問3.1

1. 整数 a で代表される剰余類 $a+8\mathbb{Z}$ を $\bar{a}$ で表すと、
$H_8=\{\bar{1},\bar{3},\bar{5},\bar{7}\}$ であるから $|H_8|=4$
$\bar{3}^2=\bar{1}$, $\bar{5}^2=\bar{1}$, $\bar{7}^2=1$, $\bar{3}\cdot\bar{5}=\bar{7}$ であるから
$\{\bar{3},\bar{5}\}$ は生成元の集合となる

2. $$\phi_1(x)=\begin{cases}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} & (x=\bar{1})\\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix} & (x=\bar{3})\\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix} & (x=\bar{5})\\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix} & (x=\bar{7})\end{cases}$$

3. $\phi_1(\bar{3}\cdot\bar{5})=\phi_1(\bar{5}\cdot\bar{3})=\phi_1(\bar{7})$, $\phi_1(\bar{3})\cdot\phi_1(\bar{5})=\phi_1(\bar{5})\cdot\phi_1(\bar{3})=\phi_1(\bar{7})$
$\phi_1(\bar{5}\cdot\bar{7})=\phi_1(\bar{7}\cdot\bar{5})=\phi_1(\bar{3})$, $\phi_1(\bar{5})\cdot\phi_1(\bar{7})=\phi_1(\bar{7})\cdot\phi_1(\bar{5})=\phi_1(\bar{3})$
$\phi_1(\bar{7}\cdot\bar{3})=\phi_1(\bar{3}\cdot\bar{7})=\phi_1(\bar{5})$, $\phi_1(\bar{3})\cdot\phi_1(\bar{7})=\phi_1(\bar{7})\cdot\phi_1(\bar{3})=\phi_1(\bar{5})$
$\phi_1(\bar{1}\cdot\bar{a})=\phi_1(\bar{a})$, $\phi_1(\bar{1})\cdot\phi_1(\bar{a})=\phi_1(\bar{a})\cdot\phi_1(\bar{1})=\phi_1(\bar{a})$
$(\bar{a}\in\{\bar{3},\bar{5},\bar{7}\})$
$\phi_1(\bar{3}\cdot\bar{3})=\phi_1(\bar{1})$, $\phi_1(\bar{3})\cdot\phi_1(\bar{3})=\phi_1(\bar{1})$
$\phi_1(\bar{5}\cdot\bar{5})=\phi_1(\bar{1})$, $\phi_1(\bar{5})\cdot\phi_1(\bar{5})=\phi_1(\bar{1})$
$\phi_1(\bar{7}\cdot\bar{7})=\phi_1(\bar{1})$, $\phi_1(\bar{7})\cdot\phi_1(\bar{7})=\phi_1(\bar{1})$
よって ϕ_1 は準同型写像である。

また、$\bar{a}\neq\bar{b}\Rightarrow\phi_1(\bar{a})\neq\phi_1(\bar{b})$ であるから、ϕ_1 は単射である。 ∎

4. $G_4 = \langle \zeta_4 \rangle = \{1, \zeta_4, \zeta_4^2, \zeta_4^3\}$

5. $$\phi_2(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & (x = 1) \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} & (x = \zeta_4) \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} & (x = \zeta_4^2) \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & (x = \zeta_4^3) \end{cases}$$

6. $\phi_2(1 \cdot a) = \phi(a)$, $\phi_2(1) \cdot \phi_2(a) = \phi_2(a) \cdot \phi_2(1) = \phi_2(a)$ $(a \in \{\zeta_4, \zeta_4^2, \zeta_4^3\})$

$\phi_2(\zeta_4 \cdot \zeta_4^2) = \phi_2(\zeta_4^2 \cdot \zeta_4) = \phi_2(\zeta_4^3)$, $\phi_2(\zeta_4^2)\phi_2(\zeta_4) = \phi_2(\zeta_4)\phi_2(\zeta_4^2) = \phi_2(\zeta_4^3$

$\phi_2(\zeta_4 \cdot \zeta_4^3) = \phi_2(\zeta_4^3 \cdot \zeta_4) = \phi_2(1)$, $\phi_2(\zeta_4)\phi_2(\zeta_4^3) = \phi_2(\zeta_4^3)\phi_2(\zeta_4) = \phi_2(1)$

$\phi_2(\zeta_4^2 \cdot \zeta_4^3) = \phi_2(\zeta_4^3 \cdot \zeta_4^2) = \phi_2(\zeta_4)$, $\phi_2(\zeta_4^2)\phi_2(\zeta_4^3) = \phi_2(\zeta_4^3)\phi_2(\zeta_4^2) = \phi_2(\zeta_4)$

$\phi_2(1 \cdot 1) = \phi_2(1)$, $\phi_2(1) \cdot \phi_2(1) = \phi_2(1)$

$\phi_2(\zeta_4 \cdot \zeta_4) = \phi_2(\zeta_4^2)$, $\phi_2(\zeta_4) \cdot \phi_2(\zeta_4) = \phi_2(\zeta_4^2)$

$\phi_2(\zeta_4^2 \cdot \zeta_4^2) = \phi_2(1)$, $\phi_2(\zeta_4^2) \cdot \phi_2(\zeta_4^2) = \phi_2(1)$

$\phi_2(\zeta_4^3 \cdot \zeta_4^3) = \phi_2(\zeta_4^2)$, $\phi_2(\zeta_4^3)\phi_2(\zeta_4^3) = \phi_2(\zeta_4^2)$

よって ϕ_2 は準同型写像である.

また, $a \neq b \Rightarrow \phi_2(a) \neq \phi_2(b)$ であるから. ϕ_2 は単射である. ■

問3.3

(1) $(0, 0)$

(2) $\{(0, k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(3) $\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z} \ni (m_1, 3n_1), (m_2, 3n_2)$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ni (a, b)$ とする.

$(\mathbb{Z} \ni m_1, n_1, m_2, n_2, a, b)$

$(m_1, 3n_1) + (m_2, 3n_2) = (m_1 + m_2, 3(n_1 + n_2)) \in \mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$,

$(m_1, 3n_1) \cdot (a, b) = (am_1, 3bn_1) \in \mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$

であるから. $\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ のイデアルとなる. ■

(4) $A \ni (a', b')$ とする $(\mathbb{Z} \ni a', b')$

$(m_1, 3n_1) + (m_2, 3n_2) = (m_1 + m_2, 3(n_1 + n_2)) \in \mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$,

$(m_1, 3n_1) \cdot (a', b') = (a'm_1, b'm_1 + 3a'n_1) \notin \mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$

であるから. $\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ は A のイデアルとならない. ■