実践離散数学と計算の理論
第1回　命題論理

大阪大学大学院　工学研究科　電気電子情報通信工学専攻
王　イントウ

2023年4月19日

実践離散数学と計算の理論

- 命題論理（Propositional Logic）
- 述語論理（Predicate Logic）
- 計算可能性（Computability）
- 不完全性定理（Incompleteness Theorem）
- λ計算（λ-calculus）
- 型システム（Type Sytem）
- プログラムの正当性（Software Verification）

評価方法

- レポート評価 50/50
  - 課題：命題論理と述語論理の形式的証明が行える
  - 課題：計算可能性について論じることが出来る
  - 課題：λ 計算について論じることが出来る
  - 挑戦課題：型推論アルゴリズムを理解し実装することが出来る

書籍

- 基本的に講義は配布スライドをもとにすすめ、レポートも配布スライドのみで問題ないはずである。興味がある人は以下の書籍が参考になる（買っても良いが、必ず買う必要は無い）。

- James L.Hein 、「独習コンピュータ科学基礎II 論理構造」、翔泳社
（前半は主にこちらを利用）

- 萩谷 昌己、西崎 真也、「論理と計算のしくみ」、岩波書店
（後半は主にこちらを利用）

- Benjamin C. Pierce、「型システム入門」、オーム社
（λ 計算などはこちらも参考になる）

序論

論理的とは何か

- 論理的な文章
- 非論理的な文章
- 矛盾
- 論理的な文章再訪
- パラドクス

論理的な文章

人はみんないつか死ぬ。

私は人なので、私もいつか死ぬ。

非論理的な文章

この前、財布を盗まれた。

日本における人は全員泥棒だ。

矛盾

A「いえ、その時間には寝ていました」

B「その時間、私はAと一緒に外出していました」

コナン「妙だな・・・」

論理的な文章再訪

犯人は男か女のどちらかだ

パラドクス

この文章は誤りである

命題論理
（Propositional Logic）

命題論理とは

- 真か偽かで表される文を命題（proposition）と呼ぶ
- 命題を記号に置き換えて単純化し、論理演算を用いて計算できるようにしたものが命題計算

構文（Syntax）

A, Bを命題変数と呼ぶ

$A, B \quad :=$	$\mathtt{T} \mid$	真（True）
	$\mathtt{F} \mid$	偽（False）
	$A \land B \mid$	連言（Conjunction）
	$A \lor B \mid$	選言（Disjunction）
	$A \to B \mid$	含意（Implication）
	$\neg A \mid$	否定（Negation）
	(A)	

論理結合子の優先順位

- ¬　（優先順位が高い）
- ∧
- ∨
- →　（優先順位が低い）

推論規則（Inference Rule）

以下の規則で表される規則を、推論規則という

$$\frac{\textbf{条件}}{\textbf{論理式}}$$

連言（Conjunction）

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

私は大学生である。私は日本人である。
私は日本人の大学生である。

単純化（Simplification）

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

私は日本人の大学生である。
私は日本人である。

追加（Addition）

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{A}{B \vee A}$$

「私は現代人だ」が正しいとすると、
「私は現代人か未来人か宇宙人だ」もまた正しい。

Aが真だとすると、「AまたはB」というように
どの様な論理式を選言として追加しても真となるという規則。

二重否定（Double Negation）

$$\frac{\neg\neg A}{A} \qquad \frac{A}{\neg\neg A}$$

行かなくはない。つまり行く。

矛盾（Contradiction）

$$\frac{A \quad \neg A}{\texttt{False}}$$

私は人であり人でない。

モーダス・ポネンス（Modus Ponens）

$$\frac{A \quad A \to B}{B}$$

A: 今日は雨である。A→B: 雨ならば地面が濡れている。
B: 今日は地面が濡れている。

モナドクラスのインスタンスは、普通の値とモナド的値を引数にとりモナド的な値に変換するbind関数を持つ。
リストはモナドクラスのインスタンスであるためbind関数を持つ。

選言三段論法（Disjunctive Syllogism）

$$\frac{A \vee B \quad \neg A}{B} \qquad \frac{A \vee B \quad \neg B}{A}$$

一日の天気は雨もしくは晴れのどちらかその両方だ。今日は雨ではない。
今日は晴れだ。

ホストAとBがあったとき、TCPはAかBのどちらか片方からSYNを送信するか、
もしくは両方からSYNを送信してコネクションを成立させる。
はじめにホストAからSYNを送信していない。
ホストBからSYNを送信してコネクションを成立させた。

