Tuletised, diferentsiaalid ja integraalid füüsikas

nr 4

Kaarel Kivisalu

31. oktoober 2018

1 Tuletis ja diferentsiaal

Funktsiooni $f(x)$ diferentsiaaliks nimetame muutu $df = f(x+dx)f(x)$. See vastab funktsiooni muutumisele, kui argument muutub dx võrra. Suhet $f' = df/dx$ nimetame funktsiooni tuletiseks ning see vastab ka graafiku tõusule $\tan(\alpha)$ (ekstreemumpunktides on graafiku tõus ja tuletis null). Võib ka vastupidi öelda: diferentsiaali saab avaldada tuletise f' ja argumendi muudu dx abil: $f(x+dx) = f(x) + df$, kus $df = f'dx$. (Kui valemid tunduvad keerulised, mõtleme graafikute peale).

Tabel 1: Põhifunktsioonide diferentsiaalid ja tuletised

Algseos	Diferentsiaal	Tuletis
$f(t) = const$	$df = 0$	$df/dt = 0$
$v = at$	$dv = a\ dt$	$\dot{v} = a$
$x = at^2/2$	$dx = at\ dt$	$\dot{x} = at$
$f(x) = x^n$	$df = nx^{n-1}\ dx$	$f' = df/dx = nx^{n-1}$
$y = \sin\alpha$	$dy = \cos\alpha\ d\alpha$	$dy/d\alpha = \cos\alpha$
$y = \cos\alpha$	$dy = -\sin\alpha\ d\alpha$	$dy/d\alpha = -\sin\alpha$
$y = e^x$	$dy = e^x\ dx$	$dy/dx = e^x$
$y = \ln x$	$dy = 1/x\ dx$	$dy/dx = 1/x$

Liitfunktsiooni tuletise võtmise reegel (ingl k *chain rule*), kus $f(g)$ ja $g(x)$:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}.$$

Tabel 2: Liitfunktsioonide diferentsiaalid ja tuletised

Algseos	Diferentsiaal	Tuletis
$f = e^{-\lambda t}$	$df = -\lambda e^{-\lambda t}\ dt$	$df/dt = -\lambda e^{-\lambda t}$
$x = \cos(\omega t)$	$dx = -\omega\sin(\omega t)\ dt$	$dx/dt = -\omega\sin(\omega t)$

Mitme muutuja funktsioonide puhul koosneb kogudiferentsiaal osadiferentsiaalide summast.

Tabel 3: Mitme muutuja funktsioonide diferentsiaalid

Algseos	Diferentsiaal
$f = uv$	$df = u\ dv + v\ du$
$f = pV^\gamma$	$df = \gamma pV^{\gamma-1}dV + V^\gamma dp$
$\ln f = \ln p + \gamma\ln V$	$d\ln f = dp/p + \gamma dV/V$

Tavaliselt lõputult kohal 0 diferentseeruva funktsiooni saame kirja panna Maclaurini reana (Taylori rea erijuht):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + ...$$

Sellest järeldub, et kui $x \ll 1$, siis

$$(1+x)^n = 1+nx, \qquad \sin x = \tan x = x, \qquad \cos x = 1-\frac{x^2}{2}$$

$$e^x = 1+x, \qquad \ln(1+x) = x.$$

2 Ülesandeid tuletise kohta

Ülesanne 1. Vaatleme harmoonilist võnkumist $x(t) = A\cos(t)$. Avaldage $v(t)$ ja $a(t)$. Veenduge, et kogu võnkumise kestel kehtib energia jäävuse seadus. Milline seos kehtib a ja x vahel?

Ülesanne 2. Vedru jäikusega k külge on kinnitatud koormis m, avaldage võnkumise sagedus f.

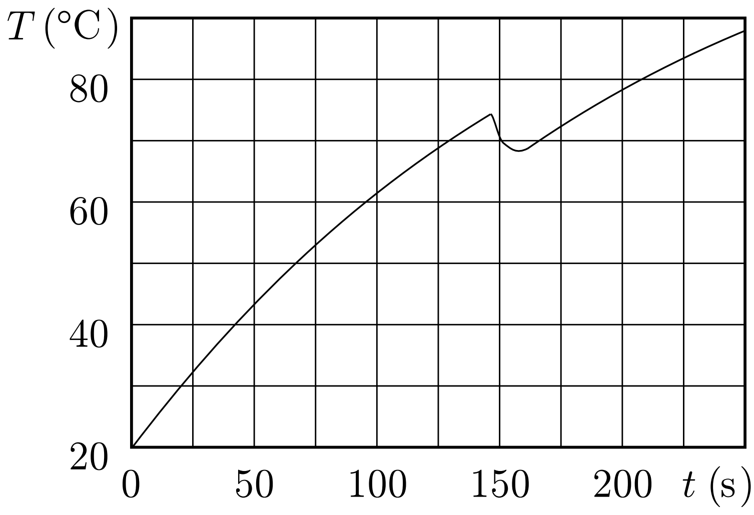
Ülesanne 3. Avaldage a) matemaatilise (punktmass) ja b) füüsikalise pendli (meenutage inertsimomenti ja Steineri teoreemi) võnkumise sagedus.

Ülesanne 4. Pingeallikale $\mathcal{E}$ sisetakistusega r ühendatakse väline tarbija takistusega R. Millise R korral on tarbijal eralduv võimsus maksimaalne?

Ülesanne 5. On teada, et kera ruumala avaldub kujul $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (miks?). Tuletage sfääri pindala valem.

Ülesanne 6. Varras toetub ühe oma otsaga vastu põrandat ning teisega vastu vertikaalset seina. Milline on varda alumise otsa kiirus u hetkel, mil tema ülemine ots libiseb allapoole kiirusega v ning nurk põranda ja varda vahel α?

