

# Kapitel PTS:II

## II. Wahrscheinlichkeitsbegriff

- ❑ Zufallsexperimente
- ❑ Ergebnisräume
- ❑ Ereignisräume
- ❑ Relative Häufigkeit
- ❑ Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff
- ❑ Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

# Ergebnisräume

**Ziel:** Mathematische Modellierung des Zufalls

**Schritt 1:** Beschreibung zufälliger Vorgänge als Zufallsexperiment

**Schritt 2:** Zusammenfassung interessierender Ausgänge zum Ergebnisraum  $\Omega$

Schritt 3: Identifikation interessierender Ereignisse im Ergebnisraum

Schritt 4: Bestimmung der Häufigkeit des Ereigniseintritts

Schritt 5: Statistische Wahrscheinlichkeit  $\rightarrow$  Wahrscheinlichkeitsbegriff

Schritt 6: Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

# Ergebnisräume

## Definition 1 (Ergebnisraum)

Eine Menge  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$  heißt **Ergebnisraum** eines Zufallsexperiments, wenn jedem Experimentausgang höchstens ein Element  $\omega_i \in \Omega$  zugeordnet ist. Die Elemente  $\omega_i$  heißen **Ergebnisse** des Zufallsexperiments.

# Ergebnisräume

## Definition 1 (Ergebnisraum)

Eine Menge  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$  heißt **Ergebnisraum** eines Zufallsexperiments, wenn jedem Experimentausgang höchstens ein Element  $\omega_i \in \Omega$  zugeordnet ist. Die Elemente  $\omega_i$  heißen **Ergebnisse** des Zufallsexperiments.

### Beispiel: Münzwurf

- Experiment: Eine Münze in die Luft werfen
- Frage: Zeigt die Münze anschließend Kopf oder Zahl?

→  $\Omega = \{\text{Kopf}; \text{Zahl}\}$

# Ergebnisräume

## Definition 1 (Ergebnisraum)

Eine Menge  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$  heißt **Ergebnisraum** eines Zufallsexperiments, wenn jedem Experimentausgang höchstens ein Element  $\omega_i \in \Omega$  zugeordnet ist. Die Elemente  $\omega_i$  heißen **Ergebnisse** des Zufallsexperiments.

### Beispiel: Münzwurf

- ❑ Experiment: Eine Münze in die Luft werfen
- ❑ Frage: Zeigt die Münze anschließend Kopf oder Zahl?
- $\Omega = \{\text{Kopf; Zahl}\}$
  
- ❑ Zeigt die Münze nicht klar eine Seite, wird der Wurf wiederholt.  
z.B. bei Stehenbleiben auf dem Rand, oder bei Verlust der Münze.
- ❑ Die Berücksichtigung eines Ausgangs hängt von seiner Relevanz ab.  
Interessant sind gegebenenfalls nur die Ausgänge, die für das Fortkommen des Spiels oder der auf dem Münzwurf basierenden Entscheidungsfindung relevant sind.

# Ergebnisräume

## Definition und Beispiele

### Beispiel: Würfelwurf

- Experiment: Einen sechsseitigen Würfel werfen
- Mögliche Fragen:
  - Welche Augenzahl zeigt der Würfel?  $\rightarrow \Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
  - Ist die Augenzahl eine Sechs?  $\rightarrow \Omega_2 = \{\text{Sechs}; \text{Nicht-Sechs}\}$
  - Ist die Augenzahl gerade oder nicht?  $\rightarrow \Omega_3 = \{\text{gerade}; \text{ungerade}\}$
- Bei „Kippe“ wird der Wurf wiederholt.

Alle denkbaren Ruhelagen des Würfels zu berücksichtigen ergäbe einen unendlichen Ergebnisraum, was zur Modellierung von z.B. einem Würfelspiel aber unangebracht wäre.
- Eine hypothetische Menge  $\{\text{gerade}; \text{ungerade}; \text{prim}\}$  ist kein Ergebnisraum, da die Ausgänge 2, 3 und 5 je zwei Elementen der Menge zugeordnet sind.

## Bemerkungen:

- Anders ausgedrückt vereinbaren wir für ein gegebenes Zufallsexperiment eine partielle surjektive Abbildung vom Universum aller möglichen Ausgänge auf den Ergebnisraum  $\Omega$  der interessierenden Ergebnisse, wobei jedes Ergebnis durch einen Bezeichner repräsentiert wird, der dem eines Ausgangs entsprechen kann, aber nicht muss.

# Ergebnisräume

## Definition und Beispiele

Ergebnisräume können unterschiedliche komplex sein.

Beispiel: Lotto „6 aus 49“

- Es gibt etwa 14 Millionen Möglichkeiten, 6 Zahlen aus 49 auszuwählen (vergleiche Abschnitt zu [Kombinatorik](#))

Beispiel: Meinungsumfragen

- Gallup-Institut befragte in den 1990-ern wöchentlich 1500 „zufällige“ US-Bürger, die mindestens 18 Jahre alt waren
- Mögliche Auswahlen von 1500 Personen aus 180 Millionen (Erwachsene) ergibt eine Zahl mit über 8000 Ziffern

Beispiel: Würfeln bis zur ersten Sechs

- Erforderliche Anzahl der Würfe nicht nach oben beschränkt
- $\Omega = \mathbb{N}^+$



# Ergebnisräume

## Definition und Beispiele

Die Wahl des Ergebnisraums hängt vom Kontext ab, in dem ein Zufallsexperiment untersucht wird.

### Beispiel: Würfelwurf

- $\Omega_1 = \{\text{Sechs; Nicht-Sechs}\}$  am Anfang von „Mensch ärgere dich nicht“
- $\Omega_2 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  im weiteren Verlauf

Ein abstrakter Ergebnisraum kann mathematisches Modell für verschiedene Zufallsexperimente sein.

### Beispiel: $\Omega = \{0; 1\}$

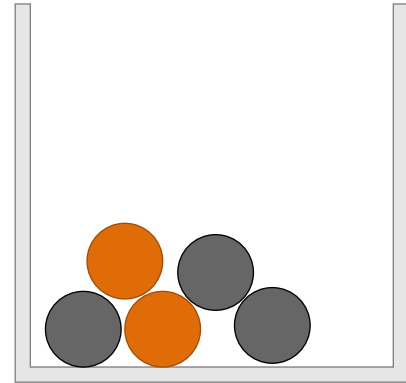
- Münzwurf: 0 = Kopf, 1 = Zahl
- Würfelwurf: 0 = gerade Augenzahl, 1 = ungerade Augenzahl
- ...

