

Tallinna Reaalkool

# Gravitatsiooni mõju kera soojusmahtuvusele

Uurimistöö

Kaarel Kivisalu

11. a

Juhendajad: prof Jaan Kalda

õp Toomas Reimann

Tallinn 2019

# Sisukord

|  |    |
|--|----|
| Sissejuhatus . . . . .   | 3  |
| 1 Teoreetiline osa . . . . .   | 4  |
| 1.1 Tavapärane lahendus . . . . .  | 4  |
| 1.2 Tavapärane lahendus ja selle termodünaamika II seaduse rikkumine . . . | 4  |
| 1.3 Statistiline mehaanika . . . . .                                       | 5  |
| 1.4 Schroedingeri vorrand . . . . .  | 6  |
| 1.5 Energiatasemed ja soojusmahtuvus . . . . .                             | 6  |
| 1.6 Kvaasi-klassikaline lähendus . . . . .                                 | 6  |
| 1.7 Häiritusteooria . . . . .  | 6  |
| 2 Praktiline osa . . . . .   | 8  |
| 2.1 Lineaarsed potentsiaalid . . . . .                                     | 8  |
| 2.2 Kolmanda astme polünoompotentsiaal . . . . .                           | 8  |
| Kokkuvõte . . . . .  | 9  |
| Kasutatud materjalid . . . . .   | 10 |
| Kinnitusleht . . . . .   | 11 |

## Sissejuhatus

I rahvusvahelisel füüsikaolümpiaadil 1967. aastal oli järgnev probleem (Problems of the... 1967):

*Kaks homogeenet ühesugust kera on sama algtemperatuuriga. Üks kera on liikumatult horisontaalse tasandil, teine ripub niidi küljes. Mõlemale kerale antakse võrdne soojushulk. Kas kerade lõpptemperatuur on sama või mitte. Soojuskadudega mitte arvestada.*

Käesolevas töös uuritakse konkreetsete potentsiaalide korral konstantse gravitatsioonivälja mõju kera soojusmahtuvusele. Konstantse gravitatsioonivälja potentsiaal on lineaarne. Vaadatakse soojusmahtuvuse erinevust juhtudel, kui on ainult kera potentsiaal ja kera potentsiaalile on lisatud lineaarne gravitatsioonivälja potentsiaal.

Töös on analüüsitud lõputut potentsiaaliauku häirituse meetodil, kuuppolünoompotentsiaali häirituse meetodil ja kahest lineaarsest funktsioonist koosnevat potentsiaali kvaasiklassikaliselt. Samuti on näidatud, et osade potentsiaalide korral ei mõjuta gravitatsioon soojusmahtuvust.

Varem on uuritud gravitatsiooni mõju metallkera soojusmahtuvusele üldjuhul. Leiti üldine seos soojusmahtuvuse, temperatuuri, gravitatsioonivälja tugevuse ja lineaarse soojuspaismisteguri vahel. Saadud tulemust on eksperimentaalselt väga raske kinnitada, kuna gravitatsiooni mõju on väga väike. Konkreetsete potentsiaalide läbivaatamine tõstaks ka varem leitud mudeli usaldusväärsust.

Uurimistöö hüpotees on, et sõltuvalt potentsiaalist võib gravitatsioon nii tõsta kui ka langetada keha soojusmahtuvust.

# 1 Teoreetiline osa

## 1.1 Tavapärane lahendus

Tavapärane lahendus põhineb soojuspaisumisega seotud erinevustel. Kerale  $A$  soojust andes see paisub ja selle massikese tõuseb. Järelikult peab osa kerale  $A$  antavast soojushulgast kuluma kera massikeskme gravitatsioonilise potentsiaalse energia tõstmiseks ja lõpptemperatuur on madalam algsest. Vastupidiselt, kera  $B$  massikese langeb soojuspaisumise tõttu ja energiat saadakse juurde, järelikult on kera  $B$  lõpptemperatuur kõrgem.

Pannakse ka kirja tavapärasele lahendusele vastavad valemid. Olgu kerade soojusmahtuvus  $C_0$  gravitatsioonivälja puudumisel. Tavapärase lahenduse korrale, kui kera  $A$  soojendatakse, siis selle massikese tõused  $dR = \alpha R dT$  võrra, kus  $dT$  on temperatuuri tõus,  $\alpha$  on soojuspaisumistegur ja  $R$  on kera raadius. Kera saab potentsiaalse energia  $d\Phi = mg dR$ , kus  $m$  on keha mass ja  $g$  on raskuskiirendus. Järelikult, kui soojushulk  $\delta Q$  antakse süsteemile, siis saadakse, et

$$\delta Q = C_0 dT + mg dR = C_0 dT + mg\alpha R dT = (C_0 + mg\alpha R)dT. \quad (1)$$

See on ekvivalentne väitega, et kera  $A$  soojusmahtuvus on:

$$C_A = C_0 + mg\alpha R. \quad (2)$$

Analgoselt saame, et kera  $B$  soojusmahtuvus on

$$C_B = C_0 - mg\alpha R. \quad (3)$$

Enamuse materjalide jaoks on  $\alpha > 0$ , millest tulenevalt  $C_A > C_B$ . Järelikult on tavapärase lahenduse kohaselt kera  $A$  lõpptemperatuur madalam kera  $B$  lõpptemperatuurist.

