# Kapitel PTS:VI

## VI. Binomialverteilung

- Bernoulli-Experimente
- Bernoulli-Kette
- Bernoulli'sche Formel

# Bernoulli-Kette

## Begriffsbildung

- Ein Bernoulli-Experiment mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p$ wird $n$-mal unabhängig voneinander durchgeführt.
- Ergebnisraum $\Omega$ des mehrstufigen Zufallsexperimentes:
  Menge aller $n$-Tupel, deren Stellen mit $0$ für Niete oder $1$ für Treffer besetzt sein können.

$$\Omega = \{0; 1\}^n$$

- Für die Ereignisse

$E_i :$ „Treffer beim $i$-ten Versuch“ bzw.

$\bar{E}_i :$ „Niete beim $i$-ten Versuch“

gilt dann unabhängig vom Ausgang der anderen Versuche

$$P(E_i) = p \quad \text{bzw.} \quad P(\bar{E}_i) = 1 - p = q \quad \text{für} \quad i \in \{1; 2; \ldots; n\} \; .$$

# Bernoulli-Kette

## Begriffsbildung

- Mengenschreibweise dieser Ereignisse für $n = 3$:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(\mathbf{1}; 1; 1); (\mathbf{1}; 1; 0); (\mathbf{1}; 0; 1); (\mathbf{1}; 0; 0)\} \\ \bar{E}_1 &= \{(\mathbf{0}; 1; 1); (\mathbf{0}; 1; 0); (\mathbf{0}; 0; 1); (\mathbf{0}; 0; 0)\} \\ \\ E_2 &= \{(1; \mathbf{1}; 1); (1; \mathbf{1}; 0); (0; \mathbf{1}; 1); (0; \mathbf{1}; 0)\} \\ \bar{E}_2 &= \{(1; \mathbf{0}; 1); (1; \mathbf{0}; 0); (0; \mathbf{0}; 1); (0; \mathbf{0}; 0)\} \\ \\ E_3 &= \{(1; 1; \mathbf{1}); (1; 0; \mathbf{1}); (0; 1; \mathbf{1}); (0; 0; \mathbf{1})\} \\ \bar{E}_3 &= \{(1; 1; \mathbf{0}); (1; 0; \mathbf{0}); (0; 1; \mathbf{0}); (0; 0; \mathbf{0})\} \end{aligned}$$

- $E_i$ bzw. $\bar{E}_i$ bestehen aus allen Tripeln, die an der $i$-ten Stelle eine Eins bzw. eine Null haben (übrige Stellen beliebig).

- Jedes Elementarereignis aus $\Omega$ lässt sich ähnlich zu kanonischen Normalformen in der Logik aus den $E_i$ bzw. $\bar{E}_i$ ausdrücken, etwa

$$\{(1; 0; 1)\} = E_1 \cap \bar{E}_2 \cap E_3 \ .$$

# Bernoulli-Kette

## Begriffsbildung

- Aufgrund der Unabhängigkeit der $E_i$ gilt die Multiplikationsregel; zum Beispiel:

$$P(\{(1;0;1)\}) \;=\; P(E_1 \cap \bar{E}_2 \cap E_3) \;=\; p \cdot (1-p) \cdot p \;=\; p \cdot q \cdot p\,.$$

- Es folgt insbesondere auch $P(E_1) = p$, da gemäß Multiplikationsregel gilt:

$$P(E_1) \;=\; p^3 + 2p^2q + pq^2 \;=\; p(p^2 + 2pq + q^2) \;=\; p(p+q)^2 \;=\; p(p+1-p)^2 \;=\; p\,.$$

- Die Wahrscheinlichkeit des Sonderfalls, bei den ersten $k$ Bernoulli-Versuchen nur Treffer und bei den übrigen $(n-k)$ nur Nieten zu bekommen ist damit

$$\begin{aligned} P(\{\underbrace{1;1;\ldots;1}_{k},\underbrace{0;0;\ldots;0}_{n-k}\}) \;&=\; P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_k \cap \bar{E}_{k+1} \cap \bar{E}_{k+2} \cap \ldots \cap \bar{E}_n) \\ &=\; p^k \cdot q^{n-k}\,. \end{aligned}$$

- Auch die Wahrscheinlichkeit für jede andere Anordnung von $k$ Treffern und $(n-k)$ Nieten ist $p^k \cdot q^{n-k}$, unabhängig von ihrer Verteilung auf die $n$ Versuche.

# Bernoulli-Kette

## Beispiele

- Prüfen von 100 unabhängig voneinander produzierten gleichartigen Teilen auf Qualität mit gleicher Ausschusswahrscheinlichkeit für jedes Teil.
- Routineblutuntersuchungen an Patienten einer bestimmten Population auf eine medizinische Reaktion, wenn für Patienten die gleiche Reaktionswahrscheinlichkeit besteht.
- Prüfen unabhängig voneinander arbeitender Maschinen gleicher Bauart und gleicher Einsatzbedingungen, ob sie in einer bestimmten Zeit ausfallen.
- Mehrmaliger Laplace-Würfelwurf, bei dem man sich nur für Sechs / Nicht-Sechs interessiert.

# Bernoulli-Kette

**Definition 2 (Bernoulli-Kette)**

Ein $n$-stufiges Zufallsexperiment mit Ergebnisraum $\Omega = \{0; 1\}^n$, dessen Ereignisse

$E_i :$ „Menge aller $n$-Tupel mit $1$ an der $i$-ten Stelle“
(„Treffer in der $i$-ten Stufe des Experiments“)

1. unabhängig sind und
2. die gleiche Wahrscheinlichkeit $P(E_i) = p$ haben für $i \in \{1; 2; \ldots ; n\}$,

heißt Bernoulli-Kette mit den Parametern $n$ und $p$.

