

# Kapitel PTS:IV

## IV. Bedingte Wahrscheinlichkeit

- ❑ Einführung und Definition
- ❑ Berechnung mit Baumdiagrammen
- ❑ Satz von Bayes
- ❑ Stochastische Abhängigkeit I: Zwei Ereignisse
- ❑ Stochastische Abhängigkeit II: Mehr als zwei Ereignisse

# Satz von Bayes

## Beispiel: Rauchmelder

- ❑ Ein Rauchmelder soll frühzeitig bei Ausbruch eines Feuers Alarm geben.
- ❑ In einer Fabrikhalle sei das tägliche Brandrisiko 10%.
- ❑ In 5% aller Brandfälle geben die Melder keinen Alarm.
- ❑ Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlalarms beträgt 1% pro Tag.
- ❑ Wie wahrscheinlich ist, dass es tatsächlich brennt, wenn der Alarm losgeht?
- ❑ Wie wahrscheinlich ist, dass es brennt, wenn der Alarm nicht losgeht?

# Satz von Bayes

## Beispiel: Rauchmelder

- ❑ Ein Rauchmelder soll frühzeitig bei Ausbruch eines Feuers Alarm geben.
- ❑ In einer Fabrikhalle sei das tägliche Brandrisiko 10%.
- ❑ In 5% aller Brandfälle geben die Melder keinen Alarm.
- ❑ Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlalarms beträgt 1% pro Tag.
- ❑ Wie wahrscheinlich ist, dass es tatsächlich brennt, wenn der Alarm losgeht?
- ❑ Wie wahrscheinlich ist, dass es brennt, wenn der Alarm nicht losgeht?
- ❑ Ereignisse:  $F$  = „Feuer ausgebrochen“ und  $R$  = „Rauchmelder schlägt Alarm“
- ❑ Brandwahrscheinlichkeit pro Tag:  $P(F) = 0,1$   
Risiko, ein Feuer zu übersehen:  $P(\bar{R}|F) = 0,05$   
Wahrscheinlichkeit für Fehlalarm:  $P(R|\bar{F}) = 0,01$

# Satz von Bayes

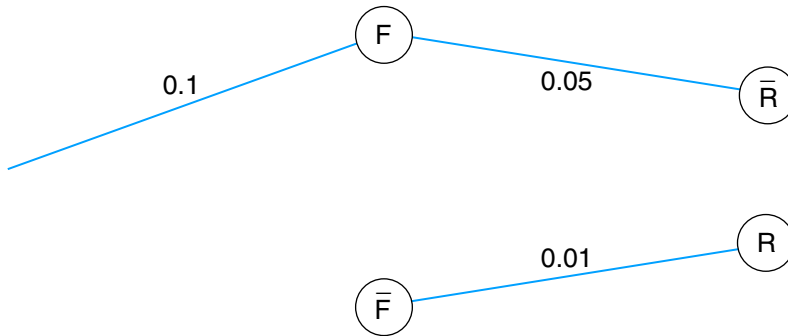
## Beispiel: Rauchmelder

- Ein Rauchmelder soll frühzeitig bei Ausbruch eines Feuers Alarm geben.
- In einer Fabrikhalle sei das tägliche Brandrisiko 10%.
- In 5% aller Brandfälle geben die Melder keinen Alarm.
- Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlalarms beträgt 1% pro Tag.
- Wie wahrscheinlich ist, dass es tatsächlich brennt, wenn der Alarm losgeht?
- Wie wahrscheinlich ist, dass es brennt, wenn der Alarm nicht losgeht?
- Ereignisse:  $F$  = „Feuer ausgebrochen“ und  $R$  = „Rauchmelder schlägt Alarm“
- Brandwahrscheinlichkeit pro Tag:  $P(F) = 0,1$   
Risiko, ein Feuer zu übersehen:  $P(\bar{R}|F) = 0,05$   
Wahrscheinlichkeit für Fehlalarm:  $P(R|\bar{F}) = 0,01$
- Gesucht:  $P(F|R)$  und  $P(F|\bar{R})$

# Satz von Bayes

## Beispiel: Rauchmelder

- Veranschaulichung als Baumdiagramm:

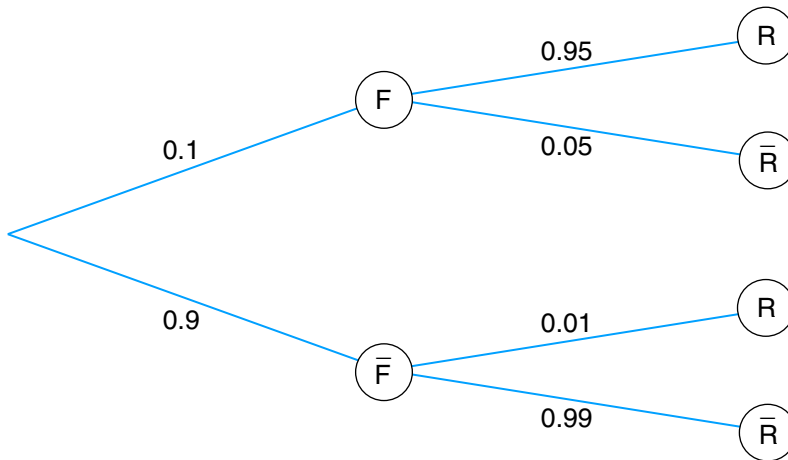


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

# Satz von Bayes

## Beispiel: Rauchmelder

- Veranschaulichung als Baumdiagramm: (Anwendung der Verzweigungsregel)

