

1 Elektrostaatika

1.1 Elementaarteadmised

Kahe punktlaengu q_1 ja q_2 vahel mõjub elektrostaatiline jõud:

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{21}|^2} \hat{r}_{21}, \quad (\text{Coulomb'i seadus})$$

kus $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ja $\epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$.

Võrrandi lineaarsuse tõttu kehtib ka *superpositsiooniprintsiip*.

Elektrivälgi \vec{E} on defineeritud valemiga $\vec{F} = q\vec{E}$. Elektrivälja on mugav visualiseerida jõujoone mõiste kaudu. Elektrivälja *jõujoonteks* nimetatakse kõveraid, millele elektrivälgi \vec{E} on igas punktis puutujaks. Jõujooned algavad positiivsetel ja lõpevad negatiivsetel laengutel. Kvantitatiivsedsed on järgmised: punktlaengust lähtuvate jõujoonte arv on võrdeline selle laengu suurusga q ning jõujoonte tihedus (st jõujoontega risti asetatud ühikpinda läbivate jõujoonte arv) on võrdeline välja tugevusega \vec{E} .

Ülesanne 1. Neli identset punktlaengut suurusga q paiknevad ruudu tippudes, kus ruudu küljepikkus on L . Leidke laengutele mõjuva jõu suurus.

Ülesanne 2. Kella numbrilauale on fikseeritud punktlaengud suurusga $q, 2q, 3q, \dots, 12q$ ($q > 0$), mis paiknevad vastavatel tunnijaoitistel. Millist aega näitab tunniosuti hetkel, kui ta on paralleelne ja samasuunaline nende laengute poolt tekitatud resultantväljatugevuse vektoriga numbrilaua tsentris?

1.2 Gaussi seadus elektrivälja jaoks

Mingit suletud pinda läbiv elektrivälja voog on võrdeline pinna sees oleva laenguga:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (\text{I Maxwelli võrrand})$$

Ülesanne 3. Leidke Gaussi seaduse abil elektrivälja tugevus kaugusel r

- punktlaengust laenguga q ;
- ühtlaselt laetud lõputult pikast ja peenikesest traadist, mille laengu joontihedus on λ ;
- ühtlaselt laetud lõputust tasandist, mille laengu pindtihedus on σ ;
- ühtlaselt laetud kerast, mille raadius on R ja laengu ruumtihedus on ρ .

Ülesanne 4. Leidke elektrivälja tugevus plaatkondensaatoris, kui plaatide laengu pindtihedus on $\pm\sigma$.

Elektrostaatiline väli on *konserveeriv*: töö, mida väli teeb laetud osakese nihutamisel piki suletud kontuuri, on null. Ekvivalentne väide on, et töö, mida väli teeb osakese nihutamisel punktist A punkti B , ei sõltu osakese trajektooriga. Välja *potentsiaaliks* nimetatakse osakese potentsiaalset energiat laengu kohta. Kahe ruumipunkti *potentsiaalide vahe* ehk *pinge* avaldub järgnevalt:

$$V = \varphi_B - \varphi_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}.$$

Illustreerime öeldut punktlaengu baasil. Harilikult lepitakse kokku, et lõpmatuses on potentsiaal võrdne nulliga. Seega punktlaengu q elektrivälja potentsiaal kaugusel r avaldub järgmiselt:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^{\infty} E dr \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \end{aligned}$$

Ülesanne 5. Ruumiosa $0 < x < d$ täidab ühtlaselt jaotunud elektrilaeng tihedusega ρ ($\rho < 0$); laengutihedus ruumiosas $-d < x < 0$ on $-\rho$. Piirkondades $\infty < x < -d$ ning $d < x < \infty$ laeng puudub. Piirkonnas $x > d$ liigub elektron massiga m ja laenguga $-e$, selle kiirusvektor on suunatud otse laetud kihi poole. Millise minimaalse algkiiruse puhul suudab elektron veel läbida laetud kihid?

