Kapitel PTS:VI

VI. Binomialverteilung

- ❑ Bernoulli-Experimente
- ❑ Bernoulli-Kette
- ❑ Bernoulli'sche Formel

Die Bernoulli'sche Formel

Satz 3 (Bernoulli'sche Formel)

Hat ein Bernoulli-Experiment die Trefferwahrscheinlichkeit $p \in \,]0;1[$ und Nietenwahrscheinlichkeit $q = 1 - p$, dann ist die Wahrscheinlichkeit $B(n;p;k)$ für k Treffer in einer entsprechenden Bernoulli-Kette der Länge n gegeben durch

$$B(n;p;k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad (k \in \{0;1;\ldots;n\}) .$$

Die Bernoulli'sche Formel

Satz 3 (Bernoulli'sche Formel)

Hat ein Bernoulli-Experiment die Trefferwahrscheinlichkeit $p \in]0;1[$ und Nietenwahrscheinlichkeit $q = 1 - p$, dann ist die Wahrscheinlichkeit $B(n;p;k)$ für k Treffer in einer entsprechenden Bernoulli-Kette der Länge n gegeben durch

$$B(n;p;k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad (k \in \{0;1;\ldots;n\}) \; .$$

Herleitung:

- Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „k Treffer gefolgt von $(n-k)$ Nieten":
  Bzw. analog „$(n-k)$ Nieten gefolgt von k Treffern".

$$P(\{\underbrace{1;1;\ldots;1}_{k};\underbrace{0;0;\ldots;0}_{n-k}\}) \;=\; \underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{k} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-k} \;=\; p^k \cdot q^{n-k} \; ,$$

- Das Ereignis „k Treffer (in beliebiger Reihenfolge)" kann auf $\binom{n}{k}$ Weisen entstehen, wobei jede Reihenfolge mit Wahrscheinlichkeit $p^k \cdot q^{(n-k)}$ eintritt.
- Die Ereignisse „k Treffer in *bestimmter* Reihenfolge" sind unvereinbar.
- Nach Additionsregel ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „k Treffer" daher die Summe der $\binom{n}{k}$ gleichen Wahrscheinlichkeiten $p^k \cdot q^{(n-k)}$.

Bemerkungen:

- Sei X eine Zufallsgröße für die Zahl der Treffer, dann ist $B(n;p;k) = P(X = k)$.
- Die Wahrscheinlichkeit für „k Treffer“ in einer Bernoulli-Kette entspricht der für k Ziehungen mit Zurücklegen im Urnenmodell bei einem Anteil p von schwarzen Kugeln in der Urne.
- Bernoulli hat gezeigt, dass die Formel auch ihren Sinn behält, wenn $p \in \,]0;1[$ nicht rational ist, was das Urnenmodell nicht ermöglicht. Dies gelang mit der Ermittlung der Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Bilanz einer Bernoulli-Kette mit Parametern n und p „genau k Treffer“ lautet.
- Bernoullis Formel ist von zentraler Bedeutung für die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sie erschien 1713 in seinem Buch „Ars conjectandi“, 8 Jahre nach seinem Tod. Da es zu Bernoullis Zeiten noch keine Symbole wie $n!$ und $\binom{n}{k}$ gab, gab er seine Formel für den Fall von k Treffern und k' Nieten ($k + k' = n$) in der Kette an als:

  $$B(n;p;k) = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k + k')}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k'} \cdot p^k (1-p)^{k'} \; .$$

  Der Bruch ist Anzahl der Permutationen mit Wiederholungen von k Treffern und k' Nieten dar.
- Die Terme $B(n;p;k)$ tauchen auch als Glieder der Entwicklung des Binoms $(p+q)^n$ auf. Die große Bedeutung der Binomialformel

  $$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

  für die Wahrscheinlichkeitsrechnung liegt also darin, dass ihre $(n+1)$ Glieder die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Trefferzahl von 0 bis n in n Versuchen darstellen. Wenn $p + q = 1$, so hat auch diese Summe den Wert 1; drückt also die Tatsache aus, dass immer genau eine der $(n+1)$ Trefferzahlen eintreten muss.

Die Bernoulli'sche Formel

Satz 4 (Binomialverteilung)

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$B(n;p):\ k \mapsto B(n;p;k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (k \in \{0;1;\ldots;n\},\ p \in]0;1[)$$

heißt Binomialverteilung $B(n;p)$ mit den Parametern n und p.

Die Zufallsgröße X mit $P(X=k) = B(n;p;k)$ heißt binomialverteilt nach der Binomialverteilung $B(n;p)$.

Die Bernoulli'sche Formel

Satz 4 (Binomialverteilung)

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$B(n;p):\ k \mapsto B(n;p;k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (k \in \{0;1;\ldots;n\},\, p \in\,]0;1[)$$

heißt Binomialverteilung $B(n;p)$ mit den Parametern n und p.

Die Zufallsgröße X mit $P(X=k) = B(n;p;k)$ heißt binomialverteilt nach der Binomialverteilung $B(n;p)$.

Beispiel: $B(20;0{,}3;5)$

- Wahrscheinlichkeit für 5 Treffer in einer Kette von 20 Versuchen mit Trefferwahrscheinlichkeit $0{,}3$:

$$\begin{aligned} B(20;0{,}3;5) &= \binom{20}{5} \cdot 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^{15} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^{15} \\ &\approx 0{,}179 \end{aligned}$$

Die Bernoulli'sche Formel

Satz 5 (Rekursionsformel)

Zwei aufeinander folgende Wahrscheinlichkeiten $B(n;p;k)$ und $B(n;p;k+1)$ genügen der Rekursionsformel

$$B(n;p;k+1) = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q} \cdot B(n;p;k)\ .$$

Die Bernoulli'sche Formel

Satz 5 (Rekursionsformel)

Zwei aufeinander folgende Wahrscheinlichkeiten $B(n;p;k)$ und $B(n;p;k+1)$ genügen der Rekursionsformel

$$B(n;p;k+1) = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q} \cdot B(n;p;k)\ .$$

Herleitung:

$$\begin{aligned}
\frac{B(n;p;k+1)}{B(n;p;k)} &= \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} q^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}} \\
&= \frac{n!k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!n!} \cdot \frac{p}{q} \\
&= \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q} \quad (k \in \{0;1;\ldots;n-1\})\ .
\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Die direkte Berechnung von $B(n;p)$-Werten ist ohne Rechner mühsam. Mit Hilfe der Rekursionsformel lässt sich bei Kenntnis von $B(n;p;k)$ (zum Beispiel $B(n;p;0)$) der Wert für $B(n;p;k+1)$ leicht bestimmen. Aus dem Vorgänger kann bequem der Nachfolger oder aus dem Nachfolger der Vorgänger berechnet werden.

