Kapitel PTS:V

V. Zufallsgrößen und Maßzahlen

- ❑ Zufallsgrößen
- ❑ Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- ❑ Verteilungsfunktionen
- ❑ Multiple Zufallsgrößen
- ❑ Erwartungswerte
- ❑ Varianz und Standardabweichung
- ❑ Das $\sqrt{n}$-Gesetz
- ❑ Schätzwerte für Erwartungswert und Standardabweichung

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette

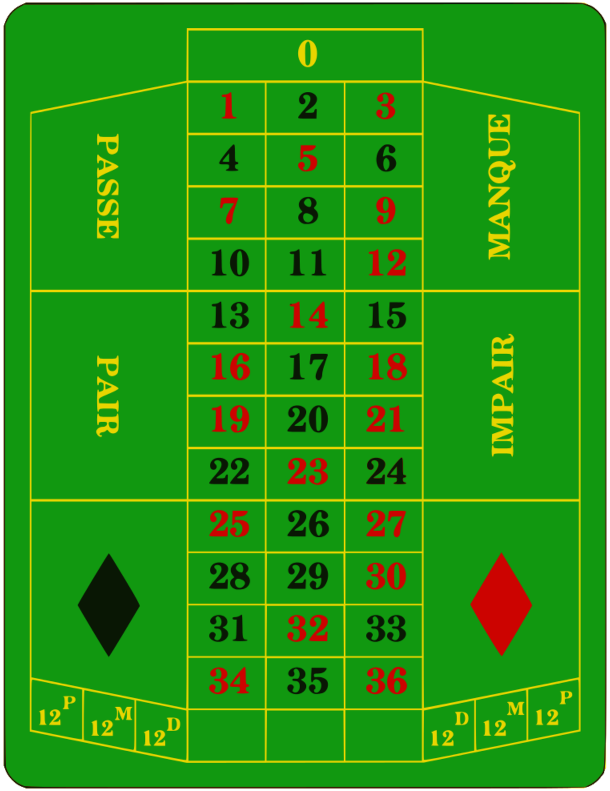
- Eine Frau setzt eine Geldeinheit auf $A =$ „1. Dutzend“, ihr Mann eine auf $B =$ „1. Querreihe“.

- Reingewinn für Ereignis A als Zufallsgröße:

$$X : \omega \mapsto \begin{cases} 2 & \text{für } \omega \in \{1; 2; \ldots; 12\} = A, \\ -1 & \text{für } \omega \in \{0; 13; \ldots; 36\} = \bar{A}. \end{cases}$$

- Reingewinn für Ereignis B als Zufallsgröße:

$$Y : \omega \mapsto \begin{cases} 11 & \text{für } \omega \in \{1; 2; 3\} = B, \\ -1 & \text{für } \omega \in \{0; 4; \ldots; 36\} = \bar{B}. \end{cases}$$



- Fallunterscheidung:
  1. Beide nehmen an derselben Ausspielung teil.
  2. Beide nehmen an unterschiedlichen Ausspielungen teil.

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

Fall 1 (selbe Ausspielung): sie setzt eine Geldeinheit auf A, er auf B:

$A =$ „1. Dutzend“, $B =$ „1. Querreihe“; X ist Reingewinn für A, Y Reingewinn für B.

Ereignis	**Mengendarstellung**	**Wahrscheinlichkeit**
„Beide verlieren“ ($X = -1 \wedge Y = -1$)	$\omega \in \{0; 13; \ldots; 36\} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$P(X = -1 \wedge Y = -1) = \frac{25}{37}$
„Sie gewinnt, er verliert“ ($X = 2 \wedge Y = -1$)	$\omega \in \{4; 5; \ldots; 12\} = A \cap \bar{B}$	$P(X = 2 \wedge Y = -1) = \frac{9}{37}$
„Sie verliert, er gewinnt“ ($X = -1 \wedge Y = 11$)	$\omega \in \emptyset = \bar{A} \cap B$	$P(X = -1 \wedge Y = 11) = 0$
„Beide gewinnen“ ($X = 2 \wedge Y = 11$)	$\omega \in \{1; 2; 3\} = A \cap B$	$P(X = 2 \wedge Y = 11) = \frac{3}{37}$

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

Fall 1 (selbe Ausspielung): sie setzt eine Geldeinheit auf A, er auf B:
$A =$ „1. Dutzend“, $B =$ „1. Querreihe“; X ist Reingewinn für A, Y Reingewinn für B.

- Verliert der Mann ($Y = -1$), kann die Frau entweder auch verlieren ($X = -1 \land Y = -1$) oder gewinnen ($X = 2 \land Y = -1$).

- Da diese beiden Ereignisse unvereinbar sind, gilt:

$$P(Y = -1) \; = \; P(X = -1 \land Y = -1) + P(X = 2 \land Y = -1) \; = \; \frac{25}{37} + \frac{9}{37} \; = \; \frac{34}{37}\,.$$

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

Fall 1 (selbe Ausspielung): sie setzt eine Geldeinheit auf A, er auf B:
$A =$ „1. Dutzend“, $B =$ „1. Querreihe“; X ist Reingewinn für A, Y Reingewinn für B.

