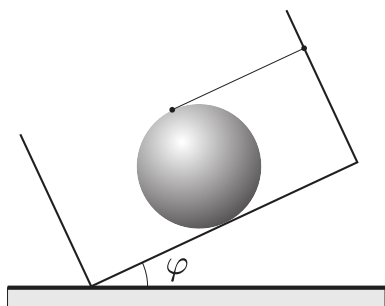


## 1 Hõõrdumine

Tüüpiline viga staatikaülesannete lahendamisel on öelda, et hõõrdejõud on  $\mu N$ . See on vale! Avaldis  $\mu N$  annab küll maksimaalse hõõrdejõu väärtuse, kuid üldjuhul on hõõrdejõud selline, et süsteem oleks staatilises tasakaalus.

**Ülesanne 1.** Klots hõõrdeeguriga  $\mu$  asub kaldpinnal. Millise kaldenurga  $\alpha$  korral hakkab klots libisema?

**Ülesanne 2. (Lahtine 2006, V7)** Kasti tasasel põhjal asub kuul. Kasti põhi asub nurga all horisontaalsuuna suhtes. Kuuli hoiab tasakaalus kasti sein külge kinnitatud niit, mis on paraleelne kasti põhjaga (vt joonis). Kui suure maksimaalse nurga  $\varphi$  võrra saab kasti kallutada, et kuul oleks veel tasakaalus? Hõõrdeegur kuuli ja kasti vahel on  $\mu$ .



## 2 Kolm võrrandit

Staatika ülesannete puhul on lahenduskäik harilikult standardne: tuleb välja kirjutada igale kehale mõjuvate jõudude tasakaalu tingimus  $x$ -,  $y$ - ja vajadusel ka  $z$ -komponendi jaoks; sageli tuleb neile lisada veel jõumomentide tasakaalu tingimus. Nende võrrandite lahendamine võib olla üldjuhul keeruline ja nende lihtsustamiseks saab kasutada järgnevaid kavalusi:

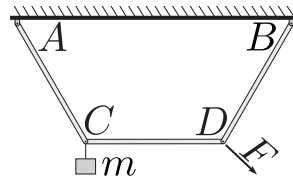
- Teljestik tuleb valida optimaalne, st nii, et võimalikult paljude jõudude projektsioonid läheksid nulliks. Eriti hea on, kui nulliks lähevad nende jõudude projektsioonid, mida me ei tea ja mis meid tegelikult ei huvita.
- Jõumomentide võrrandi kirjutamisel on tark valida pöörlemistelg nii, et võimalikult paljude jõudude olad oleksid nullid. Jällegi on eriti tõhus nullida “ebahuvitava” jõudude momente.

Kui on tegemist kahemõõtmelise süsteemiga, siis saab iga keha jaoks välja kirjutada kaks võrrandit jõudude jaoks ( $x$ - ja  $y$ -komponendid) ning ühe võrrandi jõumomentide jaoks.

**Ülesanne 3.** Varras on asetatud toetuma seinale ja põrandale nii, et puutepunktide kaugused nurgast on  $h$  vertikaalsiis ja  $s$  horisontaalsiis. Sein on libe ( $\mu_0 = 0$ ). Missugune peab olema hõõrdeegur  $\mu$  varda ja põranda vahel, et varras

jääks niisugusesse asendisse ilma libisemata?

**Ülesanne 4.** Kolm ühesugust varrast on ühendatud šarniirselt ning kaks otsmist on šarniirselt kinnitatud horisontaalse lae külge punktides  $A$  ja  $B$ . Nende punktide vaheline kaugus on kaks korda suurem, kui varraste pikkus. Šarniirse ühenduse  $C$  külge on riputatud koormismassiga  $m$ . Millise minimaalse jõuga on vaja hoida šarniiri  $D$ , et süsteem püsiks paigal ja varras  $CD$  oleks horisontaalne?



## 3 Toereaktsiooni ja hõõrdejõu resultant

**Ülesanne 5.** Millist minimaalset jõudu on vajalik rakendada selleks, et nihutada paigalt kaldpinnal lebavat klotsi, mille mass on  $m$ , kui hõõrdeegur on  $\mu$  ja kaldenurk  $\alpha$ ? Vaadeldud juhtumeid kui

- $\alpha = 0$ ;
- $0 < \alpha < \arctan \mu$ .