条件証明（Conditional Proof）

$$\frac{\texttt{derive } B \texttt{ from } A}{A \to B}$$

いくつかの前提Aから、結論Bが推論されるときに利用される規則

間接証明（Indirect Proof）

$$\frac{\text{derive } \texttt{False} \text{ from } \neg A}{A}$$

Aを否定すると矛盾を導かれる場合に、Aであると結論付ける規則。
いわゆる背理法。

自然演繹法の推論規則（１）

連言（Conjunction, Conj）

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

単純化（Simplification, Simp）

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

追加（Addition, Add）

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{A}{B \vee A}$$

モーダス・ポネンス（Modus Ponens, MP）

$$\frac{A \quad A \to B}{B}$$

二重否定（Double Negation, DN）

$$\frac{\neg\neg A}{A} \qquad \frac{A}{\neg\neg A}$$

選言三段論法（Disjunctive Syllogism, DS）

$$\frac{A \vee B \quad \neg A}{B} \qquad \frac{A \vee B \quad \neg B}{A}$$

自然演繹法の推論規則（２）

条件証明（Conditional Proof, CP）

$$\frac{\texttt{derive } B \texttt{ from } A}{A \to B}$$

間接証明（Indirect Proof, IP）

$$\frac{\text{derive } \texttt{False} \text{ from } \neg A}{A}$$

矛盾（Contradiction, Contr）

$$\frac{A \quad \neg A}{\texttt{False}}$$

真理値表

A	B	¬A	A∨B	A∧B	A→B
T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	T	F	T
F	F	T	F	F	T

論理的同値性

- 同じ真理値表となる等価な整論理式同士を同値な整論理式と言う
- ≡ で同値を表す
- 同値な式の例
  - $\neg\neg A \equiv A$ （二重否定）
  - $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ （ド・モルガンの法則、選言と連言が逆の場合も同じ）
  - $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ （分配則、選言と連言が逆の場合も同じ）
  - $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ （吸収則、選言と連言が逆の場合も同じ）

真理値から論理式の構成

P	Q	A
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	F

A=Tのときに、P=T, Q=Tなので、$P \wedge Q$

A=Tのときに、P=F, Q=Tなので、$\neg P \wedge Q$

よって、$A \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

含意（Implication）

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

含意は、自然言語の「ならば」を
あらわすものだが、よく考えるとおかしい。

前件が偽ならば、後件の値にかかわらず、
必ず真となる。

幽霊が存在する→世界は滅亡する

矛盾からは何でも導かれる

A	B	A→B	¬A∨B
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

A→B

右の真偽値のαをFにすると、

$A \to B \equiv B \to A$

となってしまう。

逆が異なるためには、αがTでなければならない。

A	B	A→B	B→A
T	T	T	T
T	F	F	α
F	T	α	F
F	F	β	β

含意は常に推移律が成り立つ

A	B	C	A→B	B→C	A→C	(A→B)∧(B→C)	((A→B)∧(B→C))→(A→C)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	β
T	F	T	F	T	T	F	T
T	F	F	F	β	F	F	β

ならばの推移律とは、命題A, B, Cについて、
「AならばB、BならばC。よってAならばC」が常に成り立つ（恒真）こと

そのためには、βがTでなければならない。

形式的証明
(Formal Proof)

形式的証明（1/3）

- そもそも形式的とは何なのか
  - well definedな抽象的な思考系
  - 形式的に記述されていれば、誰が見ても同じ解釈になる
- 形式的証明とは、比喩的に言うならば、証明のためのアセンブリ言語を書いていくようなもの

形式的証明（2/3）

- 数学的に正しい推論規則のみ利用して厳密に行う推論
- 例
  - 雨であるをR、地面が濡れているをWとすると、次のように形式化でき、推論の正しさを証明可能に
  - 前提
    - R→W
    - R
  - 結論
    - W

形式的証明（3/3）

- 形式的証明では、証明中に行う推論をすべて書き出していく
- 次の表形式で記される。各行に番号を振り、整論理式と導出の理由を書く

1. W_1　W_1の理由
2. W_2　W_2の理由

…

n. W_n　W_nの理由

CP規則を用いた証明例（1/5）

$(A \vee B) \wedge \neg A \wedge (B \to C) \to (B \wedge C)$ の証明

まず、前提を順番に並べる

1.	$A \vee B$	P	（PはPremise（前提）の略）
2.	$\neg A$	P	
3.	$B \to C$	P	

CP規則を用いた証明例（2/5）

$(A \vee B) \wedge \neg A \wedge (B \to C) \to (B \wedge C)$ の証明

1.	$A \vee B$	P	（PはPremise（前提）の略）
2.	$\neg A$	P	
3.	$B \to C$	P	
4.	B	1, 2, DS	**Bであることが推論される理由を書く**

