k je koeficijent otpora, a koeficijenti pulsacije prisilnih gibanja označeni su simbolima ω_{ph} i ω_{ph1} . Koeficijent pulsacije ω_{ph} djeluje negdje do 70. godine, a potom djeluje koeficijent ω_{ph1} čija je vrijednost pala gotovo do nule te stablo harmonično titra u visinu. Stablo raste prisilno u visinu, jer osim koeficijenta otpora k djeluje još neka vanjska sila. Nije teško zaključiti kako su to sile gravitacije.

Ideju za pretpostavku o prigušenim i prisilnim gibanjima autor nalazi u krivuljama druge derivacije debljinskog i visinskog rasta. Analizom stabala hrasta lužnjaka tijekom tipoloških istraživanja, autor je uočio kako krivulje druge derivacije debljinskog rasta ukazuju na prigušena gibanja, a krivulje druge derivacije visinskog rasta ukazuju na prisilna gibanja.

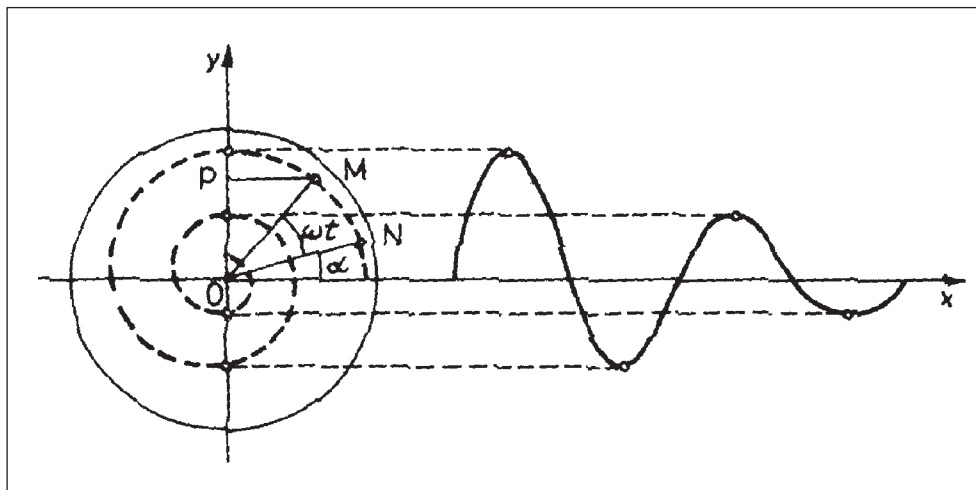
Potvrdu o pretpostavci prigušenog rastenja u debljinu, a prisilnog u visinu autor nalazi i u Newtonovim zakonima gibanja (SUPEK, FURIĆ 1994). Izrazi u jednadžbama 3. i 4. podudaraju se s običnim zakonima gibanja po osi x kada se u njima zamijene:

$koordinata\ x$	\Rightarrow	$kutem\ \propto$
$brzina\ v$	\Rightarrow	$kutnom\ brzinom\ \omega$
$sila\ F \rightarrow$	\Rightarrow	$momentom\ sile\ rF\sin\varphi$

Tu zamjenu lijepo ilustrira veza koja postoji između krivulje prigušenih oscilacija i logaritamske spirale (SAVELOV 1960), grafički predložena na Slici 2.

Neka se točka M giba konstantnom kutnom brzinom po logaritamskoj spirali u smjeru prema njenom polu. Projekcija te točke na ordinatnu os izvodi prigušene sinusoidne oscilacije. Uzme li se točka N za početak putanje, tada će udaljenost njene projekcije - točke P - od ishodišta koordinata u trenutku t biti određena jednakošću:

$$s = OP = OM \sin(\omega t + \varphi) \quad (6)$$



Slika 2.: Logaritamska spirala
Figure 2: Logarithmic spiral

Dobiveni izraz pokazuje kako se udaljenost s mijenja po zakonu prigušenih sinusoidnih oscilacija.

Neki istraživači smatraju logaritamsku spiralu krivuljom koja predstavlja jedno od izražavanja zakonitosti organskog rasta (SAVELOV 1960).

