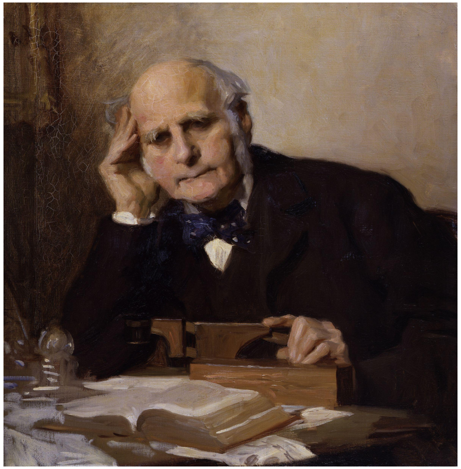
Kapitel PTS:V

V. Zufallsgrößen und Maßzahlen

- ❑ Zufallsgrößen
- ❑ Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- ❑ Verteilungsfunktionen
- ❑ Multiple Zufallsgrößen
- ❑ Erwartungswerte
- ❑ Varianz und Standardabweichung
- ❑ Das $\sqrt{n}$-Gesetz
- ❑ Schätzwerte für Erwartungswert und Standardabweichung

Das $\sqrt{n}$-Gesetz

Beispiel: Schätzwettbewerb

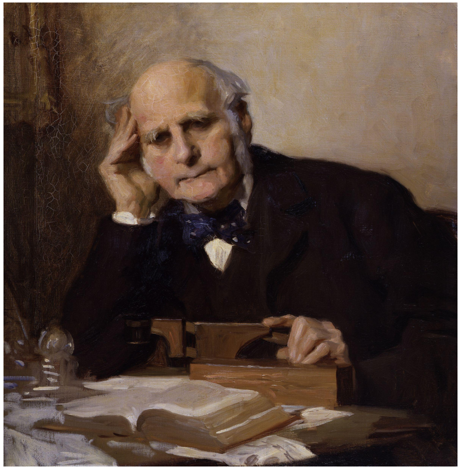


Sir Francis Galton (1822–1911, englischer Wissenschaftler) machte im Jahr 1906 folgende Beobachtung:

- Auf einer Nutztiermesse gab es einen Wettbewerb, das Schlachtgewicht eines Ochsen zu schätzen.
- Das tatsächliche Gewicht betrug 1198 Pfund.
- Es wurden rund 800 Schätzungen eingereicht, von denen 787 regulär waren.
- Der zunächst von Galton bestimmte Median der Schätzungen wich mit 1207 Pfund um weniger als 1% hiervon ab. [Nature 1907]

Das $\sqrt{n}$-Gesetz

Beispiel: Schätzwettbewerb



Sir Francis Galton (1822–1911, englischer Wissenschaftler) machte im Jahr 1906 folgende Beobachtung:

- Auf einer Nutztiermesse gab es einen Wettbewerb, das Schlachtgewicht eines Ochsen zu schätzen.
- Das tatsächliche Gewicht betrug 1198 Pfund.
- Es wurden rund 800 Schätzungen eingereicht, von denen 787 regulär waren.
- Der zunächst von Galton bestimmte Median der Schätzungen wich mit 1207 Pfund um weniger als 1% hiervon ab. [Nature 1907]
- Der Mittelwert der Schätzungen war fast korrekt: 1197 Pfund. [Nature 1907]
- Was hat es damit auf sich?

Das $\sqrt{n}$-Gesetz

Begriffsbildung: Messfehler

- Messinstrumente und Messungen mit ihnen sind fehlerbehaftet aufgrund
  - physikalischer Grenzen
  - begrenzter Messgenauigkeit
  - defekter Geräte und Materialien
  - falscher Anwendung

Das $\sqrt{n}$-Gesetz

Begriffsbildung: Messfehler

- Messinstrumente und Messungen mit ihnen sind fehlerbehaftet aufgrund
  - physikalischer Grenzen
  - begrenzter Messgenauigkeit
  - defekter Geräte und Materialien
  - falscher Anwendung

- Messfehler werden in systematische und unsystematische Fehler eingeteilt:
  - ein Quecksilber-Thermometer dessen Skala im Röhrchen „verrutscht“ ist
  - ein Thermometer, das zu nah an der Heizung oder in direkter Sonne misst
  - eine Armbanduhr, die die Dauer eines Tages auf die Minute genau misst
    Gemeint ist: Die Standardabweichung ist eine Minute.
  - Menschen, die eine Gewichtsschätzung nach „Augenmaß“ abgeben

Das $\sqrt{n}$-Gesetz

Begriffsbildung: Messfehler

- Messinstrumente und Messungen mit ihnen sind fehlerbehaftet aufgrund
  - physikalischer Grenzen
  - begrenzter Messgenauigkeit
  - defekter Geräte und Materialien
  - falscher Anwendung