推論規則を用いて証明していく

証明に利用した規則

$$\frac{A \vee B \quad \neg A}{B} \text{ (DS)}$$

CP規則を用いた証明例（3/5）

$(A \vee B) \wedge \neg A \wedge (B \to C) \to (B \wedge C)$ の証明

1.	$A \vee B$	P	（PはPremise（前提）の略）
2.	$\neg A$	P	
3.	$B \to C$	P	
4.	B	1, 2, DS	
5.	C	3, 4, MP	

さらに証明を続ける

証明に利用した規則

$$\frac{A \vee B \quad \neg A}{B} \text{ (DS)}$$

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \text{ (MP)}$$

CP規則を用いた証明例（4/5）

$(A \vee B) \wedge \neg A \wedge (B \to C) \to (B \wedge C)$ の証明

1.	$A \vee B$	P	（PはPremise（前提）の略）
2.	$\neg A$	P	
3.	$B \to C$	P	
4.	B	1, 2, DS	
5.	C	3, 4, MP	
6.	$B \wedge C$	4, 5, Conj	

さらに証明を続けると、
導きたい結論が出てくる

証明に利用した規則

$$\frac{A \vee B \quad \neg A}{B} \text{ (DS)}$$

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \text{ (MP)}$$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \text{ (Conj)}$$

CP規則を用いた証明例（5/5）

$(A \vee B) \wedge \neg A \wedge (B \to C) \to (B \wedge C)$ の証明

1.	$A \vee B$	P	（PはPremise（前提）の略）
2.	$\neg A$	P	
3.	$B \to C$	P	
4.	B	1, 2, DS	
5.	C	3, 4, MP	
6.	$B \wedge C$	4, 5, Conj	
	QED	1-6, CP	

証明終了

証明に利用した規則

$$\frac{A \vee B \quad \neg A}{B} \quad \text{(DS)}$$

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \quad \text{(MP)}$$

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \quad \text{(Conj)}$$

$$\frac{\texttt{derive } B \texttt{ from } A}{A \to B} \quad \text{(CP)}$$

部分証明

- 本証明を進める上で必要な証明
- 必ず新しい前提から始まり、導出にCPあるいはIPを適用して終了する
- 部分証明は導出の論理式を字下げして示す
- 部分証明中に利用した論理式は、外側の証明中に利用できない

1. W_1		P
2. W_2		理由（行1を使って良い）
3.	W_3	P （部分証明のための新しい理由）
4.	W_4	理由（行1〜3を使って良い）
5. W_5		行3〜4からCPまたはIP
6. W_6		理由（行1〜2と行5を使って良い）
QED		行1〜2と行5〜6からCPまたはIP

部分証明を用いた証明例その1（1/6）

仮言三段論法（Hypothetical Syllogism, HS）の証明

$$\frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}$$

まず、前提を順番に並べる

$$\begin{array}{lll} 1. & A \to B & \mathrm{P} \\ 2. & B \to C & \mathrm{P} \end{array}$$

部分証明を用いた証明例その1（2/6）

仮言三段論法（Hypothetical Syllogism, HS）の証明

$$\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

$$\begin{array}{lcl}
1. & A \rightarrow B & \mathrm{P} \\
2. & B \rightarrow C & \mathrm{P} \\
3. & A & \mathrm{P}\ [A \rightarrow C\ \text{より}]
\end{array}$$

Aが正しいと仮定してみる

部分証明を用いた証明例その1（3/6）

仮言三段論法（Hypothetical Syllogism, HS）の証明

$$\frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}$$

証明に利用した規則

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \quad \text{(MP)}$$

$$\begin{array}{lrl}
1. & A \to B & \mathrm{P} \\
2. & B \to C & \mathrm{P} \\
3. & A & \mathrm{P}\ [A \to C\ \text{より}] \\
4. & B & 1, 3, \mathrm{MP}
\end{array}$$

Aが正しいと仮定して証明を続ける

部分証明を用いた証明例その1（4/6）

仮言三段論法（Hypothetical Syllogism, HS）の証明

$$\frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}$$

$$\begin{array}{lcl}
1. & A \to B & \mathrm{P} \\
2. & B \to C & \mathrm{P} \\
3. & A & \mathrm{P}\ [A \to C\ \text{より}] \\
4. & B & 1, 3, \mathrm{MP} \\
5. & C & 2, 4, \mathrm{MP}
\end{array}$$

