1. Slumpmässig variation

1.1 Inledning

Inom industrin, ingenjörs- och naturvetenskapen stöter man ofta på situationer där slumpmässiga förändringar och slumpmässig variation förekommer. Exempelvis om man undersöker

hållfasthet hos betongbalkar, stålbalkar, papper och berg

buller vid arbetsplatser och löpande band, i maskinhallar och gruvor

livslängd hos kugghjul, lager, elektroniska komponenter och bergborrningsmaskiner

nederbörd, snösmältning och vattenstånd

bergkroppars egenskaper och malmers kvalitet

kvalitet av tillverkat och inköpt material

spridning av damm och föroreningar i arbetslokaler.

När man arbetar med situationer med slumpmässig variation behöver man använda statistiska metoder för att man skall kunna dra slutsatser, uppskatta risker och fatta objektivt grundade beslut. Eftersom slumpmässig variation förekommer så ofta så är inte frågan *om* den yrkesverksamma ingenjören kommer att använda statistiska resonemang utan istället *hur pass bra* hon/han kommer att göra det. Den här boken syftar därför till att träna det statistiska tänkandet så att man kan förstå och använda några enkla statistiska metoder.

1.2 Några exempel på slumpmässig variation

Exempel 1.1

En firma tillverkar mätapparatur till vilken behövs elektroniska kretskort. Det blir dyrt om man får in för många defekta kretskort i produktionen. Man har därför en bötesklausul inskriven i köpekontraktet. Den träder i kraft om sändningen innehåller mer än 1% defekta kretskort, d v s om felkvoten är större än 0.01. För att kontrollera om bötesklausulen behöver utnyttjas har man en mottagningskontroll. Kretskorten ligger i förpackningar med 10 000 i varje. Man tar 200 kort på måfå ur varje förpackning och kontrollerar dem. I en sändning på 80 förpackningar fick man följande resultat.

Tabell 1.1 Antal defekta kretskort bland 200 utvalda i 80 förpackningar.

1	2	1	0	3	3	4	2	4	7	4	1	1	0	0	1	1	0	0	4
1	2	2	2	2	2	2	5	2	2	3	5	1	2	2	4	0	1	4	1
5	1	3	3	1	1	3	2	1	4	2	1	3	2	1	1	4	3	1	3
5	2	2	4	1	3	3	0	0	1	2	4	3	2	0	3	1	1	1	1

Antalet defekta kretskort varierar mellan 0 och 7. Vad kan vi säga om felkvoten i sändningen? Kan vi kräva att bötesklausulen skall träda i kraft? Hur pass säkra uttalanden kan vi göra om felkvoten?

Exempel 1.2

Ett Geiger-Müller rör utsätts för strålning från ett radioaktivt preparat med lång halveringstid. Man mäter antalet pulser under 5 sekunder. Detta förfarande upprepas många gånger. En typisk följd av mätvärden är 3, 1, 5, 4, 2, 2, 6, ... En serie av 200 mätningar gav följande resultat sammanställt i en frekvenstabell.

Tabell 1.2 Frekvenstabell över antalet pulser per 5 sekunder.

Antal pulser	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
Frekvens	3	19	32	44	35	21	23	11	8	3	1	200
Relativ frekvens (%)	1.5	9.5	16.0	22.0	17.5	10.5	11.5	5.5	4.0	1.5	0.5	100

Kan vi utgående från detta material säga något om det genomsnittliga antalet pulser per tidsenhet för preparatet? Om vi i förväg vet det genomsnittliga antalet pulser per tidsenhet för preparatet kan vi då säga något om hur vår frekvenstabell kommer att se ut efter många mätningar? Med andra ord, kan vi med någon modell beskriva

hur antalet pulser per tidsenhet kommer att variera när vi gör en lång serie mätningar?

Exempel 1.1 och exempel 1.2 är typiska exempel på slumpmässig variation. Om vi betraktar försöket att registrera pulser per tidsenhet (exempel 1.2) och kallar registreringen under en tidsenhet för ett delförsök så kan vi inte förutsäga resultatet i ett visst delförsök. Detsamma gäller i exempel 1.1. Vi kan inte i förväg tala om hur många defekta kretskort vi kommer att få. Däremot finns en viss regelbundenhet som visar sig om vi gör tillräckligt många delförsök. Detta gör att vi så småningom kan finna en modell för att beskriva försöket. Den modellen skall då beskriva den slumpmässiga variation som kan förekomma och kallas därför *slumpmässig modell.* Ett annat namn är *stokastisk modell.*

Ett av de allra enklaste och mest renodlade exemplen på slumpmässig variation är slantsingling. Om vi singlar ett symmetriskt mynt så kan vi inte förutsäga resultatet för varje enskilt kast. Men intuitivt tycker vi att i långa loppet bör vi få lika många krona som klave. Om vi låter 0 beteckna klave och 1 beteckna krona så bör en serie av slantsinglingar ge en slumpmässig följd av 0:or och 1:or och efter ett stort antal kast bör relativa frekvensen för 0:or närma sig 1/2 och detsamma för 1:or. Detta är ett exempel på en enkel slumpmässig (eller stokastisk) modell.

Vi betraktar ytterligare några exempel där slumpmässig variation förekommer.

Exempel 1.3

Ett försök gick ut på att bestämma höjden h av ett visst rätblock. Till detta användes skjutmått. Man gjorde 10 mätningar.

Tabell 1.3 Resultat (i mm) av 10 mätningar av höjden h.

12.3	12.3	12.2	12.1	12.4	12.2	12.5	12.3	12.1	12.3

Vi ser att mätvärdena varierar. Vilket värde är bäst som uppskattning av höjden? Hur skall precisionen anges?

Mätsituationen i exempel 1.3 kan beskrivas med en enkel slumpmässig modell genom att betrakta varje mätvärde som summan av den sanna höjden h och ett slumpfel. Vi skall längre fram se vilka egenskaper det slumpmässiga felet kan ha.

Exempel 1.4

I Grängesberg gjordes 1968 ett fullskaleprov för att studera en skopas inträngning i en bergshög med och utan vibrationer. Man använde lastmaskin LM 56H för att fylla en 2 m^3 vagn med malm. Antal skoptag per vagn noterades och man fick följande resultat. Se tabell 1.4 och 1.5.

Tabell 1.4 Antal skoptag per vagn utan vibration.

Antal skoptag	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Frekvens	1	4	13	31	24	22	19	4	2	4

Tabell 1.5 Antal skoptag per vagn med vibration.

Antal skoptag	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Frekvens	3	11	17	18	36	25	15	5	3	2

Antal skoptag per vagn varierar mellan 7 och 16 i båda fallen. Vad är genomsnittliga antalet skoptag? Kan man påstå att det föreligger skillnader mellan de båda metoderna?

Exempel 1.5

Fortsättning på exempel 1.4. Man noterade även tiden från det att maskinen började köra in i bergshögen till dess att lastaren kopplade loss vagnen från lastmaskinen. Se tabell 1.6.

Vad är den genomsnittliga tidsåtgången när man lastar med vibration? Hur mycket kan tiden variera? För hur stor andel av vagnarna kan man tänka sig att tiden överskrider 2 min? Vilken tid kan man räkna med att 95% av vagnarna underskrider?

Tabell 1.6 Tidsåtgången (i minuter och sekunder) vid lastning med vibration.

1.25	1.20	1.25	1.17	1.41	1.49	1.51	1.49	2.28	3.03	2.33
1.18	1.24	1.20	1.34	1.44	1.36	1.40	1.57	1.52	1.43	2.02
2.35	2.33	2.08	2.52	1.09	1.24	1.39	1.50	1.52	3.01	2.56
1.19	1.34	1.51	1.51	1.58	2.13	2.20	1.20	1.24	1.40	1.41
2.02	2.09	1.13	1.15	1.51	1.36	2.06	2.27	1.30	1.43	1.40
1.36	1.56	2.08	1.26	1.20	1.37	1.58	2.04	2.30	1.36	1.45
1.23	1.39	2.20	1.19	1.18	1.27	1.47	2.14	2.20	1.19	1.27
1.44	2.33	2.14	1.22	1.31	1.44	2.08	1.16	1.48	2.21	2.14
1.57	1.50	2.29	1.59	2.01	1.54	1.56	2.10	1.30	1.37	2.07
1.53	1.36	1.46	1.47	1.48	2.08	1.50	1.49	1.25	1.35	1.56
1.58	1.50	1.31	2.06	1.37	2.01	1.47	1.44	2.09	1.46	1.52
1.31	1.59	1.58	1.55							

Exempel 1.6

Från 1000 lager valde man slumpmässigt ut 5 och testade livslängden av dessa. Se tabell 1.7. Livslängden tycks variera mycket. Hur skall vi kunna beskriva livslängden hos alla 1000 lagren? Hur kan vi finna någon lämplig stokastisk modell? Hur stor andel av de 1000 lagren kan vi vänta oss har en livslängd överstigande 10^6 cykler?

Tabell 1.7 Livslängd (i 10^6 cykler) hos 5 lager.

2.9	0.8	8.2	1.0	4.7

Exempel 1.7

Två olika typer, A och B, av kugghjul skall jämföras. Man valde slumpmässigt ut 10 av typ A och 10 av typ B och undersökte livslängden hos dessa.

Tabell 1.8 Livslängd (i tim) hos 10 kugghjul.

Typ A	130	470	210	250	270	510	280	860	160	1130
Typ B	120	340	410	170	400	440	580	520	490	530

Livslängden varierar mycket för båda typerna. Kan man beskriva variationen på något enkelt sätt? Är den ena typen genomsnittligt bättre? Kan man säga någon om det med en rimlig grad av säkerhet? Vad skall man i så fall använda för mått?

Exempel 1.8

Vid tillverkning av sjukhusutrustning används en viss typ av elektroniska komponenter. Livslängden hos dessa får inte vara för kort ty då blir de oanvändbara. Eftersom komponenterna förstörs efter ett livslängdsprov kan man bara undersöka ett fåtal slumpmässigt utvalda. Vid ett tillfälle fick man resultatet i tabell 1.9, sid 5.

Tabell 1.9 Livslängden (i tim) hos 80 komponenter.

