Kapitel PTS:V

V. Zufallsgrößen und Maßzahlen

- Zufallsgrößen
- Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Verteilungsfunktionen
- Multiple Zufallsgrößen
- Erwartungswerte
- Varianz und Standardabweichung
- Das $\sqrt{n}$-Gesetz
- Schätzwerte für Erwartungswert und Standardabweichung

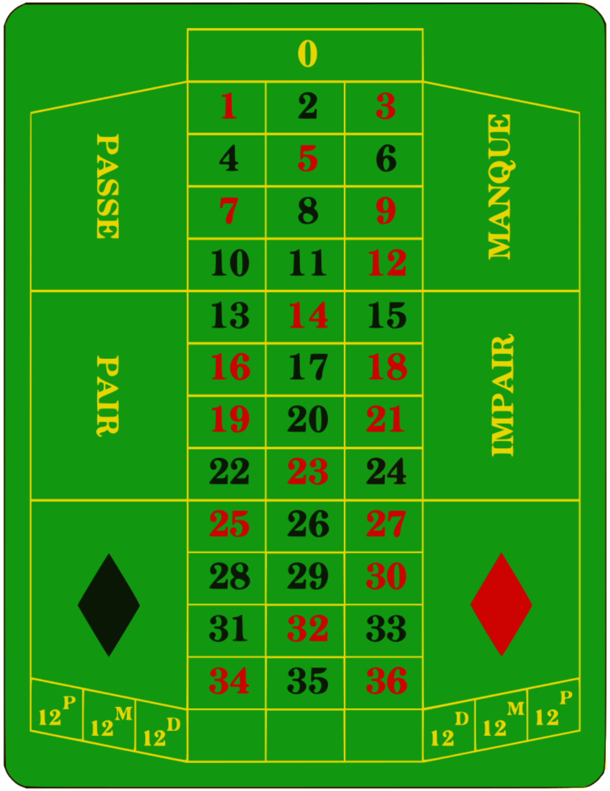
Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel: Französisches Roulette

- Bei Einsatz auf das „1. Dutzend“ interessiert neben der möglichen Höhe X des Gewinns, wie wahrscheinlich er den Wert 2 annimmt.
- $X(\omega) = 2$ ist erfüllt, wenn $\omega \in \{1; \ldots; 12\}$
- $P(X(\omega) = 2) = P(\{1; \ldots; 12\}) = \frac{|\{1;\ldots;12\}|}{|\Omega|} = \frac{12}{37}$
- $P(X(\omega) = -1) = P(\{0; 13; 14; \ldots; 36\}) = \frac{25}{37}$

  $= 1 - \frac{12}{37} = 1 - P(X(\omega) = 2)$
- Die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten $P(X(\omega) = -1)$ und $P(X(\omega) = 2)$ auf die Werte -1 und 2 lässt sich tabellarisieren:

x_i	-1	2
$P(X(\omega) = x_i)$	$\frac{25}{37}$	$\frac{12}{37}$



Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Begriffsbildung

- Eine auf dem Ergebnisraum Ω definierten Zufallsgröße X mit der Wertemenge $W = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$ induziert eine eindeutige Zerlegung von Ω:

$$\Omega = \{\omega : X(\omega) = x_1\} \cup \ldots \cup \{\omega : X(\omega) = x_k\} \; .$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass $X(\omega)$ den Wert x_i ($i \in \{1; 2; \ldots; k\}$) annimmt, wird mit $P(X = x_i)$ bezeichnet; formal:

$$P(X = x_i) = P(\{\omega : X(\omega) = x_i\}) \; .$$

- Wird statt Ω der vergröberte Ergebnisraum $\Omega_X = W$ zugrunde gelegt, dann ist durch $P(X = x_i)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P_X auf Ω_X definiert.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Begriffsbildung

- Eine auf dem Ergebnisraum Ω definierten Zufallsgröße X mit der Wertemenge $W = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$ induziert eine eindeutige Zerlegung von Ω:

$$\Omega = \{\omega : X(\omega) = x_1\} \cup \ldots \cup \{\omega : X(\omega) = x_k\} \; .$$

- Die Wahrscheinlichkeit, dass $X(\omega)$ den Wert x_i ($i \in \{1; 2; \ldots; k\}$) annimmt, wird mit $P(X = x_i)$ bezeichnet; formal:

$$P(X = x_i) = P(\{\omega : X(\omega) = x_i\}) \; .$$

- Wird statt Ω der vergröberte Ergebnisraum $\Omega_X = W$ zugrunde gelegt, dann ist durch $P(X = x_i)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P_X auf Ω_X definiert.

Definition 2 (Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße)

Die Funktion $P_X : x_i \mapsto P(X = x_i)$ mit $x_i \in W = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$ heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$.

Bemerkungen:

- In der Literatur wird der Begriff Wahrscheinlichkeitsverteilung manchmal auf die Menge $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen erweitert. Für alle $x \in \mathbf{R}$, die nicht Werte von X sind, ist dann $P(X = x) = 0$. Man nennt dann P_X auch Wahrscheinlichkeitsfunktion von X.

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung beschreibt man oft durch Angabe der Paare $(x_i; P(X = x_i))$ bzw. durch eine Tabelle. Dabei muss die Summe der Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ stets gleich 1 sein.

- Es gibt auch Wahrscheinlichkeitsverteilungen, bei denen sich die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$ durch einen Funktionsterm ausdrücken lassen.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- „Spiel 77“ ist eine Endziffernlotterie.
- Auf dem Spielschein ist eine siebenstellige Losnummer vorgegeben.
- Je mehr Endziffern der Losnummer mit denen der gezogenen Gewinnzahl übereinstimmen, desto höher der Gewinn; jede Ziffer stammt aus $\{0; 1; \ldots; 9\}$.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- „Spiel 77“ ist eine Endziffernlotterie.
- Auf dem Spielschein ist eine siebenstellige Losnummer vorgegeben.
- Je mehr Endziffern der Losnummer mit denen der gezogenen Gewinnzahl übereinstimmen, desto höher der Gewinn; jede Ziffer stammt aus $\{0; 1; \ldots; 9\}$.
- Sei X die Zahl der übereinstimmenden Endziffern.
- Ereignis „keine Übersteinstimmung“:
  Die Ziffern der Gewinnzahl werden unabhängig voneinander von hinten nach vorn gezogen.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- „Spiel 77“ ist eine Endziffernlotterie.
- Auf dem Spielschein ist eine siebenstellige Losnummer vorgegeben.
- Je mehr Endziffern der Losnummer mit denen der gezogenen Gewinnzahl übereinstimmen, desto höher der Gewinn; jede Ziffer stammt aus $\{0; 1; \ldots; 9\}$.
- Sei X die Zahl der übereinstimmenden Endziffern.
- Ereignis „keine Übersteinstimmung“: $P(X = 0) = \frac{9}{10}$
  Die Ziffern der Gewinnzahl werden unabhängig voneinander von hinten nach vorn gezogen.
- Ereignis „Übereinstimmung der letzten Ziffer“:
  Die vorletzte Endziffer muss falsch sein.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- „Spiel 77“ ist eine Endziffernlotterie.
- Auf dem Spielschein ist eine siebenstellige Losnummer vorgegeben.
- Je mehr Endziffern der Losnummer mit denen der gezogenen Gewinnzahl übereinstimmen, desto höher der Gewinn; jede Ziffer stammt aus $\{0; 1; \ldots; 9\}$.
- Sei X die Zahl der übereinstimmenden Endziffern.
- Ereignis „keine Übersteinstimmung“: $P(X = 0) = \frac{9}{10}$
  Die Ziffern der Gewinnzahl werden unabhängig voneinander von hinten nach vorn gezogen.
- Ereignis „Übereinstimmung der letzten Ziffer“: $P(X = 1) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{9}{100}$
  Die vorletzte Endziffer muss falsch sein.
- Ereignis „genau i richtige Endziffern“:

