Kapitel PTS:II

II. Wahrscheinlichkeitsbegriff

- ❑ Zufallsexperimente
- ❑ Ergebnisräume
- ❑ Ereignisräume
- ❑ Relative Häufigkeit
- ❑ Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff
- ❑ Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Ergebnisräume

Ziel: Mathematische Modellierung des Zufalls

Schritt 1: Beschreibung zufälliger Vorgänge als Zufallsexperiment

Schritt 2: Zusammenfassung interessierender Ausgänge zum Ergebnisraum Ω

Schritt 3: Identifikation interessierender Ereignisse im Ergebnisraum

Schritt 4: Bestimmung der Häufigkeit des Ereigniseintritts

Schritt 5: Statistische Wahrscheinlichkeit $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsbegriff

Schritt 6: Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Ergebnisräume

Definition 1 (Ergebnisraum)

Eine Menge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ heißt Ergebnisraum eines Zufallsexperiments, wenn jedem Experimentausgang höchstens ein Element $\omega_i \in \Omega$ zugeordnet ist. Die Elemente ω_i heißen Ergebnisse des Zufallsexperiments.

Ergebnisräume

Definition 1 (Ergebnisraum)

Eine Menge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ heißt Ergebnisraum eines Zufallsexperiments, wenn jedem Experimentausgang höchstens ein Element $\omega_i \in \Omega$ zugeordnet ist. Die Elemente ω_i heißen Ergebnisse des Zufallsexperiments.

Beispiel: Münzwurf

- Experiment: Eine Münze in die Luft werfen
- Frage: Zeigt die Münze anschließend Kopf oder Zahl?

→ $\Omega = \{\text{Kopf}; \text{Zahl}\}$

Ergebnisräume

Definition 1 (Ergebnisraum)

Eine Menge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$ heißt Ergebnisraum eines Zufallsexperiments, wenn jedem Experimentausgang höchstens ein Element $\omega_i \in \Omega$ zugeordnet ist. Die Elemente ω_i heißen Ergebnisse des Zufallsexperiments.

Beispiel: Münzwurf

- Experiment: Eine Münze in die Luft werfen
- Frage: Zeigt die Münze anschließend Kopf oder Zahl?

➜ $\Omega = \{\text{Kopf}; \text{Zahl}\}$

- Zeigt die Münze nicht klar eine Seite, wird der Wurf wiederholt.
  z.B. bei Stehenbleiben auf dem Rand, oder bei Verlust der Münze.
- Die Berücksichtigung eines Ausgangs hängt von seiner Relevanz ab.
  Interessant sind gegebenenfalls nur die Ausgänge, die für das Fortkommen des Spiels oder der auf dem Münzwurf basierenden Entscheidungsfindung relevant sind.

Ergebnisräume

Definition und Beispiele

Beispiel: Würfelwurf

- Experiment: Einen sechsseitigen Würfel werfen
- Mögliche Fragen:
  - Welche Augenzahl zeigt der Würfel? ➜ $\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
  - Ist die Augenzahl eine Sechs? ➜ $\Omega_2 = \{\text{Sechs}; \text{Nicht-Sechs}\}$
  - Ist die Augenzahl gerade oder nicht? ➜ $\Omega_3 = \{\text{gerade}; \text{ungerade}\}$

- Bei „Kippe“ wird der Wurf wiederholt.
  Alle denkbaren Ruhelagen des Würfels zu berücksichtigen ergäbe einen unendlichen Ergebnisraum, was zur Modellierung von z.B. einem Würfelspiel aber unangebracht wäre.

- Eine hypothetische Menge $\{\text{gerade}; \text{ungerade}; \text{prim}\}$ ist kein Ergebnisraum, da die Ausgänge 2, 3 und 5 je zwei Elementen der Menge zugeordnet sind.

Bemerkungen:

- Anders ausgedrückt vereinbaren wir für eine gegebenes Zufallsexperiment eine partielle surjektive Abbildung vom Universum aller möglichen Ausgänge auf den Ergebnisraum Ω der interessierenden Ergebnisse, wobei jedes Ergebnis durch einen Bezeichner repräsentiert wird, der dem eines Ausgangs entsprechen kann, aber nicht muss.

Ergebnisräume

Definition und Beispiele

Ergebnisräume können unterschiedliche komplex sein.

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Es gibt etwa 14 Millionen Möglichkeiten, 6 Zahlen aus 49 auszuwählen (vergleiche Abschnitt zu Kombinatorik)

Beispiel: Meinungsumfragen

- Gallup-Institut befragte in den 1990-ern wöchentlich 1500 „zufällige“ US-Bürger, die mindestens 18 Jahre alt waren
- Mögliche Auswahlen von 1500 Personen aus 180 Millionen (Erwachsene) ergibt eine Zahl mit über 8000 Ziffern

Beispiel: Würfeln bis zur ersten Sechs

- Erforderliche Anzahl der Würfe nicht nach oben beschränkt
- $\Omega = \mathbf{N}^+$

Ergebnisräume

Definition und Beispiele

Die Wahl des Ergebnisraums hängt vom Kontext ab, in dem ein Zufallsexperiment untersucht wird.

Beispiel: Würfelwurf

- $\Omega_1 = \{\text{Sechs}; \text{Nicht-Sechs}\}$ am Anfang von „Mensch ärger dich nicht“
- $\Omega_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ im weiteren Verlauf

Ein abstrakter Ergebnisraum kann mathematisches Modell für verschiedene Zufallsexperimente sein.

Beispiel: $\Omega = \{0; 1\}$

- Münzwurf: $0 =$ Kopf, $1 =$ Zahl
- Würfelwurf: $0 =$ gerade Augenzahl, $1 =$ ungerade Augenzahl
- ...

Ergebnisräume

Vergröberung und Verfeinerung

Beispiel: Urnenmodell

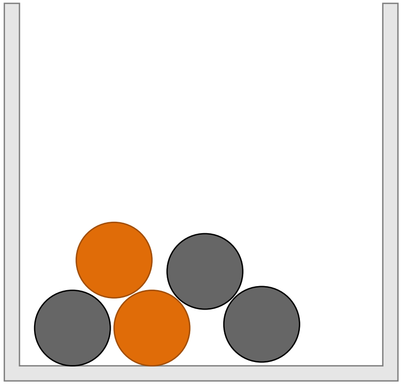
- Aufbau: Urne mit roten und schwarzen Kugeln.
  Die Kugeln sind ansonsten ununterscheidbar.

- Experiment 1: Ziehung zweier Kugeln nacheinander.

- Bezeichner: „r“ für „rot“ und „s“ für „schwarz“

➜ $\Omega_1 = \{(\mathsf{r};\mathsf{r}); (\mathsf{r};\mathsf{s}); (\mathsf{s};\mathsf{r}); (\mathsf{s};\mathsf{s})\}$

- Ergebnisse entsprechen geordneten Paaren.