95.3	83.1	97.1	83.4	66.0	61.7	67.9	68.3	69.1	80.2
87.1	78.9	83.8	58.8	93.6	100.6	78.6	77.8	66.9	85.6
66.1	84.7	94.3	81.6	73.5	96.3	87.7	79.2	74.3	99.6
91.5	64.8	78.2	84.7	103.0	68.2	97.3	90.1	66.5	86.0
61.9	75.0	76.3	109.9	74.9	72.5	68.6	64.9	84.8	82.0
94.5	78.0	72.7	73.1	96.0	75.5	87.0	80.4	67.1	63.4
59.3	77.3	81.0	73.5	97.1	91.1	86.0	97.9	110.7	80.9
87.2	82.2	93.0	60.5	77.8	67.5	79.9	77.3	95.5	109.0

Vilken livslängd kan man räkna med att 90% av komponenterna har? Hur mycket kan livslängden tänkas variera? Hur länge kommer komponenterna att räcka i genomsnitt?

Exempel 1.9

Taxiproblemet. Författaren besökte våren 1977 universitetet i Sheffield, England. Samtidigt befann sig också den kände amerikanske statistikprofessorn Gottfried Noether där. När vi vid ett tillfälle gjorde en promenad genom staden Sheffield stannade plötsligt Gottfried och utropade: "Titta dom har ju nummer på taket också!" (Fast på engelska). Snabbt tog han upp papper och penna och skrev ner taxins nummer. Vi stod kvar ett tag och såg följande taxinummer passera: 97, 234, 166, 7, 65, 17, 4. Sedan frågade Gottfried: "Hur många taxibilar finns det i staden?" Hur skall man med taxinumren kunna uppskatta antalet taxibilar i Sheffield?

Exempel 1.10

Hur man får svaret utan att vara säker på att ha ställt frågan.

Vid ett amerikanskt universitet ville man undersöka hur stor proportion studenter som regelbundet rökte hasch. Eftersom det är en känslig fråga så kan man inte räkna med att få ärliga svar om inte den som svarar är säker på att få vara anonym. Man löste problemet på följande sätt.

Varje student som skulle utfrågas fick en ask som innehöll röda och gröna kulor. När man skakade asken visade sig en kula slumpmässigt i ett fönster på asken. Man lät studenterna övertyga sig om att man inte kunde förutsäga färgen på den kula som kom fram. Den som blev utfrågad fick gå bakom en skärm och fick ett formulär med följande text.

Skaka asken. Notera färgen på kulan. Svara Ja eller Nej på endast en av följande två frågor beroende på kulans färg. Om kulan är röd svara på frågan: "Är sista siffran på ditt studentlegitimationskort udda?"

Om kulan är grön svara på frågan: "Röker du hasch minst en gång i veckan?"

Sedan alla hade utfrågats hade man ett antal ja-svar och ett antal nej-svar.

Vid ett tillfälle då asken innehöll en röd och en grön kula fick man 44% ja-svar. Hur stor proportion studenter röker hasch minst en gång i veckan?

Vad händer om man ändrar proportionen röda och gröna kulor i asken? Kan man tänka sig andra frågor än "Är sista siffran i din legitimation udda"?

Exempel 1.11

I december 1977 annonserade Findus på följande sätt: Findus lagar fortfarande Sveriges populäraste köttbullar (näst efter hemlagade förstås).

Detta uttalande baserade Findus på en jämförande undersökning utförd av Skandinaviska Marknadsinstitutet i november 1977. Där fick 200 konsumenter jämföra Findus köttbullar med Felix köttbullar. Man fann att 120 av de 200 deltagande konsumenterna tyckte att Findus köttbullar smakade bäst. Kan Findus försvara sitt påstående? Vad bör man ifrågasätta när man läser en sådan annons?

Vi har nu sett några exempel på slumpmässig variation och några frågeställningar som kan uppkomma. För att kunna besvara den typen av frågor måste vi skaffa oss kunskap om hur slumpmässig variation kan beskrivas, hur slumpmässiga modeller kan byggas och vilka metoder man har till sin hjälp att dra slutsatser om slumpmässiga företeelser.

1.3 Beskrivande statistik

Det första man bör göra när man har siffermaterial som i exemplen i föregående avsnitt är att beskriva dem på ett överskådligt sätt. Det är enklare att få en överblick över ett material när det är sammanställt i en frekvenstabell, som i exempel 1.2 och exempel 1.4, än när det står som i exempel 1.1, exempel 1.5 och exempel 1.8. Hur man skall beskriva sitt material beror i viss mån på vilka frågor man vill ha besvarade. Frekvenstabellen bör man komplettera med en grafisk illustration. Dessutom bör man beräkna storheter som är karakteristiska för materialet, t ex lägesmått, som anger läget (eller genomsnittet) av materialet, och spridningsmått, som anger spridningen (eller variationen) hos materialet.

2. Några grundläggande begrepp

2.1 Sannolikheter

Begreppet sannolikhet hör till det allmänna språkbruket och vi har väl alla en viss uppfattning om vad det innebär. Om vi till exempel kastar en tärning så säger vi att sannolikheten för att få en trea är $1/6$. Då tänker vi oss att om vi kastar tärningen många gånger så blir relativa frekvensen för treor ungefär $1/6$. Sannolikheter behöver vi för att kunna beskriva och analysera slumpmässiga variationer av de typer som förekommer i kapitel 1. Sannolikhetsläran kan ses som teorin för slumpmässiga försök, där vi med ett *slumpmässigt försök* menar ett försök vars resultat man inte säkert kan förutsäga. Försöken beskrivna i exempel 1.1-1.8 är slumpmässiga försök.

Exempel 2.1

En entreprenörfirma planerar att inköpa schaktningsmaskiner, som behövs för att röja ett visst område. Man vet av erfarenhet att den aktuella maskintypen har 50 procent chans att fungera i minst 6 månader utan att några delar behöver bytas. Om man köper in 3 schaktningsmaskiner vad är sannolikheten att exakt en maskin kommer att ha fungerat utan maskindelsbyte efter 6 månader?

Lösning: Efter 6 månader kan antalet maskiner som fungerat utan maskindelsbyte vara 0, 1, 2 eller 3. Vi söker sannolikheten att det är 1. För att kunna utnyttja vår kunskap om att det är 50 procent chans att maskinerna fungerar efter 6 månader skriver vi upp alla tänkbara situationer som kan inträffa. Sätt

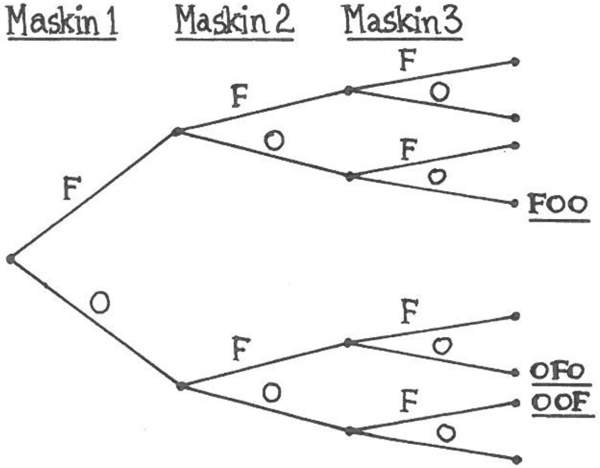
$$\begin{aligned} F &= \text{maskinen fungerar efter 6 månader,} \\ O &= \text{maskinen fungerar inte efter 6 månader.} \end{aligned}$$

Då kan följande olika alternativ inträffa.

$$\begin{aligned} FFF &= \text{alla tre fungerar} \\ FFO &= \text{de två första fungerar men inte den tredje} \end{aligned}$$

FOF = den första och tredje fungerar men inte den andra
$\underline{FOO}$ = o s v
OFF =
$\underline{OFO}$ =
$\underline{OOF}$ =
OOO =

Detta kan också åskådliggöras med ett träddiagram. (Se figur 2.1.).



Figur 2.1

Inga av dessa 8 utfall kan inträffa samtidigt. Eftersom det är lika stor chans att F inträffar som att O inträffar är vart och ett av de 8 utfallen lika sannolikt. Av de 8 likvärdiga utfallen är det 3 (de understrukna) som ger den sökta händelsen att exakt en maskin fungerar efter 6 månader. Den sökta sannolikheten är alltså $3/8 = 0.375$.

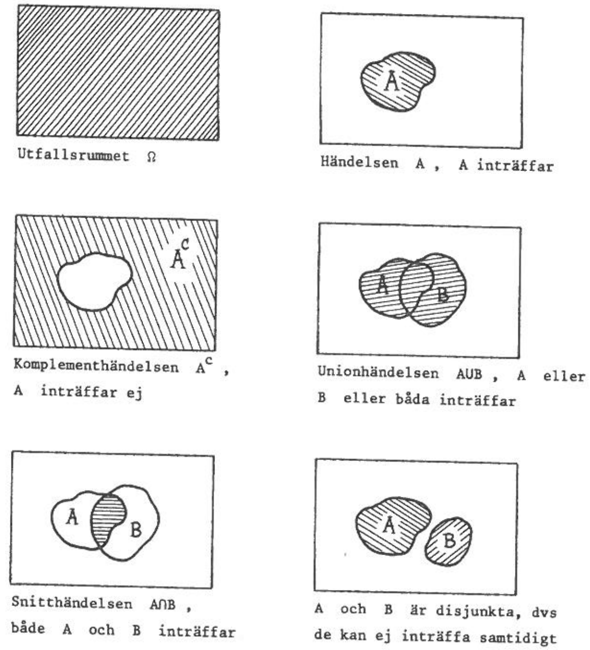
Nu måste vi föra in en del begrepp. Mängden av alla tänkbara utfall av ett slumpmässigt försök kallas försökets *utfallsrum* och betecknas Ω. I exempel 2.1 är utfallsrummet

$$\Omega = \{FFF, FFO, FOF, FOO, OFF, OFO, OOF, OOO\}.$$

Med en *händelse* menar vi en delmängd av Ω. I exempel 2.1 har vi beräknat sannolikheten för händelsen A, där

$$A = \{FOO, OFO, OOF\}.$$

Händelser betecknar vi oftast med stora bokstäver A, B, C, D, o s v. Händelser och hur de inträffar kan åskådliggöras med hjälp av mängddiagram på följande sätt.