Aが正しいと仮定して、さらに証明を続ける

証明に利用した規則

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \ (\mathrm{MP})$$

部分証明を用いた証明例その1（5/6）

仮言三段論法（Hypothetical Syllogism, HS）の証明

$$\frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}$$

$$\begin{array}{lrl}
1. & A \to B & \mathrm{P} \\
2. & B \to C & \mathrm{P} \\
3. & A & \mathrm{P}\ [A \to C \text{ より}] \\
4. & B & 1, 3, \mathrm{MP} \\
5. & C & 2, 4, \mathrm{MP} \\
6. & A \to C & \text{3-5}, \mathrm{CP}
\end{array}$$

証明に利用した規則

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \text{ (MP)}$$

$$\frac{\texttt{derive } B \texttt{ from } A}{A \to B} \text{ (CP)}$$

Aが正しい場合には、Cが正しいことがわかった

部分証明を用いた証明例その1（6/6）

仮言三段論法（Hypothetical Syllogism, HS）の証明

$$\frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C}$$

証明に利用した規則

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \ \text{(MP)}$$

$$\frac{\texttt{derive}\ B\ \texttt{from}\ A}{A \to B} \ \text{(CP)}$$

1.	$A \to B$	P
2.	$B \to C$	P
3.	A	P [$A \to C$ より]
4.	B	1, 3, MP
5.	C	2, 4, MP
6.	$A \to C$	3-5, CP
	QED	1-6, CP

証明終了

部分証明を用いた証明例その2

$((A \vee B) \to (B \wedge C)) \to (B \to C)$ の証明

1.	$(A \vee B) \to (B \wedge C)$	P
2.	$\quad B$	P [$B \to C$ なので]
3.	$\quad A \vee B$	2, Add
4.	$\quad B \wedge C$	1, 3, MP
5.	$\quad C$	4, Simp
6.	$B \to C$	2-5, CP
	QED	1-6, CP

IP規則を用いた証明（背理法）（1/7）

モーダス・トレンス（Modus Tollens, MT）の証明

$$\frac{A \to B \quad \neg B}{\neg A}$$

まず、前提を順番に並べる

$$\begin{array}{lll} 1. & A \to B & \mathrm{P} \\ 2. & \neg B & \mathrm{P} \end{array}$$

IP規則を用いた証明（背理法）（2/7）

モーダス・トレンス（Modus Tollens, MT）の証明

$$\frac{A \to B \quad \neg B}{\neg A}$$

$$\begin{array}{lll}
1. & A \to B & \mathrm{P} \\
2. & \neg B & \mathrm{P} \\
3. & \quad\quad \neg\neg A & \mathrm{P}\ [\neg A \text{ より}]
\end{array}$$

¬¬Aが正しいと仮定してみる

IP規則を用いた証明（背理法）（3/7）

モーダス・トレンス（Modus Tollens, MT）の証明

$$\frac{A \to B \quad \neg B}{\neg A}$$

$$\begin{array}{lll}
1. & A \to B & \mathrm{P} \\
2. & \neg B & \mathrm{P} \\
3. & \quad\quad \neg\neg A & \mathrm{P}\ [\neg A \text{ より}] \\
4. & \quad\quad A & 3,\ \mathrm{DN}
\end{array}$$

¬¬Aが正しいと仮定して、証明を続ける

証明に利用した規則

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$ **(DN)**

IP規則を用いた証明（背理法）（4/7）

モーダス・トレンス（Modus Tollens, MT）の証明

$$\frac{A \to B \quad \neg B}{\neg A}$$

1.	$A \to B$	P
2.	$\neg B$	P
3.	$\neg\neg A$	P [$\neg A$ より]
4.	A	3, DN
5.	B	1, 4, MP

¬¬Aが正しいと仮定して、さらに証明を続ける

証明に利用した規則

$$\frac{\neg\neg A}{A} \quad \text{(DN)}$$

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \quad \text{(MP)}$$

IP規則を用いた証明（背理法）（5/7）

モーダス・トレンス（Modus Tollens, MT）の証明

$$\frac{A \to B \quad \neg B}{\neg A}$$

1.	$A \to B$		P
2.	$\neg B$		P
3.		$\neg\neg A$	P [$\neg A$ より]
4.		A	3, DN
5.		B	1, 4, MP
6.		$\texttt{False}$	2, 5, Contr

