

Grundlagen der Signalverarbeitung

von Kaan Büyüksahin

Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik
Fachgebiet Signalverarbeitung

Letzte Aktualisierung: 21. Februar 2025

Mathematische Zusammenhänge

Trigonometrische Funktionen

Winkeltabelle

DEG	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	n. d.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	n. d.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Pythagoras

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Symmetrie und Verschiebung

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad (\text{gerade Funktion})$$

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad (\text{ungerade Funktion})$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$$

Doppelwinkelfunktionen

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2x))$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2x))$$

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 \end{aligned}$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

Additionstheoreme

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

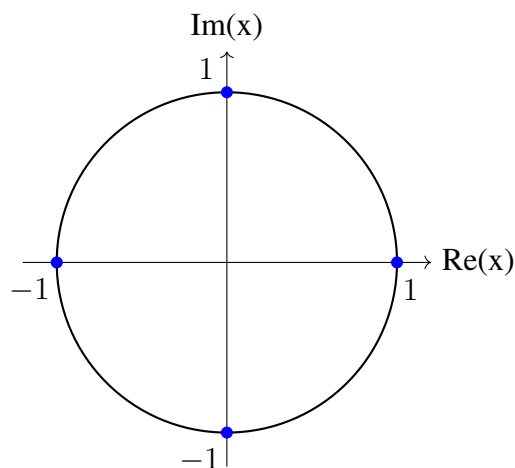
$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2} [\sin(x-y) + \sin(x+y)]$$

Komplexe Zahlen und Integrale

Komplexer Zeiger mit Einheitskreis und Punkten

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$x = e^{j\varphi}$	1	j	-1	$-j$	1
Punkt	(1, 0)	(0, 1)	(-1, 0)	(0, -1)	(1, 0)

$-\varphi$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	-2π
$x = e^{-j\varphi}$	1	$-j$	-1	j	1
Punkt	(1, 0)	(0, -1)	(-1, 0)	(0, 1)	(1, 0)



Grundlagen komplexer Zahlen

$$\begin{aligned}
 j^2 &= -1 \\
 -j^2 &= 1 \\
 j &= \sqrt{-1} \\
 j^{-1} &= \frac{1}{j} = -j \\
 j^3 &= j \cdot j^2 = -j \\
 j^4 &= (j^2)^2 = 1
 \end{aligned}$$

Darstellung von Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned}
 e^{j\varphi} &= \cos(\varphi) + j \sin(\varphi) \\
 \cos(\varphi) &= \frac{1}{2} (e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) \\
 \sin(\varphi) &= \frac{1}{2j} (e^{j\varphi} - e^{-j\varphi})
 \end{aligned}$$

Betragsdefinitionen

$$\begin{aligned}
 |x| &= \sqrt{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}) \\
 |z| &= \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} \quad (z \in \mathbb{C}) \\
 z &= x + j y, \\
 |z|^2 &= z \cdot z^* = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 \\
 |e^{j\varphi}| &= 1 \\
 |e^{-j\varphi}| &= 1
 \end{aligned}$$

Integrale

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x^n} dx &= \frac{x^{1-n}}{1-n} + C, \quad \text{für } n \neq 1 \\
 \int x \sqrt{X} dx &= -\frac{1}{3} \sqrt{X^3} \quad \text{mit } X = a^2 - x^2 \\
 \int x^2 \sqrt{X} dx &= -\frac{x}{4} \sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8} \left(x \sqrt{X} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) \\
 \int \sin(ax) dx &= -\frac{1}{a} \cos(ax) \\
 \int \sin^2(ax) dx &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4a} \sin(2ax) \\
 \int x \sin(ax) dx &= \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cos(ax)}{a} \\
 \int x^2 \sin(ax) dx &= \frac{2x}{a^2} \sin(ax) - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \cos(ax) \\
 \int \cos(ax) dx &= \frac{1}{a} \sin(ax) \\
 \int \cos^2(ax) dx &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4a} \sin(2ax) \\
 \int x \cos(ax) dx &= \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \sin(ax)}{a} \\
 \int x^2 \cos(ax) dx &= \frac{2x}{a^2} \cos(ax) + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \sin(ax) \\
 \int x e^{ax} dx &= \frac{e^{ax}}{a^2} \cdot (ax - 1)
 \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Parameter einer Verteilung

