

### 1 Kompleksarvud

Selleks, et saaks leida ruutjuurt negatiivsetest arvudest on defineeritud  $\sqrt{-1} = i^2$ . Arvu  $i$  kutsutakse *imaginaarühikuks* ja arvu  $ai$  *imaginaararvuks*. Tihti võib olla kasulik teada, et  $\frac{1}{i} = -i$ .

Kompleksarvudest võib mõelda kui kahedimensionaalsetest vektoritest: kompleksarvu  $z = x + iy$  reaalsosa defineerib vektori  $x$ -koordinaadi ja imaginaarosaga defineerib  $y$ -koordinaadi. Kompleksarvude ja vektorite erinevus seisneb selles, et kahte kompleksarvu saab omavahel korrutada saades tulemuseks ikka kompleksarvu (vektoreid saab ka omavahel korrutada, kuid tulemuseks on vektor, mis on risti algsete vektoritega). Selle tõttu saab ka kompleksarve omavahel jagada, kui jagaja pole 0 (kahte mitteparaleelset vektorit ei saa omavahel jagada).

Kompleksarvu moodul on defineeritud kui vastava vektori pikkus,  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Pidades silmas geomeetrilist (vektoriaalset) esitust ja kasutades Euleri valemit saame kirjutada, et

$$z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha) = |z|e^{i\alpha},$$

kus  $\alpha$  on nurk vektori ja  $x$ -telje vahel; seda kutsutakse kompleksarvu eksponentsiaalkujuks, ja nurka  $\alpha$  kutsutakse kompleksarvu argumendiks ( $\arg$ ). Nähtavasti,

$$\alpha = \arctan y/x = \arctan \Im(z)/\Re(z).$$

Kahe kompleksarvu korrutis avaldub kujul

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|e^{i\alpha_1}|z_2|e^{i\alpha_2} = |z_1||z_2|e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

Siin on võrrandi parem pool kompleksarvu  $z_1 z_2$  eksponentsiaalkuju, mis tähendab, et

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

ja

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2.$$

Sarnaselt ka  $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$  ja  $\arg z_1/z_2 = \arg z_1 - \arg z_2$ .

Siin on nimekiri vahel kasulikest valemistest:

$$\Re z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}),$$

kus  $\bar{z} = x - iy$  kutsutakse  $z$  kaaskompleksarvuks;

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

Märkame, et  $\bar{z}$  on vektoriaalselt sümmeetriline  $z$ -ga  $x$ -telje suhtes, järelikult

$$\overline{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha};$$

eelkõige, rakendades neid valemeid  $z = e^{i\alpha}$  jaoks saame, et

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}.$$

Kui on vaja saada lahti kompleksarvust murru nimetajas, siis saab kasutada võrdust

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

### 2.1 Kondensaatorid

Kondensaatoritest võib mõelda koosnevat kahest juhtivast lehest (plaadist), mis on üksteisele väga lähedal ja eraldatud omavahel õhukese dielektrilise (insuleeriva) kihiga. Kui tavaliselt on laeng juhtmetel tühine, kuna mittetühine laeng tekitab suure elektrivälja ja seega ka pinge. Siiski, olukord on erinev kui on kaks paraleelset juhtivat plaati: kui nendel plaatidel on võrdsed ja vastasmärgilised laengud, nii et kogu süsteem on elektriliselt neutraalne, suur elektriväli jääb plaatide vahele, järelikult on pinge mõõdukas. Tüüpiliselt on pinge plaatide vahel võrdeline laenguga ühel plaadil. Kuna kondensaator on summaarselt elektriliselt neutraalne, siis Kirchhoffi vooluseadus kehtib ka kondensaatorite puhul: vool ühele plaadile (suurendades sealset laengut) on võrdne teiselt plaadilt eemalduva vooluga

Mahtuvus on defineeritud kui

$$C = \frac{q}{V},$$

kus  $q$  on laeng ühel plaadil ja  $V$  on plaatide vaheline pinge.

Kondensaatoris salvestatud energia on

$$W = \frac{CV^2}{2}.$$

Vaatame kondensaatori laadimist. Kui laeng  $dq$  läbib potentsiaalide vahe  $V$ , siis tehakse elektriline töö  $dA = VI dt = V dq$ . Seega on kogu tehtud töö  $A = \int_0^q V dq = \int_0^{CV} V d(CV) = C \int_0^V V dV = \frac{CV^2}{2}$ .