# Ergebnisräume

## Vergröberung und Verfeinerung

### Beispiel: Urnenmodell

- ❑ Aufbau: Urne mit roten und schwarzen Kugeln.  
Die Kugeln sind ansonsten ununterscheidbar.
- ❑ Experiment 1: Ziehung zweier Kugeln nacheinander.
- ❑ Bezeichner: „r“ für „rot“ und „s“ für „schwarz“
- $\Omega_1 = \{(r; r); (r; s); (s; r); (s; s)\}$
- ❑ Ergebnisse entsprechen **geordneten Paaren**.



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

# Ergebnisräume

## Vergröberung und Verfeinerung

### Beispiel: Urnenmodell

- Aufbau: Urne mit roten und schwarzen Kugeln.

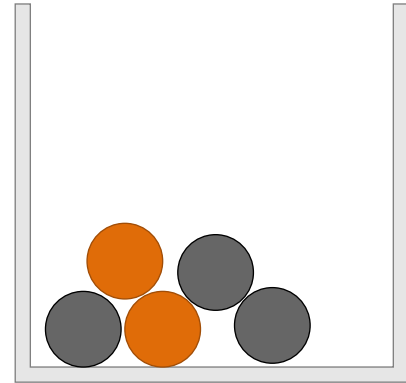
Die Kugeln sind ansonsten ununterscheidbar.

- Experiment 1: Ziehung zweier Kugeln nacheinander.

- Bezeichner: „r“ für „rot“ und „s“ für „schwarz“

→  $\Omega_1 = \{(r; r); (r; s); (s; r); (s; s)\}$

- Ergebnisse entsprechen **geordneten Paaren**.



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Experiment 2: Wie Experiment 1, aber ohne Interesse an der Reihenfolge.

→  $\Omega_2 = \{\{r; r\}; \{r; s\}; \{s; s\}\}$

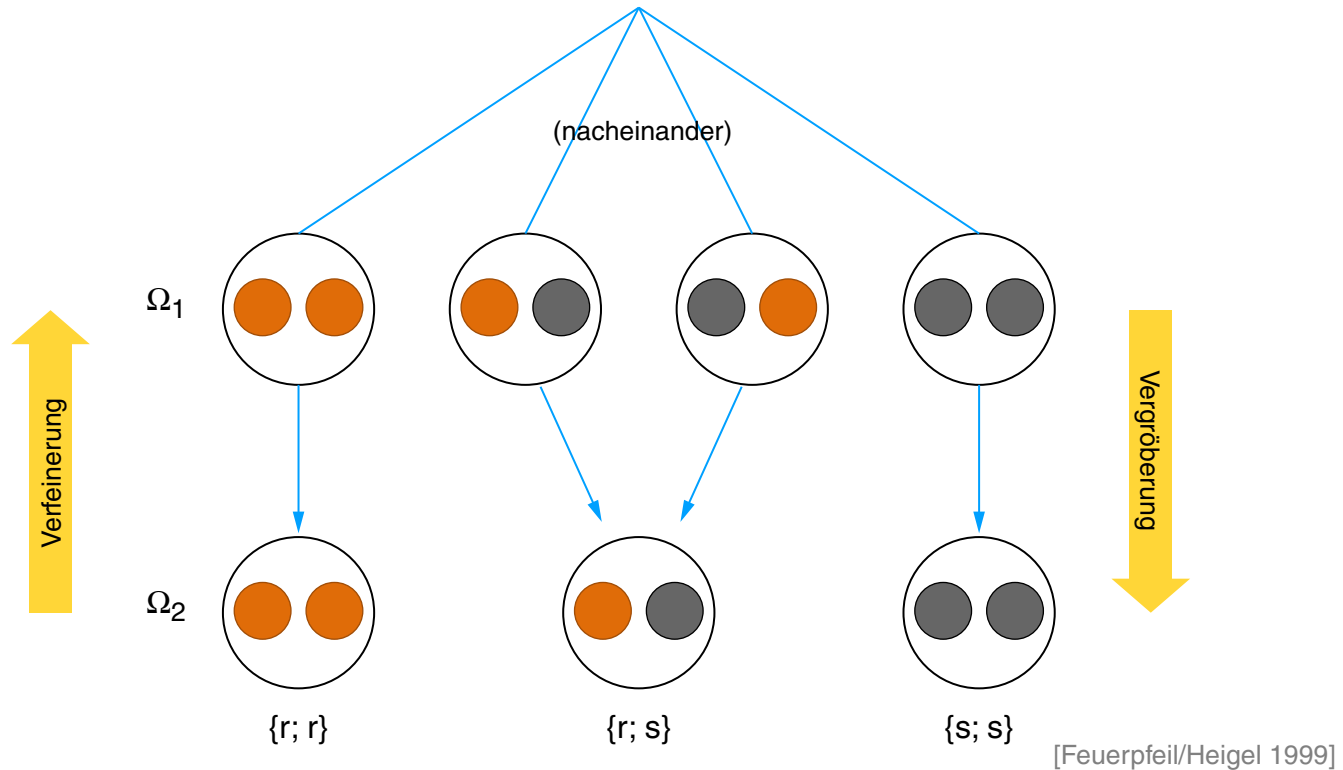
- Ergebnisse entsprechen **Kombinationen**.

# Ergebnisräume

## Vergröberung und Verfeinerung

Beispiel: Urnenmodell (Fortsetzung)

- Die Ergebnisräume  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  können aufeinander abgebildet werden.



# Ergebnisräume

## Definition 2 (Vergröberung und Verfeinerung von Ergebnisräumen)

Seien  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  zwei Ergebnisräume eines Zufallsexperiments mit  $|\Omega_1| > |\Omega_2|$ .  
Lässt sich  $\Omega_1$  auf  $\Omega_2$  abbilden, so heißt  $\Omega_2$  **Vergröberung** von  $\Omega_1$ . Umgekehrt heißt  $\Omega_1$  **Verfeinerung** von  $\Omega_2$ .

Bei einer Vergröberung geht Information verloren.

Im Urnenbeispiel kann man beim  $\Omega_2$ -Ergebnis  $\{r; s\}$  nicht mehr erkennen, ob „zuerst“ eine rote oder eine schwarze Kugel gezogen wurde.

## Bemerkungen:

- ❑ Mit Berücksichtigung der Reihenfolge wird ein Ergebnis als  $n$ -Tupel  $(\cdot; \cdot; \dots)$  notiert. Bei Tupeln ist die Reihenfolge ihrer Elemente wesentlich und ein Element des Tupels nicht notwendigerweise verschieden von anderen Elementen des Tupels.
- ❑ Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge wird ein Ergebnis als  $n$ -Multimenge  $\{\cdot; \cdot; \dots\}$  notiert. Bei Mengen ist die Reihenfolge ihrer Elemente willkürlich und üblicherweise jedes Element der Menge verschieden von jedem anderen Element der Menge. Bei Multimengen dürfen Elemente mehrfach vorkommen.