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- „Spiel 77“ ist eine Endziffernlotterie.
- Auf dem Spielschein ist eine siebenstellige Losnummer vorgegeben.
- Je mehr Endziffern der Losnummer mit denen der gezogenen Gewinnzahl übereinstimmen, desto höher der Gewinn; jede Ziffer stammt aus $\{0; 1; \ldots; 9\}$.
- Sei X die Zahl der übereinstimmenden Endziffern.
- Ereignis „keine Übersteinstimmung“: $P(X = 0) = \frac{9}{10}$
  Die Ziffern der Gewinnzahl werden unabhängig voneinander von hinten nach vorn gezogen.
- Ereignis „Übereinstimmung der letzten Ziffer“: $P(X = 1) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{9}{100}$
  Die vorletzte Endziffer muss falsch sein.
- Ereignis „genau i richtige Endziffern“: $P(X = x_i) = \frac{9}{10^{i+1}}$
  Die $(i+1)$-te Endziffer muss falsch, die i folgenden richtig sein.
- Für $i \in \{0; 1; \ldots; 7\}$ ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:
  Die Summe der Wahrscheinlichkeiten ist 1.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{10}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{9}{1000}$	$\frac{9}{10.000}$	$\frac{9}{100.000}$	$\frac{9}{1.000.000}$	$\frac{9}{10.000.000}$	$\frac{1}{10.000.000}$

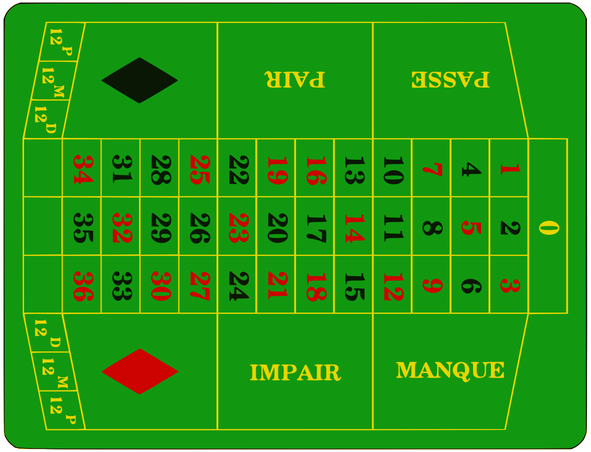
Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Veranschaulichung: Ergebnisraum, Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung

Beispiel: Französisches Roulette

Ergebnisraum:

$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_m\}$



ω_i, ($i \in \{1; 2; \ldots; m\}$), sind die möglichen Spielergebnisse

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

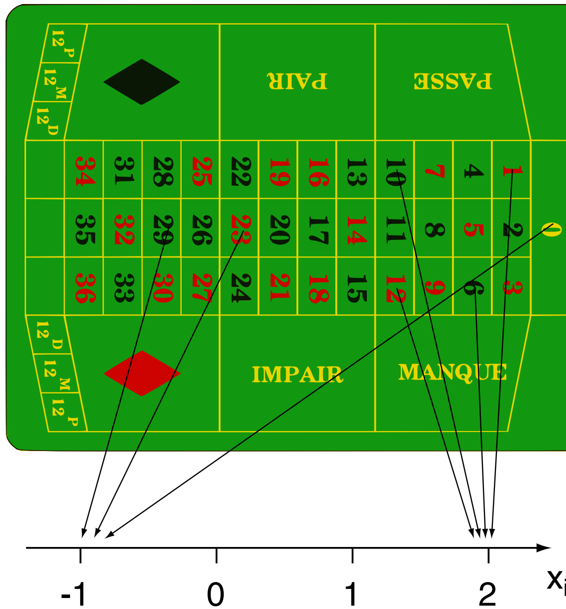
Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Veranschaulichung: Ergebnisraum, Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung

Beispiel: Französisches Roulette

Ergebnisraum:

$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_m\}$



ω_i, ($i \in \{1; 2; \ldots; m\}$), sind die möglichen Spielergebnisse

Zufallsgröße:

$X : \Omega \rightarrow W$

mit $X(\omega) = x$

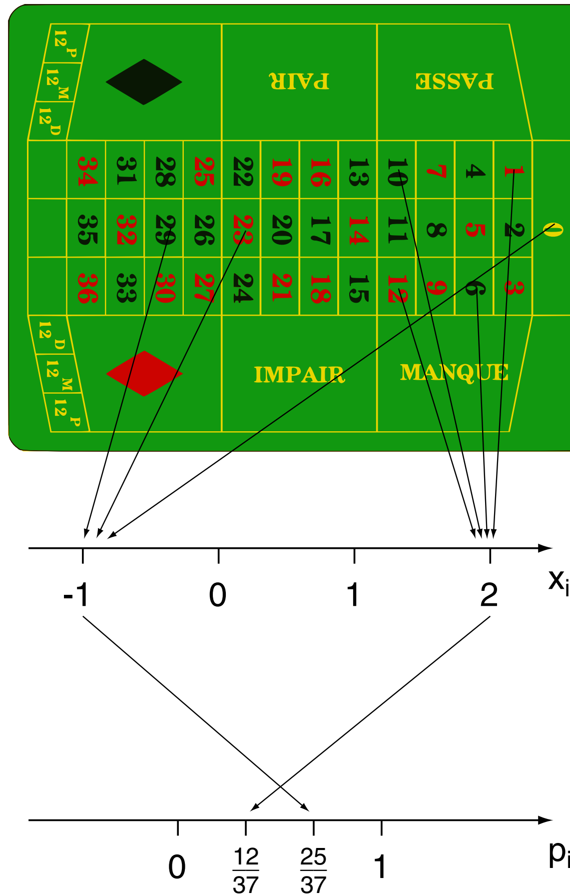
X ist der mögliche Reingewinn beim Setzen auf „1. Dutzend“, W die Menge aller möglichen Reingewinne.

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Veranschaulichung: Ergebnisraum, Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung

Beispiel: Französisches Roulette



Ergebnisraum:
$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_m\}$

ω_i, ($i \in \{1; 2; \ldots; m\}$), sind die möglichen Spielergebnisse

Zufallsgröße:
$X : \Omega \rightarrow W$
mit $X(\omega) = x$

X ist der mögliche Reingewinn beim Setzen auf „1. Dutzend“, W die Menge aller möglichen Reingewinne.