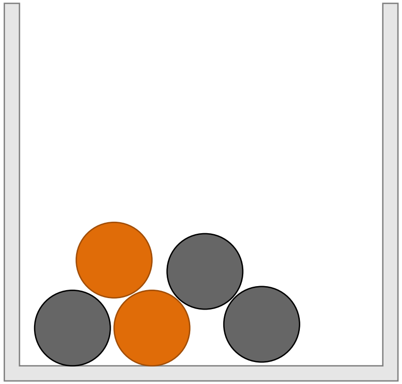


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Ergebnisräume

Vergröberung und Verfeinerung

Beispiel: Urnenmodell



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Aufbau: Urne mit roten und schwarzen Kugeln.
  Die Kugeln sind ansonsten ununterscheidbar.
- Experiment 1: Ziehung zweier Kugeln nacheinander.
- Bezeichner: „r“ für „rot“ und „s“ für „schwarz“

➜ $\Omega_1 = \{(\mathsf{r};\mathsf{r}); (\mathsf{r};\mathsf{s}); (\mathsf{s};\mathsf{r}); (\mathsf{s};\mathsf{s})\}$

- Ergebnisse entsprechen geordneten Paaren.

- Experiment 2: Wie Experiment 1, aber ohne Interesse an der Reihenfolge.

➜ $\Omega_2 = \{\{\mathsf{r};\mathsf{r}\}; \{\mathsf{r};\mathsf{s}\}; \{\mathsf{s};\mathsf{s}\}\}$

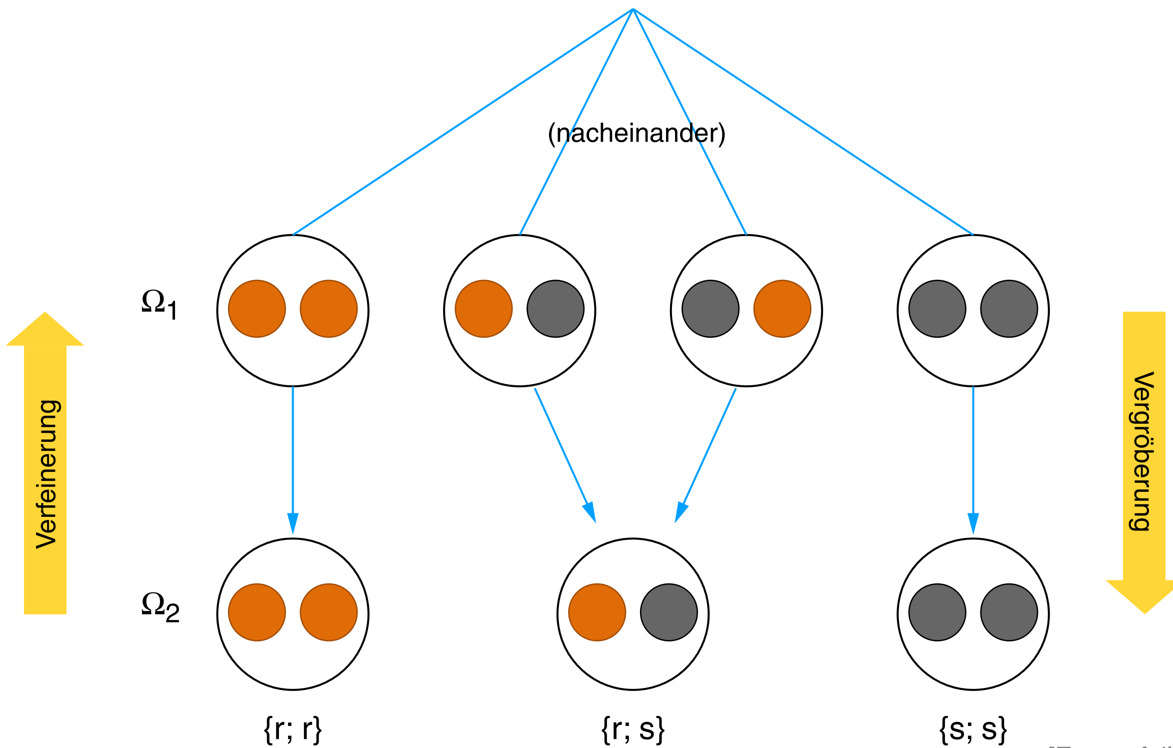
- Ergebnisse entsprechen Kombinationen.

Ergebnisräume

Vergröberung und Verfeinerung

Beispiel: Urnenmodell (Fortsetzung)

- Die Ergebnisräume Ω_1 und Ω_2 können aufeinander abgebildet werden.



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Ergebnisräume

Definition 2 (Vergröberung und Verfeinerung von Ergebnisräumen)

Seien Ω_1 und Ω_2 zwei Ergebnisräume eines Zufallsexperiments mit $|\Omega_1| > |\Omega_2|$. Lässt sich Ω_1 auf Ω_2 abbilden, so heißt Ω_2 Vergröberung von Ω_1. Umgekehrt heißt Ω_1 Verfeinerung von Ω_2.

Bei einer Vergröberung geht Information verloren.

Im Urnenbeispiel kann man beim Ω_2-Ergebnis $\{r; s\}$ nicht mehr erkennen, ob „zuerst“ eine rote oder eine schwarze Kugel gezogen wurde.

Bemerkungen:

- Mit Berücksichtigung der Reihenfolge wird ein Ergebnisse als n-Tupel $(\cdot;\cdot;\ldots)$ notiert. Bei Tupeln ist die Reihenfolge ihrer Elemente wesentlich und ein Element des Tupels nicht notwendigerweise verschieden von anderen Elementen des Tupels.

- Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge wird ein Ergebnisse als n-Multimenge $(\cdot;\cdot;\ldots)$ notiert. Bei Mengen ist die Reihenfolge ihrer Elemente willkürlich und üblicherweise jedes Element der Menge verschieden von jedem anderen Element der Menge. Bei Multimengen dürfen Elemente mehrfach vorkommen.

Ergebnisräume

Mehrstufige Zufallsexperimente

Zufallsexperimente, die aus einfacheren zusammengesetzt sind, die in einer bestimmten Reihenfolge ablaufen, heißen mehrstufige Zufallsexperimente.

Die Art, wie die Einzelexperimente miteinander zusammenhängen, soll sich auch im Ergebnisraum widerspiegeln.

Ergebnisräume

Mehrstufige Zufallsexperimente

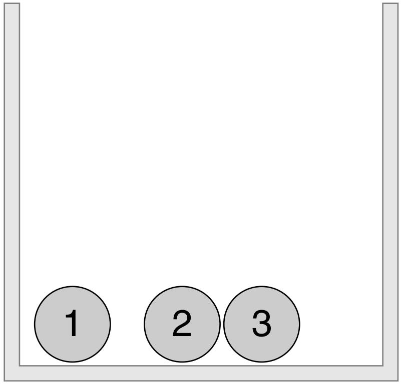
Zufallsexperimente, die aus einfacheren zusammengesetzt sind, die in einer bestimmten Reihenfolge ablaufen, heißen mehrstufige Zufallsexperimente.

Die Art, wie die Einzelexperimente miteinander zusammenhängen, soll sich auch im Ergebnisraum widerspiegeln.

Beispiel: Urnenmodell

- Aufbau: Urne mit drei nummerierten Kugeln.
  Die Kugeln sind ansonsten ununterscheidbar.

- Experiment: Ziehung zweier Kugeln nacheinander.



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

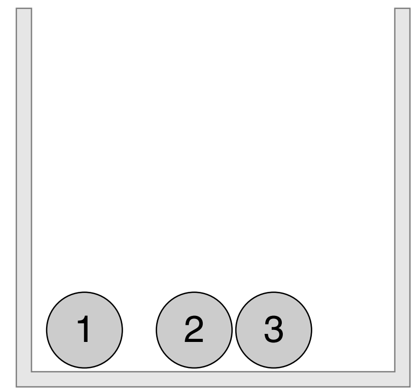
Ergebnisräume

Mehrstufige Zufallsexperimente

Zufallsexperimente, die aus einfacheren zusammengesetzt sind, die in einer bestimmten Reihenfolge ablaufen, heißen mehrstufige Zufallsexperimente.

