Задача: решить задачу Коши системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -49y_1 + 125y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 20y_1 - 49y_2. \end{cases} ; \begin{cases} y_1(0) = A, \\ y_2(0) = B. \end{cases} ; 0 < x < D = 1.$$

Сначала построим аналитическое решение задачи(просто потому что можем):

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -49 & 125 \\ 20 & -49 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Ищем собственные значения и собственные вектора матрицы:

$$\begin{vmatrix} -49-\lambda & 125 \\ 20 & -49-\lambda \end{vmatrix} = (49+\lambda)^2 - 2500 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1, -99.$$

Откуда $\mathbf{h_1} = (5, 2)^T$; $\mathbf{h_2} = (5, -2)^T$.
Общее решение системы запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \mathbf{h_1} e^x + C_2 \mathbf{h_2} e^{-99x}.$$

С учетом граничных условий:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left(\frac{A}{10} - \frac{B}{4}\right) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-99x} + \left(\frac{A}{10} + \frac{B}{4}\right)\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} e^x.$$

Теперь о численном методе. Я использовал классический метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Он задается таблицей Бутчера:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1/2 | 1/2 | 0 | 0 | 0 |
| 1/2 | 0 | 1/2 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | 1/6 | 1/3 | 1/3 | 1/6 |

Видно, что для этого метода выполняются соотношения Кутты:

$$c_j = \sum_{k=1}^{s} a_{jk},$$

а потому условия аппроксимации имеют вид:
для 1-го порядка:

$$\sum_{j=1}^{s} b_j = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

для второго:

$$\sum_{j=1}^{s} b_j c_j = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

для третьего:

$$\sum_{j=1}^{s} b_j c_j^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} b_j a_{jk} c_k = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

для четвертого:

$$\sum_{j=1}^{s} b_j c_j^3 = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} b_j a_{jk} c_j c_k = \frac{1}{24} + \frac{1}{12} = \frac{1}{8}$$

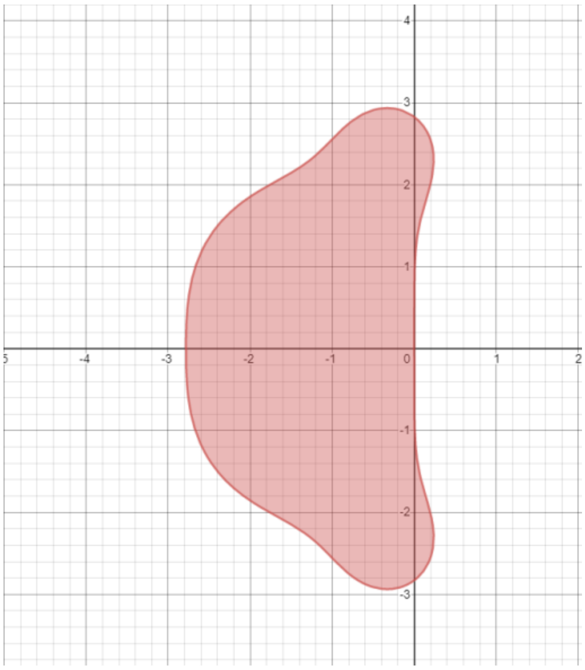
$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} b_j a_{jk} c_k^2 = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$

$$\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{s} b_j a_{jk} a_{kl} c_l = \frac{1}{24} = \frac{1}{24}$$

Видно, что все они выполняются.
Метод явный, 4-х стадийный, с 4 порядком аппроксимации, поэтому функция устойчивости для него имеет вид:

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}.$$

Область устойчивости выглядит так:



То есть на действительной оси $-2.7855 < z < 0$.
$z = \lambda h$, откуда зная наши $\lambda$ найдем $h$. В этой задаче метод устойчив при $h \leq 0.02814$.
Здесь и далее — результаты вычислений на сетках с последовательно уменьшающимся шагом. Для определенности выбраны A = 1, B = 1.

