Clase de probleme

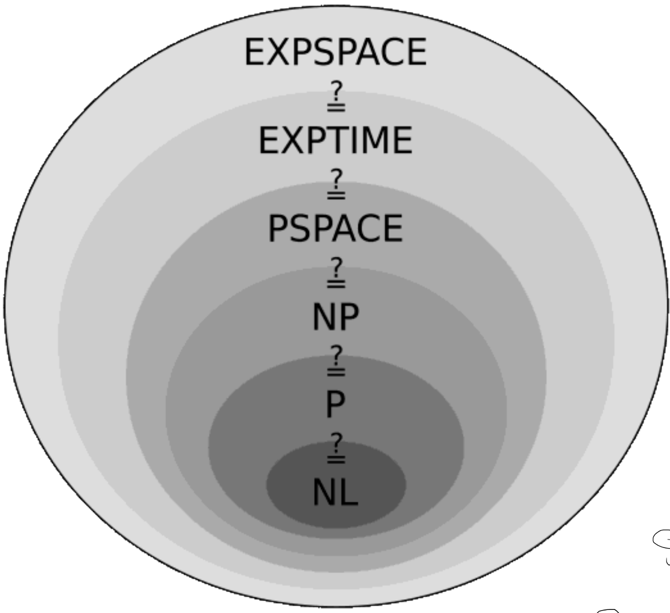
Friday, 10 December 2021 10.03

P = { problema A | ∃ un alg. det. B care rezolvă A în timp polinomial }

NP = { A | ∃ B alg. nedet pt. A în timp polinomial }

P = NP ?

$P \subseteq NP$



Savitch

$NSPACE(f(n)) \subseteq DSPACE(f^2(n))$

$(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) \wedge$
$(y_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) \wedge$
$(x_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee x_n) \wedge$
$(y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee x_n) \wedge \ldots \wedge$
$(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee y_n) \wedge$
$(y_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee y_n) \wedge$
$(x_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_n) \wedge$
$(y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_n);$

SAT

Th. Cook

NP-hard = $\{ A \mid \forall Q \in NP,\ Q \leq_p A \}$

= cel puțin la fel de dificilă ca orice pb. din NP

NP-complete = { A | A ∈ NP și A ∈ NP-hard }

Reduceri polinomiale
Friday, 17 December 2021 10.25

$A \leq_p B \iff \forall i \in I_A \quad A(i)=1 \iff B(F(i))=1$

$I_A \xrightarrow[F]{} I_B \quad F \in P$

Nu uitați:

$A(i) \iff B(F(i))=1 \ \forall i \Rightarrow$ 1. $A(i) \overset{=1}{\Rightarrow} B(F(i))=1 \ \forall i$

2. $B(F(i))=1 \Rightarrow A(i)=1 \ \forall i$

$A \leq_p B, \ B \in P \Rightarrow A \in P$

$A \leq_p B, \ A \in NP \Rightarrow B \in NP$

Obs:

- A NP-hard, dem. $\exists B \in NPC$ a.î. $B \leq_p A$
  $B \in NPC \Rightarrow \forall C \in NP \ C \leq_p B$ $\Big\} \Rightarrow \forall C \in NP \leq_p A$

- $A \in NPC, \ B \in NPC$
  $A \in NPC \Rightarrow A \in NP, \forall C \in NP, C \leq_p A \Rightarrow$ iau $C = B \Rightarrow B \leq_p A$
  $B \in NPC \Rightarrow B \in NP, \forall C \in NP, C \leq_p B \Rightarrow$ iau $C = A \Rightarrow A \leq_p B$ $\Big\} \Rightarrow A \approx B$

