Grundlagen der Signalverarbeitung

von Kaan Büyükşahin

Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik
Fachgebiet Signalverarbeitung

Letzte Aktualisierung: 21. Februar 2025

Mathematische Zusammenhänge

Trigonometrische Funktionen

Winkeltabelle

DEG	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	n. d.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	n. d.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Pythagoras

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Symmetrie und Verschiebung

$$\begin{aligned}
\cos(-x) &= \cos(x) \quad \text{(gerade Funktion)} \\
\sin(-x) &= -\sin(x) \quad \text{(ungerade Funktion)} \\
\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x) \\
\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin(x)
\end{aligned}$$

Doppelwinkelfunktionen

$$\begin{aligned}
\cos^2(x) &= \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2x)\right) \\
\sin^2(x) &= \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2x)\right) \\
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\
&= 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 \\
\sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x)
\end{aligned}$$

Additionstheoreme

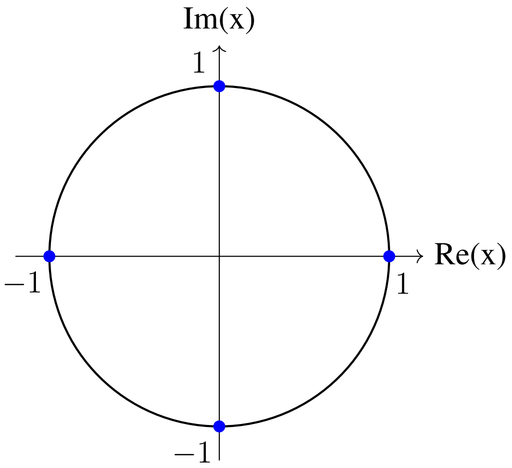
$$\begin{aligned}
\cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \\
\sin(x \pm y) &= \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \\
\sin(x) + \sin(y) &= 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
\sin(x) - \sin(y) &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
\sin(x)\sin(y) &= \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right] \\
\cos(x) + \cos(y) &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
\cos(x) - \cos(y) &= -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
\cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right] \\
\sin(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]
\end{aligned}$$

Komplexe Zahlen und Integrale

Komplexer Zeiger mit Einheitskreis und Punkten

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$x = e^{j\varphi}$	1	j	-1	$-j$	1
Punkt	$(1,0)$	$(0,1)$	$(-1,0)$	$(0,-1)$	$(1,0)$

$-\varphi$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	-2π
$x = e^{-j\varphi}$	1	$-j$	-1	j	1
Punkt	$(1,0)$	$(0,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$



Grundlagen komplexer Zahlen

$$\begin{aligned} j^2 &= -1 \\ -j^2 &= 1 \\ j &= \sqrt{-1} \\ j^{-1} &= \frac{1}{j} = -j \\ j^3 &= j \cdot j^2 = -j \\ j^4 &= (j^2)^2 = 1 \end{aligned}$$

Darstellung von Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= \cos(\varphi) + j\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) &= \frac{1}{2}\left(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}\right) \\ \sin(\varphi) &= \frac{1}{2j}\left(e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}\right) \end{aligned}$$

Betragsdefinitionen

$$\begin{aligned} |x| &= \sqrt{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}) \\ |z| &= \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \quad (z \in \mathbb{C}) \\ z &= x + j\,y, \\ |z|^2 &= z \cdot z^* = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \\ |e^{j\varphi}| &= 1 \\ |e^{-j\varphi}| &= 1 \end{aligned}$$

Integrale

$\int \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{x^{1-n}}{1-n} + C,\quad$ für $n \neq 1$

$\int x\sqrt{X}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{X^3}\quad$ mit $X = a^2 - x^2$

$\int x^2\sqrt{X}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right)$

$\int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax)$

$\int \sin^2(ax)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin(2ax)$

$\int x\sin(ax)\,dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a}$

$\int x^2\sin(ax)\,dx = \frac{2x}{a^2}\sin(ax) - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\cos(ax)$

$\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax)$

$\int \cos^2(ax)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin(2ax)$

$\int x\cos(ax)\,dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\sin(ax)}{a}$

$\int x^2\cos(ax)\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos(ax) + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin(ax)$