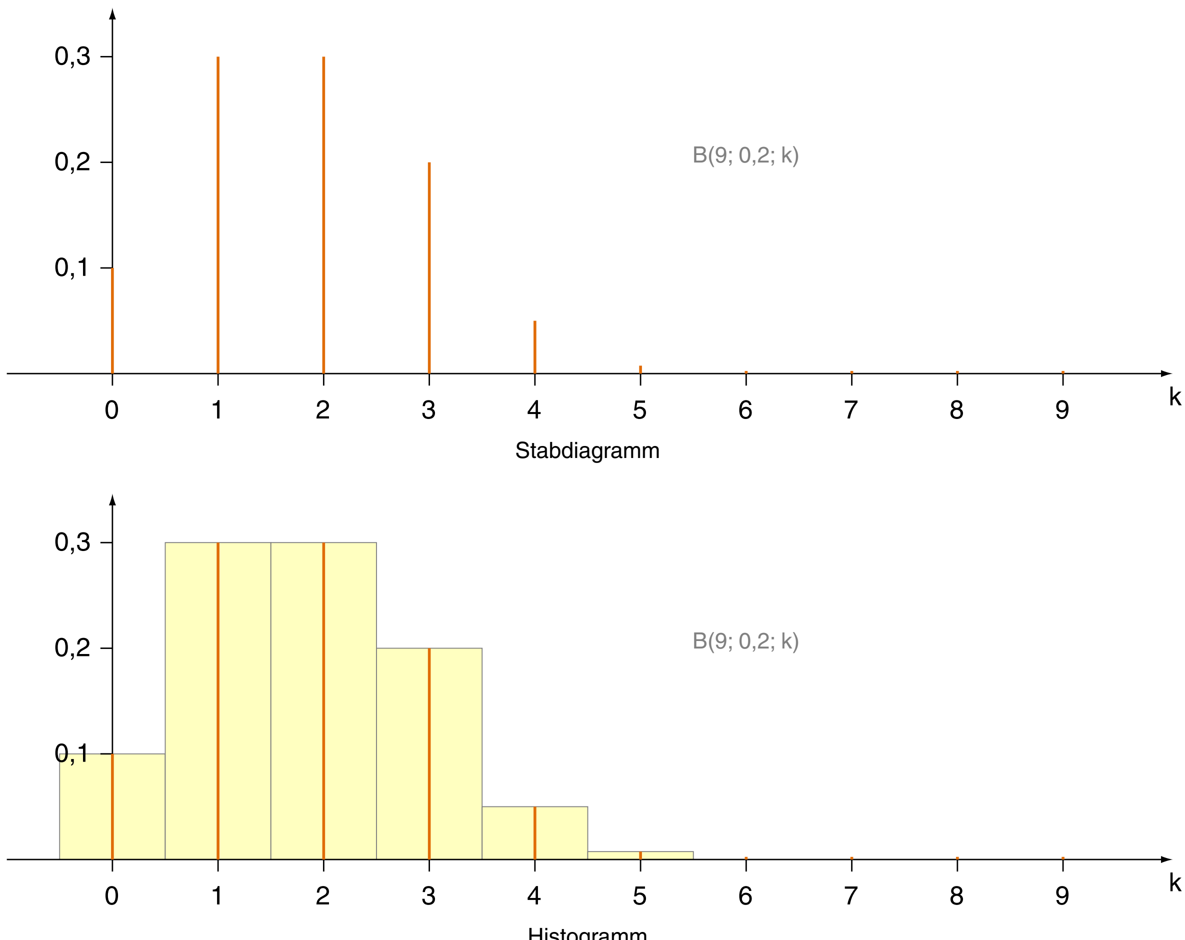
Die Bernoulli'sche Formel

Beispiel: $B(9; 0{,}2)$

Rekursive Entwicklung von $B(9; 0{,}2)$ anhand des Startwerts $B(9; 0{,}2; 0) = 0{,}8^9$:

Zum Nachrechnen mit dem Taschenrechner. Problem: Rechenfehler pflanzen sich fort.

k	$B(9; 0{,}2; k)$
0	0,13422
1	0,30199
2	0,30199
3	0,17616
4	0,06606
5	0,01652
6	0,00275
7	0,00029
8	0,00002
9	0,00000



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Die Bernoulli'sche Formel

Verteilungsfunktion

- Sei X eine $B(n;p)$-verteilte Zufallsgröße.
- Ist ihre Verteilungsfunktion bekannt, lassen sich Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen $X = k$ mit $k \in \{0; 1; \ldots; n\}$ einfach berechnen.
- Analog zu den Symbolen $B(n;p)$ und $B(n;p;k)$ wird die Verteilungsfunktion mit $F(n;p)$ bzw. der Funktionsterm mit $F(n;p;x)$ ($x \in \mathbf{R}$) bezeichnet.
- Anstelle von $F(n;p;x)$ wird oft das anschaulichere $P_p^n(X \leq x)$ verwendet.
  Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, kann man auch n und p weglassen.
- Um das händische Rechnen zu erleichtern, wurde die Verteilungsfunktion

$$F(n;p) : x \mapsto P_p^n(X \leq x) = \sum_{i \leq x} B(n;p;i)$$

  für spezielle Parameter n und p und ganzzahlige x von 0 bis n vorberechnet.

Die Bernoulli'sche Formel

Verteilungsfunktion

- Sei X die Anzahl der Treffer und Y die Anzahl der Nieten in einer Bernoulli-Kette mit Parametern n und p ($q = 1 - p$), dann gilt:

$$\begin{aligned} P_p^n(X = k) &= P_q^n(Y = n - k) \\ P_p^n(X \leq k) &= P_q^n(Y \geq n - k) \\ P_p^n(k \leq X \leq m) &= P_q^n(n - m \leq Y \leq n - k) \end{aligned}$$

- Ereignisse mit vorgegebenen Trefferzahlen können durch Ereignisse mit entsprechenden Nietenzahlen ersetzt werden und umgekehrt

- Die Vorberechnung von $F(n; p)$ konnte daher auf $p \in \,]0; \frac{1}{2}[$ beschränkt werden.

