問2.3.

(1) $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = e$

であるから

$H = \{e, \sigma, \sigma^2\}, \ |H| = 3$ //

(2) $S_3 \ni {}^\forall a$ に対し $aH = Ha$ を示せばよい.

$H \ni a$ に対しては $aH = Ha = H$ であるから.

$H \not\ni a$ を調べればよい.

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ \sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ \sigma^2\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

であり $H \not\ni \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau$. $|S_3| = 6$ であるので

この3元を調べればよい

$\tau H = \{\tau\sigma, \tau\sigma^2, \tau\}$

$H\tau = \{\sigma\tau, \sigma^2\tau, \tau\}$

ただし, $\sigma\tau = \tau\sigma^2, \ \sigma^2\tau = \tau\sigma$ であるから.

$\tau H = H\tau$

$(\sigma\tau)H = \{\sigma\tau\sigma, \sigma\tau\sigma^2, \sigma\tau\} = \{\tau, \sigma^2\tau, \sigma\tau\}$

$H(\sigma\tau) = \{\sigma^2\tau, \sigma^3\tau, \sigma^4\tau\} = \{\tau, \sigma^2\tau, \sigma\tau\}$,

$(\sigma^2\tau)H = \{\sigma^2\tau\sigma, \sigma^2\tau\sigma^2, \sigma^2\tau\} = \{\sigma\tau, \tau, \sigma^2\tau\}$

$H(\sigma^2\tau) = \{\sigma^3\tau, \sigma^4\tau, \sigma^5\tau\} = \{\sigma\tau, \tau, \sigma^2\tau\}$

$\therefore (\sigma\tau)H = H(\sigma\tau), \ (\sigma^2\tau)H = H(\sigma^2\tau)$ だから.

$S_3 \triangleright H$ //

(3) $L = \langle \tau \rangle = \{e, \tau\}$

$\sigma^{-1}\tau\sigma = \sigma^2\tau\sigma = \tau\sigma\sigma = \tau\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \notin L$

$\therefore$ L は S_3 の正規部分群ではない //