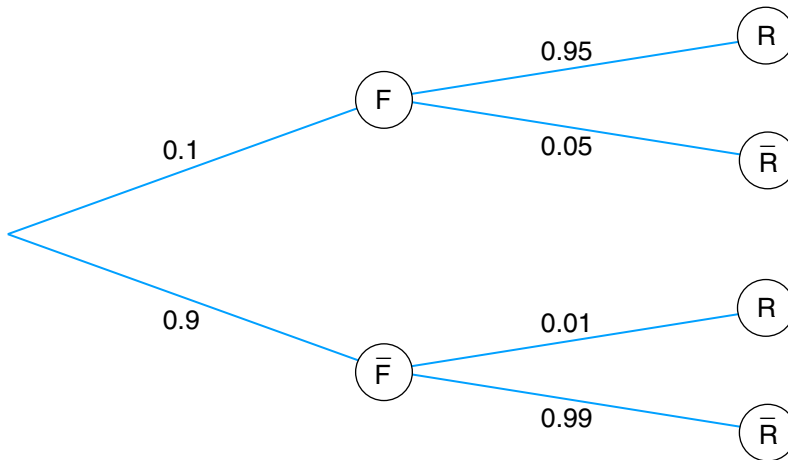


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

# Satz von Bayes

## Beispiel: Rauchmelder

- Veranschaulichung als Baumdiagramm: (Anwendung der Verzweigungsregel)



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

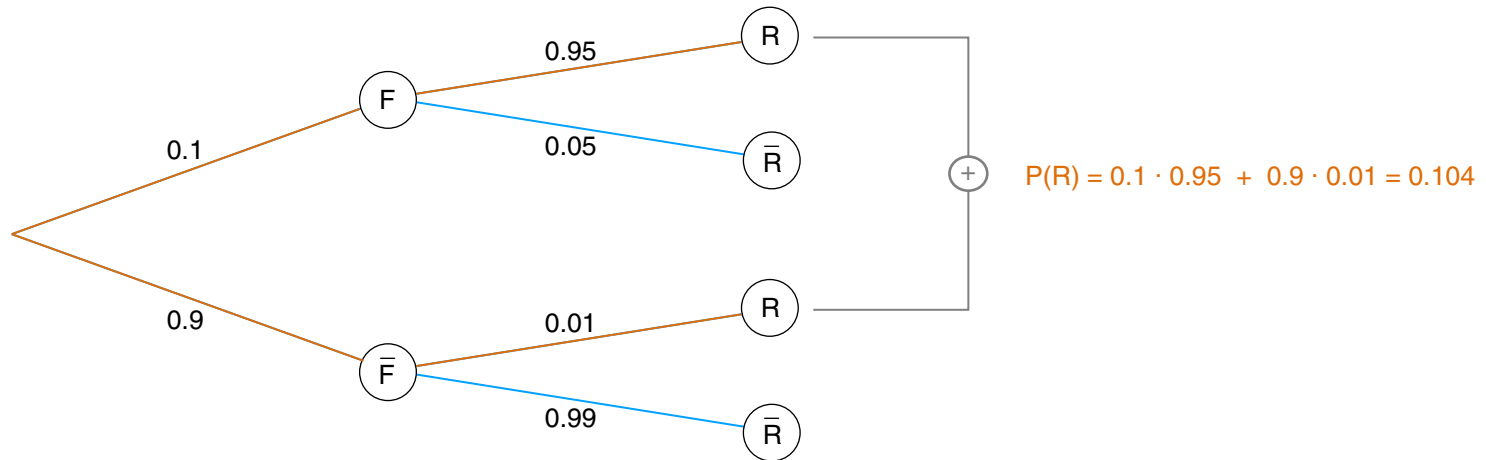
- Wahrscheinlichkeit für ein Feuer, wenn der Rauchmelder Alarm schlägt:

$$P(F|R) = \frac{P(F \cap R)}{P(R)} = \frac{P(F) \cdot P(R|F)}{P(R)}$$

# Satz von Bayes

## Beispiel: Rauchmelder

- Veranschaulichung als Baumdiagramm: (Anwendung der Verzweigungsregel)



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Wahrscheinlichkeit für ein Feuer, wenn der Rauchmelder Alarm schlägt:

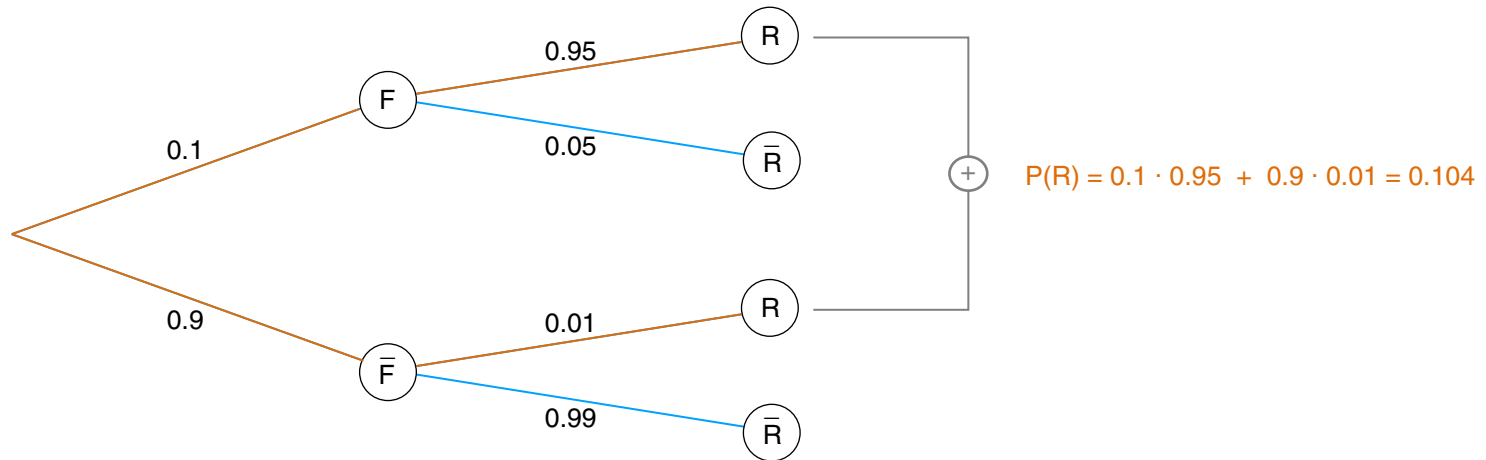
$$P(F|R) = \frac{P(F \cap R)}{P(R)} = \frac{P(F) \cdot P(R|F)}{P(R)} = \frac{0,1 \cdot 0,95}{0,104} \approx 91,3\%$$



# Satz von Bayes

## Beispiel: Rauchmelder

- Veranschaulichung als Baumdiagramm: (Anwendung der Verzweigungsregel)



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Wahrscheinlichkeit für ein Feuer, wenn der Rauchmelder **nicht** Alarm schlägt:

$$P(F|\bar{R}) = \frac{P(F \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{P(F) \cdot P(\bar{R}|F)}{P(\bar{R})} = \frac{0,1 \cdot 0,05}{1 - 0,104} \approx 0,6\%$$

## Bemerkung:

- Ob diese beiden Werte (91,3% und 0,6%) ausreichen, muss der Besitzer entscheiden. Ein Vergleich mit anderen Rauchmeldern ermöglicht eine leichtere Einschätzung.

# Satz von Bayes

## Verallgemeinerung

- Gegeben zwei Ereignisse  $A$  und  $B$ .  
Beispiele:  $A$  = „Feuer“,  $B$  = „Alarm“ oder  $A$  = „Krankheit“,  $B$  = „Symptom“.
- Gesuchte Wahrscheinlichkeiten:  $P(A|B)$ ,  $P(A|\bar{B})$

# Satz von Bayes

## Verallgemeinerung

- Gegeben zwei Ereignisse  $A$  und  $B$ .  
Beispiele:  $A$  = „Feuer“,  $B$  = „Alarm“ oder  $A$  = „Krankheit“,  $B$  = „Symptom“.
- Gesuchte Wahrscheinlichkeiten:  $P(A|B)$ ,  $P(A|\bar{B})$
- Seien  $P(A)$ ,  $P(B|A)$  und  $P(B|\bar{A})$  messbare Wahrscheinlichkeiten.  
Z.B. durch Beobachtung; als bekannt vorausgesetzt.
- Ausgangspunkt für die Entwicklung einer Formel für dieses Umkehrproblem:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Unbekannte:  $P(A \cap B)$ ,  $P(B)$

# Satz von Bayes

## Verallgemeinerung

- Gegeben zwei Ereignisse  $A$  und  $B$ .  
Beispiele:  $A$  = „Feuer“,  $B$  = „Alarm“ oder  $A$  = „Krankheit“,  $B$  = „Symptom“.
- Gesuchte Wahrscheinlichkeiten:  $P(A|B)$ ,  $P(A|\bar{B})$
- Seien  $P(A)$ ,  $P(B|A)$  und  $P(B|\bar{A})$  messbare Wahrscheinlichkeiten.  
Z.B. durch Beobachtung; als bekannt vorausgesetzt.
- Ausgangspunkt für die Entwicklung einer Formel für dieses Umkehrproblem:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Unbekannte:  $P(A \cap B)$ ,  $P(B)$
- Da  $P(B|A)$  bekannt ist:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- Daraus folgt:

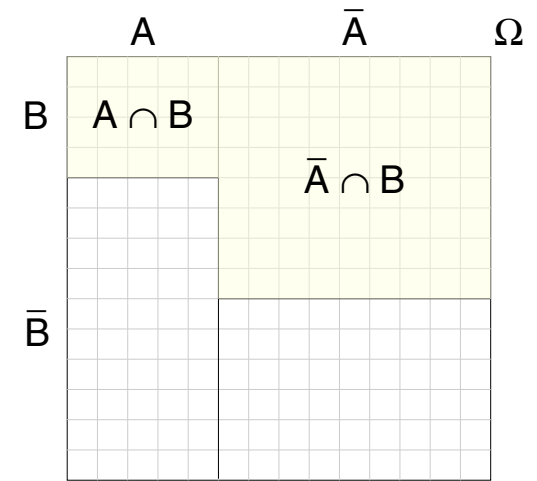
$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} \quad (\text{Einfacher Satz von Bayes})$$

# Satz von Bayes

## Verallgemeinerung

- Zerlegung:  $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$
- Da  $(A \cap B)$  und  $(\bar{A} \cap B)$  unvereinbar sind, folgt

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) . \end{aligned}$$



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

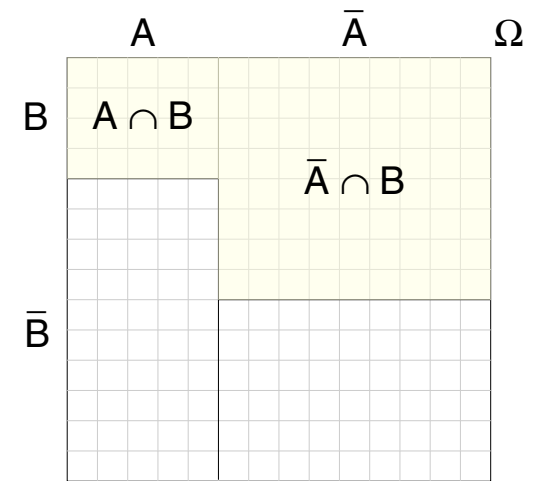
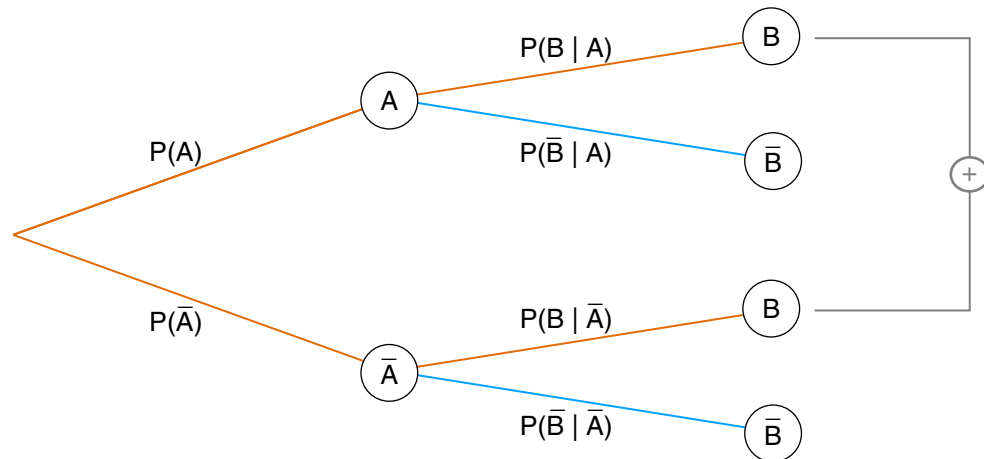
# Satz von Bayes

## Verallgemeinerung

- Zerlegung:  $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$
- Da  $(A \cap B)$  und  $(\bar{A} \cap B)$  unvereinbar sind, folgt

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) . \end{aligned}$$

- Baumdiagramm:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$$

(totale Wahrscheinlichkeit)

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- $P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$  wird auch als **totale Wahrscheinlichkeit** des Ereignisses  $B$  bzgl. der Zerlegung von  $\Omega$  in  $A$  und  $\bar{A}$  bezeichnet.

# Satz von Bayes

## Satz 3 (Satz von Bayes)

Seien  $A$  und  $B$  zwei Ereignisse im Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega; P)$  mit  $P(B) > 0$ .  
Dann gilt

