Kapitel PTS:II

II. Wahrscheinlichkeitsbegriff

- ❑ Zufallsexperimente
- ❑ Ergebnisräume
- ❑ Ereignisräume
- ❑ Relative Häufigkeit
- ❑ Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff
- ❑ Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Ziel: Mathematische Modellierung des Zufalls

Schritt 1: Beschreibung zufälliger Vorgänge als Zufallsexperiment

Schritt 2: Zusammenfassung interessierender Ausgänge zum Ergebnisraum Ω

Schritt 3: Identifikation interessierender Ereignisse im Ergebnisraum

Schritt 4: Bestimmung der Häufigkeit des Ereigniseintritts

Schritt 5: Statistische Wahrscheinlichkeit $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsbegriff

Schritt 6: Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Was ist Wahrscheinlichkeit?

Beispiel: Medizinische Vorhersage [Henning 2001]

Ein Ärztin verordnet Ihnen ein Medikament. Auf Ihre Nachfrage hin sagt sie:
„Das Medikament wird Sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% heilen.“

Was genau ist damit gemeint?

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Was ist Wahrscheinlichkeit?

Beispiel: Medizinische Vorhersage [Henning 2001]

Ein Ärztin verordnet Ihnen ein Medikament. Auf Ihre Nachfrage hin sagt sie: „Das Medikament wird Sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% heilen."

Was genau ist damit gemeint? Sie gibt eine der folgenden Erklärungen:

1. Sie hat das Medikament bei 20 Patient:innen probiert und 18 wurden geheilt.

2. Sie glaubt, dass, wenn sie immer mehr Patient:innen mit diesem Medikament behandeln würde, sich die relative Häufigkeit der Erfolge bei genügend großer Patient:innen-Zahl bei 0.9 stabilisieren wird.

3. Sie hält 90 Euro für den fairen Einsatz einer Wette, bei der sie 100 Euro bekommt, wenn Sie geheilt werden.
   D.h. insbesondere, dass sie die Wette auf jeden Fall eingehen würde, wenn man ihr weniger Einsatz abverlangen würde.

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Was ist Wahrscheinlichkeit?

- **Klassische Definition**

  Die Ergebnisse eines Zufallsexperiments werden als gleich wahrscheinlich angenommen, wenn keine anders lautende Evidenz vorliegt oder die Symmetrie seines Aufbaus dies (unter idealisierten Bedingungen) nahelegt.

  Zufallsexperimente, die als symmetrisch angenommen werden, z.B. Glücksspiele.

- **Frequentismus**

  Die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse eines Zufallsexperiments sind die „Grenzwerte“ ihrer relativen Häufigkeiten für unendlich viele Wiederholungen.

  Asymmetrische Zufallsexperimente, z.B. Naturphänomene.

- **Subjektivismus**

  Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist ein Maß für eine vernünftige Erwartung seines Eintretens nach aktuellem Stand des Wissens oder für den „Grad persönlicher Überzeugung“ über sein früheres Eingetretensein.

  „Einmalige“ Zufallsexperimente: „Ich wette 1,000 Euro, dass innerhalb von 10 Jahren jemand zum Mars reisen wird.“ bzw. „Wie wahrscheinlich gab es Leben auf dem Mars?“

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Was ist Wahrscheinlichkeit?

- Klassische Definition

  Sie war Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung im 19. Jahrhundert, erwies sich als nützlich, ihre Definition schien aber logisch unzureichend.

- Frequentismus

  Ein Grenzwert ist nicht nachweisbar, daher postulierte Richard von Mises ihn einfach; dies erwies sich aber ebenso als logisch widersprüchlich.

- Subjektivismus

  Obwohl er sich parallel zur klassischen Definition entwickelte (u.a. Satz von Bayes), verhalf erst Bruno de Finetti ihm im 20. Jahrhundert zum Durchbruch.