- Verliert der Mann ($Y = -1$), kann die Frau entweder auch verlieren ($X = -1 \land Y = -1$) oder gewinnen ($X = 2 \land Y = -1$).
- Da diese beiden Ereignisse unvereinbar sind, gilt:

$$P(Y = -1) \;=\; P(X = -1 \land Y = -1) + P(X = 2 \land Y = -1) \;=\; \frac{25}{37} + \frac{9}{37} \;=\; \frac{34}{37}\,.$$

- Analoge Überlegungen für $P(Y = 11)$, $P(X = -1)$ und $P(X = 2)$ führen zur Vierfeldertafel:

y_j \ x_i	-1	2	$P(Y = y_j)$
-1	$\frac{25}{37}$	$\frac{9}{37}$	$\frac{34}{37}$
11	0	$\frac{3}{37}$	$\frac{3}{37}$
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{37}$	$\frac{12}{37}$	1

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

Fall 1 (selbe Ausspielung): sie setzt eine Geldeinheit auf A, er auf B:
$A =$ „1. Dutzend“, $B =$ „1. Querreihe“; X ist Reingewinn für A, Y Reingewinn für B.

- Da $P(X = -1 \mid Y = 11) \neq P(X = -1)$, sind die Ereignisse $X = -1$ und $Y = 11$ abhängig. Dies ergibt sich auch aus

$$P(X = -1 \wedge Y = 11) = 0 \quad \neq \quad P(X = -1) \cdot P(Y = 11) = \frac{25}{37} \cdot \frac{3}{37}\,.$$

- Abhängigkeit von $X = -1$ und $Y = 11$ anschaulich: Wenn die Frau verliert ($\omega \in \{0; 13; \ldots; 36\}$), so verliert wegen $\{1; 2; 3\} \subset \{1; 2; \ldots; 12\}$ auch der Mann.

- Das Ereignis $X = -1$ schließt also das Ereignis $Y = 11$ aus.

➜ In diesem Fall werden X und Y als *abhängig* bezeichnet.

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

Fall 2 (unterschiedliche Ausspielung): sie setzt eine Geldeinheit auf A, er auf B:
$A =$ „1. Dutzend“, $B =$ „1. Querreihe“; X ist Reingewinn für A, Y Reingewinn für B.

- Wegen der unterschiedlichen Ausspielungen sind A und B unabhängig.
  Das gilt auch für A und $\bar{B}$, $\bar{A}$ und B, sowie $\bar{A}$ und $\bar{B}$ (Unabhängigkeit von Gegenereignissen).

- Es ergibt sich folgende Vierfeldertafel / Multiplikationstabelle:

$y_j \backslash x_i$	-1	2	$P(Y = y_j)$
-1	$\frac{25}{37} \cdot \frac{34}{37}$	$\frac{12}{37} \cdot \frac{34}{37}$	$\frac{34}{37}$
11	$\frac{25}{37} \cdot \frac{3}{37}$	$\frac{12}{37} \cdot \frac{3}{37}$	$\frac{3}{37}$
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{37}$	$\frac{12}{37}$	1

- Die Summe der jeweiligen Randwahrscheinlichkeiten ist 1.
  Ein Hinweis, aber kein Beweis, dass kein Rechenfehler vorliegt.

➜ In diesem Fall werden X und Y als *unabhängig* bezeichnet.

Multiple Zufallsgrößen

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Es liegt nahe, den Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße auf zwei verschiedene Zufallsgrößen X und Y auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ zu übertragen.

- Zwei Zufallsgrößen X und Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ werden als gleich bezeichnet, wenn sie als Funktionen von ω gleich sind:

$$X(\omega) = Y(\omega) \text{ für jedes } \omega \in \Omega$$

Multiple Zufallsgrößen

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Es liegt nahe, den Begriff der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße auf zwei verschiedene Zufallsgrößen X und Y auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ zu übertragen.
- Zwei Zufallsgrößen X und Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ werden als gleich bezeichnet, wenn sie als Funktionen von ω gleich sind:

$$X(\omega) = Y(\omega) \text{ für jedes } \omega \in \Omega$$

Beispiel: Zweifacher Laplace-Würfelwurf.

- $\Omega = \{(i; k) : i, k \in \{1; 2; \ldots; 6\}\}$
- X sei die Augenzahl des ersten, Y die des zweiten Wurfs
- $X(\omega) \neq Y(\omega)$, da im Allgemeinen $i \neq k$ ist
- X und Y haben jedoch die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung
  Gleichheit der Wahrscheinlichkeitsverteilungen bedeutet nicht Gleichheit von Zufallsgrößen.

Multiple Zufallsgrößen

Definition 5 (Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung)

Seien X und Y zwei Zufallgrößen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ mit $W_X = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$ und $W_Y = \{y_1; y_2; \ldots; y_l\}$. Dann heißt die Funktion

$$P_{X,Y} : (x_i; y_j) \mapsto P(X = x_i \wedge Y = y_j)$$

mit $(x_i; y_j) \in W_X \times W_Y$ gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und Y.

Multiple Zufallsgrößen

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Zur Beschreibung der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_{X,Y}$ zweier Zufallsgrößen X und Y kann eine Mehrfeldertafel verwendet werden.
  Die Zahlen in den Feldern sind die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i \land Y = y_j)$.

Multiple Zufallsgrößen

Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Zur Beschreibung der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_{X,Y}$ zweier Zufallsgrößen X und Y kann eine Mehrfeldertafel verwendet werden.
  Die Zahlen in den Feldern sind die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i \wedge Y = y_j)$.

