

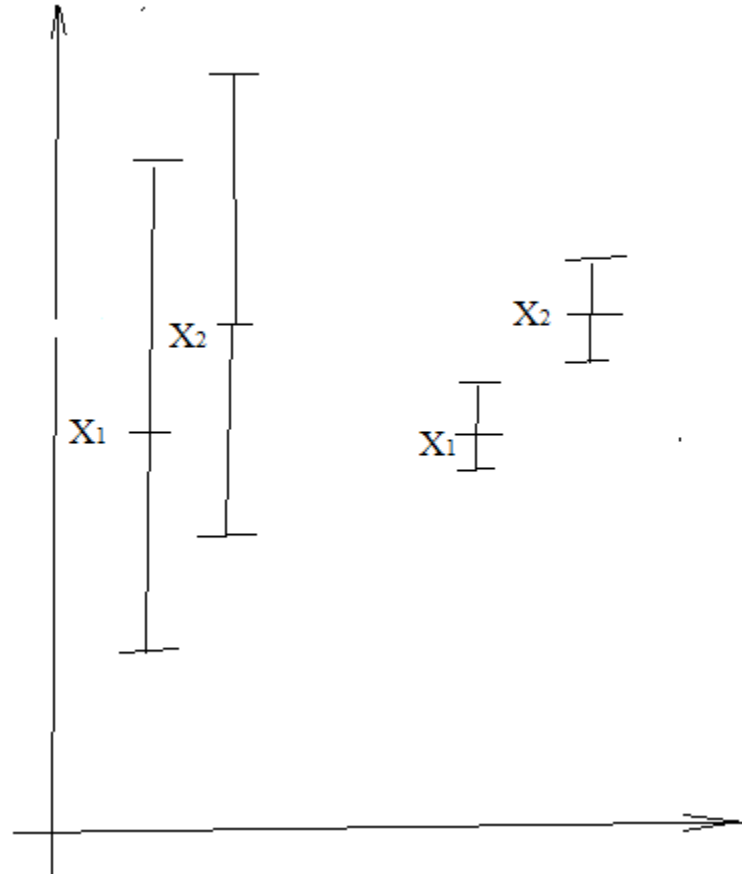
Сравнение средних величин критерием Стьюдента

В практических исследованиях часто встречаются случаи, когда средний результат одной серии экспериментов отличается от среднего результата другой серии. При этом правомочен вопрос, можно ли объяснить обнаруженное расхождение средних некоторого признака, характеризующего объекты исследования неизбежными случайными ошибками эксперимента или оно вызвано определенными причинами. В промышленной статистике задача сравнения средних возникает, когда идет речь о контроле или соответствии качества изделий, изготовленных на различном оборудовании или при различных технологических режимах; в медицине – при сравнении эффективности методов лечения; в финансовом анализе – при сравнении уровня доходности ценных бумаг и т.д.

Критерии Стьюдента применяют в предположении, что **сравниваются 2 независимые выборки, признак имеет нормальное распределение, дисперсии однородны**. Если одно из двух последних предположений не выполняется, то применяют непараметрические критерии. Если число групп **более двух** и выполняются отмеченные условия, то применяют **дисперсионный анализ**.

- Теоретически *t*-критерий может применяться, даже если размеры двух выборок очень небольшие, переменные нормально распределены (внутри групп), а дисперсии наблюдений в группах не слишком различны.
- Предположение о нормальности можно проверить, исследуя распределение (например, визуально с помощью гистограммы) или применяя какой-либо критерий нормальности.
- Равенство дисперсий в двух группах можно проверить с помощью *F*-критерия или использовать более устойчивый критерий Левена. Если условия применимости *t*-критерия не выполнены, следует использовать непараметрические альтернативы *t*-критерия.
- Уровень значимости p *t*-критерия равен вероятности ошибочно отвергнуть нулевую гипотезу **о равенстве средних двух выборок генеральной совокупности**, когда в действительности эта гипотеза имеет место. Если $p > 0.05$ и нулевая гипотеза принята, то это означает, что средние двух групп объектов для генеральной совокупности можно считать равными. В противном случае, следует считать, что среднее одной группы в генеральной совокупности больше/меньше чем среднее другой группы.

Статистическая значимость отличия между средними в двух группах зависит от внутригрупповой вариации (дисперсии) переменных. Поэтому уменьшение внутригрупповой вариации увеличивает чувствительность критерия.



Например, это относится к экспериментам, в которых две сравниваемые группы основываются на одной и той же совокупности наблюдений (случаев), тестирувавшихся дважды (например, больные до и после лечения). Такие группы данных (выборки) в терминологии пакета STATISTICA называют **зависимыми, так как содержат результаты повторных измерений**. В подобных экспериментах значительная часть внутригрупповой изменчивости в обеих группах может быть объяснена индивидуальными различиями субъектов. Если та же самая выборка тестируется дважды, то легко исключается эта часть вариации. Вместо исследования каждой группы отдельно и анализа исходных значений рассматривают разности между двумя измерениями (например, до и после лечения больного) для каждого наблюдения. Вычитая первые значения из вторых (для каждого наблюдения) и анализируя затем только эти «чистые» (парные) разности, исключается та часть вариации, которая является результатом различия в исходных уровнях наблюдений. Именно так и проводятся вычисления в *t-критерии* для зависимых выборок. При этом нулевая гипотеза предполагает, что средняя разность равна 0, поэтому если $p > 0,05$, то вероятность ошибиться отклонив нулевую гипотезу велика и принимаем гипотезу, что средняя разность равна 0, то есть отличие средних до и после повторных измерений статистически незначимо. Обобщая результат на генеральную совокупность утверждаем, что средние до и после повторных измерений примерно одинаковые, а расхождение между ними носит случайный характер.