# Ergebnisräume

## Mehrstufige Zufallsexperimente

Zufallsexperimente, die aus einfacheren zusammengesetzt sind, die in einer bestimmten Reihenfolge ablaufen, heißen **mehrstufige Zufallsexperimente**.

Die Art, wie die Einzelexperimente miteinander zusammenhängen, soll sich auch im Ergebnisraum widerspiegeln.

# Ergebnisräume

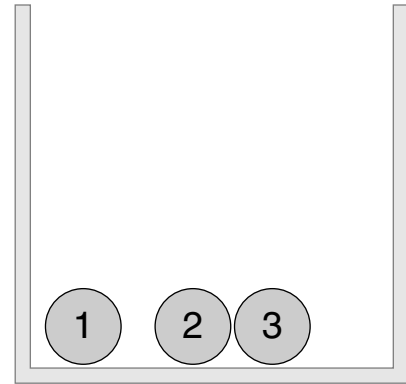
## Mehrstufige Zufallsexperimente

Zufallsexperimente, die aus einfacheren zusammengesetzt sind, die in einer bestimmten Reihenfolge ablaufen, heißen **mehrstufige Zufallsexperimente**.

Die Art, wie die Einzelexperimente miteinander zusammenhängen, soll sich auch im Ergebnisraum widerspiegeln.

Beispiel: Urnenmodell

- ❑ Aufbau: Urne mit drei nummerierten Kugeln.  
Die Kugeln sind ansonsten ununterscheidbar.
- ❑ Experiment: Ziehung zweier Kugeln nacheinander.



[Feuerpfeil/Heigel 1999]



# Ergebnisräume

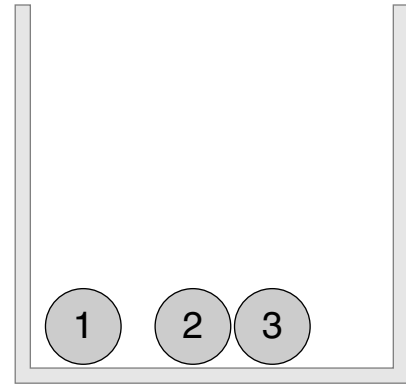
## Mehrstufige Zufallsexperimente

Zufallsexperimente, die aus einfacheren zusammengesetzt sind, die in einer bestimmten Reihenfolge ablaufen, heißen **mehrstufige Zufallsexperimente**.

Die Art, wie die Einzelexperimente miteinander zusammenhängen, soll sich auch im Ergebnisraum widerspiegeln.

Beispiel: Urnenmodell

- ❑ Aufbau: Urne mit drei nummerierten Kugeln.  
Die Kugeln sind ansonsten ununterscheidbar.
- ❑ Experiment: Ziehung zweier Kugeln **nacheinander**.



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

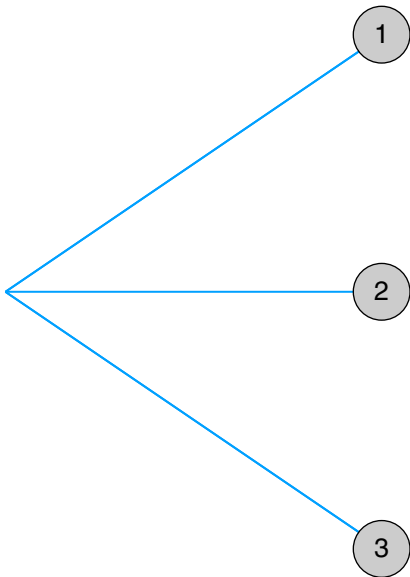
- ❑ Mögliche Arten der Ziehung:
  - (1) Ziehen mit Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge
  - (2) Ziehen ohne Zurücklegen mit Berücksichtigung der Reihenfolge
  - (3) Ziehen ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
  - (4) Ziehen mit Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

# Ergebnisräume

## Mehrstufige Zufallsexperimente: Baumdiagramm zur Veranschaulichung

(1) Ziehen **mit Zurücklegen** mit Berücksichtigung der Reihenfolge

1. Stufe

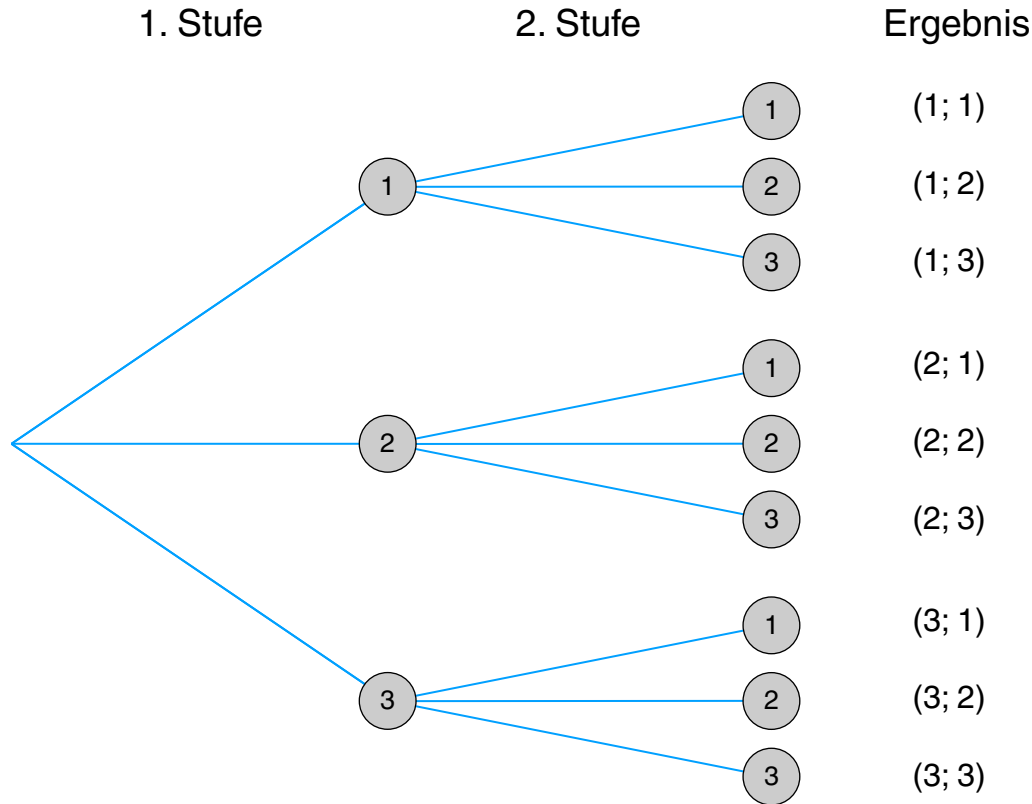


[Feuerpfeil/Heigel 1999]

