問 4.2

1. (i) 単位元の存在.

恒等写像 $1 \in End(G)$ は単位元となる

$\because\ 1 \circ g(x) = 1(g(x)) = g(x),\ g \circ 1(x) = g(1(x)) = g(x)$

(ii) 結合律

$(f \circ g) \circ h(x) = f(g(\cdot)) \circ h(x) = f(g \circ h(x)) = f(g(h(x)))$

$f \circ (g \circ h)(x) = f \circ (g(h(x))) = f(g(h(x)))$

$\therefore\ (f \circ g) \circ h(x) = f \circ (g \circ h)(x)$ であり結合律を満たす.

以上より, $End(G)$ は $f \circ g$ において モノイドとなる. ∎

2. $\langle 3, 5 \rangle = U(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})$ となり, $ord(3) = 4 \leq 4 = ord(5)$ となるため.

$a = 3, b = 5$ は条件を満たす.

3. $f(x) = x^3$ とすると, $|Im(f)| = 8 = |G|$ となり最大となる.

$(f(1) = 1, f(3) = 11, f(5) = 13, f(7) = 7, f(9) = 9, f(11) = 3, f(13) = 5, f(15) = 15)$

$\forall x, y \in G$ に対し, $f(xy) = (xy)^3 = x^3 y^3,\ f(x)f(y) = x^3 y^3$

であるから, f は準同型写像である.

4. $f(x) = x^2$ とすると, $|Im(f)| = 2$ となる.

$$\left(f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 3, 5, 11, 13) \\ 9 & (x = 1, 7, 9, 15) \end{cases} \right)$$

$\forall x, y \in G$ に対し, $f(xy) = (xy)^2 = x^2 y^2,\ f(x)f(y) = x^2 y^2$

であるから, f は準同型写像である.