В сравнении с *t-критерием* для независимых выборок такой подход дает всегда более точный результат (критерий становится более чувствительным). Теоретические предположения *t-критерия* для независимых выборок относятся также к критерию для зависимых выборок. Это означает, что парные разности должны быть нормально распределены. Если это не выполняется, то можно воспользоваться одним из альтернативных непараметрических критериев.

Если при применении *t-критерия* для независимых выборок выявлено статистически значимое отличие средних случайной величины, то, как правило, это говорит о наличии статистически значимой корреляционной связи между группирующей переменной и случайной величиной. И наоборот, наличие статистически значимой корреляционной связи между группирующей переменной и случайной величиной, как правило, означает, что отличие средних в группах будет статистически значимым. Поэтому, сравнение средних в группах позволяет объяснить структуру взаимосвязи между группирующей переменной и случайной величиной.

Например, если выявлена статистически значимая корреляционная связь между полом и ростом, то очень вероятно, что отличие средних значений пола в группах мужчин и женщин будет статистически значимым, и наоборот

- Для запуска программы в верхнем меню **Statistics** надо выбрать команду **Basic Statistic Tables** (основные статистики/таблицы). Откроется меню команды, в котором *t-критерий* представлен четырьмя процедурами (рис.1):

- — **t-test, independent, by groups** (*t-критерий* для независимых выборок с группирующей переменной) используется, если надо сравнить средние случайных величин двух независимых групп, полученных из одной выборки при помощи группирующей переменной. Другими словами сравниваются средние **двух подвыборок, записанных в одном столбце**;

- — **t-test, independent, by variables** (*t-критерий* для независимых выборок) применяется, если надо сравнить средние случайных величин, полученных по двум **разным (независимым) выборкам, но записанных в разных столбцах и имеющих одно и ту же единицу измерения**;

- — **t-test, dependent samples** (*t-критерий* для зависимых выборок) применяется, если надо сравнить средние случайных величин двух групп, одна из которых представляет повторные измерения другой!;

- — **t-test, single samples** (простые выборки). Применяется, если надо сравнить среднее выборки со средней генеральной совокупности.

