「排他的論理和」

(i)「$A \oplus B$の真理値表から$\oplus$を使わない論理式を求めよ」

排他的論理和の真理値表(①)は、

A	B	$A \oplus B$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

$$\therefore A \oplus B \equiv (A \land \neg B) \lor (\neg A \land B)$$

(ii) はじめに「$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$」を示す

$(A \oplus B) \oplus C$の真理値表(②)

A	B	C	$(A \oplus B) \oplus C$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	F

$A \oplus (B \oplus C)$の真理値表

A	B	C	$A \oplus (B \oplus C)$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	F
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	F

よって、排他的論理和に対して結合律は成り立つ。
命題記号が3つ以上ありそれらすべてに排他的論理和を適用している論理式であれば、単に左から計算してもよい。

また、②の真理値表を見ると命題記号が3つとも真であるとき、$A \oplus B \oplus C$も真となっているため、$A \oplus B \oplus C$は「A, B, Cのいずれか」という文を表していない。

(iii) n個 ($n \in \mathbb{N}$) の命題記号 $A_1, \cdots, A_n$ に対し、

$B_n \equiv A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ とする.

まず、「$A \oplus B \equiv B \oplus A$」を示す.

これは ① の真理値表から明らかである.

よって、排他的論理和は可換であり、結合律が成り立つことから、B_n 内の $A_1, \cdots, A_n$ をどのように並びかえても B_n の真偽は不変である.

ここで、B_n 内の $A_1, \cdots, A_n$ に対し、真であるものの個数を m とし、それらを左側に寄せるように変形する.

$B_{n,m}$ を命題変数の個数が n で、その中で真である個数を m としたとこ、すべての変数に排他的論理和を適用したものとすると、

$$B_{n,m} \equiv A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$$

$$\equiv \underbrace{T \oplus \cdots \oplus T}_{m} \oplus \underbrace{F \oplus \cdots \oplus F}_{n-m} \quad \text{(真を T, 偽を F と表している)}$$

$$\equiv \underbrace{F \oplus T \oplus \cdots \oplus T}_{m-1} \oplus \underbrace{F \oplus \cdots \oplus F}_{n-m}$$

$$\equiv \underbrace{T \oplus \cdots \oplus T}_{m-2} \oplus \underbrace{F \oplus \cdots \oplus F}_{n-m}$$

$$\equiv B_{n-2,m-2}$$

であり

$$T \oplus F \oplus \cdots \oplus F \equiv T, \quad F \oplus F \oplus \cdots \oplus F \equiv F$$

であるから B_n の真偽には $A_1, \cdots, A_n$ の真の個数 m の偶奇のみが関係する。

(i) $m \equiv 0 \pmod 2$ のとき

$$\begin{aligned} B_{n,m} &\equiv T \oplus \cdots \oplus T \oplus F \oplus \cdots \oplus F \\ &\equiv T \oplus T \oplus F \oplus \cdots \oplus F \\ &\equiv F \oplus F \oplus \cdots \oplus F \\ &\equiv F \end{aligned}$$

(ii) $m \equiv 1 \pmod 2$ のとき

$$\begin{aligned} B_{n,m} &\equiv T \oplus \cdots \oplus T \oplus F \oplus \cdots \oplus F \\ &\equiv T \oplus F \oplus \cdots \oplus F \\ &\equiv T \end{aligned}$$

$$A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \equiv \begin{cases} \text{True} & (\text{真である命題変数の個数が奇数のとき}) \\ \text{False} & (\text{真である命題変数の個数が偶数のとき}) \end{cases}$$

//

「以下が成り立つことを形式的に証明せよ。」

(i) $C \land (A \to \neg C) \land (A \lor B) \to B$

1.	C		P
2.	$A \to \neg C$		P
3.	$A \lor B$		P
4.		A	P [$A \to \neg C$より]
5.		$\neg C$	2, 5, MP
6.		False	1, 5, Contr
7.	$\neg A$		4-6, IP
8.	B		3, 7, DS
	Q.E.D.		1-8, CP

(ii) $(\neg A \to \neg C) \land (C \lor B) \land \neg B \land (\neg A \lor (C \land \neg B \to D)) \to D$

1.	$\neg A \to \neg C$	P
2.	$C \lor B$	P
3.	$\neg B$	P
4.	$\neg A \lor (C \land \neg B \to D)$	P
5.	C	2, 3, DS
6.	$\quad \neg A$	P [$\neg A \to \neg C$ より]
7.	$\quad \neg C$	1, 6, MP
8.	$\quad$ False	5, 7, Contr
9.	A	6-8, IP
10.	$\neg\neg A$	9, DN
11.	$C \land \neg B \to D$	4, 10, DS
12.	$C \land \neg B$	3, 5, Conj
13.	D	11, 12, MP
	Q.E.D.	1-13, CP