Figur 2.2 Olika händelser i ett utfallsrum Ω.

När vi beräknade sannolikheten för A i exempel 2.1 bestämde vi hur många av de möjliga utfallen i Ω som gav händelsen A och använde följande.

> **Definition**
> **Den klassiska sannolikhetsdefinitionen**
> Antag att det finns m möjliga utfall i utfallsrummet och att alla är lika sannolika. Om g av utfallen är gynnsamma, d v s medför en viss händelse A, så är sannolikheten för händelsen A
>
> $$P(A) = \frac{g}{m}.$$

Vi använder alltså beteckningen $P(A)$ för sannolikheten för händelsen A. (Det engelska ordet för sannolikhet är "probability".) Den klassiska sannolikhetsdefinitionen kan endast användas om man har ändligt många utfall m i utfallsrummet och alla är lika sannolika.

Exempel 2.2

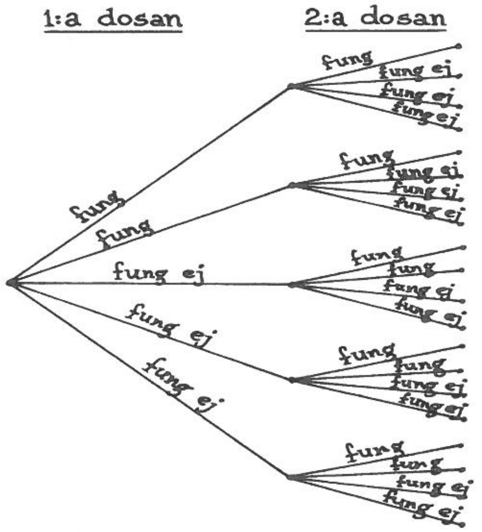
När en viss typ av räknedosor levereras till återförsäljaren ligger de i förpackningar med 5 dosor i varje. Plötsligt kommer klagomål på att C-knappen inte fungerar och man vill undersöka hur det förhåller sig med inneliggande lagret. Ur varje förpackning tar man på måfå 2 dosor. En förpackning innehåller 3 dosor med C-knapp som inte fungerar. Hur stor är sannolikheten att man ur den förpackningen får

a) exakt 2 dosor med fungerande C-knapp?

b) först 1 dosa med fungerande C-knapp och sedan 1 där C-knappen inte fungerar?

c) exakt 1 dosa där C-knappen fungerar och exakt 1 där C-knappen inte fungerar?

Lösning: De olika möjliga utfallen kan åskådliggöras med träddiagram. (Se figur 2.3.)



Figur 2.3

Den första dosan kan väljas på 5 olika sätt och den andra på 4 olika sätt. Totalt finns det då $m = 5 \cdot 4 = 20$ möjliga utfall. De är alla lika sannolika, eftersom dosorna valdes på måfå, så vi kan tillämpa den klassiska sannolikhetsdefinitionen. Låt A, B och C beteckna händelserna i a), b) respektive c).

a) Det finns $g = 2 \cdot 1 = 2$ utfall som ger händelsen A. Alltså är

$$P(A) = g/m = 2/20 = 0.1.$$

b) Här finns $g = 2 \cdot 3 = 6$ utfall som är gynnsamma för händelsen B. Alltså är

$$P(B) = g/m = 6/20 = 0.3.$$

c) Här måste vi tänka på att man först kan få en som fungerar och sedan en som inte fungerar eller också först en som inte fungerar och sedan en som fungerar. Det finns alltså $g = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$ gynnsamma utfall och

$$P(C) = g/m = 12/20 = 0.6.$$

För att räkna ut antalet utfall i exempel 2.2 har vi använt den grundläggande multiplikationsprincipen. Vi formulerar den allmänt.

Definition
Multiplikationsprincipen
Om man i tur och ordning skall göra k stycken operationer varvid den första kan göras på n_1 sätt, den andra på n_2 sätt o s v, så är totala antalet sätt att göra de k operationerna lika med

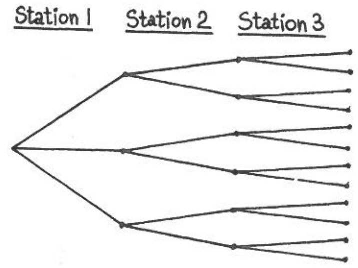
$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

När vi beräknade antalet möjliga utfall i exempel 2.2 gjorde vi 2 operationer i form av val, där den första kunde göras på $n_1 = 5$ sätt och den andra $n_2 = 4$ sätt.

Exempel 2.3

I en såg passerar de färdighyvlade plankorna tre olika kontrollstationer. Vid den första bedöms plankornas längd enligt 3 alternativ, vid den andra bedöms plankornas tjocklek enligt 2 alternativ och vid den tredje bedöms plankornas kvistighet enligt 2 alternativ. På hur många sätt kan en planka bli bedömd?

Lösning: Enligt multiplikationsprincipen kan den bli bedömd på $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ olika sätt. Se träddiagrammet i figur 2.4.



Figur 2.4

I exempel 2.2 b) är vi intresserade av i vilken ordning vi får dosorna. När vi räknade ut antalet utfall i exempel 2.2 tog vi också hänsyn till i vilken ordning dosorna valdes. Men i exempel 2.2 c) är ordningen i vilken vi får dosorna oväsentlig. I ett sådant fall kan man lika gärna räkna utan att ta hänsyn till ordningen om man utnyttjar följande resultat.

Sats 2 A
Antalet sätt att välja ut k element bland n element utan återläggning mellan dragningarna och utan hänsyn till den inbördes ordningen bland de utvalda elementen är

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}^{k \text{ faktorer}}}{\underbrace{k(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}_{k \text{ faktorer}}}.$$

Anmärkning 2.1 Det gäller att $k! = k(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$, $0! = 1$ och $\binom{n}{0} = 1$.

Bevis: Antag att det går att välja ut k element bland n utan hänsyn till ordning på x sätt. Om vi skulle ha tagit hänsyn till ordningen så kunde vi valt ut k element bland n på $n(n-1)...(n-k+1)$ sätt enligt multiplikationsprincipen. Men samma resultat får vi om vi först väljer ut k element bland n utan hänsyn till ordning, som går på x sätt, och sedan ordnar de utvalda k elementen, vilket går på $k! = k(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ sätt. Multiplikationsprincipen ger då

$$n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = x\cdot k!$$

dvs

$$x = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.$$

Exempel 2.4
Till en elektrisk firma kommer en sändning 100 ohms motstånd. För att kontrollera märkningens riktighet görs en statistisk mottagningskontroll. Motstånden ligger förpackade i askar om 20 i varje. Ur varje ask väljs slumpmässigt (utan återläggning) 5 motstånd vars resistans testas. Om det är 4 felmärkta motstånd i en ask vad är sannolikheten att man får exakt 2 felmärkta i urvalet?

Lösning: Eftersom det är ointressant i vilken ordning man får de felmärkta motstånden räknar vi utan hänsyn till ordningen. Antalet möjliga utfall m är antalet sätt att välja ut 5 motstånd bland 20 utan hänsyn till ordningen. Enligt sats 2 A är $m = \binom{20}{5}$. Alla m utfallen

är lika sannolika eftersom motstånden valdes slumpmässigt. Den klassiska sannolikhetsdefinitionen kan alltså användas. De gynnsamma utfallen är de som ger 2 felmärkta och 3 som är korrekt märkta. Antalet sätt att välja ut 2 felmärkta från de 4 som finns är $\binom{4}{2}$ enligt sats 2 A eftersom vi inte tar hänsyn till ordningen. Antalet sätt att välja ut 3 korrekt märkta från de 16 som finns är på motsvarande sätt $\binom{16}{3}$. Enligt multiplikationsprincipen är då $g = \binom{4}{2}\binom{16}{3}$. Vi får enligt den klassiska sannolikhetsdefinitionen

$$\begin{aligned} P(\text{exakt 2 felmärkta}) &= \frac{g}{m} = \frac{\binom{4}{2}\binom{16}{3}}{\binom{20}{5}} = \\ &= \frac{4\cdot 3\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16} = \\ &= \frac{14\cdot 5}{19\cdot 17} = 0.217 = 0.22. \end{aligned}$$

Många sannolikhetsproblem kan lösas på två sätt, antingen genom att man tar hänsyn till ordningen eller genom att man inte gör det.

Exempel 2.5
Lös exempel 2.2 c) utan att ta hänsyn till ordningen.

Lösning: Utan hänsyn till ordningen blir $m = \binom{5}{2}$ enligt sats 2 A. Antalet gynnsamma utfall till händelsen C är $g = \binom{3}{1}\binom{2}{1}$ enligt sats 2 A och multiplikationsprincipen. Den klassiska sannolikhetsdefinitionen ger

$$P(C) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{3\cdot 2\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 4} = 0.6.$$

I exempel 2.2-2.5 består utfallsrummen av ändligt många utfall. Men så är det inte alltid vilket framgår av följande exempel.

Exempel 2.6
Betrakta det radioaktiva preparatet i exempel 1.2, sid 2. Hur stor är sannolikheten att det ger mer än 7 pulser per 5 sekunder?

Lösning: Ett lämpligt utfallsrum för det slumpmässiga försöket att registrera antalet pulser per tidsenhet är $\Omega = \{0, 1, 2, ..., 9, 10, 11, ...\}$. Vi kan inte ange något största värde på antalet pulser per tidsenhet. Här består alltså utfallsrummet av oändligt men numrerbart många utfall och vi kan inte använda den klassiska sannolikhetsdefinitionen. Hur skall vi då göra? Ett sätt är att utgå från frekvenstabellen i exempel 1.2, sid 2, och säga att en approximation av

Tabell 2.1 Frekvenstabell över antalet pulser per 5 sekunder

Antal pulser	Frekvens	Relativ frekvens (%)
0	19	1.9
1	73	7.3
2	146	14.6
3	196	19.6
4	195	19.5
5	156	15.6
6	105	10.5
7	59	5.9
8	30	3.0
9	13	1.3
10	5	0.5
11	2	0.2
12	1	0.1
	1000	100.0

den sökta sannolikheten är $0.040 + 0.015 + 0.005 = 0.06$. Men en bättre approximation skulle vi få om vi hade fler mätningar, ty allteftersom vi gör fler mätningar så kommer relativa frekvenserna att närma sig vissa tal för att så småningom stabiliseras. I tabell 2.1 redovisas resultatet efter ytterligare 800 mätningar. Utgående från denna frekvenstabell skulle en approximation av den sökta sannolikheten vara $0.030 + 0.013 + 0.005 + 0.002 + 0.001 = 0.05$. Intuitivt tycker man att den senare approximationen bör vara bättre eftersom relativa frekvenserna då har stabiliserat sig mer.