- Erwartungswert (Mittelwert):

$$\mu = \mathbb{E}[X]$$

- Varianz oder Streuung:

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

- Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Rechenregeln für Erwartungswerte

- Linearität des Erwartungswertes:

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$$

- Erwartungswert einer Konstanten:

$$\mathbb{E}[c] = c, \quad \text{für eine Konstante } c$$

- Multiplikation unabhängiger Zufallsvariablen:

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

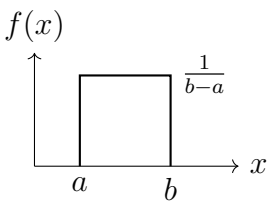
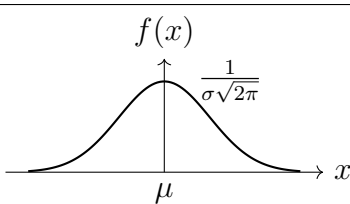
- Erwartungswert einer Summe:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]$$

- Quadratische Form:

$$\mathbb{E}[X^2] = \text{Var}(X) + (\mathbb{E}[X])^2$$

Verteilungen

	$W(X)$	$f(x)$	$E[X]$	$\text{Var}(X)$	Diagramm der Dichte
Gleichverteilung	$[a, b]$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	
Normalverteilung	\mathbb{R}	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2	

Normalverteilung = Standardnormalverteilung = Gauß-Verteilung

Gleichv. = Rechteckv. = Uniformv. = Konstante Verteilung = Diskrete Gleichv. = Stetige Gleichv.

Eigenschaft	Verteilung	Parameter	Dichtefunktion $f_x(X)$	Verteilungsfunktion $F_x(X)$
Beschreibung	Normal- oder Gaußverteilung	$\mu = 0, \sigma = 1$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Normal- und Gaußverteilung beschreibt dasselbe (Synonyme)

Prüfungsaufgabe 1: Teil 1

Wahrscheinlichkeit

Rechengesetze

Additionssatz

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Komplementärereignis

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\bar{A} | B) = 1 - P(A | B)$$

Zerlegung eines Ereignisses

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

Kommutativgesetz

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Assoziativgesetz

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Distributivgesetz

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

De Morgan'sche Gesetze

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Unabhängige Ereignisse

stochastisch **unabhängig**

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

stochastisch **abhängig**

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{falls } P(B) > 0$$

Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \sum_{i=1}^N P(A | B_i) \cdot P(B_i)$$

Bayes

falls $P(B)$ nicht bekannt

$$P(A_k | B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^N P(B|A_i) P(A_i)}$$

falls $P(B)$ bekannt

$$P(A_k | B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{P(B)}$$

Weitere Formeln

Multiplikationsregel mit bedingter Wahrscheinlichkeit

$$P(A_1 \cap A_2 | B) = P(A_1 | B) \cdot P(A_2 | B)$$

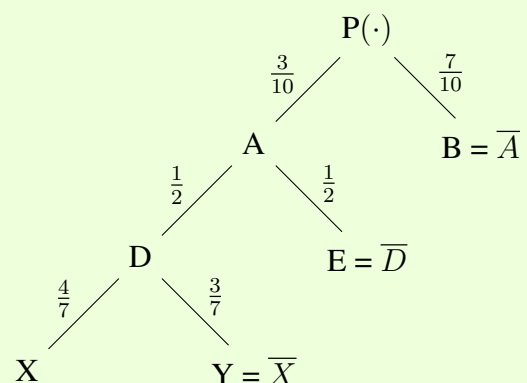
Relative Häufigkeit

$n(A)$: Anzahl der Häufigkeit / Eintreten

N : Gesamtanzahl der Versuche / Beobachtungen

$$P(A) = \frac{n(A)}{N}$$

Baumdiagramm



Prüfungsaufgabe 1: Teil 2

Diskrete Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$
2. Wahrscheinlichkeit ist nicht negativ!
3. $f_X(x)$ ist stückweise kontinuierlich