Der Parameter $n$ heißt *Länge* der Bernoulli-Kette.

Bemerkungen:

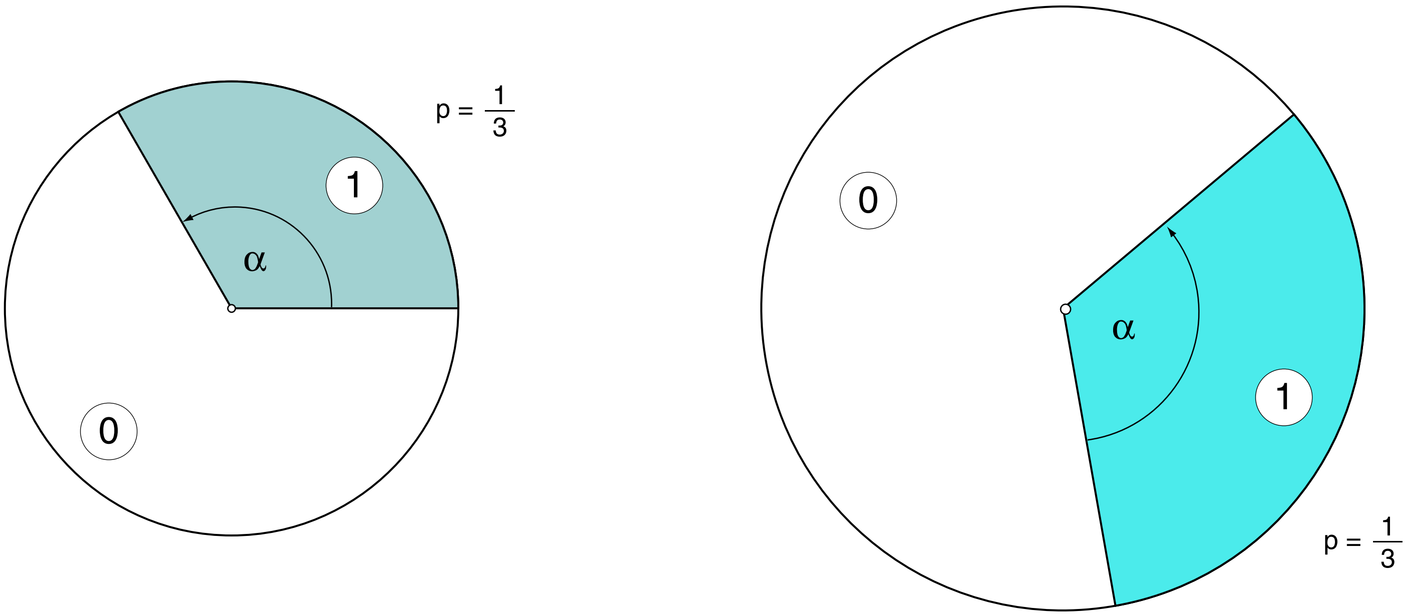
- Bei der Durchführung einer Bernoulli-Kette sprechen wir auch von unabhängigen Bernoulli-Versuchen.

# Bernoulli-Kette

## Beispiel: Abhängigkeit / Unabhängigkeit

- Was geschieht, wenn nur Bedingung 2 von Definition 2 vorausgesetzt wird?

- Zur Demonstration eignen sich zwei Glücksräder mit verschiedenen Radien, aber gleichem Zentriwinkel $\alpha$; etwa $\alpha = 120°$ und damit $p = \frac{1}{3}$.