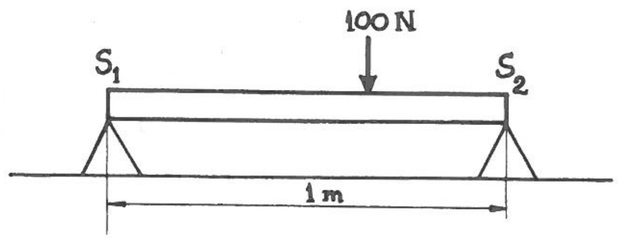
Exempel 2.7

Betrakta en 1 m lång lättmetallbalk med stöd i ändpunkterna. (Se figur 2.5, sid 47.) En last på 10 kg kommer att placeras på balken och har lika stor chans att hamna var som helst på balken. Vi skall registrera den motverkande kraften i stödpunkten S_1. Vad är sannolikheten att den motverkande kraften i S_1 är större än 70 N? ($g = 10.0$ m/s^2)

Lösning: Eftersom den motverkande kraften i S_1 kan anta vilket värde som helst mellan 0 N och 100 N så är ett lämpligt utfallsrum $\Omega = \{\, x \mid 0 \leq x \leq 100 \,\}$, dvs utfallsrummet är ett intervall, och består alltså av så många tal att det inte ens är numrerbart. Inte heller här kan vi då använda den klassiska sannolikhetsdefinitionen. Men vi kan resonera på följande sätt.

Den motverkande kraften i S_1 blir mer än 70 N om lasten hamnar på de 0.3 m som är närmast stödpunkten S_1. Om vi upprepar försöket att godtyckligt placera ut lasten ett mycket stort antal gånger så bör den hamna på de 0.3 m som är närmast S_1 i 3/10 av fallen. Vi har ju antagit att det är lika stor chans att den hamnar var som helst längs den 1 m långa balken. Om vi låter A vara händelsen att den motverkande kraften i S_1 är större än 70 N så är

$$P(A) = \frac{3}{10} = 0.3.$$



Figur 2.5 Belastning på balk.

I exempel 2.1 och exempel 2.6-2.7 har vi betraktat olika utfallsrum. Om Ω består av ändligt eller numrerbart många utfall, som i exemplen 2.1 och 2.6, kallas det *diskret*. Om Ω består av icke numrerbart många utfall, d v s i praktiken ett eller flera intervall, som i exempel 2.7, kallas det *kontinuerligt*. När man räknar med sannolikheter måste man vara medveten om vilken typ av utfallsrum man har.

Vi har nu i några exempel sett hur man kan resonera sig fram till vissa sannolikheter. Men hur skall vi allmänt definiera sannolikheten $P(A)$ för en händelse A? Vi kan inte ta den klassiska sannolikhetsdefinitionen som allmän definition eftersom den inte gäller generellt. Tyvärr kan vi inte heller definiera $P(A)$ med hjälp av relativa frekvensens stabilitet eftersom man då stöter på matematiska svårigheter. Istället får vi säga att sannolikheten $P(A)$ för en viss händelse A är ett tal med vissa egenskaper. Detta tal bör stämma överens med frekvenstolkningen, d v s om $P(A) = 0.3$ så tolkar vi det som att relativa frekvensen för händelsen A blir ungefär 0.3 efter ett mycket stort antal upprepningar av försöket. Hur sannolikheterna skall väljas beror på den situation man befinner sig i. Ibland kan man utnyttja klassiska sannolikhetsdefinitionen (exempel 2.1-2.2 och exempel 2.4), ibland kan man använda tidigare insamlat material (exempel 2.6) och ibland kan man teoretiskt resonera sig fram till ett lämpligt tal (exempel 2.7). De allmänna egenskaper som måste vara uppfyllda framgår av definitionen på nästa sida. Utgående från denna definition kan man sedan härleda ett antal viktiga resultat som gör att man kan räkna med sannolikheter på ett smidigt sätt.

Definition
En funktion P som till varje händelse A i ett utfallsrum Ω ordnar ett reellt tal $P(A)$ sägs vara ett *sannolikhetsmått* om P har följande egenskaper:

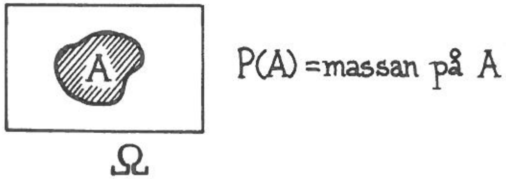
a) $0 \leq P(A) \leq 1$ för alla A,

b) $P(\Omega) = 1$,

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ om A och B är disjunkta, d v s ej kan inträffa samtidigt.

Om P är ett sannolikhetsmått så kallas $P(A)$ för *sannolikheten för* A. Om två händelser A och B inte kan inträffa samtidigt (se figur 2.7) ger c) i definitionen ovan en regel för att beräkna sannolikheten för unionhändelsen $A \cup B$. Men om de två händelserna A och B kan inträffa samtidigt då måste man använda resultatet i sats 2 C nedan.

Ett bra sätt att tolka sannolikheter är att tänka sig dem som massor fördelade på Ω. Man talar ofta om *sannolikhetsmassa*.



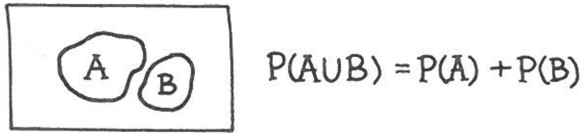
Figur 2.6

Då gäller enligt egenskaperna i definitionen följande.

a) Massan på A är alltid icke-negativ och inte större än 1.

b) Totala massan på hela Ω är 1.

c) Om A och B inte kan inträffa samtidigt så är massan på $A \cup B$ summan av massorna på A och B. (Se figur 2.7.)



Figur 2.7

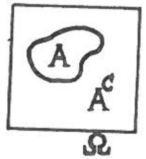
Med hjälp av masstolkningen kan man enkelt troliggöra följande användbara resultat för att beräkna sannolikheten för en komplementhändelse A^c när man känner sannolikheten för händelsen A.

Sats 2 B

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Eftersom totala massan på hela Ω är 1 så måste massan på komplementhändelsen A^c vara 1 minus massan på A, d v s

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$



Exempel 2.8
Vid en arbetsplats är sannolikheten 0.95 att ingen olycka skall inträffa. Vad är sannolikheten för att minst en olycka skall inträffa?

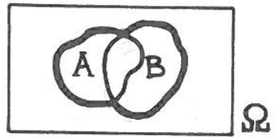
Lösning: Låt A vara händelsen att ingen olycka skall inträffa. Då är A^c händelsen att minst en olycka skall inträffa. Den sökta sannolikheten blir då $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0.95 = 0.05$.

Om man ska beräkna sannolikheten för unionhändelsen $A \cup B$, där händelserna A och B kan inträffa samtidigt, så måste man använda resultatet i sats 2 C nedan. Denna sats brukar kallas för additionssatsen för händelser.

Sats 2 C

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Om man adderar massan på A och massan på B så får man mer än massan på $A \cup B$ eftersom massan på $A \cap B$ har kommit med två gånger och då blir $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$.



Exempel 2.9
Då man tillverkar en viss sorts keramikplattor kan en platta få fel färg med sannolikhet 0.05 och bubblor i glasyren med sannolikhet 0.08. Sannolikheten att en platta får både fel färg och bubblor i glasyren är 0.03. Vad är sannolikheten att en platta

a) får minst en av defekterna fel färg och bubblor i glasyren?

b) inte får någon av de två defekterna?

c) får exakt en av defekterna?

Lösning: Låt A vara händelsen att plattan får fel färg och B händelsen att plattan får bubblor i glasyren. Då är $A \cap B$ händelsen att plattan får både fel färg och bubblor i glasyren.

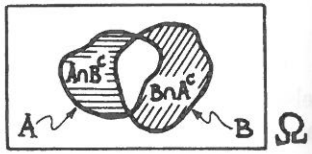
a) Händelsen att plattan får minst en av defekterna är $A \cup B$. Enligt sats 2 C gäller

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \\ &= 0.05 + 0.08 - 0.03 = 0.10. \end{aligned}$$

b) Händelsen att plattan inte får någon av defekterna är komplementhändelse till händelsen att plattan får minst en av defekterna. Enligt sats 2 B blir den sökta sannolikheten således

$$\begin{aligned} P(\text{inte någon av defekterna}) &= P\big((A \cup B)^c\big) = \\ &= 1 - P(A \cup B) = \\ &= 1 - 0.10 = 0.90. \end{aligned}$$

c) Händelsen att plattan får exakt en av defekterna kan uttryckas som händelsen "fel färg men inte bubblor eller bubblor men inte fel färg" det vill säga $(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$, där $A \cap B^c$ och $B \cap A^c$ är disjunkta. Alltså är



$$P(\text{exakt en av defekterna}) = P(A \cap B^c) + P(B \cap A^c).$$

Eftersom $P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B)$, så är

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0.05 - 0.03 = 0.02.$$

På samma sätt fås

$$P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B) = 0.08 - 0.03 = 0.05.$$

Alltså blir

$$\begin{aligned} P(\text{exakt en av defekterna}) &= P(A \cap B^c) + P(B \cap A^c) = \\ &= 0.02 + 0.05 = 0.07. \end{aligned}$$

När man löser sannolikhetsproblem har man ofta stor hjälp i sitt resonemang av att rita mängdfigurer som i exempel 2.9 c).