Berechnung der Einzelverteilungen P_X und P_Y aus $P_{X,Y}$:

- $X = x_i$ tritt genau dann ein, wenn eines der paarweise unvereinbaren Ereignisse $X = x_i \wedge Y = y_1, \ \ldots, \ X = x_i \wedge Y = y_l$ eintritt (analog für $Y = y_j$).

- Daraus folgt:

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{l} P(X = x_i \wedge Y = y_j) \qquad \text{(Spaltensumme)},$$

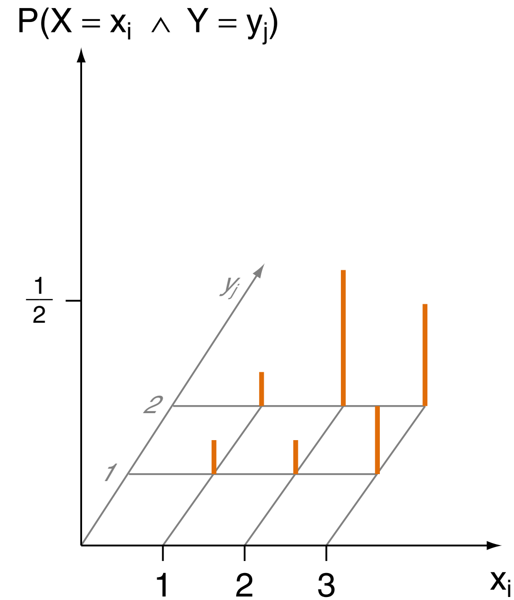
$$P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i \wedge Y = y_j) \qquad \text{(Zeilensumme)}.$$

- Diese an den Rändern der Mehrfeldertafel stehenden Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ und $P(Y = y_j)$ heißen Randwahrscheinlichkeiten.
  Die Summen der Einzelverteilungen muss jeweils 1 ergeben.

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung als Mehrfeldertafel

y_j \ x_i	1	2	3
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

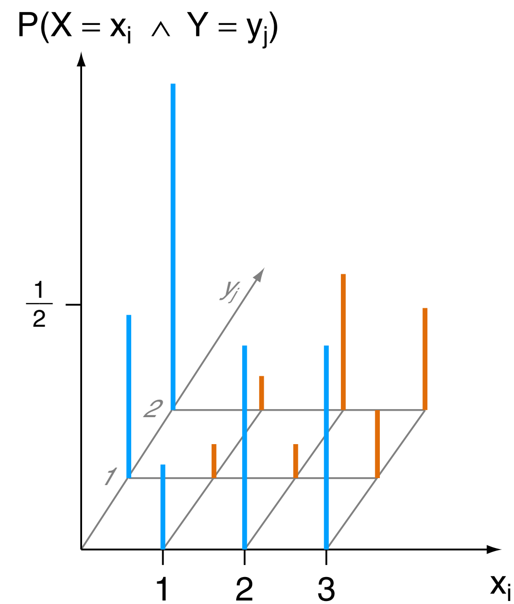


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung als Mehrfeldertafel

y_j \ x_i	1	2	3	$P(Y = y_i)$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	1



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Einzelverteilung für X (Spaltensummen):

- $P(X = 1) \;=\; P(X = 1 \wedge Y = 1) + P(X = 1 \wedge Y = 2) \;=\; \frac{1}{6}$
- $P(X = 2) \;=\; P(X = 2 \wedge Y = 1) + P(X = 2 \wedge Y = 2) \;=\; \frac{5}{12}$
- $P(X = 3) \;=\; P(X = 3 \wedge Y = 1) + P(X = 3 \wedge Y = 2) \;=\; \frac{5}{12}$

Einzelverteilung für Y (Zeilensummen):

- $P(Y = 1) \;=\; P(X = 1 \wedge Y = 1) + P(X = 2 \wedge Y = 1) + P(X = 3 \wedge Y = 1) \;=\; \frac{1}{3}$
- $P(Y = 2) \;=\; P(X = 1 \wedge Y = 2) + P(X = 2 \wedge Y = 2) + P(X = 3 \wedge Y = 2) \;=\; \frac{2}{3}$

Multiple Zufallsgrößen

Definition 6 (Abhängigkeit und Unabhängigkeit von zwei Zufallsgrößen)

Zwei auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$ definierte Zufallsgrößen X und Y mit den Wertemengen $W_X = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$ und $W_Y = \{y_1; y_2; \ldots; y_l\}$ heißen stochastisch unabhängig, wenn für *alle* $(x_i; y_j) \in W_X \times W_Y$ die Multiplikationsregel

$$P(X = x_i \wedge Y = y_j) \;=\; P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$$

gilt. Sonst heißen sie stochastisch abhängig.