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Erwartungswert

$$\mu = E[X]$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx$$

Bedingter Erwartungswert

$$\begin{aligned} E[X \mid X > \mathbf{a}] &= \frac{1}{P(X > \mathbf{a})} \int_{\mathbf{a}}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= \frac{1}{1 - F_X(\mathbf{a})} \int_{\mathbf{a}}^{\text{Letzte Grenze}} x f_X(x) dx \end{aligned}$$

Varianz

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Verteilungsfunktion

$$F_X(-\infty) = 0$$

$$0 \leq F_X(x) \leq 1$$

$$F_X(\infty) = 1$$

$$F_X(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f_X(t) dt$$

$$F_X(x_2) = \int_{-\infty}^{x_2} f_X(t) dt + F_X(x_1)$$

$$F_X(x) = P(\{X \leq x\}) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

$$P(X > x) = \int_x^{\text{Grenze Ende}} f_X(x) dx$$

$$P(\{x_1 < X < x_2\}) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f_X(t) dt$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x > \text{Grenze 1} \\ \dots, & \text{Grenze 1} \leq x \leq \text{Grenze 2} \\ 1, & \text{für } x > \text{Grenze 2} \end{cases}$$

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

Prüfungsaufgabe 2 und 3

Inhaltsverzeichnis

1	Kovarianz	7
2	SOMF, WWS	8
2.1	Second-Order Moment Function (SOMF)	8
2.2	Wide-Sense Stationarity (WSS)	8
2.3	Cross-Second-Order Moment Function	8
2.4	Central Second-Order Moment Function (Kovarianzfunktion)	8
3	Leistungsspektraldichte (PSD) und Spektrum	9
3.1	Leistungsspektraldichte	9
3.1.1	Weißes Rauschen	9
3.1.2	Kreuzleistungsspektraldichte CPSD	9
3.2	Definition des Spektrums	10
3.2.1	Eigenschaften	10
3.2.2	Kreuzspektrum	10
3.2.3	Reellwertige Prozesse	10
4	FIR und IIR Filter	11
4.1	Einführung Digitale Filterung	11
4.1.1	Allgemeines Konzept der Filterung	11
4.1.2	Lineare Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten (LCCDE)	11
4.2	Endliche Impulsantwort: FIR - Filter	12
4.3	Unendliche Impulsantwort: IIR - Filter	13
4.4	Lineare Filterung	14
4.4.1	Kovarianzfunktion und Spektrum der Ausgabe	14
4.4.2	Kreuzkovarianzfunktion und Kreuzspektrum	14
5	Gefilterte Rauschprozesse: AR, MA und ARMA	15
5.1	Lineare Filterung von Zufallsprozessen plus Rauschen	15
5.2	Autoregressives (AR) Modell	15
5.2.1	Definition	15
5.3	Filter mit gleitendem Mittelwert (MA)	15
5.4	Autoregressives Modell des gleitenden Durchschnitts (ARMA)	15
6	Optimale lineare Systeme	16
6.1	Wiener Filter	16
6.1.1	Hauptkonzept	16
6.1.2	Optimale Lösung - Optimierung	16

1 Kovarianz

Eigenschaften der Kovarianz

- **Unkorrelierte Variablen:** Falls $c_{X_1 X_2}(\kappa) = 0$, sind X_1 und X_2 unkorreliert. Bedeutet also, dass keine lineare Beziehung zwischen den Variablen besteht.
- **Orthogonalität:** Falls $r_{X_1 X_2} = 0$, sind die Variablen orthogonal.
- **Unabhängigkeit:** Wenn X_1 und X_2 unabhängig sind, gilt:

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) \quad \text{und} \quad c_{X_1 X_2} = 0.$$

2 SOMF, WWS

2.1 Second-Order Moment Function (SOMF)

Die **Second-Order Moment Function (SOMF)** misst die Ähnlichkeit eines Zufallsprozesses mit einer zeitverschobenen Version desselben Prozesses.

