

问题 1

let $x = 2$ in $(+x$

$\rightarrow (\lambda x. (1+x) \ 2)$

$\rightarrow (1+2)$

$\rightarrow ((\lambda m. \lambda n. ((m \text{ succ}) \ n) \ 1) \ 2)$

$\rightarrow (\lambda n. ((1 \text{ succ}) \ n) \ 2)$

$\rightarrow ((1 \text{ succ}) \ 2)$

$\rightarrow (((\lambda f. \lambda x. (f \ x) \text{ succ}) \ 2)$

$\rightarrow (\lambda x. (\text{succ } x) \ 2)$

$\rightarrow (\text{succ } 2)$

$\rightarrow 3$

図2.

自然数の積 $a \times b$ を $\text{mult}(a, b)$, 累乗 a^b を $\text{exp}(a, b)$ で表す.

$\text{mult}(\cdot, \cdot)$, $\text{exp}(\cdot, \cdot)$ を λ 計算で表すと.

$$\text{mult}(a, b) = ((\lambda m. \lambda n. \lambda f. (m (n f))) a) b$$

$$\text{exp}(a, b) = (((\lambda m. \lambda n. n (\text{mult } m)) 1) a) b$$

とすると.

python の λ 関数を用い、上記の関数を実行し、いくつかのサンプルを実行した。以下の表コード及び 実行結果を図1, 2に示す.

```
#0~3の整数値の定義
zero = lambda f: lambda x: x
one = lambda f: lambda x: f(x)
two = lambda f: lambda x: f(f(x))
three = lambda f: lambda x: f(f(f(x)))
#####pythonで定義した演算で出力結果を表示するための関数#####
def print_nat(nat):
    print(nat(lambda n: n+1)(0))
#####
#後継者関数succの定義
succ = lambda n: lambda f: lambda x: f(n (f)(x))
plus = lambda m: lambda n: (m (succ))(n)
mult = lambda m: lambda n: lambda f: m(n (f))
exp = lambda m: lambda n: n(mult (m))(one)
print("succ(2) = ", end="")
print_nat(succ(two))
print("succ(1) = ", end="")
print_nat(succ(one))
print()
#加算の定義
print("2+3 = ", end="")
print_nat(plus(two)(three))
print("0+1 = ", end="")
print_nat(plus(zero)(one))
print()
#乗算の定義
print("2*3 = ", end="")
print_nat(mult(two)(three))
print("0*2 = ", end="")
print_nat(mult(zero)(two))
print()
#べき乗算の定義
```

図1 実装コード

```
succ(2) = 3
succ(1) = 2

2+3 = 5
0+1 = 1

2*3 = 6
0*2 = 0

2^3 = 8
0^2 = 0
3^0 = 1
```

図2 実行結果

いくつかのサンプルでも正しく計算されている。

参考にした Web サイト:

<https://zenn.dev/hellorusk/articles/copy-from-blog-20200103>