Die Bernoulli'sche Formel

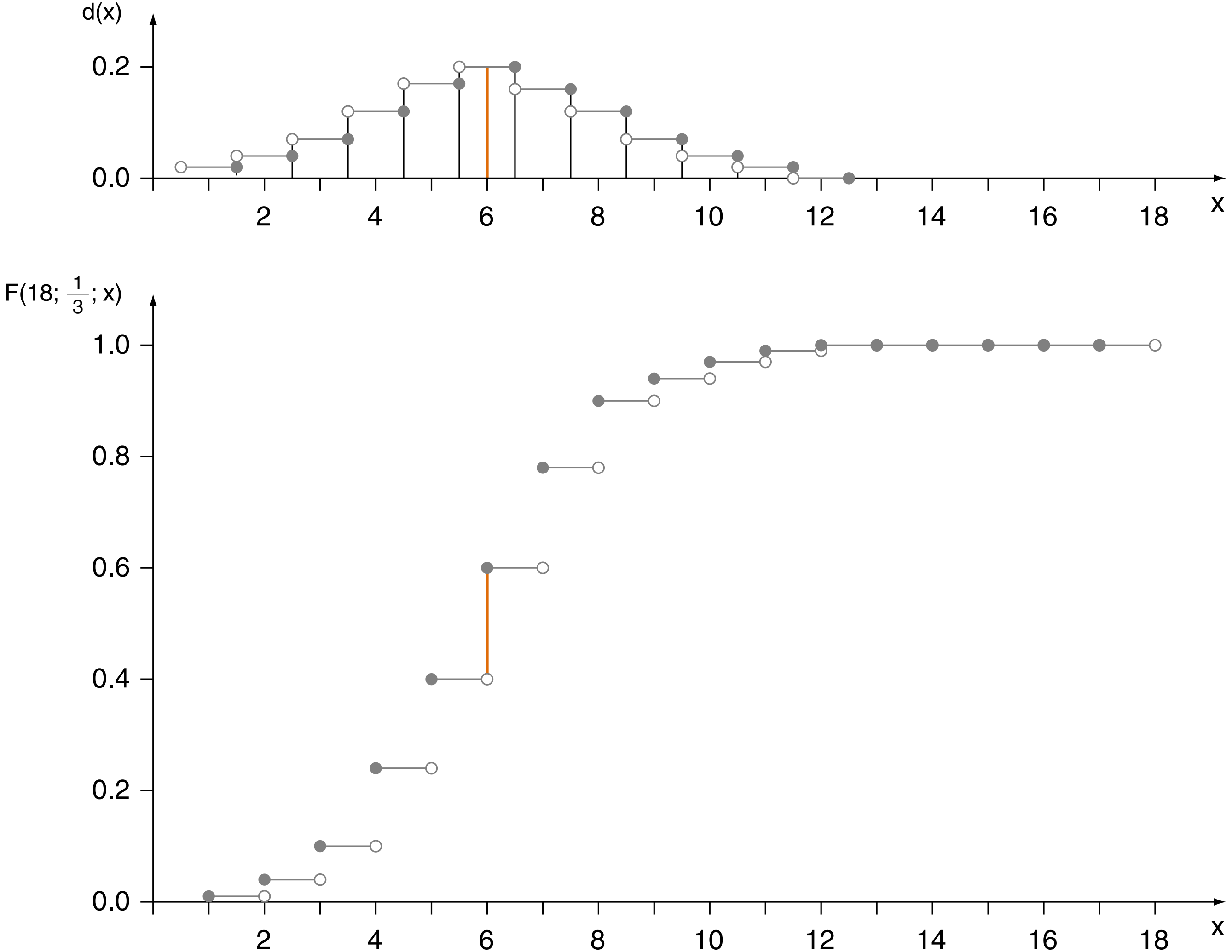
Beispiel: $F(10; 0{,}4; x)$

- Sei X die Anzahl der Treffer und Y die der Nieten in einer Bernoulli-Kette der Länge 10 mit Trefferwahrscheinlichkeit $0{,}4$.
- In Tabellen mit vorberechneten Werten für Binomialverteilungen findet man die $P_{0,4}^{10}(X \le k)$-Werte und kann damit rechnen, etwa:

$$
\begin{aligned}
P_{0,4}^{10}(X = 5) &= P_{0,4}^{10}(X \le 5) - P_{0,4}^{10}(X \le 4) \\
&\overset{\text{Ablesen}}{=} 0{,}83376 - 0{,}63310 \;=\; 0{,}20066\ , \\
P_{0,4}^{10}(X > 5) &= 1 - P_{0,4}^{10}(X \le 5) \\
&\overset{\text{Ablesen}}{=} 1 - 0{,}83376 \;=\; 0{,}16624\ , \\
P_{0,6}^{10}(Y \le 3) &= P_{0,4}^{10}(X \ge 7) = 1 - P_{0,4}^{10}(X \le 6) \\
&\overset{\text{Ablesen}}{=} 1 - 0{,}94524 \;=\; 0{,}05476\ , \\
P_{0,6}^{10}(1 \le Y \le 5) &= P_{0,4}^{10}(5 \le X \le 9) = P_{0,4}^{10}(X \le 9) - P_{0,4}^{10}(X \le 4) \\
&\overset{\text{Ablesen}}{=} 0{,}99990 - 0{,}63310 \;=\; 0{,}36680\ .
\end{aligned}
$$

Die Bernoulli'sche Formel

Beispiel: Dichte- und Verteilungsfunktion zu $B(18; \frac{1}{3})$ (relevant für die Normalverteilung)



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Die Bernoulli'sche Formel

Beispiel: Zuverlässigkeit von Großanlagensicherheitssystemen

- Der Ausfall von Großanlagen (Kernkraftwerke, Produktionsstraßen, etc.) stellt ein Sicherheitsrisiko dar (GAU, Produktionsausfall, etc.).
- Fehlertolerante Regelsysteme sollen Störfälle frühzeitig erkennen und automatisiert Gegenmaßnahmen ergreifen, bspw. Abschaltung der Anlage.
- Diese Systeme bestehen oft aus mehreren unabhängigen Warngeräten in einer sogenannten „Voting"-Schaltung (Parallelschaltung).
- In 2-von-3-Schaltungen stimmen drei Geräte g_i ($i \in \{1; 2; 3\}$) per Mehrheitsentscheid über die Einleitung von Sicherheitsmaßnahmen ab.
  Abweichende Stimmen eines Geräts werden ignoriert.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gerät g_i während der Zeit zwischen zwei Wartungen funktionsfähig bleibt, sei p.
- In welchen Bereichen von p ist eine 2-von-3-Schaltung zuverlässiger als eine 1-von-1-Schaltung?

Die Bernoulli'sche Formel

Beispiel: Zuverlässigkeit von Großanlagensicherheitssystemen

- Sei Zufallsgröße X die Zahl der Geräte, die einen Störfall korrekt erkennen.
- Zuverlässigkeit 1-von-1-Schaltung:

  $z_1 = P(X = 1) = p$

- Zuverlässigkeit 2-von-3-Schaltung:

$$\begin{aligned} z_2 &= P(X \geq 2) \\ &= P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= \binom{3}{2} p^2 q + \binom{3}{3} p^3 \\ &= 3p^2(1-p) + p^3 \\ &= -2p^3 + 3p^2 \end{aligned}$$