-

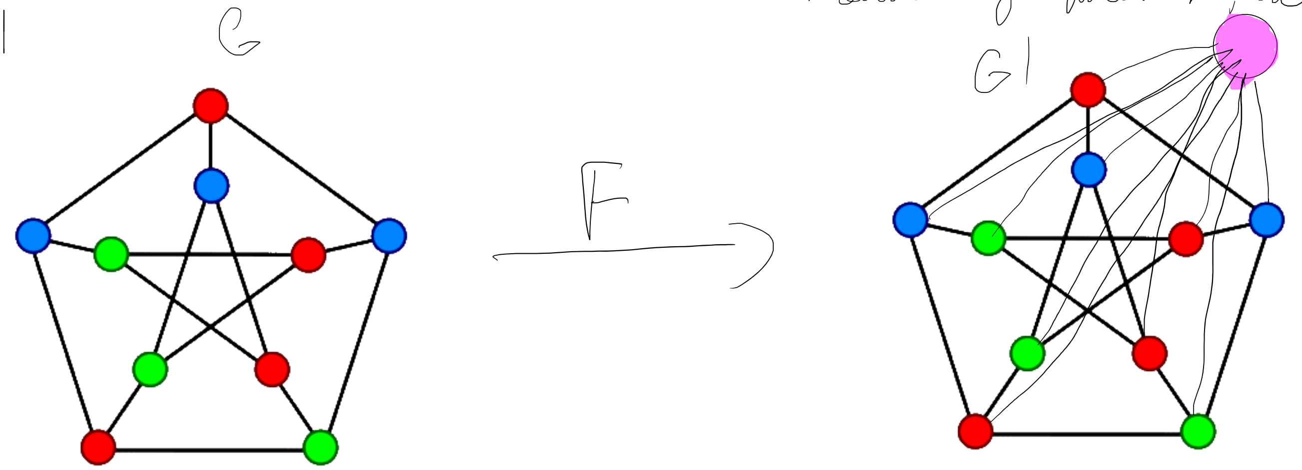
Ex 1

Friday, 17 December 2021 10.41

3-colorare $\le_p$ 4-colorare

Problema **k-Colorare** (k≥2): Dându-se un graf neorientat G = (V, E) şi k culori, se pot colora nodurile grafului folosind cele k culori astfel încât niciun nod sa nu aibă un vecin de aceeaşi culoare?

idee: introduc un nod nou colorat cu a 4a culoare și conectat la nodurile grafului inițial



3-colorare $\le_p$ 4 colorare

$\exists F \in P$ a.î. $\forall i \in I_A$ 3-colorare$(i)=1 \iff$ 4-colorare$(F(i))=1$

F: . . . $F \in C(n)$, $F \in P$

3-colorare$(i)=1 \Rightarrow$ 4-colorare$(F(i))=1$ $\forall i$

Pot colora G cu 3 culori $\iff \exists\, col(v)$ a.î. $\forall (u,v) \in E$ $col(u) \neq col(v)$

Nodul nou inserat ($n+1$) are a 4a culoare.

$\forall (u, n+1) \in E' \Rightarrow col(n+1) = 4$, $col(u) \in \{1,2,3\}$ $\Rightarrow col(n+1) \neq col(u)$

4-colorare$(F(i))=1 \Rightarrow$ 3-colorare$(i)=1$

Avem soluție în G' $\Rightarrow \forall (u,v) \in E'$, $col(u) \neq col(v)$

Pt nodul $n+1$, $(u, n+1) \in E'$ $\forall u \in V$ $\Rightarrow col(u) \neq col(n+1)$ $\forall u \in V$

$n+1$ e conectat la toate celelalte noduri

celelalte noduri au o culoare diferită de nodul nou

$\Rightarrow$ există o 3 colorare pt G

Ex 2

Friday, 17 December 2021 11.05

Partitie $\leq_p$ Suma de submulțime / q-Sume

Problema Partiție: Dându-se un număr n și o mulțime de n intregi $A = \{a_1, ..., a_n\}$, există $S \subset \{1, ..., n\}$ astfel încât $\sum_{i \in S} a_i = \sum_{i \notin S} a_i$?

Problema Suma de submulțime /q-Sume(Subset Sum): Dându-se numerele t, q și o mulțime de t intregi $B = \{b_1, ..., b_t\}$, există $S' \subseteq \{1, ..., t\}$ astfel încât $\sum_{i \in S'} b_i = q$?

$B = [3\ 1\ 1\ 2\ 2\ 1]$

$q = 4$

$S = \{4, 5\} \Rightarrow \sum_{i \in S} b_i = 2+2 = 4 = q$

idee:

$q = 5 \Rightarrow S = \{1, 4\}$

$\sum_{i \in S} b_i = 3+2 = 5$

$\Rightarrow A = [3\ 1\ 1\ 2\ 2\ 1]$

$S = \{1, 4\}$ $\quad \sum_{a \in A} a = 10 = sum$

$3+2 = 1+1+2+1$

$= \frac{sum}{2}$?

