

# **Grundlagen der Signalverarbeitung**

von Kaan Büyüksahin

Technische Universität Darmstadt  
Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik  
Fachgebiet Signalverarbeitung bei Prof. Zoubir

Letzte Aktualisierung: 26. Februar 2025

# Mathematische Zusammenhänge

## Trigonometrische Funktionen

### Winkeltabelle

DEG	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	n. d.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	n. d.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

### Pythagoras

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

### Symmetrie und Verschiebung

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad (\text{gerade Funktion})$$

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad (\text{ungerade Funktion})$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$$

### Doppelwinkelfunktionen

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$= 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

### Additionstheoreme

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

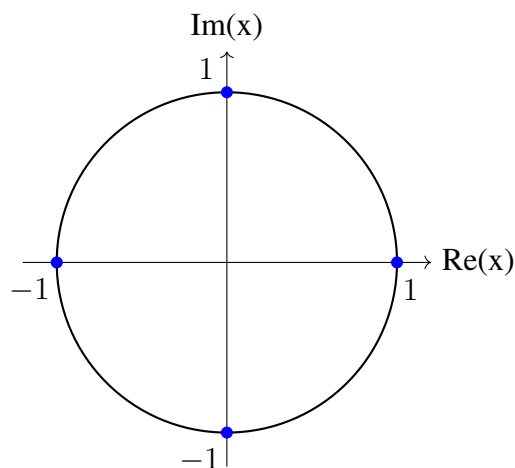
$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$$

# Komplexe Zahlen und Integrale

## Komplexer Zeiger mit Einheitskreis und Punkten

$\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$x = e^{j\varphi}$	1	$j$	-1	$-j$	1
Punkt	(1, 0)	(0, 1)	(-1, 0)	(0, -1)	(1, 0)

$-\varphi$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-2\pi$
$x = e^{-j\varphi}$	1	$-j$	-1	$j$	1
Punkt	(1, 0)	(0, -1)	(-1, 0)	(0, 1)	(1, 0)



## Grundlagen komplexer Zahlen

$$\begin{aligned}
 j^2 &= -1 \\
 -j^2 &= 1 \\
 j &= \sqrt{-1} \\
 j^{-1} &= \frac{1}{j} = -j \\
 j^3 &= j \cdot j^2 = -j \\
 j^4 &= (j^2)^2 = 1
 \end{aligned}$$

## Darstellung von Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned}
 e^{j\varphi} &= \cos(\varphi) + j \sin(\varphi) \\
 \cos(\varphi) &= \frac{1}{2} (e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) \\
 \sin(\varphi) &= \frac{1}{2j} (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})
 \end{aligned}$$

## Betragsdefinitionen

$$\begin{aligned}
 |x| &= \sqrt{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}) \\
 |z| &= \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} \quad (z \in \mathbb{C}) \\
 z &= x + j y, \\
 |z|^2 &= z \cdot z^* = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 \\
 |e^{j\varphi}| &= 1 \\
 |e^{-j\varphi}| &= 1
 \end{aligned}$$

## Integrale

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x^n} dx &= \frac{x^{1-n}}{1-n} + C, \quad \text{für } n \neq 1 \\
 \int x \sqrt{X} dx &= -\frac{1}{3} \sqrt{X^3} \quad \text{mit } X = a^2 - x^2 \\
 \int x^2 \sqrt{X} dx &= -\frac{x}{4} \sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8} \left( x \sqrt{X} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) \\
 \int \sin(ax) dx &= -\frac{1}{a} \cos(ax) \\
 \int \sin^2(ax) dx &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4a} \sin(2ax) \\
 \int x \sin(ax) dx &= \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cos(ax)}{a} \\
 \int x^2 \sin(ax) dx &= \frac{2x}{a^2} \sin(ax) - \left( \frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \cos(ax) \\
 \int \cos(ax) dx &= \frac{1}{a} \sin(ax) \\
 \int \cos^2(ax) dx &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4a} \sin(2ax) \\
 \int x \cos(ax) dx &= \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \sin(ax)}{a} \\
 \int x^2 \cos(ax) dx &= \frac{2x}{a^2} \cos(ax) + \left( \frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \sin(ax) \\
 \int x e^{ax} dx &= \frac{e^{ax}}{a^2} \cdot (ax - 1)
 \end{aligned}$$

# Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

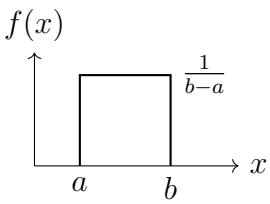
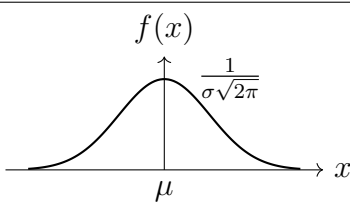
## Parameter einer Verteilung

- **Erwartungswert (Mittelwert):**  $\mu = \mathbb{E}[X]$
- **Varianz oder Streuung:**  $\sigma^2 = \text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$
- **Standardabweichung:**  $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$

## Rechenregeln für Erwartungswerte

- **Linearität des Erwartungswertes:**  $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$
- **Erwartungswert einer Konstanten:**  $\mathbb{E}[c] = c$ , für eine Konstante  $c$
- **Multiplikation unabhängiger Zufallsvariablen:**  $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$
- **Erwartungswert einer Summe:**  $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]$
- **Quadratische Form:**  $\mathbb{E}[X^2] = \text{Var}(X) + (\mathbb{E}[X])^2$

## Verteilungen

	$W(X)$	$f(x)$	$E[X]$	$\text{Var}(X)$	Diagramm der Dichte
Gleichverteilung	$[a, b]$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	
Normalverteilung	$\mathbb{R}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mu$	$\sigma^2$	

Normalverteilung = Standardnormalverteilung = Gauß-Verteilung

Gleichv. = Rechteckv. = Uniformv. = Konstante Verteilung = Diskrete Gleichv. = Stetige Gleichv.

Eigenschaft	Verteilung	Parameter	Dichtefunktion $f_x(X)$	Verteilungsfunktion $F_x(X)$
Beschreibung	Normal- oder Gaußverteilung	$\mu = 0, \sigma = 1$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Normal- und Gaußverteilung beschreibt dasselbe (Synonyme)

# Prüfungsaufgabe 1: Teil 1

## Wahrscheinlichkeit

### Rechengesetze

#### Additionssatz

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

#### Komplementärereignis

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\bar{A} | B) = 1 - P(A | B)$$

#### Zerlegung eines Ereignisses

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

#### Kommutativgesetz

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

#### Assoziativgesetz

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

#### Distributivgesetz

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

#### De Morgan'sche Gesetze

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

#### Unabhängige Ereignisse

stochastisch **unabhängig**

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

stochastisch **abhängig**

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

## Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{falls } P(B) > 0$$

## Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \sum_{i=1}^N P(A | B_i) \cdot P(B_i)$$

## Bayes

falls  $P(B)$  **nicht bekannt**

$$P(A_k | B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^N P(B|A_i) P(A_i)}$$

falls  $P(B)$  **bekannt**

$$P(A_k | B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)}$$

## Weitere Formeln

### Multiplikationsregel mit bedingter Wahrscheinlichkeit

$$P(A_1 \cap A_2 | B) = P(A_1 | B) \cdot P(A_2 | B)$$

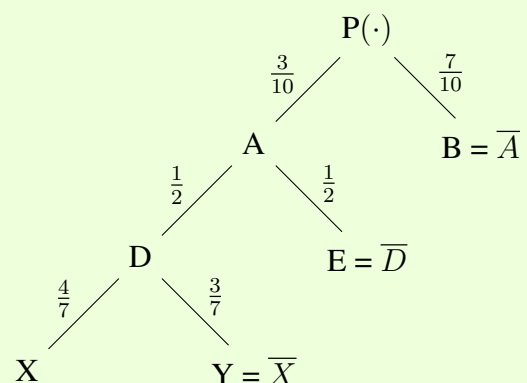
### Relative Häufigkeit

$n(A)$ : Anzahl der Häufigkeit / Eintreten

$N$ : Gesamtanzahl der Versuche / Beobachtungen

$$P(A) = \frac{n(A)}{N}$$

## Baumdiagramm



# Prüfungsaufgabe 1: Teil 2

## Diskrete Wahrscheinlichkeit

### Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

1.  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$
2. Wahrscheinlichkeit ist nicht negativ!
3.  $f_X(x)$  ist stückweise kontinuierlich