Wahrscheinlichkeitsverteilung:
$P_X : W \rightarrow \,]0; 1[$
mit $x_i \mapsto P(X = x_i) = p_i$

P_X ordnet den verschiedenen Reingewinnen x_i Wahrscheinlichkeiten p_i zu.

[Feuerpfeil/Heigel 1999]

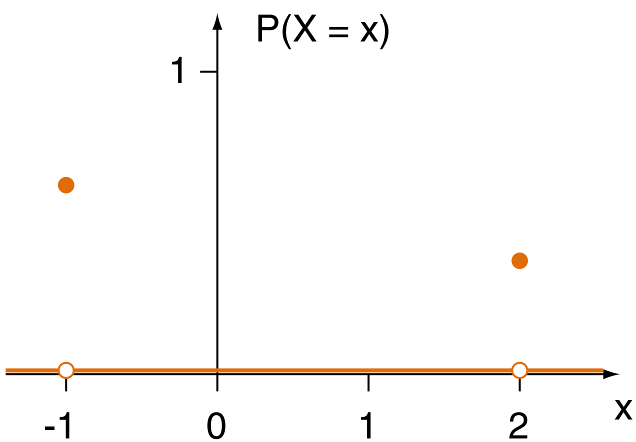
Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Veranschaulichung: Graph und Stabdiagramm

- Der Graph der Wahrscheinlichkeitsverteilung besteht aus den Punkten $(x_i; P(X = x_i))$ mit $i \in \{1; \ldots; k\}$.

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

- Graph und Stabdiagramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Reingewinn bei Einsatz einer Geldeinheit auf „1. Dutzend“:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

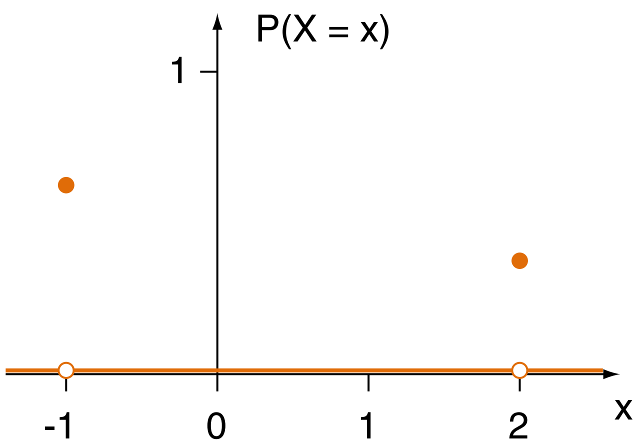
Wahrscheinlichkeitsverteilungen

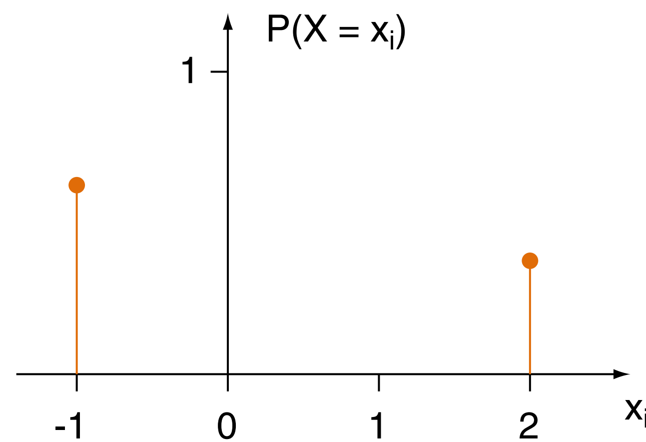
Veranschaulichung: Graph und Stabdiagramm

- Der Graph der Wahrscheinlichkeitsverteilung besteht aus den Punkten $(x_i; P(X = x_i))$ mit $i \in \{1; \ldots ; k\}$.
- Größere Anschaulichkeit verschafft die Darstellung der Ordinaten als Stäbe.

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

- Graph und Stabdiagramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Reingewinn bei Einsatz einer Geldeinheit auf „1. Dutzend“:





[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

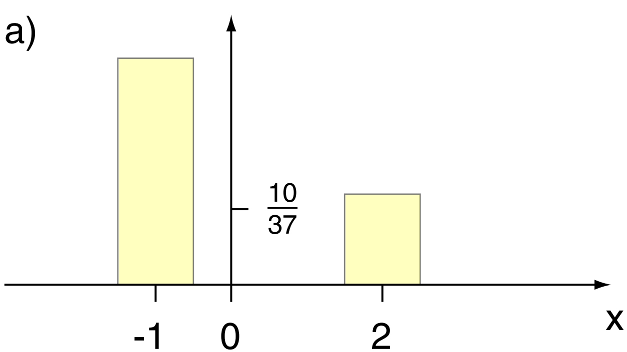
Veranschaulichung: Histogramm

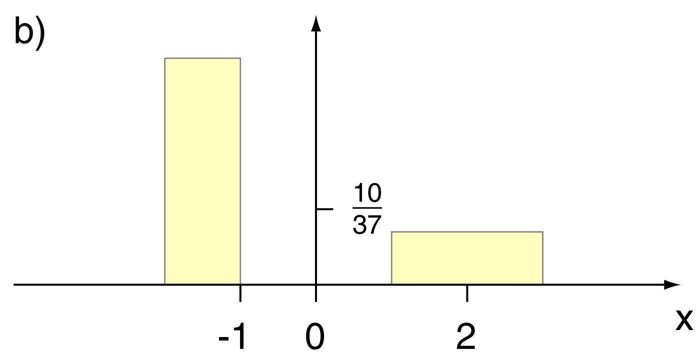
- Eine Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit vielen Werten ist oft besser in einem Histogramm zu überblicken, das Wahrscheinlichkeiten als Flächen darstellt.

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

- Alternative Histogramme der Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Reingewinn bei Einsatz einer Geldeinheit auf „1. Dutzend“:

x_i	-1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{37}$	$\frac{12}{37}$





[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

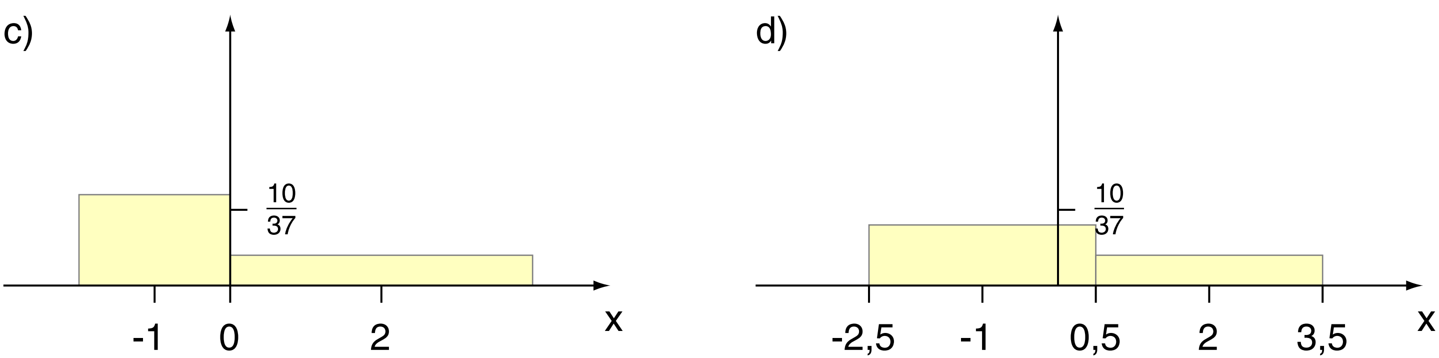
Veranschaulichung: Histogramm

- Eine Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit vielen Werten ist oft besser in einem Histogramm zu überblicken, das Wahrscheinlichkeiten als Flächen darstellt.