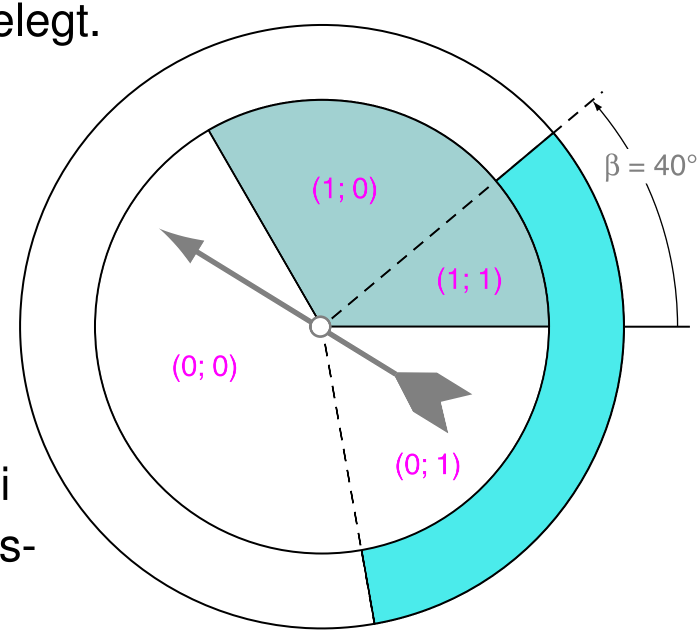



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

# Bernoulli-Kette

## Beispiel: Abhängigkeit / Unabhängigkeit

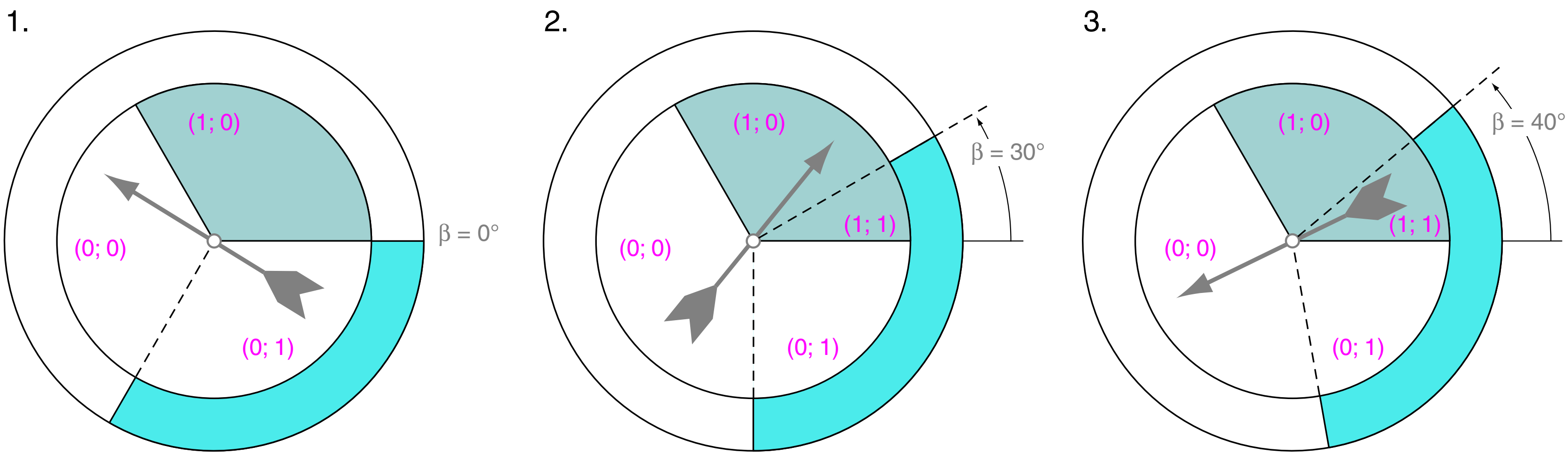
- Was geschieht, wenn nur Bedingung 2 von Definition 2 vorausgesetzt wird?
- Zur Demonstration eignen sich zwei Glücksräder mit verschiedenen Radien, aber gleichem Zentriwinkel $\alpha$; etwa $\alpha = 120°$ und damit $p = \frac{1}{3}$.
- Die Räder werden zentriert übereinandergelegt.
- Ein drehbarer Zeiger wird angebracht.
- Nach Anstoß des Zeigers beobachtet man zwei Ereignisse.
  Dargestellt als 2-Tupel, wobei die erste Ziffer das kleine und die zweite das rote Rad meint.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger bei $(1;1)$ stehen bleibt hängt vom Überlappungswinkel $\beta$ der beiden Treffersektoren ab und beträgt $\frac{\beta}{360°}$, wobei $\beta$ in Grad gemessen wird.




[Feuerpfeil/Heigel 1999]

# Bernoulli-Kette

## Beispiel: Abhängigkeit / Unabhängigkeit




[Feuerpfeil/Heigel 1999]

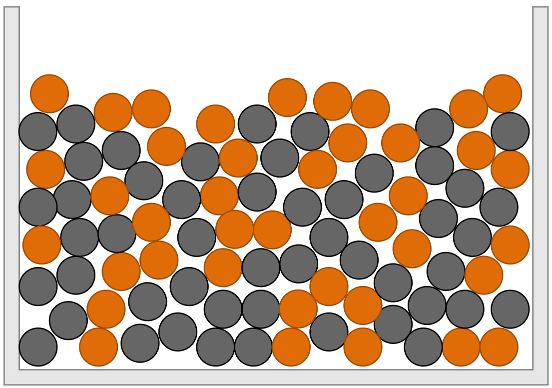
1. $\beta = \ 0°$: Zwei Treffer können nicht passieren, die $E_i$ sind abhängig.
2. $\beta = 30°$: Da $P(\{(1;1)\}) = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = P(E_1) \cdot P(E_2)$ sind die $E_i$ abhängig.
3. $\beta = 40°$: Da $P(\{(1;1)\}) = \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = P(E_1) \cdot P(E_2)$ sind die $E_i$ unabhängig.

➜ Bernoulli-Experimente müssen unabhängig verkettet werden.

# Bernoulli-Kette

## Urnenmodell

- Bernoulli-Ketten werden auch als Urne mit schwarzen und roten Kugeln modelliert.
- Das Mengenverhältnis beider Kugelsorten entspricht der Trefferwahrscheinlicheit $p$ für schwarze und der Nietenwahrscheinlichkeit $q$ für rote Kugeln.



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Dabei sind die $p$ und $q$ als rational gedacht; sind sie irrational, so kann man sie beliebig genau mit rationalen Zahlen annähern.
- Die $n$ Versuche einer Kette entsprechen dann $n$ Ziehungen mit Zurücklegen.
- Bei konstantem $p$ sind die Versuche der Kette damit unabhängig.

# Bernoulli-Kette

## Sonderfälle für $p \in ]0;1[$: (a) Nur Treffer / Nieten

- Sei $X$ die Anzahl der Treffer in einer Bernoulli-Kette mit Parametern $n$ und $p$.
- Die Wahrscheinlichkeit, ausschließlich Treffer bzw. Nieten zu erhalten, ist:

$$P(X=n) = p^n \qquad \text{bzw.} \qquad P(X=0) = q^n = (1-p)^n$$

- Bei der Berechnung solcher Wahrscheinlichkeiten ergeben sich manchmal überraschende Werte, die geläufigen intuitiven Vorstellungen widersprechen.

# Bernoulli-Kette

## Sonderfälle für $p \in ]0;1[$: (a) Nur Treffer / Nieten

- Sei $X$ die Anzahl der Treffer in einer Bernoulli-Kette mit Parametern $n$ und $p$.
- Die Wahrscheinlichkeit, ausschließlich Treffer bzw. Nieten zu erhalten, ist:

$$P(X = n) = p^n \qquad \text{bzw.} \qquad P(X = 0) = q^n = (1 - p)^n$$

- Bei der Berechnung solcher Wahrscheinlichkeiten ergeben sich manchmal überraschende Werte, die geläufigen intuitiven Vorstellungen widersprechen.