- Die Klärung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs ist Teil von Hilberts Liste offener mathematischer Probleme um 1900

→ Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeit


Richard von Mises


Bruno de Finetti


David Hilbert

Bemerkungen:

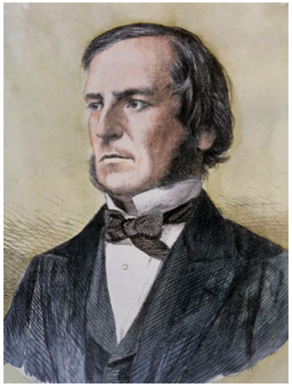
- Die Antworten des Beispiels „Medizinische Vorhersage“ schließen sich nicht unbedingt aus, aber sie bedeuten nicht dasselbe. Weder kann man von Begründung 1 auf Begründung 2, noch umgekehrt schließen. Es ist klar, dass man nicht erwarten kann, dass sich die Begründung 1 bei den nächsten 20 Patient:innen exakt wiederholt. Begründung 3 muss nicht auf Wiederholbarkeit beruhen. Die Ärztin kann ihren Wetteinsatz von allen Informationen abhängig machen, die sie über Sie hat, auch denen, die charakteristisch für Sie alleine sind. [Henning 2001]

- Begründung 1 entspricht am ehesten der klassischen Wahrscheinlichkeit: Der Einsatz des Medikaments entspräche hier einem Roulette mit 20 Zahlen, bei denen 18 das Ereignis „Heilung“ und 2 das Gegenereignis wären.

- Begründung 2 entspricht einer frequentistischen Sicht aufgrund der Erwartung einer entsprechenden empirischen Wahrscheinlichkeit.

- Begründung 3 entspricht einer subjektivistischen Sicht: Welches Wissen der Einschätzung zugrundeliegt bleibt unklar.

- Schon vor Hilbert hatte u.a. George Boole (1815–1864, englischer Logiker) einen logisch konsistenteren Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung gefordert. Seine Forderungen zeigten aber praktisch keine Wirkung bei den Mitte des 19. Jahrhunderts wenigen mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigten Mathematikern.



Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomatische Definition

Vorgehen:

1. Postulierung von Grundbegriffen

Beispiel: Euklidische Geometrie

- Punkt, Gerade und Ebene

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomatische Definition

Vorgehen:

1. Postulierung von Grundbegriffen

2. Forderung von Eigenschaften und Beziehungen als Regeln („Axiome“)

Beispiel: Euklidische Geometrie

- Punkt, Gerade und Ebene

- Benötigte Beziehungen: „liegen“, „zwischen“, „kongruent“

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomatische Definition

Vorgehen:

1. Postulierung von Grundbegriffen

2. Forderung von Eigenschaften und Beziehungen als Regeln („Axiome")

3. Minimierung der Regelmenge durch Entfernung logisch ableitbarer Regeln

Beispiel: Euklidische Geometrie

- Punkt, Gerade und Ebene
- Benötigte Beziehungen: „liegen", „zwischen", „kongruent"
- Hilbert fordert 21 Axiome; Euklid nur 5 (unvollst.) bei 35 Begriffen

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomatische Definition

Vorgehen:

1. Postulierung von Grundbegriffen
2. Forderung von Eigenschaften und Beziehungen als Regeln („Axiome“)
3. Minimierung der Regelmenge durch Entfernung logisch ableitbarer Regeln

Beispiel: Euklidische Geometrie

- Punkt, Gerade und Ebene
- Benötigte Beziehungen: „liegen“, „zwischen“, „kongruent“
- Hilbert fordert 21 Axiome; Euklid nur 5 (unvollst.) bei 35 Begriffen

Hintergrund:

- Die Grundbegriffe sind Bezeichner; ein Wirklichkeitsbezug ist nicht gefordert.
  Ihre Bedeutung erschließt sich implizit und induktiv über die Axiome.
- Dennoch: Empirie zieht die Axiomatisierung nach sich, nicht umgekehrt.
  Eine Axiomatisierung ordnet eine Sammlung empirisch bestimmter Regeln.
- Die Axiome gelten voraussetzunglos als formales System, ein Modell.
  Von den Axiomen lassen sich (nicht immer alle) andere(n) Regeln logisch deduktiv ableiten.
- Ein Nutzen ergibt sich, wenn die Axiome die Wirklichkeit gut widerspiegeln.