POKUS

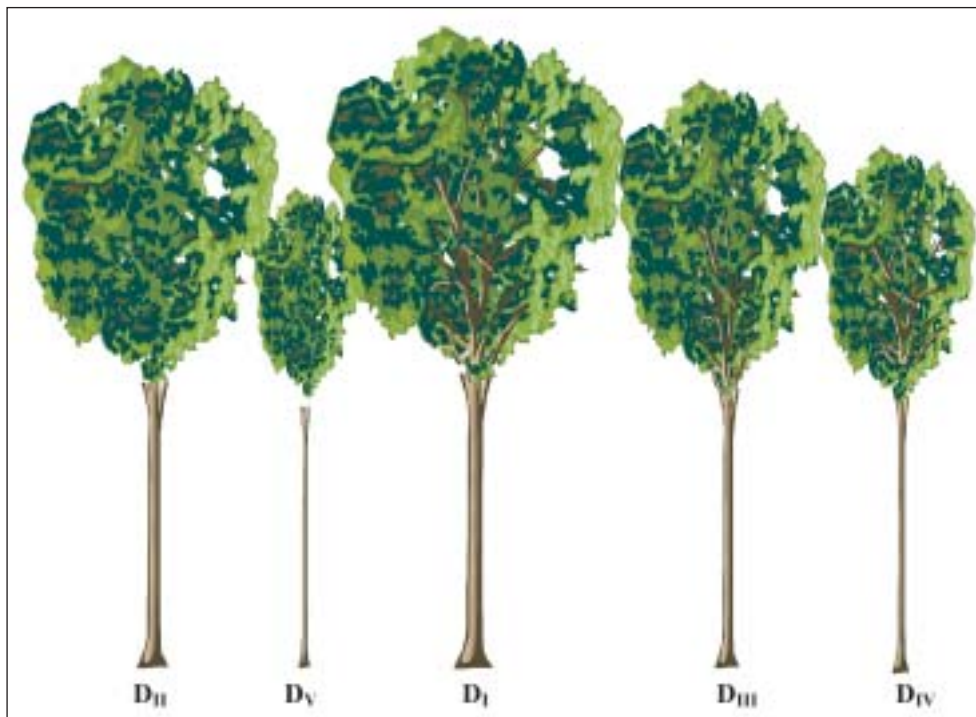
EXPERIMENT

Sukladno shemi, pokus je obavljen na modelu Kraftove klasifikacije, koji je shematski po srednjem fenotipskom modelu oblika krošanja (DUBRAVAC 2002) prikazan na Slici 3. Kraftova klasifikacija sastojine čini osnovnu pojavu u šumi, bez koje ne možemo učiniti nijedan korak u istraživanjima, zaštiti, uzgajanju i uređivanju šuma.

Osnovna Kraftova podjela je na klase:

Basic Kraft's classification into classes:

- D_I - predominantna stabla s izvanredno jako razvijenim krošnjama
- *predominant trees with exceptionally well developed crowns*
- D_{II} - dominantna stabla s relativno dobro razvijenim krošnjama
- *dominant trees with relatively well developed crowns*
- D_{III} - kodominantna stabla sa slabije razvijenim krošnjama
- *codominant trees with less well developed crowns*
- D_{IV} - prigušena stabla s jednostranom i ugnjetenom krošnjom
- *suppressed trees with unilateral and stifled crowns*
- D_V - prigušena stabla sa krošnjom koja umire
- *suppressed trees with dying crowns*



Slika 3. Kraftova klasifikacija stabala u sastojini
Figure 3 - Kraft's classification of trees in a stand

Uradimo pokus na modelu Kraftove - klasifikacije. Pridružimo svakom karakterističnom stablu formulu njegovog debljinskog i visinskog rasta.

Dakle, kompleksne jednadžbe debljinskog i visinskog rasta karakterističnih stabala su:

$$\begin{aligned}\Psi_{dI} &= 5.326 e^{-t \cdot 0.017} \sin(0.072972 \cdot t - 0.05) \\ \Psi_{hI} &= 8 e^{-t \cdot 0.040} \sin(0.145944 \cdot t - 0.07) - 8 \sin(0.00053249 t) \\ \Psi_{dII} &= 5.326 e^{-t \cdot 0.0377} \sin(0.072972 \cdot t - 0.05) \\ \Psi_{hII} &= 8 e^{-t \cdot 0.046} \sin(0.145944 \cdot t - 0.07) - 8 \sin(0.00053249 t) \\ \Psi_{dIII} &= 5.326 e^{-t \cdot 0.049} \sin(0.072972 \cdot t - 0.05) \\ \Psi_{hIII} &= 8 e^{-t \cdot 0.056} \sin(0.145944 \cdot t - 0.07) - 8 \sin(0.00053249 t) \\ \Psi_{dIV} &= 5.326 e^{-t \cdot 0.0619} \sin(0.072972 \cdot t - 0.05) \\ \Psi_{hIV} &= 8 e^{-t \cdot 0.068} \sin(0.145944 \cdot t - 0.07) - 8 \sin(0.00053249 t) \\ \Psi_{dV} &= 5.326 e^{-t \cdot 0.100} \sin(0.072972 \cdot t - 0.05) \\ \Psi_{hV} &= 8 e^{-t \cdot 0.075} \sin(0.145944 \cdot t - 0.07) - 8 \sin(0.00053249 t)\end{aligned}$$

Amplituda A i koeficijent otpora k za visinsko rastenje izračunati su tako da su maksimalne vrijednosti druge derivacije visinskog rasta srednje sastojinskog stabla istraživanih sastojina izravnote eksponencijalnom funkcijom:

$$Y = A e^{-kt}$$

Dobivene vrijednosti su parametri eksponencijalne krivulje koja je tjeme maksimalnih amplituda funkcije Ψ_b . Parametar A_I , određen je sukladno Zakonu simetrije. Postoji proporcionalan odnos visine stabala i dubine korjenovog sustava.

Koeficijent pulsacije ω_{ph} i ω_{ph1} za hrast lužnjak autor je našao u vremenu maksimalnog i minimalnog visinskog prirasta. Pod pretpostavkom kako su sastojine hrasta lužnjaka rasle u jednakim ekološkim uvjetima, prosječni koeficijent pulsacije - $\omega_{pv} \approx 0,145944$ u isto je vrijeme obuhvatio obje kulminacije i minimum sastojinskog tečajnog godišnjeg visinskog prirasta. Kako pronaći koeficijent pulsacije, to ovisi o umijeću diferencijalnog operatora ili matematičkim putem, što također iziskuje umijeće. Koeficijent pulsacije ω_{ph} djeluje negdje do 70. godine, a potom djeluje koeficijent $\omega_{ph1} \approx 0.00053249$ čija je vrijednost pala gotovo do nule te stablo harmonično *titra* u visinu. Fazom φ autor se poslužio smjestiti krivulje u željeni položaj, pomičući je malo lijevo ili desno.