Die Bernoulli'sche Formel

Beispiel: Zuverlässigkeit von Großanlagensicherheitssystemen

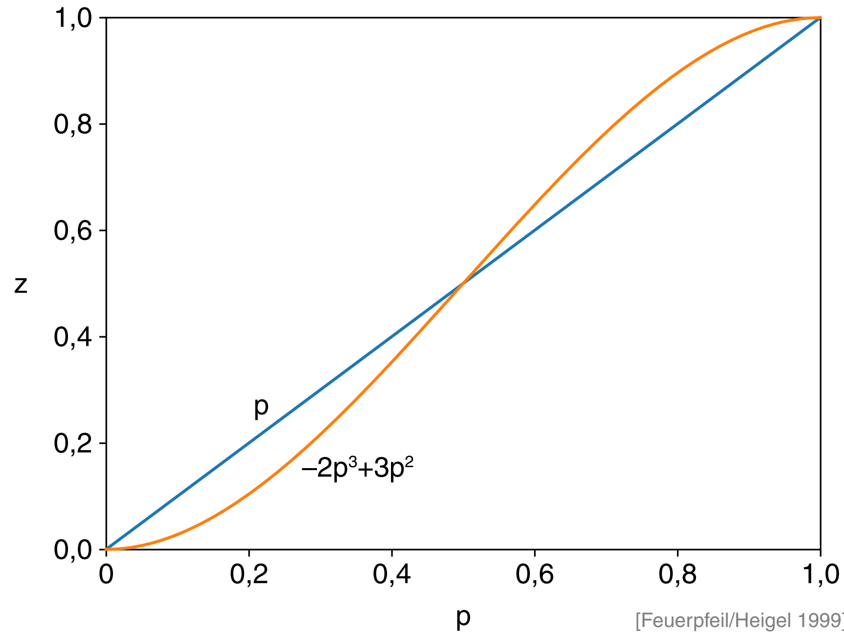
- Sei Zufallsgröße X die Zahl der Geräte, die einen Störfall korrekt erkennen.

- Zuverlässigkeit 1-von-1-Schaltung:

  $z_1 = P(X = 1) = p$

- Zuverlässigkeit 2-von-3-Schaltung:

$$\begin{aligned} z_2 &= P(X \geq 2) \\ &= P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= \binom{3}{2} p^2 q + \binom{3}{3} p^3 \\ &= 3p^2(1-p) + p^3 \\ &= -2p^3 + 3p^2 \end{aligned}$$



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Für $p > 0{,}5$ haben 2-von-3-Schaltungen eine höhere Zuverlässigkeit.

- Für $p = 0{,}79$ wird mit $\Delta(z_1, z_2) = 0{,}096$ der Zuverlässigkeitsgewinn maximal.
  In der Praxis wird die Funktionsfähigkeit p der Geräte individuell maximiert.

- Für $p = 0{,}85$ ergibt sich $z_2 = 0{,}94$; $p = 0{,}95$ ergibt $z_2 = 0{,}99$.

Die Bernoulli'sche Formel

Satz 6 (Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen)
Ist die Zufallsgröße X eine $B(n;p)$-verteilte Zufallsgröße, so gilt

$$E(X) = np\,, \qquad \text{Var}(X) = npq \qquad \text{und} \qquad \sigma(X) = \sqrt{npq}\,.$$

Die Bernoulli'sche Formel

Satz 6 (Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen)
Ist die Zufallsgröße X eine $B(n;p)$-verteilte Zufallsgröße, so gilt

$$E(X) = np\,, \qquad \text{Var}(X) = npq \qquad \text{und} \qquad \sigma(X) = \sqrt{npq}\,.$$

Herleitung:

- Sei X_i Zufallsgröße des i-ten Bernoulli-Experiments einer Bernoulli-Kette mit den Parametern n und p mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x_j	0	1
$P(X_i = x_j)$	q	p

- Dann entspricht Zufallsgröße $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ der Anzahl der Treffer.
- Da $E(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p$ ist, folgt mit dem Satz zum Erwartungswert einer Linearkombination von Zufallsgrößen:

$$E(X) = n \cdot p\,.$$

Bemerkungen:

- Mit dieser Formel lässt sich die oftmals umgangssprachlich verwendete Erklärung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs erst exakt begründen. So sagt man beispielsweise, die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Seite eines Laplace-Würfels sei $\frac{1}{6}$ und meint damit eigentlich, dass auf sechs Versuche *durchschnittlich* ein Treffer dieser Seite fällt.

- Georg Pólya (1887–1985, amerikanischer Mathematiker ungarischer Herkunft) zeigt in einem Witz, wie der Begriff des Erwartungswertes *nicht* aufzufassen ist. Er bezieht sich auf $n = 10$ und $p = \frac{1}{10}$:

  > Ein Arzt sagt zu einem Patienten: Sie haben eine schwere Krankheit. Von zehn Leuten, die sie bekommen, überlebt nur einer. Aber sie haben Glück, dass sie zu mir zur Behandlung gekommen sind. Meine letzten neun Patienten mit der Krankheit sind nämlich gestorben.

- Ein alternativer Ansatz, den Erwartungswert einer $B(n;p)$-verteilten Zufallsgröße X herzuleiten, geht von der Definition aus:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} i \cdot \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \; .$$

  Mit dem Zusammenhang

$$i \cdot \binom{n}{i} = n \cdot \binom{n-1}{i-1}$$

  lässt sich die Summe vereinfachen.

Die Bernoulli'sche Formel

Erwartungswert und Varianz

Herleitung: (Fortsetzung)

- Für die Varianz über die Werte Var(X_i) gilt mit $E(X_i) = p$:

$$\text{Var}(X_i) \;=\; (0-p)^2 \cdot q + (1-p)^2 \cdot p \;=\; pq\ .$$

- Da die X_i unabhängig sind folgt mit dem Satz zur Varianz einer Linearkombination von n unabhängigen Zufallsgrößen:

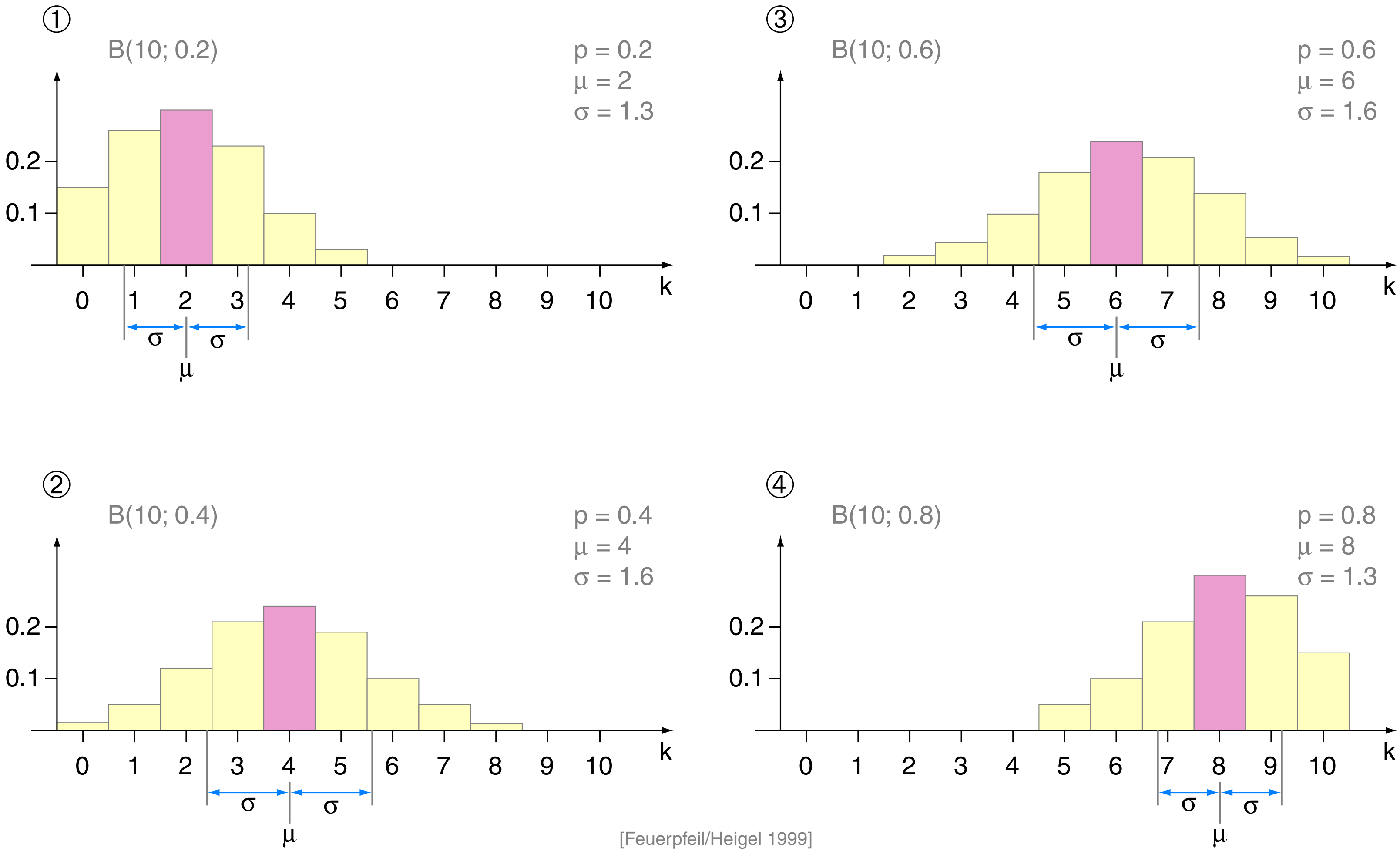
$$\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \ldots + \text{Var}(X_n) = n \cdot pq = np(1-p)\ .$$

- Definitionsgemäß folgt die Standardabweichung $\sigma(X) = \sqrt{npq}$ einer $B(n;p)$-verteilten Zufallsgröße X.

Die Bernoulli'sche Formel

Histogramme bei wachsenden Parametern

Beispiel: $B(10; p)$ für verschiedene p



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Bemerkungen:

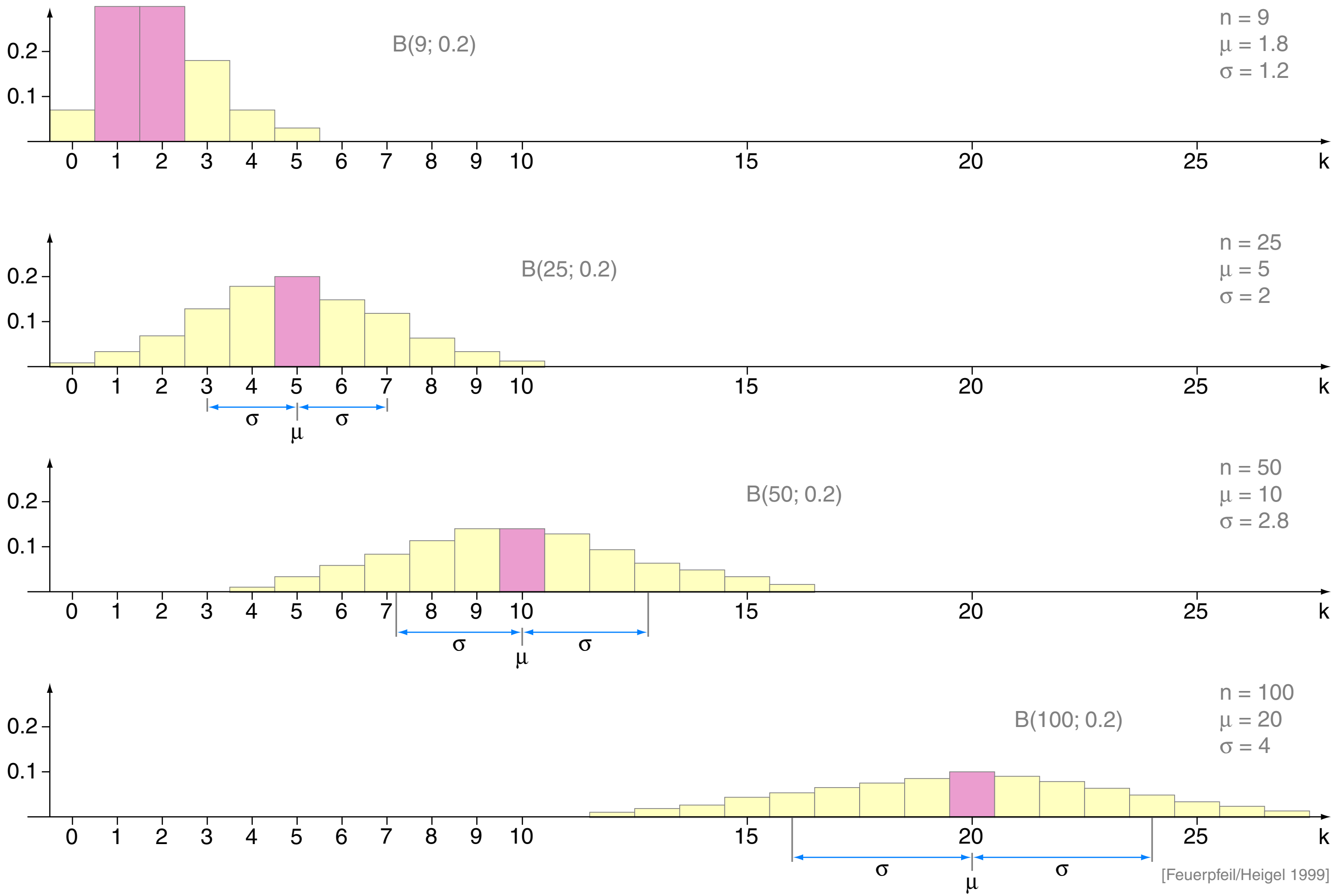
- Mit wachsendem p wandert das höchste Rechteck (größte Wahrscheinlichkeit) und mit ihm der Erwartungswert μ immer weiter nach rechts.

