Taller - Ecuaciones en diferencias

1) Una bomba de vacío elimina un tercio del aire restante en un cilindro con cada acción. Formule una ecuación que represente esta situación, ¿después de cuántas acciones hay solamente 1/1 000 000 del aire inicial?

K = aire inicial
U_n = aire restante luego de n acciones

$$U_1 = K - \frac{K}{3} = \frac{2}{3}K$$

$$U_2 = U_1 - \frac{U_1}{3} = \frac{2}{3}U_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}K\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 K$$

$$U_3 = \frac{2}{3}U_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 K = \left(\frac{2}{3}\right)^3 K$$

$$U_4 = \frac{2}{3}U_3 = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 K = \left(\frac{2}{3}\right)^4 K$$

$$\boxed{U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n K}$$

$$U_n = \frac{\cancel{K}}{1\,000\,000} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cancel{K}$$

$$\frac{1}{1\,000\,000} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\log\left(\frac{1}{1\,000\,000}\right) = n \log\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$n = \log\left(\frac{1}{1\,000\,000}\right) / \log\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$n = \log(1) - \log(1\,000\,000) / \log(2/3)$$

$$n = \frac{-6}{\log(2/3)} \quad \boxed{\approx 34.07324152}$$

R/ Después de 35 acciones se tiene solamente 1/1000000 del aire inicial

2) Una población se incrementa a una tasa de 25 por cada mil por año. Formule una ecuación en diferencias que describa esta situación. Resuelvrala y encuentre la población en 15 años, asumiendo que la población ahora es de 200 millones. ¿Qué tan largo tomará que la población alcance 750 millones?

K = Población

tasa de crecimiento $= K \cdot \frac{25}{1000} = 0.025K$

U_n = Población luego de n años

$$U_1 = K + 0.025K = 1.025K$$

$$U_2 = U_1 + 0.025U_1 = 1.025U_1$$
$$= 1.025(1.025K) = (1.025)^2K$$

$$U_3 = U_2 + 0.025U_2 = 1.025U_2$$
$$= 1.025(1.025)^2K = (1.025)^3K$$

$$U_4 = U_3 + 0.025\,U_3 = 1.025\,U_3$$
$$= 1.025\,(1.025)^3 K = (1.025)^4 K$$

$$\boxed{U_n = (1.025)^n K}$$

$\Rightarrow$ Población en 15 años? $K = 200\,M$

$$U_{15} = (1.025)^{15} \cdot 200 \quad \boxed{\approx 289.6596\ M}$$

R/ La población en 15 años será de aproximadamente 289.6596 millones

$\Rightarrow$ Llegar a 750 millones?

$$U_n = 750 = (1.025)^n \cdot 200$$
$$\frac{750}{200} = (1.025)^n$$
$$3.75 = (1.025)^n$$
$$\text{Log}(3.75) = n \cdot \text{Log}(1.025)$$
$$n = \frac{\text{Log}(3.75)}{\text{Log}(1.025)} \quad \boxed{\approx 53.5284}$$

R/ Va a tomar 54 años que la población alcance los 750 millones

3) Resuelva:
- $U_n = 4U_{n-1} - 1$, para $n \geq 2$
- $U_n = 3U_{n-1} + 2$, para $n \geq 2$

• $U_n = 4U_{n-1} - 1$, para $n \geq 2$

Haciendo uso de:

$$U_n = KU_{n-1} + C \Rightarrow U_n = K^{n-1}U_1 + \frac{C(K^{n-1}-1)}{K-1}$$

$$K \neq 1$$

tenemos: $K = 4$ y $C = -1$

Luego,

$$U_n = 4^{n-1}U_1 - \frac{(4^{n-1}-1)}{3}$$

y se puede comprobar por sustitución:

$$U_2 = 4U_1 - 1$$
$$U_3 = 4U_2 - 1 = 4(4U_1 - 1) - 1 = 4^2U_1 - 4 - 1$$
$$U_4 = 4U_3 - 1 = 4(4^2U_1 - 4 - 1) - 1$$
$$= 4^3U_1 - 4^2 - 4 - 1$$
$$U_5 = 4U_4 - 1 = 4(4^3U_1 - 4^2 - 4 - 1) - 1$$
$$= 4^4U_1 - 4^3 - 4^2 - 4 - 1$$
$$= 4^4U_1 - (4^3 + 4^2 + 4 + 1)$$