Dakle, autor je tražio analitički oblik i parametre za krivulju druge derivacije visinskog rasta, a ne rasta ili prirasta kao što su to radili drugi istraživači.

Simulacijom otpora k sustavu rastenja autor je obuhvatio razvojni tijek debljinskog i visinskog rasta karakterističnih stabala dobivenih eksperimentalnim mjerenjima.

Kompleksne jednadžbe razlikuju se samo u otporu k , tj nepogodnim silama koje se suprotstavljaju energiji rastenja. Što su te nepogodne sile jače, to stablo više zaostaje u rastu, daljnjim još jačim gušenjem stablo umire.

Granične vrijednosti otpora k_d za debljinski rast su od 0.017 do 0.100, a za visinski k_b od 0.040 do 0.075. To su vrijednosti najdebljeg i najtanjeg stabla, odnosno najvišeg i najnižeg stabla u razvojnem tijeku sastojine. Koeficijent otpora $k = 0.049$ indicira razvojni tijek debljinskog rasta srednje sastojinskog stabla stabla d_{III} , a koeficijent otpora $k = 0.056$ indicira razvojni tijek visinskog rasta i prirasta srednje sastojinskog stabla stabla h_{III} .

REZULTATI ISTRAŽIVANJA

RESULTS

Riješimo li jednadžbe visinskog rastenja jednog predominantnog stabla dobivamo karakterističnu krivulju prisilnih gibanja. Povećavanjem otpora k sustavu rastenja, tj prigušivanjem dobivamo krivulje visinskog rastenja ostalih karakterističnih stabala u sastojini.

Integracijom druge derivacije rasta dobivamo prirast, a daljnjom integracijom rast. Visinski rast karakterističnih stabala ima S - sigmoidni oblik. To je razvojni tijek stabala koja su rasla u podjednakim ekološkim prilikama pod jednakim utjecajem unutarnjih i vanjskih sila.

U *Tablici 2.* po dobnim razredima prikazane su vrijednosti debljinskog rasta d_{I-V} , visinskog rasta h_{I-V} , prirasta (desetgodišnjeg) i_b i vrijednosti druge derivacije visinskog rasta Ψh_{I-V} karakterističnih stabala hrasta lužnjaka. U istoj je tablici usporedba izmjerenih vrijednosti visinskog rasta h_g srednje sastojinskog stabla d_g .

istraživanih sastojina i visinske krivulje h_{M5} izravname funkcijom Mihajlova (2) s vrijednostima visinskog rasta kodominantnog stabla h_{III} obračunate kompleksnom jednadžbom (5) - $\Psi_{h_{III}}$. Na *Slici 3.* prikazan je odnos krivulja izmjerenih visina srednje sastojinskog stabla d_g , izravnatih Mihajlovom funkcijom (2) i visinskog rasta kodominantnog stabla h_{III} obračunatog kompleksnom jednadžbom (5).

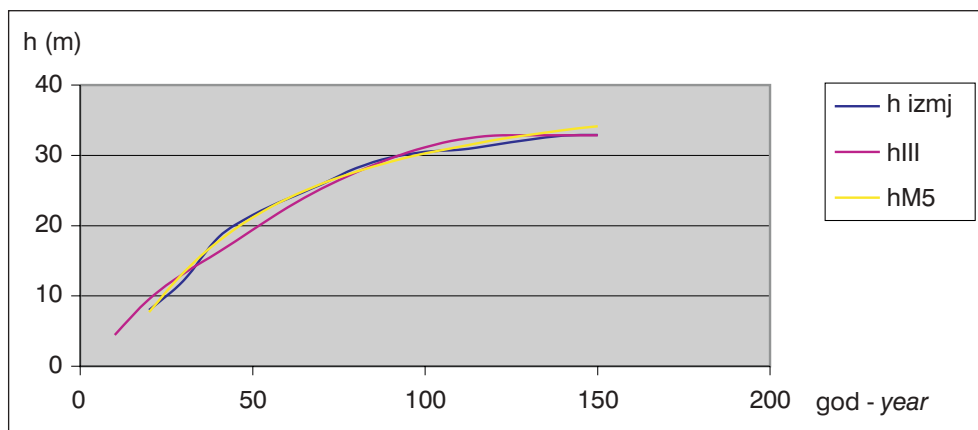
Tablica 2.: Razvojni tijek debljinskog i visinskog rasta, visinskog prirasta i druge derivacije visinskog rasta za karakteristična stabla

Table 2: Progression in diameter and height growth, height increment and other height growth derivations for characteristic trees