h = 0.1

| $i$ | $x_i$ | $y_1(x_i)$ | $[y_1]_{x_i}$ | $\lvert[y_1]_{x_i} - y_1(x_i)\rvert$ | $y_2(x_i)$ | $[y_2]_{x_i}$ | $\lvert[y_2]_{x_i} - y_2(x_i)\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | -207.043579 | 1.93401148 | 208.977591 | 84.3646708 | 0.773634695 | 83.5910361 |
| 2 | 0.2 | -58226.728 | 2.13745482 | 58228.8654 | 23292.4011 | 0.854981931 | 23291.5462 |
| 3 | 0.3 | -16224704.5 | 2.36225291 | 16224706.9 | 6489883.71 | 0.944901165 | 6489882.76 |
| 4 | 0.4 | -4.52080102e+09 | 2.61069322 | 4.52080102e+09 | 1.80832041e+09 | 1.04427729 | 1.80832041e+09 |
| 5 | 0.5 | -1.2596617e+12 | 2.88526222 | 1.2596617e+12 | 5.0386468e+11 | 1.15410489 | 5.0386468e+11 |
| 6 | 0.6 | -3.50988152e+14 | 3.1887079 | 3.50988152e+14 | 1.40395261e+14 | 1.27548316 | 1.40395261e+14 |
| 7 | 0.7 | -9.77982288e+16 | 3.52406724 | 9.77982288e+16 | 3.91192915e+16 | 1.4096269 | 3.91192915e+16 |
| 8 | 0.8 | -2.72501892e+19 | 3.89469662 | 2.72501892e+19 | 1.09000757e+19 | 1.55787865 | 1.09000757e+19 |

h = 0.05

| $i$ | $x_i$ | $y_1(x_i)$ | $[y_1]_{x_i}$ | $\lvert [y_1]_{x_i} - y_1(x_i)\rvert$ | $y_2(x_i)$ | $[y_2]_{x_i}$ | $\lvert [y_2]_{x_i} - y_2(x_i)\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.1 | -126.816853 | 1.93401148 | 128.750865 | 52.2739806 | 0.773634695 | 51.500346 |
| 4 | 0.2 | -22100.2557 | 2.13745482 | 22102.3932 | 8841.81226 | 0.854981931 | 8840.95728 |
| 6 | 0.3 | -3794268.4 | 2.36225291 | 3794270.76 | 1517709.25 | 0.944901165 | 1517708.31 |
| 8 | 0.4 | -651354378 | 2.61069322 | 651354380 | 260541753 | 1.04427729 | 260541752 |
| 10 | 0.5 | -1.11816619e+11 | 2.88526222 | 1.11816619e+11 | 4.47266476e+10 | 1.15410489 | 4.47266476e+10 |
| 12 | 0.6 | -1.91953208e+13 | 3.1887079 | 1.91953208e+13 | 7.67812833e+12 | 1.27548316 | 7.67812833e+12 |
| 14 | 0.7 | -3.29521984e+15 | 3.52406724 | 3.29521984e+15 | 1.31808794e+15 | 1.4096269 | 1.31808794e+15 |
| 16 | 0.8 | -5.65683372e+17 | 3.89469662 | 5.65683372e+17 | 2.26273349e+17 | 1.55787865 | 2.26273349e+17 |
| 18 | 0.9 | -9.71096595e+19 | 4.30430544 | 9.71096595e+19 | 3.88438638e+19 | 1.72172218 | 3.88438638e+19 |

h = 0.025

| $i$ | $x_i$ | $y_1(x_i)$ | $[y_1]_{x_i}$ | $\lvert [y_1]_{x_i} - y_1(x_i)\rvert$ | $y_2(x_i)$ | $[y_2]_{x_i}$ | $\lvert [y_2]_{x_i} - y_2(x_i)\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 0.1 | 1.82000154 | 1.93401148 | 0.11400994 | 0.819238671 | 0.773634695 | 0.0456039755 |
| 8 | 0.2 | 2.12011236 | 2.13745482 | 0.0173424639 | 0.861918916 | 0.854981931 | 0.00693698447 |
| 12 | 0.3 | 2.35961576 | 2.36225291 | 0.00263715684 | 0.945956026 | 0.944901165 | 0.00105486093 |
| 16 | 0.4 | 2.6102922 | 2.61069322 | 0.000401018092 | 1.04443769 | 1.04427729 | 0.000160404573 |
| 20 | 0.5 | 2.88520124 | 2.88526222 | 6.09842785e-05 | 1.15412928 | 1.15410489 | 2.4390032e-05 |
| 24 | 0.6 | 3.18869862 | 3.1887079 | 9.27887859e-06 | 1.27548687 | 1.27548316 | 3.70667177e-06 |
| 28 | 0.7 | 3.52406582 | 3.52406724 | 1.41791514e-06 | 1.40962746 | 1.4096269 | 5.60874389e-07 |
| 32 | 0.8 | 3.8946964 | 3.89469662 | 2.24350502e-07 | 1.55787873 | 1.55787865 | 8.17934953e-08 |
| 36 | 0.9 | 4.3043054 | 4.30430544 | 4.49553506e-08 | 1.72172219 | 1.72172218 | 8.1018614e-09 |