Bemerkungen: Hilberts Axiomensystem der euklidischen Geometrie

I Axiome der Verknüpfung (oder Inzidenz; „liegen“)

1. Zwei voneinander verschiedene Punkte P und Q bestimmen stets eine Gerade g.
2. Irgend zwei voneinander verschiedene Punkte einer Geraden bestimmen diese Gerade.
3. Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte, in einer Ebene gibt es stets wenigstens drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte.
4. Drei nicht auf ein und derselben Geraden liegende Punkte P, Q, R bestimmen stets eine Ebene.
5. Irgend drei Punkte einer Ebene, die nicht auf ein und derselben Geraden liegen, bestimmen diese Ebene.
6. Wenn zwei Punkte P und Q einer Geraden g in einer Ebene α liegen, so liegt jeder Punkt von g in α.
7. Wenn zwei Ebenen α und β einen Punkt P gemeinsam haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt Q gemeinsam.
8. Es gibt wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.

II Axiome der Anordnung („zwischen“) Seien A, B, C verschiedene Punkte auf einer Gerade:

1. Wenn B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A.
2. Zu zwei Punkten A und C gibt es stets wenigstens einen Punkt B, der zwischen A und C liegt, und wenigstens einen Punkt D, so dass C zwischen A und D liegt.
3. Unter irgend drei Punkten einer Geraden gibt es stets einen und nur einen Punkt, der zwischen den beiden anderen liegt.
4. Es seien A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und a eine Gerade in der Ebene ABC, die keinen dieser drei Punkte trifft; wenn dann die Gerade a durch einen Punkt der Strecke AB geht, so geht sie gewiss auch entweder durch einen Punkt der Strecke BC oder durch einen Punkt der Strecke AC.

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow

Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in zwei Schritten:

1. Postulierung einer Funktion, die jedem Ereignis eines Ereignisraums eindeutig eine Wahrscheinlichkeit zuordnet.

2. Verwendung der Eigenschaften dieser Funktion als Axiome.

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow

Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in zwei Schritten:

1. Postulierung einer Funktion, die jedem Ereignis eines Ereignisraums eindeutig eine Wahrscheinlichkeit zuordnet.
2. Verwendung der Eigenschaften dieser Funktion als Axiome.

- Wegen des empirischen Gesetzes der großen Zahlen kommen als Axiome Eigenschaften der relativen Häufigkeit in Frage.
- Welche Eigenschaften sind die Wesentlichen?

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow

Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in zwei Schritten:

1. Postulierung einer Funktion, die jedem Ereignis eines Ereignisraums eindeutig eine Wahrscheinlichkeit zuordnet.
2. Verwendung der Eigenschaften dieser Funktion als Axiome.

- Wegen des empirischen Gesetzes der großen Zahlen kommen als Axiome Eigenschaften der relativen Häufigkeit in Frage.
- Welche Eigenschaften sind die Wesentlichen?

→ Nach Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow:

$$h_n(A) \geq 0$$

$$h_n(\Omega) = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B)$$

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow

Definition 12 (Wahrscheinlichkeitsmaß, Wahrscheinlichkeit)

Eine Funktion $P : A \mapsto P(A)$, die jedem Ereignis $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ eine reelle Zahl $P(A)$ zuordnet, heißt Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt (Axiomensystem von Kolmogorow):

Axiom $\quad P(A) \geq 0$

Axiom $\quad P(\Omega) = 1$

Axiom III: $\quad A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A)$ wird auch kurz als die Wahrscheinlichkeit von A bezeichnet.

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow

Definition 12 (Wahrscheinlichkeitsmaß, Wahrscheinlichkeit)

Eine Funktion $P : A \mapsto P(A)$, die jedem Ereignis $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ eine reelle Zahl $P(A)$ zuordnet, heißt Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt (Axiomensystem von Kolmogorow):

Axiom	$P(A) \geq 0$	
Axiom	$P(\Omega) = 1$	
Axiom III:	$A \cap B = \emptyset$	$\Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A)$ wird auch kurz als die Wahrscheinlichkeit von A bezeichnet.