Starost-Age god-year	d_{III}, h_{III} - Kodominantno stablo Codominant tree				Izmjereno Measured		Izravnavano Levelled- M5	Kompleksna jednadžba Complex equation
	d_{III}	h_{III}	i_b	Ψh_{III}	d_g	b_g	b_{M5}	b_{III}
t	cm	m			cm	m		
10	2,05	4,45	4,4521	4,45213	1,63	-	-	4,45
20	6,07	9,57	5,1201	0,66798	6,35	8,0	7,72	9,57
30	11,13	13,19	3,6214	-1,49871	11,07	12,2	13,33	13,19
40	16,39	16,22	3,0312	-0,59017	15,79	18,3	17,77	16,22
50	21,44	19,43	3,2122	0,18103	20,51	21,5	21,18	19,43
60	26,24	22,58	3,1437	-0,0680	25,23	23,8	23,84	22,58
70	30,87	25,32	2,7407	-0,40294	29,94	25,9	25,96	25,32
80	35,45	27,64	2,3257	-0,41500	34,67	28,2	27,67	27,64
90	40,05	29,61	1,9672	-0,35848	39,39	29,7	29,09	29,61
100	44,68	31,18	1,5688	-0,39839	44,11	30,5	30,28	31,18
110	49,33	32,27	1,0959	-0,47292	48,83	30,8	31,29	32,27
120	53,99	32,85	0,5755	-0,52036	53,55	31,5	32,16	32,85
130	58,66	32,87	0,0022	-0,55305	58,27	32,2	32,91	32,87
140	63,32	32,88	0,0000	-0,59269	62,99	32,8	33,57	32,88
150	67,97	32,88	0,0000	-0,63800	67,70	32,9	34,16	32,88

Starost-Age god-year	d_I, h_I - Predominantno stablo Predominant tree				d_{II}, h_{II} - Dominantno stablo Dominant tree			
	d_I	h_I	i_{hI}	Ψh_I	d_{II}	h_{II}	i_{hII}	Ψh_{II}
t	cm	m			cm	m		
10	2,82	5,23	5,2320	5,23201	2,29	4,92	4,9248	4,92484
20	9,39	11,41	6,1840	0,95203	7,06	10,68	5,7595	0,83474
30	18,65	15,25	3,8407	-2,34330	13,28	14,46	3,7812	-1,97834
40	28,64	18,13	2,8742	-0,96651	19,81	17,45	2,9846	-0,79663
50	37,62	21,66	3,5381	0,66391	25,99	20,87	3,4212	0,43664
60	44,82	25,44	3,7709	0,23280	31,66	24,37	3,5064	0,08500
70	50,50	28,59	3,1515	-0,61937	36,96	27,37	2,9972	-0,50920
80	55,53	31,13	2,5435	-0,60798	42,15	29,86	2,4911	-0,50608
90	60,83	33,40	2,2648	-0,27871	47,37	32,03	2,1687	-0,32233
100	66,92	35,37	1,9747	-0,29011	52,70	33,85	1,8174	-0,35133
110	73,83	36,85	1,4796	-0,49507	58,10	35,18	1,3353	-0,48215
120	81,20	37,75	0,9038	-0,57579	63,55	35,98	0,7928	-0,54245
130	88,56	38,11	0,3528	-0,55100	69,00	36,22	0,2405	-0,55227
140	95,58	38,20	0,0900	-0,56630	74,42	36,30	0,0800	-0,58308
150	102,20	38,20	0,0000	-0,63496	79,83	36,30	0,0000	-0,63694

Starost-Age god.-year	d_{IV} , b_{IV} - Prigušeno stablo <i>Suppressed tree</i>				d_V , b_V - Prigušeno stablo koje umire <i>Suppressed tree dying</i>			
	b_{IV}	b_{IV}	i_{bIV}	Ψb_{IV}	d_V	b_V	i_{bV}	Ψb_V
t	cm	m			cm	m		
10	1,80	3,94	3,9438	3,94386	1,23	3,67	3,6743	3,67433
20	5,12	8,39	4,4511	0,50728	3,17	7,77	4,1042	0,42987
30	9,15	11,76	3,3668	-1,08425	5,34	10,97	3,2011	-0,90308
40	13,30	14,69	2,9367	-0,43014	7,53	13,81	2,8344	-0,36670
50	17,34	17,63	2,9400	0,00320	9,71	16,58	2,7738	-0,06000
60	21,26	20,41	2,7754	-0,16453	11,87	19,16	2,5781	-0,19574
70	25,12	22,84	2,4321	-0,34337	14,03	21,41	2,2522	-0,32584
80	28,96	24,90	2,0629	-0,36914	16,19	23,31	1,8953	-0,35694
90	32,80	26,59	1,6881	-0,37483	18,35	24,83	1,5165	-0,37876
100	36,65	27,86	1,2705	-0,41754	20,51	25,92	1,0948	-0,42169
110	40,51	28,66	0,8010	-0,46955	22,67	26,55	0,6259	-0,46889
120	44,37	28,95	0,2879	-0,51309	24,83	26,66	0,1141	-0,51181
130	48,23	29,00	0,0500	-0,55328	26,99	26,70	0,0400	-0,55332
140	52,09	29,00	0,0000	-0,59525	29,15	26,70	0,000	-0,59561



Slika 3.: Odnos razvojnog tijeka izmjerenih visina srednje sastojinskog stabla, njezine crte izjednačenja i razvojnog tijeka visina kodominantnog stabla

Figure 3: Progression relation of measured heights the mean stand tree, its levelled line and development course of heights in codominant tree

Izračunamo li vrijednosti debljinskog rasta, po dobnim razredima svake 10. godine za svako karakteristično stablo i pridružimo mu njegovu visinu, dobivamo debljinsku distribuciju i njezinu visinsku krivulju. Debljinski rast karakterističnih stabala čini Gaussovu distribuciju prsnih promjera. Ima svoju sredinu (D_{III}), varijacionu širinu (D_L , D_V) te gornje i donje Hohenadlovo stablo (D_{II} , D_{IV}), (BEZAK 1995).