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

- Alternative Histogramme der Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Reingewinn bei Einsatz einer Geldeinheit auf „1. Dutzend“:

x_i	-1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{25}{37}$	$\frac{12}{37}$



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Veranschaulichung: Histogramm

Konstruktion eines Histogramms:

1. Auswahl eines Intervalls $[a_1; a_m]$ auf der Zahlengerade, das alle Werte der Zufallsgröße X überdeckt.

2. Hinzunahme weiterer Punkte wird das Intervall in Teilintervalle $]a_i; a_{i+1}]$ zerlegt.

3. Über jedem Teilintervall $]a_i; a_{i+1}]$ wird ein Rechteck errichtet, dessen Flächeninhalt gleich der Wahrscheinlichkeit $P(a_i < X \leq a_{i+1})$ ist.

- $P(a_i < X \leq a_{i+1})$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallsgröße X Werte aus dem Teilintervall $]a_i; a_{i+1}]$ annimmt.

- Jede *Säule* repräsentiert die Wahrscheinlichkeit, dass Werte der Zufallsgröße X in dem von der Breite der Säule überspannten Bereich liegen.

Bemerkungen:

- Histrogrammdarstellungen sind nicht eindeutig, da sie von der gewählten Unterteilung abhängig sind: Die Summe der Flächeninhalte der Säulen muss 1 sein.
- Meist werden gleich lange/breite Teilintervalle gewählt, so dass alle Säulen die gleiche Breite haben.
- Histogramm (a) ist vermutlich am „natürlichsten“ für die meisten Betrachter, da auf der y-Achse die Wahrscheinlichkeiten 1:1 durch die Säulenhöhen abgelesen werden können.
- Histogramm (d) ist die *äquidistante Einteilung*, die in vielen Zusammenhängen auch ein recht natürliches Erscheinungsbild hat, wenn das zugrundeliegende Intervall auf der Zahlengeraden in gleich breite, direkt aneinandergrenzende interessante „Ereignisintervalle“ zerlegt werden kann. Im Beispiel ist die äquidistante Darstellung durch die tatsächlich nicht vorhandene direkte Nachbarschaft der einzigen beiden möglichen Ereignisse „$X = -1$“ und „$X = 2$“ für viele schwerer überschaubar als Histogramm (a).
- Der Vorteil von Histogrammen gegenüber Stabdiagrammen ist, dass Flächen für Menschen „zugänglicher“ als Stäbe sind.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Dichtefunktion eines Histogramms

- Sei $x \in \,]a_i; a_{i+1}]$ ein Punkt in einem Intervall eines Histogramms.
- Sei $d(x)$ die Höhe der Säule über x, so gilt:

$$P(a_i < X \leq a_{i+1}) = (a_{i+1} - a_i) \cdot d(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad d(x) = \frac{P(a_i < X \leq a_{i+1})}{a_{i+1} - a_i}\,.$$

- Die Funktion d gibt an, welcher Anteil der Wahrscheinlichkeit auf die Längeneinheit des Intervalls $]a_i; a_{i+1}]$ entfällt.
- Man bezeichnet die in den einzelnen Intervallen konstante Funktion d als Dichtefunktion des Histogramms.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen

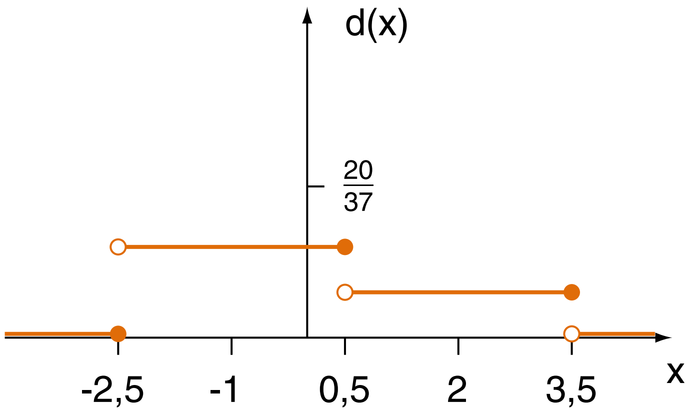
Dichtefunktion eines Histogramms

Beispiel: Französisches Roulette (Fortsetzung)

- Histogramm (d) zur Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Reingewinn bei Einsatz einer Geldeinheit auf „1. Dutzend“ lässt sich durch folgende Dichtefunktion beschreiben:

$$d(x) = \begin{cases} \frac{25}{37 \cdot 3} & \text{für } x \in \,]-2{,}5; 0{,}5], \\ \frac{12}{37 \cdot 3} & \text{für } x \in \,]0{,}5; 3{,}5], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Darstellung von d als Graph:



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass genau i Endziffern einer Losnummer mit der Gewinnzahl übereinstimmen ist $P(X = i) = \frac{9}{10^{i+1}}$.
- Wie wahrscheinlich sind mindestens (höchstens) i Endziffern richtig?

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass genau i Endziffern einer Losnummer mit der Gewinnzahl übereinstimmen ist $P(X = i) = \frac{9}{10^{i+1}}$.
- Wie wahrscheinlich sind mindestens (höchstens) i Endziffern richtig?
- Ereignis „mindestens 1 richtige Endziffer“:
  $P(X = 1) = \frac{1}{10}$.

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass genau i Endziffern einer Losnummer mit der Gewinnzahl übereinstimmen ist $P(X = i) = \frac{9}{10^{i+1}}$.
- Wie wahrscheinlich sind mindestens (höchstens) i Endziffern richtig?
- Ereignis „mindestens 1 richtige Endziffer“: $P(X \geq 1) = \frac{1}{10}$
  $P(X = 1) = \frac{1}{10}$. Die anderen Endziffern sind für dieses Ereignis unerheblich.
- Ereignis „keine richtige Endziffer“:

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass genau i Endziffern einer Losnummer mit der Gewinnzahl übereinstimmen ist $P(X = i) = \frac{9}{10^{i+1}}$.
- Wie wahrscheinlich sind mindestens (höchstens) i Endziffern richtig?
- Ereignis „mindestens 1 richtige Endziffer“: $P(X \geq 1) = \frac{1}{10}$
  $P(X = 1) = \frac{1}{10}$. Die anderen Endziffern sind für dieses Ereignis unerheblich.
- Ereignis „keine richtige Endziffer“: $P(X = 0) = 1 - \frac{1}{10}$
- Ereignis „mindestens 2 richtige Endziffern“:
- Ereignis „höchstens 1 richtige Endziffer“:

Verteilungsfunktionen
Beispiel: Lotto „Spiel 77"

- Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass genau i Endziffern einer Losnummer mit der Gewinnzahl übereinstimmen ist $P(X=i) = \frac{9}{10^{i+1}}$.
- Wie wahrscheinlich sind mindestens (höchstens) i Endziffern richtig?
- Ereignis „mindestens 1 richtige Endziffer": $P(X \geq 1) = \frac{1}{10}$
  $P(X=1) = \frac{1}{10}$. Die anderen Endziffern sind für dieses Ereignis unerheblich.
- Ereignis „keine richtige Endziffer": $P(X=0) = 1 - \frac{1}{10}$
- Ereignis „mindestens 2 richtige Endziffern": $P(X \geq 2) = \left(\frac{1}{10}\right)^2$
- Ereignis „höchstens 1 richtige Endziffer": $P(X \leq 1) = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^2$
- Verallgemeinerung zum Ereignis „$X \geq i+1$" und zum Gegenereignis „$X \leq i$":

$$P(X \geq i+1) = \left(\frac{1}{10}\right)^{i+1} \qquad \text{und} \qquad P(X \leq i) = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{i+1}$$

  für $i \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- Für das sichere Ereignis „$X \leq 7$" gilt $P(X \leq 7) = 1$.

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lotto „Spiel 77"

- Ereignis „mindestens 2 und höchstens 5 richtige Endziffern":

$$P(2 \leq X \leq 5) \;=\; P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- Ereignis „mindestens 2 und höchstens 5 richtige Endziffern“:

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 5) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= P(X \leq 5) - P(X \leq 1) \end{aligned}$$

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- Ereignis „mindestens 2 und höchstens 5 richtige Endziffern“:

$$\begin{aligned} P(2 \le X \le 5) &= P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) \\ &= P(X \le 5) - P(X \le 1) = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^6 - 1 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 \\ &= 10^{-2} - 10^{-6} = \frac{9999}{1.000.000}\,. \end{aligned}$$

➜ Summen lokaler Wahrscheinlichkeiten $P(a \le X \le b)$ für Ereignisse in Intervallform ($a, b \in \mathbf{R}$) können mit $P(X \le a)$ und $P(X \le b)$ bestimmt werden.

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- Ereignis „mindestens 2 und höchstens 5 richtige Endziffern“:

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 5) &= P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) \\ &= P(X \leq 5) - P(X \leq 1) = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^6 - 1 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 \\ &= 10^{-2} - 10^{-6} = \frac{9999}{1.000.000} \, . \end{aligned}$$

➜ Summen lokaler Wahrscheinlichkeiten $P(a \leq X \leq b)$ für Ereignisse in Intervallform ($a, b \in \mathbf{R}$) können mit $P(X \leq a)$ und $P(X \leq b)$ bestimmt werden.

- Ereignis „genau 3 richtige Endziffern“:

$$P(X = 3) =$$

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lotto „Spiel 77“

- Ereignis „mindestens 2 und höchstens 5 richtige Endziffern“:

$$\begin{aligned} P(2 \le X \le 5) &= P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5) \\ &= P(X \le 5) - P(X \le 1) \;=\; 1-\left(\frac{1}{10}\right)^6 - 1 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 \\ &= 10^{-2} - 10^{-6} \;=\; \frac{9999}{1.000.000} \, . \end{aligned}$$

➜ Summen lokaler Wahrscheinlichkeiten $P(a \le X \le b)$ für Ereignisse in Intervallform ($a, b \in \mathbf{R}$) können mit $P(X \le a)$ und $P(X \le b)$ bestimmt werden.

- Ereignis „genau 3 richtige Endziffern“:

$$\begin{aligned} P(X=3) &= P(X \le 3) - P(X \le 2) \;=\; 1-\left(\frac{1}{10}\right)^4 - 1 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 \\ &= 10^{-3} - 10^{-4} \;=\; \frac{9}{10.000} \, . \end{aligned}$$

➜ Analog gilt:

$$P(X=i) = P(X \le i) - P(X \le i-1) \, .$$

Verteilungsfunktionen

Definition 3 (Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße)

Sei X eine Zufallsgröße mit der Wertemenge $W = \{x_1; x_2; \ldots, x_k\}$. Dann heißt die für alle $x \in \mathbf{R}$ definierte Funktion F_X mit

$$F_X : x \mapsto P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

(kumulative) Verteilungsfunktion der Zufallsgröße X auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega; P)$.

Bemerkungen:

- Die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ erhält man durch Addition aller Werte $P(X = x_i)$, für die $x_i \leq x$ erfüllt ist. Das erklärt das ergänzende Adjektiv „kumulativ“, das meist weglassen wird.
- Liegt nur eine Zufallsgröße vor, wird statt F_X oft einfach F geschrieben.
- Aus dem Stabdiagramm einer Wahrscheinlichkeitsverteilung lässt sich leicht der Graph der Verteilungsfunktion (und umgekehrt) konstruieren.

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Dreifacher Münzwurf

- Sei Zufallsgröße X die Anzahl der Köpfe:

ω	ZZZ	ZZK	ZKZ	KZZ	ZKK	KZK	KKZ	KKK
$X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

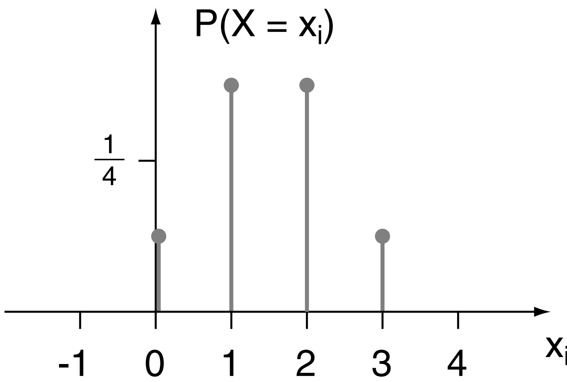
Verteilungsfunktionen

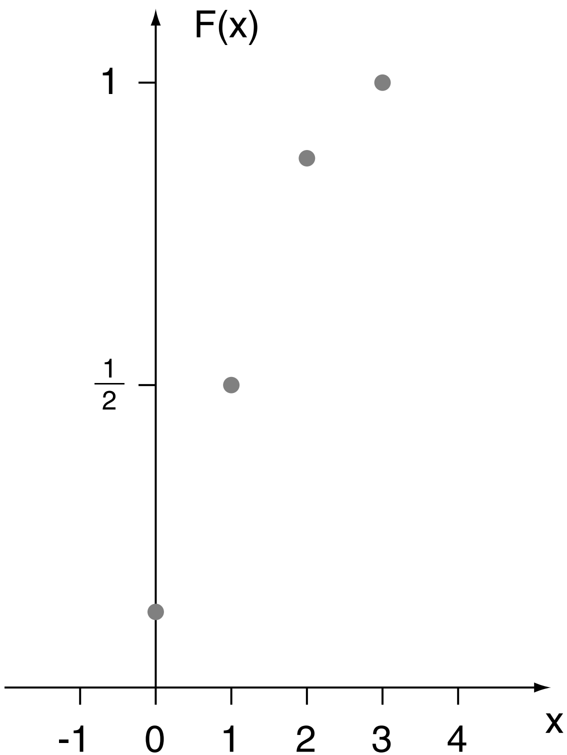
Beispiel: Dreifacher Münzwurf

- Sei Zufallsgröße X die Anzahl der Köpfe:

ω	ZZZ	ZZK	ZKZ	KZZ	ZKK	KZK	KKZ	KKK
$X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$





[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Dreifacher Münzwurf

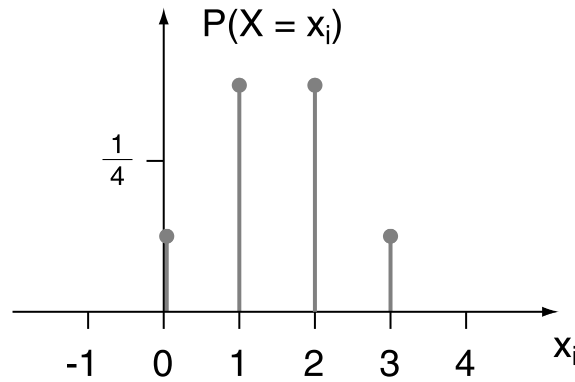
- Sei Zufallsgröße X die Anzahl der Köpfe:

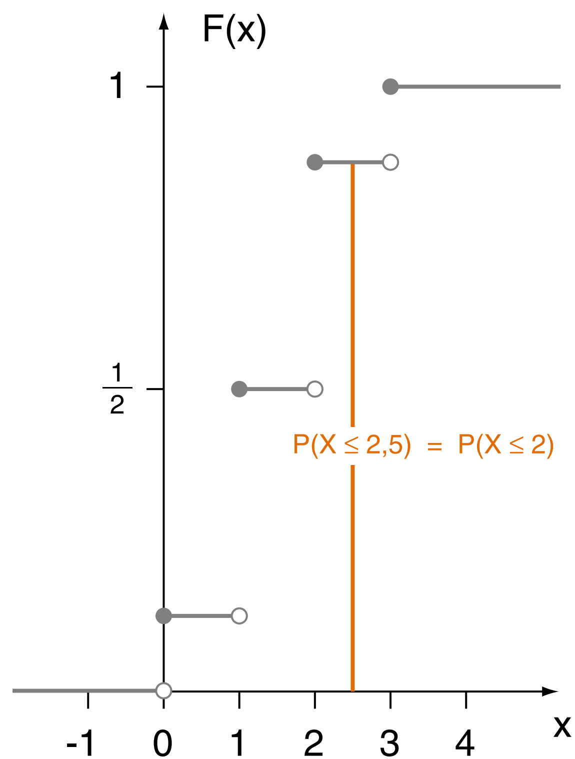
ω	ZZZ	ZZK	ZKZ	KZZ	ZKK	KZK	KKZ	KKK
$X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$

$x \in \mathbf{R}$	$]-\infty;0[$	$[0;1[$	$[1;2[$	$[2;3[$	$[3;\infty[$
$F(x)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$

- Da X nur die Werte 0, 1, 2 und 3 annehmen kann, ist z.B. $P(X \leq 2{,}5) = P(X = 2)$.
- Für alle $x \in [2;3[$: $P(X \leq x) = P(X \leq 2)$





[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Dreifacher Münzwurf

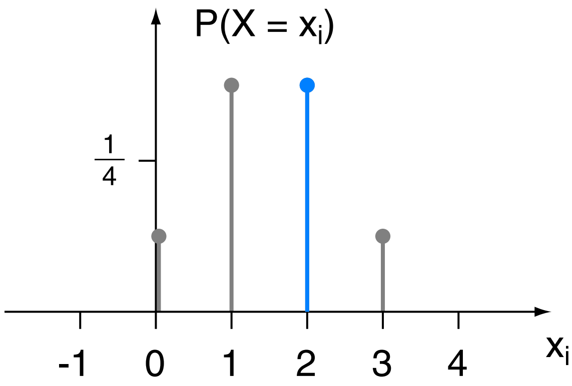
- Sei Zufallsgröße X die Anzahl der Köpfe:

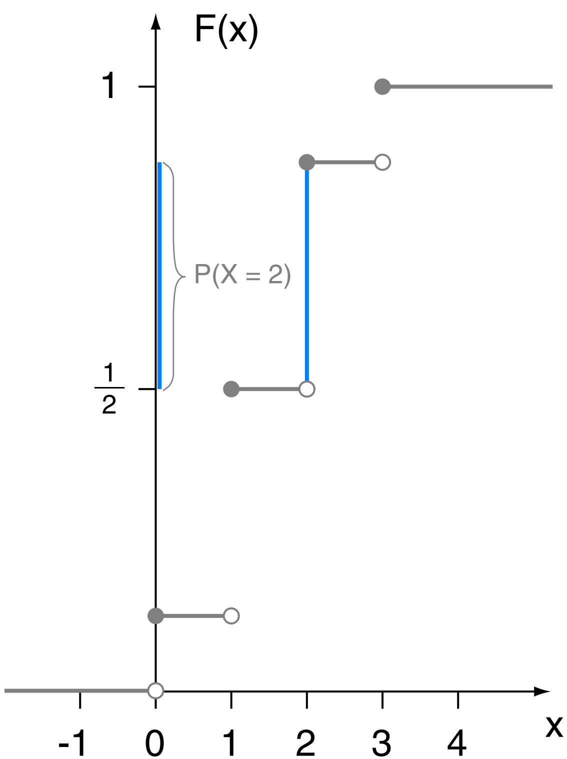
ω	ZZZ	ZZK	ZKZ	KZZ	ZKK	KZK	KKZ	KKK
$X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$

$x \in \mathbf{R}$	$]-\infty;0[$	$[0;1[$	$[1;2[$	$[2;3[$	$[3;\infty[$
$F(x)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$

- Da X nur die Werte 0, 1, 2 und 3 annehmen kann, ist z.B. $P(X \leq 2{,}5) = P(X = 2)$.
- Für alle $x \in [2;3[$: $P(X \leq x) = P(X \leq 2)$
- Die Höhe des Sprungs von $F(x)$ an der Stelle x_i entspricht $P(X = x_i)$.