Modellierung eine realen Zufallsexperiments:

1. Zusammenfassung interessierender Ergebnisse im Ergebnisraum Ω.
2. Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zur Ereignissen, die die drei Axiome von Kolmogorow erfüllen.

➜ Angabe eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega; P)$ als Modell.

Bemerkungen:

- Allgemein ist eine Funktion, die diesen drei Axiomen genügt, ein *nicht-negatives* (Axiom I), *normiertes* (Axiom II) und *additives* (Axiom III) Maß.

- Andere Beispiele für derartige Maße:
  - Längenmaß der Teilstrecken der Einheitsstrecke oder das Flächenmaß der Punktmengen des Einheitsquadrats oder eines Rechtecks mit dem Inhalt 1 sind Beispiele.
  - Das Wahrscheinlichkeitsmaß eines Ereignisses lässt sich daher als geeignete Teilstrecke der Einheitsstrecke oder als geeignete Teilfläche eines Rechtecks mit Inhalt 1 darstellen.

- Man erhält also ein Flächenmodell für das Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn man den Ergebnisraum Ω als Rechteck oder Quadrat mit Flächeninhalt 1 darstellt und die Ereignisse als Teilflächen, deren Maßzahlen den Wahrscheinlichkeiten der Ereigisse entsprechen (vgl. Venn-Diagramm zur Additionsregel)

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Zusammenhang zwischen Wirklichkeit und Modell

- Das Axiomensystem definiert, was eine legitime Zuordnung ist.
  Andere Zuordnungen ergeben keinen Sinn. Eine Möglichkeit: Laplace-Annahme.

- Es sagt nicht, welche mögliche Zuordnung die Wirklichkeit beschreibt.

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Zusammenhang zwischen Wirklichkeit und Modell

- Das Axiomensystem definiert, was eine legitime Zuordnung ist.
  Andere Zuordnungen ergeben keinen Sinn. Eine Möglichkeit: Laplace-Annahme.

- Es sagt nicht, welche mögliche Zuordnung die Wirklichkeit beschreibt.

- Als Modell soll $(\Omega; P)$ das reale Zufallsexperiment widerspiegeln.

- Ziel ist per Deduktionen Rückschlüsse auf reale zufällige Vorgänge zu ziehen.

- Ein Modell ist eine Abstraktion der Wirklichkeit, kein vollständiges Abbild.

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Zusammenhang zwischen Wirklichkeit und Modell

- Das Axiomensystem definiert, was eine legitime Zuordnung ist.
  Andere Zuordnungen ergeben keinen Sinn. Eine Möglichkeit: Laplace-Annahme.

- Es sagt nicht, welche mögliche Zuordnung die Wirklichkeit beschreibt.

- Als Modell soll $(\Omega; P)$ das reale Zufallsexperiment widerspiegeln.

- Ziel ist per Deduktionen Rückschlüsse auf reale zufällige Vorgänge zu ziehen.

- Ein Modell ist eine Abstraktion der Wirklichkeit, kein vollständiges Abbild.