Distribucije prsnih promjera i visinske krivulje po dobnim razredima prikazane su u Tablici 3., a krivulje na Slici 4.

Kompleksnim jednadžbama debljinskog i visinskog rasta, dobivamo visinske krivulje koje su obuhvatile sve specifičnosti razvojnog tijeka sastojinske strukture.

Najpovoljnija linija izjednačenja je funkcija Mihajlova (2), a korelacija je potpuna. Parametri Mihajlove funkcije, izjednačene vrijednosti i indeks korelacije prikazani su također u *Tablici 3*.

DISKUSIJA

DISCUSSION

Razvojni tijek visinskih krivulja, dobiven kompleksnim jednadžbama, obuhvatio je sve specifičnosti razvojnog tijeka izmjerenih visina. Razvojni tijek možemo podijeliti na dva dijela, prvi dio intenzivnog visinskog rasta i drugi dio s usporenim rastom.

I ovdje vidimo inverzije visinskih krivulja kod najstarijih sastojina. Objašnjenje za te pojave je jednostavno. Kod sastojina starih 110 - 130 godina, visinski prirast je neznatan, ali u to vrijeme nastaje druga kulminacija debljinskog, debljinska distribucija se pomakne svojom visinskom krivuljom u desno te nastaje privid o inverziji.

Najpovoljnija linija izjednačenja za visinske krivulje, dobivene kompleksnim jednadžbama, pokazala se funkcija Mihajlova (2). Korelacija za sve dobne razrede je potpuna.

Razvojni tijek visinskog rasta kodominantnog stabla (h_{III}) ima S - sigmoidni oblik, a njegova prva derivacija i_h visinski prirast dvije kulminacije. Prvu prije 20. godine, a drugu poslije 60. godine starosti sastojine.

Razvojni tijek kodominantnog visinskog rasta (h_{III}) stabla nam pokazuje odstupanje od izmjerenih podataka između 40. i 80. godine starosti sastojine, što znači kako je u to vrijeme zbog gustog sklopa visinski prirast bio intenzivniji od normalnog. Drugo odstupanje nastaje poslije 110. godine starosti sastojine kada prestaje visinski prirast. Izmjerene visine pokazuju niže podatke od izravnatih (h_{MS}) Mihajlovom funkcijom (2) i visina dobivenih kompleksnom jednadžbom (5).

Sječom kvalitetnijih i viših stabala snižavaju se visinske krivulje pa i to može biti uzrok inverzija u starijih sastojina.

Tablica 3.: Distribucije prsnih promjera i visinske krivulje po dobnim razredima

Table 3: Distribution of d b h and height curve by age classes

Starost - Age			10			20			30		
Prsni promjer - D b h Visina - Height Parametri - Parameters			d	$h_{k,j}$	$h_{izr.}$	d	$h_{k,j}$	$h_{izr.}$	d	$h_{k,j}$	$h_{izr.}$
			cm	m		cm	m		cm	m	
d_v , h_v			1,23	3,67	3,47	3,17	7,77	7,78	5,34	10,97	10,37
d_{IV} , h_{IV}			1,80	3,94	4,25	5,12	8,39	9,14	9,15	11,76	12,67
d_{III} , h_{III}			2,05	4,44	4,49	6,07	9,56	9,70	11,13	13,17	13,32
d_{II} , h_{II}			2,29	4,92	4,69	7,06	10,68	10,15	13,28	14,46	13,84
d_I , h_I			2,82	5,23	5,04	9,39	11,41	10,88	18,65	15,25	14,65
b_0	b_1	r	5,683	1,183	0,900	12,182	2,258	0,890	15,590	2,891	0,890

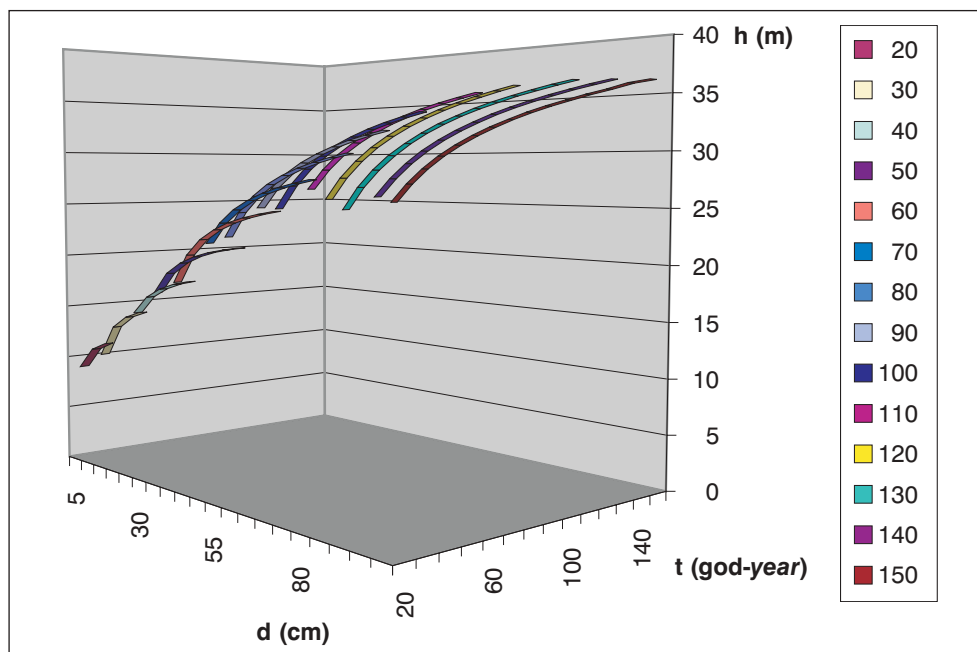
K. Bezak, 2002: Prisilno visinsko rastenje sastojina hrasta lužnjaka (*Quercus robur* L.)
Rad. Šumar. inst. 37 (2): 185–201, Jastrebarsko