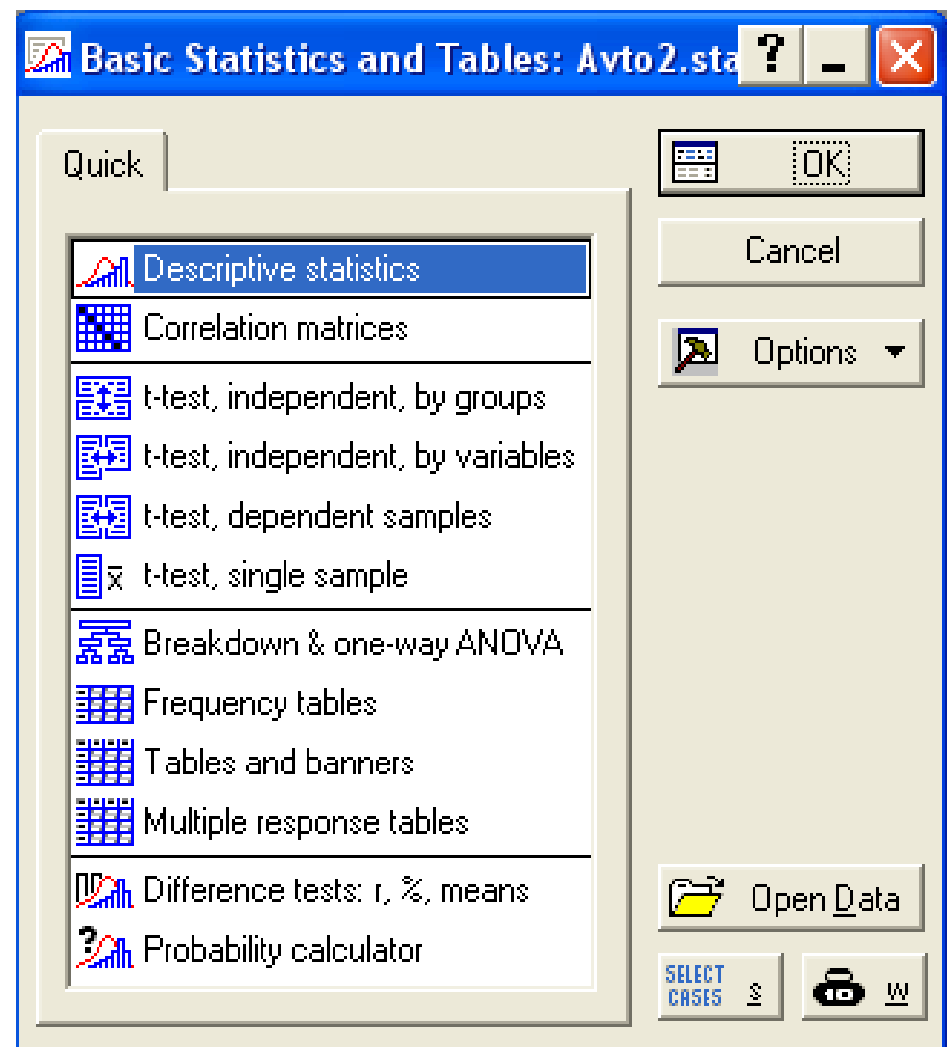
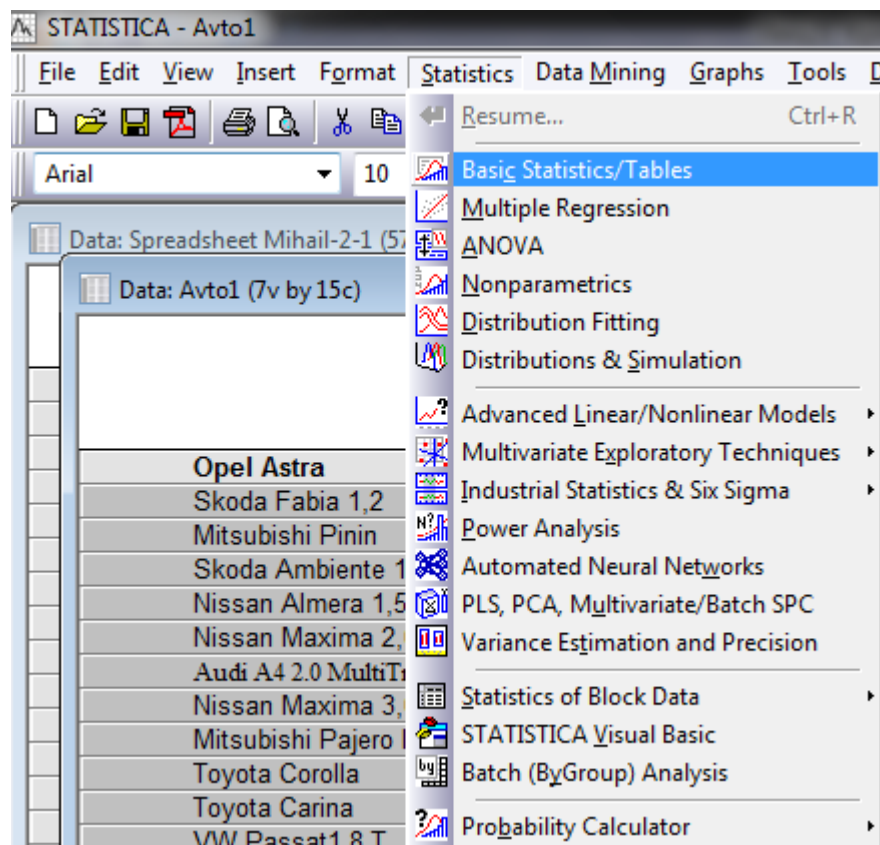


Рис.1

Рассмотрим реализацию 3 метода: **t-test, dependent samples**, используя таблицу данных на рис.2, в которой приведены данные пробега пятнадцати японских и европейских автомобилей. В столбце 2 указан тип топлива: P – бензин; $G + P$ – бензин и газ; D – дизель. В столбцах 3, 4, 5 приведены пробеги автомобилей до первой серьезной поломки, требующей ремонта на СТО – *Пробег1*; до капитального ремонта двигателя – *Пробег2*; после капитального ремонта – *Пробег3*.

Предположим, что величины пробега автомобилей в столбцах таблицы имеют нормальное распределение. На основании этих данных нужно оценить статистическую значимость отличия пробегов автомобилей:

- до капитального ремонта (Пробег 2) и после капитального ремонта (Пробег 3) двигателей;
- зависимости от типа используемого топлива и места производства.

	Пробег до кап.рем., после кап. рем.						
	1 Произв.	2 Тип.топл.	3 Пробег1	4 Пробег2	5 Пробег3	6 Пробег 1 Европа	7 Пробег 1 Japan
Opel Astra	Европа	P	65	240	230	65	110
Skoda Fabia 1,2	Европа	P	70	250	220	70	90
Mitsubishi Pinin	Japan	G+P	110	300	280	60	100
Skoda Ambiente 1,6	Европа	P	60	230	230	80	110
Nissan Almera 1,5	Japan	G+P	90	280	260	70	95
Nissan Maxima 2,0 QX	Japan	G+P	100	300	280	80	100
Audi A4 2.0 MultiTronic	Европа	P	80	250	230	75	110
Nissan Maxima 3,0 SE	Japan	P	110	310	310		105
Mitsubishi Pajero III	Japan	G+P	95	320	280		
Toyota Corolla	Japan	G+P	100	300	300		
Toyota Carina	Japan	D	110	310	300		
VW Passat1,8 T	Европа	D	70	275	250		
VW Bora 1,6	Европа	D	80	260	230		
Subaru Legacy	Japan	D	105	315	350		
VW Golf 1,6	Европа	D	75	250	240		