- SOMF ist definiert als:

$$r_{XX}(n+k, n) = E[X(n+k) \cdot X(n)]$$

- Für einen komplexen Zufallsprozess $X(n)$ ist die SOMF definiert als:

$$r_{XX}(n_1, n_2) = E[X(n_1) \cdot X^*(n_2)].$$

2.2 Wide-Sense Stationarity (WSS)

Ein Zufallsprozess $X(n)$ ist **Wide-Sense Stationary (WSS)**, wenn:

1. Der Erwartungswert $E[X(n)]$ konstant ist.
2. Die SOMF nur von der Zeitdifferenz κ abhängt:

$$r_{XX}(n+\kappa, n) = r_{XX}(\kappa)$$

2.3 Cross-Second-Order Moment Function

Die **Cross-SOMF** beschreibt die Ähnlichkeit zwischen zwei Zufallsprozessen $X_1(n)$ und $X_2(n)$ **IM NICHT STATIONÄREN ZUSTAND**:

$$r_{X_1X_2}(n_1, n_2) = E[X_1(n_1) \cdot X_2(n_2)].$$

- Wenn $X_1(n)$ und $X_2(n)$ gemeinsam WSS sind, hängt die Cross-SOMF nur von κ ab:

$$r_{X_1X_2}(\kappa) = E[X_1(n+\kappa) \cdot X_2(n)], \quad \text{und somit ergibt sich}$$

$$c_{X_1X_2} = r_{X_1X_2}(\kappa) = E[X_1(n+\kappa) \cdot X_2(n)]$$

2.4 Central Second-Order Moment Function (Kovarianzfunktion)

Die zentrale SOMF, auch **Kovarianzfunktion** genannt, wird definiert als:

$$c_{XX}(n+\kappa, n) = E[(X(n+\kappa) - E[X(n+\kappa)]) \cdot (X(n) - E[X(n)])], \quad \text{bzw.}$$

$$c_{XX}(n+\kappa, n) = E[X(n+\kappa) \cdot X(n)] - E[X(n+\kappa)] \cdot E[X(n)], \quad \text{falls } E[X(n)] = 0$$

$$c_{XX}(n+\kappa, n) = r_{XX} = E[X(n+\kappa) \cdot X(n)]$$

- Die Kovarianzfunktion kann durch die SOMF ausgedrückt werden:

$$c_{XX}(n+\kappa, n) = r_{XX}(n+\kappa, n) - E[X(n+\kappa)]E[X(n)].$$

- Für zwei Prozesse $X(n)$ und $Y(n)$ verwenden wir die **Kreuzkovarianzfunktion**:

$$c_{XY}(n+\kappa, n) = r_{XY}(n+\kappa, n) - E[X(n+\kappa)]E[Y(n)],$$

$$c_{XY}(n+\kappa, n) = E[X(n+\kappa)Y(n)] - E[X(n+\kappa)]E[Y(n)].$$

Des Weiteren gilt noch: $c_{XY}(k) = c_{YX}(-k)$

3 Leistungsspektraldichte (PSD) und Spektrum

3.1 Leistungsspektraldichte

3.1.1 Weißes Rauschen

Ein **weißes Rauschen** ist ein Zufallsprozess $X(n)$, dessen **Leistungsdichtespektrum (Power Spectral Density, PSD)** konstant über alle Frequenzen ist:

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \sigma_X^2$$

Eigenschaften

1. **Konstante PSD:** Das PSD bleibt unabhängig von der Frequenz konstant. Dies bedeutet, dass das weiße Rauschen eine gleichmäßige Energieverteilung über alle Frequenzen hat.
2. **Zweite Momentfunktion (SOMF):** Die SOMF für einen weißen Prozess wird durch die inverse Fourier-Transformation der PSD erhalten:

$$r_{XX}(\kappa) = \sigma_X^2 \delta(\kappa)$$

wobei $\delta(\kappa)$ die Kronecker-Delta-Funktion ist, definiert als:

$$\delta(\kappa) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \kappa = 0 \\ 0, & \text{wenn } \kappa \neq 0 \end{cases}$$

3. **Statistik:** Die Zufallsvariablen eines weißen Rauschens sind unkorreliert, haben eine konstante Varianz σ_X^2 und einen Erwartungswert von 0.
4. Unabhängigkeit und identische Verteilung sind klassische Eigenschaften von Rauschprozessen.

3.1.2 Kreuzleistungsspektraldichte CPSD

Die **Cross-Power Spectral Density (CPSD)** beschreibt die Frequenzabhängigkeit der statistischen Korrelation zwischen zwei zufälligen Prozessen $X(n)$ und $Y(n)$. Dies ist ein wesentlicher Begriff in der Frequenzbereichsanalyse, insbesondere bei der Untersuchung von Beziehungen zwischen zwei Prozessen.

Eigenschaften

1. **Symmetrie:**

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = S_{YX}(e^{j\omega})^*$$

Wenn $X(n)$ und $Y(n)$ reellwertig sind, dann gilt:

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = S_{YX}(e^{-j\omega})$$

2. **Reale und imaginäre Anteile:**

- Der reale Anteil von $S_{XY}(e^{j\omega})$ ist gerade.
- Der imaginäre Anteil von $S_{XY}(e^{j\omega})$ ist ungerade.

3. **Orthogonalität:**

Wenn $X(n)$ und $Y(n)$ orthogonal sind, dann gilt: $S_{XY}(e^{j\omega}) = 0$

3.2 Definition des Spektrums

Das Spektrum eines stationären Zufallsprozesses $X(n)$ wird definiert als die Fourier-Transformation der Kovarianzfunktion:

$$C_{XX}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{XX}(n)e^{-j\omega n}$$

3.2.1 Eigenschaften

1. Die Spektralfunktion $C_{XX}(e^{j\omega})$ existiert und ist beschränkt sowie gleichmäßig stetig, wenn:

$$\sum_n |c_{XX}(n)| < \infty$$

2. Die Inversion ist gegeben durch:

$$c_{XX}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_{XX}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

3. $C_{XX}(e^{j\omega})$ ist:

- Reellwertig
- 2π -periodisch
- Nicht-negativ

3.2.2 Kreuzspektrum

Für zwei gemeinsam stationäre Zufallsprozesse $X_1(n)$ und $X_2(n)$ ist das Kreuzspektrum definiert als:

$$C_{X_1X_2}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{X_1X_2}(n)e^{-j\omega n}$$

Mit der Eigenschaft:

$$C_{X_1X_2}(e^{j\omega}) = C_{X_2X_1}(e^{j\omega})^*$$

Die Inversion lautet:

$$c_{X_1X_2}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_{X_1X_2}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

3.2.3 Reellwertige Prozesse

Wenn $X_1(n)$ und $X_2(n)$ reellwertig sind, gilt:

- $C_{X_1X_2}(e^{j\omega}) = C_{X_2X_1}(e^{-j\omega})$
- $C_{X_1X_2}(e^{j\omega}) = C_{X_1X_2}(e^{-j\omega})^* = C_{X_2X_1}(e^{-j\omega}) = C_{X_2X_1}(e^{j\omega})^*$

4 FIR und IIR Filter

4.1 Einführung Digitale Filterung

4.1.1 Allgemeines Konzept der Filterung

- **Filterung** dient der Reduktion oder Verstärkung bestimmter Signalanteile.
- Digitale Filter arbeiten mit **abgetasteten, zeitdiskreten Signalen** und lassen sich in zwei Haupttypen unterteilen:
 1. **Finite Impulse Response (FIR)**: Haben eine endliche Impulsantwort.
 2. **Infinite Impulse Response (IIR)**: Besitzen eine unendliche Impulsantwort.
- Der Frequenzbereich eines Filters wird durch die Übertragungsfunktion $H(e^{j\omega})$ beschrieben:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

wobei $X(e^{j\omega})$ und $Y(e^{j\omega})$ die Fourier-Transformationen des Eingangs- und Ausgangssignals sind.