Die Art, wie die Einzelexperimente miteinander zusammenhängen, soll sich auch im Ergebnisraum widerspiegeln.

Beispiel: Urnenmodell



- Aufbau: Urne mit drei nummerierten Kugeln.
  Die Kugeln sind ansonsten ununterscheidbar.
- Experiment: Ziehung zweier Kugeln nacheinander.
- Mögliche Arten der Ziehung:

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

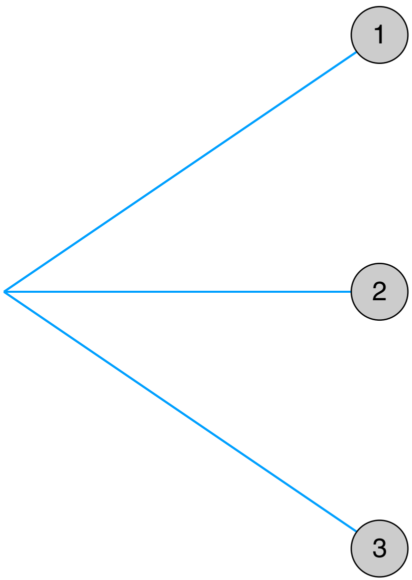
(1) Ziehen mit Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge
(2) Ziehen ohne Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge
(3) Ziehen ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
(4) Ziehen mit Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Ergebnisräume

Mehrstufige Zufallsexperimente: Baumdiagramm zur Veranschaulichung

(1) Ziehen mit Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge

1. Stufe

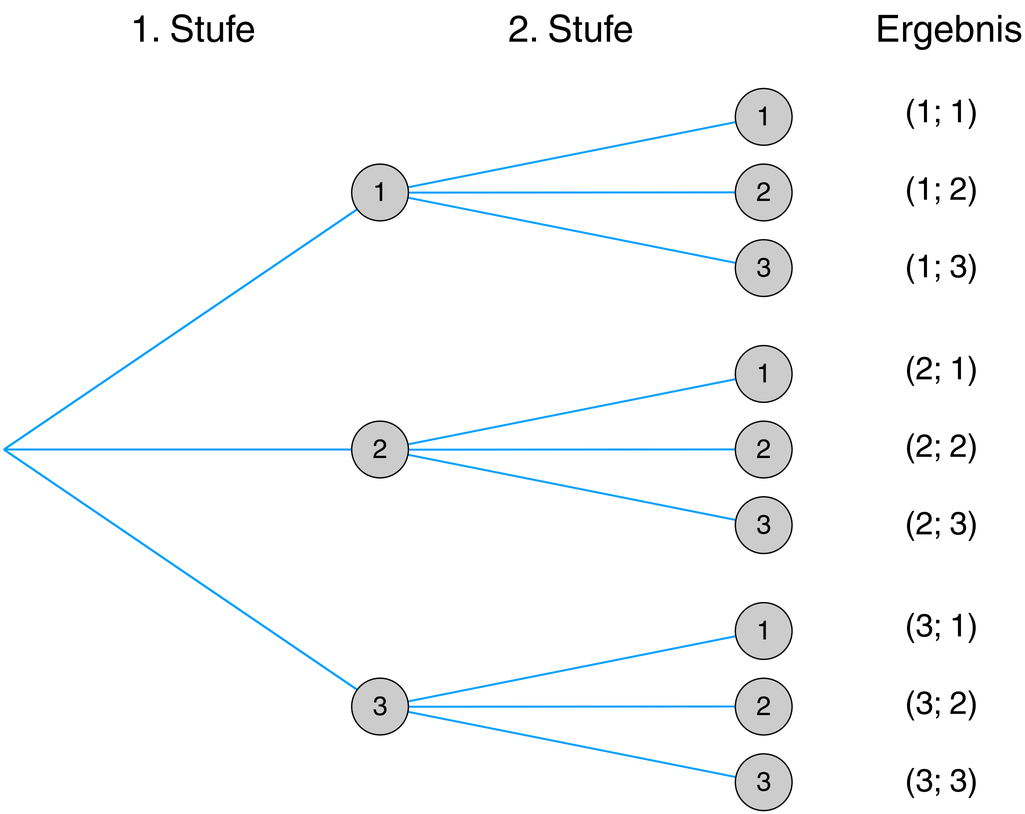


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Ergebnisräume

Mehrstufige Zufallsexperimente: Baumdiagramm zur Veranschaulichung

(1) Ziehen mit Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

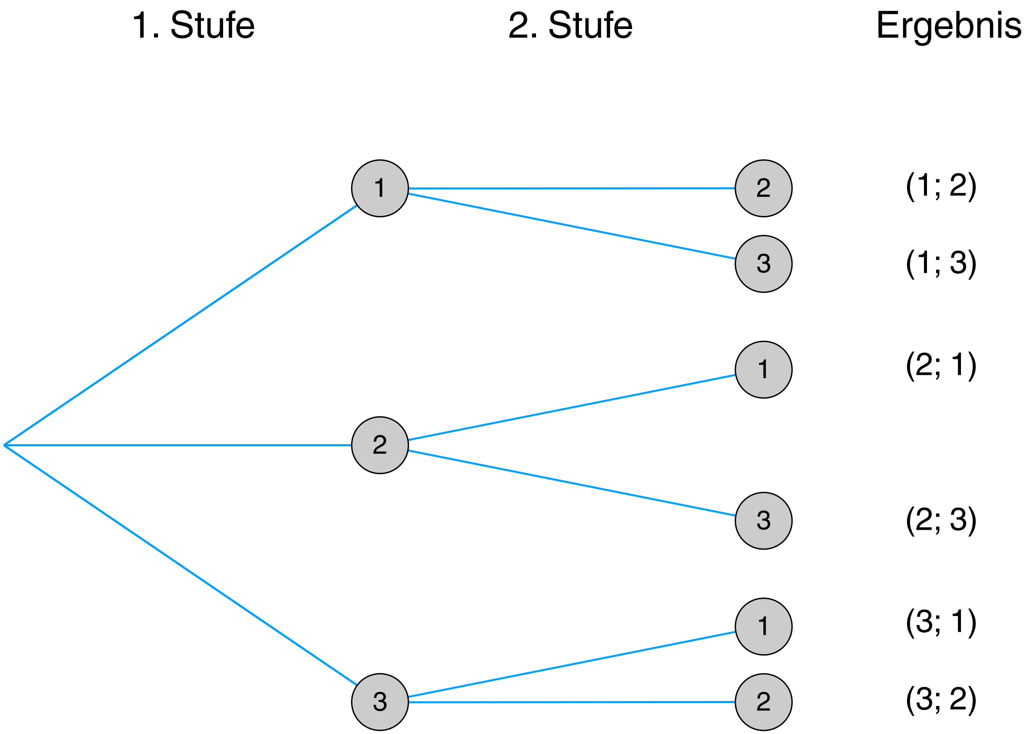
➜ $\Omega_1 = \{(1;1);(1;2);(1;3);(2;1);(2;2);(2;3);(3;1);(3;2);(3;3)\}$

Das zweite Teilexperiment hängt nicht vom ersten ab (quasi gleiche Urne).