[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Dreifacher Münzwurf

- Sei Zufallsgröße X die Anzahl der Köpfe:

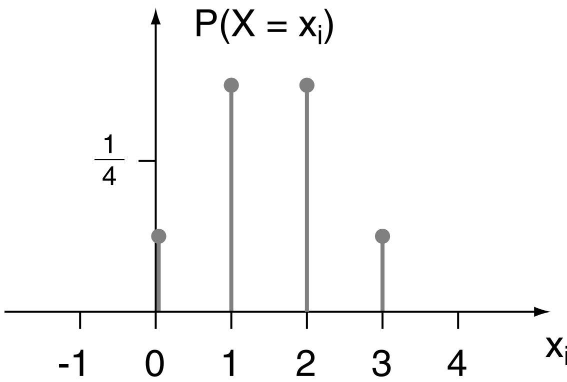
ω	ZZZ	ZZK	ZKZ	KZZ	ZKK	KZK	KKZ	KKK
$X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

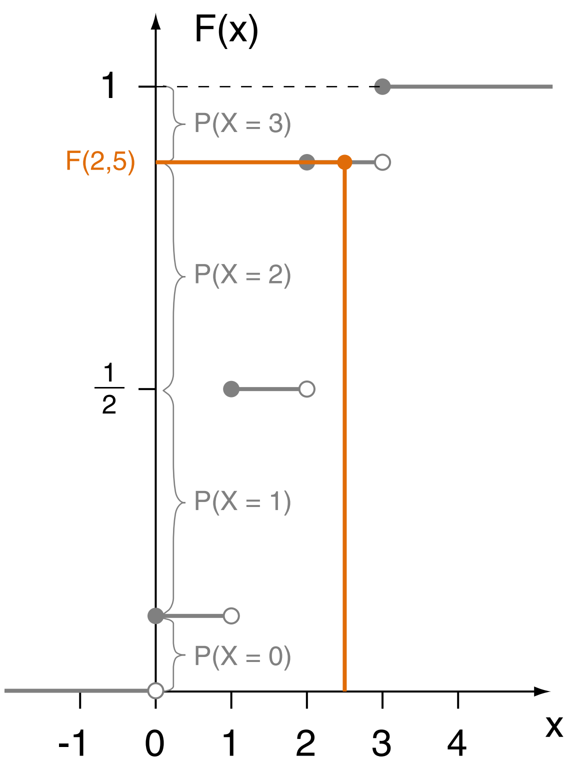
x_i	0	1	2	3
$P(X{=}x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$

$x \in \mathbf{R}$	$]-\infty;0[$	$[0;1[$	$[1;2[$	$[2;3[$	$[3;\infty[$
$F(x)$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8}$

- Da X nur die Werte 0, 1, 2 und 3 annehmen kann, ist z.B. $P(X \leq 2{,}5) = P(X = 2)$.
- Für alle $x \in [2;3[$: $P(X \leq x) = P(X \leq 2)$
- Die Höhe des Sprungs von $F(x)$ an der Stelle x_i entspricht $P(X = x_i)$.
- Die Ordinate zu $F(2{,}5)$ setzt sich z.B. aus den Sprunghöhen bei 0, 1 und 2 zusammen:

$$F(2{,}5) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\ .$$





[Feuerpfeil/Heigel 1999]

Verteilungsfunktionen

Eigenschaften

Theoretisch ist es gleichgültig, ob die Wahrscheinlichkeitsverteilung oder die Verteilungsfunktion bekannt sind:

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung erhält man aus der Verteilungsfunktion durch Subtraktion zweier Werte der Verteilungsfunktion:

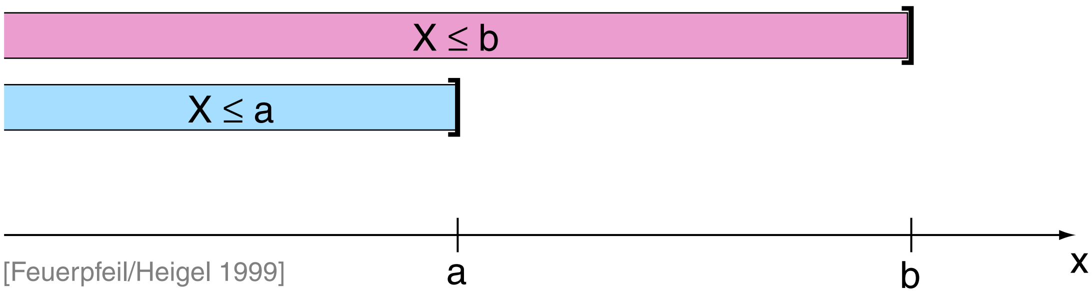
$$P(X = x_i) \quad = \quad F(x_i) - F(x_{i-1}) \; .$$

- Die Verteilungsfunktion erhält man aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung durch Addition aufeinanderfolgender Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung, ausgehend vom Anfangspunkt x_1 bis zum vorgegebenen Endpunkt x_i:

$$F(x_i) \quad = \quad \sum_{j=1}^{i} P(X = x_j) \; .$$

Verteilungsfunktionen

Eigenschaften



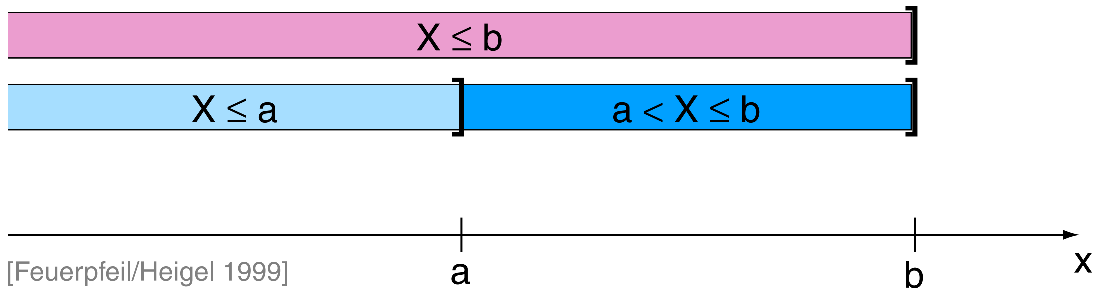
[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Seien $X \leq a$: $\{\omega : X(\omega) \leq a\} \subseteq \Omega$ und $X \leq b$: $\{\omega : X(\omega) \leq b\} \subseteq \Omega$ Ereignisse.

  Die Ereignisse, dass eine auf Ω definierte Zufallsgröße X höchstens den Wert a (b) annimmt.

Verteilungsfunktionen

Eigenschaften



[Feuerpfeil/Heigel 1999]

- Seien $X \leq a$: $\{\omega : X(\omega) \leq a\} \subseteq \Omega$ und $X \leq b$: $\{\omega : X(\omega) \leq b\} \subseteq \Omega$ Ereignisse.
  Die Ereignisse, dass eine auf Ω definierte Zufallsgröße X höchstens den Wert a (b) annimmt.

- $\{\omega : a < X(\omega) \leq b\} \subseteq \Omega$ beschreibt analog das Ereignis $a < X \leq b$.

- Das Ereignis $X \leq b$ lässt sich aus $X \leq a$ und $a < X \leq b$ zusammensetzen:

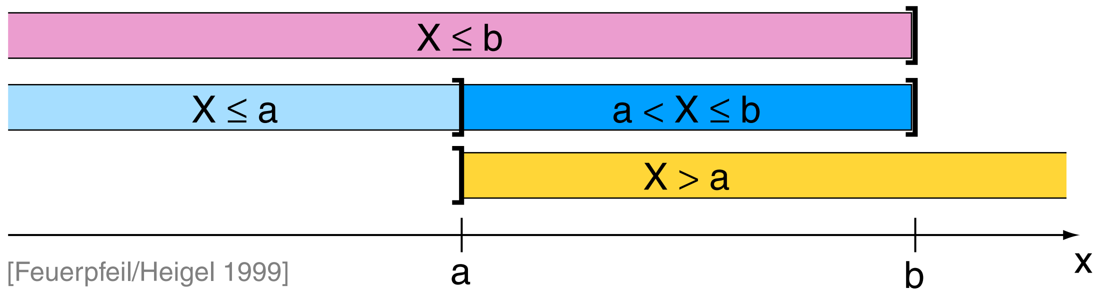
$$P(X \leq b) \;=\; P(X \leq a) + P(a < X \leq b) \quad \text{(Additionsregel)}$$

so dass

$$P(a < X \leq b) \;=\; P(X \leq b) - P(X \leq a) \;=\; F(b) - F(a)\,.$$

Verteilungsfunktionen

Eigenschaften



- Seien $X \leq a$: $\{\omega : X(\omega) \leq a\} \subseteq \Omega$ und $X \leq b$: $\{\omega : X(\omega) \leq b\} \subseteq \Omega$ Ereignisse.
  Die Ereignisse, dass eine auf Ω definierte Zufallsgröße X höchstens den Wert a (b) annimmt.