Beispiel: Gerüchteverbreitung

- Wieso werden Gerüchte bei der Verbreitung oft entstellt?

# Bernoulli-Kette

## Sonderfälle für $p \in ]0;1[$: (a) Nur Treffer / Nieten

- Sei $X$ die Anzahl der Treffer in einer Bernoulli-Kette mit Parametern $n$ und $p$.
- Die Wahrscheinlichkeit, ausschließlich Treffer bzw. Nieten zu erhalten, ist:

$$P(X = n) = p^n \qquad \text{bzw.} \qquad P(X = 0) = q^n = (1-p)^n$$

- Bei der Berechnung solcher Wahrscheinlichkeiten ergeben sich manchmal überraschende Werte, die geläufigen intuitiven Vorstellungen widersprechen.

Beispiel: Gerüchteverbreitung

- Wieso werden Gerüchte bei der Verbreitung oft entstellt?
- Angenommen, eine Person erzählt einen Sachverhalt unabhängig von Dritten mit einer Wahrscheinlichkeit von $90\%$ korrekt weiter.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass der Sachverhalt nach dem zehnten Weitererzählen noch korrekt ist, beträgt dann $0{,}9^{10} \approx 35\%$.
- Nach dem 30. Weitererzählen beträgt die Wahrscheinlichkeit nur noch $4\%$.
- Skepsis ist daher angebracht, sobald man etwas aus „$n$-ter Hand“ erfährt.

# Bernoulli-Kette

## Sonderfälle für $p \in ]0;1[$: (a) Nur Treffer / Nieten

Beispiel: Paradoxon der fast sicheren Ereignisse

- Gegeben zwei Bernoulli-Ketten der Länge $n$ mit Trefferwahrscheinlichkeiten von jeweils $99\%$ und $99{,}99\%$; sogenannte „fast sichere“ Ereignisse.
- Korrespondierende Urnen enthalten 100 und 10.000 Kugeln, von denen 99 bzw. 9999 schwarz (= Treffer) sind.
- Die Wahrscheinlichkeiten, bei $n$ Ziehungen mit Zurücklegen nur Treffer zu erzielen sind $0{,}99^n$ bzw. $0{,}9999^n$.

# Bernoulli-Kette

## Sonderfälle für $p \in ]0;1[$: (a) Nur Treffer / Nieten

Beispiel: Paradoxon der fast sicheren Ereignisse

- Gegeben zwei Bernoulli-Ketten der Länge $n$ mit Trefferwahrscheinlichkeiten von jeweils $99\%$ und $99{,}99\%$; sogenannte „fast sichere“ Ereignisse.
- Korrespondierende Urnen enthalten 100 und 10.000 Kugeln, von denen 99 bzw. 9999 schwarz (= Treffer) sind.
- Die Wahrscheinlichkeiten, bei $n$ Ziehungen mit Zurücklegen nur Treffer zu erzielen sind $0{,}99^n$ bzw. $0{,}9999^n$.
- Für $n = 100$ betragen die Wahrscheinlichkeiten $36{,}6\%$ bzw. $99\%$.
- Für $n = 200$ betragen die Wahrscheinlichkeiten $13{,}4\%$ bzw. $98\%$.
- Paradox: Die Unterschied der Trefferwahrscheinlichkeiten wirken intuitiv klein.
- Auflösung: Kleine Unterschiede in der Trefferwahrscheinlichkeit haben erhebliche Auswirkungen bei langen Bernoulli-Ketten.

# Bernoulli-Kette

## Sonderfälle für $p \in ]0;1[$: (b) Mindestens ein Treffer

- Sei $X$ die Anzahl der Treffer in einer Bernoulli-Kette mit Parametern $n$ und $p$.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass sich wenigstens ein Treffer einstellt, ist:

$$P(X \geq 1) \;=\; 1 - q^n \;=\; 1 - (1-p)^n \; .$$

- Da $q \neq 0$, wächst diese Wahrscheinlichkeit mit der Anzahl der Versuche.
- Selbst wenn $p$ „verschwindend gering" ist (aber nicht Null), geht $(1-p)^n$ für große $n$ gegen Null.

# Bernoulli-Kette

## Sonderfälle für $p \in ]0;1[$: (b) Mindestens ein Treffer

- Sei $X$ die Anzahl der Treffer in einer Bernoulli-Kette mit Parametern $n$ und $p$.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass sich wenigstens ein Treffer einstellt, ist:

$$P(X \geq 1) \ = \ 1 - q^n \ = \ 1 - (1-p)^n \ .$$

- Da $q \neq 0$, wächst diese Wahrscheinlichkeit mit der Anzahl der Versuche.
- Selbst wenn $p$ „verschwindend gering“ ist (aber nicht Null), geht $(1-p)^n$ für große $n$ gegen Null.

Beispiel: Paradoxon von de Méré

- Experiment 1: Wirft man einen Laplace-Würfel viermal, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass mind. einmal die Sechs auftritt größer als $50\%$.
- Experiment 2: Wirft man zwei Laplace-Würfeln 24-mal, so ist die Wahrscheinlichkeit für einen 6-er Pasch kleiner als $50\%$.
- Paradox: Die Experimente stehen in proportionalem Verhältnis von Würfen zu Möglichkeiten (4:6 $=$ 24:36), die Gesamtwahrscheinlichkeiten aber nicht.

# Bernoulli-Kette

## Sonderfälle für $p \in ]0;1[$: (b) Mindestens ein Treffer

Beispiel: Paradoxon von de Méré

- Experiment 1 für $k$ Würfe:

$$P_1(\text{„mind. eine Sechs“}) \;=\; 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k$$

- Für $k = 4$ ergibt sich $\approx 0{,}518 > \frac{1}{2}$.

