

問 2.1

(1) $G = \langle \tau_m \rangle$ は、 m の約数個だけ部分群が存在する。
部分群の個数が最大となる m は、... ①

$$m = 12, 18, 20$$

(2) ①を用いて、 m の約数の個数を $f(m)$ とする。

$$f(2) = 2, f(3) = 2, f(4) = 3 \quad \text{である。}$$

$$m = 4$$

4 の約数は、1, 2, 4 である。求める部分群は、

$$\begin{cases} \langle \tau_4 \rangle = \{1, \tau_4, \tau_4^2, \tau_4^3\} \\ \langle \tau_4^2 \rangle = \{1, \tau_4^2\} \\ \langle \tau_4^4 \rangle = \{1\} \end{cases}$$

(8) 2, 2

(1) $a = 0, 2, 4, 6$ のとき、逆元は存在しない。

$$\therefore H_8 = \{1, 3, 5, 7\} \text{ 否!}$$

$$\underline{|H_8| = 4}$$

$$1' \equiv 1$$

$$3' \equiv 3, 3^2 \equiv 1$$

$$5' \equiv 5, 5^2 \equiv 1$$

$$7' \equiv 7, 7^2 \equiv 1$$

たしか、1つの元で H_8 を生成できない。

$$3' \equiv 3, 3^2 \equiv 1, 3 \cdot 5 \equiv 7, 5' \equiv 5 \text{ 否!}$$

$\{3, 5\}$ は生成元の集合である。

(2) $|H_8| = 4$ の約数は、1, 2, 4 である。

ラグランジュの定理より、部分群 H の位数の候補は、1, 2, 4
各位数の部分群は、

$$\text{位数 } 1: \langle 1 \rangle = \{1\}$$

$$\text{位数 } 2: \langle 3 \rangle = \{1, 3\}, \langle 5 \rangle = \{1, 5\}, \langle 7 \rangle = \{1, 7\}$$

$$\text{位数 } 4: \langle 3, 5 \rangle = \{1, 3, 5, 7\}$$

を表わす。これで全てであるから、 H_8 の全ての部分群に
列挙できている。

$$(3) G_2 = \{1, -1\}$$

$$G = G_2 \times G_2 = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$$

$$\text{2-因子か? } |G| = 4$$

$$\text{生成元は } \{(1, -1), (-1, 1)\}$$

(4) $|G|$ の位数は 4 因子で、

ラングランジュの定理より部分群の位数の候補は 1, 2, 4

各位数の部分群は、

$$\text{位数 1: } \langle (1, 1) \rangle = \{(1, 1)\}$$

$$\text{位数 2: } \langle (1, -1) \rangle = \{(1, 1), (1, -1)\}$$

$$\langle (-1, 1) \rangle = \{(1, 1), (-1, 1)\}$$

$$\langle (-1, -1) \rangle = \{(1, 1), (-1, -1)\}$$

$$\text{位数 4: } \langle (1, -1), (-1, 1) \rangle = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$$

を表わした。これで全てであるか? G の全ての部分群について示している。

問 2.4

$$(1) H = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$$

$$K = \langle 5 \rangle = \{1, 5, 9, 13\}$$

$$K \cdot 3 = \{3, 7, 11, 15\}$$

$H = K \cup K \cdot 3$ である。 H/K の完全代表系は $\{1, 3\}$ //

Q1

$a \backslash b$	1	3
1	1	3
3	3	1

//