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

### Erwartungswert

$$\mu = E[X]$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx$$

### Bedingter Erwartungswert

$$\begin{aligned} E[X \mid X > \mathbf{a}] &= \frac{1}{P(X > \mathbf{a})} \int_{\mathbf{a}}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= \frac{1}{1 - F_X(\mathbf{a})} \int_{\mathbf{a}}^{\text{Letzte Grenze}} x f_X(x) dx \end{aligned}$$

### Varianz

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

## Verteilungsfunktion

$$F_X(-\infty) = 0$$

$$0 \leq F_X(x) \leq 1$$

$$F_X(\infty) = 1$$

$$F_X(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f_X(t) dt$$

$$F_X(x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} f_X(t) dt + F_X(x_1)$$

$$F_X(x) = P(\{X \leq x\}) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

$$P(X > x) = \int_x^{\text{Grenze Ende}} f_X(x) dx$$

$$P(\{x_1 < X < x_2\}) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f_X(t) dt$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x > \text{Grenze 1} \\ \dots, & \text{Grenze 1} \leq x \leq \text{Grenze 2} \\ 1, & \text{für } x > \text{Grenze 2} \end{cases}$$

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

# Prüfungsaufgabe 2 und 3

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Kovarianz</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>SOMF, WSS</b>	<b>8</b>
2.1	Second-Order Moment Function (SOMF) . . . . .	8
2.2	Wide-Sense Stationarity (WSS) . . . . .	8
2.3	Cross-Second-Order Moment Function . . . . .	8
2.4	Central Second-Order Moment Function (Kovarianzfunktion) . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Leistungsspektraldichte (PSD) und Spektrum</b>	<b>9</b>
3.1	Leistungsspektraldichte . . . . .	9
3.1.1	Weißes Rauschen . . . . .	9
3.1.2	Kreuzleistungsspektraldichte CPSD . . . . .	9
3.2	Definition des Spektrums . . . . .	10
3.2.1	Eigenschaften . . . . .	10
3.2.2	Kreuzspektrum . . . . .	10
3.2.3	Reellwertige Prozesse . . . . .	10
<b>4</b>	<b>FIR und IIR Filter</b>	<b>11</b>
4.1	Einführung Digitale Filterung . . . . .	11
4.1.1	Allgemeines Konzept der Filterung . . . . .	11
4.1.2	Lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten (LCCDE) . . . . .	11
4.2	Endliche Impulsantwort: FIR - Filter . . . . .	12
4.3	Unendliche Impulsantwort: IIR - Filter . . . . .	13
4.4	Lineare Filterung . . . . .	14
4.4.1	Kovarianzfunktion und Spektrum der Ausgabe . . . . .	14
4.4.2	Kreuzkovarianzfunktion und Kreuzspektrum . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Gefilterte Rauschprozesse: AR, MA und ARMA</b>	<b>15</b>
5.1	Lineare Filterung von Zufallsprozessen plus Rauschen . . . . .	15
5.2	Autoregressives (AR) Modell . . . . .	15
5.2.1	Definition . . . . .	15
5.3	Filter mit gleitendem Mittelwert (MA) . . . . .	15
5.4	Autoregressives Modell des gleitenden Durchschnitts (ARMA) . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Optimale lineare Systeme</b>	<b>16</b>
6.1	Wiener Filter . . . . .	16
6.1.1	Hauptkonzept . . . . .	16
6.1.2	Optimale Lösung - Optimierung . . . . .	16

# 1 Kovarianz

## Eigenschaften der Kovarianz

- **Unkorrelierte Variablen:** Falls  $c_{X_1 X_2}(\kappa) = 0$ , sind  $X_1$  und  $X_2$  unkorreliert. Bedeutet also, dass keine lineare Beziehung zwischen den Variablen besteht.
- **Orthogonalität:** Falls  $r_{X_1 X_2} = 0$ , sind die Variablen orthogonal.
- **Unabhängigkeit:** Wenn  $X_1$  und  $X_2$  unabhängig sind, gilt:

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) \quad \text{und} \quad c_{X_1 X_2} = 0.$$



## 2 SOMF, WSS

### 2.1 Second-Order Moment Function (SOMF)

Die **Second-Order Moment Function (SOMF)** misst die Ähnlichkeit eines Zufallsprozesses mit einer zeitverschobenen Version desselben Prozesses.