¬¬Aが正しいと仮定すると、矛盾が導かれる

証明に利用した規則

$$\frac{\neg\neg A}{A} \quad \textbf{(DN)}$$

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \quad \textbf{(MP)}$$

$$\frac{A \quad \neg A}{\texttt{False}} \quad \textbf{(Contr)}$$

IP規則を用いた証明（背理法）（6/7）

モーダス・トレンス（Modus Tollens, MT）の証明

$$\frac{A \to B \quad \neg B}{\neg A}$$

1.	$A \to B$		P
2.	$\neg B$		P
3.		$\neg\neg A$	P [$\neg A$ より]
4.		A	3, DN
5.		B	1, 4, MP
6.		$\mathtt{False}$	2, 5, Contr
7.	$\neg A$		3-6, IP

¬Aが正しいと判明

証明に利用した規則

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \quad \textbf{(MP)}$$

$$\frac{\neg\neg A}{A} \quad \textbf{(DN)}$$

$$\frac{A \quad \neg A}{\mathtt{False}} \quad \textbf{(Contr)}$$

$$\frac{\text{derive } \mathtt{False} \text{ from } \neg A}{A} \quad \textbf{(IP)}$$

IP規則を用いた証明（背理法）（7/7）

モーダス・トレンス（Modus Tollens, MT）の証明

$$\frac{A \to B \quad \neg B}{\neg A}$$

1.	$A \to B$		P
2.	$\neg B$		P
3.		$\neg\neg A$	P [$\neg A$ より]
4.		A	3, DN
5.		B	1, 4, MP
6.		$\texttt{False}$	2, 5, Contr
7.	$\neg A$		3-6, IP
	QED		1-7, CP

証明に利用した規則

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \quad \textbf{(MP)}$$

$$\frac{\neg\neg A}{A} \quad \textbf{(DN)}$$

$$\frac{A \quad \neg A}{\texttt{False}} \quad \textbf{(Contr)}$$

$$\frac{\text{derive } \texttt{False} \text{ from } \neg A}{A} \quad \textbf{(IP)}$$

証明済みの定理の利用

- 証明済みの定理を用いる場合は、TheoremのTとして証明中に記述
  - 別に証明済みの式
  - ド・モルガンの法則や、条件式の同値式など

$$
\begin{array}{lll}
1. & \neg(A \lor B) & \mathrm{P} \\
2. & C \to D & \mathrm{P} \\
3. & \neg A \land \neg B & 1, \mathrm{T} \\
4. & \neg C \lor D & 2, \mathrm{T} \\
 & \ldots &
\end{array}
$$

自然言語の形式化による証明（1/3）

前提：

我思うなら我あり。

我思わねば、我思う。

結論：

我あり。

自然言語の形式化による証明（2/3）

前提：

我思うなら我あり。

我思わねば、我思う。

結論：

我あり。

A: 我思う

B: 我あり

$$A \to B$$

$$\neg A \to A$$

まず、自然言語を記号で記述

自然言語の形式化による証明（3/3）

前提：

我思うなら我あり。

我思わねば、我思う。

結論：

我あり。

A: 我思う

B: 我あり

$A \to B$

$\neg A \to A$

1.	$A \to B$	P
2.	$\neg A \to A$	P
3.	$\neg A$	P
4.	A	2, 3, MP
5.	False	3, 4, Contr
6.	A	3-5, IP
7.	B	1, 6, MP
	QED	

