1. 以下の論理式を∀と∃を使わない論理式にせよ.

$S=\{a,b,c\},\ s\in S\ ,\ T=\{d,e\},\ t\in T$

(i) $\forall s(P(s)\longrightarrow Q(s))$

$\equiv (P(a)\rightarrow Q(a))\wedge(P(b)\longrightarrow Q(b))\wedge(P(c)\longrightarrow Q(c))$

(ii) $\exists s(P(s)\wedge Q(s))$

$\equiv (P(a)\wedge Q(a))\vee(P(b)\wedge Q(b))\vee(P(c)\wedge Q(c))$

(iii) $\forall s\,\exists t\,R(s,t)$

$\equiv \forall s(R(s,d)\vee R(s,e))$

$\equiv (R(a,d)\vee R(a,e))\wedge(R(b,d)\vee R(b,e))\wedge(R(c,d)\vee R(c,e))$

2. 以下を形式的に証明せよ.

(i) $\forall x(P(x) \to Q(x)) \land \neg\exists x Q(x) \to \forall x \neg P(x)$

1.	$\forall x(P(x) \to Q(x))$	P
2.	$\neg\exists x Q(x)$	P
3.	$P(x) \to Q(x)$	1, UI
4.	$\forall x \neg Q(x)$	2, T (ドモルガン)
5.	$\neg Q(x)$	4, UI
6.	$\neg P(x)$	3, 5, MT
7.	$\forall x \neg P(x)$	6, UG
	QED	1-7, CP

(ii) $\neg Q(c) \land (\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to \forall x \neg P(x)$

1.	$\neg Q(c)$	P
2.	$\exists x P(x) \to \forall y Q(y)$	P
3.	$\exists x P(x)$	P [$\exists x P(x) \to \forall y Q(y)$ より]
4.	$\forall y Q(y)$	2, 3, MP
5.	$Q(c)$	4, UI
6.	False	1, 5, Contr
7.	$\neg\exists x P(x)$	3-6, IP
8.	$\forall x \neg P(x)$	7, T (ドモルガン)
	QED	1-8, CP

(iii) $\neg\exists x\exists y(R(x,y)\land\neg P(x,y))\land\forall x\forall y(\neg R(x,y)\to P(x,y))$

$\to\exists x\exists y P(x,y)$

1.	$\neg\exists x\exists y(R(x,y)\land\neg P(x,y))$	P
2.	$\forall x\forall y(\neg R(x,y)\to P(x,y))$	P
3.	$\forall x\neg\exists y(R(x,y)\land\neg P(x,y))$	1, T(ドモルガン)
4.	$\forall x\forall y\neg(R(x,y)\land\neg P(x,y))$	3, T(ドモルガン)
5.	$\forall x\forall y(\neg R(x,y)\lor\neg\neg P(x,y))$	4, T(ドモルガン)
6.	$\forall x\forall y(\neg R(x,y)\lor P(x,y))$	5, DN
7.	$\forall y(\neg R(x,y)\lor P(x,y))$	6, UI
8.	$\neg R(x,y)\lor P(x,y)$	7, UI
9.	$\forall y(\neg R(x,y)\to P(x,y))$	2, UI
10.	$\neg R(x,y)\to P(x,y)$	9, UI
11.	$\neg\exists x\exists y P(x,y)$	P
12.	$\forall x\neg\exists y P(x,y)$	11, T(ドモルガン)
13.	$\forall x\forall y\neg P(x,y)$	12, T(ドモルガン)
14.	$\forall y\neg P(x,y)$	13, UI
15.	$\neg P(x,y)$	14, UI
16.	$\neg\neg R(x,y)$	10, 15, MT
17.	$P(x,y)$	8, 16, DS
18.	$\exists y P(x,y)$	17, EG
19.	$\exists x\exists y P(x,y)$	18, EG
20.	False	11, 19, Contr
21.	$\exists x\exists y P(x,y)$	11-20, IP
	QED	1-21, CP

3. 以下の論理式の階数を求めよ.

(i) $S(x) \wedge T(S, x) \rightarrow U(T, S, x)$

3階//

(ii) $\forall x \exists S(S(x) \wedge T(S, x) \rightarrow U(T, S, x))$

5階//

4. $(\forall x \neg P(x,x)) \wedge (\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)))$
$\rightarrow \forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow \neg P(y,x))$

1.	$\forall x \neg P(x,x)$	P
2.	$\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z))$	P
3.	$\neg P(x,x)$	1, UI
4.	$P(x,y) \wedge P(y,x) \rightarrow P(x,x)$	2, UI
5.	$\neg (P(x,y) \wedge P(y,x))$	3, 4, MT
6.	$\neg P(x,y) \vee \neg P(y,x)$	5, T(ドモルガン)
7.	$P(x,y)$	P[$P(x,y) \rightarrow \neg P(y,x)$ より]
8.	$\neg\neg P(x,y)$	7, DN
9.	$\neg P(y,x)$	6, 8, DS
10.	$P(x,y) \rightarrow \neg P(y,x)$	7-9, CP
11.	$\forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow \neg P(y,x))$	10, UG
12.	QED	1-11, CP