Departamento de ingeniería de sistemas y computación
Facultad de ingeniería
Universidad Nacional de Colombia

Tarea - Demostraciones subgrupos

Karen Tatiana Alvarez Baez

---

1) Probar que el kernel de un homomorfismo es un subgrupo.

$$Ker(\theta) = \{x \in G : \theta_x = 1\}, \qquad donde \quad \theta : G \to H$$

Para ver que $1 \in Ker(\theta)$, tenemos $\theta(1) = 1$ por proposición en los homomorfismos, donde $F(1_G) = 1_H$, por lo tanto, se tiene la identidad.

Ahora, sean a,b $\in Ker(\theta)$. Por definición $\theta(a) = 1 \;\; y \;\; \theta(b) = 1$

$$\Rightarrow \theta(ab) = \theta(a)\theta(b) \qquad \text{Por ser homomorfismo}$$
$$\Rightarrow \theta(ab) = 1 * 1 \qquad \text{Por definición}$$
$$\Rightarrow \theta(ab) = 1$$

Por lo tanto, $ab \in Ker(\theta)$

.

Finalmente, sea a $\in Ker(\theta)$

$\Rightarrow \theta\left(a^{-1}\right) = [\theta(a)]^{-1}$, por la proposición en homomorfismos donde $\forall x \in G \quad F\left(x^{-1}\right) = [F(x)]^{-1}$

y como $\theta(a) \in Ker(\theta), \quad \theta(a) = 1$

Luego,

$$\theta\left(a^{-1}\right) = \theta[1]^{-1} = 1 \qquad \text{Porque el inverso del neutro es el neutro}$$

Por lo tanto, $a^{-1} \in Ker(\theta)$.

Como se cumplen las 3 condiciones $Ker(\theta)$ es un subgrupo en este caso de G.

2) Probar que la imagen de un homomorfismo es un subgrupo.

$$img(\theta) = \{y \in H : \theta_x = y \quad \forall x \in G\}, \qquad donde \quad \theta : G \to H$$

Por la proposición en homomorfismos donde $F(1_G) = 1_H$, tenemos que $\theta(1) = 1$

Por lo tanto, $1 \in img(\theta)$.

Ahora sean $\theta(a), \theta(b) \in img(\theta)$

$$\theta(a)\theta(b) = \theta(ab) \qquad \text{Por ser homomorfismo}$$

Por lo tanto, $\theta(a)\theta(b) \in img(\theta)$.

Finalmente, dado $\theta(a) \in img(\theta)$, se tiene

$$[\theta(a)]^{-1} = \theta\left(a^{-1}\right) \qquad \text{Por proposición en homomorfismos}$$

Por lo tanto, $[\theta(a)]^{-1} \in img(\theta)$

Como se cumplen las 3 condiciones $img(\theta)$ es un subgrupo en este caso de H.

3) Demostrar el siguiente teorema:

Teorema. Sea x un subconjunto del grupo G, entonces hay un subgrupo S más pequeño que G que contiene a x, es decir, si T es cualquier otro subgrupo que contiene a x, $S \subseteq T$.

Si x es un subconjunto de G, entonces $x \subset G$ pero no necesariamente es un subgrupo.

Para encontrar el subgrupo más pequeño de G que contenga a x se puede considerar la intersección de todos los subgrupos de G que contengan a x.

$$< x >= \ \cap \ H, \quad con \ \ H < G \ \ y \ \ x \subset H$$

Esta intersección es no vacía ya que al menos G es un subgrupo que contiene a x y esta intersección siempre va a dar un subgrupo, que en este caso será S.

Luego, como S es el subgrupo más pequeño, para cualquier subgrupo más grande que contenga a x, que puede ser el mismo G, $S \subseteq T$, ya que S se obtiene de la intersección de más subgrupos que contienen a x.