Ergebnisräume

Mehrstufige Zufallsexperimente: Baumdiagramm zur Veranschaulichung

(2) Ziehen ohne Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

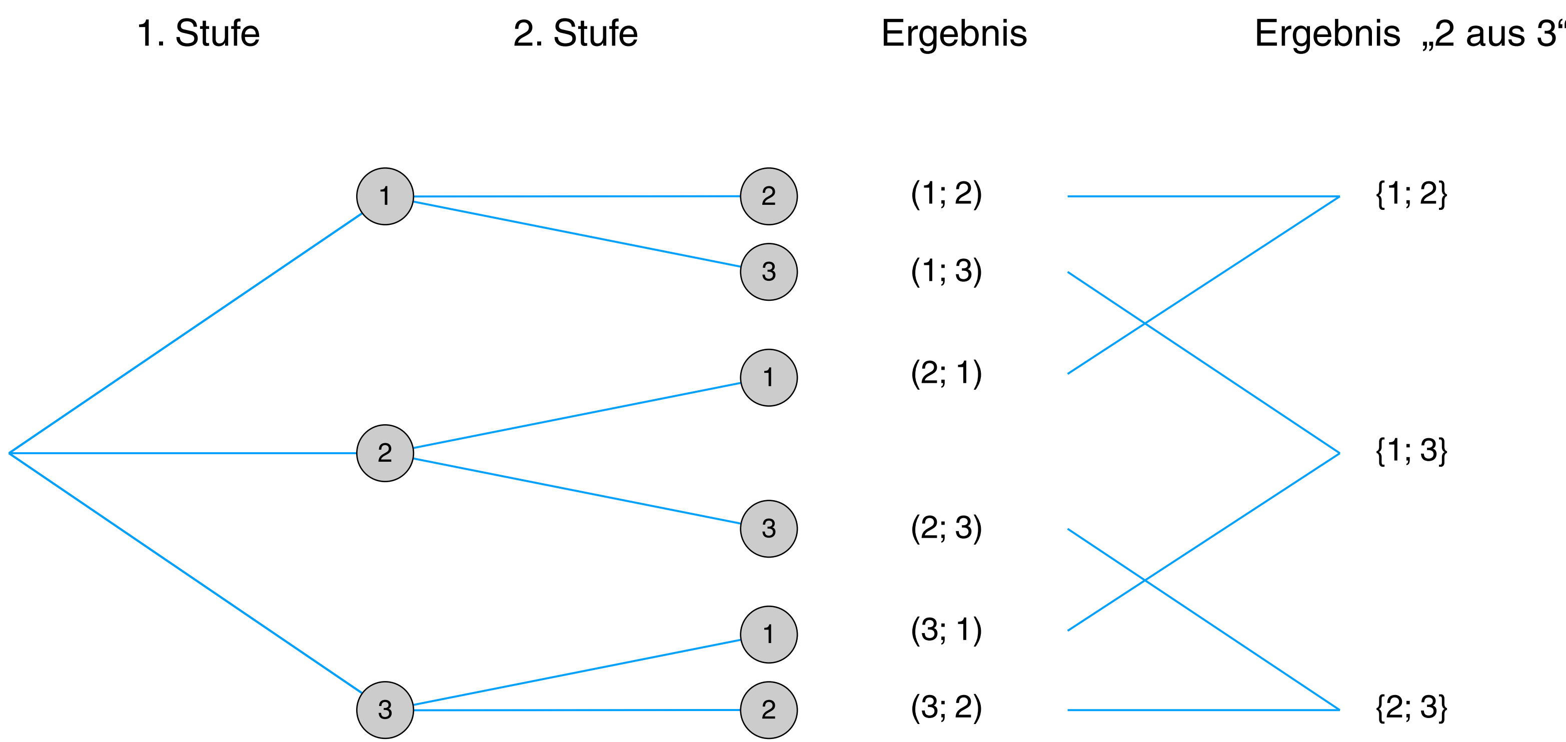
→ $\Omega_2 = \{(1;2);(1;3);(2;1);(2;3);(3;1);(3;2)\}$

Das Ergebnis des zweiten Teilexperiments hängt vom ersten ab.

Ergebnisräume

Mehrstufige Zufallsexperimente: Baumdiagramm zur Veranschaulichung

(3) Ziehen ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

➜ $\Omega_3 = \{\{1;2\};\{1;3\};\{2;3\}\}$

Bemerkungen:

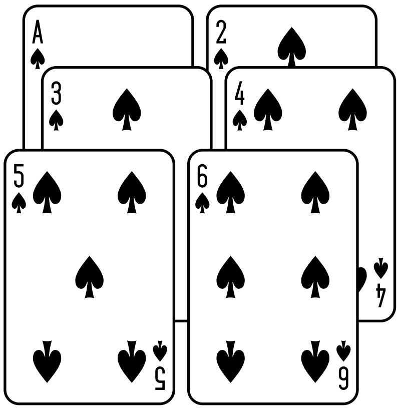
- Ω_3 ist eine Vergröberung von Ω_2.

Ergebnisräume

Mehrstufige Zufallsexperimente: Baumdiagramm zur Veranschaulichung

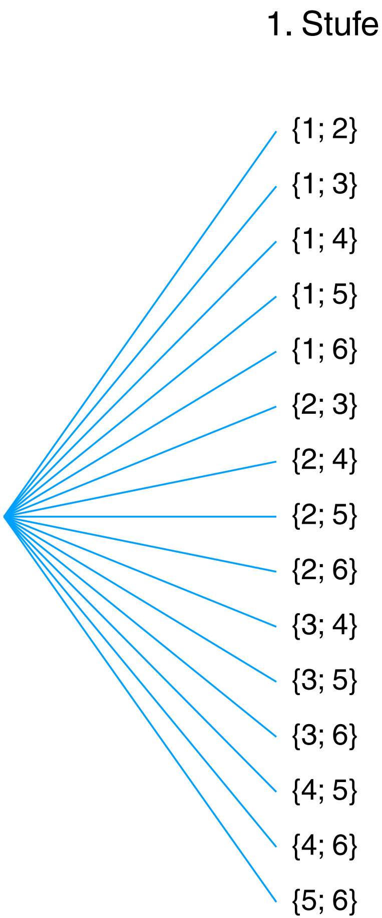
Beispiel: Karten austeilen

- Aufbau: Kartenspiel mit sechs nummerierten Karten.
- Experiment: Drei Spieler:innen erhalten je zwei Karten.
- Mögliche Zerlegung in Stufen:
  - Stufe 1: Spieler:in A bekommt 2 der 6 Karten.
  - Stufe 2: Spieler:in B bekommt 2 der 4 Karten.
  - Stufe 3: Spieler:in C bekommt die übrigen 2 Karten.