Рис.2

- После выбора на вкладке **Statistics** команды **Basic Statistics**, следует щелкнуть по команде (рис.1) **t-test, dependent samples**, откроется окно модуля (рис.3). В открывшемся окне процедуры нажмите кнопку **Variables**. Выберите две сравниваемые между собой переменные: *Пробег2*, *Пробег3*, нажмите **ОК**. Программа вернется в диалоговое окно модуля, в котором надо нажать на кнопку **Summary, t-test**.

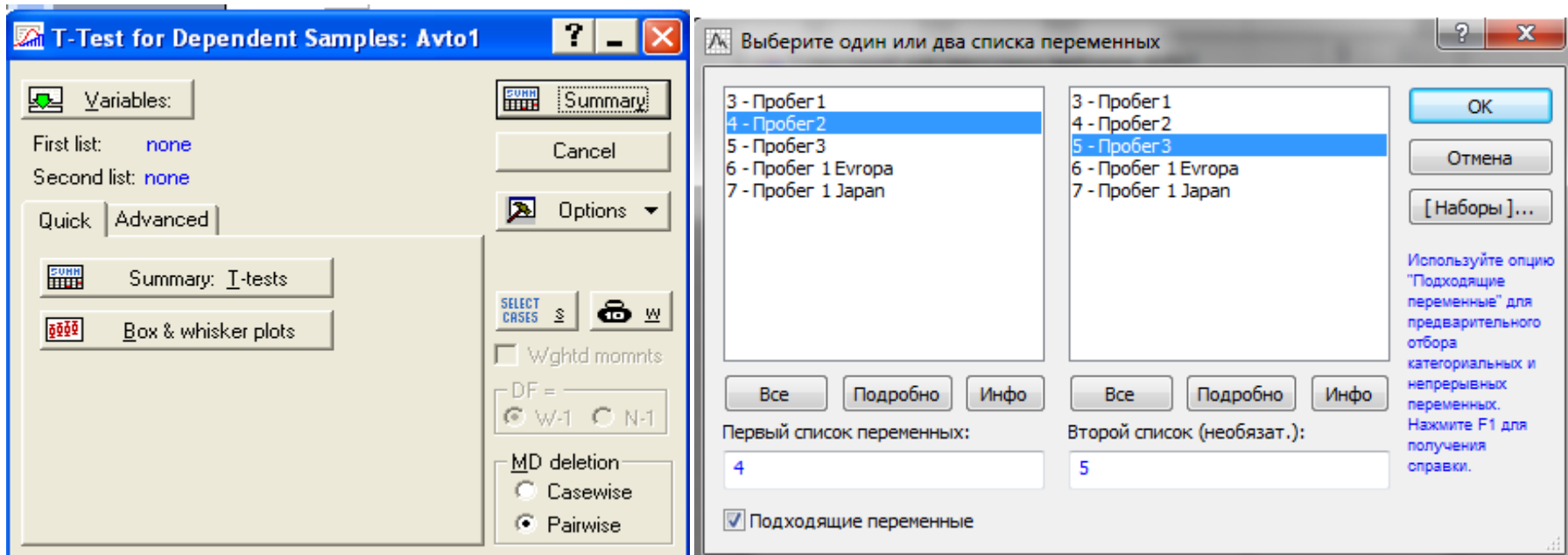


Рис.3

- Появится таблица с результатами анализа, в которой будут приведены значения следующих статистик:
 - – *Mean* (средние значения переменных);
 - – *Std. Dev.* (стандартные отклонения значений переменных);
 - – *N* (число наблюдений в группе);
 - – *Diff* (разница между средними);
 - – *t* (значение *t*-критерия);
 - – *df* (число степеней свободы);
 - – *p* (*p*-уровень значимости *t*-критерия);
 - 95% доверительный интервал разницы между средними
- Для нашего примера *p* меньше 0,05, поэтому гипотезу о равенстве средней разности 0 отвергаем, соответственно отвергаем гипотезу о равенстве средних пробегов, т.е. **отличие средних пробегов статистически значимо!** Таким образом, обобщая результат на генеральную совокупность принимаем, что средний пробег автомобилей до капитального ремонта значительно превышает средний пробег после капитального ремонта.