$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}\cdot(ax-1)$

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Parameter einer Verteilung

- **Erwartungswert (Mittelwert):**

$$\mu = \mathbb{E}[X]$$

- **Varianz oder Streuung:**

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

- **Standardabweichung:**

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Rechenregeln für Erwartungswerte

- **Linearität des Erwartungswertes:**

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$$

- **Erwartungswert einer Konstanten:**

$$\mathbb{E}[c] = c, \quad \text{für eine Konstante } c$$

- **Multiplikation unabhängiger Zufallsvariablen:**

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

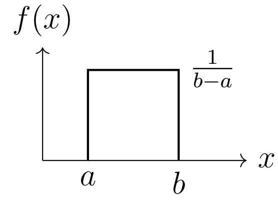
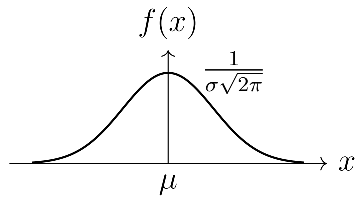
- **Erwartungswert einer Summe:**

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

- **Quadratische Form:**

$$\mathbb{E}[X^2] = \text{Var}(X) + (\mathbb{E}[X])^2$$

Verteilungen

	$W(X)$	$f(x)$	$E[X]$	**Var**(X)	**Diagramm der Dichte**
Gleichverteilung	$[a, b]$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	
Normalverteilung	$\mathbb{R}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	

Normalverteilung = Standardnormalverteilung = Gauß-Verteilung

Gleichv. = Rechteckv. = Uniformv. = Konstante Verteilung = Diskrete Gleichv. = Stetige Gleichv.

Eigenschaft	Verteilung	Parameter	Dichtefunktion $f_x(X)$	Verteilungsfunktion $F_x(X)$
Beschreibung	Normal- oder Gaußverteilung	$\mu = 0, \sigma = 1$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Normal- und Gaußverteilung beschreibt dasselbe (Synonyme)

Prüfungsaufgabe 1: Teil 1

Wahrscheinlichkeit

Rechengesetze

Additionssatz

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Komplementärereignis

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$

Zerlegung eines Ereignisses

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

Kommutativgesetz

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Assoziativgesetz

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Distributivgesetz

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

De Morgan'sche Gesetze

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Unabhängige Ereignisse

stochastisch **unabhängig**
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

stochastisch abhängig

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad$ falls $P(B) > 0$

Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

$P(A) = \sum_{i=1}^{N} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)$

Bayes

falls $P(B)$ nicht bekannt

$P(A_k \mid B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^{N} P(B|A_i) P(A_i)}$

falls $P(B)$ bekannt

$P(A_k \mid B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)}$

Weitere Formeln

Multiplikationsregel mit bedingter Wahrscheinlichkeit

$P(A_1 \cap A_2 \mid B) = P(A_1 \mid B) \cdot P(A_2 \mid B)$

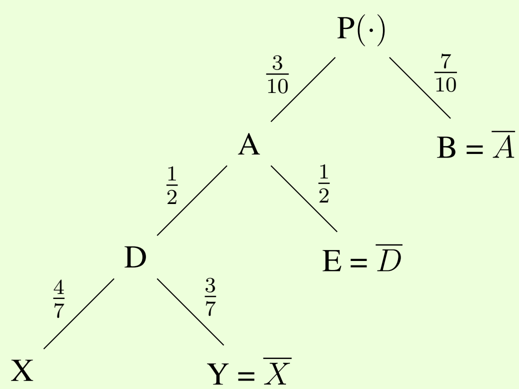
Relative Häufigkeit

$n(A)$: Anzahl der Häufigkeit / Eintreten

N: Gesamtanzahl der Versuche / Beobachtungen

$P(A) = \frac{n(A)}{N}$

Baumdiagramm



Prüfungsaufgabe 1: Teil 2

Diskrete Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$
2. Wahrscheinlichkeit ist nicht negativ!
3. $f_X(x)$ ist stückweise kontinuierlich

$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$

Erwartungswert

$\mu = E[X]$

$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx$

$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f_X(x)\,dx$

Bedingter Erwartungswert

$$E[X \mid X > \mathbf{a}] = \frac{1}{P(X > \mathbf{a})} \int_{\mathbf{a}}^{\infty} x f_X(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{1 - F_X(\mathbf{a})} \int_{\mathbf{a}}^{\text{Letzte Grenze}} x f_X(x)\,dx$$