Ergebnisräume

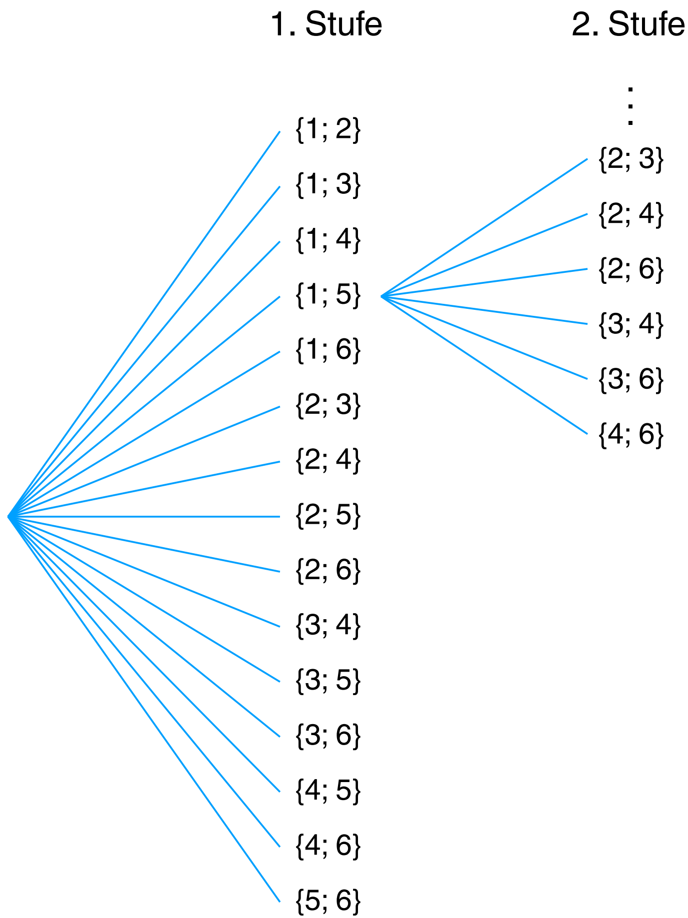
Mehrstufige Zufallsexperimente: Baumdiagramm zur Veranschaulichung



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Ergebnisräume

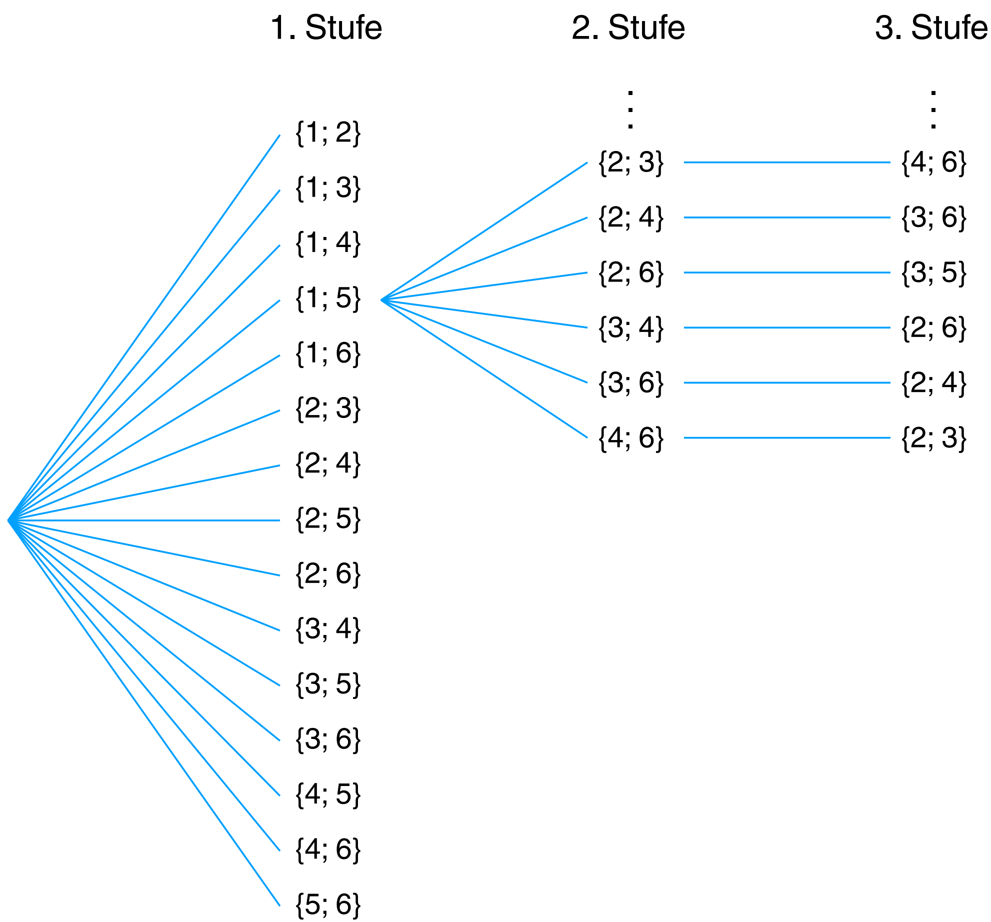
Mehrstufige Zufallsexperimente: Baumdiagramm zur Veranschaulichung



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Ergebnisräume

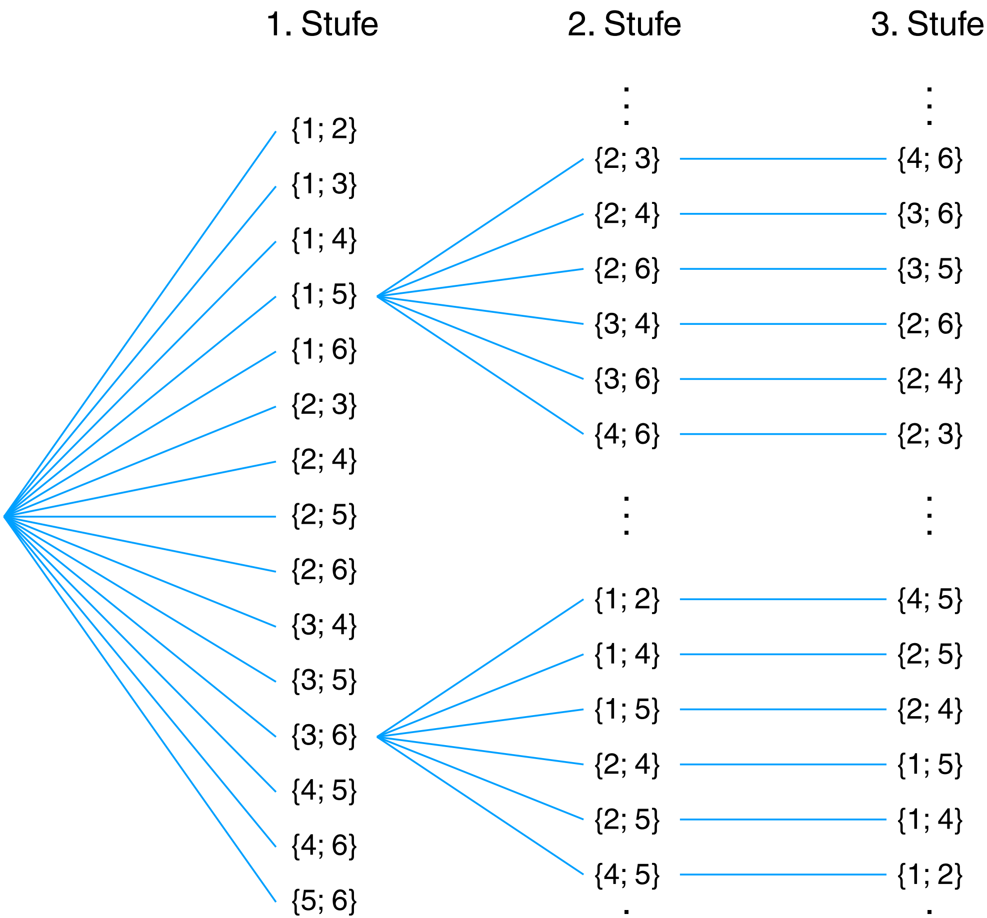
Mehrstufige Zufallsexperimente: Baumdiagramm zur Veranschaulichung



