問1.1

(1) $|S_4| = 4! = 24$

(2)は次ページへ.

(3) $H \ni f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ f_1(1) & f_1(2) & f_1(3) & 4 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ f_2(1) & f_2(2) & f_2(3) & 4 \end{pmatrix}$

$f_1 f_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ f_1(f_2^{-1}(1)) & f_1(f_2^{-1}(2)) & f_1(f_2^{-1}(3)) & 4 \end{pmatrix}$

(i) 単位元 $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in H$.

(ii) Hの元は以下の6通り. 赤線で書いた置換がその上の置換に対応する逆元である.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

ゆえにHのすべての元に対し、逆元が存在する

(iii) $H \ni f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ f_1(1) & f_1(2) & f_1(3) & 4 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ f_2(1) & f_2(2) & f_2(3) & 4 \end{pmatrix}$

$f_1 \cdot f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ f_1(f_2(1)) & f_1(f_2(2)) & f_1(f_2(3)) & 4 \end{pmatrix}$ ($\because f_1(1), f_1(2), f_1(3), f_2(1), f_2(2), f_3(3) \in \{1, 2, 3\}$)

よって $f_1 \cdot f_2$ は(ii)で示した6つの置換のいずれかに等しいため、演算・に対して閉じている. ∴ Hは Gの部分群である.

(2)

$$\left\langle \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} \right\}$$

(4) 最大位数は4.

例: $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$

問1.3.

(1) $|S_3| = 3! = 6$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

であるから、位数6の元は存在しない。