Exempel 2.10

Vid den statistiska mottagningskontrollen i exempel 2.4, sid 44, där man slumpmässigt väljer ut 5 motstånd utan återläggning ur askar med 20 motstånd, gäller följande regler. Om man finner mer än 2 felmärkta motstånd i urvalet från en ask skickas asken tillbaka och priset på sändningen reduceras med en given summa. Om man finner 1 eller 2 felmärkta motstånd i urvalet så undersöker man alla motstånd i asken, d v s man gör en allkontroll. Priset reduceras sedan efter antalet felmärkta motstånd man finner. Om man inte finner något felmärkt motstånd i urvalet så accepteras asken och man betraktar alla i den asken som korrekt märkta. Vad är sannolikheten att en ask skall

a) accepteras b) allkontrolleras c) skickas tillbaka

om den innehåller 4 felmärkta motstånd?

Lösning: Låt A_k vara händelsen att man i urvalet får exakt k felmärkta motstånd och exakt $5 - k$ korrekt märkta, $k = 0, 1, 2$. Låt B vara händelsen att man får fler än 2 felmärkta motstånd.

a) Asken accepteras om händelsen A_0 inträffar och vi söker alltså $P(A_0)$. Som i exempel 2.4 räknar vi utan hänsyn till ordning och vi använder den klassiska sannolikhetsdefinitionen med $m = \binom{20}{5}$. Antalet gynnsamma händelser blir $g = \binom{4}{0}\binom{16}{5}$ och alltså är

$$P(A_0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{16}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{7 \cdot 13}{19 \cdot 17} = 0.282 = 0.28.$$

b) Asken totalundersöks om händelsen $A_1 \cup A_2$ inträffar. Nu kan inte A_1 och A_2 inträffa samtidigt. Alltså är

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

I exempel 2.4 har vi redan beräknat $P(A_2) = 0.217$. Med klassiska sannolikhetsdefinitionen får vi

$$P(A_1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{16}{4}}{\binom{20}{5}} = \frac{35 \cdot 13}{19 \cdot 17 \cdot 3} = 0.470 = 0.47.$$

Då blir den sökta sannolikheten

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0.217 + 0.470 = 0.687 = 0.69.$$

c) Asken skickas tillbaka om händelsen B inträffar men B kan uttryckas som $(A_0 \cup A_1 \cup A_2)^c$ och alltså är

$$\begin{aligned} P(B) &= P((A_0 \cup A_1 \cup A_2)^c) = \\ &= 1 - P(A_0 \cup A_1 \cup A_2) = \\ &= 1 - (P(A_0) + P(A_1 \cup A_2)) = \\ &= 1 - 0.282 - 0.687 = 0.03. \end{aligned}$$

Övningar

2.1 Bland 10 muttrar finns 4 defekta. Man tar 4 muttrar på måfå utan återläggning. Vad är sannolikheten att man får

a) alla 4 defekta? b) först 2 defekta och sedan 2 korrekta?
c) exakt 2 defekta?

2.2 I en låda ligger 15 glödlampor av vilka 5 är defekta. Man tar 5 lampor på måfå utan återläggning ur lådan. Beräkna sannolikheten att man får

a) ingen defekt lampa, b) exakt 1 defekt lampa,
c) exakt 2 defekta lampor, d) högst 2 defekta lampor,
e) minst 3 defekta lampor, f) minst 2 defekta lampor.

2.3 Bland 12 elproppar finns 5 defekta. Man tar utan återläggning på måfå 4 proppar. Vad är sannolikheten att

a) först fås 2 defekta och sedan 2 korrekta proppar?
b) bland de 2 första propparna fås exakt en korrekt och de 2 sista är defekta?
c) både bland de 2 första och bland de 2 sista finns exakt en defekt propp?

2.4 I en låda finns 12 glödlampor, varav 4 är av typ 25 W, 3 är av typ 40 W och 5 är av typ 60 W. Man väljer utan återläggning på måfå 5 lampor ur lådan. Vad är sannolikheten att

a) exakt 4 är av typ 60 W?
b) högst 1 är av typ 25 W?
c) exakt 2 är av typ 40 W och exakt 2 av typ 60 W?

2.5 Av 20 motorer har 6 mindre felaktigheter, 3 allvarliga felaktigheter och de övriga 11 är felfria. Man väljer på måfå 3 av motorerna utan återläggning. Beräkna sannolikheten att man får

a) 2 motorer med mindre felaktigheter och en felfri,
b) åtminstone 2 motorer med felaktigheter av något slag,
c) en motor med mindre fel, en med allvarligt fel och en felfri,
d) högst 1 motor med felaktigheter av något slag.

2.6 Ett varuparti om 100 enheter innehåller 6 defekta enheter. En köpare tar på måfå och utan återläggning ut 5 enheter och undersöker dessa. Köparen accepterar partiet om högst en enhet i hans urval är defekt. Vad är sannolikheten att köparen skall acceptera partiet?

2.7 a) Två personer sätter sig på måfå vid ett kvadratiskt bord med plats för en person per sida. Vad är sannolikheten att de sätter sig mittemot respektive bredvid varandra?
b) En student har en teori om att personer föredrar att sitta bredvid varandra istället för mittemot varandra. Sedan han observerat 276 par av personer som satte sig vid kvadratiska bord (med plats för en person per sida) fann han att 91 par satte sig mittemot varandra och att 185 par satte sig bredvid varandra. Han drog då slutsatsen att hans teori stämmer eftersom så många fler par föredrog att sitta bredvid varandra. Vad anser Du om det resonemanget?

2.8 Ange lämpligt utfallsrum och ange om det är diskret eller kontinuerligt för det slumpmässiga försöket i

a) exempel 1.1, sid 2, b) exempel 1.3, sid 3,
c) exempel 1.4, sid 3, d) exempel 1.5, sid 4,
e) exempel 1.8, sid 5.

2.9 Vad är sannolikheten att den motverkande kraften i S_1 i exempel 2.7, sid 46, är

a) mindre än 60 N? b) mellan 20 N och 50 N?

2.10 Beräkna $P(B)$ om A och B är disjunkta händelser sådana att

$$P(A) = 0.25 \quad \text{och} \quad P(A \cup B) = 0.75.$$

2.11 Två händelser A och B har sannolikheterna 0.6 respektive 0.7. Kan händelserna vara disjunkta?

2.12 Låt A och B vara två godtyckliga händelser i ett utfallsrum. Rita figur och uttryck med mängdbeteckning följande:

a) endast händelsen A inträffar,

b) endast händelsen B inträffar,

c) exakt en av händelserna A och B inträffar,

d) ingen av händelserna A och B inträffar.

2.13 Låt A, B och C vara tre godtyckliga händelser i ett utfallsrum. Rita figur och uttryck med mängdbeteckning följande:

a) ingen, b) exakt en, c) exakt två,
d) alla tre,

av händelserna A, B och C inträffar.

2.14 Vid kontroll av ett parti leksaksbilar visade sig 5% vara dåligt hopsatta och 3% dåligt lackerade medan 1% var både dåligt hopsatta och dåligt lackerade. Hur stor är sannolikheten att en på måfå tagen bil

a) har åtminstone något av de två felen? b) är felfri?

2.15 Vid tillverkning av en viss typ av byggelement kan två slags fel A och B uppkomma hos de tillverkade enheterna. Man vet att $P(A) = 0.1$, $P(B) = 0.2$ och $P(A \cap B) = 0.05$. Beräkna sannolikheten att en tillverkad enhet har

a) åtminstone något av felen, b) felet A men inte felet B,
c) felet B men inte felet A, d) exakt ett av felen A och B.

2.16 I en tätort med 30 000 invånare finns det 3 tidningar A, B och C. Vid en undersökning fann man att

12 000 läser A,	7 000 läser A och B,
8 000 läser B,	4 500 läser A och C,
6 000 läser C,	1 000 läser B och C,

500 läser A, B och C.

Hur stor är sannolikheten att en slumpmässigt vald invånare i tätorten läser

a) minst en av tidningarna A, B och C?

b) ingen av tidningarna A, B och C?

c) en och endast en av tidningarna A, B och C?

2.17 En församling innehåller 16 socialister och 14 borgerliga. Man väljer slumpmässigt en styrelse bestående av 5 ledamöter. Vad är sannolikheten att den får borgerlig majoritet?

2.2 Betingad sannolikhet

Ibland har man information om att en händelse av något slag har inträffat. Detta kan påverka beräknandet av sannolikheterna i försöket.

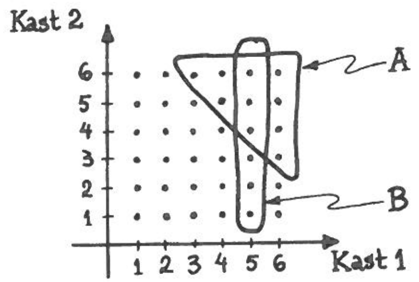
Exempel 2.11

Kalixkillen Kalle och Töretösen Tora spelar tärning. De kastar en tärning två gånger var och den som får högsta tärningssumman vinner. Kalles kast gav tärningssumman 8.

a) Vad är sannolikheten att Tora vinner?

b) Toras första kast blev 5. Vad är nu sannolikheten att hon vinner?

Lösning: Utfallsrummet vid försöket "kasta en tärning två gånger" beskriver man lättast med en figur. Se figur 2.8, sid 56.



Figur 2.8

Alla de 36 utfallen (= prickarna) är lika sannolika så vi kan använda den klassiska sannolikhetsdefinitionen. Låt A vara händelsen att tärningssumman är större än 8 och B händelsen att första kastet blir 5. Då vinner Tora om A inträffar.

a) Eftersom det är 10 av de 36 utfallen som ger händelsen A (se figur 2.11.), så blir den sökta sannolikheten $P(A) = 10/36 = 0.28$.

b) Nu vet vi att händelsen B har inträffat. Vi söker sannolikheten för händelsen A givet att B har inträffat, den händelsen betecknas $A \mid B$. Av de 6 möjliga utfallen i B är det 3 som leder till A och den sökta sannolikheten blir $P(A \mid B) = 3/6 = 0.5$.

Sannolikheten $P(A \mid B)$ kallas *den betingade sannolikheten för A givet B*. Vi beräknade den genom att krympa utfallsrummet från Ω till B och fråga oss vad sannolikheten är att A inträffar när utfallsrummet är B. Med sannolikhetsmassetolkningen gäller ju

$$P(A) = \frac{\text{massan på } A}{1} = \frac{\text{massan på } A}{\text{massan på } \Omega}.$$

När vi nu krymper utfallsrummet från Ω till B bör följande gälla:

$$P(A \mid B) = \frac{\text{massan på den del av } A \text{ som också ligger i } B}{\text{massan på } B} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

I exempel 2.11 gäller just detta, ty $P(A \cap B) = 3/36$ och $P(B) = 6/36$ och alltså är

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3/36}{6/36} = \frac{3}{6} = P(A \mid B).$$

Följande definition är då rimlig.

