問2.1

(1) $G = \langle \zeta_m \rangle$ は、mの約数個だけ部分群が存在するから。 …①

部分群の個数が最大となるmは、

$m = 12, 18, 20$ //

(2) ①を用いる。mの約数の個数を $f(m)$ とすると

$f(2) = 2,\ f(3) = 2,\ f(4) = 3$ であるから。

$m = 4$ //

4の約数は、1, 2, 4 であるから、求める部分群は、

$$\begin{cases} \langle \zeta_4 \rangle = \{1, \zeta_4, \zeta_4^2, \zeta_4^3\} \\ \langle \zeta_4^2 \rangle = \{1, \zeta_4^2\} \\ \langle \zeta_4^4 \rangle = \{1\} \end{cases}$$ //

問2.2

(1) $a=0,2,4,6$ のとき、逆元は存在しない。

$\therefore H_8=\{1,3,5,7\}$ より

$|H_8|=4$

$1^1\equiv 1$

$3^1\equiv 3,\ 3^2\equiv 1$

$5^1\equiv 5,\ 5^2\equiv 1$

$7^1\equiv 7,\ 7^2\equiv 1$　　だから、1つの元でH_8を生成できない。

$3^1\equiv 3,\ 3^2\equiv 1,\ 3\cdot 5\equiv 7,\ 5^1\equiv 5$ より

$\{3,5\}$ は生成元の集合である。

(2) $|H_8|=4$ の約数は、1, 2, 4 であるから、
ラグランジュの定理より、部分群Hの位数の候補は、1, 2, 4
各位数の部分群は、
位数1：$\langle 1\rangle=\{1\}$
位数2：$\langle 3\rangle=\{1,3\}$, $\langle 5\rangle=\{1,5\}$, $\langle 7\rangle=\{1,7\}$
位数4：$\langle 3,5\rangle=\{1,3,5,7\}$

と表わされ、これで全てであるから、H_8の全ての部分群が列挙できている。

(3) $G_2 = \{1, -1\}$

$G = G_2 \times G_2 = \{(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)\}$

であるから $|G| = 4$.

生成元は $\{(1,-1), (-1,1)\}$

(4) $|G|$ の位数は4なので

ラグランジュの定理より部分群の位数の候補は1, 2, 4.

各位数の部分群は

位数1 : $\langle(1,1)\rangle = \{(1,1)\}$

位数2 : $\langle(1,-1)\rangle = \{(1,1), (1,-1)\}$

$\langle(-1,1)\rangle = \{(1,1), (-1,1)\}$

$\langle(-1,-1)\rangle = \{(1,1), (-1,-1)\}$

位数4 : $\langle(1,-1), (-1,1)\rangle = \{(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)\}$

と表わされ、これで全てであるから、Gの全ての部分群を列挙できている。

問 2、3.

(1) $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = e$

であるから

$H = \{e, \sigma, \sigma^2\}$, $|H| = 3$ //

(2) $S_3 \ni {}^\forall a$ に対し $aH = Ha$ を示せばよい.

$H \ni a$ に対しては. $aH = Ha = H$ であるから.

$H \not\ni a$ を調べればよい.

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma^2\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

であり $H \ni \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau$. $|S_3| = 6$ であるので.

この3元を調べればよい

$\tau H = \{\tau\sigma, \tau\sigma^2, \tau\}$

$H\tau = \{\sigma\tau, \sigma^2\tau, \tau\}$

ただし. $\sigma\tau = \tau\sigma^2$, $\sigma^2\tau = \tau\sigma$ であるから.

$\tau H = H\tau$

$(\sigma\tau)H = \{\sigma\tau\sigma, \sigma\tau\sigma^2, \sigma\tau\} = \{\tau, \sigma^2\tau, \sigma\tau\}$

$H(\sigma\tau) = \{\sigma^2\tau, \sigma^3\tau, \sigma^4\tau\} = \{\tau, \sigma^2\tau, \sigma\tau\}$,

$(\sigma^2\tau)H = \{\sigma^2\tau\sigma, \sigma^2\tau\sigma^2, \sigma^2\tau\} = \{\sigma\tau, \tau, \sigma^2\tau\}$

$H(\sigma^2\tau) = \{\sigma^3\tau, \sigma^4\tau, \sigma^5\tau\} = \{\sigma\tau, \tau, \sigma^2\tau\}$

$\therefore (\sigma\tau)H = H(\sigma\tau)$, $(\sigma^2\tau)H = H(\sigma^2\tau)$ だから.

$S_3 \triangleright H$ //

(3) $L = \langle \tau \rangle = \{e, \tau\}$

$$\sigma^{-1}\tau\sigma = \sigma^2\tau\sigma = \tau\sigma\sigma = \tau\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \notin L$$

$\therefore$ L は S_3 の正規部分群ではない //

問2.4

(1) $H = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

$K = \langle 5 \rangle = \{1, 5, 9, 13\}$

$K \cdot 3 = \{3, 7, 11, 15\}$

$H = K \cup K \cdot 3$ だから H/K の完全代表系は $\underline{\{1, 3\}}$ //

(2)

a\b	1	3
1	1	3
3	3	1

//