

### Sissejuhatus

Suur osa dünaamika ülesannetest seisneb selles, et on vaja leida mingitest kehadest koostatud süsteemi kiirendus või nende kehade vahel mõjuvad jõud. Neid ülesandeid on võimalik lahendada harilikult mitut moodi, kuid välja võiks tuua kolm meetodit:

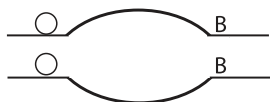
- Leiame ning paneme kirja iga keha jaoks kõik talle mõjuvad jõud, sh rõhumisjõud ja hõõrdejõud ning kirjutame välja Newtoni II seaduse komponentide kujul.
- Muus osas sama, mis eelmine meetod, kuid liikumist vaadeldakse mitteinertsiaalses taustsüsteemis (vt staatika materjali), kus üks kehadest on paigal.
- Kui süsteemi olek on kirjeldatav üheainsa arvu abil, siis nimetagem seda üldistatud koordinaadiks  $\xi$ . Olgu meil vaja leida koordinaadi  $\xi$  kiirendus  $\ddot{\xi}$ . Kui meil õnnestub avaldada süsteemi potentsiaalne energia  $\Pi$  koordinaadi  $\xi$  funktsioonina  $\Pi(\xi)$  ja kineetiline energia kujul  $K = \mathcal{M}\dot{\xi}^2/2$ , kus kordaja  $\mathcal{M}$  on kombinatsioon keha massidest (ja võib-olla ka inertsimomentidest), siis

$$\ddot{\xi} = \Pi'(\xi)/\mathcal{M}.$$

Siinjuures ülakupunkt tähistab tuletist aja järgi ning primm tuletist koordinaadi  $\xi$  järgi. Tõepoolest, energia jäävusest tulenevalt  $\Pi(\xi) + \mathcal{M}\dot{\xi}^2/2 = \text{Const}$ . Võttes siit tuletise aja järgi ja kasutades liitfunktsiooni diferentseerimise reeglit saame  $\Pi'(\xi)\dot{\xi} + \mathcal{M}\dot{\xi}\ddot{\xi} = 0$ . Taandades  $\dot{\xi}$  jõuamegi eelpooltoodud valemini.

### 1 Soojenduseks

**Ülesanne 1. (Piirk 2018, P3)** Kaks kuulikest alustavad samaaegselt võrdsete kiirustega liikumist mööda joonisel näidatud pindu. Kumba kuulikese kiirus on punkti  $B$  jõudes suurem või on nende kiirused võrdsed? Kumb kuulike jõuab punkti  $B$  varem või jõuavad nad punkti  $B$  samaaegselt? Hõõrdejõudu pole vaja arvestada. Põhjendage vastust.



**Ülesanne 2. (Lahtine 2014, N4)** Kaubarongi massiga  $m = 5000$  t veab vedur võimsusega  $P = 2500$  kW. Veerehõõrdeegur rataste ja rööpa vahel on  $\mu = 0,002$ . Õhutakistusega mitte arvestada.

- Leidke rongi kiirus  $v_1$  horisontaalsel teel.
- Leidke rongi kiirus  $v_2$  tõusul üks sentimeeter ühe meetri kohta.

Kui keha mass jääb muutumatuks, omandab see seadus tuttava kuju  $\vec{F} = m\vec{a}$ . Muutuva massi korral tuleb aga arvestada, et  $\vec{F}dt = d\vec{p} = \vec{v}dm + m d\vec{v}$ . Sarnaselt seadusele  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$  kehtib ka seadus  $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ , mis ütleb, et süsteemile mõjuv jõumoment on võrdne impulsimomendi muutumise kiirusega.

**Ülesanne 3.** Lähtudes inertsimomendi definitsioonist  $I = \sum m_i r_i^2$ , avaldage varde inertsimoment ümber otspunkti  $I = \frac{1}{3}ml^2$  ning ketta inertsimoment ümber keskpunkti  $I = \frac{1}{2}ml^2$ . (Kera inertsimoment ümber keskpunkti on  $I = \frac{2}{5}ml^2$ , aga seda me praegu ei tõesta.)

**Ülesanne 4.** Kui keha inertsimoment ümber massikeset läbiva telje on  $I_0$ , siis ümber mingi telje, mis paikneb sellest kaugusel  $b$ , on inertsimoment  $I = I_0 + mb^2$ . Tõestage see tulemus, mis on ühtlasi tuntud ka Steineri teoreemi nime all (ingl k *parallel axis theorem*).

