Kapitel PTS:V

V. Zufallsgrößen und Maßzahlen

- Zufallsgrößen
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Verteilungsfunktionen
- Multiple Zufallsgrößen
- Erwartungswerte
- Varianz und Standardabweichung
- Das $\sqrt{n}$-Gesetz
- Schätzwerte für Erwartungswert und Standardabweichung

Zufallsgrößen

Beispiel: Skat

- Drei Spieler:innen erhalten je 10 von 32 Karten; oft als „Blatt“ bezeichnet.
- Es gibt $|\Omega| = \binom{32}{10}$ Blätter.
- Die Unter (Bube) sind meist hohe Trumpfkarten.
- Man ist daher an der Anzahl $X(\omega)$ der Unter im eigenen Blatt ω interessiert.
- Die Funktion $X(\omega)$ ordnet jedem Blatt ω eindeutig eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, oder 4 zu.
- Die fünf Ereignisse „$X(\omega) = i$“ ($i \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$) bilden eine Zerlegung der Menge Ω möglicher Blätter.
- Gezeigtes Blatt: $X(\omega) = 1$

Zufallsgrößen

Beispiel: Lotto „Super 6“

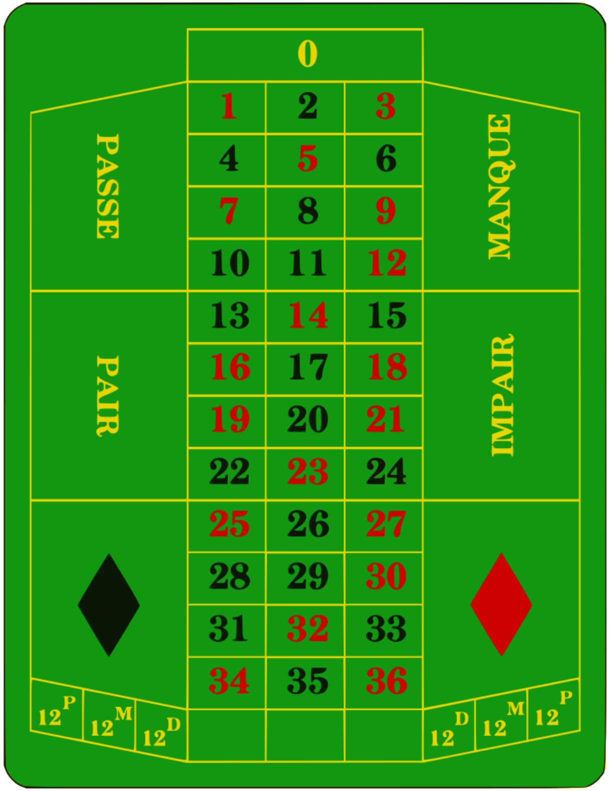
- „Super 6“ ist eine Endziffernlotterie.
- Auf dem Spielschein ist eine sechsstellige Losnummer vorgegeben.
- Je mehr Endziffern der Losnummer mit denen der gezogenen Gewinnzahl übereinstimmen, desto höher der Gewinn; jede Ziffer stammt aus $\{0; 1; \ldots; 9\}$.
- Die Gewinnzahl 781568 hat zwei Endziffern mit der obigen Losnummer 561968 gemein.
- Einer Losnummer ω mit i richtigen Endziffern ($i \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$) werden Gewinne $X(\omega)$ nach einem Gewinnplan zugeordnet.
- Die sieben Ereignisse „$X(\omega) = i$“ bilden eine Zerlegung des Ergebnisraums Ω der 10^6 möglichen Losnummern bzw. Gewinnzahlen.

Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette

- Ein Roulette-Spieler setzt eine Geldeinheit auf „1. Dutzend“.
- Tritt dieses Ereignis ein, werden ihm 3 Geldeinheiten ausgezahlt.
- Sonst verliert er seinen Einsatz.
- Der Reingewinn $X(\omega)$ des Spielers ist eine Funktion $X : \{0;1;\ldots;36\} \to \mathbf{R}$ der bei der Ausspielung fallenden Zahl ω:

$$X(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{für } \omega \in \{1;2;\ldots;12\}, \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Bemerkungen:

- In den Beispielen wird jedem $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl $X(\omega)$ zugeordnet.
- X ist also eine auf Ω erklärte reellwertige Funktion, die Ereignisse aus Ω durch reelle Zahlen charakterisiert.
- Wie die Ergebnisse ω hängen auch die Werte von $X(\omega)$ vom Zufall ab. Daher nennt man X eine Zufallsgröße.

Zufallsgrößen

Definition 1 (Zufallsgröße)

Eine Funktion X, die jedem Ergebnis ω eines Ergebnisraums Ω eine reelle Zahl $X(\omega)$ zuordnet, heißt Zufallsgröße X auf Ω. In formaler Schreibweise:

$$X : \Omega \to \mathbf{R} \ \text{ mit } \ \omega \mapsto X(\omega).$$

Bemerkungen:

- Das Wahrscheinlichkeitsmaß P des Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega; P)$ geht nicht in die Definition mit ein.

- Zufallsgrößen werden üblicherweise mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet, vorwiegend vom Ende des Alphabets; die von ihnen angenommenen Werte dann mit den entsprechenden kleinen lateinischen Buchstaben.

- Bei einer Zufallsgröße X ist die Menge der Ergebnisse, die einen bestimmten Funktionswert x liefert, eine Teilmenge von Ω.
  - Im Roulette-Beispiel gehört zu $x = 2$ die Teilmenge $\{1; 2; \ldots; 12\}$ von $\Omega = \{0; 1; \ldots; 36\}$, zu $x = -1$ die Restmenge $\{0; 13; 14; \ldots; 36\}$.
  - Jeder Gleichung $X(\omega) = x$ mit $x \in \{-1; 2\}$ ist also eindeutig eine Teilmenge von Ω, also ein Ereignis, zugeordnet: Im Roulette-Beispiel das Ereignis „1. Dutzend“ für $x = 2$ und das Gegenereignis „Nicht-1. Dutzend“ für $x = -1$.

- Der Begriff der Zufallsgröße und alle damit zusammenhängenden Begrifflichkeiten bildeten sich erst im 19. Jahrhundert heraus.