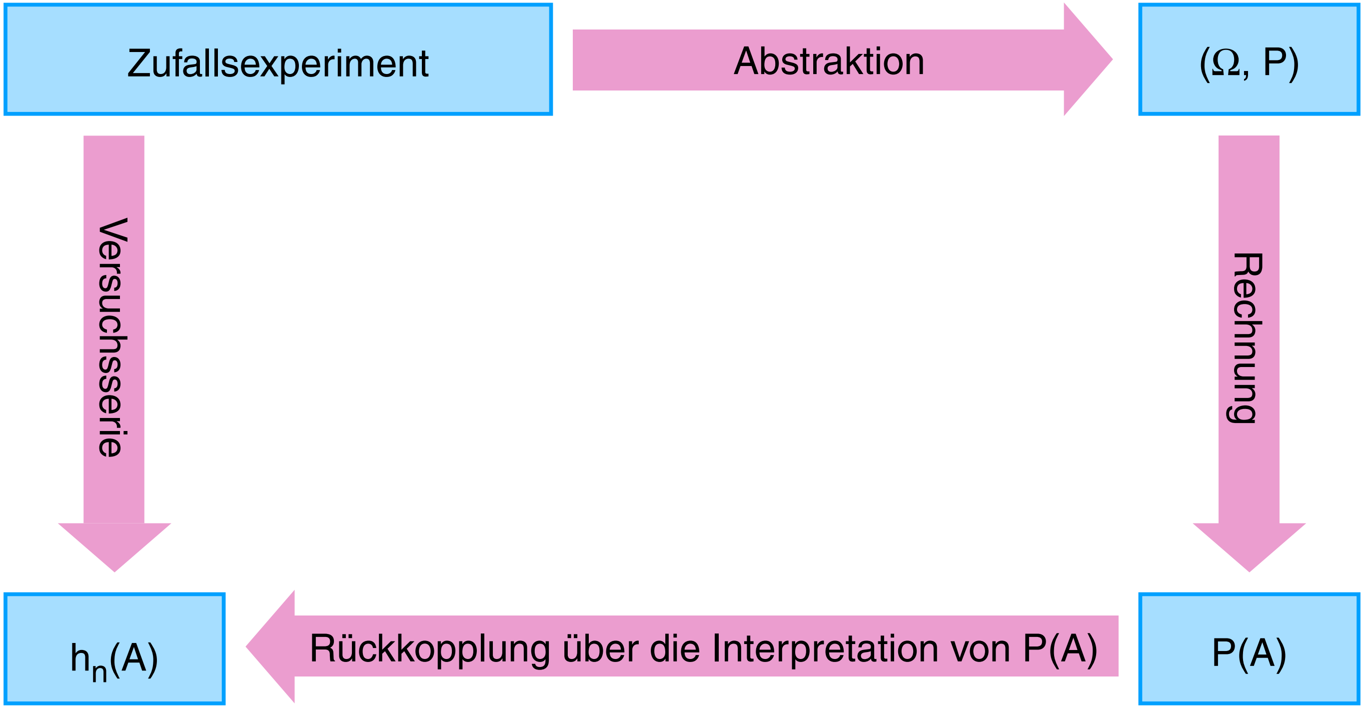
- $(\Omega; P)$ eignet sich genau dann als Modell, wenn die Ereignissen zugeordneten den statistischen Wahrscheinlichkeiten wirklicher Ereignisse „entsprechen".
  D.h. annähernde Übereinstimmung nach hinreichend vielen Versuchen / Beobachtungen.

- Stärkung (Schwächung) des Vertrauens in die Richtigkeit des Modells bei (mangelnder) Entsprechung der Wahrscheinlichkeiten vieler Ereignisse.
  Vertrauen in ein Modell kann nur induktiv gewonnen werden.

- Modelle können nur geprüft, aber nicht bewiesen werden.
  Misserfolg beim Widerlegen von Modellvorhersagen validiert das Modell.

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Zusammenhang zwischen Wirklichkeit und Modell



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Zusammenhang zwischen Wirklichkeit und Modell: Beispiel

- Wie wahrscheinlich fällt eine gerade Zahl beim Lotto „6 aus 49“?
  Ohne Beachtung gegebenenfalls schon gezogener Zahlen einer Ausspielung.

- Modellierung als eine Ziehung aus einer Urne mit 49 nummerierten Kugeln:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1; 2; \ldots; 49\} \\ A &= \{2; 4; \ldots; 48\} \end{aligned}$$

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Zusammenhang zwischen Wirklichkeit und Modell: Beispiel

- Wie wahrscheinlich fällt eine gerade Zahl beim Lotto „6 aus 49“?
  Ohne Beachtung gegebenenfalls schon gezogener Zahlen einer Ausspielung.