- Messfehler werden in systematische und unsystematische Fehler eingeteilt:
  - ein Quecksilber-Thermometer dessen Skala im Röhrchen „verrutscht“ ist
  - ein Thermometer, das zu nah an der Heizung oder in direkter Sonne misst
  - eine Armbanduhr, die die Dauer eines Tages auf die Minute genau misst
    Gemeint ist: Die Standardabweichung ist eine Minute.
  - Menschen, die eine Gewichtsschätzung nach „Augenmaß“ abgeben

Das $\sqrt{n}$-Gesetz

Begriffsbildung: Messfehler

- Messinstrumente und Messungen mit ihnen sind fehlerbehaftet aufgrund
  - physikalischer Grenzen
  - begrenzter Messgenauigkeit
  - defekter Geräte und Materialien
  - falscher Anwendung

- Messfehler werden in systematische und unsystematische Fehler eingeteilt:
  - ein Quecksilber-Thermometer dessen Skala im Röhrchen „verrutscht“ ist
  - ein Thermometer, das zu nah an der Heizung oder in direkter Sonne misst
  - eine Armbanduhr, die die Dauer eines Tages auf die Minute genau misst
    Gemeint ist: Die Standardabweichung ist eine Minute.
  - Menschen, die eine Gewichtsschätzung nach „Augenmaß“ abgeben

- Systematische Fehler treten deterministisch, unsystematische zufällig auf.

- Systematische Fehler müssen manuell erkannt und eliminiert werden.

- Unsystematische Fehler können aufgrund physikalischer, technologischer, und/oder finanzieller Grenzen nicht zur Perfektion eliminiert werden.

Das $\sqrt{n}$-Gesetz
Begriffsbildung

- Wie kann man mit ungenauen Messgeräten dennoch genau messen?
- Erfahrungstatsache: Zufällige (unsystematische) Fehler in Einzelmessungen werden durch Mittelwertbildung mehrfacher Messungen kompensiert.
  Vorgehen nach dem Prinzip „Viel hilft viel“ bzw. Ausnutzung der „Weisheit der Vielen“.

Das $\sqrt{n}$-Gesetz
Begriffsbildung

- Wie kann man mit ungenauen Messgeräten dennoch genau messen?
- Erfahrungstatsache: Zufällige (unsystematische) Fehler in Einzelmessungen werden durch Mittelwertbildung mehrfacher Messungen kompensiert.
  Vorgehen nach dem Prinzip „Viel hilft viel“ bzw. Ausnutzung der „Weisheit der Vielen“.

Mathematische Präzisierung:

- Sie X eine Zufallsgröße, die eine Messung oder Beobachtung beschreibt.
- Die zugrundeliegende Messung wird n-mal unabhängig wiederholt.
- Die Gewährleistung der Unabhängigkeit der Messungen ist fallabhängig.

Das $\sqrt{n}$-Gesetz

Begriffsbildung

- Wie kann man mit ungenauen Messgeräten dennoch genau messen?
- Erfahrungstatsache: Zufällige (unsystematische) Fehler in Einzelmessungen werden durch Mittelwertbildung mehrfacher Messungen kompensiert.
  Vorgehen nach dem Prinzip „Viel hilft viel“ bzw. Ausnutzung der „Weisheit der Vielen“.

Mathematische Präzisierung:

- Sie X eine Zufallsgröße, die eine Messung oder Beobachtung beschreibt.
- Die zugrundeliegende Messung wird n-mal unabhängig wiederholt.
- Die Gewährleistung der Unabhängigkeit der Messungen ist fallabhängig.
- Beispiel: Messung einer Länge durch
  - Anlegen eines Lineals und zehnmaligem Ablesen.
  - zehnmaliges Anlegen eines Lineals und Ablesen.
  - zehn Personen mit eigenem Lineal ohne zwischenzeitliche Absprache.

Das $\sqrt{n}$-Gesetz

Begriffsbildung

- Die Zufallsgröße X_i kennzeichne die i-te Messung ($i \in [1; 2; \ldots; n]$).
- Aufgrund der Unabhängigkeit der X_i sind sie gleich verteilt, so dass gilt:

$$E(X_i) = \mu \qquad \text{und} \qquad \text{Var}(X_i) = \sigma^2 \; .$$

- Für das arithmetische Mittel

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

der Einzelmessungen X_i folgt mit den Sätzen 12, 17 und 21

$$E(\bar{X}) = \mu, \qquad \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \qquad \text{und} \qquad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; .$$

Das $\sqrt{n}$-Gesetz
Begriffsbildung

- Die Zufallsgröße X_i kennzeichne die i-te Messung ($i \in [1; 2; \ldots; n]$).
- Aufgrund der Unabhängigkeit der X_i sind sie gleich verteilt, so dass gilt:

$$E(X_i) = \mu \qquad \text{und} \qquad \text{Var}(X_i) = \sigma^2 \ .$$

- Für das arithmetische Mittel

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

der Einzelmessungen X_i folgt mit den Sätzen 12, 17 und 21

$$E(\bar{X}) = \mu, \qquad \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \qquad \text{und} \qquad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ .$$