# Ergebnisräume

## Mehrstufige Zufallsexperimente: Baumdiagramm zur Veranschaulichung

(1) Ziehen **mit Zurücklegen** mit Berücksichtigung der Reihenfolge



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

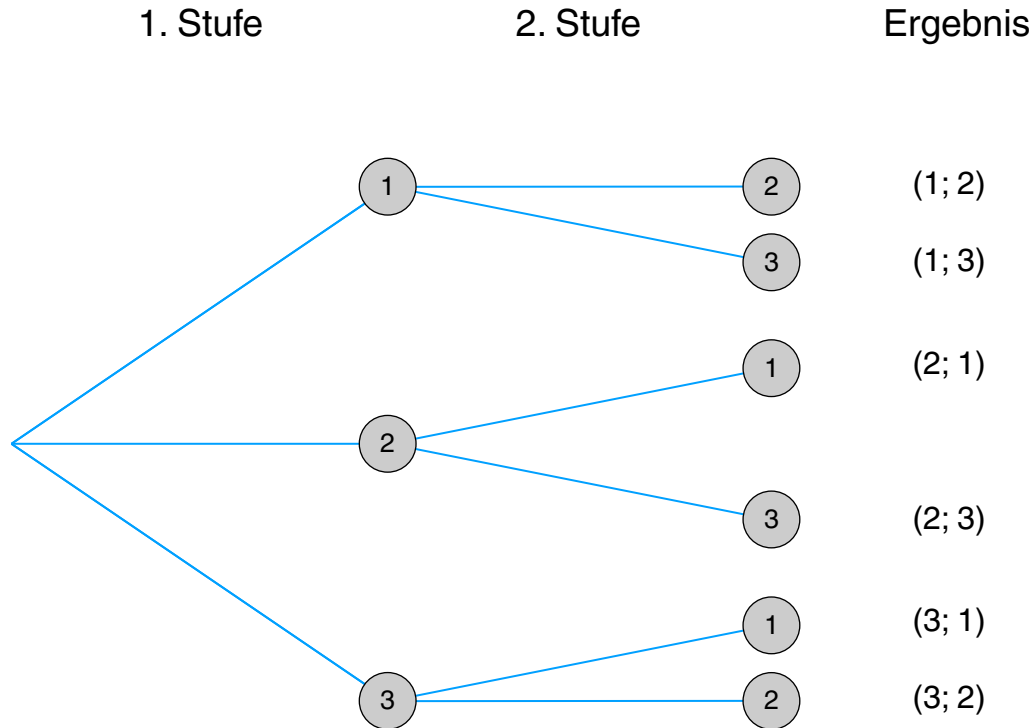
→  $\Omega_1 = \{(1; 1); (1; 2); (1; 3); (2; 1); (2; 2); (2; 3); (3; 1); (3; 2); (3; 3)\}$

Das zweite Teilexperiment hängt nicht vom ersten ab (quasi gleiche Urne).

# Ergebnisräume

## Mehrstufige Zufallsexperimente: Baumdiagramm zur Veranschaulichung

(2) Ziehen **ohne Zurücklegen** mit Berücksichtigung der Reihenfolge



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

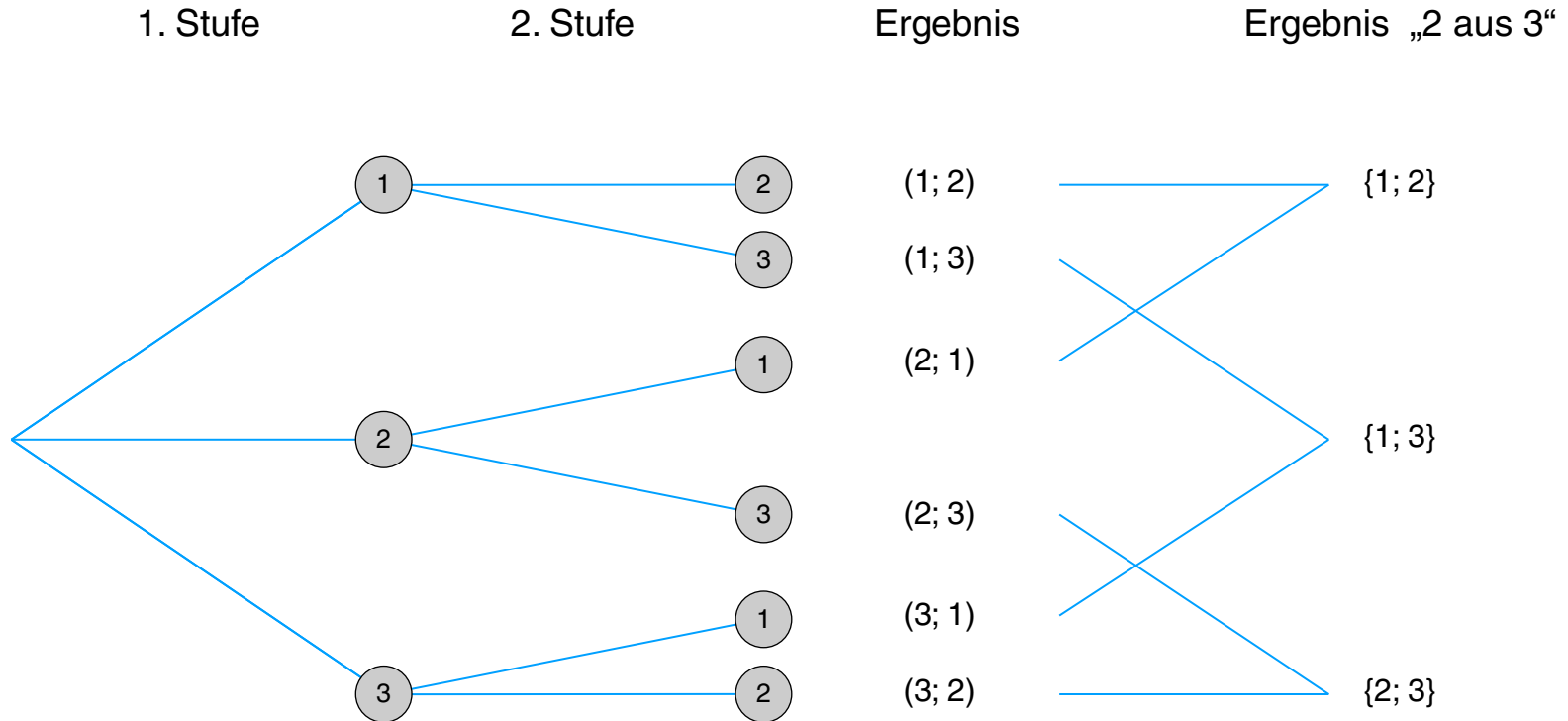
→  $\Omega_2 = \{(1; 2); (1; 3); (2; 1); (2; 3); (3; 1); (3; 2)\}$

Das Ergebnis des zweiten Teilexperiments hängt vom ersten ab.