- SOMF ist definiert als:

$$r_{XX}(n+k, n) = E[X(n+k) \cdot X(n)]$$

- Für einen komplexen Zufallsprozess  $X(n)$  ist die SOMF definiert als:

$$r_{XX}(n_1, n_2) = E[X(n_1) \cdot X^*(n_2)].$$

### 2.2 Wide-Sense Stationarity (WSS)

Ein Zufallsprozess  $X(n)$  ist **Wide-Sense Stationary (WSS)**, wenn:

1. Der Erwartungswert  $E[X(n)]$  konstant ist.
2. Die SOMF nur von der Zeitdifferenz  $\kappa$  abhängt:

$$r_{XX}(n+\kappa, n) = r_{XX}(\kappa)$$

### 2.3 Cross-Second-Order Moment Function

Die **Cross-SOMF** beschreibt die Ähnlichkeit zwischen zwei Zufallsprozessen  $X_1(n)$  und  $X_2(n)$  **IM NICHT STATIONÄREN ZUSTAND**:

$$r_{X_1X_2}(n_1, n_2) = E[X_1(n_1) \cdot X_2(n_2)].$$

- Wenn  $X_1(n)$  und  $X_2(n)$  gemeinsam WSS sind, hängt die Cross-SOMF nur von  $\kappa$  ab:

$$r_{X_1X_2}(\kappa) = E[X_1(n+\kappa) \cdot X_2(n)], \quad \text{und somit ergibt sich}$$

$$c_{X_1X_2} = r_{X_1X_2}(\kappa) = E[X_1(n+\kappa) \cdot X_2(n)]$$

### 2.4 Central Second-Order Moment Function (Kovarianzfunktion)

Die zentrale SOMF, auch **Kovarianzfunktion** genannt, wird definiert als:

$$c_{XX}(n+\kappa, n) = E[(X(n+\kappa) - E[X(n+\kappa)]) \cdot (X(n) - E[X(n)])], \quad \text{bzw.}$$

$$c_{XX}(n+\kappa, n) = E[X(n+\kappa) \cdot X(n)] - E[X(n+\kappa)] \cdot E[X(n)], \quad \text{falls } E[X(n)] = 0$$

$$c_{XX}(n+\kappa, n) = r_{XX} = E[X(n+\kappa) \cdot X(n)]$$

- Die Kovarianzfunktion kann durch die SOMF ausgedrückt werden:

$$c_{XX}(n+\kappa, n) = r_{XX}(n+\kappa, n) - E[X(n+\kappa)]E[X(n)].$$

- Für zwei Prozesse  $X(n)$  und  $Y(n)$  verwenden wir die **Kreuzkovarianzfunktion**:

$$c_{XY}(n+\kappa, n) = r_{XY}(n+\kappa, n) - E[X(n+\kappa)]E[Y(n)],$$

$$c_{XY}(n+\kappa, n) = E[X(n+\kappa)Y(n)] - E[X(n+\kappa)]E[Y(n)].$$

Des Weiteren gilt noch:  $c_{XY}(k) = c_{YX}(-k)$

## 3 Leistungsspektraldichte (PSD) und Spektrum

### 3.1 Leistungsspektraldichte

#### 3.1.1 Weißes Rauschen

Ein **weißes Rauschen** ist ein Zufallsprozess  $X(n)$ , dessen **Leistungsdichtespektrum (Power Spectral Density, PSD)** konstant über alle Frequenzen ist:

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \sigma_X^2$$

#### Eigenschaften

1. **Konstante PSD:** Das PSD bleibt unabhängig von der Frequenz konstant. Dies bedeutet, dass das weiße Rauschen eine gleichmäßige Energieverteilung über alle Frequenzen hat.
2. **Zweite Momentfunktion (SOMF):** Die SOMF für einen weißen Prozess wird durch die inverse Fourier-Transformation der PSD erhalten:

$$r_{XX}(\kappa) = \sigma_X^2 \delta(\kappa)$$

wobei  $\delta(\kappa)$  die Kronecker-Delta-Funktion ist, definiert als:

$$\delta(\kappa) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \kappa = 0 \\ 0, & \text{wenn } \kappa \neq 0 \end{cases}$$

3. **Statistik:** Die Zufallsvariablen eines weißen Rauschens sind unkorreliert, haben eine konstante Varianz  $\sigma_X^2$  und einen Erwartungswert von 0.
4. Unabhängigkeit und identische Verteilung sind klassische Eigenschaften von Rauschprozessen.

#### 3.1.2 Kreuzleistungsspektraldichte CPSD

Die **Cross-Power Spectral Density (CPSD)** beschreibt die Frequenzabhängigkeit der statistischen Korrelation zwischen zwei zufälligen Prozessen  $X(n)$  und  $Y(n)$ . Dies ist ein wesentlicher Begriff in der Frequenzbereichsanalyse, insbesondere bei der Untersuchung von Beziehungen zwischen zwei Prozessen.

#### Eigenschaften

1. **Symmetrie:**

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = S_{YX}(e^{j\omega})^*$$

Wenn  $X(n)$  und  $Y(n)$  reellwertig sind, dann gilt:

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = S_{YX}(e^{-j\omega})$$

2. **Reale und imaginäre Anteile:**

- Der reale Anteil von  $S_{XY}(e^{j\omega})$  ist gerade.
- Der imaginäre Anteil von  $S_{XY}(e^{j\omega})$  ist ungerade.

3. **Orthogonalität:**

Wenn  $X(n)$  und  $Y(n)$  orthogonal sind, dann gilt:  $S_{XY}(e^{j\omega}) = 0$

## 3.2 Definition des Spektrums

Das Spektrum eines stationären Zufallsprozesses  $X(n)$  wird definiert als die Fourier-Transformation der Kovariationsfunktion:

$$C_{XX}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{XX}(n)e^{-j\omega n}$$

### 3.2.1 Eigenschaften

1. Die Spektralfunktion  $C_{XX}(e^{j\omega})$  existiert und ist beschränkt sowie gleichmäßig stetig, wenn:

$$\sum_n |c_{XX}(n)| < \infty$$

2. Die Inversion ist gegeben durch:

$$c_{XX}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_{XX}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

3.  $C_{XX}(e^{j\omega})$  ist:

- Reellwertig
- $2\pi$ -periodisch
- Nicht-negativ

### 3.2.2 Kreuzspektrum

Für zwei gemeinsam stationäre Zufallsprozesse  $X_1(n)$  und  $X_2(n)$  ist das Kreuzspektrum definiert als:

$$C_{X_1X_2}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{X_1X_2}(n)e^{-j\omega n}$$

Mit der Eigenschaft:

$$C_{X_1X_2}(e^{j\omega}) = C_{X_2X_1}(e^{j\omega})^*$$

Die Inversion lautet:

$$c_{X_1X_2}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_{X_1X_2}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

### 3.2.3 Reellwertige Prozesse

Wenn  $X_1(n)$  und  $X_2(n)$  reellwertig sind, gilt:

- $C_{X_1X_2}(e^{j\omega}) = C_{X_2X_1}(e^{-j\omega})$
- $C_{X_1X_2}(e^{j\omega}) = C_{X_1X_2}(e^{-j\omega})^* = C_{X_2X_1}(e^{-j\omega}) = C_{X_2X_1}(e^{j\omega})^*$

## 4 FIR und IIR Filter

### 4.1 Einführung Digitale Filterung

#### 4.1.1 Allgemeines Konzept der Filterung

- **Filterung** dient der Reduktion oder Verstärkung bestimmter Signalanteile.
- Digitale Filter arbeiten mit **abgetasteten, zeitdiskreten Signalen** und lassen sich in zwei Haupttypen unterteilen:
  1. **Finite Impulse Response (FIR)**: Haben eine endliche Impulsantwort.
  2. **Infinite Impulse Response (IIR)**: Besitzen eine unendliche Impulsantwort.
- Der Frequenzbereich eines Filters wird durch die Übertragungsfunktion  $H(e^{j\omega})$  beschrieben:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

wobei  $X(e^{j\omega})$  und  $Y(e^{j\omega})$  die Fourier-Transformationen des Eingangs- und Ausgangssignals sind.