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})}.$$



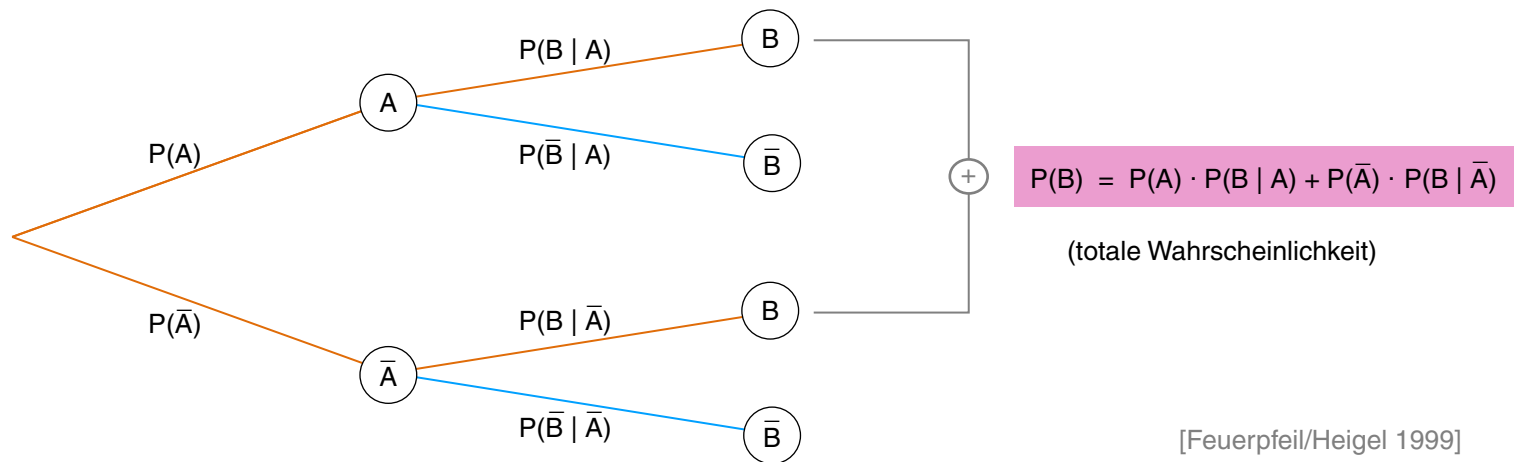
Thomas Bayes  
(angeblich)



## Bemerkungen:

- ❑ Formel stammt von Thomas Bayes (1702–1761, englischer Geistlicher), der sie wohl 1750 entdeckte (sie wurde erst zwei Jahre nach seinem Tod veröffentlicht). Sie heißt daher *Satz / Formel von Bayes* (für zwei Ereignisse).
- ❑ Interessanterweise kommen auf der rechten Seite der Formel nur die nicht-bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  (mit  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ) und die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $P(B|A)$  und  $P(B|\bar{A})$  vor.
- ❑ Merkhilfe mittels des Baumdiagramms:

$$P(A|B) = \frac{\text{Wahrscheinlichkeit des Pfades über } A \text{ nach } B}{\text{Summe der Wahrscheinlichkeiten beider Pfade nach } B}.$$



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

## Bemerkungen: (Fortsetzung)

- Die Abhängigkeit der bedingten Wahrscheinlichkeit  $P(A|B)$  von der nicht-bedingten Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  sieht zunächst vielleicht überraschend aus. Sie steht allerdings im Einklang mit der Erfahrung.

Ist beispielsweise  $A$ : „Erkrankung durch Grippe“ und  $B$ : „Auftreten von typischen Grippesymptomen“, so ist die geläufige Erfahrung von Hausärzten, dass die typischen Symptome während einer Grippewelle ( $P(A)$  größer als sonst) einen höheren Hinweiswert  $P(A|B)$  auf Grippe haben als zu anderen Zeiten.

$P(B|A)$  ist dabei dann die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Grippesymptomen, wenn die Grippewelle schon ausgebrochen ist und  $P(B|\bar{A})$  wenn nicht (beide Werte lassen sich empirisch ermitteln).

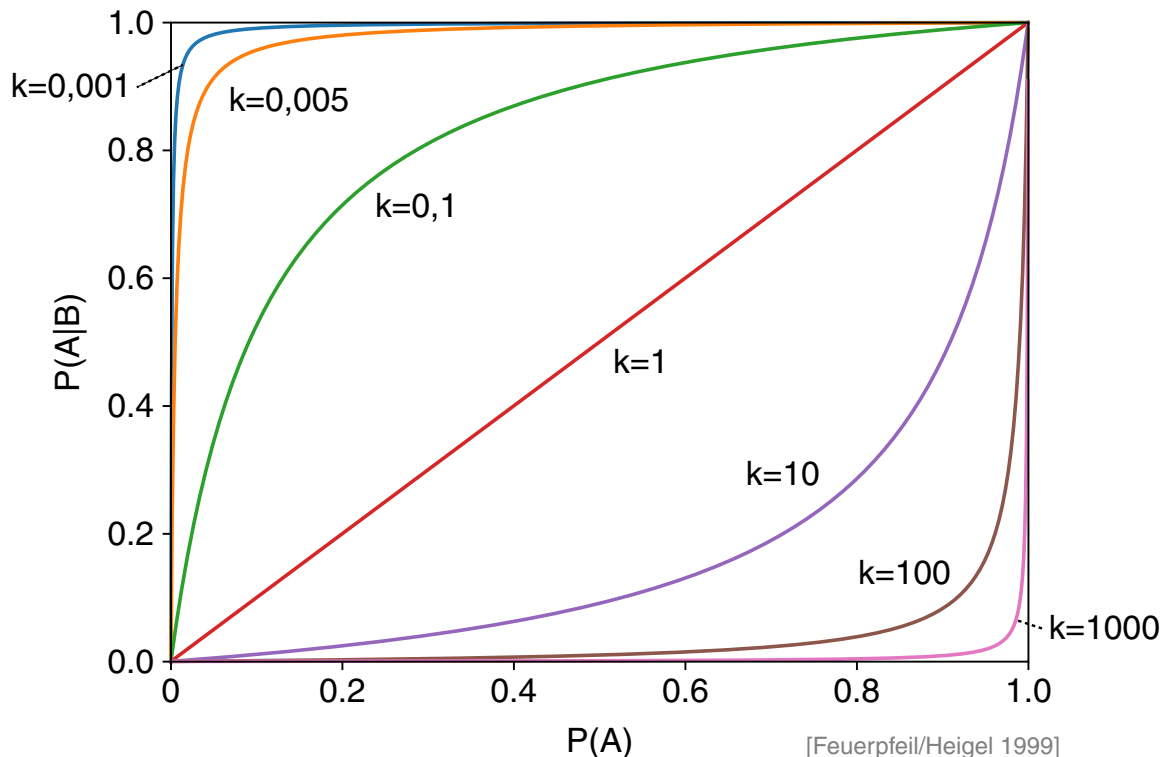
Ein breites Anwendungsgebiet des Satzes von Bayes ist daher die medizinische Diagnostik.