Starost - Age			40			50			60		
Prsni promjer - <i>D b b</i> Visina - <i>Height</i> Parametri - <i>Parameters</i>			<i>d</i>	<i>b_{k,j}</i>	<i>b_{izr.}</i>	<i>d</i>	<i>b_{k,j}</i>	<i>b_{izr.}</i>	<i>d</i>	<i>b_{k,j}</i>	<i>b_{izr.}</i>
			cm	m		cm	m		cm	m	
d _v , h _v			7,53	13,81	12,71	9,71	16,58	15,87	11,87	19,16	18,27
d _{IV} , h _{IV}			13,30	14,69	15,49	17,34	17,63	18,75	21,26	20,41	21,80
d _{III} , h _{III}			16,39	16,20	16,27	21,44	19,41	19,54	26,24	22,55	22,75
d _{II} , h _{II}			19,81	17,45	16,88	25,99	20,87	20,14	31,66	24,37	23,47
d _I , h _I			28,64	18,13	17,82	37,62	21,66	21,06	44,82	25,44	24,54
b _o	b _I	r	18,856	3,781	0,941	21,964	3,987	0,894	26,035	5,083	0,888

Starost - Age			70			80			90		
Prsni promjer - <i>D b b</i> Visina - <i>Height</i> Parametri - <i>Parameters</i>			<i>d</i>	<i>b_{k,j}</i>	<i>b_{izr.}</i>	<i>d</i>	<i>b_{k,j}</i>	<i>b_{izr.}</i>	<i>d</i>	<i>b_{k,j}</i>	<i>b_{izr.}</i>
			cm	m		cm	m		cm	m	
d _v , h _v			14,03	21,41	20,39	16,19	23,31	22,21	18,35	24,83	23,63
d _{IV} , h _{IV}			25,12	22,84	24,45	28,96	24,90	26,69	32,80	26,59	28,58
d _{III} , h _{III}			30,87	25,29	25,53	35,45	27,61	27,87	40,05	29,58	29,86
d _{II} , h _{II}			36,96	27,37	26,34	42,15	29,86	28,73	47,37	32,03	30,79
d _I , h _I			50,50	28,59	27,48	55,53	31,13	29,87	60,83	33,40	31,96
b _o	b _I	r	29,559	6,135	0,883	32,491	7,137	0,880	35,159	8,329	0,878

Starost - Age			100			110			120		
Prsni promjer - <i>D b b</i> Visina - <i>Height</i> Parametri - <i>Parameters</i>			<i>d</i>	<i>b_{k,j}</i>	<i>b_{izr.}</i>	<i>d</i>	<i>b_{k,j}</i>	<i>b_{izr.}</i>	<i>d</i>	<i>b_{k,j}</i>	<i>b_{izr.}</i>
			cm	m		cm	m		cm	m	
d _v , h _v			20,51	25,92	24,61	22,67	26,55	25,21	24,83	26,66	25,18
d _{IV} , h _{IV}			36,65	27,86	30,04	40,51	28,86	31,07	44,37	28,95	31,50
d _{III} , h _{III}			44,68	31,14	31,47	49,33	32,24	32,62	53,99	32,81	33,15
d _{II} , h _{II}			52,70	33,85	32,47	58,10	35,18	33,73	63,55	35,98	34,35
d _I , h _I			66,92	35,37	33,71	73,83	36,85	35,10	81,20	37,75	35,88
b _o	b _I	r	37,496	9,746	0,877	39,400	11,320	0,886	40,702	13,236	0,879

Starost - Age			130			140			150		
Prsni promjer - <i>D b b</i> Visina - <i>Height</i> Parametri - <i>Parameters</i>			<i>d</i>	<i>b_{k,j}</i>	<i>b_{izr.}</i>	<i>d</i>	<i>b_{k,j}</i>	<i>b_{izr.}</i>	<i>d</i>	<i>b_{k,j}</i>	<i>b_{izr.}</i>
			cm	m		cm	m		cm	m	
d _v , h _v			26,99	26,70	25,17	29,15	26,70	25,12	31,31	26,70	25,43
d _{IV} , h _{IV}			48,23	29,00	31,60	52,09	29,00	31,67	55,95	29,90	31,86
d _{III} , h _{III}			58,66	32,84	33,28	63,32	32,84	33,38	67,97	32,84	33,52
d _{II} , h _{II}			69,00	36,22	34,49	74,42	36,60	34,61	79,83	36,30	34,72
d _I , h _I			88,56	38,11	36,08	95,58	38,20	36,25	102,20	38,20	36,30
b _o	b _I	r	41,028	14,623	0,876	41,346	16,075	0,870	41,239	16,744	0,907



Slika 4.: Razvojni tijek visinskih krivulja obračunat kompleksnim jednadžbama debljinskog i visinskog rasta.