#### 4.1.2 Lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten (LCCDE)

- Zeitinvariante, lineare diskrete Systeme werden durch eine LCCDE beschrieben:

$$\sum_{k=0}^M a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{N-1} b_r x(n-r)$$

- **FIR-System**: Hat  $M = 0$ :

$$y(n) = \sum_{r=0}^{\text{Ordnung}} b_r x(n-r)$$

$$y(n) = \sum_{r=0}^{\text{Verzögerung}-1} b_r x(n-r)$$

- **IIR-System**: Hat  $M > 0$ :

$$\sum_{k=0}^M a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{N-1} b_r x(n-r)$$

## 4.2 Endliche Impulsantwort: FIR - Filter

### Definition

FIR-Filter sind lineare zeitinvariante Systeme mit einer endlichen Impulsantwort.

### Differenzengleichung:

$$y(n) = \sum_{r=0}^{\text{Information}} b_r x(n-r), \quad \text{Information: Ordnung } O = \text{Verzögerung } N - 1$$

Entspricht der Faltungsformel:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

wobei  $h(k)$  die Impulsantwort des Filters darstellt.

### Vergleich IIR und FIR

#### 1. Stabilität

- IIR-Filter erfordern zusätzliche Stabilitätskriterien.
- FIR-Filter sind per Definition stabil.

#### 2. Lineare Phase

- Es ist schwierig, eine lineare Phase mit einem IIR-Filter zu erreichen.
- FIR-Filter ermöglichen eine perfekte lineare Phase.

#### 3. Effizienz

- IIR-Filter erreichen Spezifikationen für den Amplitudengang effizienter.
- IIR-Filter sind weniger rechenaufwendig als FIR-Filter.

## 4.3 Unendliche Impulsantwort: IIR - Filter

### Definition

Ein IIR-Filter hat eine unendliche Impulsantwort.

### Differenzengleichung:

$$\sum_{k=0}^M a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{N-1} b_r x(n-r)$$

Die Übertragungsfunktion ist rational und wird dargestellt als:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{N-1} b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}}$$

### Eigenschaften

#### 1. Kausalität und Stabilität:

- Für die Stabilität müssen die Wurzeln des Nennerpolynoms innerhalb des Einheitskreises im  $z$ -Bereich liegen ( $|z| < 1$ ).

#### 2. Reelle und kausale Impulsantwort $h(n)$ :

- Die Einheitspulsantwort  $h(n)$  ist reell, kausal und stabil.

### Vergleich IIR und FIR

#### 1. Stabilität:

- IIR-Filter erfordern zusätzliche Stabilitätskriterien.
- FIR-Filter sind per Definition stabil.

#### 2. Lineare Phase:

- Es ist schwierig, eine lineare Phase mit einem IIR-Filter zu erreichen.
- FIR-Filter ermöglichen eine perfekte lineare Phase.

#### 3. Effizienz:

- IIR-Filter erreichen Spezifikationen für den Amplitudengang effizienter.
- IIR-Filter sind weniger rechenaufwendig als FIR-Filter.