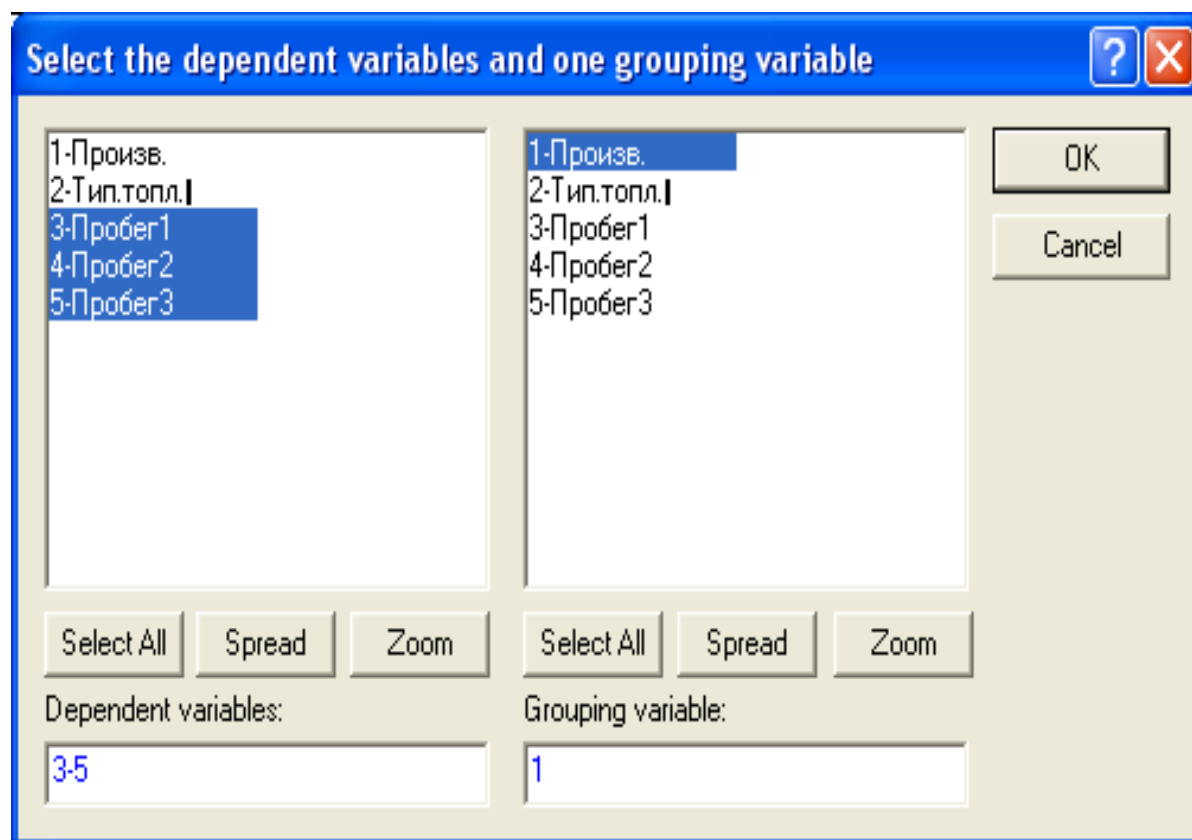
Переменная	Т-критерий для зависимых выборок (Avto1)									
	Отмечены разности, значимые на уровне $p < ,05000$									
	Среднее	Стд.откл	N	разн.	Стд.откл разн.	t	сс	p	Доверит. -95,0%	Доверит. +95,000 %
Пробег2	279,3333	30,52322								
Пробег3	266,0000	37,94733	15	13,33333	17,89520	2,885	14	0,012	3,4233	23,24336

- Рассмотрим реализацию первого метода: **t-test, independent, by groups** задачи и при интерпретации результатов воспользуемся исследование корреляционных связей пробегов с категориальными переменными *Производитель* и *Тип топлива*

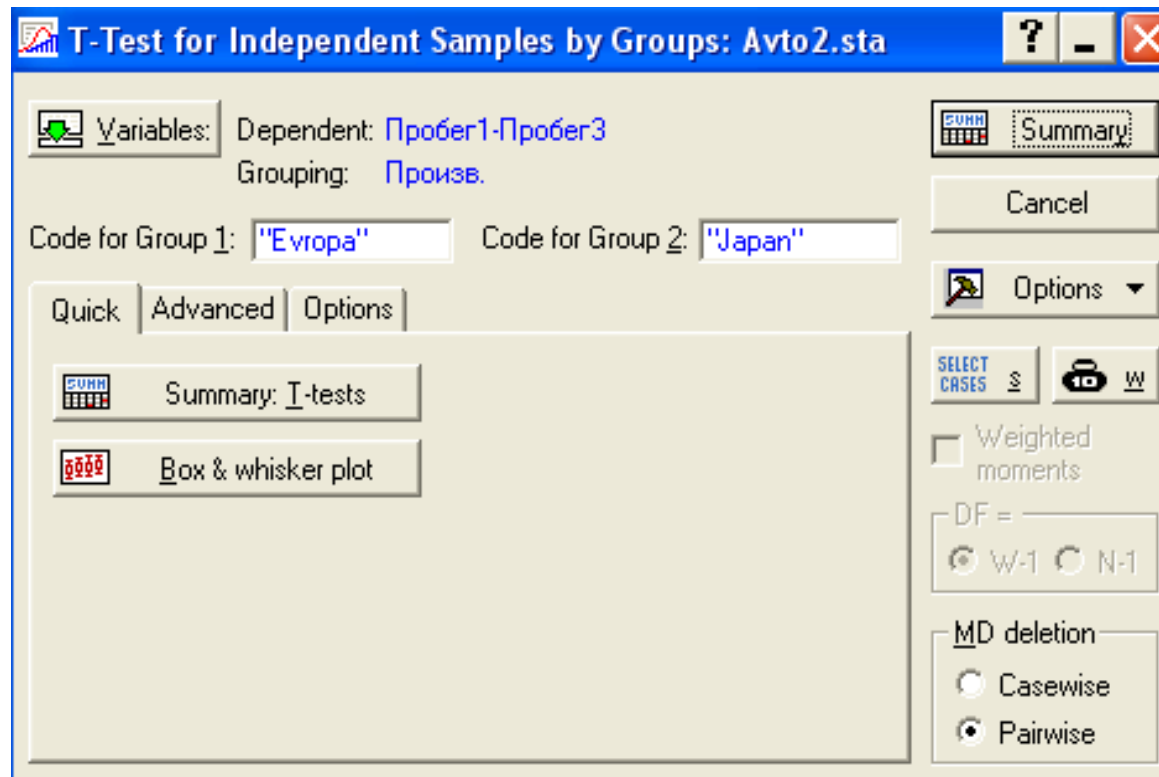
Перем.	Ранговые корреляции Спирмена (Avto1) ПД попарно удалены Отмеченные корреляции значимы на уровне $p < ,05000$	
	Произв.	Тип топл.
Пробег1	-0,871	0,475
Пробег2	-0,873	0,562
Пробег3	-0,878	0,479