- Modellierung als eine Ziehung aus einer Urne mit 49 nummerierten Kugeln:

$$
\begin{aligned}
\Omega &= \{1; 2; \ldots; 49\} \\
A &= \{2; 4; \ldots; 48\}
\end{aligned}
$$

- Sei $(\Omega; P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei P nach der Anteilsregel der Laplace-Annahme jedem Ereignis über Ω eine Wahrscheinlichkeit zuordnet:

$$P(A) = \frac{24}{49} \approx 0{,}4898$$

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Zusammenhang zwischen Wirklichkeit und Modell: Beispiel

- Wie wahrscheinlich fällt eine gerade Zahl beim Lotto „6 aus 49“?
  Ohne Beachtung gegebenenfalls schon gezogener Zahlen einer Ausspielung.

- Modellierung als eine Ziehung aus einer Urne mit 49 nummerierten Kugeln:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1; 2; \ldots; 49\} \\ A &= \{2; 4; \ldots; 48\} \end{aligned}$$

- Sei $(\Omega; P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei P nach der Anteilsregel der Laplace-Annahme jedem Ereignis über Ω eine Wahrscheinlichkeit zuordnet:

$$P(A) = \frac{24}{49} \approx 0{,}4898$$

- Lottostatistik von 1000 Ausspielungen, also 6000 gezogenen Zahlen:

$$h_{6000}(A) = \frac{2949}{6000} = 0{,}4915 \approx P(A)$$

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Zusammenhang zwischen Wirklichkeit und Modell: Beispiel

- Wie wahrscheinlich fällt eine gerade Zahl beim Lotto „6 aus 49“?
  Ohne Beachtung gegebenenfalls schon gezogener Zahlen einer Ausspielung.

- Modellierung als eine Ziehung aus einer Urne mit 49 nummerierten Kugeln:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1; 2; \ldots; 49\} \\ A &= \{2; 4; \ldots; 48\} \end{aligned}$$

- Sei $(\Omega; P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei P nach der Anteilsregel der Laplace-Annahme jedem Ereignis über Ω eine Wahrscheinlichkeit zuordnet:

$$P(A) = \frac{24}{49} \approx 0{,}4898$$

- Lottostatistik von 1000 Ausspielungen, also 6000 gezogenen Zahlen:

$$h_{6000}(A) = \frac{2949}{6000} = 0{,}4915 \approx P(A)$$

- Auch bei anderen Ereignissen gibt es nur geringfügige Abweichungen.

→ Das Modell macht auch für Ereignisse richtige Vorhersagen, für die keine Statistiken vorliegen.

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow: Folgerungen

Satz 13

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten eines Ereignisses A und seines Gegenereignisses $\bar{A}$ ist gleich 1:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Bemerkungen:

- Aus $\Omega = A \cup \bar{A}$ folgt mit den Axiomen II und III:

$$P(\Omega) = 1 = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

- $P(\bar{A})$ heißt auch Gegenwahrscheinlichkeit zu $P(A)$.
- Dieser Zusammenhang ist hilfreich, wenn sich das Gegenereignis leichter überblicken lässt.

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow: Folgerungen

Satz 14

Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses ist gleich 0:

$$P(\emptyset) = 0.$$

Bemerkung:

- Folgerung aus Einsetzen des sicheren Ereignisses Ω für A in Satz 13.

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow: Folgerungen

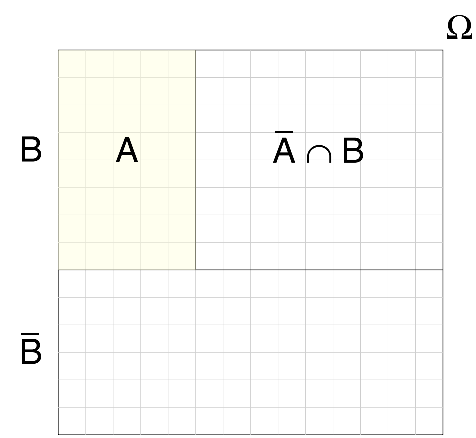
Satz 15

Sind A und B Ereignisse mit $A \subseteq B$, so gilt das Monotoniegesetz des Wahrscheinlichkeitsmaßes

$$P(A) \leq P(B).$$

Bemerkungen:

- Für zwei Ereignisse A und B gelte $A \subseteq B$.
- Dann lässt sich B in zwei unvereinbare Ereignisse zerlegen: $B = A \cup (\bar{A} \cap B)$.
- Nach Axiom III gilt $P(B) = P(A \cup (\bar{A} \cap B)) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$.
- Nach Axiom I ist $P(\bar{A} \cap B) \geq 0$, so dass insgesamt $P(B) \geq P(A)$.
- Setzen wir $B = \Omega$, so gilt wegen Axiom I und II: $0 \leq P(A) \leq 1$.