$\exists S$ a.î. $\sum_{i \in S} a_i = \sum_{i \notin S} a_i = q$

$\sum_{i \in S} a_i \neq \frac{sum}{2}$?

NU!

$\sum_{i \in S} a_i + \sum_{i \notin S} a_i = sum$

$2q = sum \Rightarrow q = \frac{sum}{2}$

$A \leq_p B$

1 $\forall i \in I_A \quad A(i) = 1 \Leftrightarrow B(F(i)) = 1$

$F \in P$

idee F: în q-sume iau $B = A$ și $q = \frac{\sum_{a \in A} a}{2}$

$F \in P$? da, evident, $F \in O(n)$

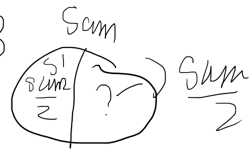
$\circ$ $A(i) = 1 \Rightarrow B(F(i)) = 1$

$\exists S \ldots \quad \sum_{i \in S} a_i = \sum_{j \notin S} a_j = q \Rightarrow \sum_{i \in S} a_i + \sum_{j \notin S} a_j = \sum_{a \in A} a$

$2q = \sum_{a \in A} a \Rightarrow q = \frac{\sum_{a \in A} a}{2}$ ✓

1. $B(f(i)) = 1 \Rightarrow A(i) = 1$

B



$s = \dfrac{\sum_{a\in B} a}{2}$, $\exists S'$ a.î. $\sum_{i\in S'} b_i = s$

ce se întâmplă pt $j \notin S'$ $(B \setminus S') \Rightarrow \sum_{j\notin S'} b_j = \sum_{b\in B} b - \sum_{i\in S} b_i = 2s - s = s$

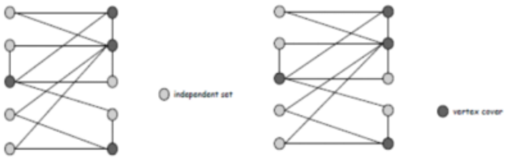
$\Rightarrow \sum_{i\in S'} b_i = \sum_{j\notin S'} b_j$ V

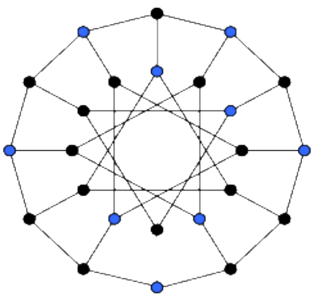
3. Independent Set $\leq_p$ Vertex Cover

Problema Vertex Cover: Dându-se un graf neorientat G = (V, E) și un număr k, există o submulțime S de noduri, |S| = k, astfel încât fiecare muchie are cel puțin un capăt în S?

Problema Independent Set: Dându-se un graf neorientat $G' = (V', E')$ și un număr k', există o submulțime S' de noduri, $|S'| = k'$, astfel încât fiecare muchie are cel mult un capăt în S'?

Exemplu:





obs: S și S' sunt complementare

$S = V \setminus S'$ și $S' = V \setminus S$

$IS \leq_p VC$

$\forall i \in I_{IS}\ \exists F \in P$ a.î. $IS(i)=1 \Rightarrow VC(F(i))=1$

F: $G' = G$ execuție $F \in P$

$k' = V - k$

$IS(i) = 1 \Rightarrow VC(F(i)) = 1$ (nu am muchii cu ambele noduri albastre)

$IS(i) = 1 \Leftrightarrow \exists S$ a.î. $\nexists (u,v) \in E$ cu $u, v \in S$

Pt. $(u,v) \in E$:

a) u și $v \in S' = V \setminus S$ (ambele negre)

b) u sau $v \in S'$ (un nod negru, unul albastru)

c) ~~u și v ∉ S' (ambele albastre)~~ $\Rightarrow$ nu e posibil

$\Rightarrow$ pt. fiecare muchie, cel puțin un nod $\in S'$ (e negru) ✓

$VC(F(i)) = 1 \Rightarrow IS(i) = 1$

$VC(F(i)) = 1 \Rightarrow \forall$ muchie are cel puțin un capăt în S' (negru)

$\Rightarrow \nexists$ muchie cu ambele capete în S ($V \setminus S'$) (muchie cu noduri albastre)

$\Rightarrow \forall$ muchie are cel mult un capăt în S ✓