h = 0.0125

| $i$ | $x_i$ | $y_1(x_i)$ | $[y_1]_{x_i}$ | $\lvert [y_1]_{x_i} - y_1(x_i)\rvert$ | $y_2(x_i)$ | $[y_2]_{x_i}$ | $\lvert [y_2]_{x_i} - y_2(x_i)\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 0.1 | 1.93398503 | 1.93401148 | 2.64473016e-05 | 0.773645274 | 0.773634695 | 1.05788895e-05 |
| 16 | 0.2 | 2.13745482 | 2.13745482 | 3.67264885e-09 | 0.854981933 | 0.854981931 | 1.40020207e-09 |
| 24 | 0.3 | 2.36225291 | 2.36225291 | 1.43058898e-10 | 0.944901165 | 0.944901165 | 5.69250203e-11 |
| 32 | 0.4 | 2.61069322 | 2.61069322 | 2.10256257e-10 | 1.04427729 | 1.04427729 | 8.41029468e-11 |
| 40 | 0.5 | 2.88526222 | 2.88526222 | 2.904601e-10 | 1.15410489 | 1.15410489 | 1.16184173e-10 |
| 48 | 0.6 | 3.1887079 | 3.1887079 | 3.85209198e-10 | 1.27548316 | 1.27548316 | 1.54084301e-10 |
| 56 | 0.7 | 3.52406724 | 3.52406724 | 4.9667559e-10 | 1.4096269 | 1.4096269 | 1.98670191e-10 |
| 64 | 0.8 | 3.89469662 | 3.89469662 | 6.27327523e-10 | 1.55787865 | 1.55787865 | 2.50931276e-10 |
| 72 | 0.9 | 4.30430544 | 4.30430544 | 7.79971643e-10 | 1.72172218 | 1.72172218 | 3.11988213e-10 |

h = 0.00625

| $i$ | $x_i$ | $y_1(x_i)$ | $[y_1]_{x_i}$ | $\lvert [y_1]_{x_i} - y_1(x_i)\rvert$ | $y_2(x_i)$ | $[y_2]_{x_i}$ | $\lvert [y_2]_{x_i} - y_2(x_i)\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 0.1 | 1.9340107 | 1.93401148 | 7.72196416e-07 | 0.773635004 | 0.773634695 | 3.08876611e-07 |
| 32 | 0.2 | 2.13745482 | 2.13745482 | 8.36917202e-11 | 0.854981931 | 0.854981931 | 2.91509039e-11 |
| 48 | 0.3 | 2.36225291 | 2.36225291 | 8.97015795e-12 | 0.944901165 | 0.944901165 | 3.58313379e-12 |
| 64 | 0.4 | 2.61069322 | 2.61069322 | 1.32081013e-11 | 1.04427729 | 1.04427729 | 5.28377342e-12 |
| 80 | 0.5 | 2.88526222 | 2.88526222 | 1.82454052e-11 | 1.15410489 | 1.15410489 | 7.29838412e-12 |
| 96 | 0.6 | 3.1887079 | 3.1887079 | 2.41966447e-11 | 1.27548316 | 1.27548316 | 9.67914637e-12 |
| 112 | 0.7 | 3.52406724 | 3.52406724 | 3.11990433e-11 | 1.4096269 | 1.4096269 | 1.24795729e-11 |
| 128 | 0.8 | 3.89469662 | 3.89469662 | 3.94058119e-11 | 1.55787865 | 1.55787865 | 1.57625024e-11 |
| 144 | 0.9 | 4.30430544 | 4.30430544 | 4.89981389e-11 | 1.72172218 | 1.72172218 | 1.95989891e-11 |

h = 0.003125

| $i$ | $x_i$ | $y_1(x_i)$ | $[y_1]_{x_i}$ | $\lvert [y_1]_{x_i} - y_1(x_i)\rvert$ | $y_2(x_i)$ | $[y_2]_{x_i}$ | $\lvert [y_2]_{x_i} - y_2(x_i)\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 32 | 0.1 | 1.93401144 | 1.93401148 | 3.68498603e-08 | 0.77363471 | 0.773634695 | 1.4739823e-08 |
| 64 | 0.2 | 2.13745482 | 2.13745482 | 4.03899136e-12 | 0.854981931 | 0.854981931 | 1.34448008e-12 |
| 96 | 0.3 | 2.36225291 | 2.36225291 | 5.61328761e-13 | 0.944901165 | 0.944901165 | 2.24043006e-13 |
| 128 | 0.4 | 2.61069322 | 2.61069322 | 8.26894109e-13 | 1.04427729 | 1.04427729 | 3.31290551e-13 |
| 160 | 0.5 | 2.88526222 | 2.88526222 | 1.139977e-12 | 1.15410489 | 1.15410489 | 4.56301663e-13 |
| 192 | 0.6 | 3.1887079 | 3.1887079 | 1.51079149e-12 | 1.27548316 | 1.27548316 | 6.04849504e-13 |
| 224 | 0.7 | 3.52406724 | 3.52406724 | 1.94821936e-12 | 1.4096269 | 1.4096269 | 7.79376563e-13 |
| 256 | 0.8 | 3.89469662 | 3.89469662 | 2.46158649e-12 | 1.55787865 | 1.55787865 | 9.84767823e-13 |
| 288 | 0.9 | 4.30430544 | 4.30430544 | 3.06421555e-12 | 1.72172218 | 1.72172218 | 1.22524213e-12 |