Varianz

$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

Verteilungsfunktion

$F_X(-\infty) = 0$

$0 \leq F_X(x) \leq 1$

$F_X(\infty) = 1$

$F_X(x_1) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

$F_X(x_2) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt + F_X(x_1)$

$F_X(x) = P(\{X \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

$P(X > x) = \int_{x}^{\text{Grenze Ende}} f_X(x)\,dx$

$$P(\{x_1 < X < x_2\}) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} f_X(t)\,dt$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x > \text{Grenze 1} \\ ..., & \text{Grenze 1} \leq x \leq \text{Grenze 2} \\ 1, & \text{für } x > \text{Grenze 2} \end{cases}$$

$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$

Prüfungsaufgabe 2 und 3

Inhaltsverzeichnis

1 Kovarianz

Eigenschaften der Kovarianz

- **Unkorrelierte Variablen:** Falls $c_{X_1X_2}(\kappa) = 0$, sind X_1 und X_2 unkorreliert. Bedeutet also, dass keine lineare Beziehung zwischen den Variablen besteht.
- **Orthogonalität:** Falls $r_{X_1X_2} = 0$, sind die Variablen orthogonal.
- **Unabhängigkeit:** Wenn X_1 und X_2 unabhängig sind, gilt:

$$f_{X_1X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) \quad \text{und} \quad c_{X_1X_2} = 0.$$

2 SOMF, WWS

2.1 Second-Order Moment Function (SOMF)

Die **Second-Order Moment Function (SOMF)** misst die Ähnlichkeit eines Zufallsprozesses mit einer zeitverschobenen Version desselben Prozesses.

- SOMF ist definiert als:
$$r_{XX}(n+k,n) = E[X(n+k) \cdot X(n)]$$
- Für einen komplexen Zufallsprozess $X(n)$ ist die SOMF definiert als:
$$r_{XX}(n_1,n_2) = E[X(n_1) \cdot X^*(n_2)].$$

2.2 Wide-Sense Stationarity (WSS)

Ein Zufallsprozess $X(n)$ ist **Wide-Sense Stationary (WSS)**, wenn:

1. Der Erwartungswert $E[X(n)]$ konstant ist.
2. Die SOMF nur von der Zeitdifferenz κ abhängt:
$$r_{XX}(n+\kappa,n) = r_{XX}(\kappa)$$

2.3 Cross-Second-Order Moment Function

Die **Cross-SOMF** beschreibt die Ähnlichkeit zwischen zwei Zufallsprozessen $X_1(n)$ und $X_2(n)$ **IM NICHT STATIONÄREN ZUSTAND**:
$$r_{X_1X_2}(n_1,n_2) = E[X_1(n_1) \cdot X_2(n_2)].$$

- Wenn $X_1(n)$ und $X_2(n)$ gemeinsam WSS sind, hängt die Cross-SOMF nur von κ ab:
$$r_{X_1X_2}(\kappa) = E[X_1(n+\kappa) \cdot X_2(n)], \quad \text{und somit ergibt sich}$$
$$c_{X_1X_2} = r_{X_1X_2}(\kappa) = E[X_1(n+\kappa) \cdot X_2(n)]$$

2.4 Central Second-Order Moment Function (Kovarianzfunktion)

Die zentrale SOMF, auch **Kovarianzfunktion** genannt, wird definiert als:
$$c_{XX}(n+\kappa,n) = E[(X(n+\kappa) - E[X(n+\kappa)]) \cdot (X(n) - E[X(n)])], \quad \text{bzw.}$$
$$c_{XX}(n+\kappa,n) = E[X(n+\kappa) \cdot X(n)] - E[X(n+\kappa)] \cdot E[X(n)], \quad \text{falls } E[X(n)] = 0$$
$$c_{XX}(n+\kappa,n) = r_{XX} = E[X(n+\kappa) \cdot X(n)]$$

- Die Kovarianzfunktion kann durch die SOMF ausgedrückt werden:
$$c_{XX}(n+\kappa,n) = r_{XX}(n+\kappa,n) - E[X(n+\kappa)]E[X(n)].$$
- Für zwei Prozesse $X(n)$ und $Y(n)$ verwenden wir die **Kreuzkovarianzfunktion**:
$$c_{XY}(n+\kappa,n) = r_{XY}(n+\kappa,n) - E[X(n+\kappa)]E[Y(n)],$$
$$c_{XY}(n+\kappa,n) = E[X(n+k)Y(n)] - E[X(n+\kappa)]E[Y(n)].$$

