

知的情報処理論第四回レポート

29G23027

川原尚己

第三のテーマから、「normalized LMS(NLMS)」を説明する.

(a) 問題設定・定式化

狭い部屋の中などで話しているとき, 自分の声だけでなくその反響も同時に鳴っている. このような反響を除去する, エコーキャンセリングのためのフィルタを構築する.

時刻 t における観測者の受け取る信号を d_t , 反響音を u_t , 音源が発するインパルス応答を w_t , フィルタ長を M とする. また, $\mathbf{u}_t = [u_t, u_{t-1}, \dots, u_{t-M+1}]$, $\mathbf{w} = [w_0, w_1, \dots, w_{M-1}]$ としたとき, フィルタを用いた処理結果を $y_t = \mathbf{w}^T \mathbf{u}_t$ とし, d_t と y_t との誤差を $e_t = d_t - y_t$ とする. 処理の目標は観測結果 d_t と処理結果 y_t との誤差の最小化である.

(b) モデル

NLMS の更新式は, 以下の高速付き最適化問題から導出できる.

$$\min_{\mathbf{w}_t} \|\mathbf{w}_t - \mathbf{w}_{t-1}\|^2 \text{ subject to } \mathbf{w}_t^T \mathbf{u}_t = d_t \quad (1)$$

(1) をラグランジュの未定乗数法を用いて解く. コスト関数を J とすると,

$$\begin{aligned} J &= \|\mathbf{w}_t - \mathbf{w}_{t-1}\|^2 + \lambda(d_t - \mathbf{w}_t^T \mathbf{u}_t) \\ &= (\mathbf{w}_t - \mathbf{w}_{t-1})^T (\mathbf{w}_t - \mathbf{w}_{t-1}) + \lambda(d_t - \mathbf{w}_t^T \mathbf{u}_t) \end{aligned}$$

J を \mathbf{w}_t について偏微分すると,

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}_t} = 2(\mathbf{w}_t - \mathbf{w}_{t-1}) - \lambda \mathbf{u}_t$$

$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}_t} = 0$ となるとき, $\|\mathbf{w}_t - \mathbf{w}_{t-1}\|^2$ が最小化されるから,

$$\mathbf{w}_t - \mathbf{w}_{t-1} = \frac{1}{2} \lambda \mathbf{u}_t \quad (2)$$

$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}_t} = 0$ の両辺に \mathbf{u}_t^T を乗じて,

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{u}_t^T \mathbf{u}_t &= 2 \mathbf{u}_t^T (\mathbf{w}_t - \mathbf{w}_{t-1}) \\ \lambda &= \frac{2}{\|\mathbf{u}_t\|^2} (d_t - \mathbf{u}_t^T \mathbf{w}_{t-1}) = \frac{2}{\|\mathbf{u}_t\|^2} e_t \mathbf{u}_t \end{aligned}$$

が得られる. (2)式より, NLMS のフィルタ更新式は

$$\mathbf{w}_t = \mathbf{w}_{t-1} + \frac{1}{2} \lambda \mathbf{u}_t = \mathbf{w}_{t-1} + \frac{1}{\|\mathbf{u}_t\|^2} e_t \mathbf{u}_t \quad (3)$$

(3)式では, \mathbf{u}_t のパワーが小さい場合には不安定となるから, 小さな値 α を用いて,

$$\mathbf{w}_t = \mathbf{w}_{t-1} + \frac{1}{\alpha + \|\mathbf{u}_t\|^2} e_t \mathbf{u}_t \quad (4)$$

とすることで正則化を行う.

(c) 学習または推論・予測・認識等のアルゴリズム

処理の手順を以下に示す. 初期値は $t = 1$ とし, \mathbf{w}_0 を定めておく.

1. 時刻 t における入力 \mathbf{u}_t を受け取る.
2. フィルタ \mathbf{w}_{t-1} を用い, 予測値 $\hat{y}_t = \mathbf{w}_{t-1}^T \mathbf{u}_t$ を求める.
3. \hat{y}_t と理想応答 d_t との誤差信号 $e_t = d_t - \hat{y}_t$ を計算する.
4. (4)式に従い, フィルタを更新する.
5. 時刻を1進め, 1.へ.

参考文献:

[1] 講義第十回資料

[2] 電子情報通信学会『知識の森』1群「信号・システム」-9編「デジタル信号処理」-3章「適応信号処理」

<http://www.iceice-hbkb.org>