# Ergebnisräume

## Mehrstufige Zufallsexperimente: Baumdiagramm zur Veranschaulichung

(3) Ziehen ohne Zurücklegen **ohne Berücksichtigung der Reihenfolge**



[Feuerpfel/Heigel 1999]

$$\rightarrow \Omega_3 = \{\{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}\}$$

Bemerkungen:

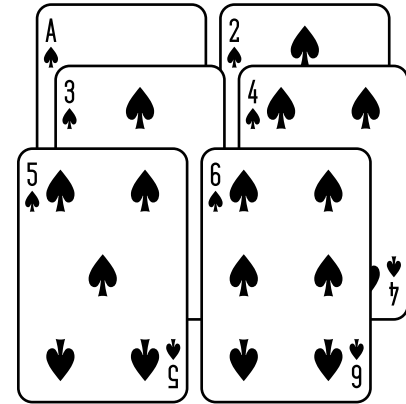
- $\Omega_3$  ist eine Vergrößerung von  $\Omega_2$ .

# Ergebnisräume

## Mehrstufige Zufallsexperimente: Baumdiagramm zur Veranschaulichung

Beispiel: Karten austeilen

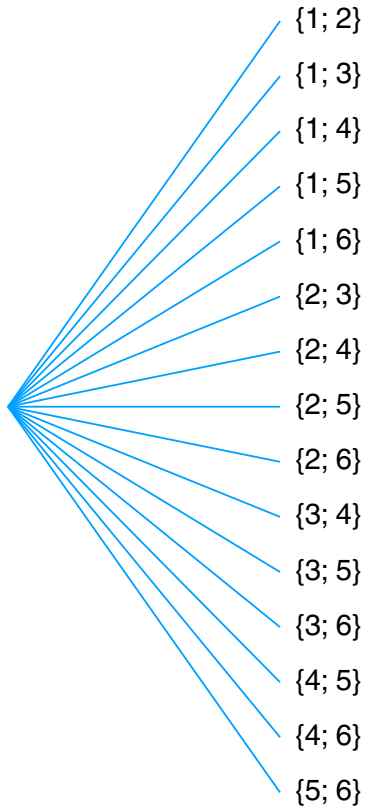
- Aufbau: Kartenspiel mit sechs nummerierten Karten.
- Experiment: Drei Spieler:innen erhalten je zwei Karten.
- Mögliche Zerlegung in Stufen:
  - Stufe 1: Spieler:in  $A$  bekommt 2 der 6 Karten.
  - Stufe 2: Spieler:in  $B$  bekommt 2 der 4 Karten.
  - Stufe 3: Spieler:in  $C$  bekommt die übrigen 2 Karten.



# Ergebnisräume

## Mehrstufige Zufallsexperimente: Baumdiagramm zur Veranschaulichung

1. Stufe

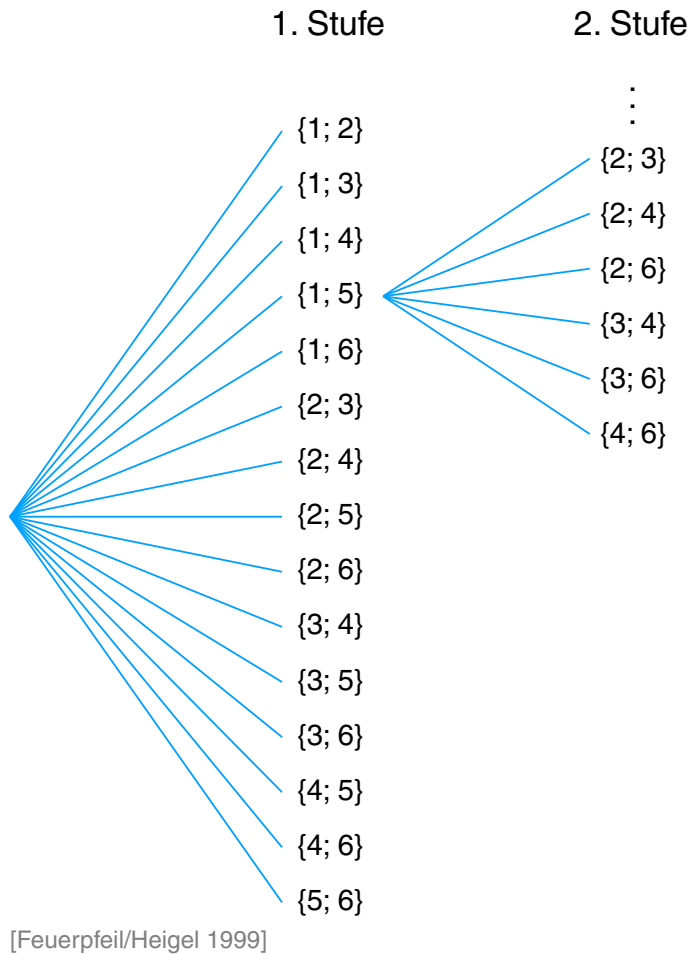


[Feuerpfeil/Heigel 1999]