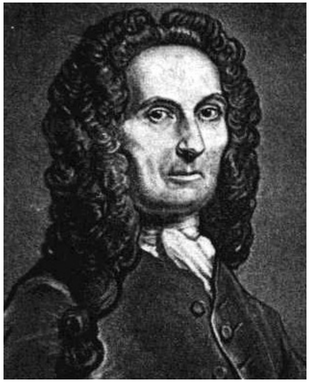
- Experiment 2 für $k$ Würfe:

$$P_2(\text{„mind. ein Sechserpasch“}) \;=\; 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^k$$

- Für $k = 24$ ergibt sich $\approx 0{,}491 < \frac{1}{2}$.
- „Auflösung“: Erst für $k = 25$ ergibt sich $\approx 0{,}506 > \frac{1}{2}$.

Bemerkungen:

- Antoine Chevalier de Méré (1607–1685, französischer Höfling und Schriftsteller) liebte das Glücksspiel und sprach 1654 Pascal auf das als Paradox von de Méré bekannt gewordene Problem an.
- Das Problem wurde von Pascal mit Fermat in Briefwechseln diskutiert und führte sie wohl zur Entwicklung der Anteilsregel. Die Lösung wurde von Pascal und Fermat unabhängig voneinander mit Hilfe der Anteilsregel durch vollständiges Abzählen der Mengen aller Möglichkeiten gefunden.
- De Méré war damit nicht zufrieden, da der scheinbare Widerspruch bezüglich der Proportionalität in der Lösung von Pascal und Fermat nicht adressiert wurde. Dass die Wahrscheinlichkeiten ungleich ist, wusste de Méré schon zuvor.



- Diesen Widerspruch des Proportionalitätsverhältnisses (also den eigentlichen Grund des Paradoxons) klärte erst 1718 Abraham de Moivre (1667–1754, französischer Mathematiker) in seinem Buch „Doctrine of Chances“ auf.
- Er zeigte mit Logarithmus-Potenzreihenentwicklung, dass die „Proportionalitätserwartung der kritischen Werte nicht weit von der Wahrheit entfernt ist“, aber eben nicht exakt gilt, wobei als kritische Werte die Mindestanzahl $n$ an Würfen gemeint ist, so dass $1-(1-p)^n \geq \frac{1}{2}$ ist.

# Bernoulli-Kette

## Sonderfälle für $p \in ]0;1[$: (b) Mindestens ein Treffer

- Was ist die kleinste Zahl $n$ der nötigen Versuche in einer Bernoulli-Kette mit Parameter $p$ für mindestens einen Treffer mit der Mindestwahrscheinlichkeit $\beta$:

$$1 - (1-p)^n \geq \beta\ .$$

- Daraus ergibt sich $(1-p)^n \leq 1-\beta$ und wegen der Monotonie des Logarithmus

$$n \cdot \log(1-p) \leq \log(1-\beta)\ .$$

- Da $\log(1-p)$ negativ ist, folgt

$$n \geq \frac{\log(1-\beta)}{\log(1-p)}\ .$$

# Bernoulli-Kette

## Sonderfälle für $p \in ]0;1[$: (b) Mindestens ein Treffer

- Was ist die kleinste Zahl $n$ der nötigen Versuche in einer Bernoulli-Kette mit Parameter $p$ für mindestens einen Treffer mit der Mindestwahrscheinlichkeit $\beta$:
$$1-(1-p)^n \geq \beta \ .$$
- Daraus ergibt sich $(1-p)^n \leq 1-\beta$ und wegen der Monotonie des Logarithmus
$$n \cdot \log(1-p) \leq \log(1-\beta) \ .$$
- Da $\log(1-p)$ negativ ist, folgt
$$n \geq \frac{\log(1-\beta)}{\log(1-p)} \ .$$

Beispiel: Paradoxon von de Méré (Fortsetzung)

- Experiment 1: $p = \frac{1}{6}$ und $\beta = \frac{1}{2}$ ergibt $3{,}8$ und damit $n = 4$.
- Experiment 2: $p = \frac{1}{36}$ und $\beta = \frac{1}{2}$ ergibt $24{,}6$ und damit $n = 25$.
- De Mérés Annahme der Proportionalität ist nur eine ungefähre Annäherung.

# Bernoulli-Kette

## Beispiel: Modellierung von Infektionsrisiken

- Was ist die Wahrscheinlichkeit, sich bei „ungeschütztem Kontakt“ zu anderen Personen mit einer Infektionskrankheit anzustecken?

- Infektiosität: Sei $w$ die Übertragungswahrscheinlichkeit bei einem einzelnen Kontakt einer nicht infizierten zu einer infizierten Person.
  Annahme: $w$ ist unabhängig von vorausgehende Kontakten.

- Prävalenz: Sei $p$ der Anteil infizierter Personen einer Bevölkerungsgruppe.
  Nicht verwechseln mit dem Parameter $p$ einer Bernoulli-Kette.

Fallunterscheidung:

1. Eine nicht infizierte Person hat $n$ Kontakte mit einer infizierten Person.

2. Eine nicht infizierte Person hat $n$ Kontakte mit $n$ zufällig gewählten Personen.

3. Eine nicht infizierte Person hat $n$ Kontakte mit einer zufällig gewählten Person.

# Bernoulli-Kette

## Beispiel: Modellierung von Infektionsrisiken

Fall 1: Eine nicht infizierte Person hat $n$ Kontakte mit einer infizierten Person.