## 4.4 Lineare Filterung

Die lineare Filterung beschreibt, wie ein stationärer Eingangssignalprozess  $X(n)$  durch ein lineares zeitinvariantes System (LTI-System) verarbeitet wird, um einen Ausgangssignalprozess  $Y(n)$  zu erzeugen. Das System wird durch seine Einheitspulsantwort  $h(n)$  charakterisiert. Die Beziehung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal ist durch die Faltungsoperation gegeben:

$$Y(n) = \sum_{\rho} h(\rho)X(n - \rho)$$

Ein LTI-System ist **stabil**, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\sum_{\rho} |h(\rho)| < \infty$$

### 4.4.1 Kovarianzfunktion und Spektrum der Ausgabe

Die Kovarianzfunktion  $c_{YY}(\kappa)$  des Ausgangsprozesses  $Y(n)$  eines stabilen linearen Systems mit der Impulsantwort  $h(n)$  ist definiert als:

$$c_{YY}(\kappa) = E[Y(n + \kappa)Y(n)]$$

Ersetzt man  $Y(n)$  durch die gefilterte Version des Eingangssignals  $X(n)$ :

$$Y(n) = \sum_{\rho} h(\rho)X(n - \rho),$$

führt dies zur Kovarianzfunktion:

$$c_{YY}(\kappa) = \sum_{\rho} \sum_{\iota} h(\rho)h(\iota)^* c_{XX}(\kappa - \rho + \iota),$$

wobei  $c_{XX}(\kappa)$  die Kovarianzfunktion des Eingangssignals  $X(n)$  ist.

### Spektrum des Ausgangssignals

Durch Fourier-Transformation der Kovarianzfunktion ergibt sich die Spektraldichte des Ausgangssignals:

$$C_{YY}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 C_{XX}(e^{j\omega}),$$

wobei:

- $H(e^{j\omega})$  die Übertragungsfunktion des Filters ist,
- $C_{XX}(e^{j\omega})$  die Spektraldichte des Eingangssignals beschreibt.

### 4.4.2 Kreuzkovarianzfunktion und Kreuzspektrum

Die Kreuz-Kovarianzfunktion des Ausgangssignals  $Y(n)$  und Eingangssignals  $X(n)$  eines stabilen LTI-Systems mit Impulsantwort  $h(n)$  ist definiert als:

$$c_{YX}(\kappa) = E[Y(n + \kappa)X(n)]$$

Durch Einsetzen von  $Y(n) = \sum_{\rho} h(\rho)X(n - \rho)$  ergibt sich:

$$c_{YX}(\kappa) = \sum_{\rho} h(\rho)c_{XX}(\kappa - \rho)$$

wobei  $c_{XX}(\kappa)$  die Autokovarianzfunktion des Eingangssignals  $X(n)$  ist.

## 5 Gefilterte Rauschprozesse: AR, MA und ARMA

### 5.1 Lineare Filterung von Zufallsprozessen plus Rauschen

Lineare Filterung von stationären Zufallsprozessen  $X(n)$  in Kombination mit einem Rauschsignal  $V(n)$ . Die Annahmen sind:

1.  $X(n)$  und  $V(n)$  sind stationär und unkorreliert
2.  $h(n)$ ,  $X(n)$  und  $V(n)$  sind reellwertig.

Der Ausgang  $Y(n)$  des Systems wird berechnet durch:

$$Y(n) = \sum_{\rho=-\infty}^{\infty} h(\rho)X(n-\rho) + V(n), \quad \text{bzw.}$$

### 5.2 Autoregressives (AR) Modell

Die Hauptidee des Filters besteht darin, das weiße Spektrum des Eingangssignals nach Wunsch zu formen.

#### 5.2.1 Definition

Der AR-Prozess  $Y(n)$  der Ordnung  $p$  (AR( $p$ )) wird durch die **Differenzengleichung** definiert:

$$Y(n) + \sum_{k=1}^p a_k Y(n-k) = X(n),$$

**Übertragungsfunktion:**

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j\omega k}}.$$

### 5.3 Filter mit gleitendem Mittelwert (MA)

Das **Moving-Average** Modell beschreibt einen Zufallsprozess  $Y(n)$ , bei dem der aktuelle Wert als Linearkombination aktueller und vorheriger Werte eines weißen Rauschens  $X(n)$  dargestellt wird.