Des Weiteren gilt noch: $c_{XY}(k) = c_{YX}(-k)$

3 Leistungsspektraldichte (PSD) und Spektrum

3.1 Leistungsspektraldichte

3.1.1 Weißes Rauschen

Ein **weißes Rauschen** ist ein Zufallsprozess $X(n)$, dessen **Leistungsdichtespektrum (Power Spectral Density, PSD)** konstant über alle Frequenzen ist:

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \sigma_X^2$$

Eigenschaften

1. **Konstante PSD:** Das PSD bleibt unabhängig von der Frequenz konstant. Dies bedeutet, dass das weiße Rauschen eine gleichmäßige Energieverteilung über alle Frequenzen hat.

2. **Zweite Momentfunktion (SOMF):** Die SOMF für einen weißen Prozess wird durch die inverse Fourier-Transformation der PSD erhalten:

   $$r_{XX}(\kappa) = \sigma_X^2 \delta(\kappa)$$

   wobei $\delta(\kappa)$ die Kronecker-Delta-Funktion ist, definiert als:

   $$\delta(\kappa) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \kappa = 0 \\ 0, & \text{wenn } \kappa \neq 0 \end{cases}$$

3. **Statistik:** Die Zufallsvariablen eines weißen Rauschens sind unkorreliert, haben eine konstante Varianz σ_X^2 und einen Erwartungswert von 0.

4. Unabhängigkeit und identische Verteilung sind klassische Eigenschaften von Rauschprozessen.

3.1.2 Kreuzleistungsspektraldichte CPSD

Die **Cross-Power Spectral Density (CPSD)** beschreibt die Frequenzabhängigkeit der statistischen Korrelation zwischen zwei zufälligen Prozessen $X(n)$ und $Y(n)$. Dies ist ein wesentlicher Begriff in der Frequenzbereichsanalyse, insbesondere bei der Untersuchung von Beziehungen zwischen zwei Prozessen.

Eigenschaften

1. **Symmetrie**:

   $$S_{XY}(e^{j\omega}) = S_{YX}(e^{j\omega})^*$$

   Wenn $X(n)$ und $Y(n)$ reellwertig sind, dann gilt:

   $$S_{XY}(e^{j\omega}) = S_{YX}(e^{-j\omega})$$

2. **Reale und imaginäre Anteile**:

   - Der reale Anteil von $S_{XY}(e^{j\omega})$ ist gerade.
   - Der imaginäre Anteil von $S_{XY}(e^{j\omega})$ ist ungerade.

3. **Orthogonalität**:

   Wenn $X(n)$ und $Y(n)$ orthogonal sind, dann gilt: $S_{XY}(e^{j\omega}) = 0$

3.2 Definition des Spektrums

Das Spektrum eines stationären Zufallsprozesses $X(n)$ wird definiert als die Fourier-Transformation der Kovarianzfunktion:

$$C_{XX}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{XX}(n)e^{-j\omega n}$$

3.2.1 Eigenschaften

1. Die Spektralfunktion $C_{XX}(e^{j\omega})$ existiert und ist beschränkt sowie gleichmäßig stetig, wenn:

$$\sum_n |c_{XX}(n)| < \infty$$

2. Die Inversion ist gegeben durch:

$$c_{XX}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C_{XX}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

3. $C_{XX}(e^{j\omega})$ ist:

   - Reellwertig
   - 2π-periodisch
   - Nicht-negativ

3.2.2 Kreuzspektrum

Für zwei gemeinsam stationäre Zufallsprozesse $X_1(n)$ und $X_2(n)$ ist das Kreuzspektrum definiert als:

$$C_{X_1X_2}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{X_1X_2}(n)e^{-j\omega n}$$

Mit der Eigenschaft:

$$C_{X_1X_2}(e^{j\omega}) = C_{X_2X_1}(e^{j\omega})^*$$

Die Inversion lautet:

$$c_{X_1X_2}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C_{X_1X_2}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