Kondensaatori pinge ei saa muutuda hetkeliselt, kuna hetkelise laengumuutuse jaoks oleks vaja lõputu suurt voolutugevust; pinge muutumise karakteristiklik aeg on

$$\tau = CR,$$

kus  $R$  on kondensaatoriga ühendatud vooluahela takistus. Tõepoolest, vaatame kondensaatorit pingega  $V$ , mis on ühendatud takistusega  $R$ . Kirchhoffi seadustest  $R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$ , järelikult

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{CR} \Rightarrow \ln q - \ln q_0 = -\frac{t}{CR} \Rightarrow q = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

### 2.2 Induktorid

Elektrivool tekitab magnetvälja, mis omakorda tekitab magnetvoo, mis läbib elektriahelat. Tavaliselt on magnetvoog niivõrd väike, et selle tekitatud elektromotoorjõud on tühi. Selleks, et tekitada suuremat magnetvoogu kasutatakse mähiseid. Kattuvate juhtmete arvu  $N$  suurendamisel on kahekordne efekt: esiteks, vooluahelat läbiv vool on endaga  $N$  korda suurenenud, mis tõstab magnetvälja  $N$  korda; teiseks, magnetväli läbib vooluahelat  $N$  korda, mis suurendab jällegi magnetvoogu  $N$  korda.

Induktori induktiivsus on defineeritud kui

$$L = \frac{\Phi}{I},$$

kus  $I$  on induktori läbiv voolutugevus ja  $\Phi$  on magnetvoog läbi induktori. Faraday induksiooniseadusest  $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$  saame, et

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Induktoris salvestatud energia on

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Vaatame elektrilist tööd induktoris voolu tekitamiseks:  $A = \int_0^q \mathcal{E} dq = \int_0^t \mathcal{E} I dt = \int_0^I L \frac{dI}{dt} I dt = L \int_0^I I dI = \frac{LI^2}{2}.$

Voolutugevus induktoris ei saa muutuda hetkeliselt, kuna see tekitab lõpmatu elektromotoorjõu; voolutugevuse muutumise karakteristiklik aeg on

$$\tau = \frac{L}{R}.$$

kus  $R$  on induktoriga ühendatud vooluahela takistus. Tõepoolest, vaatame induktori voolutugevusega  $I$ , mis on ühendatud takistusega  $R$ . Kirchhoffi seadustest  $RI + L \frac{dI}{dt} = 0$ , järelikult

$$\frac{dI}{I} = -\frac{Rdt}{L} \Rightarrow \ln I - \ln I_0 = -\frac{Rt}{L} \Rightarrow I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

### 3 Ülesanded

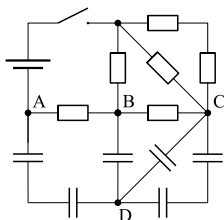
**Ülesanne 1.** Kondensaatorit mahtuvusega  $C$  laetakse kasutades patareid, mille elektromotoorjõud on  $\mathcal{E}$ . Leidke laadumise käigus eralduv soojushulk.

**Ülesanne 2.** Näidake, et kondensaatoride jadaühenduse mahtuvus avaldub valemiga  $C = (C_1^{-1} + C_2^{-1} + \dots + C_n^{-1})^{-1}$  ja rööpühenduse mahtuvus valemiga  $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$ .

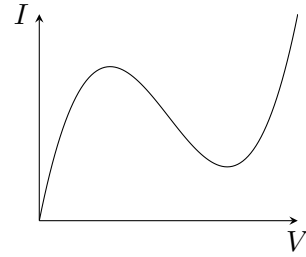
**Ülesanne 3.** Näidake, et induktorite jadaühenduse induktiivsus avaldub valemiga  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$  ja rööpühenduse induktiivsus valemiga  $L = (L_1^{-1} + L_2^{-1} + \dots + L_n^{-1})^{-1}$ .

**Ülesanne 4. (NBPhO 2017, P3)** Elektrialahelas on patarei, lüliti, takistid ja kondensaatorid nagu skeemil näidatud. Kõikide takistite takistus on  $R$ , kõikide kondensaatorite mahtuvus on  $C$  ja patarei pinge on  $U$ . Punkt  $A$  on maandatud ja potentsiaal selles punktis on seega  $0$  V. Alguses on lüliti avatud ja ühelgi kondensaatoril pole laengut.

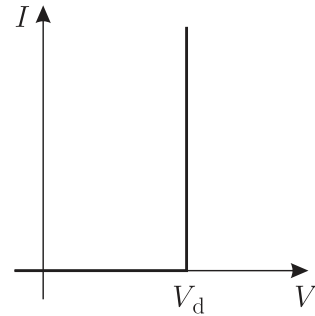
- Mis on potentsiaal punktides  $B$  ja  $C$  pärast seda, kui oleme lüliti sulgenud ja oodanud, kuni kõik potentsiaalid stabiliseeruvad?
- Mis on potentsiaal punktis  $D$  pärast seda, kui oleme lüliti sulgenud ja oodanud, kuni kõik potentsiaalid stabiliseeruvad?



**Ülesanne 5.** Tunneldiood on ühendatud jadamisi takistiga takistusega  $R$  ja patareiga (tüüpilise  $V - I$  tunnusoone jaoks vaata joonist). Olgu süsteemi parameetrid sellised, et leidub statsionaarolek, kus diodi diferentsiaaltakistus  $R_{\text{diff}} \equiv \frac{dV}{dI}$  on negatiivne. Millistel tingimustel on see olek stabiilne.