- STATISTICA* позволяет применять *t-критерий* для независимых выборок, используя одну независимую (категориальную, или группирующую) переменную (например, место производства) и одну зависимую переменную (например, пробег автомобиля).
- Проверим, равны ли средние пробега автомобилей до первой серьезной поломки, до капитального ремонта двигателя и после капитального ремонта для автомобилей европейского и японского производства.

- В меню процедуры **Basic Statistic Tables** выберите команду **t-test, independent, by groups** (рис.1). Откроется рабочее окно процедуры. Нажмите кнопку **Variables** и определите группирующую переменную *Произв.* и зависимые переменные *Пробег1*, *Пробег2*, *Пробег3* (рис.5). После нажатия на **ОК** программа вернется в рабочее окно модуля, укажите в нем коды группирующей переменной *Europe* и *Japan*.



- Щелкните кнопкой **Summary: t-tests**

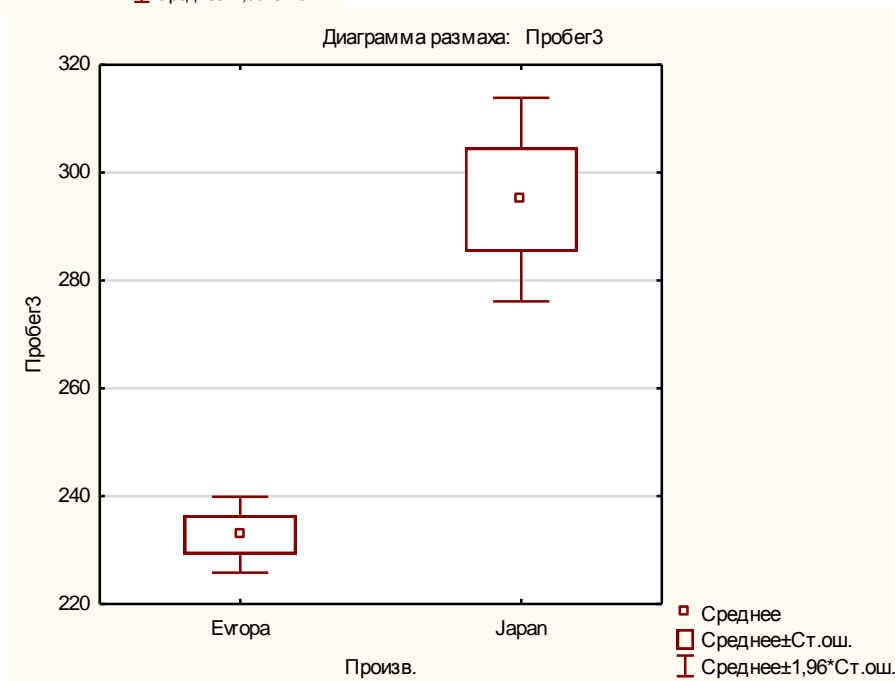
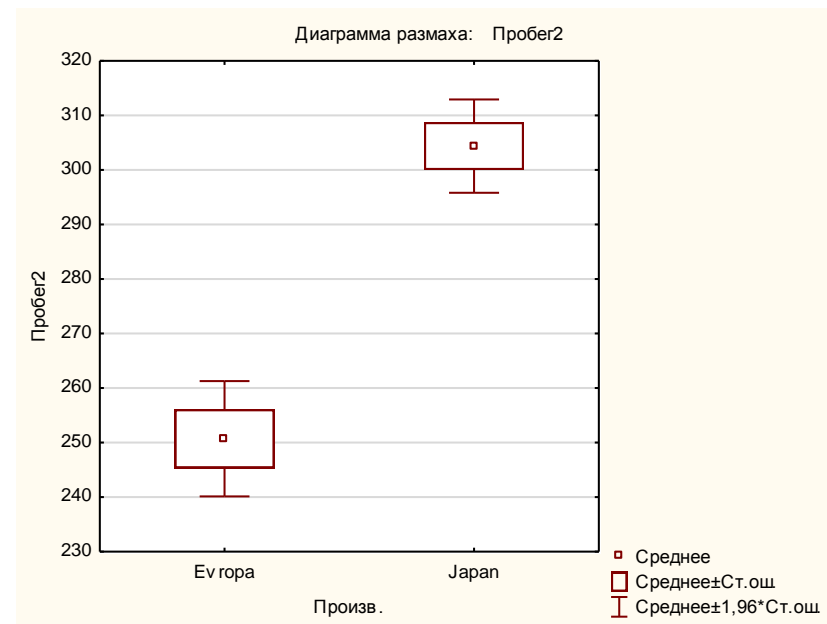
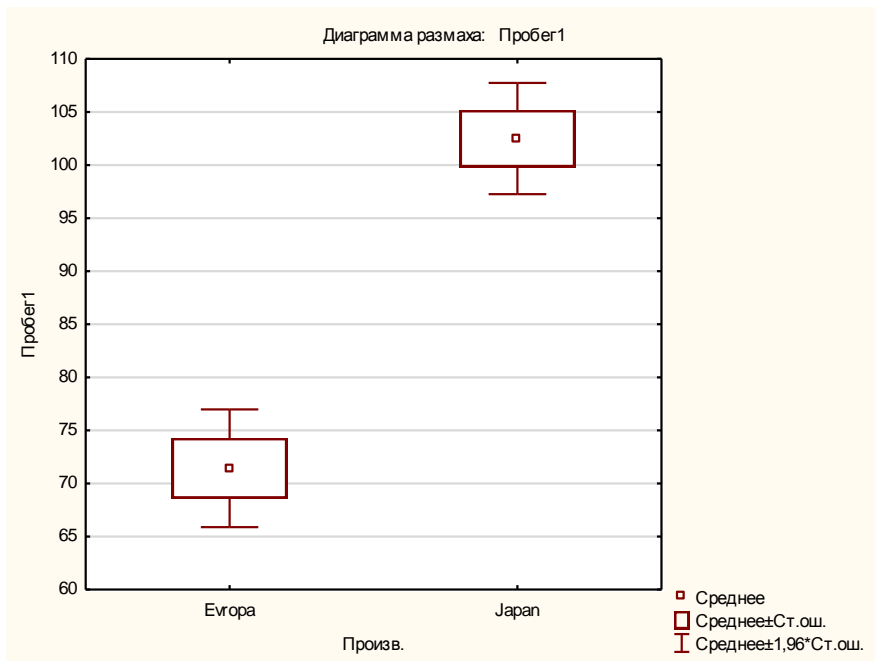


Откроется таблица с результатами анализа (рис.7). По данным таблицы, учитывая что уровни значимости p критерия Стьюдента для всех переменных $<0,05$, можно сделать вывод, что средние отличаются статистически значимо, т.