Bemerkungen:

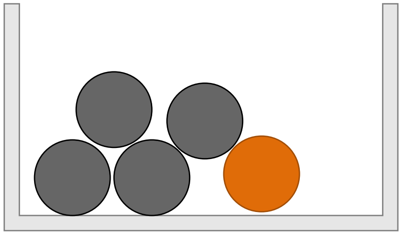
- Dieselbe intuitive Vorstellung wie bei der Unabhängigkeit von Ereignissen führt zur Definition der Unabhängigkeit zweier Zufallsgrößen.
- Die Unabhängigkeit von mehr als zwei Zufallsgrößen lässt sich analog definieren. Für drei Zufallsgrößen muss also gelten:

$$P(X = x_i \wedge Y = y_j \wedge Z = z_k) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) \cdot P(Z = z_k) \quad \text{für alle } x_i, y_j, z_k.$$

- Zwei Zufallsgrößen X und Y werden als unabhängig bezeichnet, wenn sie ihre Werte unabhängig voneinander annehmen können, d.h. wenn die durch $X = x_i$ und $Y = y_j$ beschriebenen Ereignisse für alle i, j unabhängig sind.
- Die Unabhängigkeit von Zufallsgrößen wird in Anwendungen meist durch Überlegungen begründet, die auf dem umgangssprachlichen Begriff der Unabhängigkeit beruhen. Beispielsweise können Zufallsgrößen, die zu unabhängig voneinander durchgeführten Teilexperimenten eines Gesamtzufallsexperiments gehören, üblicherweise als unabhängig im Sinne der Definition angesehen werden.
- Das obige Roulette-Beispiel zeigt Beispiele für abhängige und unabhängige Zufallsgrößen.
- Die Mehrfeldertafel bei zwei unabhängigen Zufallsgrößen ist eine Multiplikationstabelle.
- Auch bei Zufallsgrößen wird oft von (Un-)Abhängigkeit gesprochen, wenn im Zusammenhang klar ist, dass stochastische (Un-)Abhängigkeit gemeint ist.
- Urnenexperimente werden oft zur Veranschaulichung der Begriffe der Abhängigkeit und Unabhängigkeit genutzt.

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Ziehung aus einer Urne

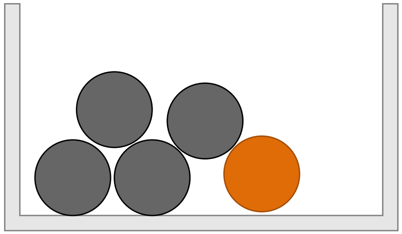


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Aus einer Urne mit einer roten und vier schwarzen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln gezogen.
- Sei X die Zahl der roten Kugeln beim ersten Zug und Y die beim zweiten.

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Ziehung aus einer Urne

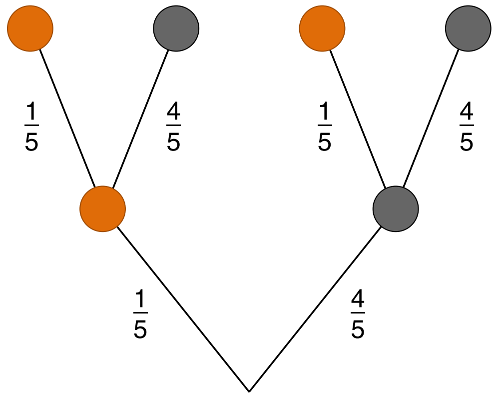


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Aus einer Urne mit einer roten und vier schwarzen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln gezogen.
- Sei X die Zahl der roten Kugeln beim ersten Zug und Y die beim zweiten.

Fall 1: Ziehung mit Zurücklegen

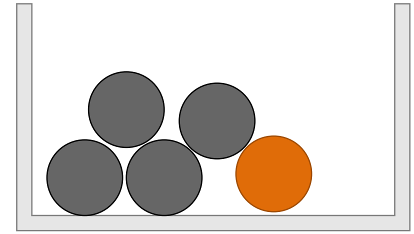
- Herleitung der Mehrfeldertabelle für $W_X = W_Y = \{0; 1\}$:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Ziehung aus einer Urne

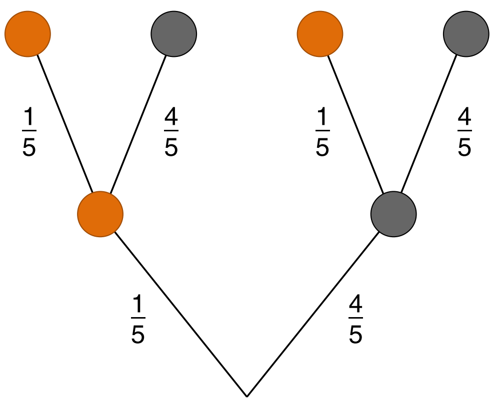


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Aus einer Urne mit einer roten und vier schwarzen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln gezogen.
- Sei X die Zahl der roten Kugeln beim ersten Zug und Y die beim zweiten.

Fall 1: Ziehung mit Zurücklegen

- Herleitung der Mehrfeldertabelle für $W_X = W_Y = \{0; 1\}$:



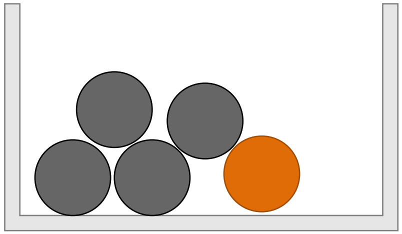
[Feuerpfeil/Heigel 1999]

y_j \ x_i	0	1	$P(Y = y_j)$
0	$\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$
1	$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

- Es gilt hier die Multiplikationsregel für alle Wertepaare.
  Nach dem Zurücklegen der ersten gezogenen Kugel wird die Urne gemischt.