3.2.3 Reellwertige Prozesse

Wenn $X_1(n)$ und $X_2(n)$ reellwertig sind, gilt:

- $C_{X_1X_2}(e^{j\omega}) = C_{X_2X_1}(e^{-j\omega})$
- $C_{X_1X_2}(e^{j\omega}) = C_{X_1X_2}(e^{-j\omega})^* = C_{X_2X_1}(e^{-j\omega}) = C_{X_2X_1}(e^{j\omega})^*$

4 FIR und IIR Filter

4.1 Einführung Digitale Filterung

4.1.1 Allgemeines Konzept der Filterung

- **Filterung** dient der Reduktion oder Verstärkung bestimmter Signalanteile.
- Digitale Filter arbeiten mit **abgetasteten, zeitdiskreten Signalen** und lassen sich in zwei Haupttypen unterteilen:
  1. **Finite Impulse Response (FIR):** Haben eine endliche Impulsantwort.
  2. **Infinite Impulse Response (IIR):** Besitzen eine unendliche Impulsantwort.
- Der Frequenzbereich eines Filters wird durch die Übertragungsfunktion $H(e^{j\omega})$ beschrieben:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

  wobei $X(e^{j\omega})$ und $Y(e^{j\omega})$ die Fourier-Transformationen des Eingangs- und Ausgangssignals sind.

4.1.2 Lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten (LCCDE)

- Zeitinvariante, lineare diskrete Systeme werden durch eine LCCDE beschrieben:

$$\sum_{k=0}^{M} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{N-1} b_r x(n-r)$$

- **FIR-System:** Hat $M = 0$:

$$y(n) = \sum_{r=0}^{\text{Ordnung}} b_r x(n-r)$$

$$y(n) = \sum_{r=0}^{\text{Verzögerung}-1} b_r x(n-r)$$

- **IIR-System:** Hat $M > 0$:

$$\sum_{k=0}^{M} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{N-1} b_r x(n-r)$$

4.2 Endliche Impulsantwort: FIR - Filter

Definition

FIR-Filter sind lineare zeitinvariante Systeme mit einer endlichen Impulsantwort.

Differenzengleichung:

$$y(n) = \sum_{r=0}^{Information} b_r x(n-r), \quad \text{Information: Ordnung O = Verzögerung N - 1}$$

Entspricht der Faltungsformel:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

wobei $h(k)$ die Impulsantwort des Filters darstellt.

Vergleich IIR und FIR

1. **Stabilität**
    - IIR-Filter erfordern zusätzliche Stabilitätskriterien.
    - FIR-Filter sind per Definition stabil.
2. **Lineare Phase**
    - Es ist schwierig, eine lineare Phase mit einem IIR-Filter zu erreichen.
    - FIR-Filter ermöglichen eine perfekte lineare Phase.
3. **Effizienz**
    - IIR-Filter erreichen Spezifikationen für den Amplitudengang effizienter.
    - IIR-Filter sind weniger rechenaufwendig als FIR-Filter.

4.3 Unendliche Impulsantwort: IIR - Filter

Definition

Ein IIR-Filter hat eine unendliche Impulsantwort.

Differenzengleichung:

$$\sum_{k=0}^{M} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{N-1} b_r x(n-r)$$

Die Übertragungsfunktion ist rational und wird dargestellt als:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{N-1} b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k}}$$

Eigenschaften

1. **Kausalität und Stabilität:**
   - Für die Stabilität müssen die Wurzeln des Nennerpolynoms innerhalb des Einheitskreises im z-Bereich liegen ($|z| < 1$).
2. **Reelle und kausale Impulsantwort $h(n)$:**
   - Die Einheitspulsantwort $h(n)$ ist reell, kausal und stabil.

Vergleich IIR und FIR

1. **Stabilität:**
   - IIR-Filter erfordern zusätzliche Stabilitätskriterien.
   - FIR-Filter sind per Definition stabil.
2. **Lineare Phase:**
   - Es ist schwierig, eine lineare Phase mit einem IIR-Filter zu erreichen.
   - FIR-Filter ermöglichen eine perfekte lineare Phase.
3. **Effizienz:**
   - IIR-Filter erreichen Spezifikationen für den Amplitudengang effizienter.
   - IIR-Filter sind weniger rechenaufwendig als FIR-Filter.