## 1.2 Tavapärane lahendus ja selle termodünaamika II seaduse rikkumine

Tavapärase lahenduses kaudselt eeldatakse, et keha siseenergia  $U$  ja raadius  $R$  sõltuvad ainult temperatuurist  $T$ , mitte aga raskuskiirendusest  $g$ . Vaadeldakse järgnevat tsüklit:

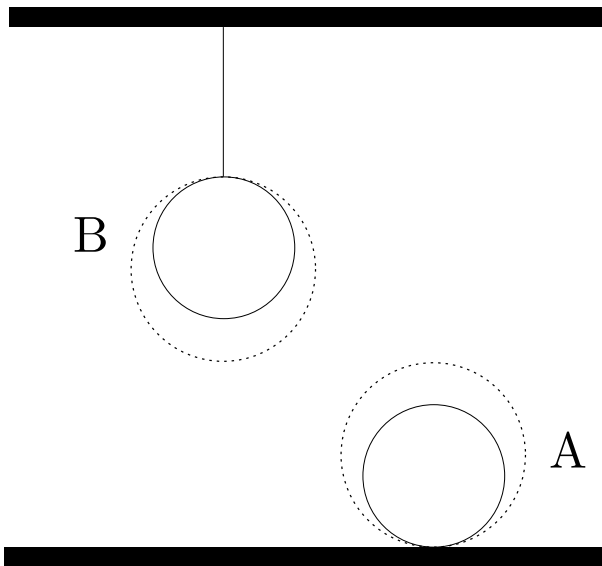
pall asub horisontaalsel külmal tasandil temperatuuriga  $T_1$ ; pall ühendatakse soojema reservaariga, mille temperatuur  $T_2 = T_1 + dT > T_1$ ; pall riputatakse nööri külge ja horisontaalne tasand eemaldatakse; pall ühendatakse külma reervuaariga, mille temperatuur on  $T_1$ . Selle protsessi kasutegur on tehtud töö ja neeldunud soojuse suhe ning avaldub kujul (Palma, Sormani 2015)

$$\eta = \frac{2mg\alpha R}{C_0 + mg\alpha R}. \quad (4)$$

Kasutegur  $\eta$  ei sõltu  $dT$  suurusest. Termodünaamika teist seadust saab sõastada järgnevalt: iga tsükkel, mis töötab ainult temperatuuride  $T_1$  ja  $T_2$  juures ei saa olla efektiivsem Carnot' tsüklist, mis töötab samade temperatuuride juures. Carnot' tsükli efektiivsus on

$$\eta_{Carnot'} = \frac{dT}{T_2} \quad (5)$$

Järelikult, kui  $dT$  on piisavalt väike, siis on palliga tsükli kasutegur suurem Carnot' tsükli kasutegurist. Teisisõnu rikub tavapärane lahendus termodünaamika II seadust.



**Joonis 1. Probleemi ülesehitus**

(Palma, Sormani 2015)

Allikas:

### 1.3 Statistiline mehaanika

Kasutades statistilise mehaanika meetodeid on võimalik leida kera soojusmahtuvuse sõltuvus gravitatsioonist (ibid.):

$$\frac{\partial C(g, T)}{\partial g} = -mTY \left( \alpha^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial T} \right), \quad (6)$$

kus  $C$  on soojusmahtuvus,  $g$  on raskuskiirenuds,  $m$  on kera mass,  $T$  on kera temperatuur,  $Y$  on massikeskme kõrgus,  $\alpha$  on lineaarne soojuspaisumistegur.

## 1.4 Schroedingeri võrrand

Ajast sõltumatu Schröedingeri võrrand ühes dimensioonis avaldub kujul (Griffiths 2005)

$$\hat{H}\Psi = E\Psi, \quad (7)$$

kus  $E$  on süsteemi koguenergia ja

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x). \quad (8)$$

## 1.5 Energiatasemed ja soojusmahtuvus

Kanoonilise ansambli jaoks, mis on kvantmehaaniline ja diskreetne, on kanooniline statistiline summa  $Z$  defineeritud kui jälg Boltzmanni tegurist (Kardar 2007):

$$Z = \text{tr}(e^{-\beta\hat{H}}) = \sum_n e^{-\beta E_n}. \quad (9)$$

Keskmine energia  $U$  avaldub kui (ibid.)