h = 0.0015625

| $i$ | $x_i$ | $y_1(x_i)$ | $[y_1]_{x_i}$ | $\lvert [y_1]_{x_i} - y_1(x_i) \rvert$ | $y_2(x_i)$ | $[y_2]_{x_i}$ | $\lvert [y_2]_{x_i} - y_2(x_i) \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 64 | 0.1 | 1.93401147 | 1.93401148 | 2.01547246e-09 | 0.773634696 | 0.773634695 | 8.06182676e-10 |
| 128 | 0.2 | 2.13745482 | 2.13745482 | 2.22488694e-13 | 0.854981931 | 0.854981931 | 7.28306304e-14 |
| 192 | 0.3 | 2.36225291 | 2.36225291 | 3.37507799e-14 | 0.944901165 | 0.944901165 | 1.3211654e-14 |
| 256 | 0.4 | 2.61069322 | 2.61069322 | 4.97379915e-14 | 1.04427729 | 1.04427729 | 2.04281037e-14 |
| 320 | 0.5 | 2.88526222 | 2.88526222 | 6.75015599e-14 | 1.15410489 | 1.15410489 | 2.68673972e-14 |
| 384 | 0.6 | 3.1887079 | 3.1887079 | 8.83737528e-14 | 1.27548316 | 1.27548316 | 3.5971226e-14 |
| 448 | 0.7 | 3.52406724 | 3.52406724 | 1.14130927e-13 | 1.4096269 | 1.4096269 | 4.57411886e-14 |
| 512 | 0.8 | 3.89469662 | 3.89469662 | 1.44328993e-13 | 1.55787865 | 1.55787865 | 5.77315973e-14 |
| 576 | 0.9 | 4.30430544 | 4.30430544 | 1.82964754e-13 | 1.72172218 | 1.72172218 | 7.3052675e-14 |

h = 0.00078125

| $i$ | $x_i$ | $y_1(x_i)$ | $[y_1]_{x_i}$ | $\lvert [y_1]_{x_i} - y_1(x_i) \rvert$ | $y_2(x_i)$ | $[y_2]_{x_i}$ | $\lvert [y_2]_{x_i} - y_2(x_i) \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 128 | 0.1 | 1.93401148 | 1.93401148 | 1.1132717e-10 | 0.773634695 | 0.773634695 | 4.45321557e-11 |
| 256 | 0.2 | 2.13745482 | 2.13745482 | 1.15463195e-14 | 0.854981931 | 0.854981931 | 4.6629367e-15 |
| 384 | 0.3 | 2.36225291 | 2.36225291 | 0 | 0.944901165 | 0.944901165 | 4.4408921e-16 |
| 512 | 0.4 | 2.61069322 | 2.61069322 | 8.8817842e-16 | 1.04427729 | 1.04427729 | 4.4408921e-16 |
| 640 | 0.5 | 2.88526222 | 2.88526222 | 4.4408921e-16 | 1.15410489 | 1.15410489 | 2.22044605e-16 |
| 768 | 0.6 | 3.1887079 | 3.1887079 | 1.33226763e-15 | 1.27548316 | 1.27548316 | 8.8817842e-16 |
| 896 | 0.7 | 3.52406724 | 3.52406724 | 1.77635684e-15 | 1.4096269 | 1.4096269 | 6.66133815e-16 |
| 1024 | 0.8 | 3.89469662 | 3.89469662 | 1.77635684e-15 | 1.55787865 | 1.55787865 | 6.66133815e-16 |
| 1152 | 0.9 | 4.30430544 | 4.30430544 | 8.8817842e-16 | 1.72172218 | 1.72172218 | 8.8817842e-16 |

Видно, что пока мы не достигли рассчитаного значения $h$, необходимого для устойчивости, погрешность была большой. Однако затем решение к чему-то сошлось. Для демонстрации — сравнение с графиком аналитического решения.