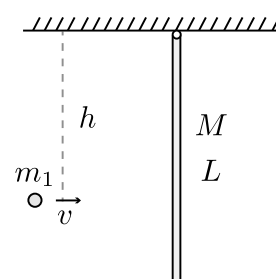
**Ülesanne 5.** Lähtudes impulsimomendi definitsioonist  $L = \sum r_i m_i v_{\perp i}$ , näidake, et massikeskme suhtes kehtib jäiga keha jaoks  $L = I\omega$ , kus  $\omega$  on pöörlemise nurkkiirus. Muuhulgas tuleneb siit muutumatu inertsimomendi korral seadus  $\tau = Id\omega/dt$

**Ülesanne 6.** Lähtudes kineetilise energia definitsioonist  $E = \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2$ , näidake, et pöörlemise kineetiline energia jäiga keha jaoks avaldub kujul  $E = \frac{1}{2}I\omega^2$ .

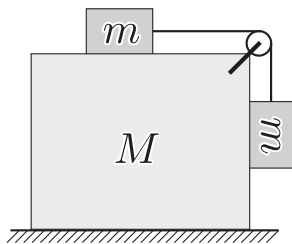
**Ülesanne 7.** Ketti pikkusega  $L$  ning joontihedusega  $\sigma$  hoitaks vertikaalselt rippuvana kaalu kohal nii, et selle alumine ots vaevalt puutub vastu kaalu. Seejärel lastakse kett vabalt kukkuma. Milline on kaalu näit sõltuvana vertikaalse keti pikkusest  $y$ ? Milline on kaalu näit hetkel, mil viimane keti osa langeb kaalule?

### 3 Ülesanded

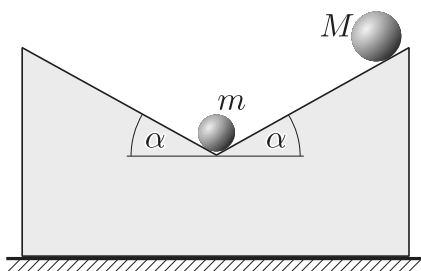
**Ülesanne 8. (Piirk 2015, G6)** Algselt paigal olev rippuv varras massiga  $M$  ning pikkusega  $L$  on fikseeritud ülemisest otsast vabalt pöörleva kinnitusega. Varda inertsimoment otspunkti suhtes on  $I = \frac{1}{3}ML^2$ . Teraspall massiga  $m$  lendab vastu varrast ning tabab seda kaugusel  $h$  riputuspunktist. Põrge on elastne, st soojuskadudeta. Huvitaval kombel jääb teraskuul pärast põrget hetkeks paigale ning hakkab seejärel vertikaalselt alla langema. Leidke kauguse  $h$  väärtus, mille korral niisugune seismajäämine võimalik on.



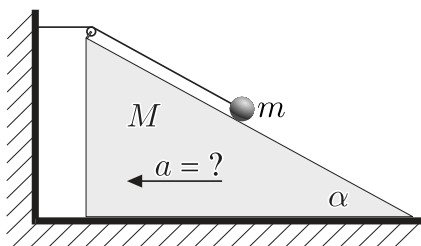
**Ülesanne 9.** Klots massiga  $M$  lebab libedal horisontaalpinnal. Tema peale on asetatud klots massiga  $m$ , mille külge on kinnitatud nööri abil teine samasugune klots. Nöör on tõmmatud üle suure klotsi nurgas asuva ploki ning teine väike klots ripub alla. Algselt hoitakse süsteemi paigal. Leidke suure klotsi kiirendus vahetult peale süsteemi vabastamist. Hõõre lugeda kõikjal nulliks, nöörü ja ploki massi mitte arvestada.



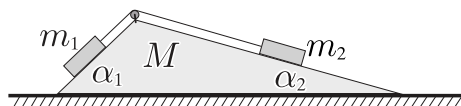
**Ülesanne 10.** Hästi kergest ja libedast materjalist on valmistatud klots, mille ülapind koosneb kahest üksteise poole pööratud kaldpinnast kaldenurgaga  $\alpha$ . Klots asub horisontaalpinnal; klotsi ülapinnal moodustuva vao põhjas lebab kuul massiga  $m$  ning sellest kõrgemale asetatakse kuul massiga  $M$ . Süsteem lastakse vabalt liikuma. Millisel tingimusel hakkab kuulike massiga  $m$  mööda kaldpinda ülespoole libisema? Hõõrdejõududega mitte arvestada.