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Ergebnisräume

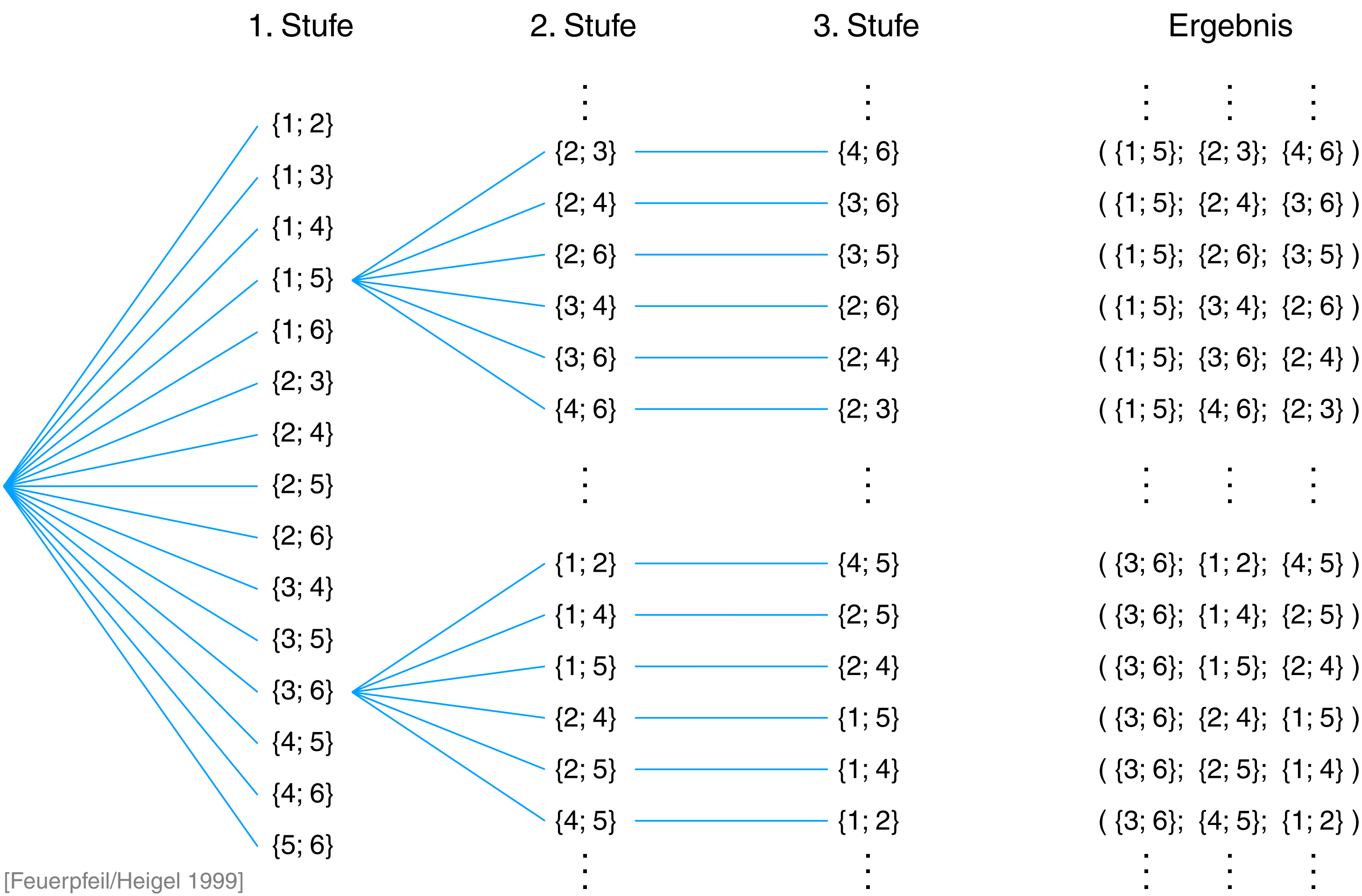
Mehrstufige Zufallsexperimente: Baumdiagramm zur Veranschaulichung



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Ergebnisräume

Mehrstufige Zufallsexperimente: Baumdiagramm zur Veranschaulichung



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

→ $\Omega = \{(\{1;2\};\{3;4\};\{5;6\})\,;(\{1;2\};\{3;5\};\{4;6\})\,;\ldots,(\{5;6\};\{3;4\};\{1;2\})\}$

Ergebnisräume

Mehrstufige Zufallsexperimente

Verallgemeinerung:

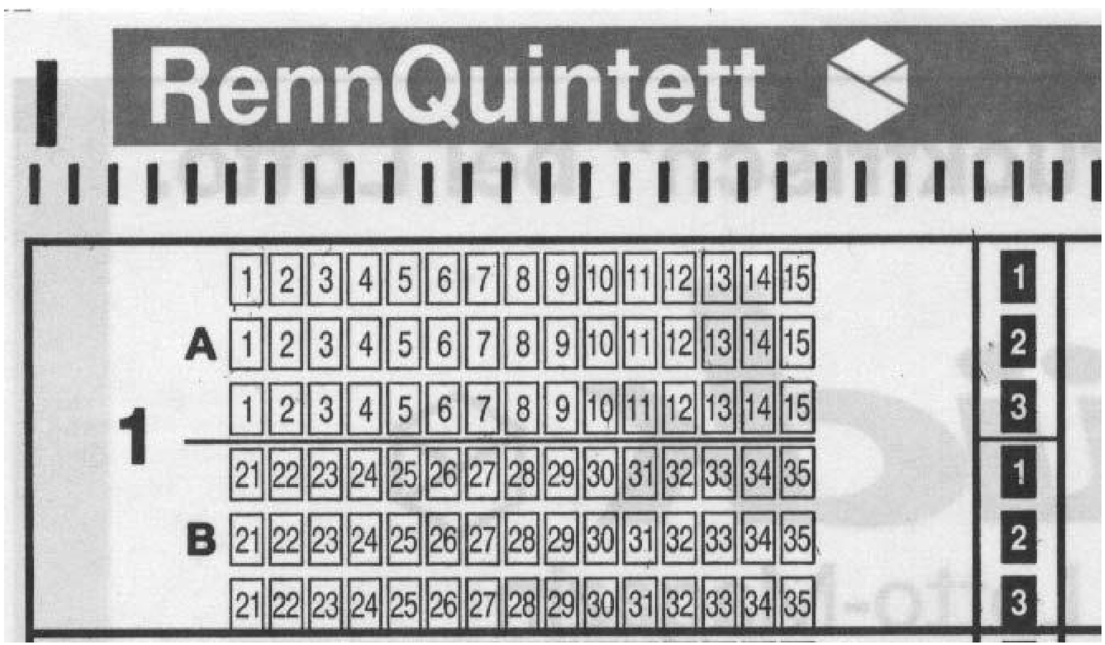
Ist ω_i ein Element des Ergebnisraums Ω_i des i-ten Teilexperiments, so ist das Gesamtergebnis eines n-stufigen Zufallsexperiments ein n-Tupel $\omega = (\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_n)$, mit dem die Ergebnisreihenfolge ausgedrückt wird.