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Ziehung aus einer Urne

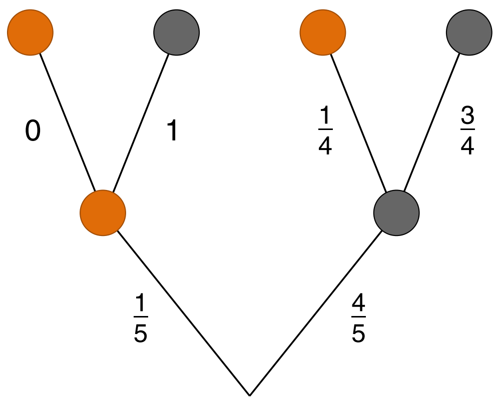


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Aus einer Urne mit einer roten und vier schwarzen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln gezogen.
- Sei X die Zahl der roten Kugeln beim ersten Zug und Y die beim zweiten.

Fall 2: Ziehung ohne Zurücklegen

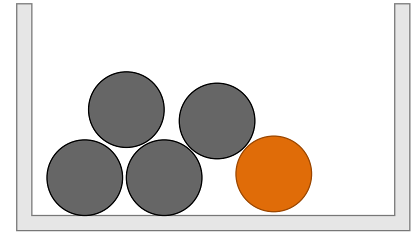
- Herleitung der Mehrfeldertabelle für $W_X = W_Y = \{0; 1\}$:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Ziehung aus einer Urne

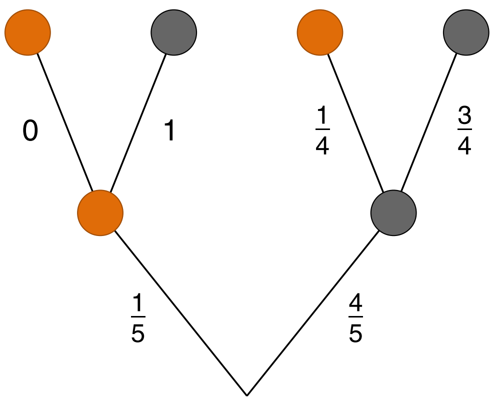


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Aus einer Urne mit einer roten und vier schwarzen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln gezogen.
- Sei X die Zahl der roten Kugeln beim ersten Zug und Y die beim zweiten.

Fall 2: Ziehung ohne Zurücklegen

- Herleitung der Mehrfeldertabelle für $W_X = W_Y = \{0; 1\}$:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

$\rightarrow$

$y_j \backslash x_i$	0	1	$P(Y = y_j)$
0	$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4}$	$\frac{1}{5} \cdot 1$	$\frac{4}{5}$
1	$\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{5} \cdot 0$	$\frac{1}{5}$
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

- Z.B. verletzt $P(X = 0 \wedge Y = 0) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \neq \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = P(X = 0) \cdot P(Y = 0)$ die Multiplikationsregel. Außerdem: das Ziehen einer roten Kugel im ersten Zug.

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette

- Jemand setzt 1 Euro auf $A =$ „1. Dutzend“
- Reingewinn X in Euro (Netto):

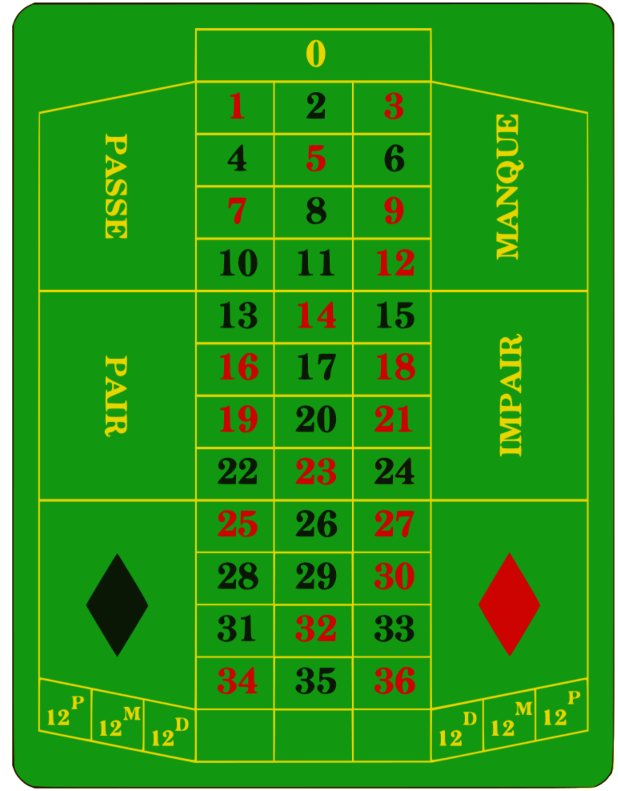
$$X : \omega \mapsto \begin{cases} 2 & \text{für } \omega \in \{1; 2; \ldots; 12\} = A, \\ -1 & \text{für } \omega \in \{0; 13; \ldots; 36\} = \bar{A}. \end{cases}$$

- Auszahlung Y in Euro (Brutto):

$$Y : \omega \mapsto \begin{cases} 3 & \text{für } \omega \in \{1; 2; \ldots; 12\} = A, \\ 0 & \text{für } \omega \in \{0; 13; \ldots; 36\} = \bar{A}. \end{cases}$$

