問2.3

(1) $j = 4 \cdot 1728 a^3/D$　であるから、$a=0$ であるとき、$j=0$である。

また、$a=b=0$ のときは、$D=0$ であるから 不適.

∴ $(a,b) = (0,2), (0,3), (0,4)$

(2) $j = 4 \cdot 1728 \dfrac{a^3}{D} \equiv 2a^3/(4a^3+27b^2) \equiv 2a^3/(4a^3+2b^2) \pmod 5$

$b=0$ のとき、$j \equiv 2/4 \equiv 3$

$a=b=0$ のときは $D=0$ であるから 不適

∴ $(a,b) = (2,0), (3,0), (4,0)$

(3) ○ $j=1$ のとき

$y^2 = x^3 + \dfrac{3 \cdot 1}{3-1} x + \dfrac{2 \cdot 1}{3-1} = x^3 + 4x + 1$

○ $j=2$ のとき

$y^2 = x^3 + \dfrac{3 \cdot 2}{3-2} x + \dfrac{2 \cdot 2}{3-2} = x^3 + x + 4$

○ $j=4$ のとき

$y^2 = x^3 + \dfrac{3 \cdot 4}{3-4} x + \dfrac{2 \cdot 4}{3-4} = x^3 + 3x + 2$