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}. \quad (10)$$

Soojusmahtuvus on defineeritud kui

$$C = \frac{\partial U}{\partial \beta}. \quad (11)$$

Eelnevatest võrranditest on lihtne näha, et

$$\frac{\partial C}{\partial g} = -\frac{\partial}{\partial g} \frac{\partial}{\partial T} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \sum_n e^{-\beta E_n}. \quad (12)$$

## 1.6 Kvaasi-klassikaline lähendus

### 1.7 Häiritusteooria

Schröedingeri võrrandit täpselt lahendada on võimalik ainult lihtsamatel juhtudel. Kui on teada lahend mingi juhu jaoks, siis väikeste häirituste korral on võimalik lahendada võrrandid ligikaudselt kasutades häiritusteooriat.

Oletame, et antud füüsikalise süsteemi Hamiltoonian avaldub kujul

$$\hat{H} = H_0 + V, \quad (13)$$

kus  $V$  on väike häiritus häirimata operaatori  $H_0$ , jaoks. Eeldatakse, et  $V$  ja  $H_0$  ei sõltu ajast.

Häirituse teooria diskreetse spektrumi jaoks saab formuleerida järgnevalt. Eeldatakse, et on teada diskreetse spektri omaväärtused (ingl *eigenvalues*)  $E_0^{(0)}$  ja omafunktsioonid (ingl *eigenfunctions*)  $\phi^0$  häitimata operaatori  $H_0$  jaoks, st et on teada võrrandi

$$H_0\phi = E_0\phi \quad (14)$$

täpsed lahendid. Soovitakse leida ligikaudseid lahendeid võrrandile

$$\hat{H}\phi = (H_0 + V)\phi = E\phi, \quad (15)$$

st ligikaudsed avaldised häiritud operaatori  $\hat{H}$  omafunktsioonide  $\phi_n$  ja omaväärtuste  $E_n$  väärtused. (Landau, Lifshitz 2005)

## 2 Praktiline osa

Käesolevas osas leitakse konkreetsetele võimalikele kera potentsiaalidele vastavad soojusmahtuvuse sõltuvused gravitatsioonist, kus gravitatsiooni potentsiaal on võetud lineaarseks sõltuvalt ühest koordinaadist. Kuigi tegelik kera potentsiaal on keeruline võib anda konkreetne potentsiaal küllaltki täpse lahendi.

### 2.1 Lineaarsed potentsiaalid

Vaatleme potentsiaali kujuga

$$V(x) = \begin{cases} ax + mgx, & x < 0, \\ bx + mgx, & x \geq 0. \end{cases} \quad (16)$$

Kvaasi klassikalises lähenduses saame leida vastava omaväärtused:

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \hbar, \quad (17)$$

kus  $x_1 = \frac{E_n}{a+mg}$  ja  $x_2 = \frac{E_n}{b+mg}$ . Saadakse, et

$$\frac{2}{3} \sqrt{2m} E_n^{\frac{3}{2}} \left( \frac{1}{a+mg} + \frac{1}{b+mg} \right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \hbar \quad (18)$$

$$E_n = \left[ \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi \hbar}{\sqrt{m}} \frac{(a+mg)(b+mg)}{a+b+2mg} \right]^{\frac{2}{3}} \quad (19)$$

### 2.2 Kolmanda astme polünoompotentsiaal

Vaatame potentsiaali kujuga

$$V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} + mgx + ax^3. \quad (20)$$

Lahendid saame leida häirituse meetodiga. On lihtne potentsiaali

$$V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} + mgx \quad (21)$$

omaväärtused, kui teha asendus  $y = x + \frac{g}{\omega^2}$ . Saadakse, et

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega - \frac{1}{2} \frac{mg^2}{\omega^2}. \quad (22)$$



## Kokkuvõte

## Kasutatud materjalid

Griffiths, D. J. (2005) Introduction to quantum mechanics. Upple Saddle River: Prentice Hall

Kardar, M. (2007) Statistical Physics of Particles. New York: Cambridge University Press

Landau, L. D., Lifshitz, E. M. (2005) Quantum Mechaincs (Non-relativistic Theory). Oxford: Butterworth-Heinemann

Palma, G. D., Sormani, M. C. (2015) „Counterintuitive effect of gravity on the heat capacity of a metal sphere: re-examination of a well-known problem“. American Journal of Physics, nr 83 (723)

Problems of the 1st International Physics Olympiad (1967). Loetud: [http://ipho.org/problems-and-solutions/1967/1st\\_IPhO\\_1967.pdf](http://ipho.org/problems-and-solutions/1967/1st_IPhO_1967.pdf), 18.11.2018

# Kinnitusleht

Kinnitan, et

- koostas in uurimistöö iseseisvalt. Kõigile töös kasutatud teiste autorite töödele ja andmeallikatele on viidatud;
- olen teadlik, et uurimistööd ei edastata teistele tulu teenimise eesmärgil ega jagata teadlikult plagieerimiseks.

.....

kuupäev / nimi / allkiri

Tunnistan uurimistöö kaitsmisvalmiks.

Juhendajad

.....

kuupäev / nimi / allkiri

.....

kuupäev / nimi / allkiri