е. не верна гипотеза о равенстве средних генеральных совокупностей. Вывод статистически достоверен, так как верна гипотеза о равенстве дисперсий (p *Variances* значительно больше, чем 0,05).

Variable	T-tests; Grouping: Произв. (Auto)								
	Group 1: Europe								
	Group 2: Japan								
	Mean Europe	Mean Japan	t-value	df	p	Std.Dev Europe	Std.Dev Japan	F-ratio Variances	p Variances
Пробег1	71,43	102,50	-7,98	13	0,00	7,48	7,56	1,02	1,00
Пробег2	250,71	304,38	-7,81	13	0,00	14,27	12,37	1,33	0,71
Пробег3	232,86	295,00	-5,71	13	0,00	9,51	27,26	8,21	0,02

Рис.7

Если щелкнуть по кнопке **Box & whisker plot** программа построит диаграммы размаха для всех выбранных переменных



- По аналогии можно проверить, равны ли средние пробега автомобилей до первой серьезной поломки, до капитального ремонта двигателя и после капитального ремонта для автомобилей с разными типами топлива.
- Для этого определите группирующую переменную *Тип. топл.* и выберите коды P и D , P и $G+P$, $G+P$ и D . Щелкните кнопкой **Summary: t-tests**, откроется таблица с результатами анализа (рис.8). По данным таблицы можно сделать вывод, что средние не отличаются статистически значимо для P и D , D и $G+P$ при справедливости гипотезы о равенстве дисперсий.

Variable	T-tests; Grouping: Тип.топл. (Avto1)							
	Group 1: P							
	Group 2: D							
	Mean P	Mean D	t-value	p	Std.Dev .	Std.Dev .	F-ratio Variances	p Variances
Пробег1	77,00	88,00	-0,91	0,39	19,87	18,23	1,19	0,87
Пробег2	256,00	282,00	-1,36	0,21	31,30	29,28	1,14	0,90
Пробег3	244,00	274,00	-1,07	0,31	37,15	50,30	1,83	0,57

Переменная	Т-критерии; Группир.: Тип.топл. (Avto1)								
	Группа 1:Р, Группа 2:G+P								
	Среднее Р	Среднее G+P	t-знач.	p	Ст.откл. Р	Ст.откл. G+P	F-отн. дисперс.	p дисперс.	
Пробег1	77,0000	99,0000	-2,31900	0,048	19,874	7,416	7,1818	0,0823	
Пробег2	256,0000	300,0000	-2,86416	0,021	31,304	14,142	4,9000	0,1528	
Пробег3	244,0000	280,0000	-2,02516	0,077	37,148	14,142	6,9000	0,0880	

Переменная	Т-критерии; Группир.: Тип.топл. (Avto1)								
	Группа 1:D, Группа 2:G+P								
	Среднее D	Среднее G+P	t-знач.	p	Ст.откл. D	Ст.откл. G+P	F-отн. дисперс.	p дисперс.	
Пробег1	88,0000	99,0000	-1,24952	0,246	18,234	7,416	6,04	0,109	
Пробег2	282,0000	300,0000	-1,23771	0,250	29,283	14,142	4,28	0,187	
Пробег3	274,0000	280,0000	-0,25678	0,803	50,299	14,142	12,65	0,030	

• Рассмотрим реализацию второго метода: **t-test, independent, by variables**. Если предположить, что значения величин пробега в столбцах *Пробег2* и *Пробег3* получены по разным выборкам (тестировались различные группы автомобилей), то для сравнения средних можно применить указанную процедуру. После выбора этой команды откроется рабочее окно модуля. Укажите имена анализируемых переменных и щелкните по **ОК**. По данным таблицы результатов можно сделать вывод, что верна гипотеза о равенстве средних, при этом также верна гипотеза о равенстве дисперсий. Ранее при использовании процедуры **t-test, dependent samples** был получен противоположный результат. Такое несоответствие результатов как раз и объясняется дисперсиями величин пробега в анализируемых группах. При применении модуля **t-test, dependent samples** эти дисперсии не учитываются, и получается более верный результат.

Group 1 vs. Group 2	T-test for Independent Samples (t)							
	Note: Variables were treated as independent samples							
	Mean Group 1	Mean Group 2	t-val	p	Std.Dev Group 1	Std.Dev Group 2	F-ratio Variance	p Variance
Пробег2 vs. Пробег3	279,35	262,67	1,47	0,15	30,52	31,73	1,08	0,89

Запишем столбец 3 (Пробег 1) в виде двух столбцов – столбец 6 и 7 отдельно для Европейских и японских авто (рис.2) и применим критерий **t-test, independent, by variables**. Как видно из таблицы результатов, они полностью совпали с данными первой строки таблицы на рис.7 применения метода **t-test, independent, by groups**.

	Т-критерий независимых выборок (Auto1)										
	Замечание: Переменные рассм. как независимые выборки										
Группа 1 и Группа 2	Среднее Группа 1	Среднее Группа 2	t-знач.	сс	р	N набл. Группа 1	N набл. Группа 2	Ст.откл. Группа 1	Ст.откл. Группа 2	F-отн. дисперс.	р дисперс.
Пробег 1 Европа vs. Пробег 1 Japan	71,42857	102,5000	-7,98044	13	0,000002	7	8	7,480132	7,559289	1,021277	0,995853

Рассмотрим реализацию четвертого метода — процедуру **t-test, single samples** (простые выборки). Предположим известно, что в среднем авто японского производства проходят 120 тыс.км. без обращения в ремонтную мастерскую. Проверим гипотезу, что средний пробег японских авто из выборки не отличается статистически значимо от указанного среднего. Из таблицы на следующем слайде следует, что отличие статистически значимо, а именно, средний пробег авто нашей выборки (102,5) статистически значимо меньше, чем среднее (120) в генеральной совокупности.

Опция «Сравнить все средние со значением пользователя» работает примерно также

Одновыборочный t-критерий: Avto1

Переменные: Пробег1

Быстрый

Дополнительно

Опции

И-критерии

Ожидаемые средние

Сравнить все средние со значением: 120

Сравнить все средние со значениями пользователя

Задать

Диаграммы размаха

OK

Отмена

Опции

По Группам

SELECT CASES

В

Взвешенные моменты

Условия выбора наблюдений Анализа/Графика

Используются условия выбора наблюдений Анализа/Графика

Задать источник

Использовать условия выбора

Просмотр переменных:

Очистить все

Включить наблюдения

Все наблюдения

Заданные:

По выражению: v1=1

Функции

Номерами:

Переменная	Сравнение выборочных средних с ожидаемым(и) (Avto1)Условие включения: v1=1							
	Среднее	Стд.откл	N	Стд.ош.	Ожидаемое среднее	t-знач.	Ст.св.	p
Пробег1	102,5000	7,559289	8	2,672612	120,0000	-6,54790	7	0,000319