## 4 Jõudude sihtide kohtumispunkt

**Ülesanne 6. (Piirk 2004, G8)** Sein ja põrand on tehtud samast materjalist. Milline peab olema hõõrdeegur, et  $\alpha = 45^\circ$  nurga all vastu seina toetatud ühtlase läbimõõduga ja ühtlase massijaotusega pulk ei hakkaks libisema?

**Ülesanne 7.** Silindrit raadiusega  $R$  tõmmatakse horisontaalse jõuga üle trepiastme kõrgusega  $h$ . Milline peab olema hõõrdeegur, et silinder libisema ei hakkaks?

## 5 Mitteinertsiaalne taustsüsteem

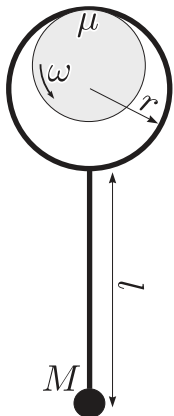
Kiirendusega liikuvast süsteemis pole jõudude summa null, järelikult ei kehti ka staatika tingimused. Siin aitab aga üks nipp: tuleb minna kiirendusega liikuvasse (ehk mitteinertsiaalsesse) taustsüsteemi, kus igale kehale hakkab mõjuma inertsiaal jõud  $-m\vec{a}$ . Nüüd on keha paigal ja tänu lisatud jõududele kehtivad ka staatika tingimused.

**Ülesanne 8. (Lõppv 2014, G7)** Leidke esirattaveolise sõiduauto maksimaalne kiirendus. Auto mass on  $m$ , esi- ja tagarataste telgede vahe  $b$ , massikeskme kõrgus  $h$  ning massikeskme horisontaalne kaugus tagateljest  $s$ . Hõõrdeegur rataste ja maa vahel on  $\mu$ .

**Ülesanne 9. (Piirk 2014, G7)** Horisontaalsel laual asuva klotsi massiga  $m_1$  peale on asetatud teine klots massiga  $m_2$ . Kahe klotsi vaheline seisuhõõrdeegur on  $\mu_2$ . Alumise klotsi ja laua vaheline liugehõõrdeegur on  $\mu_1$ . Leidke maksimaalne horisontaalne jõud  $F$ , millega võib alumist klotsi tõmmata, ilma et ülemine klots libiseks.

## 6 Keerulisemad ülesandeid

**Ülesanne 10.** Kerge traatvarda üks ots on keeratud rõngaks raadiusega  $r$ . Varda sirge osa pikkus on  $l$  ja teise otsa külge on kinnitatud kuulike massiga  $M$ . Sel viisil moodustatud pendel on riputatud rõnga abil pöörleva võlli külge. Hõõrdetegur võlli ja rõnga vahel on  $\mu$ . Leida millise nurga moodustab varras tasakaaluasendis vertikaalsihiga.



**Ülesanne 11. (200PPP, P10)** Victor Hugo novellis „Les Misérables“ täheldati, et peategelane Jean Valjean, põgenenud vang, suutis üles ronida nurgast, mille moodustasid kaks ristuvat seina. Leia minimaalne jõud, millega ta pidi seinu lükkama ronimise ajal. Milline on minimaalne seisuhõõrdetegur  $\mu$  sellise vägiteoga hakkama saamiseks?

**Ülesanne 12. (Lõppv 2017, G9)** Kaks jäika traadijuppi pikkusega  $L$  on ühendatud otsapidi (nt niidiga seotud) nii, et nende otspunktid on kontaktis ja nende vaheline nurk saab takistuseta muutuda, moodustades V-kujulise figuuri. See traadist moodustis asetatakse horisontaalse libedapinnalise silindri peale nõnda, et tasakaaluasendis moodustub traadist „katus“ (tagurpidi „V“) tipunurgaga  $\alpha$ . Massijaotus traadis on ühtlane, hõõre traadi ja silindri vahel puudub.

- Milline on silindri raadius  $R$ ?
- Milline võrratus peab olema rahuldatud, et see asend oleks stabiilne (uurida stabiilsust vaid „katuse“ kui terviku pöördumise suhtes eeldades, et traatidevaheline nurk ei muutu)?