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow: Folgerungen

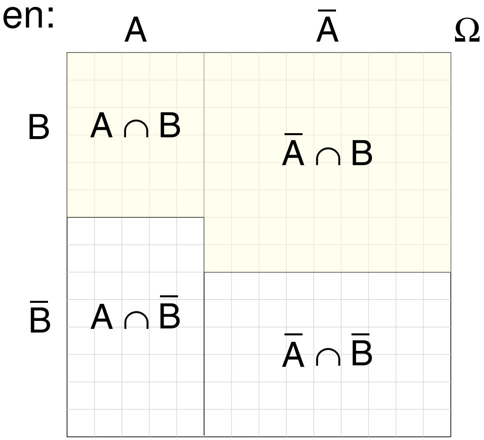
Satz 16

Sind A und B beliebige Ereignisse, so gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Bemerkungen:

- Mit Axiom III kann $P(A \cup B)$ berechnet werden, wenn A und B unvereinbar sind.
- Sind A und B beliebige Ereignisse, so gelten folgende Zerlegungen:
  $A \cup B = A \cup (\bar{A} \cap B)$
  $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$
- Anwenden von Axiom III liefert:
  $P(A \cup B) = P(A \cup (\bar{A} \cap B)) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$
  $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$
- Daraus folgt $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Sind A und B unvereinbar, so ist $P(A \cap B) = 0$ und man erhält Axiom III.



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow: Folgerungen

Satz 17

Sind $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_m$ paarweise unvereinbar, so gilt die *Additivität* der Wahrscheinlichkeit

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) \;=\; P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_m).$$

Bemerkungen:

- Verallgemeinerung von Satz 13.
- Diese Regel bezeichnet man als Additionsregel.

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow: Unvollständigkeit

- Sei $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = \Omega$ eine Zerlegung von Ω.
- Jedem A_i soll eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden.
- Wegen Axiom I und II und der Additionsregel muss gelten:

$$\begin{aligned} P(A_i) &\geq 0 \quad \text{für } i = 1{,}2, \ldots ,m \\ P(A_1) + \ldots + P(A_m) &= 1 = P(\Omega) \end{aligned}$$

- Die Wahrscheinlichkeit 1 des sicheren Ereignisses Ω wird auf die A_i „verteilt“.
- Wahrscheinlichkeitsmaße nennt man daher Wahrscheinlichkeitsverteilungen.
  Kurz: Verteilungen.

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow: Unvollständigkeit

- Sei $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = \Omega$ eine Zerlegung von Ω.
- Jedem A_i soll eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden.
- Wegen Axiom I und II und der Additionsregel muss gelten:

$$
\begin{aligned}
P(A_i) &\geq 0 \quad \text{für } i = 1,2,\ldots,m \\
P(A_1) + \ldots + P(A_m) &= 1 = P(\Omega)
\end{aligned}
$$

- Die Wahrscheinlichkeit 1 des sicheren Ereignisses Ω wird auf die A_i „verteilt".
- Wahrscheinlichkeitsmaße nennt man daher Wahrscheinlichkeitsverteilungen.
  Kurz: Verteilungen.
- Für eine Zerlegung von Ω existieren unendlich viele Verteilungen, die die Axiome erfüllen.