Definition
Med *den betingade sannolikheten*, $P(A \mid B)$, för händelsen A givet händelsen B menas

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{2.1}$$

Anmärkning 2.2 För att definitionen skall vara meningsfull måste vi förutsätta att $P(B) > 0$.

Anmärkning 2.3 Man kan lätt visa att $P(A \mid B)$ uppfyller egenskaperna för sannolikhetsmått och alltså är en sannolikhet.

Formel (2.1) kan också skrivas som

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B). \tag{2.2}$$

Man kan också låta A och B byta plats i formel (2.2) och får då

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A). \tag{2.3}$$

Formeln (2.2) eller (2.3) används ofta för att beräkna $P(A \cap B)$ när man känner, eller enkelt kan beräkna, $P(A \mid B)$ och $P(B)$ eller $P(A)$. Betrakta t ex följande bekanta exempel.

Exempel 2.12
I en förpackning med 5 räknedosor finns 3 vars C-knapp inte fungerar. Om man slumpmässigt väljer ut först en dosa och sedan ytterligare en vad är sannolikheten att man får två dosor med C-knapp som fungerar? (Jämför exempel 2.2 a, sid 42.)

Lösning: Låt A vara händelsen att den först utvalda dosan har fungerande C-knapp och B händelsen att den därnäst utvalda dosan har fungerande C-knapp. Då är ju $P(A) = 2/5$ och $P(B \mid A) = 1/4$ och alltså är den sökta sannolikheten

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0.1.$$

Ofta när man skall beräkna sannolikheten för en händelse måste man använda sig av resonemang med betingade sannolikheter och utnyttja formlerna (2.1), (2.2) och (2.3) upprepade gånger.

Exempel 2.13
När ett företag skickar fraktgods till en återförsäljare sker detta antingen med buss, tåg eller flyg. 50% fraktas med buss, 30% med tåg och 20% med flyg. Andelen transportskadat gods är 5% med buss, 10% med tåg och 2% med flyg.

a) Hur stor andel av godset kan man räkna med får transportskador?

b) Om man mottar ett transportskadat gods hur stor är sannolikheten att det har skickats med tåg?

Lösning: Låt B beteckna händelsen att godset fraktas med buss, T att det fraktas med tåg och F att det fraktas med flyg. Sätt

$$S = \text{händelsen att ett gods är transportskadat.}$$

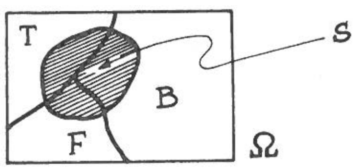
Då har vi givet att

$$\begin{aligned} P(B) &= 0.50, & P(\,S \mid B\,) &= 0.05, \\ P(T) &= 0.30, & P(\,S \mid T\,) &= 0.10, \\ P(F) &= 0.20, & P(\,S \mid F\,) &= 0.02. \end{aligned}$$

a) Vi söker $P(S)$. Vi får (se figur 2.9)

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S \cap B) + P(S \cap T) + P(S \cap F) \\ &= P(B)P(\,S \mid B\,) + P(T)P(\,S \mid T\,) + P(F)P(\,S \mid F\,) \end{aligned}$$

genom att använda formel (2.2).



Figur 2.9

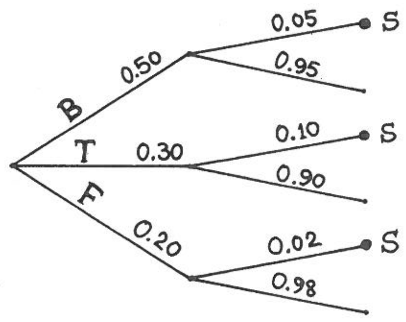
Alltså är

$$P(S) = 0.50 \cdot 0.05 + 0.30 \cdot 0.10 + 0.20 \cdot 0.02 = 0.059 = 0.06.$$

Vi kan räkna med att 6% av godset blir transportskadat.

Vi kan också illustrera resonemanget genom att använda träddiagram och markera sannolikheterna för de olika händelserna som i figur 2.10, sid 59. Den sökta sannolikheten får vi genom att följa de "grenar" som leder fram till S och multiplicera ihop sannolikheterna som passeras och sedan addera, d v s

$$P(S) = 0.50 \cdot 0.05 + 0.30 \cdot 0.10 + 0.20 \cdot 0.02 = 0.06.$$



Figur 2.10

b) Vi söker $P(\,T \mid S\,)$ och använder först formel (2.1)

$$P(\,T \mid S\,) = \frac{P(T \cap S)}{P(S)}.$$

$P(S)$ har vi beräknat i a). $P(T \cap S)$ får vi genom att använda formel (2.2)

$$P(T \cap S) = P(T)P(\,S \mid T\,) = 0.30 \cdot 0.10 = 0.03.$$

Alltså är

$$P(\,T \mid S\,) = \frac{0.03}{0.059} = 0.51.$$

Övningar

2.18 Vid ett järnverk tas regelbundet prover på den inkommande malmen för analys. Följande händelser är intressanta

$$\begin{aligned} A &= \text{händelsen att Fe-halten är större än 66.5\%}, \\ B &= \text{händelsen att } SiO_2\text{-halten är mindre än 4.0\%}. \end{aligned}$$

Efter ett stort antal prov känner vi relativa frekvenserna för A, B och $A \cap B$ och tar dessa som approximationer för motsvarande sannolikheter, d v s $P(A) = 0.32$, $P(B) = 0.54$ och $P(A \cap B) = 0.23$. I ett nyligen analyserat prov vet vi att SiO_2-halten är mindre än 4%. Hur stor är då sannolikheten att Fe-halten är större än 66.5% ?

2.19 Nikkalaflickan Kickan har tre kort, av vilka ett är rött på båda sidor, ett är vitt på båda sidor och ett är vitt på ena och rött på den andra sidan. Pitepilten Pelle drar ett av korten på måfå, tittar på ena sidan och ser att den är röd. Kickan satsar 50 kr på att den andra sidan är röd och vill att Pelle skall satsa lika mycket på att den andra sidan är vit. Detta eftersom Pelle fick ett kort med röd sida och då måste det vara antingen det röd-vita eller det röd-röda kortet och alltså lika chans för båda. Skall Pelle anta utmaningen? Motivera svaret.

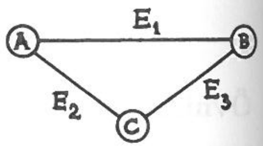
2.20 I ett laboratorium gör man regelbundet kontroll av halten Cl och halten Br i de burkar som används. Varje burk klassificeras med avseende på halten av vardera av dessa föroreningar i två kategorier och av lång erfarenhet vet man att burkar från en viss leverantör uppför sig enligt följande sannolikheter:

	Cl	
Br	låg	hög
låg	0.82	0.09
hög	0.05	0.04

Om man tar en burk på måfå från denna leverantör vad är sannolikheten att man får en burk med

a) låg Br-halt, b) hög Cl-halt givet att den har hög Br-halt,
c) hög Cl-halt, d) låg Cl-halt givet att den har låg Br-halt.

2.21 Ett landsvägssystem mellan städerna A, B och C är givet i figuren. Under vintern kan man inte alltid resa direkt mellan A och B på grund av snöhinder. Låt E_1, E_2 och E_3 beteckna händelsen att vägen AB, AC respektive CB är framkomlig. Antag att under en viss dag är $P(E_1) = \frac{2}{5}$, $P(E_2) = \frac{3}{4}$, $P(E_3) = \frac{2}{3}$, $P(E_3 \mid E_2) = \frac{4}{5}$ och $P(E_1 \mid E_2 \cap E_3) = \frac{1}{2}$.



a) Vad är sannolikheten att en resenär kan resa från A till B om han måste passera C?

b) Vad är sannolikheten att han kan ta sig från A till B?

c) Vilken väg skall han välja för att maximera sannolikheten att ta sig fram från A till B?

2.22 På en arbetsplats skadades 1% av personalen under ett år. 60% av alla skadade var män. 30% av de anställda var kvinnor. Är det manliga eller kvinnliga anställda som löper största risken att råka ut för en skada enligt denna undersökning?

2.23 I en bultfabrik svarar maskinerna A, B och C för 25%, 35% respektive 40% av produktionen. Av de tillverkade bultarna är 5%, 4% respektive 2% defekta. En bult väljs ut på måfå och befinns vara defekt. Hur stor är sannolikheten för att bulten kom från

a) maskin A, b) maskin B, c) maskin C?

2.24 Ett företag som tillverkar batterier av en viss typ har tillverkningen förlagd till tre olika fabriker. Fabrik A står för 50% av tillverkningen, fabrik B 20% och fabrik C 30%. Man vet att ett batteri från fabrik A har 95% sannolikhet att räcka mer än 100 driftstimmar. Motsvarande sannolikheter för fabrikerna B och C är 97% respektive 98%. Man har blandat batterier från de tre fabrikerna i ett stort centralt lager.

a) Vad är sannolikheten att ett batteri som tas på måfå ur lagret skall räcka mer än 100 drifttimmar?

b) Man tar på måfå ett batteri ur lagret och finner att det räcker mer än 100 drifttimmar. Vad är sannolikheten för att det tillverkats i fabrik A?

2.25 Vid en statistisk mottagningskontroll skall man avvisa eller acceptera inkommande partier om 50 enheter vardera. Man använder följande tvåstegsförfarande. Först väljs 5 enheter på måfå ur partiet. Om någon av dessa är defekt så avvisas partiet. Om ingen är defekt väljer man på måfå ut ytterligare 10 enheter bland de återstående 45. Om någon av dessa är defekt så avvisas partiet, i annat fall accepteras det. Vad är sannolikheten att avvisa ett parti som innehåller 5 defekta enheter?