## Bemerkungen: (Fortsetzung)

- Betrachten wir die Formel noch etwas genauer für variables  $P(A)$  und feste  $P(B|A)$  und  $P(B|\bar{A})$ . Dividiert man den Zähler und Nenner der Bayes-Formel durch  $P(B|A)$  und setzt  $k = P(B|\bar{A})/P(B|A)$  (sind ja beide „fest“ also ihr Quotient konstant), so erhält man die Funktionsgleichung

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(A) + (1 - P(A)) \cdot \frac{P(B|\bar{A})}{P(B|A)}} = \frac{P(A)}{P(A) + k \cdot (1 - P(A))}$$

mit Variable  $P(A)$  und Parameter  $k$ . Plots für  $k = \{0,001; 0,005; 0,1; 1; 10; 100; 1000\}$ :



# Satz von Bayes

## Beispiel: HIV-Antikörper-Test

Früherkennung einer Krankheit  $K$  mittels medizinischer Tests:

- Befunde eines Tests für  $K$  werden als „normal“ und „krankhaft“ klassifiziert.  
Man sagt, ein Test sei „negativ“, wenn der Befund „normal“ ist, und sonst „positiv“.

# Satz von Bayes

## Beispiel: HIV-Antikörper-Test

Früherkennung einer Krankheit  $K$  mittels medizinischer Tests:

- ❑ Befunde eines Tests für  $K$  werden als „normal“ und „krankhaft“ klassifiziert. Man sagt, ein Test sei „negativ“, wenn der Befund „normal“ ist, und sonst „positiv“.
- ❑ Sensitivität: Empfindliche Reaktion des Tests auf messbare Veränderungen des Körpers (Symptome), die bekanntermaßen von  $K$  ausgelöst werden.
- ❑ Spezifität: Ausschließliche Reaktion des Tests auf messbare Veränderungen des Körpers, die bekanntermaßen von  $K$  ausgelöst werden. Keine Reaktion auf nicht von  $K$  ausgelöste Veränderungen bzw. wenn keine vorliegen.

# Satz von Bayes

## Beispiel: HIV-Antikörper-Test

Früherkennung einer Krankheit  $K$  mittels medizinischer Tests:

- ❑ Befunde eines Tests für  $K$  werden als „normal“ und „krankhaft“ klassifiziert. Man sagt, ein Test sei „negativ“, wenn der Befund „normal“ ist, und sonst „positiv“.
- ❑ Sensitivität: Empfindliche Reaktion des Tests auf messbare Veränderungen des Körpers (Symptome), die bekanntermaßen von  $K$  ausgelöst werden.
- ❑ Spezifizität: Ausschließliche Reaktion des Tests auf messbare Veränderungen des Körpers, die bekanntermaßen von  $K$  ausgelöst werden. Keine Reaktion auf nicht von  $K$  ausgelöste Veränderungen bzw. wenn keine vorliegen.
- ❑ Gütemaß: Wahrscheinlichkeit mit der bei Vorliegen der Krankheit der Test positiv und bei Nichtvorliegen negativ ist.
- ❑ Diagnostischer Aussagewert: Wahrscheinlichkeit, mit der bei positivem Testergebnis die Krankheit vorliegt und bei negativem nicht.

Gütemaß		Diagnostischer Aussagewert	
Sensitivität	$P(\text{„positiv“} \mid K)$	$P(K \mid \text{„positiv“})$	positiver Aussagewert
Spezifizität	$P(\text{„negativ“} \mid \bar{K})$	$P(\bar{K} \mid \text{„negativ“})$	negativer Aussagewert

# Satz von Bayes

## Beispiel: HIV-Antikörper-Test

- Wie zuverlässig weist der ELISA-Test eine HIV-Infektion nach?
- Ereignisse:  $H$ : „Person ist HIV-infiziert“,  $T$ : „HIV-Test ist positiv“
- Sensitivität:  $P(T|H) \approx 99,9\%$  (Wahrscheinlichkeit für positiven Test bei HIV-Infektion.)
- Spezifizität:  $P(\bar{T}|\bar{H}) \approx 99,5\%$  (Wahrscheinlichkeit für negativen Test bei Nicht-Infektion.)