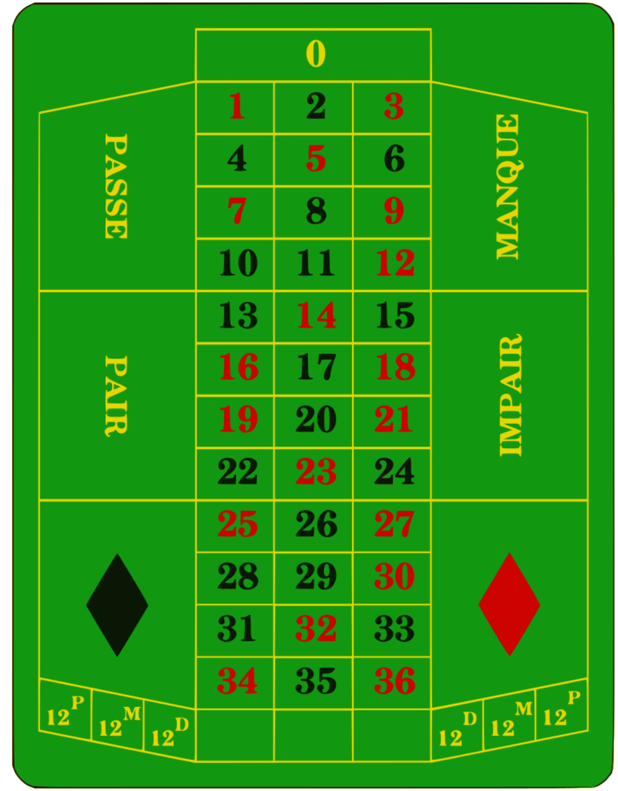
- Es gilt: $Y(\omega) = X(\omega) + 1$ bzw. $Y = X + 1$
- Sei Z die Auszahlung in Cent, dann gilt:

$Z(\omega) = 100 \cdot Y(\omega) = 100 \cdot X(\omega) + 100$ bzw. kurz $Z = 100 \cdot Y = 100 \cdot X + 100$



Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette



- Jemand setzt 1 Euro auf $A =$ „1. Dutzend“
- Reingewinn X in Euro (Netto):

$$X : \omega \mapsto \begin{cases} 2 & \text{für } \omega \in \{1; 2; \ldots; 12\} = A, \\ -1 & \text{für } \omega \in \{0; 13; \ldots; 36\} = \bar{A}. \end{cases}$$

- Auszahlung Y in Euro (Brutto):

$$Y : \omega \mapsto \begin{cases} 3 & \text{für } \omega \in \{1; 2; \ldots; 12\} = A, \\ 0 & \text{für } \omega \in \{0; 13; \ldots; 36\} = \bar{A}. \end{cases}$$

- Es gilt: $Y(\omega) = X(\omega) + 1$ bzw. $Y = X + 1$
- Sei Z die Auszahlung in Cent, dann gilt:

$Z(\omega) = 100 \cdot Y(\omega) = 100 \cdot X(\omega) + 100$ bzw. kurz $Z = 100 \cdot Y = 100 \cdot X + 100$

- Mit X sind auch Y und Z Zufallsgrößen:

$$P(X = 2) = P(Y = 3) = P(Z = 300) = \tfrac{12}{37}$$

$$P(X = -1) = P(Y = 0) = P(Z = 0) = \tfrac{25}{37}$$

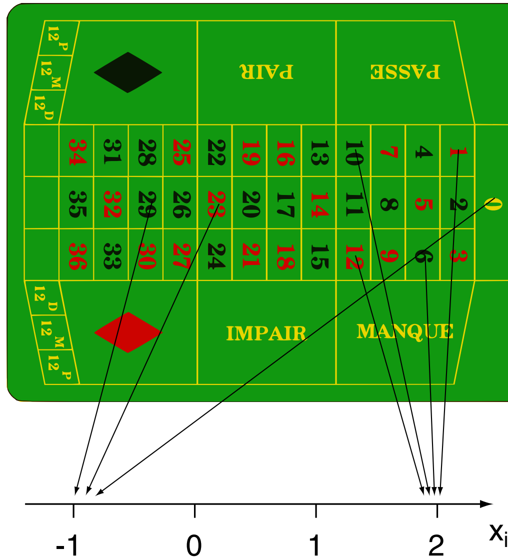
Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette

Ergebnisraum:

$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_m\}$

ω_i, ($i \in \{1; 2; \ldots; m\}$), sind die möglichen Spielergebnisse



Zufallsgröße X

X ist der Reingewinn in Euro beim Setzen auf „1. Dutzend“.

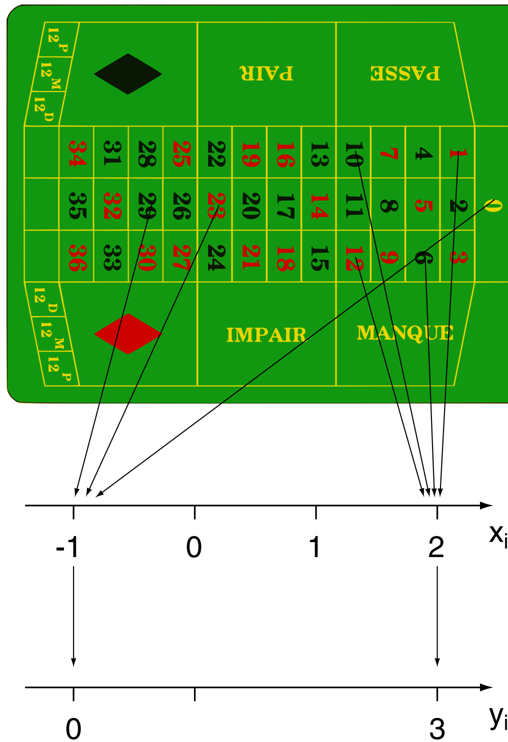
[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette

Ergebnisraum:
$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_m\}$

ω_i, ($i \in \{1; 2; \ldots; m\}$), sind die möglichen Spielergebnisse



Zufallsgröße X

X ist der Reingewinn in Euro beim Setzen auf „1. Dutzend“.