**Ülesanne 11.** Kiilul nurgaga  $\alpha$  ja massiga  $M$  asub klotsike massiga  $m$ , mis on kinnitatud üle kiilu tipus oleva ploki tõmmatud nööriga horisontaalseina külge nii, nagu näidatud joonisel. Leidke, millise kiirendusega hakkab liikuma kiil. Kõik pinnad on libedad (hõõre puudub).

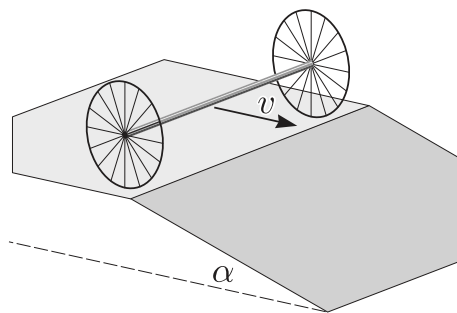


**Ülesanne 12.** Horisontaalpinnal lebab kiil massiga  $M$  ja teravnurkadega  $\alpha_1$  ning  $\alpha_2$ . Üle kiilu tipus asuva ploki on visatud nöör, mille otstes on klotsid massidega  $m_1$  ja  $m_2$ . Millise kiirendusega hakkab liikuma kiil? Hõõre on igal pool null.



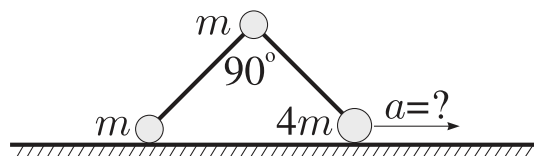
**Ülesanne 13.** Raske telje otstes on kerged rattad raadiusega  $R$ . Süsteem veereb mööda horisontaalpinda, mis läheb järsku üle kaldpinnaks kaldenurgaga  $\alpha$  moodustades nüri-nurkse jõnksu. Millise nurga  $\alpha$  puhul liiguvad rattad ilma

õhku hüppamata, so puutuvad kogu aeg vastu pinda? Rastaste massi mitte arvestada, telg on paralleelne horisontaal- ja kaldpinna eraldusservaga. Telje kiirus on  $v$ .



## 4 Keerulisemad ülesandeid

**Ülesanne 14.** Kolm pisikest silindrikest on ühendatud kaalutute varraste abil, kusjuures keskmise silindri juures on liigend, nii et varraste vaheline nurk saab vabalt muutuda; alghetkel on see täisnurk. Kaks silindrit on ühesuguse massiga  $m$ , ühe otsmise silindri mass on  $4m$  aga peale liikuma hakkamist. Hõõre on igal pool null.



**Ülesanne 15. (E-S 2015, P7)** Homogeenne elastne pall raadiusega  $R$  põrkas vertikaalsest seinast tagasi samas suunas, kust ta tuli. Palli kiirus enne põrget on  $v$  ja see on vertikaali suhtes nurga  $\alpha$  all. Pallil on enne põrget nurkkiirus  $\omega$ . Palli kontaktpunkt seinaga ei libisenud põrke ajal, aga ärge eeldage, et  $\omega R = v \cos \alpha$ . Põrge oli täiesti elastne, st kogu kineetiline energia jäi alles, samuti jäi samaks kiiruse horisontaalse komponendi suurus. Homogeense palli intertsimoment on  $I = \frac{2}{5}mR^2$ .

- Leidke palli nurkkiirus  $\omega_2$  pärast põrget.
- Leidke palli esialgne nurkkiirus  $\omega$  (avaldage  $v$ ,  $\alpha$  ja  $R$  abil).
- Milline on minimaalne väärtus hõõrdeegurile  $\mu$ , et selline põrge saaks toimuda?

**Ülesanne 16. (EuPhO 2018, T1)** Kolm väikest ühesugust palli (märgitud kui  $A$ ,  $B$  ja  $C$ ) massiga  $m$  on ühendatud kahe massitu vardaga pikkusega  $l$ . Pallid  $A$  ja  $B$  ning  $B$  ja  $C$  on omavahel ühendatud. Ühendus palli  $B$  juures on šarniirne. Süsteem on paigal kaalutus olekus nii, et kõik pallid on ühel sirgel. Pallile  $A$  antakse hetkeliselt varrastega risti kiirus  $v$ . Leia minimaalne kaugus  $d$  pallide  $A$  ja  $C$  vahel järgneva liikumise jooksul. Hõõrdumisega mitte arvestada.