Como:

$$K^{n-2} + K^{n-3} + \dots + 1 = \frac{(K^{n-1}-1)}{K-1} \qquad n \geq 2$$

para $K = 4$, se tiene:

$$\frac{(4^{n-1}-1)}{3}$$

y así se puede observar que el patrón resulta en:

$$\boxed{U_n = 4^{n-1}U_1 - \frac{(4^{n-1}-1)}{3}}$$

- $U_n = 3U_{n-1} + 2$, para $n \geq 2$

Nuevamente haciendo uso de:

$$U_n = KU_{n-1} + C \Rightarrow U_n = K^{n-1}U_1 + \frac{C(K^{n-1}-1)}{K-1}$$

$$K \neq 1$$

tenemos: $K = 3$ y $C = 2$

Luego,

$$U_n = 3^{n-1}U_1 - \frac{\cancel{2}(3^{n-1}-1)}{\cancel{2}}$$

$$= 3^{n-1}U_1 - (3^{n-1}-1)$$

y se puede comprobar por sustitución:

$$U_2 = 3U_1 + 2$$

$$U_3 = 3U_2 + 2 = 3(3U_1 + 2) + 2$$

$$= 3^2U_1 + (3)(2) + 2$$

$$U_4 = 3U_3 + 2 = 3(3^2U_1 + (3)(2) + 2) + 2$$

$$= 3^3 U_1 + (3^2)(2) + (3)(2) + 2$$

$$U_5 = 3U_4 + 2 = 3(3^3 U_1 + (3^2)(2) + (3)(2) + 2)$$

$$= 3^4 U_1 + (3^3)(2) + (3^2)(2) + (3)(2) + 2$$

$$= 3^4 U_1 + 2(3^3 + 3^2 + 3 + 1)$$

Como:

$$K^{n-2} + K^{n-3} + \dots + 1 = \frac{(K^{n-1} - 1)}{K-1} \qquad n \geq 2$$

para $K = 3$, se tiene:

$$\frac{(3^{n-1} - 1)}{2}$$

y así se puede observar que el patrón resulta en:

$$U_n = 3^{n-1} + \cancel{2}\frac{(3^{n-1} - 1)}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{U_n = 3^{n-1} U_1 + (3^{n-1} - 1)}$$

4) Encuentre la solución general para las siguientes ecuaciones:

- $U_n + 4U_{n-1} + 3 = 0$, para $n \geq 1$
- $U_n + 2U_{n-1} - 13 = 0$, para $n \geq 1$

- $U_n + 4U_{n-1} + 3 = 0$, para $n \geq 1$

$U_n = -4U_{n-1} - 3$, para $n \geq 1$

Haciendo uso de:

$$U_n = KU_{n-1} + C \Rightarrow U_n = K^n U_0 + \frac{C(K^n - 1)}{K-1}$$

$$K \neq 1$$

tenemos: $K = -4$ y $C = -3$

Luego,

$$U_n = (-4)^n U_0 + \frac{-3((-4)^n - 1)}{-5}$$

$$U_n = (-4)^n U_0 + \frac{3((-4)^n - 1)}{5}$$

y comprobamos por sustitución:

$$U_1 = -4U_0 - 3$$

$$U_2 = -4U_1 - 3 = -4(-4U_0 - 3) - 3$$

$$= (-4)^2 U_0 + (-4)(-3) - 3$$

$$U_3 = -4U_2 - 3 = -4((-4)^2 U_0 + (-4)(-3) - 3) - 3$$

$$= (-4)^3 U_0 + (-4)^2(-3) + (-4)(-3) - 3$$

$$= (-4)^3 U_0 - 3((-4)^2 + (-4) + 1)$$

Como:

$$K^{n-1} + K^{n-2} + K^{n-3} + \dots + 1 = \frac{(K^n - 1)}{K-1}$$

para $K=-4$, se tiene:

$$\frac{((-4)^n - 1)}{-5}$$

y así se puede observar que el patrón resulta en:

$$U_n = (-4)^n U_0 - 3\left(\frac{((-4)^n - 1)}{-5}\right)$$

$$\boxed{U_n = (-4)^n U_0 + 3\frac{((-4)^n - 1)}{5}}$$

- $U_n + 2U_{n-1} - 13 = 0$, para $n \geq 1$

$$U_n = -2U_{n-1} + 13 \quad , \quad \text{para} \quad n \geq 1$$

Igualmente haciendo uso de:

$$U_n = KU_{n-1} + C \Rightarrow U_n = K^n U_0 + \frac{C(K^n - 1)}{K-1}$$

$$K \neq 1$$

tenemos: $K=-2$ y $C=13$

Luego,

$$U_n = (-2)^n U_0 + \frac{13((-2)^n - 1)}{-3}$$

y comprobamos por sustitución:

$$U_1 = -2U_0 + 13$$

$$U_2 = -2U_1 + 13 = -2(-2U_0 + 13) + 13$$

$$= (-2)^2 U_0 + (-2)13 + 13$$

$$U_3 = -2U_2 + 13 = -2((-2)^2 U_0 + (-2)13 + 13) + 13$$

$$= (-2)^3 U_0 + (-2)^2 13 + (-2)13 + 13$$

$$= (-2)^3 U_0 + 13((-2)^2 + (-2) + 1)$$

Como:

$$K^{n-1} + K^{n-2} + K^{n-3} + \dots + 1 = \frac{(K^n - 1)}{K-1}$$

para $K=-2$, se tiene:

$$\frac{((-2)^n - 1)}{-3}$$

y así se puede observar que el patrón resulta en:

$$U_n = (-2)^n U_0 + 13\frac{((-2)^n - 1)}{-3}$$

$$\boxed{U_n = (-2)^n U_0 - 13\frac{((-2)^n - 1)}{3}}$$

5) Encuentre las soluciones particulares para:

- $U_n = 3U_{n-1} + 5$, para $n \geq 1$ $\quad U_0 = 1$
- $U_n = -2U_{n-1} + 6$, para $n \geq 2$ $\quad U_1 = 3$

- $U_n = 3U_{n-1} + 5$, para $n \geq 1$ $\quad U_0 = 1$

Haciendo uso de:

$$U_n = KU_{n-1} + C \Rightarrow U_n = K^n U_0 + \frac{C(K^n - 1)}{K-1}$$

$$K \neq 1$$

tenemos: $K = 3$ y $C = 5$

Luego,

$$U_n = 3^n U_0 + \frac{5(3^n - 1)}{2}$$

y con $U_0 = 1$ la solución particular sería:

$$\boxed{U_n = 3^n + \frac{5(3^n - 1)}{2}}$$

- $U_n = -2U_{n-1} + 6$, para $n \geq 2$ $\quad U_1 = 3$

Haciendo uso de:

$$U_n = KU_{n-1} + C \Rightarrow U_n = K^{n-1} U_1 + \frac{C(K^{n-1} - 1)}{K-1}$$

$$K \neq 1$$

tenemos: $K = -2$ y $C = 6$

Luego,

$$U_n = (-2)^{n-1} U_1 + \frac{6((-2)^{n-1} - 1)}{5}$$

y con $U_1 = 3$ la solución particular sería:

$$\boxed{U_n = 3(-2)^{n-1} + \frac{6((-2)^{n-1} - 1)}{5}}$$

6) Encuentre y resuelva la ecuación en diferencias asociada a 7, 17, 37, 77, 157, ...