**Ülesanne 13. (E-S 2013, P6)** Kaldpinnal nurgaga  $\alpha$  lebavad kera ja silinder, kummagi mass on  $m$  ning raadius  $r$ . Kehad lastakse lahti võrdsest algkõrguselt  $h$ . Kera ja silindri inertsimomendid on vastavalt  $I_{sph} = \frac{2}{5}mr^2$  ja  $I_{cyl} = \frac{1}{2}mr^2$ . Kaldpinna ja kehade vaheline hõõrdetegur on  $\mu$ .

- Kumb keha jõuab varem alla? Milline on teise keha suhteline hiline mine  $\gamma = (t_2 - t_1)/t_1$ ? Ajad  $t_1$  ja  $t_2$  tähistavad vastavalt esimesena ja teisena alla jõudnud kehade liikumise aegu. Eeldage, et veeremine toimub ilma libisemata.
- Leidke kaldenurga minimaalne väärtus  $\alpha_0$ , millest alates hakkab silinder lisaks veeremisele ka libisema.
- Kui  $\alpha \rightarrow 90^\circ$ , siis kaotavad kehad mõistagi pinnaga kontakti ning jõuavad vabalt langedes võrdse ajaga alla. Milline on aga minimaalne kaldenurk  $\alpha_m$ , mille puhul nii kera kui silinder võrdse ajaga alla jõuavad?

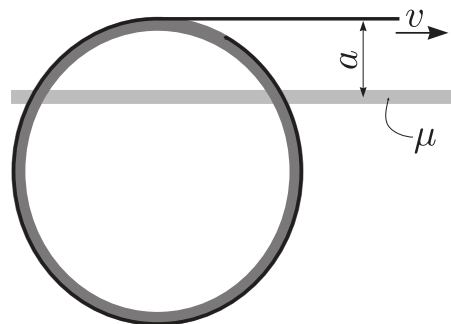
**Ülesanne 14. (E-S 2010, P4)** Massiivset sfäärilist kera massiga  $M = 100$  kg püütakse veeretada üles mööda vertikaalset seina, rakendades jõudu  $F$  mingisse punkti  $P$  kera pinnal. Hõõrdetegur kera ja seina vahel on  $\mu = 0.7$ .

- Millise minimaalse jõu  $F_{min}$  abil on võimalik see eesmärk saavutada?
- Konstrueerige geomeetriselt seina ja kera külgsaates see punkt  $P$ , kuhu niisugune minimaalne jõud peab olema rakendatud, koos rakendatava jõu suunaga.

**Ülesanne 15. (Lõppv 1998, G9)** Õõnes silinder massiga  $m$  ja raadiusega  $R$  seisab horisontaalsel alusel (joonisel on näidatud pealtvaade); tema alumine serv on sile ja kõikjal kontaktis aluspinnaga. Silindrile on mähitud niit, mille vaba otsa tõmmatakse konstantse kiirusega  $v$  piki niidi sihti. Leidke, millise kiirusega liigub silinder. Vaadelda eraldi kahte juhtumit:

- aluspinna ja silindri vaheline hõõrdetegur on kõikjal null, välja arvatud kitsas sirge vööt (hulga kitsam silindri raadiusest) hõõrdeteguriga  $\mu$ , mis on niidiga paralleelne ja mille kaugus niidist  $a < 2R$
- aluspinna hõõrdetegur on kõikjal konstantne ning võrdne  $\mu$ -ga.

*Vihje: kõva keha suvaline liikumine on vaadeldav pöörlemisena ümber hetkelise pöörlemistelje, s.o. keha iga punkti kiirusvektor on täpselt sama nagu siis, kui hetkeline telg oleks tõeliseks pöörlemisteljeks.*



**Ülesanne 16. (Lõppv 2015, G9)** Horisontaalpinnal lebab hantel, mis koosneb kaalutust vardast pikkusega  $l = 4a$  ning selle otstele kinnitatud kahest ühesuguse massi ja hõõrdeteguriga väikesest klotsist. Varda külge kaugusele  $a$  ühest klotsist on seotud pikk niit. Algul on niidi suund horisontaalne ja risti vardaga. Niiti aeglaselt tõmmates hakkab hantel pöörduma, sest alguses nihkub vaid üks klots. Milline on nurk  $\alpha$  varda ja niidi vahel siis, kui ka teine klots nihkuma hakkab?