# Ergebnisräume

## Mehrstufige Zufallsexperimente: Baumdiagramm zur Veranschaulichung

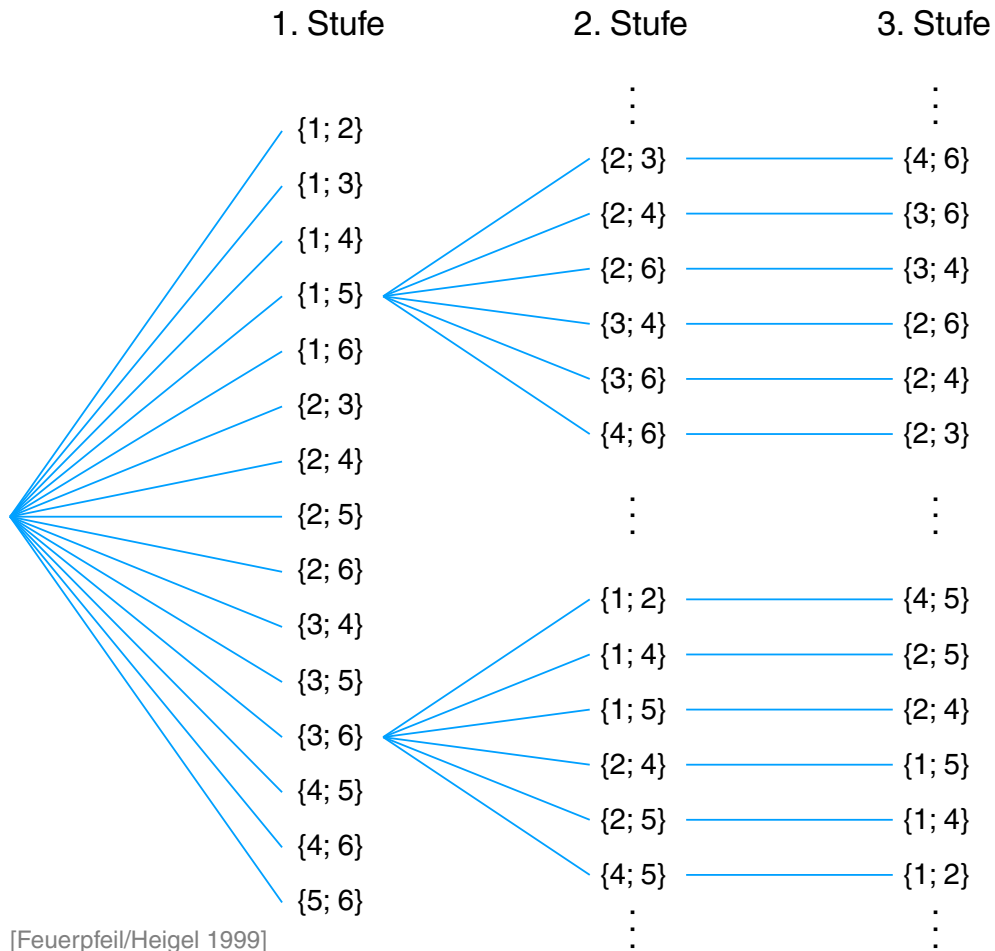


## Mehrstufige Zufallsexperimente: Baumdiagramm zur Veranschaulichung



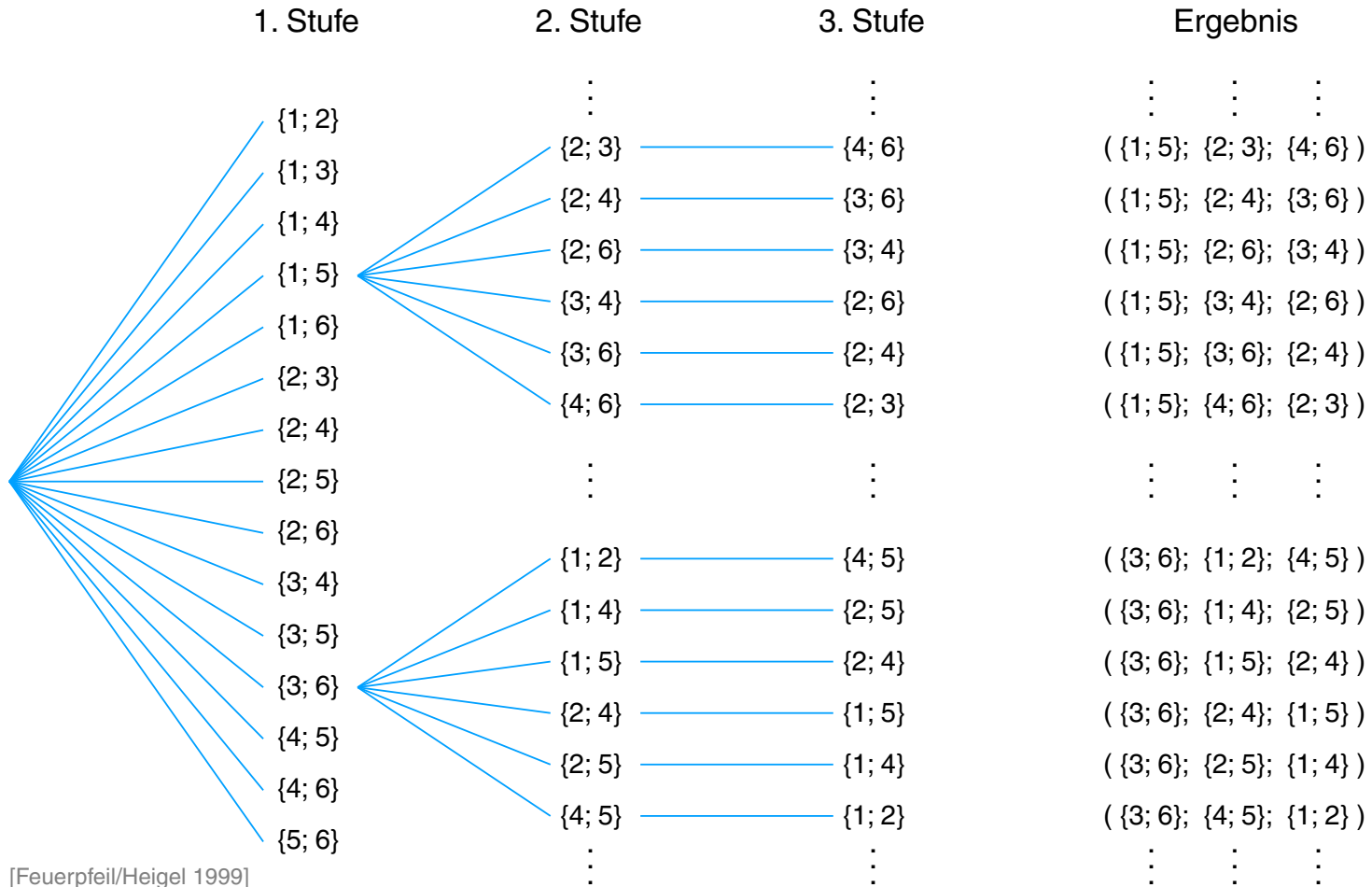
# Ergebnisräume

## Mehrstufige Zufallsexperimente: Baumdiagramm zur Veranschaulichung



# Ergebnisräume

## Mehrstufige Zufallsexperimente: Baumdiagramm zur Veranschaulichung



→  $\Omega = \{(\{1; 2\}; \{3; 4\}; \{5; 6\}); (\{1; 2\}; \{3; 5\}; \{4; 6\}); \dots, (\{5; 6\}; \{3; 4\}; \{1; 2\})\}$

# Ergebnisräume

## Mehrstufige Zufallsexperimente

Verallgemeinerung:

Ist  $\omega_i$  ein Element des Ergebnisraums  $\Omega_i$  des  $i$ -ten Teilexperiments, so ist das Gesamtergebnis eines  $n$ -stufigen Zufallsexperiments ein  $n$ -Tupel  $\omega = (\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n)$ , mit dem die Ergebnisreihenfolge ausgedrückt wird.