$a_0 = 7$, $a_1 = 17$, $a_2 = 37$, $a_3 = 77$, $a_4 = 157$

Podemos ver que:

$17 - 7 = 10 \rightarrow 7 = 17 - 10$

$37 - 17 = 20 \rightarrow 17 = 37 - 20$

$77 - 37 = 40 \rightarrow 37 = 77 - 40$

$157 - 77 = 80 \rightarrow 77 = 157 - 80$

$\therefore a_n = Kr^n$ (Homogénea)

$a_n - a_{n+1} + 2^n \cdot 10 = 0 \Rightarrow r^n - r^n r = 0$

$r^n(1 - r) = 0 \Rightarrow r = 1$

$a_n = K1^n \Rightarrow a_n = K$

$f(t) = -2^n \cdot 10$

teniendo en cuenta el caso particular $2^n \cdot 10$, se tiene la propuesta:

$$A \cdot 2^n = a_{np}$$
$$a_{n+1p} = A \cdot 2^{n+1}$$

Reemplazamos en $a_n - a_{n+1} + 2^n \cdot 10 = 0$

$$A \cdot 2^n - A \cdot 2^{n+1} = -2^n \cdot 10$$
$$A \cdot 2^n - A \cdot 2^n \cdot 2 = -2^n \cdot 10$$
$$-A2^n = -2^n \cdot 10 \implies A = 10$$

$a_{np} = 10 \cdot 2^n$ (Particular)
$a_n = K$ (Homogénea)

Solución general:

$$\boxed{a_n = K + 10 \cdot 2^n, \quad K = -3}$$

7) Encuentre el pago mensual por un préstamo por 400 millones de pesos en un periodo de 3 años a una tasa de interés del 21% por año.

C = inversión inicial
n = número de periodos de pago del prestamo en meses
i = tasa de interés mensual

tenemos la ecuación:

$$\boxed{U_n = C \cdot \frac{(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1}}$$

U_n = Pago mensual para n meses

Sabemos que $C = 400\,000\,000$
$n = 3 \cdot 12 = 36$ (meses)
$i = \frac{21\%}{12} = 1.75\% = \frac{1.75}{100}$

Reemplazando tenemos que:

$$U_{36} = 400\,000\,000 \cdot \frac{\left(1 + \frac{1.75}{100}\right)^{36} \cdot \frac{1.75}{100}}{\left(1 + \frac{1.75}{100}\right)^{36} - 1}$$

$$\boxed{U_{36} = 15\,070\,026.93}$$

R/ El pago mensual será de 15 070 026.93

8) Una plantación de café incrementa su producción un 1% por mes desde una tasa de 200 toneladas por mes. Las ordenes (uso de café) permanecen en 1600 toneladas por mes. ¿Cuánto café se puede apilar después de un periodo de 12 meses, después de un periodo de 2 años?

$$U_1 = 200t + 200t \cdot 1\% - 1600t$$
$$U_n = U_{n-1} + U_{n-1} \cdot 1\% - 1600t, \quad P_0 = 200t$$

$$U_{n-1} \cdot \frac{101}{100} - 1600t$$

$$P_n = P_0 - \frac{b}{1-a} a^n + \frac{b}{1-a}$$

$$U_n = \left(200t - \frac{(-1600t)}{1 - \frac{101}{100}}\right) \cdot \left(\frac{101}{100}\right)^n + \left(\frac{-1600t}{1 - \frac{101}{100}}\right)$$

$$U_n = (-159\,800t)\left(\frac{101}{100}\right)^n + 160\,000t$$

$$200t + 200t \cdot 1\% - 1600t = -1398$$

R/ Con 1600 de demanda no se pueden cubrir los 200 de producción con un incremento del 1%, pues si la demanda es mayor que el incremento, el café nunca se va a acumular

⇒ Para que el café se acumule:

$$\text{demanda} < P_{n-1} \cdot m\%$$

9) La productividad en una plantación de 2000 árboles se incrementa 5% cada año por la implementación de mejores técnicas de agricultura. El granjero también planta además 100 árboles por año. Estime el porcentaje de mejora en la productividad durante los siguientes 10 años.