4.4 Lineare Filterung

Die lineare Filterung beschreibt, wie ein stationärer Eingangssignalprozess $X(n)$ durch ein lineares zeitinvariantes System (LTI-System) verarbeitet wird, um einen Ausgangssignalprozess $Y(n)$ zu erzeugen. Das System wird durch seine Einheitspulsantwort $h(n)$ charakterisiert. Die Beziehung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal ist durch die Faltungsoperation gegeben:

$$Y(n) = \sum_{\rho} h(\rho)X(n-\rho)$$

Ein LTI-System ist **stabil**, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\sum_{\rho} |h(\rho)| < \infty$$

4.4.1 Kovarianzfunktion und Spektrum der Ausgabe

Die Kovarianzfunktion $c_{YY}(\kappa)$ des Ausgangsprozesses $Y(n)$ eines stabilen linearen Systems mit der Impulsantwort $h(n)$ ist definiert als:

$$c_{YY}(\kappa) = E[Y(n+\kappa)Y(n)]$$

Ersetzt man $Y(n)$ durch die gefilterte Version des Eingangssignals $X(n)$:

$$Y(n) = \sum_{\rho} h(\rho)X(n-\rho),$$

führt dies zur Kovarianzfunktion:

$$c_{YY}(\kappa) = \sum_{\rho}\sum_{\iota} h(\rho)h(\iota)^{*}c_{XX}(\kappa-\rho+\iota),$$

wobei $c_{XX}(\kappa)$ die Kovarianzfunktion des Eingangssignals $X(n)$ ist.

Spektrum des Ausgangssignals

Durch Fourier-Transformation der Kovarianzfunktion ergibt sich die Spektraldichte des Ausgangssignals:

$$C_{YY}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^{2}C_{XX}(e^{j\omega}),$$

wobei:

- $H(e^{j\omega})$ die Übertragungsfunktion des Filters ist,
- $C_{XX}(e^{j\omega})$ die Spektraldichte des Eingangssignals beschreibt.

4.4.2 Kreuzkovarianzfunktion und Kreuzspektrum

Die Kreuz-Kovarianzfunktion des Ausgangssignals $Y(n)$ und Eingangssignals $X(n)$ eines stabilen LTI-Systems mit Impulsantwort $h(n)$ ist definiert als:

$$c_{YX}(\kappa) = E[Y(n+\kappa)X(n)]$$

Durch Einsetzen von $Y(n) = \sum_{\rho} h(\rho)X(n-\rho)$ ergibt sich:

$$c_{YX}(\kappa) = \sum_{\rho} h(\rho)c_{XX}(\kappa-\rho)$$

wobei $c_{XX}(\kappa)$ die Autokovarianzfunktion des Eingangssignals $X(n)$ ist.

5 Gefilterte Rauschprozesse: AR, MA und ARMA

5.1 Lineare Filterung von Zufallsprozessen plus Rauschen

Lineare Filterung von stationären Zufallsprozessen $X(n)$ in Kombination mit einem Rauschsignal $V(n)$. Die Annahmen sind:

1. $X(n)$ und $V(n)$ sind stationär und unkorreliert
2. $h(n)$, $X(n)$ und $V(n)$ sind reellwertig.

Der Ausgang $Y(n)$ des Systems wird berechnet durch:

$$Y(n) = \sum_{\rho=-\infty}^{\infty} h(\rho)X(n-\rho) + V(n), \quad \text{bzw.}$$

5.2 Autoregressives (AR) Modell

Die Hauptidee des Filters besteht darin, das weiße Spektrum des Eingangssignals nach Wunsch zu formen.

5.2.1 Definition

Der AR-Prozess $Y(n)$ der Ordnung p (AR(p)) wird durch die **Differenzengleichung** definiert:

$$Y(n) + \sum_{k=1}^{p} a_k Y(n-k) = X(n),$$

Übertragungsfunktion:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k e^{-j\omega k}}.$$

