Kapitel PTS:II

II. Wahrscheinlichkeitsbegriff

- Zufallsexperimente
- Ergebnisräume
- Ereignisräume
- Relative Häufigkeit
- Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff
- Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Ziel: Mathematische Modellierung des Zufalls

Schritt 1: Beschreibung zufälliger Vorgänge als Zufallsexperiment

Schritt 2: Zusammenfassung interessierender Ausgänge zum Ergebnisraum Ω

Schritt 3: Identifikation interessierender Ereignisse im Ergebnisraum

Schritt 4: Bestimmung der Häufigkeit des Ereigniseintritts

Schritt 5: Statistische Wahrscheinlichkeit $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeitsbegriff

Schritt 6: Axiomatisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Was ist Wahrscheinlichkeit?

- Klassische Definition

  Die Ergebnisse eines Zufallsexperiments werden als gleich wahrscheinlich angenommen, wenn keine anders lautende Evidenz vorliegt oder die Symmetrie seines Aufbaus dies (unter idealisierten Bedingungen) nahelegt.

  Glücksspiele

- Frequentismus

  Die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse eines Zufallsexperiments sind die „Grenzwerte“ ihrer relativen Häufigkeiten für unendlich viele Wiederholungen.

  Beispiel: Physikalische Prozesse, wie Atomzerfall oder

- Subjektivismus

  Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist ein Maß für eine vernünftige Erwartung seines Eintretens nach aktuellem Stand des Wissens oder für den „Grad persönlicher Überzeugung“ über sein früheres Eingetretensein.

  Beispiel: Gab es früher Leben auf dem Mars? Ich wette 10,000 Euro, dass in den nächsten 10 Jahren jemand zum Mars reisen wird.

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

- Die Laplace-Wahrscheinlichkeit war im gesamten 19. Jahrhundert die Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Ihre Definition wurde als unzureichend erkannt

- In der Anwendung nützlich, aber logische Grundlagen nicht geklärt

- Trifft Laplace-Annahme nicht zu (Gleichwahrscheinlichkeit), so erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als dessen relative Häufigkeit bei vielen Versuchen (statistische Wahrscheinlichkeit)

- Die Wahrscheinlichkeit wird aber nicht bestimmt, sondern nur geschätzt

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Statistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

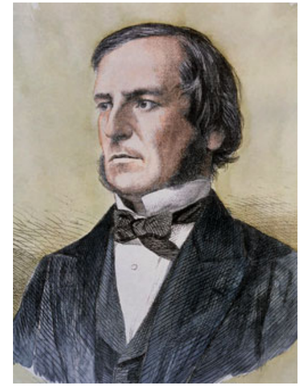
- Idee: unter Zuhilfenahme des empirischen Gesetzes der großen Zahlen die mathematische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als (fiktiven) Grenzwert der relativen Häufigkeit festsetzen
- Problem: Existenz des Grenzwertes nicht wie in der Infinitesimalrechnung nachweisbar
- Idee von Richard von Mises (1883–1953, österreichischer Mathematiker): Existenz des Grenzwertes der relativen Häufigkeit postulieren und so den statistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff begründen
- Aufbau einer solchen Theorie stieß aber auf logische Schwierigkeiten

- Mit bekannten mathematischen Begriffen wie dem Grenzwert ließ sich ein mathematischer Wahrscheinlichkeitsbegriff nicht so einfach definieren

- David Hilbert (1862–1943, deutscher Mathematiker) zählte die Präzisierung der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu den wesentlichen mathematischen Problemen um 1900
- Schlug einen axiomatischen Weg vor (ähnlich zu seinem Erfolg bei der Geometrie)

Bemerkungen:

- Schon vor Hilbert hatte bspw. George Boole (1815–1864, englischer Logiker) einen logisch konsistenteren Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung gefordert. Seine Forderungen zeigten aber praktisch keine Wirkung bei den Mitte des 19. Jahrhunderts wenigen mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigten Mathematikern.



Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomatische Definition eines mathematischen Begriffs

- Moderne Mathematik: Begriffe, die nicht auf schon bekannte Begriffe zurückgeführt werden können, werden durch ihre wesentlichen Eigenschaften umschrieben
- Dabei ist die Frage nach den strukturellen Eigenschaften wichtig
- Diese Eigenschaften können meist nicht mit Mitteln der Mathematik bewiesen werden, sondern werden als gültig *angenommen*

- Grundlegend erscheinende Eigenschaften: *Axiome*
- Beispiel des Axiomatisierens: Geometrie

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomatische Definition eines mathematischen Begriffs

Beispiel (Geometrie)

- Zeichenbare Gebilde: Punkte und Geraden
- Umgang damit führt zu empirisch feststellbaren Eigenschaften und Beziehungen
- Von „empirischer Geometrie“ zur mathematischen Theorie, um auf logischem (nicht empirischem) Weg zu Aussagen zu kommen

- Zwei Schritte notwendig:
  - Existenz entsprechender *mathematischer Begriffe* wie Punkt und Gerade muss *postuliert* werden
  - Empirisch festgestellte *grundlegend erscheinende Eigenschaften und Beziehungen* für die mathematischen Begriffe werden in idealisierter Form *als gültig postuliert*

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomatische Definition eines mathematischen Begriffs

Beispiel (Geometrie, ctd.)

- Welche Eigenschaften und Beziehungen zwischen konkreten Punkten und Geraden grundlegend sind, kann nur nach längerer Beschäftigung mit der Geometrie entschieden werden
- Formulieren von Axiomen ist also nicht der Ausgangspunkt der Entwicklung einer mathematischen Theorie, sondern das Resultat des Sammelns von Tatsachen und der Analyse von inneren Zusammenhängen

- Erster Versuch einer Axiomatisierung der Geometrie durch Euklid (300 v. Chr., griechischer Mathematiker)
- Stützte sich auf Erfahrungen der alten empirischen Geomtrie

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomatische Definition eines mathematischen Begriffs

Beispiel (Geometrie, ctd.)

- Erster Versuch einer Axiomatisierung der Geometrie durch Euklid (300 v. Chr., griechischer Mathematiker)
- Formulierte möglichst einfache und unmittelbar einsichtige Eigenschaften von Punkt und Gerade als Axiome
- Aus Axiomen dann mit logischen Schlüssen eine Theorie zur Beschreibung geometrischer Sachverhalte entwickelt
- Anwendbarkeit eines Axiomensystems auf die Wirklichkeit erweist sich, wenn die aufgebaute Theorie, den axiomatisierten Teil der Wirklichkeit gut beschreibt
- Aussagen der mathematischen Theorie müssen Sachverhalte der Wirklichkeit entsprechen
- Axiomatisierung der Geometrie durch Euklid hatte Mängel; Hilbert gelang 1899 eine verbesserte Formalisierung mit 21 Axiomen

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow

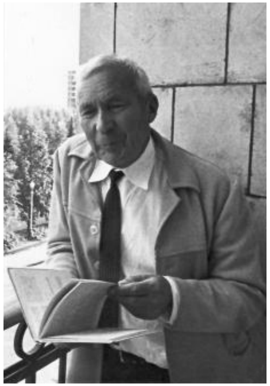
- Axiomatisieren soll analog zur Geometrie zu einem mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriff führen
- Also zwei Schritte:
  - Es muss die Existenz einer Funktion *postuliert* werden, die jedem Ereignis eines Ereignisraums eindeutig eine Wahrscheinlichkeit zuordnet.
  - Die grundlegenden Eigenschaften dieser Funktion müssen als geeignete *Axiome formuliert* werden.

- Wegen des bereits bekannten empirischen Gesetzes der großen Zahlen kommen als Axiome Eigenschaften der relativen Häufigkeit in Frage.
- Problem: Welche Eigenschaften sind die wesentlichen?