4.1.2 Lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten (LCCDE)

- Zeitinvariante, lineare diskrete Systeme werden durch eine LCCDE beschrieben:

$$\sum_{k=0}^M a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{N-1} b_r x(n-r)$$

- **FIR-System**: Hat $M = 0$:

$$y(n) = \sum_{r=0}^{\text{Ordnung}} b_r x(n-r)$$

$$y(n) = \sum_{r=0}^{\text{Verzögerung}-1} b_r x(n-r)$$

- **IIR-System**: Hat $M > 0$:

$$\sum_{k=0}^M a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{N-1} b_r x(n-r)$$

4.2 Endliche Impulsantwort: FIR - Filter

Definition

FIR-Filter sind lineare zeitinvariante Systeme mit einer endlichen Impulsantwort.

Differenzengleichung:

$$y(n) = \sum_{r=0}^{\text{Information}} b_r x(n-r), \quad \text{Information: Ordnung } O = \text{Verzögerung } N - 1$$

Entspricht der Faltungsformel:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

wobei $h(k)$ die Impulsantwort des Filters darstellt.

Vergleich IIR und FIR

1. Stabilität

- IIR-Filter erfordern zusätzliche Stabilitätskriterien.
- FIR-Filter sind per Definition stabil.

2. Lineare Phase

- Es ist schwierig, eine lineare Phase mit einem IIR-Filter zu erreichen.
- FIR-Filter ermöglichen eine perfekte lineare Phase.

3. Effizienz

- IIR-Filter erreichen Spezifikationen für den Amplitudengang effizienter.
- IIR-Filter sind weniger rechenaufwendig als FIR-Filter.

4.3 Unendliche Impulsantwort: IIR - Filter

Definition

Ein IIR-Filter hat eine unendliche Impulsantwort.

Differenzengleichung:

$$\sum_{k=0}^M a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{N-1} b_r x(n-r)$$

Die Übertragungsfunktion ist rational und wird dargestellt als:

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{N-1} b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}}$$

Eigenschaften

1. Kausalität und Stabilität:

- Für die Stabilität müssen die Wurzeln des Nennerpolynoms innerhalb des Einheitskreises im z -Bereich liegen ($|z| < 1$).

2. Reelle und kausale Impulsantwort $h(n)$:

- Die Einheitspulsantwort $h(n)$ ist reell, kausal und stabil.

Vergleich IIR und FIR

1. Stabilität:

- IIR-Filter erfordern zusätzliche Stabilitätskriterien.
- FIR-Filter sind per Definition stabil.

2. Lineare Phase:

- Es ist schwierig, eine lineare Phase mit einem IIR-Filter zu erreichen.
- FIR-Filter ermöglichen eine perfekte lineare Phase.

3. Effizienz:

- IIR-Filter erreichen Spezifikationen für den Amplitudengang effizienter.
- IIR-Filter sind weniger rechenaufwendig als FIR-Filter.

