Домашняя контрольная работа №4.
вариант 8.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 17 \\ 22 & -5 & 17 \\ -10 & 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ -3 & 5 & 9 \\ -4 & 9 & 18 \end{pmatrix}$$

1) Обозначим исходный базис за e_1, e_2, e_3.

$f_1' = e_1$

$$f_2' = e_2 - \frac{(e_1, f_1')}{(f_1', f_1')} f_1' = e_2 - \frac{(e_2, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 = e_2 + \frac{+3}{3} e_1 = e_2 + e_1$$

$f_3' =$

$$e_3 - \frac{(e_3, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 - \frac{(e_3, e_2) + (e_3, e_1)}{(e_1, e_1) + (e_2, e_2) + 2(e_1, e_2)} (e_1 + e_2) =$$

$$= e_3 + \frac{4}{3} e_1 - \frac{9-4}{5+3-6} (e_1 + e_2) = e_3 + \frac{4}{3} e_1 - \frac{5}{2} e_2 - \frac{5}{2} e_1 =$$

$$= e_3 - \frac{5}{2} e_2 - \frac{7}{6} e_1$$

Отнормируем f_1', f_2' и f_3':

$$f_1 = \frac{e_1}{\sqrt{3}} \quad \left(f_1 = \frac{e_1}{|e_1|} = \frac{e_1}{\sqrt{(e_1, e_1)}} \right)$$

$$f_2 = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{e_1^2 + 2e_1e_2 + e_2^2}} = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{3+5-6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1 + e_2)$$

$$f_3 = \frac{e_3 - \frac{5}{2} e_2 - \frac{7}{6} e_1}{|e_3 - \frac{5}{2} e_2 - \frac{7}{6} e_1|}$$

$$|e_3 - \frac{5}{2}e_2 - \frac{7}{6}e_1| = \sqrt{e_3^2 + \frac{25}{4}e_2^2 + \frac{49}{36}e_1^2 - 5e_3e_2 - \frac{7}{3}e_3e_1 + \frac{35}{6}e_2e_1} =$$

$$= \sqrt{18 + \frac{25}{4}\cdot 5 + \frac{49}{36}\cdot 3 - 5\cdot 9 + \frac{7}{3}\cdot 4 - \frac{35}{6}\cdot 3} = \sqrt{18 + \frac{125}{4} + \frac{49}{12} - 45 + \frac{28}{3} - \frac{35}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{216 + 375 + 49 - 540 + 112 - 210}{12}} = \sqrt{\frac{2}{12}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow f_3 = \sqrt{6}\left(e_3 - \frac{5}{2}e_2 - \frac{7}{6}e_1\right)$$

$$\Rightarrow \quad f_1 = \frac{e_1}{\sqrt{3}}$$

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$$

$$f_3 = \sqrt{6}\left(e_3 - \frac{5}{2}e_2 - \frac{7}{6}e_1\right)$$

– ортонормированный базис.

ii) $$M_{e\to f} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{f\to e} = (M_{e\to f})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det M_{e\to f} = 1$

$M_{11} = \frac{1}{1} = 1$

$M_{21} = 0$

$M_{31} = 0$

$M_{21} = 1$

$M_{22} = 1$

$M_{23} = 0$

$M_{31} = -\frac{5}{2} + \frac{7}{6} = -\frac{4}{3}$

$M_{32} = -\frac{5}{2}$

$M_{33} = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & +\frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$$ – м-ца ~~алг.~~ дополнений

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – обратная м-ца

$L_f = M_{f\to e} \cdot L_e \cdot M_{e\to f}$:

$$L_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 2 & 17 \\ 22 & -5 & 17 \\ -10 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-22+\frac{40}{3} & 2+5-\frac{16}{3} & +4 \\ 22-25 & -5+10 & 17-\frac{15}{2} \\ -10 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 4 \\ -3 & 5 & \frac{19}{2} \\ -10 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3}+\frac{5}{3} & -\frac{7}{18}-\frac{25}{6}+4 \\ -3 & -3+5 & \frac{7}{2}-\frac{25}{2}+\frac{19}{2} \\ -10 & -10+4 & \frac{70}{6}-10-3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 & -\frac{5}{9} \\ -3 & 2 & \frac{1}{2} \\ -10 & -6 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

iii) $L^* = G^{-1} \cdot L^T \cdot G$

$$L^T = \begin{pmatrix} 9 & 22 & -10 \\ 2 & -5 & 4 \\ 17 & 17 & -3 \end{pmatrix} \qquad G^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 18 & -7 \\ 18 & 38 & -15 \\ -7 & -15 & 6 \end{pmatrix}$$