- Die Beziehung $B(10; p; k) = B(10; q; n - k)$ erkennt man in der Symmetrie von ① und ④ bzw. ② und ③ jeweils bezüglich einer gedachten Achse $k = 5$.

Die Bernoulli'sche Formel

Histogramme bei wachsenden Parametern

Beispiel: $B(n; 0{,}2)$ für verschiedene n



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Bemerkungen:

- Wegen $\frac{B(9;0{,}2;2)}{B(9;0{,}2;1)} = 1$ nimmt $B(9; 0{,}2; k)$ den größten Wert zweimal bei $k = 1$ und $k = 2$ an (Doppelmaximum).
- Mit wachsendem n wandert das höchste Rechteck (größte Wahrscheinlichkeit) und mit ihm der Erwartungswert μ immer weiter nach rechts.
- Obwohl sich die Histogramme in der Variabilität deutlich unterscheiden, haben sie in anderer Hinsicht eine ähnliche Form: sie sind für größere n fast symmetrisch und die Seiten fallen nach beiden Richtungen gleichmäßig ab.
- Um solche Histogramme auch dann noch miteinander vergleichen zu können, wenn wesentliche Teile „über den Blattrand hinausreichen“, liegt es nahe, sie zu standardisieren.
- Die Idee der Standardisierung ist auch, eine Gesamtstruktur zu finden, nach der sich die standardisierten Diagramme immer mehr ausrichten. Es wird noch gezeigt, dass die Histogramme tatsächlich für große n einem stabilen Muster zustreben. Diese Tatsache ist wichtig, denn sie bedeutet, dass sich Binomialverteilungen für große n einfacher und dennoch approximativ gut beschreiben lassen.

Die Bernoulli'sche Formel

Wahrscheinlichste Trefferzahl

Hinsichtlich der Trefferzahl k sind es vor allem zwei Fragen, die praktisch besonders interessant sind:

1. Welche Trefferzahl ist am wahrscheinlichsten?
   - Was ist der größte Wert von $B(n; p)$?
   - Unter welchen Bedingungen wird der größte Wert zweimal angenommen?
     (siehe $B(9; 0{,}2)$ im vorigen Beispiel)
2. Welche Wahrscheinlichkeit besteht für eine Trefferzahl, die von der wahrscheinlichsten höchstens innerhalb vorgegebener Grenzen abweicht?

Die Bernoulli'sche Formel

Wahrscheinlichste Trefferzahl

Hinsichtlich der Trefferzahl k sind es vor allem zwei Fragen, die praktisch besonders interessant sind:

1. Welche Trefferzahl ist am wahrscheinlichsten?
   - Was ist der größte Wert von $B(n; p)$?
   - Unter welchen Bedingungen wird der größte Wert zweimal angenommen? (siehe $B(9; 0{,}2)$ im vorigen Beispiel)
2. Welche Wahrscheinlichkeit besteht für eine Trefferzahl, die von der wahrscheinlichsten höchstens innerhalb vorgegebener Grenzen abweicht?

Beispiel: Großhändler

- Ein Großhändler versorgt 10 Geschäfte, die jeweils unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}4$ zum nächsten Tag eine Bestellung aufgeben.

1. Wie viele Bestellungen werden am wahrscheinlichsten aufgegeben?
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Anzahl der Bestellungen um höchstens eine vom wahrscheinlichsten Wert ab?

Die Bernoulli'sche Formel

Beispiel: Großhändler

Frage 1: Wie viele Bestellungen werden am wahrscheinlichsten aufgegeben?

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $k \mapsto B(n; p; k)$ ist keine differenzierbare Funktion, da sie nur für $k \in \{0; 1; \ldots; n\}$ definiert ist.
  Manuelles Ausrechnen der $B(n; p; k)$ ist mühsam.
- Bereiche, in denen der Quotient $\frac{B(n;p;k+1)}{B(n;p;k)}$ größer, gleich oder kleiner 1 sind geben Aufschluss über die Steigung der Funktion.
- Für $B(10; 0{,}4; k)$ ergibt sich gemäß Rekursionsformel (Satz 5):

$$q(k) = \frac{B(10; 0{,}4; k+1)}{B(10; 0{,}4; k)} = \frac{10-k}{k+1} \cdot \frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{10-k}{k+1} \cdot \frac{2}{3}\,.$$

Die Bernoulli'sche Formel

Beispiel: Großhändler

Frage 1: Wie viele Bestellungen werden am wahrscheinlichsten aufgegeben?

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $k \mapsto B(n;p;k)$ ist keine differenzierbare Funktion, da sie nur für $k \in \{0;1;\ldots;n\}$ definiert ist.
  Manuelles Ausrechnen der $B(n;p;k)$ ist mühsam.
- Bereiche, in denen der Quotient $\frac{B(n;p;k+1)}{B(n;p;k)}$ größer, gleich oder kleiner 1 sind geben Aufschluss über die Steigung der Funktion.
- Für $B(10;0{,}4;k)$ ergibt sich gemäß Rekursionsformel (Satz 5):

$$q(k) = \frac{B(10;0{,}4;k+1)}{B(10;0{,}4;k)} = \frac{10-k}{k+1} \cdot \frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{10-k}{k+1} \cdot \frac{2}{3}\,.$$

- $q(k) > 1 \quad \rightsquigarrow \quad k < 3{,}4$
  - Da $k+1>0$ ist keine Fallunterscheidung für die Ungleichung nötig:

$$2 \cdot (10-k) > 3 \cdot (k+1) \qquad \rightsquigarrow \qquad k < \frac{17}{5} = 3{,}4\,.$$

  - Für $k \leq 3$ ist $q(k) > 1$ und $B(10;0{,}4;4) > B(10;0{,}4;3)$
  - Die Wahrscheinlichkeiten wachsen von $k=0$ bis $k=4$.

Die Bernoulli'sche Formel

Beispiel: Großhändler

Frage 1: Wie viele Bestellungen werden am wahrscheinlichsten aufgegeben?

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $k \mapsto B(n;p;k)$ ist keine differenzierbare Funktion, da sie nur für $k \in \{0;1;\ldots;n\}$ definiert ist.
  Manuelles Ausrechnen der $B(n;p;k)$ ist mühsam.
- Bereiche, in denen der Quotient $\frac{B(n;p;k+1)}{B(n;p;k)}$ größer, gleich oder kleiner 1 sind geben Aufschluss über die Steigung der Funktion.
- Für $B(10;0{,}4;k)$ ergibt sich gemäß Rekursionsformel (Satz 5):

$$q(k) = \frac{B(10;0{,}4;k+1)}{B(10;0{,}4;k)} = \frac{10-k}{k+1} \cdot \frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{10-k}{k+1} \cdot \frac{2}{3}\,.$$

- $q(k) > 1 \quad \rightsquigarrow \quad k < 3{,}4$
- $q(k) = 1 \quad \rightsquigarrow \quad k = 3{,}4$
  - Da k ein nicht-ganzzahliger Wert ist, können zwei gleichwertige aufeinander folgende Wahrscheinlichkeiten nicht vorliegen.