4.4 Lineare Filterung

Die lineare Filterung beschreibt, wie ein stationärer Eingangssignalprozess $X(n)$ durch ein lineares zeitinvariantes System (LTI-System) verarbeitet wird, um einen Ausgangssignalprozess $Y(n)$ zu erzeugen. Das System wird durch seine Einheitspulsantwort $h(n)$ charakterisiert. Die Beziehung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal ist durch die Faltungsoperation gegeben:

$$Y(n) = \sum_{\rho} h(\rho)X(n - \rho)$$

Ein LTI-System ist **stabil**, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\sum_{\rho} |h(\rho)| < \infty$$

4.4.1 Kovarianzfunktion und Spektrum der Ausgabe

Die Kovarianzfunktion $c_{YY}(\kappa)$ des Ausgangsprozesses $Y(n)$ eines stabilen linearen Systems mit der Impulsantwort $h(n)$ ist definiert als:

$$c_{YY}(\kappa) = E[Y(n + \kappa)Y(n)]$$

Ersetzt man $Y(n)$ durch die gefilterte Version des Eingangssignals $X(n)$:

$$Y(n) = \sum_{\rho} h(\rho)X(n - \rho),$$

führt dies zur Kovarianzfunktion:

$$c_{YY}(\kappa) = \sum_{\rho} \sum_{\iota} h(\rho)h(\iota)^* c_{XX}(\kappa - \rho + \iota),$$

wobei $c_{XX}(\kappa)$ die Kovarianzfunktion des Eingangssignals $X(n)$ ist.

Spektrum des Ausgangssignals

Durch Fourier-Transformation der Kovarianzfunktion ergibt sich die Spektraldichte des Ausgangssignals:

$$C_{YY}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 C_{XX}(e^{j\omega}),$$

wobei:

- $H(e^{j\omega})$ die Übertragungsfunktion des Filters ist,
- $C_{XX}(e^{j\omega})$ die Spektraldichte des Eingangssignals beschreibt.

4.4.2 Kreuzkovarianzfunktion und Kreuzspektrum

Die Kreuz-Kovarianzfunktion des Ausgangssignals $Y(n)$ und Eingangssignals $X(n)$ eines stabilen LTI-Systems mit Impulsantwort $h(n)$ ist definiert als:

$$c_{YX}(\kappa) = E[Y(n + \kappa)X(n)]$$

Durch Einsetzen von $Y(n) = \sum_{\rho} h(\rho)X(n - \rho)$ ergibt sich:

$$c_{YX}(\kappa) = \sum_{\rho} h(\rho)c_{XX}(\kappa - \rho)$$

wobei $c_{XX}(\kappa)$ die Autokovarianzfunktion des Eingangssignals $X(n)$ ist.

5 Gefilterte Rauschprozesse: AR, MA und ARMA

5.1 Lineare Filterung von Zufallsprozessen plus Rauschen

Lineare Filterung von stationären Zufallsprozessen $X(n)$ in Kombination mit einem Rauschsignal $V(n)$. Die Annahmen sind:

1. $X(n)$ und $V(n)$ sind stationär und unkorreliert
2. $h(n)$, $X(n)$ und $V(n)$ sind reellwertig.

Der Ausgang $Y(n)$ des Systems wird berechnet durch:

$$Y(n) = \sum_{\rho=-\infty}^{\infty} h(\rho)X(n-\rho) + V(n), \quad \text{bzw.}$$

5.2 Autoregressives (AR) Modell

Die Hauptidee des Filters besteht darin, das weiße Spektrum des Eingangssignals nach Wunsch zu formen.

5.2.1 Definition

Der AR-Prozess $Y(n)$ der Ordnung p (AR(p)) wird durch die **Differenzengleichung** definiert:

$$Y(n) + \sum_{k=1}^p a_k Y(n-k) = X(n),$$

Übertragungsfunktion:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j\omega k}}.$$

5.3 Filter mit gleitendem Mittelwert (MA)

Das **Moving-Average** Modell beschreibt einen Zufallsprozess $Y(n)$, bei dem der aktuelle Wert als Linearkombination aktueller und vorheriger Werte eines weißen Rauschens $X(n)$ dargestellt wird.