Satz 22 ($\sqrt{n}$-Gesetz)

Haben n unabhängige Zufallsgrößen X_i die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ, dann gilt für das arithmetische Mittel $\bar{X}$:

$$E(\bar{X}) = \mu \qquad \text{und} \qquad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ .$$

Bemerkungen:

- Interpretiert man σ als Maß für die Ungenauigkeit der Einzelmessungen X_i, bzw. σ^2 als mittleren quadratischen Fehler der Einzelmessung, so wird mit $\bar{X}$ der vor den Messungen unbekannte Erwartungswert μ besser geschätzt, da die Ungenauigkeit $\sigma(\bar{X})$ um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{n}}$ kleiner ist als σ.

- Je größer n ist, desto mehr Messungen werden gemittelt und umso weniger sollte der Mittelwert um den Erwartungswert streuen. Die Beeinflussung der einzelnen Messergebnisse durch Zufälligkeiten kann also durch die Akkumulation von Messergebnissen deutlich verringert werden.

- Für die Tatsache, dass der Fehler des arithmetischen Mittels von der Größe $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ist, hat sich die Bezeichnung $\sqrt{n}$-Gesetz (Wurzel-n-Gesetz) eingebürgert.

- Das $\sqrt{n}$-Gesetz bestätigt die (intuitive) Erfahrung, dass die Genauigkeit einer Messung durch Mittelwertbildung mit zunehmender Anzahl von Einzelmessungen steigt. Auch bei noch so ungenauen Messgeräten (sofern sie frei von systematischen Fehlern sind, also $E(\bar{X}) = E(X_i) = \mu$) lässt sich durch Mittelwertbildung eine Messung im Prinzip genauer gestalten, als dies selbst mit einem sehr genauen Messgerät bei einer Einzelmessung möglich ist.

- Praktisch ist es aber oft nicht ganz so einfach: Für eine Verdopplung der Genauigkeit genügen nach dem $\sqrt{n}$-Gesetz vier Messungen, für eine Steigerung um eine Zehnerpotenz müssen es aber schon 100 Messungen sein, usw.

Das $\sqrt{n}$-Gesetz

Beispiel: Meinungsumfragen

- Im Vorlauf der Bundestagswahl 2009 erschien ein Patt (je 50% der Sitze) zwischen den beiden politisch gegenüberstehenden Lagern möglich.
- Eine Befragung von 1000 Bürger:innen ergab ein Ergebnis von 52:48 für eine Koalition.
- Die „Messgenauigkeit“ der Umfrage von $\frac{1}{\sqrt{1000}} \approx 0{,}03$ entspricht $\pm 3\%$.
- Die Umfrageergebnisse könnten also auch eine mit Zufallsfehler behaftete Messung für ein 49:51-Ergebnis sein, unabhängig von ihrer Repräsentativität.

Schätzwerte für Erwartungswert und Standardabweichung

Begriffsbildung

- Die Berechnung von μ und σ setzt voraus, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X bekannt ist.
- Für Ergebnisräume mit Laplace-Annahme kann sie meist konstruiert werden.
- Liegt X die Messung einer physikalischen Größe zugrunde, können die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ meist nur näherungsweise durch die relativen Häufigkeiten $h_n(X = x_i) = h_i$ bei n Messungen bestimmt werden.

Schätzwerte für Erwartungswert und Standardabweichung

Begriffsbildung

- Die Berechnung von μ und σ setzt voraus, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X bekannt ist.
- Für Ergebnisräume mit Laplace-Annahme kann sie meist konstruiert werden.
- Liegt X die Messung einer physikalischen Größe zugrunde, können die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ meist nur näherungsweise durch die relativen Häufigkeiten $h_n(X = x_i) = h_i$ bei n Messungen bestimmt werden.
- Ein Schätzwert für μ ist der arithmetische Mittelwert

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot h_i \ .$$

- Ein Schätzwert für σ ist die (empirische) Standardabweichung

$$s = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 \cdot h_i} \ .$$

Bemerkungen:

- Die Standardabweichung s ist ein Maß für die Streuung der Messwerte um den Mittelwert, also für die *Ungenauigkeit der Messreihe*. Man nennt sie oft auch mittlerer quadratischer Fehler der Messung, obwohl auch das eigentlich „ungenau“ ist, da es ja eigentlich die Wurzel des mittleren quadratischen Fehlers ist (das Englische „root mean square error“ ist präziser).
- Ein Maß für die *Ungenauigkeit des Mittelwertes* ist $\frac{s}{\sqrt{n}}$, wobei n die Anzahl der Messwerte ist.
- Liegen Messungen verschiedener Größen X und Y vor, so bezeichnet man Mittelwert und Standardabweichung auch oft als $m(X)$ und $m(Y)$ (manchmal auch M) bzw. $s(X)$ und $s(Y)$.