Departamento de ingeniería de sistemas y computación
Facultad de ingeniería
Universidad Nacional de Colombia

Ingeniería de sistemas y computación

Tarea 1 - Demostraciones de asociatividad

Karen Tatiana Alvarez Baez

Ejercicio 1

Dado G = {a, b, c, d}

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	d	d
c	a	b	d	c
d	d	a	c	b

Probar o refutar que el conjunto con la multiplicación es asociativo.

Demostración:

Se prueba la asociatividad al combinar diferentes elementos de G.

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$
$$b * c = a * d$$
$$d = d$$

$$(a * b) * d = a * (b * d)$$
$$b * d = a * d$$
$$d = d$$

$$(a * b) * a = a * (b * a)$$
$$b * a = a * c$$
$$c = c$$

$$(b * c) * d = b * (c * d)$$
$$d * d = b * c$$
$$b = d$$

Existe por lo menos un caso en el que la multiplicación no es asociativa, por lo tanto, el conjunto no es asociativo, lo que quiere decir, que no es un monoide.

Ejercicio 2

Probar o refutar que la multiplicación de matrices cuadradas es asociativa.

Demostración:
Para probar la asociatividad se va a demostrar que para las matrices cuadradas cualquiera A, B, C se tiene que:

$$(A * B) * C = A * (B * C)$$

si, $\quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} ei + fk & ej + fl \\ gi + hk & gj + hl \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i(ae + bg) + k(af + bh) & j(ae + bg) + l(af + bh) \\ i(ce + dg) + k(cf + dh) & j(ce + dg) + l(cf + dh) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(ei + fk) + b(gi + hk) & a(ej + fl) + b(gj + hl) \\ c(ei + fk) + d(gi + hk) & c(ej + fl) + d(gj + hl) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} iae + ibg + kaf + kbh & jae + jbg + laf + lbh \\ ice + idg + kcf + kdh & jce + jdg + lcf + ldh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aei + afk + bgi + bhk & aej + afl + bgj + bhl \\ cei + cfk + dgi + dhk & cej + cfl + dgj + dhl \end{bmatrix}$$

Ambos términos coinciden porque la multiplicación y la suma en $\mathbb{R}$ es conmutativa, por lo tanto, la multiplicación de matrices cuadradas es asociativa.

Ejercicio 3

Probar que el producto es un grupo en los complejos para la siguiente definición de producto:

$$(a + bi) * (c + di) = ac + (bc + ad)i - bd(ac - bd) + (bc + ad)i$$

Demostración:

1) $\forall a \in \mathbb{C} \ \ \exists \ e \in \mathbb{C}$, donde $e = 1 + 0i$, talque $e * a = a$, de modo que se tiene un elemento neutro.

2) $\forall a \in \mathbb{C} \ \ \exists \ b, e \in \mathbb{C}$, donde $b = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$ y $e = 1 + 0i$, talque $b * a = e$, de modo que se tienen inversos.

3) Representando los numeros complejos en coordenadas polares de la forma:

$$a + bi = rcos\theta + (rsin\theta)i$$

podemos establecer una relación con la ecuacion de euler,

$$e^{ix} = cosx + isinx$$

De este modo tenemos que:

$$a + bi = rcos\theta + (rsin\theta)i = re^{i\theta}$$

Luego, se procede a demostrar la asociatividad en coordenadas polares,

$$\left(r_1e^{i\theta_1} * r_2e^{i\theta_2}\right) * r_3e^{i\theta_3} = r_1e^{i\theta_1} * \left(r_2e^{i\theta_2} * r_3e^{i\theta_3}\right)$$
$$r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} * r_3e^{i\theta_3} = r_1e^{i\theta_1} * r_2r_3e^{i(\theta_2+\theta_3)}$$
$$r_1r_2r_3e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)} = r_1r_2r_3e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}$$

Como el producto en los complejos tiene un elemento neutro, un inverso para cada elemento dentro de los complejos y la operacion es cerrada y asociativa, se concluye que el producto con los complejos es un grupo.