2.26 Meddelanden kodade i binära tecken 0 och 1 överföres i ett telekommunikationssystem. Signalerna störs av ett brus och därför förekommer felaktiga överföringar. Ett utsänt tecken 0 mottas som 1 med sannolikhet 0.01 (och som 0 med sannolikhet 0.99). Ett utsänt tecken 1 mottas som 0 med sannolikhet 0.02 (och som 1 med sannolikhet 0.98). Vidare förekommer tecknen 1 i en proportion 0.6 och tecknen 0 i en proportion 0.4.

a) Om 1 mottagits vad är då den betingade sannolikheten att 1 har sänts?

b) Hur stor proportion av tecknen överförs felaktigt? Det vill säga vad är sannolikheten för att ett på måfå utvalt tecken är felaktigt mottaget?

2.27 Om ett inbrott görs en natt så ringer tjuvlarmet med sannolikheten 0.99. Om inget inbrott görs ringer larmet med sannolikheten 0.02 Antag att sannolikheten är 0.001 att ett inbrott inträffar under en viss natt. En natt ringer tjuvlarmet. Vad är (den betingade) sannolikheten att ett inbrott har skett?

2.3 Oberoende händelser

Exempel 2.14
Pitepilten Pelle kastar en symmetrisk tärning två gånger. Låt A vara händelsen att han får 5 i första kastet. Låt B vara händelsen att han får 2 i andra kastet. Bestäm $P(B)$ och $P(B \mid A)$.

Lösning: $P(A) = P(B) = 1/6$ och $P(A \cap B) = 1/36$.
Då blir

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/36}{1/6} = 1/6 = P(B).$$

Den betingade sannolikheten för B givet A är alltså lika med den obetingade sannolikheten för B.

Vi ser att $P(B \mid A) = P(B)$ i exempel 2.14. Det betyder att informationen att A har inträffat inte ändrar vår kännedom om händelsen B. Då säger vi att A och B är oberoende händelser. Intuitivt bör ju inte heller det andra kastets resultat bero av det första. Om $P(B \mid A) = P(B)$ så är $P(A \cap B)/P(A) = P(B)$, d v s $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Vi gör därför följande definition.

Definition
Om $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ så säger vi att A och B är *oberoende* händelser.

Om två händelser A och B är beroende så måste vi ha kännedom om någon av de betingade sannolikheterna $P(B \mid A)$ eller $P(A \mid B)$, förutom om $P(A)$ och $P(B)$, för att kunna beräkna $P(A \cap B)$. Om händelserna är oberoende så räcker det att ha kunskap om $P(A)$ och $P(B)$.

Exempel 2.15
Betrakta en kedja bestående av 2 länkar i figur 2.11, sid 63. Om någon av länkarna tål mindre än 1000 N kommer den att brista. Antag att sannolikheten för att det skall inträffa är 0.05 för vardera länken. Vad är sannolikheten att kedjan skall brista?

Lösning: Låt A och B vara händelsen att länk 1 respektive länk 2 tål mindre än 1000 N. Då brister kedjan om händelsen $A \cup B$ inträffar. Vi söker alltså $P(A \cup B)$ och får med hjälp av sats 2 C och formel (2.2)

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.05 + 0.05 - P(B)P(A \mid B) \\ &= 0.10 - 0.05\,P(A \mid B). \end{aligned}$$

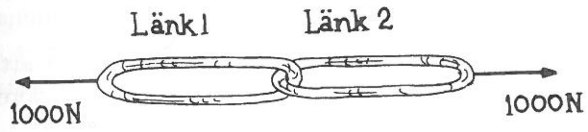
Nu måste vi veta något om sannolikheten $P(A \mid B)$ som mäter beroendet mellan A och B. Om t ex länkarna är slumpmässigt valda från två olika leverantörer, så kan A och B antas vara oberoende. I det fallet är $P(A \mid B) = P(A) = 0.05$ och alltså

$$P(A \cup B) = 0.1 - 0.05 \cdot 0.05 = 0.0975.$$

Men om de två länkarna är gjorda från samma stålbit av samma tillverkare så kan man vänta sig att hållfastheten hos dem är lika och alltså att $P(A \mid B) = 1$. Då blir

$$P(A \cup B) = 0.1 - 0.05 \cdot 1 = 0.05,$$

som är detsamma som sannolikheten att en länk brister. Sannolikheten att kedjan brister ligger alltså mellan 0.05 och 0.0975 beroende på vad $P(A \mid B)$ är.



Figur 2.11

Definitionen av oberoende kan lätt utvidgas till fler än två händelser. För t ex tre händelser blir den följande. Om

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \\ P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \\ P(A \cap C) &= P(A) \cdot P(C) \\ P(B \cap C) &= P(B) \cdot P(C) \end{aligned}$$

så är A, B och C oberoende händelser. Man kan också visa att om $A, B, C, \ldots$ är oberoende så är $A^c, B^c, C^c, \ldots$ oberoende, och även $A, B^c, C^c, \ldots$ är oberoende, vidare är $A, B, C^c, \ldots$ oberoende o s v.

Exempel 2.16

Vid tillverkning av en viss vara kan tre olika typer av fel A, B och C förekomma. Förekomsten av dessa fel är oberoende händelser och de olika felen förekommer med sannolikheterna $P(A) = 0.06$, $P(B) = 0.10$ och $P(C) = 0.04$. Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald enhet av varan

a) har alla tre felen?
b) inte har något av de tre felen?

Lösning:

a) Vi söker $P(A \cap B \cap C)$. Eftersom förekomsten av fel är oberoende blir

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \\ &= 0.06 \cdot 0.10 \cdot 0.04 = 0.00024. \end{aligned}$$

b) Här söker vi $P(A^c \cap B^c \cap C^c)$ och på grund av oberoendet fås

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c \cap C^c) &= (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) \cdot (1 - P(C)) = \\ &= 0.94 \cdot 0.9 \cdot 0.96 = 0.81. \end{aligned}$$

Exempel 2.17

Med sannolikhet 0.6 är livslängden hos en viss typ av glödlampor mer än 1000 timmar. Man kopplar 5 sådana lampor i ett belysningsnät. Händelserna att olika lampor slocknar kan antas oberoende. Vad är sannolikheten att minst en lampa lyser efter 1000 timmar?

Lösning: Låt A_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, vara händelsen att i:te lampan lyser mer än 1000 timmar. Då är $P(A_i) = 0.6$. Vi förenklar genom att resonera med komplementhändelser. Sats 2 B ger

$$\begin{aligned} p &= P(\text{minst en lampa lyser efter 1000 timmar}) = \\ &= 1 - P(\text{ingen lampa lyser efter 1000 timmar}) = \\ &= 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) = \\ &= 1 - P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3^c)P(A_4^c)P(A_5^c) = \end{aligned}$$

ty händelserna att lamporna slocknar är oberoende. Men

$$P(A_i^c) = 1 - 0.6 = 0.4$$

och då blir

$$\begin{aligned} P(\text{minst en lampa lyser efter 1000 timmar}) &= 1 - 0.4^5 = \\ &= 0.98976 = 0.99. \end{aligned}$$

Ett slumpmässigt försök kan ofta ses som en upprepning av n likadana delförsök, där händelserna i de olika delförsöken är oberoende. Vi säger då att vi har ett försök bestående av n *oberoende upprepningar av ett delförsök*. T ex är kast med tärning n gånger ett sådant. Delförsöket är här kast med tärning 1 gång och utfallen i de olika kasten är oberoende. (Se exempel 2.14, där $n = 2$.)

Exempel 2.18

Nikkalaflickan Kickan kastar en symmetrisk tärning 5 gånger. Vad är sannolikheten att hon får exakt 3 ettor?

Lösning: Betrakta de 5 kasten som 5 oberoende upprepningar av att kasta tärning en gång. Låt A vara händelsen att få etta vid kast med tärning en gång och A_3 händelsen att få exakt 3 ettor vid de 5 kasten. Då är $P(A) = 1/6$ och vi söker $P(A_3)$. Vi är nu intresserade av alla kastserier som ger exakt 3 ettor, t ex $AAAA^cA^c$ eller AAA^cA^cA eller A^cAAAA^c eller.... Det finns lika många sådana kastserier som det finns sätt att placera ut 3 stycken A på 5 platser, d v s lika många sätt som man kan välja

A	A		A	

ut 3 element från 5 utan hänsyn till ordning och utan återläggning. Enligt sats 2 A går det på $\binom{5}{3}$ sätt. Sannolikheten att få följden $AAAA^cA^c$ är på grund av oberoendet $(1/6)^3 \cdot (5/6)^2$ och sannolikheten är densamma för varje annan följd med exakt 3 stycken A. Alltså är

$$P(A_3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.032.$$

Om Kickan i exempel 2.18 gör n kast i stället för 5 och vi söker sannolikheten för att hon får k, $k \leq n$, ettor så blir den sökta sannolikheten med samma resonemang som tidigare

$$P(A_k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}.$$

Om vi dessutom ersätter tärningskastet med ett allmänt försök som består av n oberoende upprepningar av något delförsök så fås följande användbara resultat.

Sats 2 D
Betrakta ett försök bestående av n oberoende upprepningar av ett delförsök. Låt A vara en händelse som inträffar vid delförsöket med sannolikhet p. Då är sannolikheten att A inträffar exakt k gånger i försöket

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Bevis: Vi är intresserade av alla följder av n delförsök där A inträffar exakt k gånger, t ex

$$\underbrace{AA\ldots A}_{k \text{ st}}\underbrace{A^cA^c\ldots A^c}_{n-k \text{ st}} \quad \text{eller} \quad \underbrace{AA\ldots A}_{k-1 \text{ st}}\underbrace{A^cA^c\ldots A^c}_{n-k \text{ st}}\underbrace{A}_{1 \text{ st}}.$$

Antalet sådana följder är lika med antalet sätt att placera ut k stycken A på n platser, d v s $\binom{n}{k}$, enligt sats 2 A. Sannolikheten för var och en av dessa n följder är $p^k(1-p)^{n-k}$ på grund av oberoendet. Alltså är sannolikheten att A inträffar exakt k gånger

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Sannolikheterna $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ kallas binomialsannolikheter eftersom binomialkoefficienterna $\binom{n}{k}$ ingår.

Exempel 2.19
För en automatsvarv gäller att sannolikheten att en tillverkad enhet är felaktig är 0.1. Man tillverkar 6 enheter. Vi antar att tillverkade enheter blir felaktiga oberoende av varandra. Vad är sannolikheten att

a) exakt två, b) högst två, c) minst två

av de tillverkade enheterna är felaktiga?