Ülesanne 6. N ühesugust elavhõbedatilka on laetud ühesuguse potentsiaalini φ_0 . Missuguseks kujuneb suure elavhõbedatilga potentsiaal kõigi väikeste tilkade liitumisel (tilgad lugeda kerakujulisteks)?

1.4 Juhid elektrostaatilises väljas

Juhiks nimetatakse materjali, milles on vabu laengukandjaid.

Ülesanne 7. Põhjendage,

- miks puudub juhi sees elektrivälgi;
- miks liigub laenguga juhis laeng täielikult selle pinnale (ehk miks puudub juhi sees laeng);
- miks puudub õõnsusega juhis laeng juhi sisepinnal;
- miks on elektrivälgi igas punktis risti pinnaga ja milline on elektrivälja tugevus pinna vahetus läheduses, kui selles punktis on juhi laengu pindtihedus σ .

2 Magnetostaatika

2.1 Gaussi seadus magnetvälja jaoks

Mingit suletud pinda läbiv summaarne magnetvälja voog on null:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (\text{II Maxwelli võrrand})$$

2.2 Ampere'i tsirkulatsiooniteoreem

Mingi suletud kontuuri B -välja „tsirkulatsioon“ on võrdeline kontuuri läbiva koguvooluga. Suuna leidmiseks saab kasutada parema käe kruvireeglit.

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (\text{III Maxwelli võrrand})$$

Ülesanne 8. Leidke magnetiline induksioon kaugusel r lõpmatult pikast sirgjoonelisest juhtmest, mille voolutugevus on I .

Ülesanne 9. Leidke magnetiline induksioon pika solenoidi ehk pooli sees, mida läbib voolutugevus I ja mille keerdude arvühik (keerdude arv pikkusühiku kohta) on n .

2.3 Biot'-Savart' seadus

Vooluelemendil on magnetostaatikas samasugune roll nagu punktlaengul elektrostaatikas. Coulomb'i seaduse analoogiks võib lugeda *Biot'-Savart'i seadust*, mille kohaselt vooluelement $I d\vec{l}$ annab magnetinduktsiooni kaugusel r panuse

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}. \quad (\text{Biot'-Savart' seadus})$$

Ülesanne 10. Leidke magnetiline induksioon ringvoolu teljel kaugusel x ringvoolu tasandist. Voolutugevus kontuuris on I ja kontuuri raadius R .

3 Elektrodünaamika

3.1 Lorentzi jõud

Punktlaengule q mõjub magnetväljas jõud $\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$. Kui $\vec{E} = 0$, $\vec{B} = \text{const}$ ja on risti kiirusvektoriga, siis hakkab laeng liikuma mööda ringjoonelist trajektoori, kui $\vec{E} = 0$ ja $\vec{B} = \text{const}$ omab ka mingit kiirusvektorisuunalist komponenti, hakkab laeng liikuma mööda spiraalset trajektoori.

Ülesanne 11. Leidke punktlaengu q trajektoori raadius kiirusvektoriga ristsuunalises magnetväljas, kui magnetiline induksioon on B , laengu kiirus on v ja mass on m .

Ülesanne 12. (VKV 2018, P2) Elektron, mis on kiirendatud elektronkahuris pingega U_k , liigub vaakumis ja siseneb tasaparalleelsete metallplaatide vahelisse ruumpiirkonda nii, et kiirusvektor on paralleelne plaatidega (vt joonis). Plaadid paiknevad üksteisest kaugusel d ja on ühendatud alalispingeallika (U) erinevate poolustega. Samal ajal saab plaatide vahel tekitada ka homogeense magnetvälja, kus magnetilise induksiooni vektor \vec{B} on risti elektroni kiirusega ja paralleelne plaatidega. Kui suur peab olema B , et elektron liiguks suunda muutmata läbi kondensaatori? Elektroni mass on m ja elementaarlaeng e .

