実践離散数学と計算の理論 6/7 課題

28G23027
川原尚己

- 不完全性定理について自分なりにまとめてレポートとして提出せよ．レポートには健全性、完全性、無矛盾性についても解説を含めること．

不完全性定理の証明には単なる論理式ではなく，ゲーテル数と呼ばれる数を用いる．ゲーテル数とは，論理式中の各文字に対応する数を用い符号化を行ったものである．証明を「論理式の有限列であり，有限列中の各論理式は定理か推論規則によって求めることができるもの」とする．ゲーテル数を用いて，以下の proof 関数という原子機能的関数を定義できる．ただし，xは論理式Aのゲーテル数，yを証明の論理式のゲーテル数とする．

$$proof(x,y)=\begin{cases} 0, & (\text{証明の符号}y\text{が}A\text{の証明である}) \\ 1, & (\text{証明の符号}y\text{が}A\text{の証明でない}) \end{cases}$$

また，算術は一回述語論理で公理化可能である．$proof(x,y)=z$の論理式表現$Proof[x,y,z]$に対して，$Provable[x]$を$\exists y\, Proof[x,y,0]$とすると，ゲーテル文Gに対して$G \leftrightarrow \neg Provable[\ulcorner G \urcorner]$．このゲーテル文に関する論理式と健全性仮定（証明可能な論理式は必ず真となる，$\forall x\left(Provable\left[\ulcorner x \urcorner\right] \rightarrow x\right)$）から，$\neg Provable\left[\ulcorner G \urcorner\right]$と$\neg Provable\left[\ulcorner \neg G \urcorner\right]$が導ける．これが，第一不完全性定理の主張「無矛盾な算術の演繹体系には、G も¬G も証明できないような論理式 G が存在する，」である．（完全性とは「すべての真となる論理式は証明可能」という意味であり，$\forall x\left(x \rightarrow Provable\left[\ulcorner x \urcorner\right]\right)$と表せる．）さらに，無矛盾性仮定（ある形式系$T$があり、$T$から$A$と$\neg A$が同時に証明できない，$\neg Provable\left[\ulcorner False \urcorner\right]$）と第一不完全性定理より，$\neg Provable\left[\ulcorner False \urcorner\right] \leftrightarrow \neg Provable\left[\ulcorner \overline{\neg Provable\left[\ulcorner False \urcorner\right]} \urcorner\right]$が導ける．これが，第二不完全性定理の主張「算術の公理を含む無矛盾な形式系は、自身の無矛盾性を証明できない」である．