Figure 4: Regression in height curves calculated by complex equations of diameter and height growth

Ove su kompleksne jednadžbe obuhvatile mnoge specifičnosti rasta i prirasta svakog stabla u sastojini. Obuhvatile su osnovne principe gibanja u razvoju sastojinske strukture. Debljinski i visinski rast karakterističnih stabala su "staze" rasta koje u prirodi nisu tako pravilne kao na ovome modelu, one osciliraju i ovise o životnoj igri unutarnjih i vanjskih sila, pogodnih i nepogodnih, energiji rasta i otpora rastu.

Prema Fourierovu teoremu (APSEN 1952), svako se periodično gibanje može prikazati sumom harmoničnih gibanja. Analogno tome visinsko rastenje je suma godišnjih prisilnih gibanja brzine:

$$\Psi_{h(t)} = \sum_n A_n e^{-knt} \sin(\omega_{phn} t - \varphi) - A_{1n} \sin(\omega_{phn1} t) \quad (n=1, 2, \dots, \infty) \quad (7)$$

Intuitivno možemo zaključiti kako tijekom druge kulminacije nastaje takozvani ivanjski visinski prirast koji je uočio M. Anić u svojim istraživanjima visinskog rasta poljskog jasena (*Fraxinus angustifolia* Vahl).

Kompleksnim jednadžbama debljinskog i visinskog rasta dobivaju se svi potrebni parametri za konstrukciju prirasno-prihodnih tablica.

Kompjutorskom obradom dobivamo debljinski i visinski rast, visinske krivulje i tarife, debljinski, visinski i volumni prirast. Primjenom Levakovićeve funkcije za praćenje sastojinske strukture, koju su razradili Hren i Kovačić (HREN, KOVAČIĆ 1984), moguća je simulacija rasta i razvoja šuma hrasta lužnjaka i konstrukcija svih mogućih modela, tj. prirasno-prihodnih tablica.

ZAKLJUČAK

CONCLUSION

Proučavanja pojava, brzine i zakonitosti razvojnog tijeka sastojinske visinske strukture obavljena su u šumi hrasta lužnjaka s velikom žutilovkom u njenoj subasocijaciji s rastavljenim šašem (*Genisto elatae* - *Quercetum roboris subass. caricetosum remotae* Horv. 38.), ekološko-gospodarskom tipu II-G-20. Na temelju obrade izmjerenih visinskih krivulja istraživanih sastojina modelom prisilnih gibanja, mogu se donijeti sljedeći zaključci:

1. Kompleksna jednadžba $\Psi h = A e^{-kt} \sin(\omega_{ph} t - \varphi) - A_1 \sin(\omega_{ph1} t)$ (5) je formula visinskog rastenja stabla i razvojnog tijeka sastojinske visinske strukture hrasta lužnjaka (*Quercus robur* L.).
2. Modeli prigušenih i prisilnih gibanja veliko su približavanje sveobuhvatnoj zakonitosti rastenja šuma.
3. Modeli prigušenih i prisilnih gibanja odražavaju temeljne principe gibanja u šumi.
4. Kompleksne jednadžbe visinskog rastenja osvijetljavaju mnoge pojave, oscilacije i inverzije sastojinskih visinskih krivulja u šumama hrasta lužnjaka.
5. Kompleksne jednadžbe rastenja omogućuju konstrukciju standardnih visinskih krivulja i jednoulaznih volumnih tablica.
6. Kompleksne jednadžbe rastenja temeljne su varijable za konstrukciju prirasno-prihodnih tablica.
7. Rastenje karakterističnih stabala omogućava promatranje razvojnog tijeka visinskog rastenja te procjenu brzine i trenda budućeg visinskog prirasta.

LITERATURA

LITERATURE

- APSEN, B., 1952: Repetitorij više matematike, (Diferencijali. Zakrivljenost krivulja, Integrali, Primjena integralnog računa. Diferencijalne jednadžbe. Fourierovi redovi), drugi dio, Tehnička knjiga, 240-319, Zagreb.
- BEZAK, K., 1990: Proučavanje strukture i veličine sastojinskog rasta i prirasta hrasta lužnjaka (*Quercus robur* L.) u zajednici hrasta lužnjaka s velikom žutilovkom (*Genisto elatae* - *Quercetum roboris* Horv. 38). Disertacija, pp: 1-168, Zagreb.
- BEZAK, K., 1992: Prigušene oscilacije fenomena rasta i prirasta praćene Levakovićevim analitičkim izrazima. Zbornik o Antunu Levakoviću, HAZU, Centar za znanstveni rad Vinkovci, Posebna izdanja VI: 57-83 Vinkovci.
- BEZAK, K., 1993: Erkenntnisse über gedämpfte Schwankungen des Bestandszuwachses mit Rückblick auf das Wachstumsmodel des Waldes (Spoznaja o prigušenim oscilacijama sastojinskog prirasta s posebnim osvrtom na modele rastenja šuma). IUFRO S. 4.04-00, Forest management Planning and Managerial Economics, Proceedings Symposium, 6-14, Palanga, Lithuania.
- BEZAK, K., 1995: The suppressed oscillations of the pedunculate oak (*Quercus robur* L.) stand diameter growth (Prigušene oscilacije sastojinskog debljinskog rasta hrasta lužnjaka).