Ergebnisräume

Mächtigkeit des Ergebnisraums

Beispiel: RennQuintett „2x3 aus 15“

- 15 Pferde treten im Trab- oder Galopprennen gegeneinander an.
- Wähle die drei ersten in der Reihenfolge ihres Zieleinlaufs.
- Wie viele Möglichkeiten drei Pferde auszuwählen gibt es?

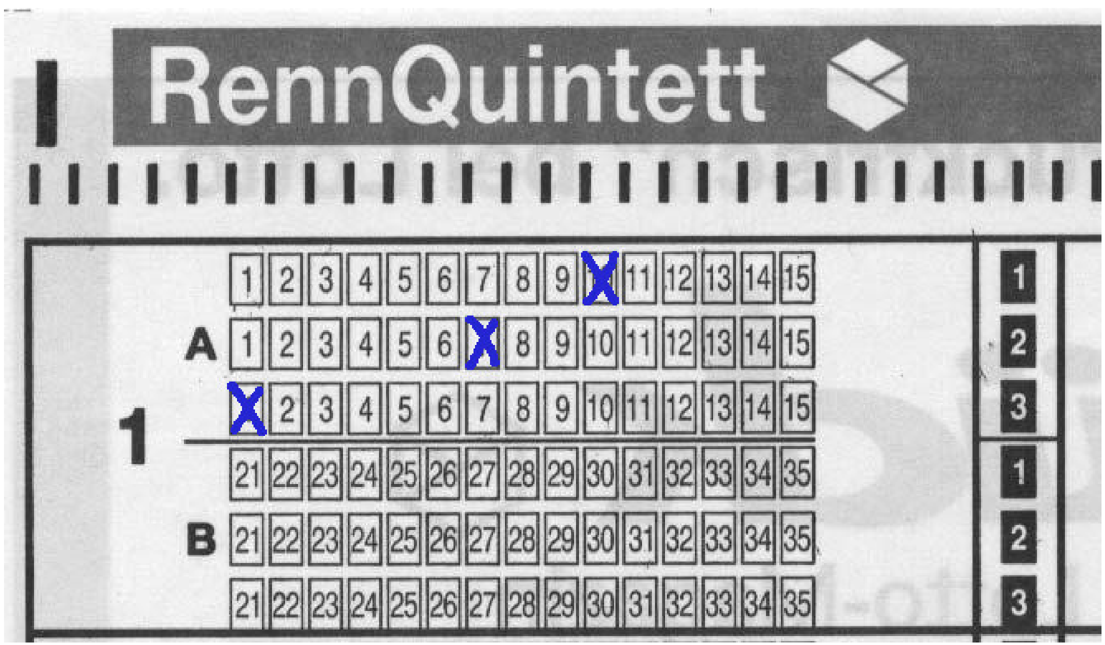


Ergebnisräume

Mächtigkeit des Ergebnisraums

Beispiel: RennQuintett „2x3 aus 15“

- 15 Pferde treten im Trab- oder Galopprennen gegeneinander an.
- Wähle die drei ersten in der Reihenfolge ihres Zieleinlaufs.
- Wie viele Möglichkeiten drei Pferde auszuwählen gibt es?

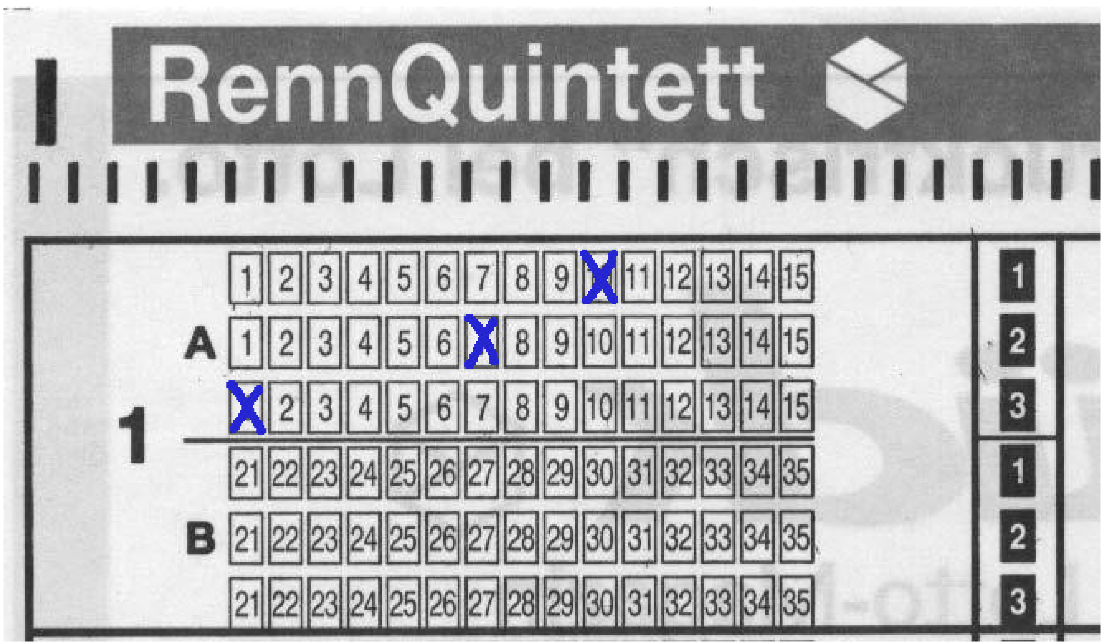


Ergebnisräume

Mächtigkeit des Ergebnisraums

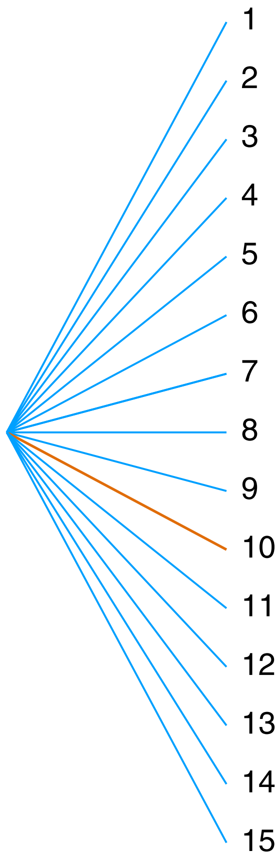
Beispiel: RennQuintett „2x3 aus 15“

- Aufbau: Urne mit 15 nummerierten Kugeln.
- Experiment: Ziehung dreier Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen.
- Was ist die Mächtigkeit $|\Omega|$ des Ergebnisraums Ω?