5.3 Filter mit gleitendem Mittelwert (MA)

Das **Moving-Average** Modell beschreibt einen Zufallsprozess Y(n), bei dem der aktuelle Wert als Linearkombination aktueller und vorheriger Werte eines weißen Rauschens X(n) dargestellt wird.
Differenzengleichung:

$$Y(n) = X(n) + \sum_{l=1}^{q} b_l X(n-l),$$

Übertragungsfunktion:
Diese Gleichung kann in die Übertragungsfunktion transformiert werden:

$$H(e^{j\omega}) = 1 + \sum_{l=1}^{q} b_l e^{-j\omega l}.$$

5.4 Autoregressives Modell des gleitenden Durchschnitts (ARMA)

Der ARMA-Prozess $Y(n)$ der Ordnung p und q (ARMA(p, q)) wird durch die **Differenzengleichung** definiert:

$$Y(n) + \sum_{k=1}^{p} a_k Y(n-k) = X(n) + \sum_{l=1}^{q} b_l X(n-l),$$

Übertragungsfunktion:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + \sum_{l=1}^{q} b_l e^{-j\omega l}}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_k e^{-j\omega k}}.$$

6 Optimale lineare Systeme

6.1 Wiener Filter

6.1.1 Hauptkonzept

Der **Wiener Filter** ist ein lineares, zeitinvariantes Filter, das die Fehlerquadrate zwischen dem geschätzten Signal und dem tatsächlichen Signal minimiert. Dies basiert auf dem **Minimum Mean-Squared Error (MSE)-Kriterium**.

Minimum Mean Squared Error (MSE)

$$q(h) = E\left[\epsilon^2(n)\right].$$

$$q(h) = E\left[\left(X(n) - \sum_m h(m)Y(n-m)\right)^2\right].$$

Der Fehler $\epsilon(n)$ ist definiert als:

$$\epsilon(n) = X(n) - \hat{X}(n), \quad \hat{X}(n) = \sum_m h_{opt}(m)Y(n-m).$$

Hierbei ist:

- $q(h)$: Der mittlere quadratische Fehler
- $X(n)$: Das ursprüngliche Signal
- $\hat{X}(n)$: Die geschätzte Version des ursprünglichen Signals
- $Y(n)$: Das beobachtete Signal (Signal mit Rauschen überlagert)
- $h(n)$: Die Impulsantwort des Filters
- $\epsilon(n)$: Der Fehler

6.1.2 Optimale Lösung - Optimierung

Orthogonalitätsprinzip
Die Fehlerkomponente $\epsilon(n)$ ist orthogonal zur beobachteten Komponente $Y(n)$:

$$c_{\epsilon Y}(\kappa) = E\left[\epsilon(n+\kappa)Y(n)\right] = 0, \quad \forall \kappa \in \mathbb{Z}$$

Optimale Filterantwort
Im **Zeitbereich** ergibt sich die *Wiener-Hopf-Gleichung*

$$c_{XY}(\kappa) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{\text{opt}}(m) * c_{YY}(\kappa)$$

Im **Frequenzbereich** ergibt sich die optimale Filterantwort $H_{\text{opt}}(e^{j\omega})$

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = H_{\text{opt}}(e^{j\omega}) \cdot C_{YY}(e^{j\omega})$$

$$H_{\text{opt}}(e^{j\omega}) = \frac{C_{XY}(e^{j\omega})}{C_{YY}(e^{j\omega})},$$

Prüfungsaufgabe 4

Methode der kleinsten Quadrate

Grundlagen Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1.

$$X^T X = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N x_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$X^T y = \begin{pmatrix} \sum_i^N x_i y_i \\ \sum_i^N y_i \end{pmatrix}$$

3.

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\theta}_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \hat{\theta} = x_2 \\ \hat{\theta}_0 = x_1 \end{matrix} = \hat{\theta} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

4.

$$\hat{y} = X\hat{\theta} + \epsilon(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \\ x_5 & 1 \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\theta}_0 \end{pmatrix} + \epsilon(x)$$

Weitere Formeln

quadratische Abweichung (quadratischer Fehler)

$$\epsilon = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$$

mittlere quadratische Abweichung (mittlerer quadratischer Fehler)

$$\epsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$$

1. Stichprobenmittelwert für $\bar{x}$ und $\bar{y}$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

2. Steigung $\hat{\theta}$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{n=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

3. Achsenabschnitt

$$\hat{\theta}_0 = \bar{y} - \hat{\theta}\bar{x}$$

4. Endformel

$$f(x) = \hat{y} = \hat{\theta} x_i + \hat{\theta}_0$$