Die Bernoulli’sche Formel

Beispiel: Großhändler

Frage 1: Wie viele Bestellungen werden am wahrscheinlichsten aufgegeben?

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $k \mapsto B(n;p;k)$ ist keine differenzierbare Funktion, da sie nur für $k \in \{0;1;\ldots;n\}$ definiert ist.
  Manuelles Ausrechnen der $B(n;p;k)$ ist mühsam.
- Bereiche, in denen der Quotient $\frac{B(n;p;k+1)}{B(n;p;k)}$ größer, gleich oder kleiner 1 sind geben Aufschluss über die Steigung der Funktion.
- Für $B(10;0{,}4;k)$ ergibt sich gemäß Rekursionsformel (Satz 5):

$$q(k) = \frac{B(10;0{,}4;k+1)}{B(10;0{,}4;k)} = \frac{10-k}{k+1} \cdot \frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{10-k}{k+1} \cdot \frac{2}{3}.$$

- $q(k) > 1 \quad \rightsquigarrow \quad k < 3{,}4$
- $q(k) = 1 \quad \rightsquigarrow \quad k = 3{,}4$
- $q(k) < 1 \quad \rightsquigarrow \quad k > 3{,}4$
  - Für $k \geq 4$ ist $q(k) < 1$ und $B(10;0{,}4;5) < B(10;0{,}4;4)$
  - Die Wahrscheinlichkeiten fallen von $k = 4$ bis $k = 10$ monoton.

Die Bernoulli'sche Formel

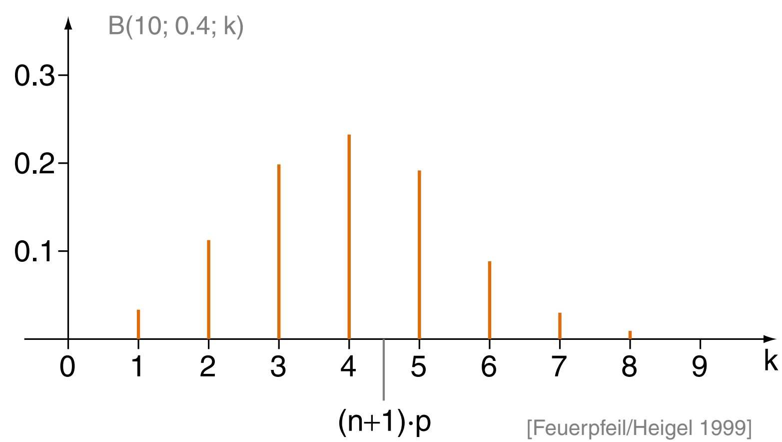
Beispiel: Großhändler

Frage 1: Wie viele Bestellungen werden am wahrscheinlichsten aufgegeben?

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $k \mapsto B(n;p;k)$ ist keine differenzierbare Funktion, da sie nur für $k \in \{0;1;\ldots;n\}$ definiert ist.
  Manuelles Ausrechnen der $B(n;p;k)$ ist mühsam.
- Bereiche, in denen der Quotient $\frac{B(n;p;k+1)}{B(n;p;k)}$ größer, gleich oder kleiner 1 sind geben Aufschluss über die Steigung der Funktion.
- Für $B(10;0{,}4;k)$ ergibt sich gemäß Rekursionsformel (Satz 5):

$$q(k) \;=\; \frac{B(10;0{,}4;k+1)}{B(10;0{,}4;k)} \;=\; \frac{10-k}{k+1}\cdot\frac{0{,}4}{0{,}6} \;=\; \frac{10-k}{k+1}\cdot\frac{2}{3}\,.$$

- $q(k) > 1 \quad \rightsquigarrow \quad k < 3{,}4$
- $q(k) = 1 \quad \rightsquigarrow \quad k = 3{,}4$
- $q(k) < 1 \quad \rightsquigarrow \quad k > 3{,}4$
- $B(10;0{,}4;4)$ ist maximal.
- Antwort: 4 Bestellungen.



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Die Bernoulli'sche Formel

Beispiel: Großhändler

Frage 2: Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Anzahl der Bestellungen um höchstens eine vom wahrscheinlichsten Wert ab?

- Da $k = 4$ der wahrscheinlichste Wert ist, folgt:

$$\sum_{i=3}^{5} B(10; 0{,}4; i) \;=\; \sum_{i=0}^{5} B(10; 0{,}4; i) - \sum_{i=0}^{2} B(10; 0{,}4; i) \;=\; 66{,}6\% \;.$$

Die Bernoulli'sche Formel

Beispiel: Großhändler

Frage 2: Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Anzahl der Bestellungen um höchstens eine vom wahrscheinlichsten Wert ab?

- Da $k = 4$ der wahrscheinlichste Wert ist, folgt:

$$\sum_{i=3}^{5} B(10; 0{,}4; i) \;=\; \sum_{i=0}^{5} B(10; 0{,}4; i) - \sum_{i=0}^{2} B(10; 0{,}4; i) \;=\; 66{,}6\% \,.$$

Sonderfall: Doppelmaximum

- 9 Geschäfte geben unabhängig mit $p = 0{,}2$ eine Bestellung auf, so dass $B(9; 0{,}2; k)$ mit $q(k) = \frac{9-k}{k+1} \cdot \frac{1}{4}$ untersucht werden muss.
- $q(k) > 1 \quad \rightsquigarrow \quad k < 1$, also $B(9; 0{,}2; 1) > B(9; 0{,}2; 0)$.
- $q(k) = 1 \quad \rightsquigarrow \quad k = 1$, also $B(9; 0{,}2; 2) = B(9; 0{,}2; 1)$.
- $q(k) < 1 \quad \rightsquigarrow \quad k > 1$, also insbesondere $B(9; 0{,}2; 3) < B(9; 0{,}2; 2)$.
- Doppelmaximum bei $k \in \{1; 2\}$.

Die Bernoulli'sche Formel
Beispiel: Großhändler

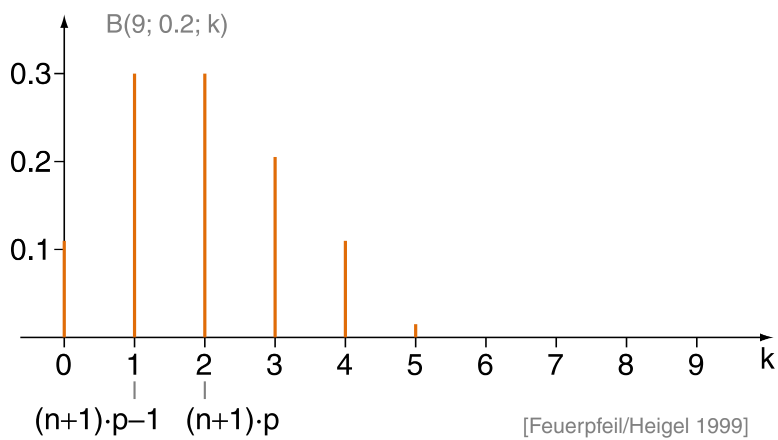
Frage 2: Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Anzahl der Bestellungen um höchstens eine vom wahrscheinlichsten Wert ab?