→ Das Axiomensystem von Kolmogorow ist unvollständig.
Es gibt keine Vorschrift zur eindeutigen Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Bemerkungen:

- Die Unvollständigkeit des Axiomensystem von Kolmogorow geht nicht auf eine ungünstige Auswahl der Axiome zurück, sondern liegt im Wesen der Dinge. Es soll nur strukturelle Eigenschaften des mathematischen Wahrscheinlichkeitsmaßes festlegen, um die Anwendbarkeit auf beliebige Zufallsexperimente offen zu lassen. Welche Verteilung für ein konkretes Experiment „richtig“ ist, ist mathematisch nicht entscheidbar, sondern hängt von physikalischen Eigenschaften des Experiments ab.

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow: Unvollständigkeit

- Anders als beim Frequentismus von v. Mises, ist das empirische Gesetz der großen Zahlen nicht im Axiomensystem von Kolmogorow enthalten.
- Es handelt es sich um die auffälligste objektive Gesetzmäßigkeit zufälliger Ereignisse, die uns zur mathematischen Wahrscheinlichkeit geführt hat.
- Soll die aufgebaute mathematische Theorie zufällige Vorgänge zutreffend beschreiben, so muss diese offensichtliche Eigenschaft ableitbar sein.
- Das ist Gegenstand des Abschnitts Gesetz der großen Zahlen).

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Beispiele für empirische Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel: Würfelwurf

- Sei $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ der Ergebnisraum mit den folgenden möglichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen für eine Zerlegung in Elementarereignisse:

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
	$0{,}159$	$0{,}163$	$0{,}166$	$0{,}166$	$0{,}171$	$0{,}175$
	$0{,}080$	$0{,}140$	$0{,}150$	$0{,}140$	$0{,}150$	$0{,}340$

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Beispiele für empirische Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel: Würfelwurf

- Sei $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ der Ergebnisraum mit den folgenden möglichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen für eine Zerlegung in Elementarereignisse:

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
	$0{,}159$	$0{,}163$	$0{,}166$	$0{,}166$	$0{,}171$	$0{,}175$
	$0{,}080$	$0{,}140$	$0{,}150$	$0{,}140$	$0{,}150$	$0{,}340$

- Keine der Verteilungen ist „besser“ als die anderen; sie erfüllen die Axiome.

- Welche Verteilungen stimmen mit welchen Würfeln überein?

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Beispiele für empirische Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel: Würfelwurf

- Sei $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ der Ergebnisraum mit den folgenden möglichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen für eine Zerlegung in Elementarereignisse:

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
	$0{,}159$	$0{,}163$	$0{,}166$	$0{,}166$	$0{,}171$	$0{,}175$
	$0{,}080$	$0{,}140$	$0{,}150$	$0{,}140$	$0{,}150$	$0{,}340$

- Idealisierte Wahrscheinlichkeitsverteilung des Laplace-Würfels.
- Präzisionswürfel (Casino-Würfel) sollen diese Verteilung annähern.

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Beispiele für empirische Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel: Würfelwurf

- Sei $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ der Ergebnisraum mit den folgenden möglichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen für eine Zerlegung in Elementarereignisse:

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
	0,159	0,163	0,166	0,166	0,171	0,175
	0,080	0,140	0,150	0,140	0,150	0,340

- Brettspielwürfel

  Ausgefräste Augen werden ggf. nicht mit Material gleicher Dichte aufgefüllt (1 schwerer als 6).

- Gezinkter Würfel

  Glücksspielwürfel werden seit jeher gezinkt, z.B. durch Manipulation der Kanten, Verformung, Hohlräumen oder anderen Materialien.

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Beispiele für empirische Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel: Astragaloi oder Knöcheln

- Im Altertum waren Tierknöchel vierseitige „Würfel“.
- $\Omega = \{1; 3; 4; 6\}$
- Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Astragals:

	$\{1\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{6\}$
$P(\{\omega\})$	0,07	0,37	0,45	0,11

- Verbreitetes Glücksspiel: Vier Astragalen, die gleichzeitig geworfen wurden.
- Der Ergebnisraum enthält 35 Ergebnisse.
  Astragalen werden als sonst ununterscheidbar betrachtet.
- Bestes Ereignis: „Venus“ $=$ „kein Astragal zeigt die gleiche Seite“