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow

- Axiomatischer Weg für die Wahrscheinlichkeitsrechung war mühsam
- Durchbruch erst im Jahre 1933
- Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow (1903–1987, sowjetischer Mathematiker) schuf ein Axiomensystem für die Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Er erkannte, welche Eigenschaften der relativen Häufigkeit genügen, um eine mathematische Theorie zu zufälligem Geschehen aufzubauen



Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow

- Axiomatischer Weg für die Wahrscheinlichkeitsrechung war mühsam
- Durchbruch erst im Jahre 1933
- Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow (1903–1987, sowjetischer Mathematiker) schuf ein Axiomensystem für die Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Er erkannte, welche Eigenschaften der relativen Häufigkeit genügen, um eine mathematische Theorie zu zufälligem Geschehen aufzubauen

- Wesentliche Eigenschaften der relativen Häufigkeit nach Kolmogorow

$$
\begin{aligned}
h_n(A) &\geq 0 \\
h_n(\Omega) &= 1 \\
A \cap B &= \emptyset \quad \Rightarrow \quad h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B)
\end{aligned}
$$

- Er postulierte daher anschließend die Existenz eines mathematischen Wahrscheinlichkeitsmaßes mit diesen drei Eigenschaften

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow: Wahrscheinlichkeitsmaß

Definition 12 (Wahrscheinlichkeitsmaß)

Eine Funktion $P : A \mapsto P(A)$, die jedem Ereignis $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ eine reelle Zahl $P(A)$ zuordnet, heißt Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt (Axiomensystem von Kolmogorow):

Axiom I:	$P(A) \geq 0$	
Axiom II:	$P(\Omega) = 1$	
Axiom III:	$A \cap B = \emptyset$	$\Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Bemerkungen:

- $P(A)$ wird auch kurz als die *Wahrscheinlichkeit* von A bezeichnet.
- Allgemein ist eine Funktion, die diesen drei Axiomen genügt, ein *nicht-negatives* (Axiom I), *normiertes* (Axiom II) und *additives* (Axiom III) Maß.
  - Längenmaß der Teilstrecken der Einheitsstrecke oder das Flächenmaß der Punktmengen des Einheitsquadrats oder eines Rechtecks mit dem Inhalt 1 sind Beispiele.
  - Das Wahrscheinlichkeitsmaß eines Ereignisses lässt sich daher als geeignete Teilstrecke der Einheitsstrecke oder als geeignete Teilfläche eines Rechtecks mit Inhalt 1 darstellen.
- Man erhält also ein Flächenmodell für das Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn man den Ergebnisraum Ω als Rechteck oder Quadrat mit Flächeninhalt 1 darstellt und die Ereignisse als Teilflächen, deren Maßzahlen den Wahrscheinlichkeiten der Ereigisse entsprechen. (vgl. Venn-Diagramm zur Additionsregel, Folie DS:III-14)

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow: Wahrscheinlichkeitsraum

- Konsktruktion eines mathematischen Modells zur Beschreibung eines zufälligen Geschehens:
  1. Interessierende Ergebnisse im Ergebnisraum Ω zusammenfassen
  2. Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zuordnen, die die drei Axiome erfüllen

Andere Zuordnungen machen keinen Sinn mehr!

Laplace-Annahme beispielsweise als eine Möglichkeit . . .

- Axiomensystem definiert dabei exakt, welche Zuordnungen von Wahrscheinlichkeiten zu Ereignissen legitim sind
- Axiomensystem sagt aber nichts darüber aus, welche Zuordnungen im Hinblick auf Wirklichkeitsabbildung sinnvoll sind!

- Beschreibung eines realen Experiments im Modell also durch passende Angabe eines Paares (Ω, P), des Wahrscheinlichkeitsraums

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow: Wahrscheinlichkeitsraum

- Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) soll die Wirklichkeit eines Zufallsexperiments so widerspiegeln, dass aus den deduktiven Ergebnissen auf reale Erscheinungen und Gesetzmäßigkeiten geschlossen werden kann
- (Ω, P) entsteht aber durch Abstraktion von der Wirklichkeit, kann diese also nicht vollständig erfassen

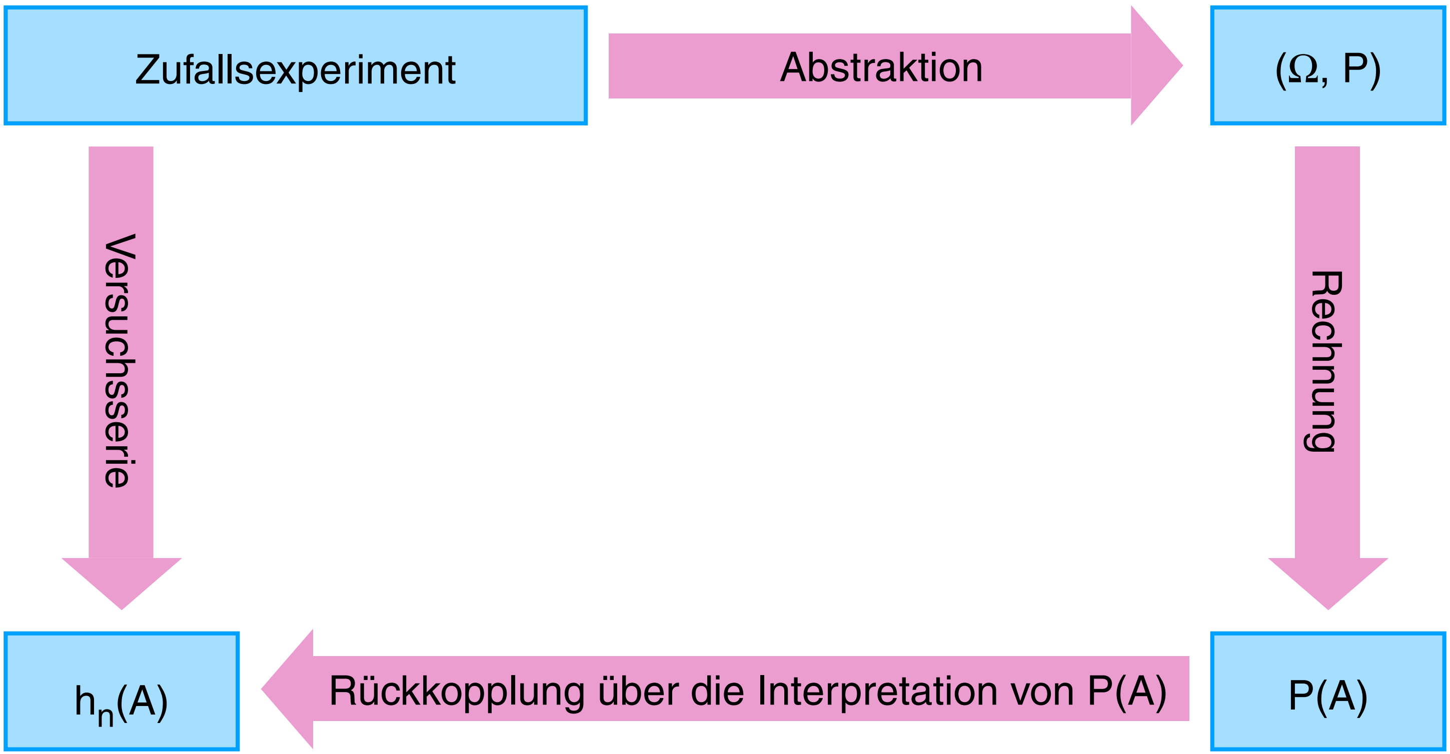
- Mathematisches Modell (Ω, P) eignet sich dann zur Beschreibung zufälliger Geschehen, wenn die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse mit den relativen Häufigkeiten der entsprechenden wirklichen Ereignisse bei hinreichend vielen Versuchen / Beobachtungen hinreichend genau übereinstimmen (Interpretationsregel für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses)
- Gegenüberstellung relativer Häufigkeiten mit aus dem Modell abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten kann das Vertrauen in die Richtigkeit des Modells stärken oder schwächen (induktive Methode)

- Modelle können nur geprüft, aber nicht bewiesen werden!

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow: Wahrscheinlichkeitsraum

Zusammenhang Wirklichkeit – Modell



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow: Wahrscheinlichkeitsraum

Zusammenhang Wirklichkeit – Modell am Beispiel (Lotto „6 aus 49“)

- Interessiert $A =$ „Gerade Zahl fällt ins Glasrohr“ (ohne Beachtung evtl. schon vorhandener Ergebnisse), dann liegt nahe

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1,2,\ldots,49\} \\ A &= \{2,4,\ldots,48\} \end{aligned}$$

- $P(A)$ nach Anteilsregel mit Laplace-Annahme $= \frac{24}{49} \approx 0{,}4898$

- Bei 1000 Ausspielungen (also 6000 gezogenen Zahlen) wurde laut Lottogesellschaft 2949-mal eine gerade Zahl gezogen, also

$$h_{6000}(A) = \frac{2949}{6000} = 0{,}4915 \approx P(A)$$

- Lottostatistik zeigt auch bei anderen Ereignissen nur geringfügige Abweichungen zu mit der Anteilsregel berechneten Wahrscheinlichkeiten
- Modell passt also für den Beobachtungsbereich und ermöglicht damit auch legitime Aussagen über Ereignisse, für die statistisch gar keine relative Häufigkeit erfasst wurde

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow: Folgerungen

- Axiome von Kolmogorow als Grundlage zum Ableiten weiterer Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsmaßen
- Aus $\Omega = A \cup \bar{A}$ folgt mit den Axiomen II und III

$$P(\Omega) = 1 = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

Satz 13

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten eines Ereignisses A und seines Gegenereignisses $\bar{A}$ ist gleich 1:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Bemerkungen:

- Zusammenhang oft hilfreich, wenn sich das Gegenereignis leichter überblicken lässt (vgl. Laplace-Würfel-Ereignis B auf Folie DS:III-61)
- $P(\bar{A})$ heißt auch *Gegenwahrscheinlichkeit* zu $P(A)$

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow: Folgerungen

- Setzen wir in Satz 13 für A das sichere Ereignis Ω ein, so erhalten wir

Satz 14

Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses ist gleich 0:

$$P(\emptyset) = 0.$$

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow: Folgerungen

- Für zwei Ereignisse A und B gelte $A \subseteq B$.
- Dann lässt sich B in zwei unvereinbare Ereignisse zerlegen: $B = A \cup (\bar{A} \cap B)$.
- Nach Axiom III gilt $P(B) = P(A \cup (\bar{A} \cap B)) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$
- Nach Axiom I ist $P(\bar{A} \cap B) \geq 0$, so dass insgesamt $P(B) \geq P(A)$

Satz 15

Sind A und B Ereignisse mit $A \subseteq B$, so gilt das *Monotoniegesetz* des Wahrscheinlichkeitsmaßes

$$P(A) \leq P(B).$$

Bemerkung:

- Setzen wir $B = \Omega$, so gilt wegen Axiom I und II: $\quad 0 \leq P(A) \leq 1.$

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow: Folgerungen

- Mit Axiom III können wir das Wahrscheinlichkeitsmaß eines Ereignisses $A \cup B$ berechnen, wenn A und B unvereinbar sind
- Sind A und B aber beliebige Ereignisse, so gelten folgende Zerlegungen

$$\begin{aligned} A \cup B &= A \cup (\bar{A} \cap B) \\ B &= (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \end{aligned}$$

- Anwenden von Axiom III liefert

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cup (\bar{A} \cap B)) = P(A) + P(\bar{A} \cap B) \\ P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \end{aligned}$$

- Daraus folgt $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Satz 16

Sind A und B beliebige Ereignisse, so gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Bemerkungen:

- Einprägen der Regel am besten am Flächenmodell (vgl. Folie DS:III-14 für die relativen Häufigkeiten)
  - Inhalt der Fläche $A \cup B$ ergibt sich, wenn man von der Summe der Inhalte von A und B den Inhalt von $A \cap B$ abzieht
- Sind A und B unvereinbar, so ist $P(A \cap B) = 0$ und man bekommt Axiom III

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow: Folgerungen

- Axiom III lässt sich auf m paarweise unvereinbare Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_m$ ausdehnen

Satz 17

Sind $A_1, A_2, \ldots, A_m$ paarweise unvereinbar, so gilt die *Additivität* der Wahrscheinlichkeit

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_m).$$

Bemerkung:

- Diese Regel bezeichnet man als *Additionsregel*

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow: Unvollständigkeit

- Die Axiome enthalten keine Vorschrift zur eindeutigen Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ereignisses
  - Man sagt: Das Axiomensystem ist *unvollständig*
- Beispiel: Sei $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = \Omega$ eine Zerlegung von Ω
  - Jedem A_i soll eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden
  - Wegen Axiom I müssen die Wahrscheinlichkeiten alle nicht-negativ sein und wegen der Additionsregel gilt $P(\Omega) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_m)$
  - Mit Axiom I und II muss daher gelten

$$\begin{aligned} P(A_i) &\geq 0 \quad \text{für } i = 1{,}2, \ldots ,m \\ P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_m) &= 1 \end{aligned}$$

  - Die Wahrscheinlichkeit 1 des sicheren Ereignisses wird also auf die A_i *verteilt* und man nennt daher Wahrscheinlichkeitsmaße auch Wahrscheinlichkeitsverteilungen oder kurz *Verteilungen*
  - Zu einer Zerlegung von Ω gibt es aber unendlich viele Verteilungen, die die Axiome erfüllen!

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow: Unvollständigkeit

- Unvollständigkeit liegt nicht an einer ungünstigen Axiomenwahl, sondern liegt am Wesen der Dinge
  - Es sollen nur strukturelle Eigenschaften des mathematischen Wahrscheinlichkeitsmaßes festgelegt werden, um so die Anwendbarkeit auf beliebige Zufallsexperimente offen zu lassen
  - Welche Verteilung für ein konkretes Experiment „richtig“ ist, ist mathematisch nicht entscheidbar, sondern hängt von physikalischen Eigenschaften des Experiments ab

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Axiomensystem von Kolmogorow: Weitere Bemerkungen

- Im Gegensatz zu Definitionsversuchen von v. Mises, ist das empirische Gesetz der großen Zahlen nicht(!) im Axiomensystem enthalten – obwohl es doch aber quasi die auffälligste objektive Gesätzmäßigkeit zufälliger Ereignisse ist
  - Soll die aufgebaute mathematische Theorie zufälliges Geschehen zutreffend beschreiben, so muss diese offensichtliche Eigenschaft (und diese hat uns ja erst zum Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit geführt) ableitbar sein
  - . . . und sie ist es auch . . .

Kommt im späteren Abschnitt VIII (Gesetz der großen Zahlen),
wenn wir die notwendigen Hilfsmittel erarbeitet haben

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Beispiele für empirische Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel (Würfeln)

- $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ und mögliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
	$0{,}159$	$0{,}163$	$0{,}166$	$0{,}166$	$0{,}171$	$0{,}175$
	$0{,}080$	$0{,}140$	$0{,}150$	$0{,}140$	$0{,}150$	$0{,}340$

- Aus mathematischer Sicht ist keine dieser Verteilungen „besser“ als die anderen – Summe ist jeweils 1
- ABER:
  - Welche Verteilung modelliert einen geeichten Casino-Würfel?
  - Welche Verteilung modelliert einen „normalen“ Mensch-ärger-dich-nicht-Würfel?

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Beispiele für empirische Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel (Würfeln)

- $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ und mögliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
$P(\{\omega\})$	$\mathbf{\frac{1}{6}}$	$\mathbf{\frac{1}{6}}$	$\mathbf{\frac{1}{6}}$	$\mathbf{\frac{1}{6}}$	$\mathbf{\frac{1}{6}}$	$\mathbf{\frac{1}{6}}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
	$0{,}159$	$0{,}163$	$0{,}166$	$0{,}166$	$0{,}171$	$0{,}175$
	$0{,}080$	$0{,}140$	$0{,}150$	$0{,}140$	$0{,}150$	$0{,}340$

- Ein geeichter Casino-Würfel sollte mit der erste Verteilung modelliert werden
  - … und diese sollte hoffentlich auch empirisch beobachtet werden können ;-)

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Beispiele für empirische Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel (Würfeln)

- $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ und mögliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
	$0{,}159$	$0{,}163$	$0{,}166$	$0{,}166$	$0{,}171$	$0{,}175$
	$0{,}080$	$0{,}140$	$0{,}150$	$0{,}140$	$0{,}150$	$0{,}340$

- Ein normaler Mensch-ärger-dich-nicht-Würfel ist nicht einwandfrei geeicht, sondern vermutlich ein „Billigwürfel“ mit ausgefrästen Augen, die nicht mit Material gleicher Dichte aufgefüllt sind
  - 6 ist die leichteste Seite und ihr liegt die schwerste Seite gegenüber
  - Stochastisches Modell sollte leichtere Seiten wahrscheinlicher als gegenüberliegende schwere machen (3 und 4 ungefähr gleich schwer)

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Beispiele für empirische Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel (Würfeln)

- $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ und mögliche Wahrscheinlichkeitsverteilungen

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
$P(\{\omega\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
	0,159	0,163	0,166	0,166	0,171	0,175
	0,080	0,140	0,150	0,140	0,150	0,340

- Mit Stahlplatte oder Bleigewichten unter der 1 bekommt man einen ziemlich guten Mensch-ärger-dich-nicht-Würfel
  - Gefälschte Würfel (und Münzen, Karten, usw.) hat man schon immer genutzt, um dem Zufall „unter die Arme zu greifen“
  - Angegebene Verteilung ist die eines gefundenen gefälschten Würfels

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Beispiele für empirische Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel (Astragaloi oder Knöcheln)

- Älteste Glücksspielgegenstände waren „Würfel“ aus Tierknöcheln
- Vier Flächen mit 1 und 6, sowie 3 und 4 Punkten oder Strichen (keine 2 und 5!)
- Meist mit vier Astragaloi gespielt, die gleichzeitig geworfen wurden

- Wahrscheinlichkeitsverteilung bei gefundenem Schafsknöchel

	$\{1\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{6\}$
$P(\{\omega\})$	0,07	0,37	0,45	0,11

- 35 Wurfmuster bei 4 als ununterscheidbar angenommenen Astragaloi, deren Wahrscheinlichkeiten aus obiger Verteilung berechnet werden könnten
  - Bester Wurf: alle unterschiedlich
  - Schlechtester Wurf: alles Einsen (der „Hund“)

Axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff
Zusammenfassung

1. Axiomensystem von Kolmogorow führt zum mathematischen Begriff eines Wahrscheinlichkeitsmaßes

2. Erwartete Eigenschaften gelten für Wahrscheinlichkeitsmaße (Gegenwahrscheinlichkeit, Monotonie, Additivität, . . .)

3. Statistisches Gesetz der großen Zahlen ist nicht explizit Axiom, jedoch ableitbar (kommt später)

4. Modellbildung zu einem Zufallsexperiment durch Angabe des Wahrscheinlichkeitsraums (Ω, P) kann nur geprüft, nicht aber bewiesen werden

5. Vergleich mit empirischen Wahrscheinlichkeiten kann Vertrauen in Modellbildung sichern