- Die Kontakte entsprechen einer Bernoulli-Kette mit Parametern $n$ und $w$.
- Wahrscheinlichkeit, dass die nicht infizierte Person gesund bleibt:

$$P_1 = (1 - w)^n$$

- Wahrscheinlichkeit für eine Übertragung der Infektion (Ansteckungsrisiko):

$$R_1 = 1 - (1 - w)^n$$

# Bernoulli-Kette

## Beispiel: Modellierung von Infektionsrisiken

Fall 1: Eine nicht infizierte Person hat $n$ Kontakte mit einer infizierten Person.

- Die Kontakte entsprechen einer Bernoulli-Kette mit Parametern $n$ und $w$.
- Wahrscheinlichkeit, dass die nicht infizierte Person gesund bleibt:

$$P_1 = (1 - w)^n$$

- Wahrscheinlichkeit für eine Übertragung der Infektion (Ansteckungsrisiko):

$$R_1 = 1 - (1 - w)^n$$

Fall 2: Eine nicht infizierte Person hat $n$ Kontakte mit $n$ zufällig gewählten Personen.

- Bei genau einem Kontakt der nicht infizierten Person zu einer zufällig gewählten Person interessieren folgende Ereignisse:

$I$: „Ausgewählte Person ist infiziert“

$A_1$: „Ansteckung der nicht infizierten Person“

# Bernoulli-Kette

## Beispiel: Modellierung von Infektionsrisiken

Fall 1: Eine nicht infizierte Person hat $n$ Kontakte mit einer infizierten Person.

- Die Kontakte entsprechen einer Bernoulli-Kette mit Parametern $n$ und $w$.
- Wahrscheinlichkeit, dass die nicht infizierte Person gesund bleibt:

$$P_1 = (1-w)^n$$

- Wahrscheinlichkeit für eine Übertragung der Infektion (Ansteckungsrisiko):

$$R_1 = 1-(1-w)^n$$

Fall 2: Eine nicht infizierte Person hat $n$ Kontakte mit $n$ zufällig gewählten Personen.

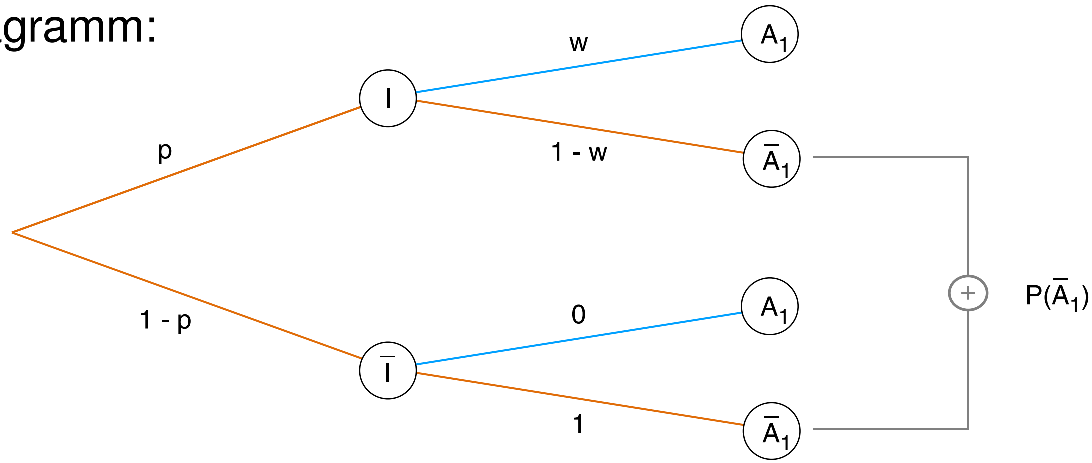
- Bei genau einem Kontakt der nicht infizierten Person zu einer zufällig gewählten Person interessieren folgende Ereignisse:

| | | |
|---|---|---|
| $I$: | „Ausgewählte Person ist infiziert“ | $P(I) = p$ |
| $A_1$: | „Ansteckung der nicht infizierten Person“ | $P(A_1 \mid I) = w$ |

# Bernoulli-Kette

## Beispiel: Modellierung von Infektionsrisiken

- Baumdiagramm:




[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Nach den Pfadregeln ist die Wahrscheinlichkeit für keine Ansteckung die Summe der Wahrscheinlichkeiten der beiden roten Pfade nach $\bar{A}_1$, also

$$P(\bar{A}_1) \;=\; p \cdot (1-w) + (1-p) \cdot 1 \;=\; 1 - p \cdot w \; .$$

- Die Kontakte entsprechen einer Bernoulli-Kette mit Parametern $n$ und $(1-pw)$:

$$\begin{aligned} P_2 &= (1-pw)^n \\ R_2 &= 1-(1-pw)^n \end{aligned}$$

# Bernoulli-Kette

## Beispiel: Modellierung von Infektionsrisiken

Fall 3: Eine nicht infizierte Person hat $n$ Kontakte mit einer zufällig gewählten Person.

