问1、2

(1) $\{\zeta_6, \zeta_6^2, \zeta_6^3, \zeta_6^4, \zeta_6^5, 1\}$

(2) H_1, H_2, H_3, H_6

(3) $\zeta_6^6 = 1$ であるから、$0 \leq i, j, k \leq 5$, $\mathbb{Z} \ni i, j, k$ で考えればよい。

(i) $i=0, j=0$ のとき、

$$H_{0,0} = \langle 1 \rangle = \{1\}$$

$H_{0,0} = H_k$ となる k は、$k=0$

(ii) i, j ともに2の倍数であるが3の倍数でないとき。

$i = 2i_1$, $j = 2j_1$ $(i_1, j_1 \in \{0, 1, 2\})$ と表せる。

$$H_{i,j} = \langle \zeta_6^{2i_1}, \zeta_6^{2j_1} \rangle$$

$$= \{ (\zeta_6^{2i_1})^{l_1} \cdot (\zeta_6^{2j_1})^{l_2} \mid \mathbb{Z} \ni l_1, l_2,\ 0 \leq l_1, l_2 \leq 5 \}$$

$$= \{ \zeta_6^{2(i_1 l_1 + j_1 l_2)} \mid \mathbb{Z} \ni l_1, l_2,\ 0 \leq l_1, l_2 \leq 5 \}$$

$$= \{ 1, \zeta_6^2, \zeta_6^4 \}$$

$H_{i,j} = H_k$ となる k は、$k = 2, 4$.

(iii) i, j ともに3の倍数であるが2の倍数でないとき。

$i = 3i_2$, $j = 3j_2$ $(i_2, j_2 \in \{0, 1\})$ と表せる。

$$H_{i,j} = \langle \zeta_6^{3i_2}, \zeta_6^{3j_2} \rangle$$

$$= \{ (\zeta_6^{3i_2})^{l_1} \cdot (\zeta_6^{3j_2})^{l_2} \mid \mathbb{Z} \ni l_1, l_2,\ 0 \leq l_1, l_2 \leq 5 \}$$

$$= \{ \zeta_6^{3(i_2 l_1 + j_2 l_2)} \mid \quad \sim \quad \}$$

$$= \{ 1, \zeta_6^3 \}$$

$H_{i,j} = H_k$ となる k は、$k = 3$

(iv) その他のとき.

少なくとも i, j のうちどちらかが 6 と互いに素であるとき, $H_{i,j} = \langle \zeta_6 \rangle$ となることを以下に示す.

対称性により, 少なくとも i は 6 と互いに素であると仮定してもよい.

$$H_{i,j} = \langle \zeta_6^i, \zeta_6^j \rangle$$
$$= \{ (\zeta_6^i)^{l_1} \cdot (\zeta_6^j)^{l_2} \mid \mathbb{Z} \ni l_1, l_2,\ 0 \leq l_1, l_2 \leq 5 \}$$
$$= \{ \zeta_6^{il_1 + jl_2} \mid \mathbb{Z} \ni l_1, l_2,\ 0 \leq l_1, l_2 \leq 5 \}$$
$$= \{ \zeta_6^{0i}, \zeta_6^{i}, \zeta_6^{2i}, \zeta_6^{3i}, \zeta_6^{4i}, \zeta_6^{5i}, \cdots \}$$

i と 6 は互いに素であるから si $(s \in \{0, 1, \cdots, 5\})$ を 6 で割った余りは互いに異なる.

$$\therefore H_{i,j} = \{ \zeta_6^0, \zeta_6^1, \zeta_6^2, \zeta_6^3, \zeta_6^4, \zeta_6^5 \}$$
$$= \{ 1, \zeta_6, \zeta_6^2, \zeta_6^3, \zeta_6^4, \zeta_6^5 \}.$$

$H_{i,j} = H_k$ となる k は $k = 1, 5$

(5) Gの部分群は(3)での議論から

$\{1\}$

$\{1, \zeta_6, \zeta_6^2, \zeta_6^3, \zeta_6^4, \zeta_6^5\}$

$\{1, \zeta_6^2, \zeta_6^4\}$

$\{1, \zeta_6^3\}$

の4つだけであり、

$\{1\} = \langle \zeta_6^0 \rangle$

$\{1, \zeta_6, \zeta_6^2, \zeta_6^3, \zeta_6^4, \zeta_6^5\} = \langle \zeta_6 \rangle = \langle \zeta_6^5 \rangle$

$\{1, \zeta_6^2, \zeta_6^4\} = \langle \zeta_6^2 \rangle = \langle \zeta_6^4 \rangle$

$\{1, \zeta_6^3\} = \langle \zeta_6^3 \rangle$

というように生成元1つですべて表すことができる。図