

1 Taevamehaanika

Kepleri seadused:

1. Iga planeedi a_1 orbiit on ellips, mille ühes fookuses on Päike:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}.$$

2. Planeedi raadiusvektor katab võrdsete ajavahemike jooksul võrdsed pindalad:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = 0$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\vec{L}}{m} = \text{const.}$$

3. Planeetide tiirlemisperioodide ruudud suhtuvad nagu nende orbiitide pikemate pooltelgede kuubid:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3.$$

Newtoni gravitatsiooniseadus:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}.$$

Energia orbiidil:

$$E = K + P = \frac{mv^2}{2} - \frac{Gm_1m_2}{r} = -\frac{Gm_1m_2}{2a}.$$

Runge-Lenz'i (ekstsentrilisuse) vektor:

$$\vec{e} = \frac{\vec{v} \times \vec{L}}{Gm_1m_2} - \hat{r} = \text{const.}$$

Orbiite on olemas kolme tüüpi: elliptilised, hüperboolsed ja paraboolsed.

1.1 Ellips

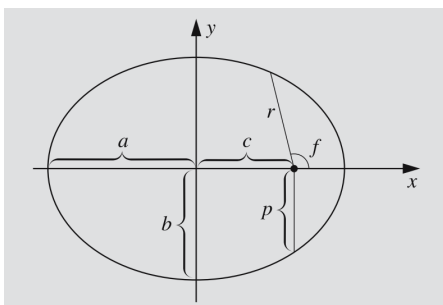
Ristkoordinaatides:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Polaarkoordinaatides:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}.$$

a on suur pooltelg, väike pooltelg $b = a\sqrt{1 - e^2}$, e on ekstsentrilisus ($0 \leq e < 1$), fookuse kaugus keskpunktist $c = ea$, poolfokaalparameeter $p = a(1 - e^2)$, pindala $A = \pi ab$, energia $E < 0$.



1.2 Hüperbool

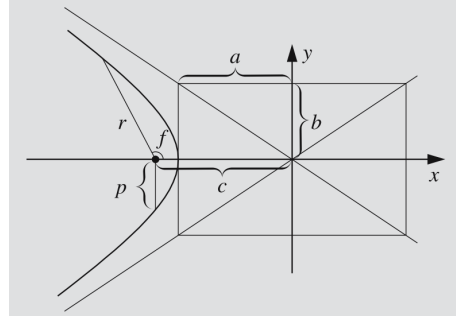
Ristkoordinaatides

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Polaarkoordinaatides:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}.$$

Ekstsentrilisus $e > 1$, väike pooltelg $b = a\sqrt{e^2 - 1}$, poolfokaalparameeter $p = a(e^2 - 1)$, asümptoodid $y = \pm \frac{b}{a}x$, energia $E > 0$.



1.3 Parabool

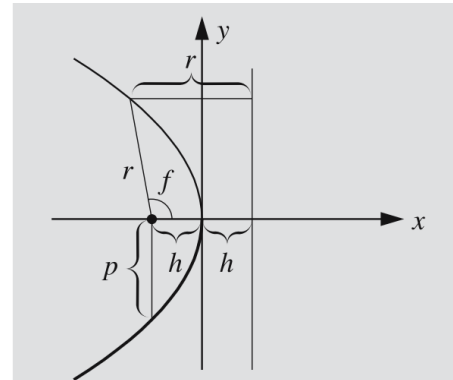
Ristkoordinaatides:

$$x = -ay^2.$$

Polaarkoordinaatides:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}.$$

Ekstsentrilisus $e = 1$, poolfokaalparameeter $p = \frac{1}{2}a$, $h = \frac{1}{4}a$, energia $E = 0$.



1.4 Ülesanded

Ülesanne 1. Leidke ringorbiidil raadiusega $R = R_M$ liikumise periood, kus R_M on Maa raadius.

Ülesanne 2. Leidke aeg, mis kulub Maa sisse kaevatud tsentrit läbiva tunneli kaudu „kukkumiseks“ teisele poole Maakera. *Vihje:* Vihje: kiirenduse sõltuvus koordinaadist peaks tulema harmoonilise ostsillaatoriga samal kujul $a = -\omega^2 x$. Võrrelge seda aega esimese kosmilise kiirusega Maa ümber tiiru tegemise ajaga. Kas tulemus oleks teine, kui see

tunnel ei läbiks Maa keskpunkti?

Ülesanne 3. Tõestage, et kui planeedi sisemusse teha sfäärikujuline õõnsus, siis selle sees on väli homogeenne.

Ülesanne 4. Tuletage koguenergia (kineetiline pluss potentsiaalne) avaldis

$$E = -\frac{Gm_1m_2}{2a}.$$

Ülesanne 5. Maapinnalt visatakse vertikaalselt üles mingi objekt sellise kiirusega, et see eemaldub Maast kaugusele R ning tuleb siis tagasi. Leidke objekti lennu-aeg. Maa raadius on $R_M = R$.

Ülesanne 6. Objekt saadetakse orbiidile kahes etapis: esmalt antakse maapinna läheduses kiirus v_2 ning apogeessuurendatakse kiirust: $v_2 = v + \Delta v$ nii, et objekt on nüüd ringorbiidil raadiusega R , Maa raadius on R_M . Leida v_1 ja Δv .

Ülesanne 7. Ringorbiidil R objektile antakse radiaalsuunaline kiirus. Kui suur peab see kiirus olema, et objekt väljuks Maa orbiidilt? Maa raadius on R_M . *Vihje:* Milline peab olema objekti koguenergia, et väljuda orbiidilt (liikuda lõpmatult kaugemale)?

Ülesanne 8. Mingi tähe läheduses toimub plahvatus, kust lendab välja palju väikseid objekte, kõigi kiiruste moodulid on võrdsed v -ga. Objektid hakkavad liikuma elliptilisi orbiite mööda, mille üheks fookuseks on see täht. Kus võib aga asuda teine fookus? (Leidke teise fookuse geomeetiline koht.)

Ülesanne 9. (Tudengite olümpiaad 2003) Vaadeldagem tähtedevahelise gaasipilve gravitatsioonilist kokkutõmbumist. Eeldagem, et gaas tihedusega $\rho = 10 \times 10^{-15} \text{ kg m}^{-3}$ täidab ühtlaselt kerakujulise ruumiosa ning algtemperatuur on nii madal, et osakeste algkiiruse võib lugeda nulliks. Kui kaua võtab aega gaasipilve kokkutõmbumine?

Ülesanne 10. Lõpmatusest läheneb tähele mingi objekt ning eemaldub seejärel taas lõpmatusse. Lõpmatult kaugel olles on kiirusvektori poolt moodustatud sirge kaugus tähest b (vt joonist), pärast eemaldumist on sama parameeter b' (milline on seos nende vahel?). Leidke avaldis kõrvalekalde nurga ϕ jaoks. *Vihje:* Runge-Lenz'i vektor võib osutuda kasulikuks.