Lösning: Detta är en typisk binomialsituation. Vi har ett försök som består av 6 oberoende upprepningar av delförsöket "tillverka en enhet". Händelsen A är händelsen att enheten är felaktig och $P(A) = p = 0.1$. Vi kan använda sats 2 D. Låt A_k vara händelsen att exakt k tillverkade enheter är felaktiga.

a) Vi söker $P(A_2)$ som enligt sats 2 D är

$$P(A_2) = \binom{6}{2} 0.1^2 0.9^4 = 0.098.$$

b) Låt B vara händelsen att högst två enheter är felaktiga. Då är $B = A_0 \cup A_1 \cup A_2$ där A_0, A_1 och A_2 inte kan inträffa samtidigt. Alltså är

$$P(B) = P(A_0 \cup A_1 \cup A_2) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2).$$

$P(A_0)$ och $P(A_1)$ fås med hjälp av sats 2 D som

$$\begin{aligned} P(A_0) &= \binom{6}{0} 0.1^0 0.9^6 = 0.531, \\ P(A_1) &= \binom{6}{1} 0.1^1 0.9^5 = 0.354. \end{aligned}$$

Alltså är

$$P(B) = 0.531 + 0.354 + 0.098 = 0.983 = 0.98.$$

c) Låt C vara händelsen att minst två enheter är felaktiga. Då är

$$C = A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 = (A_0 \cup A_1)^c$$

och alltså

$$\begin{aligned} P(C) &= P((A_0 \cup A_1)^c) = 1 - P(A_0 \cup A_1) = \\ &= 1 - P(A_0) - P(A_1) = \\ &= 1 - 0.531 - 0.354 = 0.115 = 0.12. \end{aligned}$$

Exempel 2.20
I en fabrik finns 10 maskiner, som arbetar oberoende av varandra. Sannolikheten för driftstopp under en dag är för var och en av maskinerna 0.10. Vad är sannolikheten att högst en av maskinerna stannar under en viss dag.

Lösning: Detta är åter en binomialsituation. Försöket består av 10 oberoende upprepningar av delförsöket "låta en maskin arbeta". Händelsen A är händelsen att maskinen får driftstopp, där $P(A) = p = 0.1$. Låt A_k vara händelsen att exakt k maskiner stoppar. Då är den sökta sannolikheten

$$\begin{aligned} P(\text{högst en maskin stoppar}) &= P(A_0 \cup A_1) = P(A_0) + P(A_1) = \\ &= \binom{10}{0} 0.1^0 0.9^{10} + \binom{10}{1} 0.1^1 0.9^9 = \\ &= 0.74 \end{aligned}$$

Övningar

2.28 För två oberoende händelser A och B gäller att $P(A) = 0.05$, $P(B) = 0.10$. En person påstår att $P(A \cup B) = 0.15$. Har han rätt? Om ej, vad är det rätta svaret?

2.29 Två händelser A och B har sannolikheter skilda från noll. A och B är disjunkta. Kan A och B vara oberoende?

2.30 Händelserna A och B är oberoende. B är dubbelt så sannolik som A och $A \cup B$ = utfallsrummet. Beräkna $P(A)$.

2.31 Vid tillverkning av TV-apparater kan det uppkomma fel på bl a kondensatorer och bildrör. Av erfarenhet vet man att 4% av apparaterna har fel på någon kondensator och 2% har fel på bildröret. Dessutom inträffar fel på kondensatorerna oberoende av fel på bildröret. Vad är sannolikheten att en slumpmässigt utvald TV-apparat

a) har fel både på någon kondensator och på bildröret?

b) har minst ett av felen?

2.32 A och B utför oberoende av varandra var sitt försök. Sannolikheterna att de skall lyckas med sina försök är 0.7 respektive 0.8.

a) Hur stor är sannolikheten att båda försöken lyckas?

b) Hur stor är sannolikheten att minst ett försök lyckas?

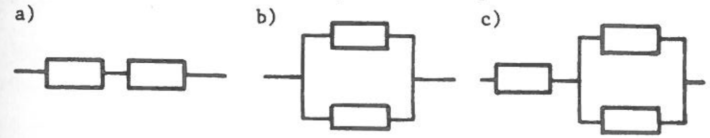
2.33 En maskin består av tre delar, om vilka man vet att de är felfria med sannolikheterna 0.9, 0.85 respektive 0.95. Funktionsdugligheten hos de tre delarna antas oberoende av varandra. Bestäm sannolikheten att maskinen fungerar, om den fungerar

a) endast om alla tre delarna fungerar.

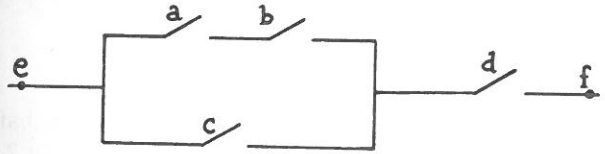
b) om minst en av de tre delarna fungerar.

2.34 Ett instrument består av två komponenter A och B och fungerar endast om båda komponenterna är hela. Vid en kurslaboration tar assistenten fram fyra sådana instrument. Han vet av bitter erfarenhet att en A-komponent brukar vara sönder med sannolikheten 0.2 och en B-komponent med sannolikheten 0.3. Beräkna sannolikheten att minst två av de fyra instrumenten ej fungerar. De åtta komponenterna antas gå sönder oberoende av varandra.

2.35 Antag att varje komponent i nedanstående system fungerar med sannolikheten p och att komponenterna fungerar oberoende av varandra. Hur stor är sannolikheten att systemet fungerar?



2.36 Vad är sannolikheten att det blir kontakt mellan punkterna e och f i nedanstående schema om reläkontakterna a, b, c och d slutes med sannolikheterna 0.2, 0.6, 0.3 respektive 0.9 och händelserna att de olika kontakterna sluts är oberoende



2.37 Sannolikheten för händelsen A i samband med ett visst slumpmässigt försök är $1/100$.

a) Om försöket upprepas 100 gånger, hur stor är sannolikheten att A skall inträffa minst en gång?

b) Hur många gånger måste försöket upprepas för att sannolikheten att A skall inträffa minst en gång skall vara $> 1/2$?

c) Om försöket utförts 999 gånger utan att A har inträffat, hur stor är den därav betingade sannolikheten att A skall inträffa den 1000:e gången?

2.38 Vid tillverkning av en viss vara kan tre olika typer av fel A, B och C förekomma. Förekomsten av dessa fel är oberoende händelser och de olika felen förekommer med sannolikheterna $P(A) = 0.06$, $P(B) = 0.10$ och $P(C) = 0.04$. (Jämför exempel 2.16, sid 64.) Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald enhet av varan har

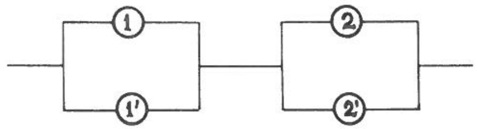
a) exakt ett, b) exakt två, c) minst ett

av felen A, B och C.

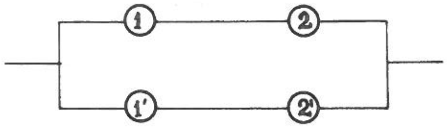
2.39 Man har ett seriesystem med två enheter som går sönder oberoende av varandra och har sannolikhet 0.9 respektive 0.8 att hålla viss tid. För att öka systemets funktionssannolikhet ämnar man koppla in parallellenheter. Man kan då antingen dubblera varje enhet eller dubblera hela systemet. Bestäm funktionssannolikheten för de olika systemen

a)

b)



c)



2.40 För att kontrollera en tillverkningsprocess stoppar man bandet och väljer på måfå 15 enheter som man undersöker. Om fler än 2 av dessa är defekta så justeras processen. Beräkna sannolikheten att processen justeras om felsannolikheten för processen är 0.05.

2.41 I en fabrik finns 10 maskiner, som arbetar oberoende av varandra. Sannolikheten för driftstopp under en dag är för var och en av maskinerna 0.10. (Se exempel 2.20, sid 67.) Bestäm sannolikheten att

a) exakt två, b) exakt tre, c) minst en, d) högst tre,

av maskinerna stoppar under en viss dag.

2.42 Vid ett monteringsband på en verkstad finns 10 arbetare. De använder alla under 20% av arbetstiden en handborrmaskin. Händelserna att olika arbetare i ett visst ögonblick använder sin handborrmaskin antas vara oberoende. Vad är sannolikheten att minst tre av arbetarna i ett visst ögonblick använder sin handborrmaskin?

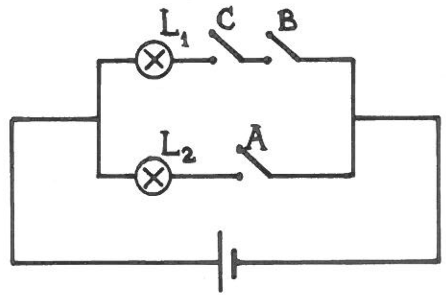
2.43 Man har ett tillförlitlighetssystem som består av n likadana komponenter. Dessa går sönder oberoende av varandra och varje komponent har sannolikheten p att fungera under viss tid. Systemet fungerar om minst m av de n komponenterna fungerar. Bestäm sannolikheten för att systemet fungerar.

2.44 Byggelement av en viss sort kan vara behäftade med fel av tre typer, typ I med sannolikheten 0.05, typ II med sannolikheten 0.10 och typ III med sannolikheten 0.03. Ett byggelement kan vara behäftat med fel av flera typer (I, II eller III) samtidigt. De olika feltyperna antas förekomma oberoende av varandra. Ett byggelement måste kasseras om minst ett fel av ovanstående typer förekommer.

a) Bestäm sannolikheten för att ett element måste kasseras.

b) En byggmästare köper 20 av ovanstående byggelement. Vad är sannolikheten att han måste kassera minst 2 stycken?

2.45 I figuren nedan är A, B och C reläer som är slutna med sannolikheterna 0.6, 0.4 respektive 0.3. Händelserna att respektive reläer är slutna är oberoende.



Beräkna sannolikheten att

a) ingen av lamporna L_1 och L_2 lyser.

b) exakt en av lamporna L_1 och L_2 lyser.