問5-2

$\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] \ni \alpha, \beta$に対し、$r, s \in \mathbb{Q}$を用い、$\frac{\alpha}{\beta} = r + \sqrt{-2}s$とおくと、
$|r-m| \leq \frac{1}{2}$, $|s-n| \leq \frac{1}{2}$となるような整数m, nをとることができる。
$\gamma = m + \sqrt{-2}n$とおくと、

$$\left|\frac{\alpha}{\beta} - \gamma\right| = \left|(r-m) + \sqrt{-2}(s-n)\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$\sigma = \alpha - \beta\gamma$とすると、

$$|\sigma| = |\alpha - \beta\gamma| = \left|\beta\left(\frac{\alpha}{\beta} - \gamma\right)\right| = |\beta|\left|\frac{\alpha}{\beta} - \gamma\right| \leq \frac{3}{4}|\beta| < |\beta|$$

よって、$\mathbb{Z}[-2]$上でも除法の原理がなりたつ。

問5.5

(1) $GL_2(\mathbb{Z}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ に対し、

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

$$= (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg)$$

$$= \cancel{acef} + adeh + bcfg + \cancel{bdgh} - (\cancel{acef} + adfg + bceh + \cancel{bdgh})$$

$$= ad(eh-fg) - bc(eh-fg)$$

$$= (ad-bc)(eh-fg)$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\det\left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) = (ad-bc)(eh-fg)$$

$$\therefore \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\det\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

(2) $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$ であり

$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$, $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$ であるから.

det は全射 $\blacksquare$

(3) $\det(A) = 1$ なる行列Aの集合が $\mathrm{Ker}(\det)$ である.

$\therefore \mathrm{Ker}(\det) = SL_2(\mathbb{Z})$.

(4) 1, 2, 3 より, $SL_2(\mathbb{Z})$ は $GL_2(\mathbb{Z})$ の準同型写像 det の核である.

群 G の準同型写像の核は正規部分群となるから

$SL_2(\mathbb{Z})$ は $GL_2(\mathbb{Z})$ の正規部分群となる $\blacksquare$