$$U_0 = 2000$$

$$U_1 = 2000 + 2000 \cdot 5\% + 100$$

$$U_n = U_{n-1}\frac{21}{20} + 100$$

$$U_n = \left(2000 - \frac{100}{1-\frac{21}{20}}\right)\left(\frac{21}{20}\right)^n + \left(\frac{100}{1-\frac{21}{20}}\right)$$

$$U_n = (4000)\left(\frac{21}{20}\right)^n - 2000$$

$$U_{10} = 4515.58$$

$$\% = \frac{4515.58 - 2000}{2000} \boxed{\approx 126\%}$$

R/ El porcentaje de mejora en la productividad es aproximadamente del 126%

10) Resuelva $U_n = 3U_{n-1} + n$, para $U_1 = 5$

La ecuación general sería $U_n = 3U_{n-1} + n$

De este modo, se va a reemplazar hasta el valor de U que se quiere obtener:

$$U_2 = 3U_1 + 2 = 3\cdot 5 + 2 = 17$$
$$U_3 = 3U_2 + 3 = 3\cdot 17 + 3 = 54$$
$$U_4 = 3U_3 + 4 = 3\cdot 54 + 4 = 166$$
$$U_5 = 3U_4 + 5 = 3\cdot 166 + 5 = 503$$
$$U_6 = 3U_5 + 6 = 3\cdot 503 + 6 = 1515$$

$\Rightarrow$ La secuencia que tenemos de U_1 hasta U_6 es: 17, 54, 166, 503, 1515

11) Encuentre la solución general para $U_n = U_{n-1} + z^n$ y $U_n = zU_{n-1} + n$

- $U_n = U_{n-1} + z^n$

Por sustitución inversa llegamos a la forma:

$$U_n = U_0 + z^1 + z^2 + \cdots + z^n$$

Podemos observar que la suma de potencias sigue siendo una progresión geométrica. El primer término de la progresión geométrica es $z^1 = z$, la razón común es z, y el número de términos es n. Por lo tanto, la suma de las potencias de z está dada por:

$$S = z \cdot \frac{(z^n - 1)}{z - 1} = z(z^n - 1)$$

Ahora, sustituyendo en la ecuación recursiva original, tenemos:

$$\boxed{U_n = U_0 + z(z^n - 1)}$$

Solución General

- $U_n = zU_{n-1} + n$

Por sustitución inversa llegamos a la forma:

$$U_n = 2^n U_0 + (2^{n-1} \cdot 1 + 2^{n-2} \cdot 2 + \cdots + 2^{n-n} \cdot n)$$
$$U_n = 2^n U_0 + (2^{n-1} + 2^{n-2} \cdot 2 + \cdots + 2^0 \cdot n)$$
$$\boxed{U_n = 2^n U_0 + (2^{n-1} + 2^{n-2} \cdot 2 + \cdots + n)}$$

Solución General

En la parte derecha se tiene una suma de factores de 2 con exponente que va desde $n-1$ hasta 0, multiplicados por un término que va desde 1 hasta n.

12) Si $U_n = KU_{n-1} + 5$ y $U_1 = 4$ y $U_2 = 17$ encuentre los valores de K y U_6.

Para obtener K, se va a despejar en U_2:

$$U_2 = KU_1 + 5$$
$$17 = K(4) + 5$$
$$17 - 5 = K(4)$$
$$K = \frac{12}{4} \Rightarrow \boxed{K = 3}$$

Ahora, conociendo el valor de K, vamos a despejar hasta U_6

$$U_3 = KU_2 + 5 = 3(17) + 5 = 56$$
$$U_4 = KU_3 + 5 = 3(56) + 5 = 173$$
$$U_5 = KU_4 + 5 = 3(173) + 5 = 524$$
$$U_6 = KU_5 + 5 = 3(524) + 5 = 1577$$

$$\Rightarrow \boxed{U_6 = 1577}$$

13) Use iteración para resolver la siguiente relación de recurrencia $U_n = \dfrac{U_{n-1}}{U_{n-2}}$, para $n \geq 2$, sujeto a la condición inicial $U_1 = \dfrac{1}{6}$

Primero, escribimos las ecuaciones desde U_2:

$$U_2 = \frac{U_1}{U_0} = \frac{\frac{1}{6}}{U_0} = \frac{1}{6U_0}$$

$$U_3 = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1/6U_0}{1/6} = \frac{1}{U_0}$$

$$U_4 = \frac{U_3}{U_2} = \frac{1/U_0}{1/6U_0} = 6$$

$$U_5 = \frac{U_4}{U_3} = \frac{6}{1/U_0} = 6U_0$$

$$U_6 = \frac{U_5}{U_4} = \frac{6U_0}{6} = U_0$$

Y como obtenemos el valor de U_0 en U_6 podemos deducir que los valores se van a repetir cada 6 valores de U.