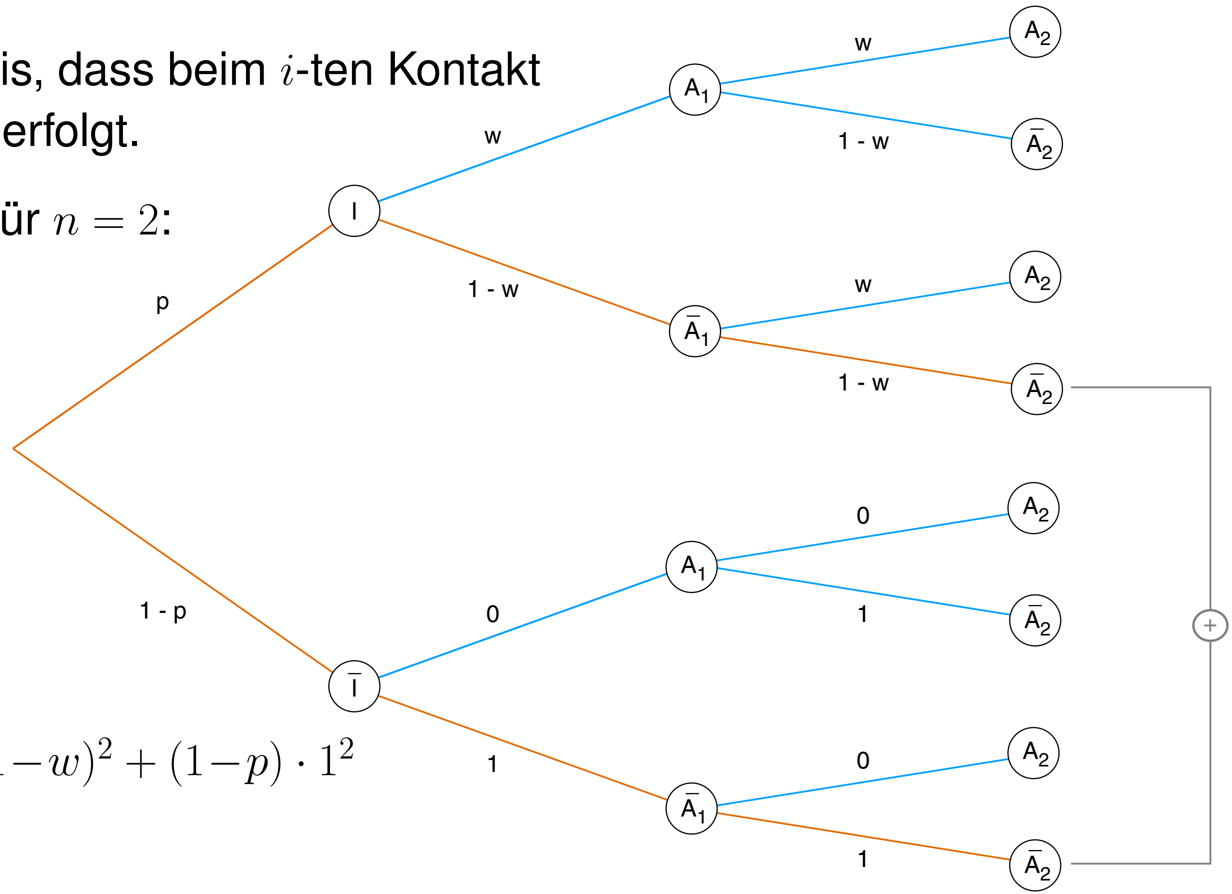
- $A_i$ sei das Ereignis, dass beim $i$-ten Kontakt eine Ansteckung erfolgt.

# Bernoulli-Kette

## Beispiel: Modellierung von Infektionsrisiken

Fall 3: Eine nicht infizierte Person hat $n$ Kontakte mit einer zufällig gewählten Person.

- $A_i$ sei das Ereignis, dass beim $i$-ten Kontakt eine Ansteckung erfolgt.
- Baumdiagramm für $n = 2$:




- Analog zu Fall 2:
  $P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = p \cdot (1-w)^2 + (1-p) \cdot 1^2$

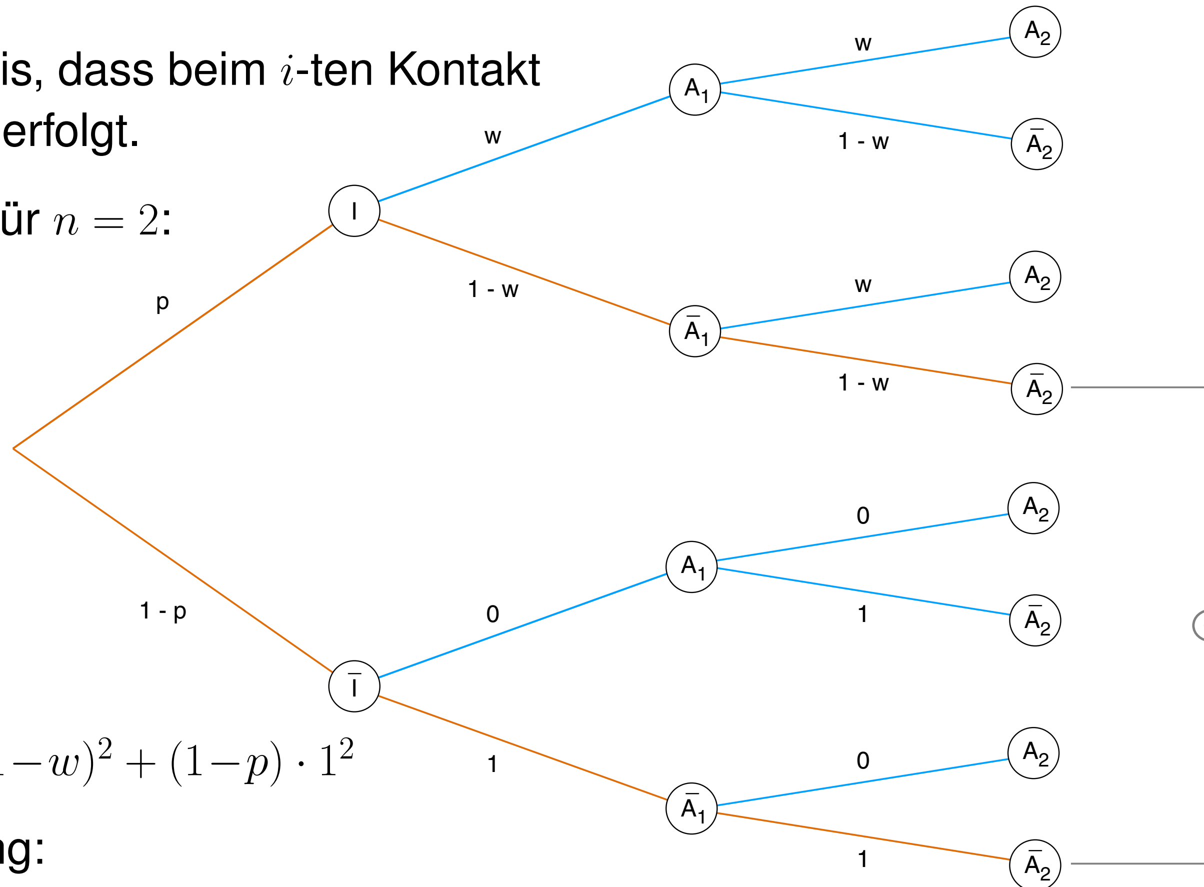
[Feuerpfeil/Heigel 1999]