- IUFRO XX World Congress, Danish Forest and Landscape Research Institute: 7-17. Tampere, Finland.
- BEZAK, K., 1997: Visinske krivulje i jednoulazne volumne tablice hrasta lužnjaka u šumama vlažnoga tipa, Rad. Šumar. Inst. 32 (2): 19-26, Jastrebarsko.
- BEZAK, K., 2000: The Uncertainty principle of diameter growth and increment in pedunculate oak (*Quercus robur* L.) (Načelo neodređenosti debljinskoga rasta i prirasta hrasta lužnjaka (*Quercus robur* L.). IUFRO WORKING GROUPS, International Conference OAK 2000, Poster Abstracts, 13-14., Zagreb.
- DUBRAVAC, T., 2002: Zakonitosti razvoja strukture krošanja hrasta lužnjaka i običnoga graba ovisno o prsnom promjeru i dobi u zajednici "Carpino betuli-Quercetum roboris Anić em Rauš 1969.", Disertacija, pp:1-196, Zagreb.
- EMROVIĆ, B., 1953: O upotrebi standardnih visinskih krivulja. Šum. list 2, Zagreb.
- HALAJ, J., 1953: Produktivnost naših lesnych drevin a porostov; Zvyšovanie prírastku lesov, Zvolen.
- HREN, V., Đ. KOVAČIĆ, 1984: Normalna raspodjela stabala po debljinskim stupnjevima i dobnim razredima u ekološko-gospodarskim tipovima II-G-20 i II-G-21. Rad. Šumar. Inst. 61:1-65, Zagreb.
- HREN, V., V., KREJČI, 1990: Pomak krivulje dužina krošanja u jednodobnim sastojinama lužnjaka s obzirom na njihovu starost. Rad. Šumar. Inst., Vol. 25, 2:337-344, Zagreb.
- KLEPAC D., 1963: Rast i prirast šumskih vrsta drveća i sastojina. Poljoprivredni Nakladni Zavod, pp: 1- 299, Zagreb.
- KLEPAC D., 1971: Jedan pokus o tome kako se pomiče visinska krivulja u jednodobnim sastojinama hrasta lužnjaka s obzirom na njihovu starost. Šum. list, 141-149, Zagreb.
- LEVAKOVIĆ, A., 1913: Nešto o prirastu hrasta, jasena i brijesta u našoj Posavini. Šum. list., Zagreb.
- LEVAKOVIĆ, A., 1935: Analitički izraz za sastojinsku visinsku krivulju. Glas. šum. pokuse, Zagreb.
- MIHAJLOV, I., 1949: Matematičko formuliranje na zakonot za rastenje na šumskite drva i nasadi. God. Zborn. zemj. šum. Fak. Univ. Skopje, knjiga 1. Skopje.
- NENADIĆ, Đ., 1931: Istraživanja prirasta hrasta lužnjaka u šumi Žutici. Glas. šum. pokuse, knj. 3, Zagreb.
- PONOMAREV, L. I. 1988: The Quantum dice, prijevod 1995: Kvantna kocka, Školska knjiga, Zagreb;
- PRANJIC, A., 1979: Sastojinske visinske krivulje hrasta lužnjaka. Šum. list, 201-220, Zagreb.
- PRANJIC, A., 1980: Odnos visinskog i debljinskog prirasta u sastojinama hrasta lužnjaka. Glas. šum. pokuse, 20: 5-92, Zagreb.
- SAVELOV, A. A., 1960: Ravninske krivulje, prijevod s ruskog Kučinić, B., S. Hozjan: 1979, Školska knjiga, pp: 1-383, Zagreb.
- SUPEK, I., M., FURIĆ, 1994: Počela fizike, Školska knjiga, pp: 1-250, Zagreb.
- WIEDEMANN, E., 1951: Ertragskundliche und waldbauliche Grundlagen der Forstwirtschaft. Frankfurt.

FORCED HEIGHT GROWTH OF PEDUNCLED OAK STANDS (*Quercus robur* L.)

Summary

*The author studies the regularity, analytic form and speed of height growth and increment in a Peduncled Oak (*Quercus robur* L.) stand. Relying on his own experimental measuring, the author, with a model of forced development, establishes basic principles of height growth in forest stands. The other derivation of height growth indicates forced development. Differential equation of forced development is a model of height growth, which is modified by the author and sets up a complex equation of height growth in trees and stands. With the model of forced development in stand height growth the author enlightens many occurrences which have not previously been explained by the branch of forestry scientific. Forced oscillations in height growth and inversions of height curves in older stands have been explained.*

Complex equation of height growth is a modern tool for assessment of speed, dynamic shift and structure of height curves. It is an unavoidable tool in dendrochronology of height growth and increment.

Key words: *Peduncled Oak, growth and increment, suppressed and forced development, height curves, complex equations of growth*