Ülesanne 7. (Lõppv 2004, G7) Elektrikannus soojendatakse vett. Teatud hetkel pandi kannu $T_0 = 0$ °C juures olevat jääd. Joonisel on toodud vee temperatuuri sõltuvus ajast. Kui suur oli jää mass, kui kannu võimsus $P = 1$ kW. Jää sulamissoojus on $L = 335$ kJ/K. Toatemperatuur $T_1 = 20$ °C.



Ülesanne 8. Koer ajab taga rebast, kes jookseb sirgjoones konstantse kiirusega v. Koera kiiruse moodul on samuti v, kuid vektor $\vec{v}$ on igal ajahetkel suunatud otse rebase poole. Alghetkel, mil koer rebast märkas ning teda jälitama asus, oli nende vahemaa L ning koera ja rebase kiirsvektorid omavahel risti. Leidke koera ja rebase minimaalne vahemaa jälitamise ajal.

Ülesanne 9. Avaldage seebimullis pindpinevusteguriga σ ja raadiusega r olev pindpinevusest tingitud lisarõhk Δp.

3 Integraal

Integraale kasutatakse summade, keskmisete, pindalade leidmiseks. Funktsiooni $f(x)$ integraaliks nimetatakse pindala, mis jääb funktsiooni ja x-telje vahele. Pindala ligikaudseks leidmiseks saame jagada regiooni ristkülikuteks ja liita kokku nende pindalad. Kui valida väga õhukesed ristkülikud, siis nende pindalade summa läheneb funktsiooni integraalile. Formaalselt joone $f(x)$ alla jääv pindala lõigul $[a,b]$ on

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx.$$

Kui $f(x)$ on pidev ja $F'(x)=f(x)$, siis

$$\int_a^b f(x)dx = F(a)-F(b).$$

Intutiivselt võiks seda mõista, kui $x(t)$ on keha asukoht, $v(t)=x'(t)=\frac{dx}{dt}$ on keha kiirus, siis $\int_a^b v(t)dt = x(a)-x(b)$. Võrrandi vasak pool on tuleneb spidomeetri näidust ja parem pool väljendab aja t jooksul läbitud vahemaad.

Kui $F'(x)=f(x)$, siis kehtib seos

$$\int f(x)dx = F(x)+c, \text{kus } c \text{ on konstant,}$$

mida nimetakse määramata integraaliks.

Integraalide jaoks kehtivad järgmised seosed, mille esitame tõestuseta

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

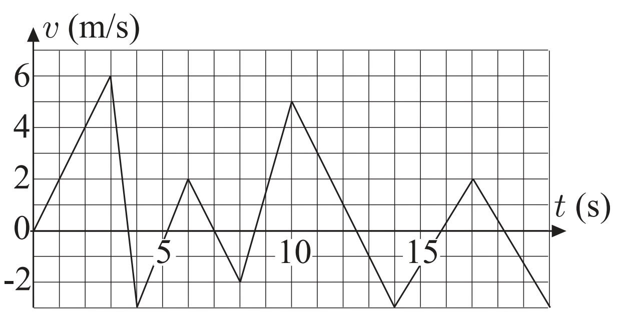
$$\int f(x)\pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du, \text{ kus } u=g(x)$$

4 Ülesandeid integraali kohta

Ülesanne 10. (NBPhO 2016, P7) Osake hakkab liikuma koordinaatide algupunktist. Selle kiiruse sõltuvus ajast on antud joonisel. Milline on osakese maksimaalne nihe koordinaatide alguspunktist?



Ülesanne 11. Leia funktsioonide $1/x$, x^n, $x^3(x^4+2)^5$, e^{6x}, xe^{6x} integraalid.

Ülesanne 12. Leidke varda inertsimoment ümber otspunkti ja ketta inertsimoment ümber keskpunkti.

Ülesanne 13. Tuletage koonuse pindala ja ruumala valemid.

Ülesanne 14. (NBPhO 2017, P9) Uurime kosmoselaeva, mis on homogeense toru kujuga, mille mõlemad otsad on suletud. Kosmoselaev pöörleb ümber oma massikeskme nurkkiirusega ω, et simuleerida gravitatsiooni. Pöörlemistelg on toruga risti. Kosmoselaev on täidetud õhuga, mille molaarmass on μ ja mille rõhk pöörlemisteljel on p_0. Kosmoselaeva diameeter on palju väiksem tema pikkusest.

a) Leidke rõhk p funktsioonina kaugusest r pöörlemisteljest.
b) Võrdluseks vaatleme (mitte pöörlevat) torni konstantses raskusväljas tugevusega g, mis on täidetud sama gaasiga. Kui torni põhjas on rõhk p_0, siis mis on rõhk p funktsioonina kõrgusest h torni põhjast?

Ülesanne 15. Sipelgas liigub kummiribal kiirusega $v = 1$ cm/s. Kummiriba üks ots (see, millest hakkas sipelgas liikuma) on kinnitatud seina külge, teist ots (algselt kaugusel $L = 1$ m seinast) tõmmatakse kiirusega $u = 1$ m/s. Kas sipelgas jõuab kunagi kummiriba teise otsa. Kui jah, siis kui kaua palju aega see võtab?

Ülesanne 16. (NBPhO 2016, P7) Vedelat heeliumit jahutatakse seda madala rõhu all aurustades ning gaasi ära pumbates. Heeliumi aurustumissoojus on $=22$ kJ/kg, mille võite lugeda konstantseks. Vedeliku erisoojus $c(T)$ on kujutatud joonisel. Kui suur osa vedelikust peab aurustuma, et vähendada vedeliku temperatuuri $T_0 = 4,1$ K temperatuurini $T_1 = 2,3$ K.