# Bernoulli-Kette

## Beispiel: Modellierung von Infektionsrisiken

Fall 3: Eine nicht infizierte Person hat $n$ Kontakte mit einer zufällig gewählten Person.

- $A_i$ sei das Ereignis, dass beim $i$-ten Kontakt eine Ansteckung erfolgt.
- Baumdiagramm für $n = 2$:




- Analog zu Fall 2:
  $P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = p \cdot (1-w)^2 + (1-p) \cdot 1^2$
- Verallgemeinerung:
  $$P_3 \;=\; p \cdot (1-w)^n + (1-p)$$
  $$R_3 \;=\; 1 - P_3 \;=\; 1 - ((1-w)^n + (1-p)) \;=\; p \cdot (1-(1-w)^n)$$

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

# Bernoulli-Kette

## Beispiel: Modellierung von Infektionsrisiken

Ansteckungsrisiken abhängig von Infektiosität $w$, Prävalenz $p$ und Kontaktzahl $n$:

| $n$ **Kontakte mit** | $w = 0{,}001$ | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 5$ | $n = 10$ | $n = 100$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| einer infizierten Person | $R_1$ | $0{,}001$ | $0{,}002$ | $0{,}005$ | $0{,}01$ | $0{,}095$ |
| $n$ zufälligen Personen | $R_2$ (mit $p = 0{,}001$) | $0{,}000001$ | $0{,}000002$ | $0{,}000005$ | $0{,}00001$ | $0{,}0001$ |
| | $R_2$ (mit $p = 0{,}2$) | $0{,}0002$ | $0{,}0004$ | $0{,}001$ | $0{,}002$ | $0{,}02$ |
| einer zufälligen Person | $R_3$ (mit $p = 0{,}001$) | $0{,}000001$ | $0{,}000002$ | $0{,}000005$ | $0{,}00001$ | $0{,}0001$ |
| | $R_3$ (mit $p = 0{,}2$) | $0{,}0002$ | $0{,}0004$ | $0{,}001$ | $0{,}002$ | $0{,}02$ |

| $n$ **Kontakte mit** | $w = 0{,}03$ | $n = 1$ | $n = 2$ | $n = 5$ | $n = 10$ | $n = 100$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| einer infizierten Person | $R_1$ | $0{,}03$ | $0{,}06$ | $0{,}14$ | $0{,}26$ | $0{,}95$ |
| $n$ zufälligen Personen | $R_2$ (mit $p = 0{,}001$) | $0{,}00003$ | $0{,}00006$ | $0{,}00015$ | $0{,}0003$ | $0{,}003$ |
| | $R_2$ (mit $p = 0{,}2$) | $0{,}006$ | $0{,}012$ | $0{,}03$ | $0{,}06$ | $0{,}45$ |
| einer zufälligen Person | $R_3$ (mit $p = 0{,}001$) | $0{,}00003$ | $0{,}00006$ | $0{,}00014$ | $0{,}0003$ | $0{,}001$ |
| | $R_3$ (mit $p = 0{,}2$) | $0{,}006$ | $0{,}012$ | $0{,}028$ | $0{,}053$ | $0{,}19$ |

- Das Ansteckungsrisiko ist groß bei häufigen Kontakten mit einer infizierten Person bzw. mit Personen aus Bevölkerungsgruppen mit hoher Prävalenz.
- Zufällige Kontakte bei kleiner Prävalenz bergen ein eher kleines Risiko.

Bemerkungen:

- Um für alle drei Fälle realistische Aussagen zu bekommen, müssen die Parameter $p$ und $w$ verlässlich geschätzt werden.
- Für HIV-Infektionen schätzt man zum Beispiel in Deutschland eine Prävalenz $p$ von etwa $0{,}1\%$; bei manchen Bevölkerungsgruppen aber auch $> 20\%$.
- Für die Übertragung bei Sexualkontakten geht man davon aus, dass die Infektiosität $w$ durchschnittlich größer als $1 : 1000$ ist, da sich die HIV-Epidemie sonst nicht in der Bevölkerung halten würde. In der Literatur werden Werte zwischen $0{,}001$ und $0{,}03$ angenommen.
- Wie groß das Ansteckungsrisiko bei Kontakten auch sein mag ist natürlich immer dann unerheblich, wenn schon vorher eine Ansteckung stattgefunden hat.
- Bei den entsprechenden Berechnungen muss man auch immer bedenken, dass ein mathematisches Modell die wirklichen Verhältnisse nicht vollständig erfassen kann. Beispielsweise berücksichtigen die Betrachtungen weder potenziell unterschiedliche Übertragungswege mit unterschiedlichen Risiken noch die möglicherweise nicht konstante sondern steigende Infektiosität bei vielen vorherigen Kontakten mit Infizierten. Die Infektiosität $w$ in unserem Modell kann also nur als eine Art durchschnittliche Übertragungswahrscheinlichkeit pro Kontakt mit einer infizierten Person interpretiert werden.