証明する

トートロジー

「犯人は男か女かのどちらかである」

Aを犯人は男であるとして論理式で表すと

$$A \vee \neg A$$

となる。

命題変数にどのような意味を与えても、恒真となる論理式をトートロジーという。

充足不能

「犯人は男でも女でもない」

Aを犯人は男であるとして論理式で表すと

$$A \wedge \neg A$$

となる。

命題変数にどのような意味を与えても、恒偽となる論理式を充足不能という。

妥当な論証

前提 $A_1, \ldots, A_n$ から結論 B を導く論証が妥当である

$$\Updownarrow$$

$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ がトートロジー

矛盾（1/2）

A「その時私は自分の寝室で寝ていました」

B「その時、Aが犯行現場近くにいるのを目撃した」

X をAは犯行現場近くに居たという命題変数とする。

$\neg X \wedge X$ は、Xにどのように真理値を割り当てても真とならない

矛盾（2/2）

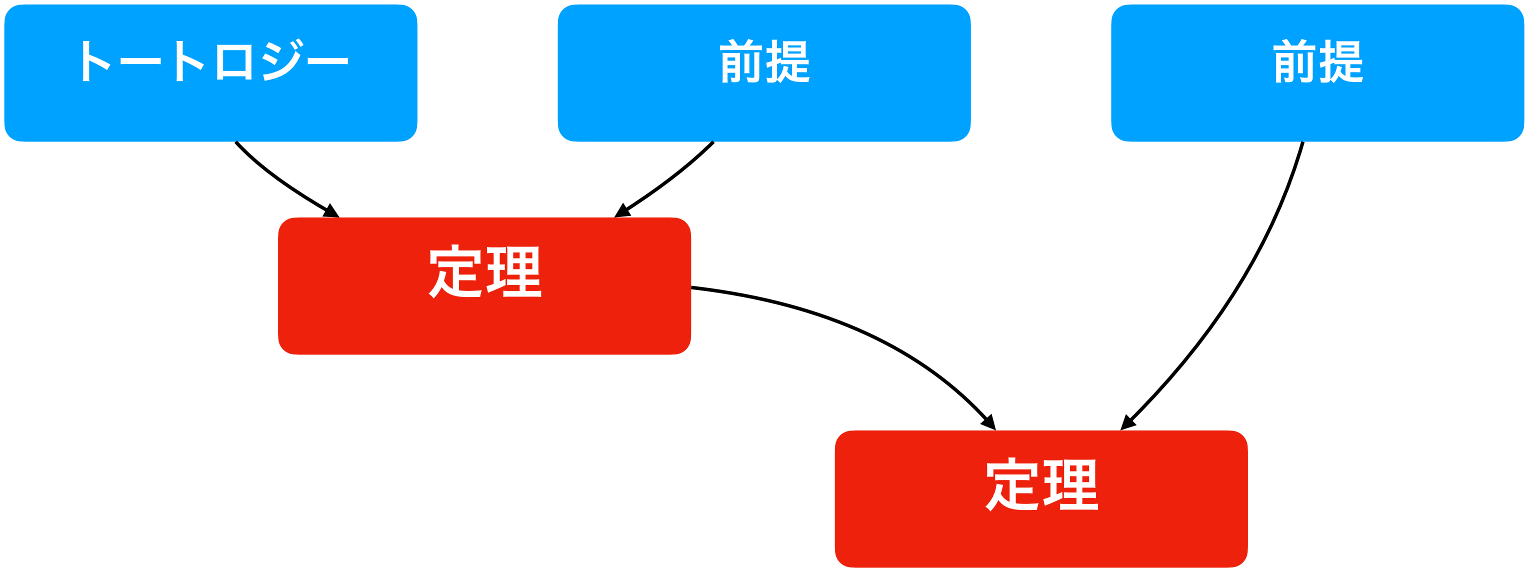
$A_1, \ldots, A_n$ は矛盾している

$$\Updownarrow$$

$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ は充足不能（どう頑張っても真にできない）

定理（Theorem）

複数の前提及びトートロジーな式に、推論規則を複数回適用して得られる結論を定理と呼ぶ。



レポート課題

レポート課題

- 本スライド中にある問題を解いてレポートとして提出せよ
- 締め切り：2023年5月7日 23:50 (JST)

問題：排他的論理和（Exclusive OR）（1/2）

「東京に行くのは新幹線または飛行機が選べます」

我々はこの文を読んで、新幹線と飛行機の両方同時に選べるとは考えない。
このような2つのうち、どちらか一方を選ぶような論理和を、
排他的論理和とよぶ。

排他的論理和を表す記号を $\bigoplus$ で表し、AとBの排他的論理和を
$A \bigoplus B$ と書くとする。

問題：排他的論理和（Exclusive OR）（2/2）

$A \oplus B$ の真理値表から、$\oplus$ を使わない論理式を求めよ。

$A \oplus B \oplus C$ は、「新幹線、飛行機、車のいずれか」という文を表すような論理式になっていない事を確認せよ。

$A \oplus B \oplus C$ は、一体どういった意味の式か論述せよ。
（ヒント：命題記号が4つ以上の場合についても考えると良い）

問題：以下が成り立つことを形式的に証明せよ

$$C \land (A \to \neg C) \land (A \lor B) \to B$$

$$(\neg A \to \neg C) \land (C \lor B) \land \neg B \land (\neg A \lor (C \land \neg B \to D)) \to D$$