Ülesanne 13. (Piirk 2013, G10) Laboris oli uurimiseks hulk mingit atomaarset ainet, mille molaarmassiks mõõdeti

μ_1 . Ühekordselt ioniseeritud ainet (iga aatom oli kaotanud ühe elektroni) kiirendati elektriväljas potentsiaalide vahel U ja suunati magnetvälja induksiooniga B (vaadake joonist). Magnetinduktsioon oli joonise tasandiga risti, ionide algkiirus oli y -telje suunaline, magnetväli asus piirkonnas $y > 0$ ning aine sisenes magnetvälja punktis $(0, 0, 0)$. Täheledata, et väike kogus ainet langes x -teljel asuvale detektorile kauguse d võrra kaugemal kohast, kuhu langes põhiosa ainet. Sellest järeldata, et aine hulgas oli väike osa isotoopi erineva molaarmassiga. Leidke selle isotoobi molaarmass μ_2 . Avogadro arv on N_A ja elektroni laeng on $-e$.

Ülesanne 14. (Piirk 2018, G10) Vaatleme tsüklotroni – teatud tüüpi osakeste kiirendi toimimist. Tsüklotron koosneb silindrikujulisest piirkonnast raadiusega R , kus on homogeenne magnetväli tugevusega B ning õhukesest ribakujulisest piirkonnast laiusega d , kus on homogeenne riba rist ole elektrivälja tugevusega E . Elektrivälja suunda muudetakse perioodiliselt vastassuunaliseks nii, et osakeste igal riba läbimisel on elektrivälja suund osakeste kiirusvektoriga samasuunaline. Samuti on tsüklotroni ühes ääres osakeste tsüklotronist väljumiseks kitsas kanal. Alustagu osakesed liikumist tsüklotroni keskelt tühiselt väikse algkiirusega. Mitu täisringi n teevad osakesed tsüklotronis enne väljumist? Osakeste laeng on q ja mass m . Eeldada, et $n \gg 1$.

Lorentzi jõu abil saab tuletada ka juhtmelõigule pikkusega L ja voolutugevusega I mõjuva jõu

$$\vec{F} = L(\vec{I} \times \vec{B}). \quad (\text{Ampere'i seadus})$$

Ülesanne 15. Leidke kahe lõpmata pika paralleelse sirgjuhtme vahel ühikulise pikkusega lõigu kohta mõjuv jõud, kui voolud juhtmetes on I_1 ja I_2 ning juhtmetevaheline kaugus on r .

3.2 Liikumine statsionaarses magnetväljas

Magnetväljas hakkab juhtmes olevatele laengukandjatele mõjuma Lorentzi jõud, mis omakorda tekitab juhtmes voolu. Võib mõelda, et juhtmelõigu otstele tekib pinge ehk elektromotoorjõud.

Ülesanne 16. Leidke magnetväljas B sellega kiirusega v risti liikuva juhtmelõigu (mille pikkus on l) otstele tekkiv pinge.

Saadud tulemuse võib esitada kujul (mis kehtib ka üldkujul, kui juhtmelõik ei ole sirgjooneline)

$$\mathcal{E} = B \frac{dS}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}$$

Ülesanne 17. (E-S 2011, P3) Dielektrilisest materjalist silinder raadiusega r kannab oma silindrilisel pinnal laengut pindtihedusega σ ja pöörleb ümber oma pikitelje nurkkiirusega ω .

a) Määrake magnetinduktsioon B silindri sisemuses. Märkus: soovi korral võite kasutada avaldist solenoidaalse pooli induktiivsuse jaoks, $L = \mu_0 N^2 S / l$, kus r on pooli raadius, l — pikkus ($l \gg r$), S — ristlõike pindala ja

N — keerdude arv.