$\det G = 5\cdot 3\cdot 18 + 12\cdot 9\cdot 2 - 16\cdot 5 - 81\cdot 3 - 18\cdot 9 = 270 + \cancel{266}\, 216 - 80 - 243 - 162 = 1$

$M_{11} = 10\cdot 9 - 9\cdot 9 = 9$ $\quad M_{21} = -6\cdot 9 + 4\cdot 9 = -18$ $\quad M_{31} = -27+20 = -7$

$M_{12} = -6\cdot 9 + 4\cdot 9 = 18$ $\quad M_{22} = 3\cdot 18 - 16 = 38$ $\quad M_{32} = 27-12 = 15$

$M_{13} = -27+20 = -7$ $\quad M_{23} = 27-12 = 15$ $\quad M_{33} = 15-9 = 6$

$$\begin{pmatrix} 9 & +18 & -7 \\ +18 & 38 & -15 \\ -7 & -15 & 6 \end{pmatrix}$$ – м-ца алг. дополнений

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 9 & 18 & -7 \\ 18 & 38 & -15 \\ -7 & -15 & 6 \end{pmatrix}$$ – обратная м-ца

$$L^* = \begin{pmatrix} 9 & 18 & -7 \\ 18 & 38 & -15 \\ -7 & -15 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 22 & -10 \\ 2 & -5 & -4 \\ 17 & 17 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ -3 & 5 & 9 \\ -4 & 9 & 18 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 81+36-119 & 198-90-119 & -90+72+21 \\ 162+76-255 & 396-190-255 & -180+152+45 \\ -63-30+102 & -154+75+102 & 70-60-18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ -3 & 5 & 9 \\ -4 & 9 & 18 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -11 & 3 \\ -17 & -49 & 17 \\ 9 & 23 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ -3 & 5 & 9 \\ -4 & 9 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+33-12 & 6-55+27 & 8-99+54 \\ -51+147-68 & 51-245+153 & 68-441+306 \\ 27-69+32 & -27+115-72 & -36+207-144 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & -22 & -37 \\ 28 & -41 & -67 \\ -10 & 16 & 27 \end{pmatrix}$$

iv) Если L - нормальный, то $LL^* = L^*L$

$$LL^* = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 17 \\ 22 & -5 & 17 \\ -10 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -22 & -37 \\ 28 & -41 & -67 \\ -10 & 16 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 135+56-170 & -198-82+272 & -333+134+459 \\ 330-140-170 & -484+205+272 & -814+335+459 \\ -150+112+30 & 220-164-48 & 370-268-81 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 21 & -8 & -8 \\ 20 & -7 & -20 \\ -8 & 8 & 21 \end{pmatrix}$$

$$L^*L = \begin{pmatrix} 15 & -22 & -37 \\ 28 & -41 & -67 \\ -10 & 16 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 2 & 17 \\ 22 & -5 & 17 \\ -10 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 135-484+370 & 30+110-148 & 255-374+111 \\ 252-902+670 & 56+205-268 & 476-697+201 \\ -90+352-270 & -20-80+108 & -170+272-81 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 21 & -8 & -8 \\ 20 & -7 & -20 \\ -8 & 8 & 21 \end{pmatrix}$$ - верно!

v) Найдем собственные числа:

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 2 & 17 \\ 22 & -5-\lambda & 17 \\ -10 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(9-\lambda)(5+\lambda)(3+\lambda) - 340 - 88\cdot 17 - 170(5+\lambda) - 17\cdot 4\cdot(9-\lambda) + 44(3+\lambda) = 0$

$-\lambda^3 + \lambda^2 + 57\lambda + 135 + 1156 - 850 - 612 + 132 - 170\lambda + 68\lambda + 44\lambda = 0$

$-\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 39 = 0$

$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 39 = 0$ - найдем корни уравнения.

± 1 - не корни

$3: \; 27 - 9 + 3 + 39 \neq 0 \Rightarrow 3$ - не корень

$-3: \; -27 - 9 - 3 + 39 = 0 \Rightarrow -3$ - корень

Поделим $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 39$ на $(\lambda+3)$:

$$\begin{array}{r|l} \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 39 & \lambda + 3 \\ \cline{2-2} -\;\underline{\lambda^3 + 3\lambda^2} \qquad\qquad & \lambda^2 - 4\lambda + 13 \\ -4\lambda^2 + \lambda + 39 & \\ -\;\underline{-4\lambda^2 - 12\lambda + 39} & \\ 13\lambda + 39 & \\ -\;\underline{13\lambda + 39} & \\ 0 & \end{array}$$

$(\lambda+3)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \dfrac{2 \pm \overbrace{\sqrt{4-13}}^{3i}}{1}$ $\nearrow 2+3i$, $\searrow 2-3i$

$\Rightarrow \lambda_1 = -3$

$\lambda_2 = 2+3i$ — собственные числа.