Zufallsgröße Y

Y ist der Bruttogewinn in Euro beim Setzen auf „1. Dutzend“.

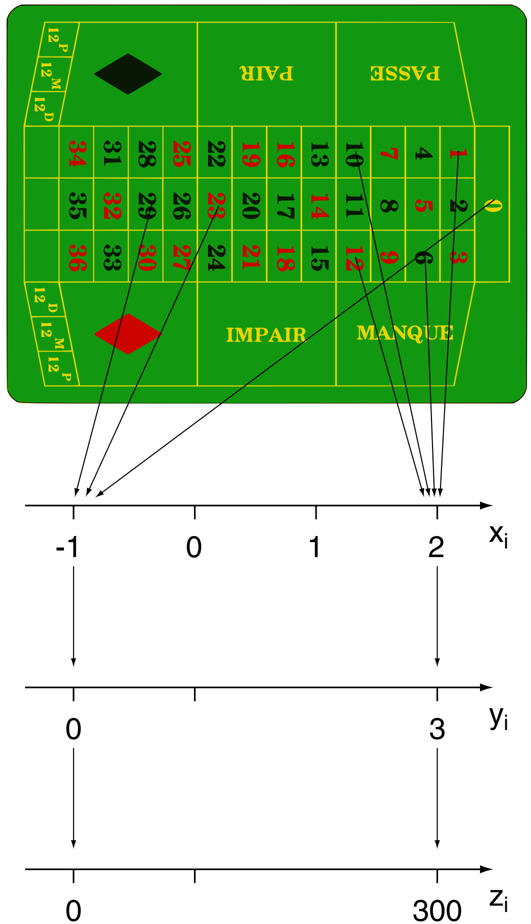
[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette

Ergebnisraum:
$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_m\}$

ω_i, ($i \in \{1; 2; \ldots; m\}$), sind die möglichen Spielergebnisse



Zufallsgröße X

X ist der Reingewinn in Euro beim Setzen auf „1. Dutzend“.

Zufallsgröße Y

Y ist der Bruttogewinn in Euro beim Setzen auf „1. Dutzend“.

Zufallsgröße Z

Z ist der Bruttogewinn in Cent beim Setzen auf „1. Dutzend“.

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

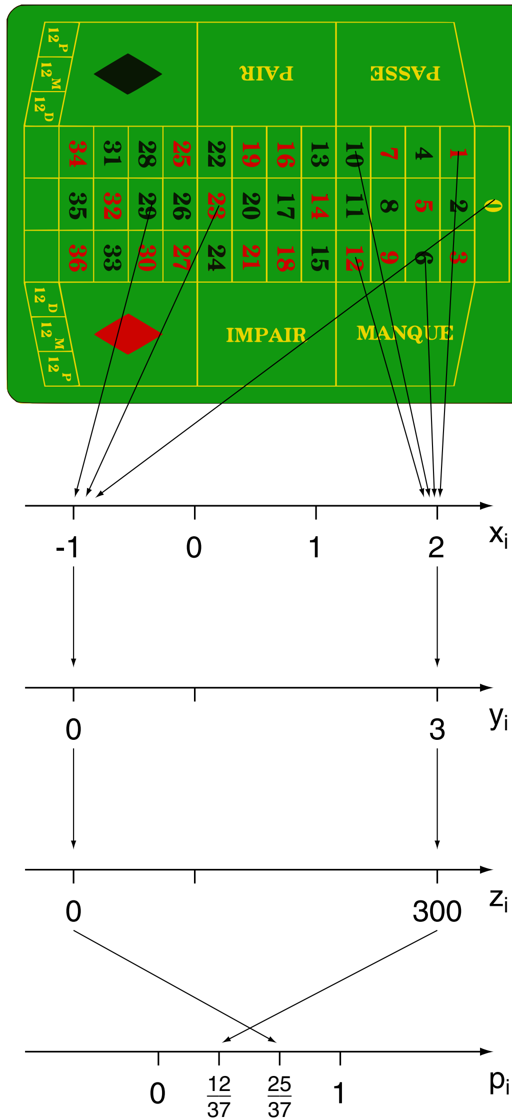
Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Französisches Roulette

Ergebnisraum:

$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_m\}$

ω_i, ($i \in \{1; 2; \ldots; m\}$), sind die möglichen Spielergebnisse



Zufallsgröße X

X ist der Reingewinn in Euro beim Setzen auf „1. Dutzend“.

Zufallsgröße Y

Y ist der Bruttogewinn in Euro beim Setzen auf „1. Dutzend“.

Zufallsgröße Z

Z ist der Bruttogewinn in Cent beim Setzen auf „1. Dutzend“.

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Multiple Zufallsgrößen

Verallgemeinerung

- Mit $X(\omega)$ ist auch

$$Y(\omega) \;=\; a \cdot X(\omega) + b \quad \text{für} \quad a, b \in \mathbf{R}$$

eine Funktion auf Ω und damit auch eine Zufallsgröße auf Ω.