# Satz von Bayes

## Beispiel: HIV-Antikörper-Test

- Wie zuverlässig weist der ELISA-Test eine HIV-Infektion nach?
- Ereignisse:  $H$ : „Person ist HIV-infiziert“,  $T$ : „HIV-Test ist positiv“
- Sensitivität:  $P(T|H) \approx 99,9\%$  (Wahrscheinlichkeit für positiven Test bei HIV-Infektion.)
- Spezifizität:  $P(\bar{T}|\bar{H}) \approx 99,5\%$  (Wahrscheinlichkeit für negativen Test bei Nicht-Infektion.)
- Was ist die Wahrscheinlichkeit für eine HIV-Infektion bei positivem Test?

$$P(H|T) = \frac{P(H) \cdot P(T|H)}{P(H) \cdot P(T|H) + P(\bar{H}) \cdot P(T|\bar{H})}$$



# Satz von Bayes

## Beispiel: HIV-Antikörper-Test

- Wie zuverlässig weist der ELISA-Test eine HIV-Infektion nach?
- Ereignisse:  $H$ : „Person ist HIV-infiziert“,  $T$ : „HIV-Test ist positiv“
- Sensitivität:  $P(T|H) \approx 99,9\%$  (Wahrscheinlichkeit für positiven Test bei HIV-Infektion.)
- Spezifizität:  $P(\bar{T}|\bar{H}) \approx 99,5\%$  (Wahrscheinlichkeit für negativen Test bei Nicht-Infektion.)
- Was ist die Wahrscheinlichkeit für eine HIV-Infektion bei positivem Test?

$$P(H|T) = \frac{P(H) \cdot P(T|H)}{P(H) \cdot P(T|H) + P(\bar{H}) \cdot P(T|\bar{H})}$$

# Satz von Bayes

## Beispiel: HIV-Antikörper-Test

- Wie zuverlässig weist der ELISA-Test eine HIV-Infektion nach?
- Ereignisse:  $H$ : „Person ist HIV-infiziert“,  $T$ : „HIV-Test ist positiv“
- Sensitivität:  $P(T|H) \approx 99,9\%$  (Wahrscheinlichkeit für positiven Test bei HIV-Infektion.)
- Spezifität:  $P(\bar{T}|\bar{H}) \approx 99,5\%$  (Wahrscheinlichkeit für negativen Test bei Nicht-Infektion.)
- Was ist die Wahrscheinlichkeit für eine HIV-Infektion bei positivem Test?

$$\begin{aligned} P(H|T) &= \frac{P(H) \cdot P(T|H)}{P(H) \cdot P(T|H) + P(\bar{H}) \cdot P(T|\bar{H})} && \begin{array}{l} \text{(Prävalenz: } P(H) \approx 0,1\%; \\ P(T|\bar{H}) = 1 - P(\bar{T}|\bar{H})) \end{array} \\ &= \frac{0,001 \cdot 0,999}{0,001 \cdot 0,999 + (1 - 0,001) \cdot (1 - 0,995)} \end{aligned}$$

# Satz von Bayes

## Beispiel: HIV-Antikörper-Test

- Wie zuverlässig weist der ELISA-Test eine HIV-Infektion nach?
- Ereignisse:  $H$ : „Person ist HIV-infiziert“,  $T$ : „HIV-Test ist positiv“
- Sensitivität:  $P(T|H) \approx 99,9\%$  (Wahrscheinlichkeit für positiven Test bei HIV-Infektion.)
- Spezifizität:  $P(\bar{T}|\bar{H}) \approx 99,5\%$  (Wahrscheinlichkeit für negativen Test bei Nicht-Infektion.)
- Was ist die Wahrscheinlichkeit für eine HIV-Infektion bei positivem Test?

$$\begin{aligned} P(H|T) &= \frac{P(H) \cdot P(T|H)}{P(H) \cdot P(T|H) + P(\bar{H}) \cdot P(T|\bar{H})} && \begin{array}{l} \text{(Prävalenz: } P(H) \approx 0,1\%; \\ P(T|\bar{H}) = 1 - P(\bar{T}|\bar{H})) \end{array} \\ &= \frac{0,001 \cdot 0,999}{0,001 \cdot 0,999 + (1 - 0,001) \cdot (1 - 0,995)} \approx 17\% \end{aligned}$$

# Satz von Bayes

## Beispiel: HIV-Antikörper-Test

- Wie zuverlässig weist der ELISA-Test eine HIV-Infektion nach?
- Ereignisse:  $H$ : „Person ist HIV-infiziert“,  $T$ : „HIV-Test ist positiv“
- Sensitivität:  $P(T|H) \approx 99,9\%$  (Wahrscheinlichkeit für positiven Test bei HIV-Infektion.)
- Spezifität:  $P(\bar{T}|\bar{H}) \approx 99,5\%$  (Wahrscheinlichkeit für negativen Test bei Nicht-Infektion.)
- Was ist die Wahrscheinlichkeit für eine HIV-Infektion bei positivem Test?