14) Investigue el límite de $\dfrac{U_n}{U_{n+1}}$ si

$$U_n = U_{n-1} + 2U_{n-2}$$

$$U_{n+1} = U_n + 2U_{n-1}$$

$$\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{U_{n-1} + 2U_{n-2}}{U_n + 2U_{n-1}}$$

Si $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{U_{n+1}}$ (converge a L)

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} U_{n\pm i}$ y es L

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{U_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n-1} + 2U_{n-2}}{U_n + 2U_{n-1}}$$

$$L = \frac{L+2L}{L+2L} \sim L = 1$$

$$\boxed{\therefore \text{ el límite } \frac{U_n}{U_{n+1}} = 1}$$

15) Encuentre el n-ésimo término de la siguiente secuencia: $-3, 21, 3, 129, 147, \ldots$

Para $n > 1$:

$$U_1 = -3 = (-1)(-3) - 5$$
$$U_2 = 21 = (-1)^2(-3)^2 + 12$$
$$U_3 = 3 = (-1)^3(-3)^3 - 24$$
$$U_4 = 129 = (-1)^4(-3)^4 + 48$$
$$U_5 = 147 = (-1)^5(-3)^5 - 96$$

$$\Rightarrow \boxed{f(n) = (-1)^n(-3)^n - (-1)^n \cdot 6 \cdot 2^{n-1}}$$

16) Resuelva $U_n - 6U_{n-1} + 8U_{n-2} = 0$, para $n \geq 3$ dado $U_1 = 10$ y $U_2 = 28$. Evalúe U_6

Para $U_n - 6U_{n-1} + 8U_{n-2} = 0$ se aplica el polinomio auxiliar donde $m = 1$, $p = 6$ y $q = -8$ dando como resultado la expresión:

$$m^2 - 6m + 8 = 0 \qquad \begin{cases} m_1 = 4 \\ m_2 = 2 \end{cases}$$

Las raices se reemplazan de la forma:

$$U_n = A(4)^n + B(2)^n$$

Reemplazando con U_1 y U_2 se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} U_1 = 10 = A(4)^1 + B(2)^1 \\ U_2 = 28 = A(4)^2 + B(2)^2 \end{cases}$$

donde $A = 1$ y $B = 3$, obteniendo así que:

$$\boxed{U_n = 4^n + 3(2)^n}$$

Evaluando para U_6:

$$U_6 = 4^6 + 3(2)^6 \Rightarrow \boxed{U_6 = 4288}$$

17) Encuentre la solución particular para $U_{n+2} + 2U_{n+1} + U_n = 0$, para $n \geq 1$, cuando $U_1 = -1$, $U_2 = -2$

Usamos la fórmula cuadrática para hallar la solución general:

$$(r^2 + 2r + 1) = 0 \qquad \Rightarrow r = -1$$
$$(r+1)(r+1) = 0$$

Ahora, podemos poner los valores en la solución general:

$$U_n = P(-1)^n + n \cdot Q(-1)^n$$
$$-1 = P(-1)^1 + Q(-1)^1 \cdot 1$$
$$-1 = -P + (-Q)$$

Y hacemos lo mismo con la otra solución:

$$-2 = P(-1)^2 + Q(-1)^2 \cdot 2$$
$$-2 = P + 2Q$$

$$-1 = -P + 3 \Rightarrow P = 4$$
$$-1 = -4 - Q \Rightarrow Q = -3$$

$\therefore$ La solución particular es:

$$\boxed{U_n = 4(-1)^n - 3(-1)^n \cdot n}$$

18) Encuentre la solución general de la siguiente ecuación $U_n - 5U_{n-1} + 6U_{n-2} = f(n)$ cuando $f(n) = 2$, $f(n) = n$, $f(n) = 5^n$ y $f(n) = 1 + n^2$

Solución homogénea (válida para todo $f(n)$):

$$U_n - 5U_{n-1} + 6U_{n-2} = 0$$
$$r^n r^2 - 5r^n r + 6r^n = 0$$
$$r^n(r^2 - 5r + 6) = 0 \implies \begin{cases} r_1 = 2 \\ r_2 = 3 \end{cases}$$