Differenzengleichung:

$$Y(n) = X(n) + \sum_{l=1}^q b_l X(n-l),$$

Übertragungsfunktion:

Diese Gleichung kann in die Übertragungsfunktion transformiert werden:

$$H(e^{j\omega}) = 1 + \sum_{l=1}^q b_l e^{-j\omega l}.$$

5.4 Autoregressives Modell des gleitenden Durchschnitts (ARMA)

Der ARMA-Prozess $Y(n)$ der Ordnung p und q (ARMA(p, q)) wird durch die **Differenzengleichung** definiert:

$$Y(n) + \sum_{k=1}^p a_k Y(n-k) = X(n) + \sum_{l=1}^q b_l X(n-l),$$

Übertragungsfunktion:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + \sum_{l=1}^q b_l e^{-j\omega l}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j\omega k}}.$$

6 Optimale lineare Systeme

6.1 Wiener Filter

6.1.1 Hauptkonzept

Der **Wiener Filter** ist ein lineares, zeitinvariantes Filter, das die Fehlerquadrate zwischen dem geschätzten Signal und dem tatsächlichen Signal minimiert. Dies basiert auf dem **Minimum Mean-Squared Error (MSE)-Kriterium**.

Minimum Mean Squared Error (MSE)

$$q(h) = E [\epsilon^2(n)] .$$

$$q(h) = E \left[\left(X(n) - \sum_m h(m) Y(n-m) \right)^2 \right] .$$

Der Fehler $\epsilon(n)$ ist definiert als:

$$\epsilon(n) = X(n) - \hat{X}(n), \quad \hat{X}(n) = \sum_m h_{opt}(m) Y(n-m).$$

Hierbei ist:

- $q(h)$: Der mittlere quadratische Fehler
- $X(n)$: Das ursprüngliche Signal
- $\hat{X}(n)$: Die geschätzte Version des ursprünglichen Signals
- $Y(n)$: Das beobachtete Signal (Signal mit Rauschen überlagert)
- $h(n)$: Die Impulsantwort des Filters
- $\epsilon(n)$: Der Fehler

6.1.2 Optimale Lösung - Optimierung

Orthogonalitätsprinzip

Die Fehlerkomponente $\epsilon(n)$ ist orthogonal zur beobachteten Komponente $Y(n)$:

$$c_{\epsilon Y}(\kappa) = E [\epsilon(n + \kappa) Y(n)] = 0, \quad \forall \kappa \in \mathbb{Z}$$

Optimale Filterantwort

Im **Zeitbereich** ergibt sich die *Wiener-Hopf-Gleichung*

$$c_{XY}(\kappa) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{opt}(m) * c_{YY}(\kappa)$$

Im **Frequenzbereich** ergibt sich die optimale Filterantwort $H_{opt}(e^{j\omega})$

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = H_{opt}(e^{j\omega}) \cdot C_{YY}(e^{j\omega})$$

$$H_{opt}(e^{j\omega}) = \frac{C_{XY}(e^{j\omega})}{C_{YY}(e^{j\omega})},$$

Prüfungsaufgabe 4

Methode der kleinsten Quadrate

Grundlagen Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1.

$$X^T X = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N x_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N 1 \end{pmatrix}$$

2.

$$X^T y = \begin{pmatrix} \sum_i^N x_i y_i \\ \sum_i^N y_i \end{pmatrix}$$

3.

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\theta}_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \hat{\theta} = x_2 \\ \hat{\theta}_0 = x_1 \end{matrix} = \hat{\theta} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

4.

$$\hat{y} = X\hat{\theta} + \epsilon(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \\ x_5 & 1 \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\theta}_0 \end{pmatrix} + \epsilon(x)$$

Weitere Formeln

quadratische Abweichung
(quadratischer Fehler)

$$\epsilon = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$$

mittlere quadratische Abweichung
(mittlerer quadratischer Fehler)

$$\epsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$$

1. Stichprobenmittelwert für \bar{x} und \bar{y}

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

2. Steigung $\hat{\theta}$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{n=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

3. Achsenabschnitt

$$\hat{\theta}_0 = \bar{y} - \hat{\theta}\bar{x}$$

4. Endformel

$$f(x) = \hat{y} = \hat{\theta}x_i + \hat{\theta}_0$$