$$\begin{aligned} P(H|T) &= \frac{P(H) \cdot P(T|H)}{P(H) \cdot P(T|H) + P(\bar{H}) \cdot P(T|\bar{H})} && \begin{array}{l} \text{(Prävalenz: } P(H) \approx 0,1\%; \\ P(T|\bar{H}) = 1 - P(\bar{T}|\bar{H}) \end{array} \\ &= \frac{0,001 \cdot 0,999}{0,001 \cdot 0,999 + (1 - 0,001) \cdot (1 - 0,995)} \approx 17\% \end{aligned}$$

- Was ist die Wahrscheinlichkeit, nicht infiziert zu sein, bei negativem Test?

$$\begin{aligned} P(\bar{H}|\bar{T}) &= \frac{P(\bar{H}) \cdot P(\bar{T}|\bar{H})}{P(\bar{H}) \cdot P(\bar{T}|\bar{H}) + P(H) \cdot P(\bar{T}|H)} \\ &= \frac{0,999 \cdot 0,995}{(1 - 0,001) \cdot 0,995 + 0,001 \cdot (1 - 0,999)} \approx 99,9999\% \end{aligned}$$

# Satz von Bayes

## Beispiel: HIV-Antikörper-Test

- Wie zuverlässig weist der ELISA-Test eine HIV-Infektion nach?
- Ereignisse:  $H$ : „Person ist HIV-infiziert“,  $T$ : „HIV-Test ist positiv“
- Sensitivität:  $P(T|H) \approx 99,9\%$  (Wahrscheinlichkeit für positiven Test bei HIV-Infektion.)
- Spezifität:  $P(\bar{T}|\bar{H}) \approx 99,5\%$  (Wahrscheinlichkeit für negativen Test bei Nicht-Infektion.)
- Was ist die Wahrscheinlichkeit für eine HIV-Infektion bei positivem Test?

$$\begin{aligned} P(H|T) &= \frac{P(H) \cdot P(T|H)}{P(H) \cdot P(T|H) + P(\bar{H}) \cdot P(T|\bar{H})} && \begin{array}{l} \text{(Prävalenz: } P(H) \approx 0,1\%; \\ P(T|\bar{H}) = 1 - P(\bar{T}|\bar{H}) \end{array} \\ &= \frac{0,001 \cdot 0,999}{0,001 \cdot 0,999 + (1 - 0,001) \cdot (1 - 0,995)} \approx 17\% \leadsto \text{Bestätigungstest} \end{aligned}$$

- Was ist die Wahrscheinlichkeit, nicht infiziert zu sein, bei negativem Test?

$$\begin{aligned} P(\bar{H}|\bar{T}) &= \frac{P(\bar{H}) \cdot P(\bar{T}|\bar{H})}{P(\bar{H}) \cdot P(\bar{T}|\bar{H}) + P(H) \cdot P(\bar{T}|H)} \\ &= \frac{0,999 \cdot 0,995}{(1 - 0,001) \cdot 0,995 + 0,001 \cdot (1 - 0,999)} \approx 99,9999\% \leadsto \text{Mitteilung} \end{aligned}$$

## Bemerkungen:

- ❑ Die Prävalenz ist eine Kennzahl für Krankheitshäufigkeit in einer Population, geschätzt anhand von systematischen Tests zufälliger Stichproben. Im Fall von Epidemien und Pandemien sowie Endemien, wie HIV, spricht man synonym von der Durchseuchungsrate.
- ❑ Trotz der hohen Sensitivität und Spezifität führt ein positiver Test bei einer Durchseuchung von nur 0,1% nicht zu einem ausreichenden Befund, was paradox erscheint. Dennoch ist der Vorhersagewert 170-mal so groß wie die Durchseuchungsrate. Bei einer Verdopplung der Prävalenz auf 0,2% wäre der positive Aussagewert auch nur 29%.
- ❑ Der ELISA-Test zählt zu den sogenannten Suchtests, da er tendenziell nur dann negativ ist, wenn mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit keine HIV-Infektion vorliegt. Eine Patient:in wird nur bei negativem Test sofort über das Ergebnis informiert. Bei einem positiven Test wird stattdessen ein sogenannter Bestätigungstest durchgeführt. [[Robert-Koch-Institut](#)]
- ❑ Der hierfür einsetzbare [Western-Blot-Test](#) hat eine Sensitivität und Spezifität von 99,9%. Nur Personen, bei denen der ELISA-Test positiv war werden getestet, so dass die Prävalenz  $P(H) = 0,17$  ist. Beide Tests zusammen erreichen einen positiven Aussagewert  $P(H|T) = 99,5\%$ . Ein zweiter ELISA-Test zur Bestätigung würde nur 97,6% erreichen. Auch der negative Aussagewert des Western-Blot-Tests genügt für die Mitteilung des Befunds.
- ❑ Bei ELISA ist  $k = \frac{P(T|\bar{H})}{P(T|H)} = 0,005$ , bei Western-Blot ist  $k = 0,001$ . Die [Kurven](#) der positiven Vorhersagewerte  $P(H|T)$  in Abhängigkeit von  $P(H)$  zeigen den Qualitätsunterschied:  $P(H) = 0,17$  auf der x-Achse nach oben abtragen.
- ❑ Der Western-Blot-Test ist bedeutend teurer und zeitaufwändiger als der ELISA-Test und eignet sich daher nicht als Primärtest.