$\boxed{U_n = K_1(2)^n + K_3(3)}$ (Sin condiciones iniciales)

Solución particular para $f(n) = n$

$$U_n = a + bn$$
$$U_{n-1} = a + b(n-1)$$
$$U_{n-2} = a + b(n-2)$$
$$U_n - 5U_{n-1} + 6U_{n-2} = n$$

$$a + bn - 5a - 5b(n-1) + 6a + 6b(n-2) = n$$
$$a + bn - 5a - 5bn + 5b + 6a + 6bn - 12b = n$$
$$2a - 7b + 2bn = n \implies \begin{cases} 2a - 7b = 0 \\ 2b = 1 \end{cases}$$

$a = \frac{7}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, entonces

$$\boxed{U_n = K_1 \cdot (2)^n + K_3 \cdot (3)^n + \frac{7}{4} + \frac{1}{2}n}$$

Solución particular para $f(n) = 5^n$

$U_n = a5^n$, $U_{n-1} = a5^{n-1}$, $U_{n-2} = a5^{n-2}$

$a5^n - 5a5^{n-1} + 6a5^{n-2} = 5^n$

$6a5^{n-2} = 5^n$

$\frac{6a5^n}{25} = 5^n \sim a = \frac{25}{6}$

$U_n = K_1 \cdot (2)^n + K_3 (3)^n + \frac{25}{6} \cdot 5^n$

$$\boxed{U_n = K_1 \cdot (2)^n + K_3 (3)^n + \frac{5^{n+2}}{6}}$$

Solución particular para $f(n) = 1 + n^2$

$U_n = a + bn + cn^2$

$U_{n-1} = a + b(n-1) + c(n-1)^2$

$U_{n-2} = a + b(n-2) + c(n-2)^2$

$U_n - 5U_{n-1} + 6U_{n-2} = 1 + n^2$

$a + bn + cn^2 - 5a - 5b(n-1) - 5c(n-1)^2 + 6a +$

$6b(n-2) + 6c(n-2)^2 = 1 + n^2$

$(2a - 7b + 19c) + n(2b - 14c) + n^2(2c) = 1 + n^2$

$a = 8$, $b = \frac{7}{2}$, $c = \frac{1}{2}$

$$\boxed{U_n = K_1 \cdot (2)^n + K_3 \cdot (3)^n + 8 + \frac{7}{2}n + \frac{1}{2}n^2}$$

19) Resuelva las siguientes ecuaciones en diferencias utilizando la función generatriz $U_n - 3U_{n-1} + 4U_{n-2} = 0$, dado $U_0 = 0$, y $U_1 = 20$, $n \geq 2$

$$G(x) = U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + \cdots$$
$$= 0 + 20x + U_2 x^2 + \cdots$$

expresamos los siguientes resultados:

$$U_2 = 3U_1 - 4U_0$$
$$U_3 = 3U_2 - 4U_1$$
$$U_4 = 3U_3 - 4U_2$$

Escribimos la generatriz junto a la ecuación:

$$20x + (-3U_1 + 4U_0)x^2 + (-3U_2 + 4U_1)x^3$$
$$20x + (3U_1 x^2 + 3U_2 x^3 + 3U_3 x^4 + \cdots)$$
$$-(4U_0 x^2 + 4U_1 x^3 + 4U_2 x^4 + \cdots)$$

Hallamos factor común:

$$= 20x + 3x(U_1 x + U_2 x^2 + U_3 x^3 + - \cdots)$$
$$-4x^2(U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + \cdots)$$

$$= 20x + 3x(G(x) - U_0) - 4x^2 G(x)$$
$$= 20x + 3x(G(x) - 0) - 4x^2 G(x)$$

$$G(x) = 20x + 3x\,G(x) - 4x^2 G(x)$$
$$G(x) = -3x\,G(x) + 4x^2 G(x) = 20x$$

$$G(x) = (1 - 3x + 4x^2) = 20x$$

$$G(x) = \frac{20x}{1 - 3 + 4x^2}$$

Ahora usamos fracciones parciales:

$$G(x) = \frac{-20}{(4x-1)(x+1)} = \frac{A}{(4x-1)} + \frac{B}{(x+1)}$$

$$-20 = A(x-1) + B(4x-1)$$

$$-20 = A(1-1) + B(4(-1-1))$$

$$-20 = 0 + B(-5) \Rightarrow \underline{B = -4}$$

$$-20 = A\left(\frac{1}{4} + 1\right) + B\left(4 \cdot \frac{1}{4}\right) - 1$$

$$-20 = A\frac{5}{4} + 0$$

$$A = \frac{-20 \cdot 4}{5} = \frac{-4 \cdot 4 \cdot 5}{5} \Rightarrow \underline{A = -16}$$

$$G(x) = \frac{16}{(4x-1)} + \frac{4}{x+1}$$

$$(1-4x)^{-1} = 1 + 4x + (4x)^2 + (4x)^3$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + (x)^2 + (-x)^3 + \cdots$$

Por lo tanto,

$$G(x) = 16(1 + 4x + (4x)^2 + \cdots) + 4(1 - x + (x) - \cdots)$$

y si se saca el n-ésimo término de cada paréntesis se obtienen:

$$U_n = 16(4)^n + 4(-1)^n$$
$$U_n = 4(4\cdot 4^n + (-1)^n)$$
$$U_n = 4(4^{n+1} + (-1)^n)$$

20) Encuentre la función generatriz de la Secuencia de Fibonacci.

Tenemos la secuencia $U_n = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$ con $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Para la secuencia U_n de números reales la función generatriz se define como:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n Z^n$$

Para Fibonacci:

$$G(z) = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 8z^5 + 13z^6 + \dots + f_n z^n$$

Ahora, cambiamos una posición a la derecha y multiplicamos por z:

$$zG(z) = z + z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 5z^5 + 8z^6 + \dots$$

Ahora, cambiamos una posición más a la derecha y multiplicamos por z:

$$z^2 G(z) = z^2 + z^3 + 2z^4 + 3z^5 + 5z^6 + 8z^7 + \cdots$$

Ahora, la ecuación 2 y la ecuación 3:

$$z\,G(z) + z^2 G(z) = z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 8z^5 + 13z^6 + \cdots$$
$$z\,G(z) + z^2 G(z) = G(z) - 1$$
$$z\,G(z) - z\,G(z) - z^2 G(z) = 1$$

Entonces, la función generatriz para la serie de fibonacci es:

$$\boxed{G(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}} = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 5z^4 + 8z^5 + 13z^6 + \cdots + F_n z^n + \cdots$$

21) Utilice el método de la función generatriz para resolver $U_n - U_{n-1} = 3^n$, para $n \geq 1$ dado $U_0 = 1$

Planteamos la homogénea:

$$U_n - 2U_{n-1} = 0$$
$$U_1 = 2U_0 = 2$$
$$U_2 = 2U_1 = 4$$
$$U_3 = 2U_2 = 8$$
$$U_4 = 2U_3 = 16$$

$$G(x) = 1 + (2U_0)x + (2U_1)x^2 + (2U_2)x^3 + (2U_3)x^4 + \cdots$$
$$G(x) = 1 + 2x + (2\cdot 2)x^2 + (2\cdot 4)x^3 + (2\cdot 8)x^4 + \cdots$$

En general, tenemos que el n-ésimo término de $G(x) = 2(2^n)x^n \sim U_n = 2^n \cdot 2$

Resolvemos la homogénea de $f(n)$ particular:

$3^n = 0$:

$$U_n = \alpha 3^n$$
$$U_{n-1} = \alpha 3^{n-1}$$
$$\alpha 3^n - 2\alpha 3^{n-1} = 3^n$$
$$\alpha 3^0 - 2\alpha 3^{-1} = 3^0 = 1$$
$$\alpha - \frac{2}{3} = 1$$
$$\frac{1}{3}\alpha = 1$$

$$\alpha = 3 \sim U_n = 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$$
$$U_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$$
$$U_0 = 3^1 - 2^1 = 1$$