# Ergebnisräume

## Mächtigkeit des Ergebnisraums

Beispiel: RennQuintett „2x3 aus 15“

- 15 Pferde treten im Trab- oder Galopprennen gegeneinander an.
- Wähle die drei ersten in der Reihenfolge ihres Zieleinlaufs.
- Wie viele Möglichkeiten drei Pferde auszuwählen gibt es?

**RennQuintett**

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

**A** 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35

**B** 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35

21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35

1 2 3

# Ergebnisräume

## Mächtigkeit des Ergebnisraums

Beispiel: RennQuintett „2x3 aus 15“

- 15 Pferde treten im Trab- oder Galopprennen gegeneinander an.
- Wähle die drei ersten in der Reihenfolge ihres Zieleinlaufs.
- Wie viele Möglichkeiten drei Pferde auszuwählen gibt es?

**RennQuintett**

|   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|   | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | X  | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| A | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | X  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 1 | X  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|   | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 |
| B | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 |
|   | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 |

1

1  
2  
3

1  
2

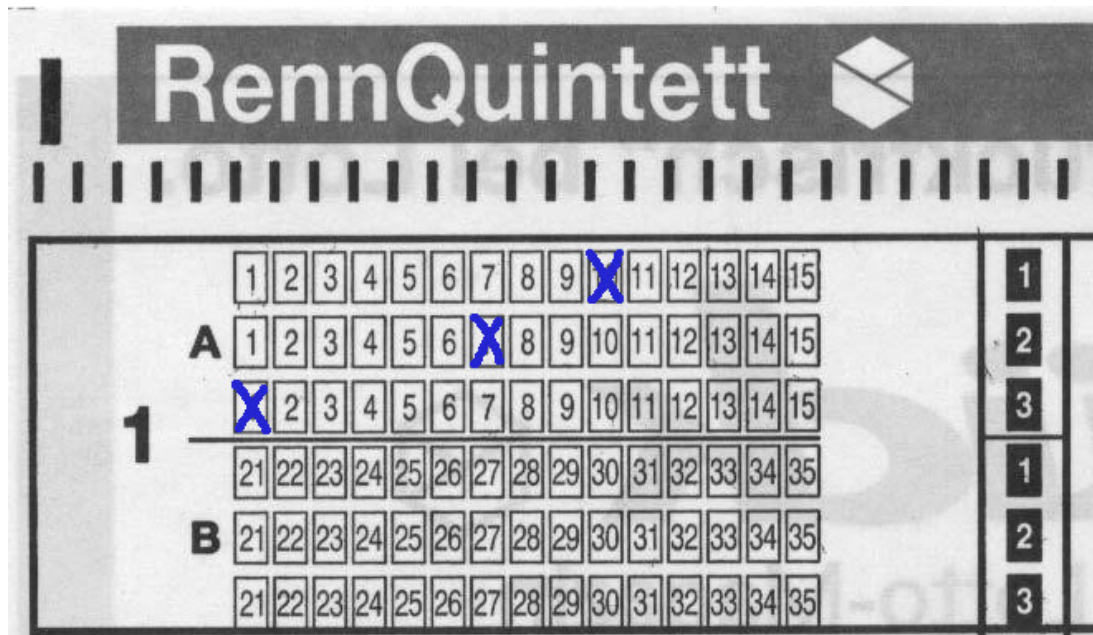
1  
2  
3

# Ergebnisräume

## Mächtigkeit des Ergebnisraums

Beispiel: RennQuintett „2x3 aus 15“

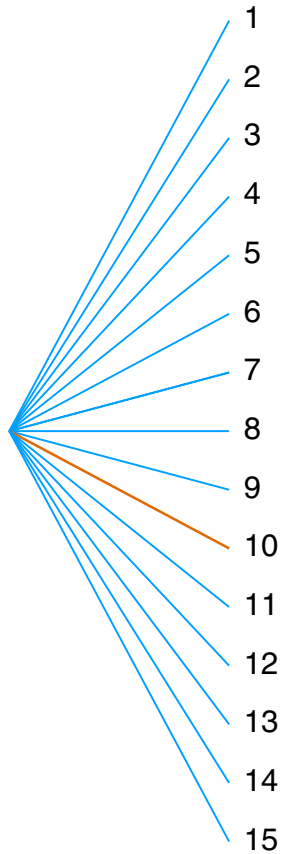
- ❑ **Aufbau:** Urne mit 15 nummerierten Kugeln.
- ❑ **Experiment:** Ziehung dreier Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen.
- ❑ Was ist die **Mächtigkeit**  $|\Omega|$  des Ergebnisraums  $\Omega$ ?





# Ergebnisräume

## Zählprinzip zur Bestimmung der Mächtigkeit

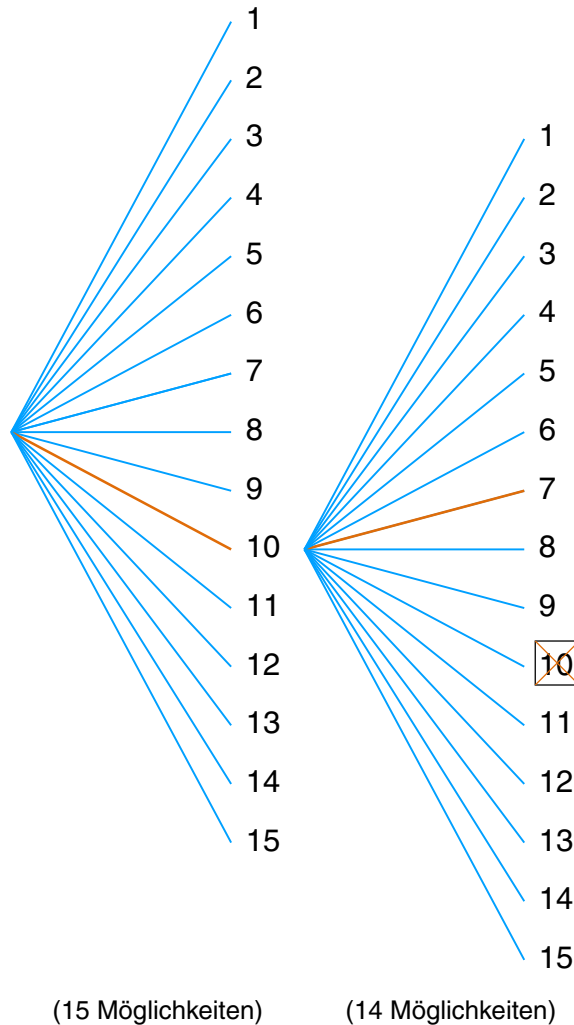


(15 Möglichkeiten)