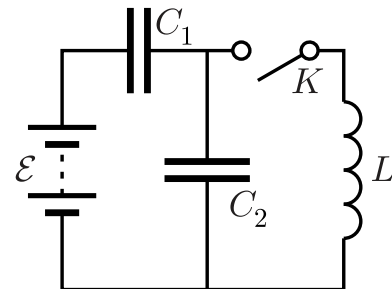


**Ülesanne 6.** Kondensaator mahtuvusega  $C$  on laetud pingeni  $V_0$ . Kondensaator tühjendatakse jadaühendusel diodi ja takistiga  $R$ . Eeldage, et järgnev graafik vastab heas lähenduses diodi  $V - I$  tunnusoonele ja et kondensaator tühjendatakse pingeni  $V_d$ . Leidke takistil eralduv soojushulk.



**Ülesanne 7.** Kondensaator laetakse ühendades see jadaühenduses patareiga elektromotoorjõuga  $\mathcal{E}$ , induktoriga induktiivsusel  $L$  ja diodiga. Diodi  $V - I$  tunnusoone jaoks vaadake eelmise ülesande juures olnud graafikut; patarei sisetakistus on tühine. Millise pingeni laetakse kondensaator eeldusel, et  $\mathcal{E} > V_d$ .

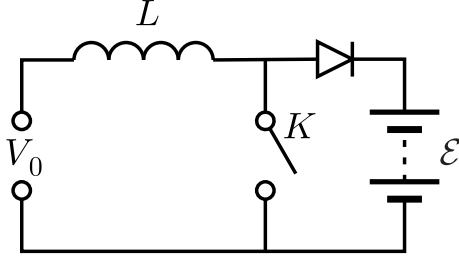
**Ülesanne 8.** Vaatame allolevat skeemi: algselt laenguta kondensaatorid  $C_1$  ja  $C_2$  ühendatakse patareiga ja mingil hetkel lüliti  $K$  suletakse. Pärast seda hetke hakkavad pinge ja voolutugevus võnkuma. Leidke nende võnkumiste jaoks maksimaalne voolutugevus  $I_{\text{max}}$  läbi induktori ja maksimaalne pinge  $V_{\text{max}}$  kondensaatoril  $C_1$ .



**Ülesanne 9.** Eelneva ülesande eelduste juures skitseerige kondensaatoril  $C_1$  oleva pinge funktsioonina ajast.

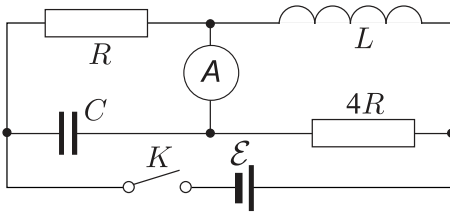
**Ülesanne 10.** Allolev skeem võimaldab laadida taaslaetavat patareid pingega  $\mathcal{E} = 12$  V kasutades alalisvooluallikat,

mille pinge  $V_0 = 5\text{ V}$  on madalam kui  $\mathcal{E}$ . Selleks avatakse ja suletakse lüliti  $K$  perioodiliselt: avatud ja suletud perioodid on võrdse kestvusega  $\tau = 10\text{ ms}$ . leidge keskmine laadimisvoolu tugevus eeldusel, et  $L = 1\text{ H}$ . Diodi võib lugeda ideaalseks ja induktori oomilise takistusega pole vaja arvestada.



**Ülesanne 11.** Alloleval skeemil on lüliti  $K$  hoitud avatult; mingil ajahetkel see suletakse.

- Milline on ampermeetri näit kohe pärast lüliti sulgemist?
- Lüliti hoitakse suletud kuni tekib tasakaaluolek; milline on nüüd ampermeetri näit?
- Nüüd avatakse lüliti uuesti; milline on ampermeetri näit vahetult pärast taasavamist?

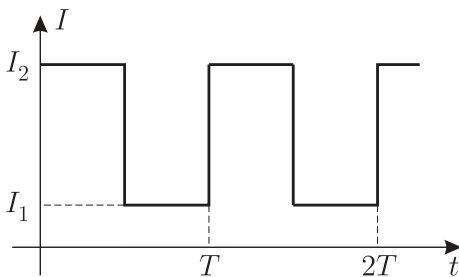


**Ülesanne 12.** Kondensaator mahtuvusega  $C$  ja takisti takistusega  $R$  on ühendatud rööbiti, ristkülikukujuline vool pulseerub (vt joonist) süsteemi klemmidel. Eeldusel, et  $I_2 = +I_1$  ja et ajahetkel  $t = 0$  kondensaatori polnud laetud, skitseerige pinge kondensaatoril funktsioonina ajast, kui

- $T \gg RC$
- $T \ll RC$ .

Nüüd eeldame, et perioodilist voolu on rakendatud väga pikka aega ( $t \gg RC$ ) ja ärme enam kasutada eeldust  $I_2 = I_1$ . Leidke keskmine pinge ja pinge võnkumiste amplituud, kui

- $T \gg RC$
- $T \ll RC$ .



## 4 Vahelduvvool