$\lambda_3 = 2-3i$

Найдем принадлежащие им собственные векторы:

$$\begin{pmatrix} 12 & 2 & 17 \\ 22 & -2 & 17 \\ -10 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 34 & 0 & 34 \\ 17 & 0 & 17 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\exists\ z = 1,\ x = -1,\ y = \frac{5}{2}x = -\frac{5}{2}$

$\Rightarrow b_1 = -e_1 - \frac{5}{2}e_2 + e_3$ — первый вектор искомого базиса

$\lambda_3 = 2-3i$:

$$\begin{pmatrix} 7+3i & 2 & 17 \\ 22 & -7+3i & 17 \\ -10 & 4 & -5+3i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -15+3i & 9-3i & 0 \\ 22 & -7+3i & 17 \\ -10 & 4 & -5+3i \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} -15+3i & 9-3i & 0 \\ 0 & \frac{9+15i}{5} & \frac{30+33i}{5} \\ -10 & 4 & -5+3i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5+i & 3-i & 0 \\ 0 & 3+5i & 10+11i \\ -10 & 4 & -5+3i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(-5+i) + y(3-i) = 0 \\ y(3+5i) + z(10+11i) = 0 \\ -10x + 4y + (-5+3i)z = 0 \end{cases}$$

$x = \frac{3-i}{5-i}^{(5+i)} y = \frac{16-2i}{26} y = \frac{8-i}{13} y$

$z = -\frac{3+5i}{10+11i}^{(10-11i)} = -\frac{85+17i}{100+121} y = -\frac{5+i}{13} y$

$\frac{-80+10i+52+(5-3i)(5+i)}{13} = \frac{-80+10i+52+28-10i}{13} = 0$ — верно

$\Rightarrow \exists\, y = 13$, тогда $x = 8 - i$, $z = -5 - i$

Тогда b_2 и b_3 искомого базиса:

$b_2 = 8e_1 + 13e_2 - 5e_3$

$b_3 = -e_1 - e_3$

Нормируем b_1, b_2 и b_3:

$|b_1|^2 = e_1^2 + \frac{25}{4}e_2 + e_3^2 - 5e_2e_3 - 2e_1e_3 + 5e_1e_2 = 3 + \frac{125}{4} + 18 - 45 -$

$+ 8 - 15 = \frac{1}{4}$

$|b_1| = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow b_1' = -2e_1 - 5e_2 + 2e_3$

$|b_2|^2 = 64e_1^2 + 169e_2^2 + 25e_3^2 + 208e_1e_2 - \cancel{160e_1e_3} - 80e_1e_3 - 130e_2e_3 =$

$= 192 + 845 + 450 - 624 + 320 - 1170 = 13$

$|b_2| = \sqrt{13}$

$b_2' = \frac{1}{\sqrt{13}}(8e_1 + 13e_2 - 5e_3)$

$|b_3|^2 = e_1^2 + e_3^2 + 2e_1e_3 = 3 + 18 - 8 = 13$

$\Rightarrow |b_3| = \sqrt{13}$

$b_3' = \frac{1}{\sqrt{13}}(-e_1 - e_3)$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow b_1' &= -2e_1 - 5e_2 + 2e_3 \\ b_2' &= \frac{1}{\sqrt{13}}(8e_1 + 13e_2 - 5e_3) \\ b_3' &= \frac{1}{\sqrt{13}}(-e_1 - e_3) \end{aligned}\right] \text{ — искомый базис}$$

Каноническая форма оператора $\mathcal{L}$ состоит из блоков (λ_1) и $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, где

$\lambda_3 = \alpha + i\beta = 2 - 3i$

т.е. $[\mathcal{L}]_{B'} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Ответ: i) $f_1 = \frac{e_1}{\sqrt{3}}$

$f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$

$f_3 = \sqrt{6}\,(e_3 - \frac{5}{2}e_2 - \frac{7}{6}e_1)$

ii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2 & -\frac{5}{9} \\ -3 & 2 & \frac{1}{2} \\ -10 & -6 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 15 & -22 & -37 \\ 28 & -41 & -67 \\ -10 & 16 & 27 \end{pmatrix}$

iv) – верно.

v) $b_1' = -2e_1 - 5e_2 + 2e_3$

$b_2' = \frac{1}{\sqrt{13}}(8e_1 + 13e_2 - 5e_3)$

$b_3' = \frac{1}{\sqrt{13}}(-e_1 - e_3)$

$[\mathcal{L}]_{B'} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$