Ergebnisräume

Zählprinzip zur Bestimmung der Mächtigkeit

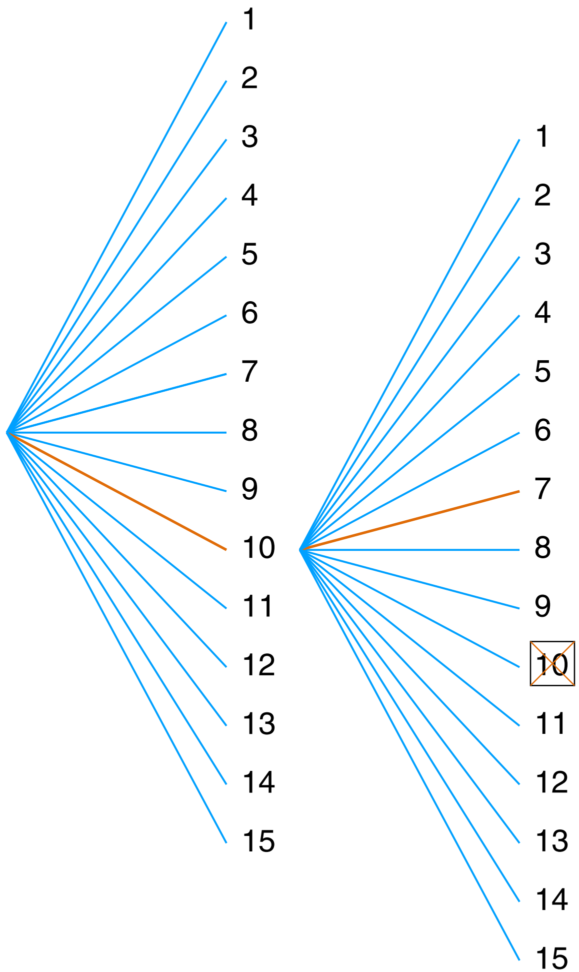


(15 Möglichkeiten)

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Ergebnisräume

Zählprinzip zur Bestimmung der Mächtigkeit

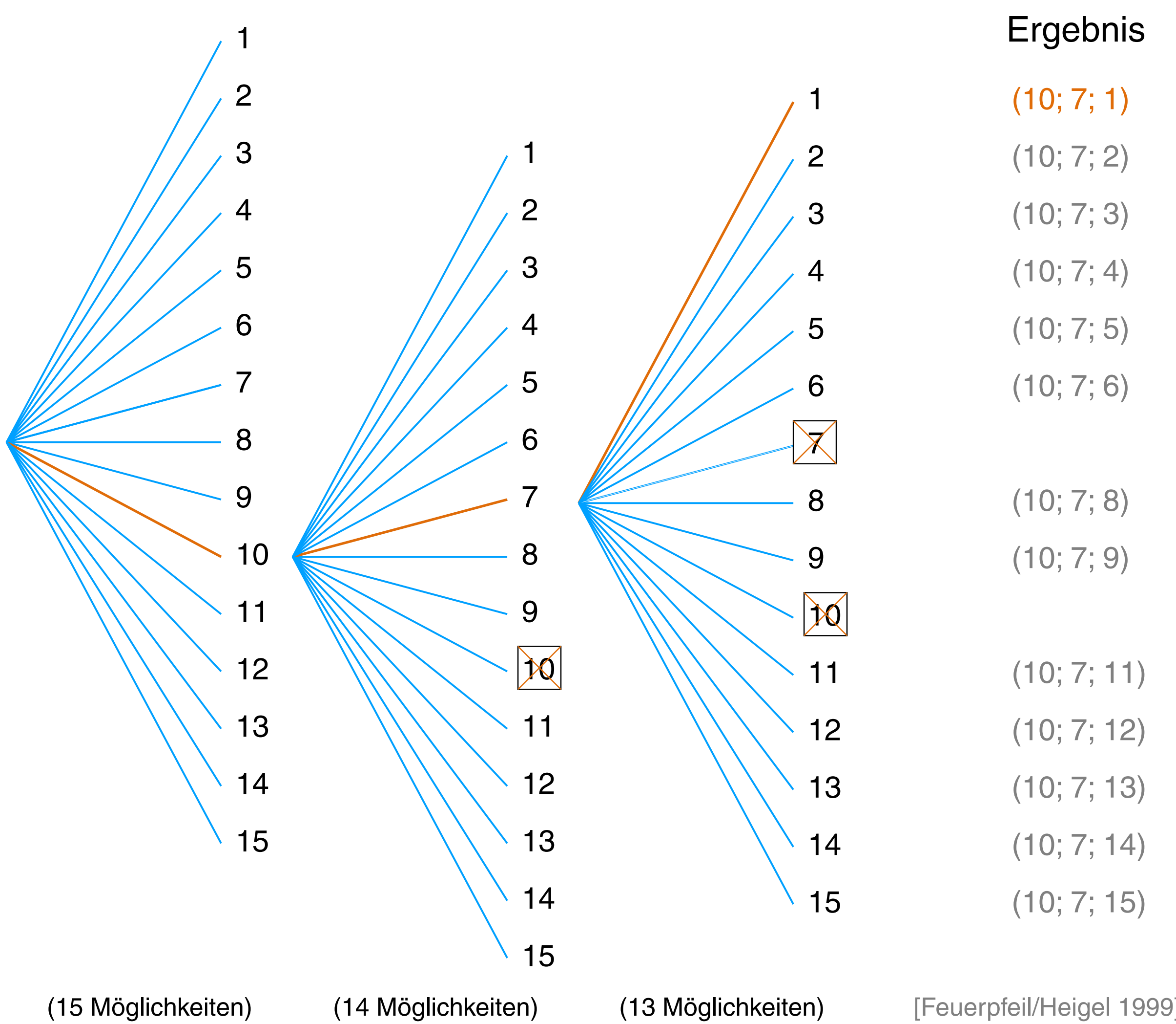


(15 Möglichkeiten) (14 Möglichkeiten)

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Ergebnisräume

Zählprinzip zur Bestimmung der Mächtigkeit



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Ergebnisräume

Mächtigkeit des Ergebnisraums

Beispiel: RennQuintett „2x3 aus 15“

- Aufbau: Urne mit 15 nummerierten Kugeln.
- Experiment: Ziehung dreier Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen.
- Was ist die Mächtigkeit $|\Omega|$ des Ergebnisraums Ω?

- 15 mögliche Ergebnisse in der ersten Stufe des Zufallsexperiments
- 14 mögliche Ergebnisse in der zweiten Stufe
- 13 mögliche Ergebnisse in der dritten Stufe

➜ $|\Omega| = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2{,}730$ Möglichkeiten.

Ergebnisräume

Mächtigkeit des Ergebnisraums

Beispiel: RennQuintett „2x3 aus 15“

- 15 Pferde treten im Trab- oder Galopprennen gegeneinander an.
- Wähle die drei ersten in der Reihenfolge ihres Zieleinlaufs.
- Wie viele Möglichkeiten drei Pferde auszuwählen gibt es?

- 15 Möglichkeiten, das erstplatzierte Pferd auszuwählen
- 14 Möglichkeiten, das zweitplatzierte Pferd auszuwählen
- 13 Möglichkeiten, das drittplatzierte Pferd auszuwählen

➜ $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2{,}730$ Möglichkeiten.

Ergebnisräume

Definition 3 (Zählprinzip)

Gibt es bei einem n-Tupel für die Besetzung

der ersten Stelle k_1 Möglichkeiten,
der zweiten Stelle k_2 Möglichkeiten,
$\vdots$
die n-te Stelle k_n Möglichkeiten,

dann gibt es insgesamt $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$ verschiedene solche n-Tupel.

Ergebnisräume

Definition 3 (Zählprinzip)

Gibt es bei einem n-Tupel für die Besetzung

der ersten Stelle k_1 Möglichkeiten,
der zweiten Stelle k_2 Möglichkeiten,
$\vdots$
die n-te Stelle k_n Möglichkeiten,

dann gibt es insgesamt $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$ verschiedene solche n-Tupel.

Bemerkungen:

- Jedes n-Tupel entspricht einem Pfad im Baumdiagramm eines entsprechenden mehrstufigen Zufallsexperiments.
- Es gibt also $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$ Pfade (k_1 Verzweigungen in der ersten Stufe, usw.).
- Die Mächtigkeit des Ergebnisraums des Zufallsexperiments ist

$$|\Omega| \;=\; k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n.$$