- b) Radiaalne juhtiv traat ühendab silindri telge ja silindrilist pinda (ning pöörleb koos silindriga). Leidke traadi otste vahele tekkiv elektromotoorjõud (pinge) \mathcal{E} .
- c) Oletagem, et silindri telge ja silindrilist pinda ühendav traat ei ole radiaalne, vaid omab suvalist kuju (siiski, ükski traadi osa ei ulatu silindri seest välja). Näidake, et \mathcal{E} ei sõltu traadi kujust.

magnetiline läbitavus.

- a) Solenoidide keskmed on teineteisest kaugusel $x < l$ piki nende ühist telge $[A_1, A_2 \ll (x - l)^2, x^2]$. Leidke magnetvälja koguenergia E_m selles süsteemis.
- b) Leidke elektromotoorjõud \mathcal{E}_1 ja \mathcal{E}_2 , mis genereeritakse poolidel, kui üht tõmmatakse välja kiirusega v .
- c) Leidke jõud F , mida on vaja, et tõmmata üht pooli väljapoole.

3.3 Faraday induktsiooniseadus

Mistahes kontuuri jaoks indutseerib muutuv magnetvoog kontuuris pööriselise elektrivälja. Kuigi kontuuris tekib selle tulemusena elektromotoorjõud, siis klassikalisest pingest (potentsiaalide vahest) selle juures rääkida ei saa.

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (\text{IV Maxwelli võrrand})$$

kus $\Phi = BS$ on magnetvoog läbi kontuuri. See tähendab, et voolu saab indutseerida kahel viisil, kas muutes magnetvälja (siis $\mathcal{E} = -S \frac{dB}{dt}$) või muutes kontuuri kuju (siis $\mathcal{E} = -B \frac{dS}{dt}$). Miinusmärk tähistab seda, et indutseeritud voolu poolt tekitatud magnetväli üritab kompenseerida magnetvoo muutust (*Lenzi reegel*).

Ülesanne 18. (Piirk 2011, G8) Maa gravitatsiooniväljas (raskuskiirendusega g) vertikaalselt paiknevale juhtivale traadile kinnitati takisti (massiga m , takistusega R) nõndaviisi, et see võib piki traati vabalt libiseda. Teades, et magnetinduktsioon B oli risti traadi tasandiga ja traadi harude vaheline kaugus oli d , leidke, millise lõppkiirusega hakkab takisti langema.

Mõnikord võib vooluelemendis (tavaliselt on selleks pool) toimuda eneseinduktsioon, kus voolu muutumine elemendis tekitab pinge selle sama elemendi otstele (sarnaselt Lenzi reegilile üritab jällegi pinge tasakaalustada voolu muutust). Sellisel juhul $U = L \frac{dI}{dt}$, kus võrdetegurit L nimetatakse *induktiivsuseks*.

Avaldage pooli induktiivsus keerdude arvu N , ristlõikepindala S ja pooli pikkuse l kaudu.

Ülesanne 19. (Lõppv 2008, G10) Libedale klaaspulgale on pehmest traadist tihedasti keritud solenoid pikkusega l , keerdude arvuga N ja ristlõikepindalaga S . Selles hoitakse konstantset voolu tugevusega I . Millist jõudu F oleks vaja rakendada pooli otstele südamikü sihis, et venitada seda pisutki pikemaks, kui kehtiks eeldus, et venitamisel suurenevad kõigi naaberkeerdude vahekaugused võrdsest. Võite lugeda, et klaasi magnetiline läbitavus $\mu = 1$.

Ülesanne 20. (E-S 2015, P9) Tihedalt keritud jäik solenoidpool on osaliselt pistetud teise samasuguse sisse. Nad on ühendatud konstantse voolu allikaga, mis hoiab mõlemas voolu I ; nad tekitavad magnetvälja samas suunas. Mõlemal solenoidil on N kerdu, nende pikkus on l ja ristlõikepindalad on A_1 ja A_2 . Võib eeldada, et $A_1, A_2 \ll l^2$. Kasu võib olla teadmisest, et magnetinduktsioon ühe eraldivõetud solenoidi keskmis on $B = \mu_0 IN/l$, kus μ_0 on vaakumi