**Differenzengleichung:**

$$Y(n) = X(n) + \sum_{l=1}^q b_l X(n-l),$$

**Übertragungsfunktion:**

Diese Gleichung kann in die Übertragungsfunktion transformiert werden:

$$H(e^{j\omega}) = 1 + \sum_{l=1}^q b_l e^{-j\omega l}.$$

### 5.4 Autoregressives Modell des gleitenden Durchschnitts (ARMA)

Der ARMA-Prozess  $Y(n)$  der Ordnung  $p$  und  $q$  (ARMA( $p, q$ )) wird durch die **Differenzengleichung** definiert:

$$Y(n) + \sum_{k=1}^p a_k Y(n-k) = X(n) + \sum_{l=1}^q b_l X(n-l),$$

**Übertragungsfunktion:**

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + \sum_{l=1}^q b_l e^{-j\omega l}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j\omega k}}.$$



## 6 Optimale lineare Systeme

### 6.1 Wiener Filter

#### 6.1.1 Hauptkonzept

Der **Wiener Filter** ist ein lineares, zeitinvariantes Filter, das die Fehlerquadrate zwischen dem geschätzten Signal und dem tatsächlichen Signal minimiert. Dies basiert auf dem **Minimum Mean-Squared Error (MSE)-Kriterium**.

#### Minimum Mean Squared Error (MSE)

$$q(h) = E [\epsilon^2(n)] .$$

$$q(h) = E \left[ \left( X(n) - \sum_m h(m) Y(n-m) \right)^2 \right] .$$

Der Fehler  $\epsilon(n)$  ist definiert als:

$$\epsilon(n) = X(n) - \hat{X}(n), \quad \hat{X}(n) = \sum_m h_{opt}(m) Y(n-m).$$

Hierbei ist:

- $q(h)$ : Der mittlere quadratische Fehler
- $X(n)$ : Das ursprüngliche Signal
- $\hat{X}(n)$ : Die geschätzte Version des ursprünglichen Signals
- $Y(n)$ : Das beobachtete Signal (Signal mit Rauschen überlagert)
- $h(n)$ : Die Impulsantwort des Filters
- $\epsilon(n)$ : Der Fehler

#### 6.1.2 Optimale Lösung - Optimierung

##### Orthogonalitätsprinzip

Die Fehlerkomponente  $\epsilon(n)$  ist orthogonal zur beobachteten Komponente  $Y(n)$ :

$$c_{\epsilon Y}(\kappa) = E [\epsilon(n + \kappa) Y(n)] = 0, \quad \forall \kappa \in \mathbb{Z}$$

##### Optimale Filterantwort

Im **Zeitbereich** ergibt sich die *Wiener-Hopf-Gleichung*

$$c_{XY}(\kappa) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{opt}(m) * c_{YY}(\kappa)$$

Im **Frequenzbereich** ergibt sich die optimale Filterantwort  $H_{opt}(e^{j\omega})$

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = H_{opt}(e^{j\omega}) \cdot C_{YY}(e^{j\omega})$$

$$H_{opt}(e^{j\omega}) = \frac{C_{XY}(e^{j\omega})}{C_{YY}(e^{j\omega})},$$

# Prüfungsaufgabe 4

## Methode der kleinsten Quadrate

### Grundlagen Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1.

$$X^T X = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N x_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$X^T y = \begin{pmatrix} \sum_i^N x_i y_i \\ \sum_i^N y_i \end{pmatrix}$$

3.

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\theta}_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \hat{\theta} = x_2 \\ \hat{\theta}_0 = x_1 \end{matrix} = \hat{\theta} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

4.

$$\hat{y} = X\hat{\theta} + \epsilon(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \\ x_5 & 1 \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\theta}_0 \end{pmatrix} + \epsilon(x)$$

### Weitere Formeln

**quadratische Abweichung**  
(quadratischer Fehler)

$$\epsilon = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$$

**mittlere quadratische Abweichung**  
(mittlerer quadratischer Fehler)

$$\epsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$$

**1. Stichprobenmittelwert für  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$**

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

**2. Steigung  $\hat{\theta}$**

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{n=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

**3. Achsenabschnitt**

$$\hat{\theta}_0 = \bar{y} - \hat{\theta}\bar{x}$$

**4. Endformel**

$$f(x) = \hat{y} = \hat{\theta}x_i + \hat{\theta}_0$$