- Allgemein ist mit $X(\omega)$ jede reellwertige Funktion g mit

$$Y(\omega) = g(X(\omega)), \quad \text{bzw. kurz} \quad Y = g(X)$$

ebenfalls eine Zufallsgröße auf Ω.

- Das Urbild von g ist die Wertemenge W_X der Zufallsgröße X, die Bildmenge die Wertemenge $W_Y = \{y_j : y_j = g(x_i)\}$ der Zufallsgröße Y.

- Dabei können verschiedene x_i gleiche Bildpunkte y_j abgebildet werden.
  g ist surjektiv, aber nicht unbedingt injektiv.

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Würfeln

- Ein Glücksspiel mit zwei Laplace-Würfeln verspricht bei 40 Cent Einsatz

  3 Euro bei Augensumme 12, 1 Euro bei Augensumme 10,

  2 Euro bei Augensumme 11, 0 Euro sonst.

- Die Zufallsgröße X auf $\Omega = \{(i; k) : i, k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}\}$ kennzeichne die Augensumme; also $X((i; k)) = i + k$.

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Würfeln

- Ein Glücksspiel mit zwei Laplace-Würfeln verspricht bei 40 Cent Einsatz

  3 Euro bei Augensumme 12, 1 Euro bei Augensumme 10,

  2 Euro bei Augensumme 11, 0 Euro sonst.

- Die Zufallsgröße X auf $\Omega = \{(i;k) : i,k \in \{1;2;3;4;5;6\}\}$ kennzeichne die Augensumme; also $X((i;k)) = i + k$.

- Seien Y der Brutto- und Z der Nettogewinn in Euro als Funktionen von X:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3
Z	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$0{,}6$	$1{,}6$	$2{,}6$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Würfeln

- Ein Glücksspiel mit zwei Laplace-Würfeln verspricht bei 40 Cent Einsatz

  3 Euro bei Augensumme 12, 1 Euro bei Augensumme 10,

  2 Euro bei Augensumme 11, 0 Euro sonst.

- Die Zufallsgröße X auf $\Omega = \{(i;k) : i,k \in \{1;2;3;4;5;6\}\}$ kennzeichne die Augensumme; also $X((i;k)) = i + k$.

- Seien Y der Brutto- und Z der Nettogewinn in Euro als Funktionen von X:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3
Z	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$-0{,}4$	$0{,}6$	$1{,}6$	$2{,}6$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

- Abbildung der Wahrscheinlichkeitsverteilung für X auf Z:
  Einige x_i fallen auf $z_k = -0{,}4$ zusammen.

z_k	$-0{,}4$	$0{,}6$	$1{,}6$	$2{,}6$
$P(Z = z_k)$	$\frac{30}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Bemerkungen:

- Ob sich das Glücksspiel für die Bank lohnt bleibt bis zu diesem Punkt unklar. Mit Hilfe des Erwartungswerts kann dies geklärt werden.

Multiple Zufallsgrößen
Verallgemeinerung

Aus der Analysis: Wenn f und g reelle Funktionen einer reellen Variablen x aus einer gemeinsamen Definitionsmenge sind, dann beispielsweise auch:

$$f+g, \quad f-g, \quad f\cdot g \quad \text{und} \quad \frac{f}{g} \text{ für } g \neq 0 \ .$$

Satz 7 (Verknüpfung von Zufallsgrößen)

Sind X und Y Zufallsgrößen auf dem Ergebnisraum Ω (also auch Funktionen auf Ω), so gilt dies auch für $X+Y$, $X-Y$, $X\cdot Y$, $\frac{X}{Y}$ (für $Y \neq 0$) und $a\cdot X + b\cdot Y$ mit $a, b \in \mathbf{R}$.

Bemerkungen:

- Allgemein wird durch die Verknüpfung $g(X_1, X_2, \ldots, X_n) = Y$ der Zufallsgrößen X_i ($i \in \{1; 2; \ldots; n\}$) auf dem Ergebnisraum Ω eine neue Zufallsgröße Y gebildet, wenn g eine reelle Funktion der n Zufallsgrößen ist.

- Von besonderem Interesse in der Stochastik sind Summen von *unabhängigen* Zufallsgrößen und deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen, wie schon beim Augensummenparadoxon gesehen. Ein anderes Beispiel ist das folgende einfache Modell zur Wachstumsverteilung von Lebewesen.

Multiple Zufallsgrößen

Beispiel: Wachstumsverteilung

- Das Wachstum eines Lebewesens ist weitgehend durch seine Ernährung sowie den Sauerstoffgehalt und die Temperatur im Lebensbereich bestimmt.

- Jeder dieser Faktoren bewirkt Laplace-verteilt und unabhängig von den anderen eine Veränderung der Normkörperlänge um -2, -1, 0, 1, 2 Einheiten.

- Seien X, Y, Z unabhängige Zufallsgrößen mit gleichen Einzelverteilungen:

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

- Gesucht ist die Verteilung für die Veränderung der Körperlänge: $V = X + Y + Z$

- Analog zum Schema des Augensummenparadoxon ergibt sich:

  Vergleichen Sie die entsprechende Übungsaufgabe.

v_i	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6
$P(V = v_i)$	$0{,}152$	$0{,}144$	$0{,}120$	$0{,}080$	$0{,}048$	$0{,}024$	$0{,}008$

Bemerkungen:

- Dieses die Wirklichkeit sehr vergröbernde Modell passt erstaunlich gut zur Verteilung, die man unter Annahme einer Normalverteilung bekommen würde.