

Kapitel PTS:V

V. Zufallsgrößen und Maßzahlen

- ❑ Zufallsgrößen
- ❑ Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- ❑ Verteilungsfunktionen
- ❑ Multiple Zufallsgrößen
- ❑ Erwartungswerte
- ❑ Varianz und Standardabweichung
- ❑ Das \sqrt{n} -Gesetz
- ❑ Schätzwerte für Erwartungswert und Standardabweichung

Zufallsgrößen

Beispiel: Skat

- Drei Spieler:innen erhalten je 10 von 32 Karten; oft als „Blatt“ bezeichnet.
- Es gibt $|\Omega| = \binom{32}{10}$ Blätter.
- Die Unter (Bube) sind meist hohe Trumpfkarten.
- Man ist daher an der Anzahl $X(\omega)$ der Unter im eigenen Blatt ω interessiert.
- Die Funktion $X(\omega)$ ordnet jedem Blatt ω eindeutig eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, oder 4 zu.
- Die fünf Ereignisse
„ $X(\omega) = i$ “ ($i \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$)
bilden eine Zerlegung der Menge Ω möglicher Blätter.
- Gezeigtes Blatt: $X(\omega) = 1$



Zufallsgrößen

Beispiel: Lotto „Super 6“

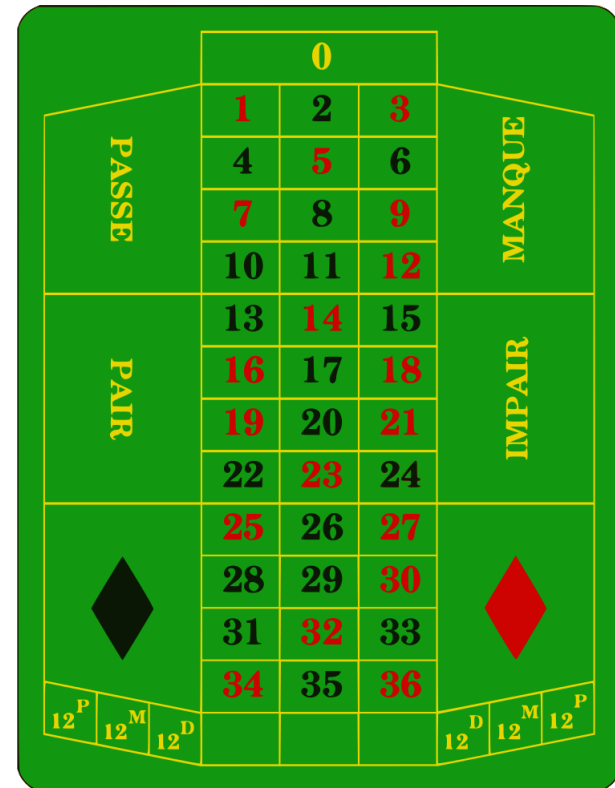
- ❑ „Super 6“ ist eine Endziffernlotterie.
- ❑ Auf dem Spielschein ist eine sechsstellige Losnummer vorgegeben.
- ❑ Je mehr Endziffern der Losnummer mit denen der gezogenen Gewinnzahl übereinstimmen, desto höher der Gewinn; jede Ziffer stammt aus $\{0; 1; \dots; 9\}$.
- ❑ Die Gewinnzahl 7815**68** hat zwei Endziffern mit der obigen Losnummer 5619**68** gemein.
- ❑ Einer Losnummer ω mit i richtigen Endziffern ($i \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$) werden Gewinne $X(\omega)$ nach einem Gewinnplan zugeordnet.
- ❑ Die sieben Ereignisse „ $X(\omega) = i$ “ bilden eine Zerlegung des Ergebnisraums Ω der 10^6 möglichen Losnummern bzw. Gewinnzahlen.



Beispiel: Französisches Roulette

- Ein Roulette-Spieler setzt eine Geldeinheit auf „1. Dutzend“.
- Tritt dieses Ereignis ein, werden ihm 3 Geldeinheiten ausgezahlt.
- Sonst verliert er seinen Einsatz.
- Der Reingewinn $X(\omega)$ des Spielers ist eine Funktion $X : \{0; 1; \dots; 36\} \rightarrow \mathbb{R}$ der bei der Ausspielung fallenden Zahl ω :

$$X(\omega) = \begin{cases} 2 & \text{für } \omega \in \{1; 2; \dots; 12\}, \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Bemerkungen:

- In den Beispielen wird jedem $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl $X(\omega)$ zugeordnet.
- X ist also eine auf Ω erklärte reellwertige Funktion, die Ereignisse aus Ω durch reelle Zahlen charakterisiert.
- Wie die Ergebnisse ω hängen auch die Werte von $X(\omega)$ vom Zufall ab. Daher nennt man X eine Zufallsgröße.

Zufallsgrößen

Definition 1 (Zufallsgröße)

Eine Funktion X , die jedem Ergebnis ω eines Ergebnisraums Ω eine reelle Zahl $X(\omega)$ zuordnet, heißt **Zufallsgröße X auf Ω** . In formaler Schreibweise:

$$X : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \text{ mit } \omega \mapsto X(\omega).$$

Bemerkungen:

- ❑ Das Wahrscheinlichkeitsmaß P des Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega; P)$ geht nicht in die Definition mit ein.
- ❑ Zufallsgrößen werden üblicherweise mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet, vorwiegend vom Ende des Alphabets; die von ihnen angenommenen Werte dann mit den entsprechenden kleinen lateinischen Buchstaben.
- ❑ Bei einer Zufallsgröße X ist die Menge der Ergebnisse, die einen bestimmten Funktionswert x liefert, eine Teilmenge von Ω .
 - Im Roulette-Beispiel gehört zu $x = 2$ die Teilmenge $\{1; 2; \dots; 12\}$ von $\Omega = \{0; 1; \dots; 36\}$, zu $x = -1$ die Restmenge $\{0; 13; 14; \dots; 36\}$.
 - Jeder Gleichung $X(\omega) = x$ mit $x \in \{-1; 2\}$ ist also eindeutig eine Teilmenge von Ω , also ein Ereignis, zugeordnet: Im Roulette-Beispiel das Ereignis „1. Dutzend“ für $x = 2$ und das Gegenereignis „Nicht-1. Dutzend“ für $x = -1$.
- ❑ Der Begriff der Zufallsgröße und alle damit zusammenhängenden Begrifflichkeiten bildeten sich erst im 19. Jahrhundert heraus.