- $\{\omega : a < X(\omega) \leq b\} \subseteq \Omega$ beschreibt analog das Ereignis $a < X \leq b$.

- Das Ereignis $X \leq b$ lässt sich aus $X \leq a$ und $a < X \leq b$ zusammensetzen:

  $$P(X \leq b) \;=\; P(X \leq a) + P(a < X \leq b) \qquad \text{(Additionsregel)}$$

  so dass

  $$P(a < X \leq b) \;=\; P(X \leq b) - P(X \leq a) \;=\; F(b) - F(a)\ .$$

- Außerdem gilt

  $$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)\ ,$$

  da $X > a$ das Gegenereignis von $X \leq a$ ist.

Verteilungsfunktionen

Zusammen mit Monotonie und Stetigkeit erhält man

Satz 4 (Eigenschaften der Verteilungsfunktion)

Die Verteilungsfunktion F einer Zufallsgröße X mit Wertemenge $W = \{x_1; x_2; \ldots; x_k\}$ ist eine monoton steigende, rechtsseitig stetige *Treppenfunktion* mit den *Sprungstellen* x_1, x_2, ..., x_k und den *Sprunghöhen* $P(X = x_1)$, $P(X = x_2)$, ..., $P(X = x_k)$. Die wichtigsten Eigenschaften der Verteilungsfunktion F sind:

$$
\begin{aligned}
P(X > a) &= 1 - F(a)\ , \\
P(a < X \le b) &= F(b) - F(a)\ , \\
P(X = x_{i+1}) &= F(x_{i+1}) - F(x_i)\ .
\end{aligned}
$$

Bemerkung:

- Die Formeln zeigen, dass sich Berechnungen von Wahrscheinlichkeiten von durch Intervallen dargestellten Ereignissen leichter mit der Verteilungsfunktion durchführen lassen, als mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lebensversicherung

- Versicherungsprämien hängen von Risikogruppen (u.a. Geschlecht, Alter) ab.
- Wie wahrscheinlich stirbt eine 50 Jahre alte Person im Alter von 60 bis 65 vollen Jahren?

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lebensversicherung

- Versicherungsprämien hängen von Risikogruppen (u.a. Geschlecht, Alter) ab.
- Wie wahrscheinlich stirbt eine 50 Jahre alte Person im Alter von 60 bis 65 vollen Jahren?

Sterbetafel Deutschland 2018/20:

Vollendetes	**Überlebende**	
Lebensjahr	weiblich	männlich
⋮		
49	98.006	96.561
50	97.841	96.277
51	97.661	95.968
52	97.458	95.624
53	97.243	95.242
54	97.002	94.812
55	96.735	94.338
56	96.434	93.801
57	96.108	93.207
58	95.747	92.548
59	95.347	91.833
60	94.905	91.035
61	94.418	90.165
62	93.891	89.210
63	93.316	88.162
64	92.685	87.020
65	91.999	85.790
66	91.261	84.473
⋮		

[Statistisches Bundesamt]

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lebensversicherung

- Versicherungsprämien hängen von Risikogruppen (u.a. Geschlecht, Alter) ab.
- Wie wahrscheinlich stirbt eine 50 Jahre alte Person im Alter von 60 bis 65 vollen Jahren?
- Wahrscheinlichkeit, dass das Sterbealter X bzw. Y eines/r 50-jährigen mindestens 66 Jahre ist:

$$P(X \geq 66) = \frac{91.261}{97.841} \text{ bzw. } P(Y \geq 66) = \frac{84.473}{96.277}\,.$$

- Werte der Verteilungsfunktion für $X, Y \leq 65$:

$F_X(65) = 1 - P(X \geq 66)$ bzw. $F_Y(65)$ analog

Sterbetafel Deutschland 2018/20:

Vollendetes Lebensjahr	**Überlebende** weiblich	männlich
⋮		
49	98.006	96.561
50	97.841	96.277
51	97.661	95.968
52	97.458	95.624
53	97.243	95.242
54	97.002	94.812
55	96.735	94.338
56	96.434	93.801
57	96.108	93.207
58	95.747	92.548
59	95.347	91.833
60	94.905	91.035
61	94.418	90.165
62	93.891	89.210
63	93.316	88.162
64	92.685	87.020
65	91.999	85.790
66	91.261	84.473
⋮		

[Statistisches Bundesamt]

Verteilungsfunktionen

Beispiel: Lebensversicherung

- Versicherungsprämien hängen von Risikogruppen (u.a. Geschlecht, Alter) ab.
- Wie wahrscheinlich stirbt eine 50 Jahre alte Person im Alter von 60 bis 65 vollen Jahren?
- Wahrscheinlichkeit, dass das Sterbealter X bzw. Y eines/r 50-jährigen mindestens 66 Jahre ist:

$$P(X \geq 66) = \frac{91.261}{97.841} \text{ bzw. } P(Y \geq 66) = \frac{84.473}{96.277}.$$

- Werte der Verteilungsfunktion für $X, Y \leq 65$:

$F_X(65) = 1 - P(X \geq 66)$ bzw. $F_Y(65)$ analog

- $$\begin{aligned} P(60 \leq X \leq 65) &= F_X(65) - F_X(59) \\ &= 1 - \frac{91.999}{97.841} - \left(1 - \frac{95.347}{97.841}\right) \\ &\approx 3.4\% \end{aligned}$$
- $P(60 \leq Y \leq 65) \approx 6.3\%$

Sterbetafel Deutschland 2018/20:

Vollendetes Lebensjahr	Überlebende weiblich	Überlebende männlich
⋮		
49	98.006	96.561
50	97.841	96.277
51	97.661	95.968
52	97.458	95.624
53	97.243	95.242
54	97.002	94.812
55	96.735	94.338
56	96.434	93.801
57	96.108	93.207
58	95.747	92.548
59	95.347	91.833
60	94.905	91.035
61	94.418	90.165
62	93.891	89.210
63	93.316	88.162
64	92.685	87.020
65	91.999	85.790
66	91.261	84.473
⋮		

[Statistisches Bundesamt]

Bemerkungen:

- Eine Sterbetafel zählt, wie viele von 100.000 Neugeborenen ein bestimmtes Mindestalter in vollen Jahren erreichen.