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

# Ergebnisräume

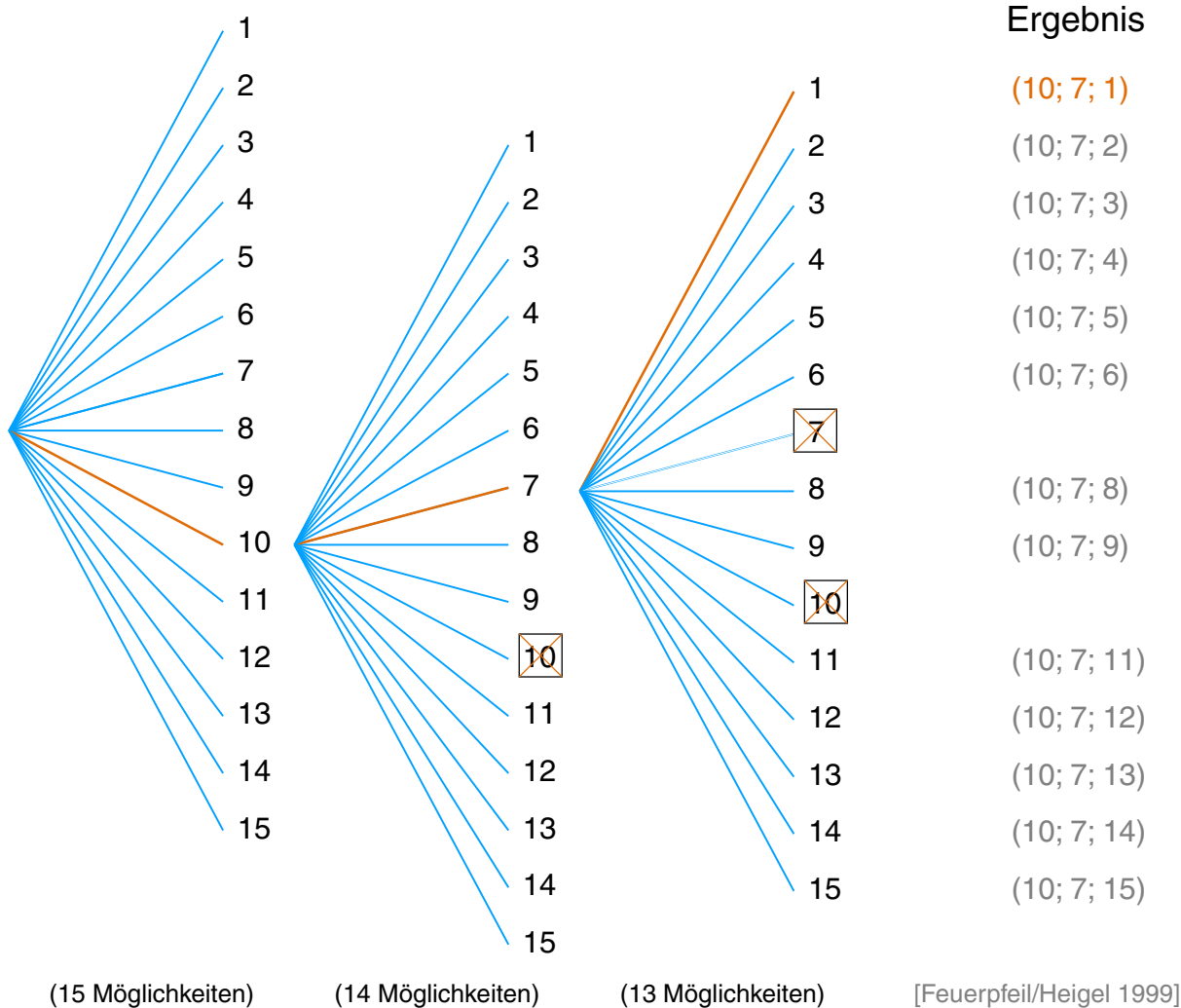
## Zählprinzip zur Bestimmung der Mächtigkeit



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

# Ergebnisräume

## Zählprinzip zur Bestimmung der Mächtigkeit



# Ergebnisräume

## Mächtigkeit des Ergebnisraums

Beispiel: RennQuintett „2x3 aus 15“

- Aufbau: Urne mit 15 nummerierten Kugeln.
- Experiment: Ziehung dreier Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen.
- Was ist die Mächtigkeit  $|\Omega|$  des Ergebnisraums  $\Omega$ ?
  
- 15 mögliche Ergebnisse in der ersten Stufe des Zufallsexperiments
- 14 mögliche Ergebnisse in der zweiten Stufe
- 13 mögliche Ergebnisse in der dritten Stufe
  
- $|\Omega| = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2,730$  Möglichkeiten.

# Ergebnisräume

## Mächtigkeit des Ergebnisraums

Beispiel: RennQuintett „2x3 aus 15“

- 15 Pferde treten im Trab- oder Galopprennen gegeneinander an.
- Wähle die drei ersten in der Reihenfolge ihres Zieleinlaufs.
- Wie viele Möglichkeiten drei Pferde auszuwählen gibt es?

- 15 Möglichkeiten, das erstplatzierte Pferd auszuwählen
- 14 Möglichkeiten, das zweitplatzierte Pferd auszuwählen
- 13 Möglichkeiten, das drittplatzierte Pferd auszuwählen

→  $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2,730$  Möglichkeiten.

# Ergebnisräume

## Definition 3 (Zählprinzip)

Gibt es bei einem  $n$ -Tupel für die Besetzung

der ersten Stelle  $k_1$  Möglichkeiten,  
der zweiten Stelle  $k_2$  Möglichkeiten,  
 $\vdots$   
die  $n$ -te Stelle  $k_n$  Möglichkeiten,

dann gibt es insgesamt  $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$  verschiedene solche  $n$ -Tupel.

# Ergebnisräume

## Definition 3 (Zählprinzip)

Gibt es bei einem  $n$ -Tupel für die Besetzung

der ersten Stelle  $k_1$  Möglichkeiten,  
der zweiten Stelle  $k_2$  Möglichkeiten,  
 $\vdots$   
die  $n$ -te Stelle  $k_n$  Möglichkeiten,

dann gibt es insgesamt  $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$  verschiedene solche  $n$ -Tupel.

Bemerkungen:

- Jedes  $n$ -Tupel entspricht einem Pfad im Baumdiagramm eines entsprechenden mehrstufigen Zufallsexperiments.
- Es gibt also  $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$  Pfade ( $k_1$  Verzweigungen in der ersten Stufe, usw.).
- Die Mächtigkeit des Ergebnisraums des Zufallsexperiments ist

$$|\Omega| = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n.$$