- Da $k = 4$ der wahrscheinlichste Wert ist, folgt:

$$\sum_{i=3}^{5} B(10;0{,}4;i) \;=\; \sum_{i=0}^{5} B(10;0{,}4;i) - \sum_{i=0}^{2} B(10;0{,}4;i) \;=\; 66{,}6\% \;.$$

Sonderfall: Doppelmaximum

- 9 Geschäfte geben unabhängig mit $p = 0{,}2$ eine Bestellung auf, so dass $B(9;0{,}2;k)$ mit $q(k) = \frac{9-k}{k+1} \cdot \frac{1}{4}$ untersucht werden muss.
- $q(k) > 1 \quad \rightsquigarrow \quad k < 1$
- $q(k) = 1 \quad \rightsquigarrow \quad k = 1$
- $q(k) < 1 \quad \rightsquigarrow \quad k > 1$
- Doppelmaximum bei $k \in \{1;2\}$.



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Die Bernoulli'sche Formel

Wahrscheinlichste Trefferzahl

Satz 7 (Eigenschaften von $B(n;p)$)

Für $\lfloor x \rfloor$ als größten ganzzahligen Anteil einer reellen Zahl x gilt:

1. Ist $np - q$ nicht ganzzahlig, so nimmt $B(n;p)$ das Maximum an für $k = \lfloor np - q \rfloor + 1 = \lfloor (n+1)p \rfloor$.
2. Ist $np - q$ ganzzahlig, so nimmt $B(n;p)$ für $k = np - q = (n+1)p - 1$ und $k = np - q + 1 = (n+1)p$ gleiche Maximalwerte an.
3. An anderen Stellen verläuft $B(n;p)$ echt monoton wachsend bzw. fallend.

Die Bernoulli'sche Formel

Wahrscheinlichste Trefferzahl

Satz 7 (Eigenschaften von $B(n;p)$)

Für $\lfloor x \rfloor$ als größten ganzzahligen Anteil einer reellen Zahl x gilt:

1. Ist $np - q$ nicht ganzzahlig, so nimmt $B(n;p)$ das Maximum an für $k = \lfloor np - q \rfloor + 1 = \lfloor (n+1)p \rfloor$.
2. Ist $np - q$ ganzzahlig, so nimmt $B(n;p)$ für $k = np - q = (n+1)p - 1$ und $k = np - q + 1 = (n+1)p$ gleiche Maximalwerte an.
3. An anderen Stellen verläuft $B(n;p)$ echt monoton wachsend bzw. fallend.

Herleitung:

- Aus
$$\frac{B(n;p;k+1)}{B(n;p;k)} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q} \lesseqgtr 1 \, .$$
folgt
$$(n-k) \cdot p \lesseqgtr (k+1) \cdot q \qquad \rightsquigarrow \qquad k \lesseqgtr np - q \, .$$
- Fallunterscheidung analog zum vorhergehenden Beispiel.

Die Bernoulli'sche Formel

Binomialverteilung als Experiment

- Für $p = q = \frac{1}{2}$ lautet die Bernoulli'sche Formel

$$B\left(n; \frac{1}{2}; k\right) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \; .$$

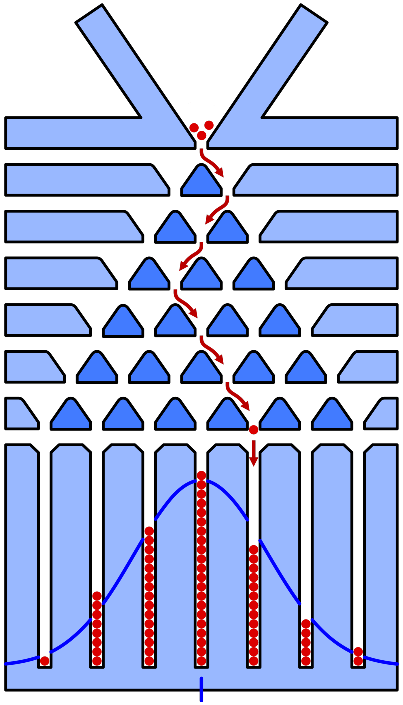
- Wegen

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

gilt $B\left(n; \frac{1}{2}; k\right) = B\left(n; \frac{1}{2}; n-k\right)$ und es gibt eine Symmetrieachse im Histogramm.

Die Bernoulli'sche Formel

Binomialverteilung als Experiment



- Für $p = q = \frac{1}{2}$ lautet die Bernoulli'sche Formel

$$B\left(n; \frac{1}{2}; k\right) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

- Wegen

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

gilt $B\left(n; \frac{1}{2}; k\right) = B\left(n; \frac{1}{2}; n-k\right)$ und es gibt eine Symmetrieachse im Histogramm.

- Ein Galton-Brett ist eine experimentelle Vorrichtung, die diesen Speziafall veranschaulicht.
- Kleine Kugeln fallen von oben so auf Hindernisse, dass sie bei jedem Hindernis gleichwahrscheinlich nach rechts oder links abgelenkt werden.
- Bei hinreichend vielen Kugeln ergibt sich das Histogramm von $B\left(n; \frac{1}{2}\right)$.

  Im Bild: $B\left(6; \frac{1}{2}\right)$

Bemerkungen:

- Die Idee zum Galton-Brett stammt vom selben Sir Francis Galton (1822–1911, englischer Wissenschaftler), der 1906 auf der Nutztiermesse beim Ochsengewichtschätzen die „Weisheit der Vielen“ beobachtete.

- Galton war ein Vetter von Charles Darwin (1809–1882, englischer Naturforscher).

- Was geschieht, wenn das Galton-Board vor dem Kurgeldurchlauf leicht nach links oder rechts gekippt wird?

Bemerkungen:

- Die Idee zum Galton-Brett stammt vom selben Sir Francis Galton (1822–1911, englischer Wissenschaftler), der 1906 auf der Nutztiermesse beim Ochsengewichtschätzen die „Weisheit der Vielen“ beobachtete.
- Galton war ein Vetter von Charles Darwin (1809–1882, englischer Naturforscher).
- Was geschieht, wenn das Galton-Board vor dem Kurgeldurchlauf leicht nach links oder rechts gekippt wird?
- Für $B(12; 0{,}87)$ erhält man in etwa folgenden Experiment-Ausgang: