Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

где $x \in [0, L]$, $t \in [0, T]$. Решим его методом разрывного Галеркина. Для начала разобьем область в пространстве на отрезки:

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{N} \omega_i, \qquad \omega_i = [x_i, x_{i+1}]$$

и перейдем в пространство многочленов степени не выше k:

$$V_h = \{v : v|_{\omega_i} \in P^k(\omega_i)\}$$

Домножим исходное уравнение на некоторую $v_h \in V_h$ и проинтегрируем по Ω:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v_h dx + a \int\limits_{\Omega} v_h \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0$$

На i-м отрезке:

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial u}{\partial t} v_h dx + a \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} v_h \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0$$

Проинтегрируем по частям:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} u v_h dx + a[v_h(x_{i+1})\hat{u}(x_{i+1}) - v_h(x_i)\hat{u}(x_i)] - a\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} u\frac{\partial v_h}{\partial x} dx = 0$$

Здесь $\hat{u}(x_i) = g(x_{Li}, x_{Ri})$ — численный поток — некоторая функция от значений u слева и справа от x_i.

Разложим функции u и v_h по полиномам Лежандра:

$$u(x,t) = \sum_{\alpha=0}^{k} u_\alpha(t)\varphi_\alpha(x)$$

$$v_h(x) = \sum_{\alpha=0}^{k} v_\alpha \varphi_\alpha(x)$$

Тогда получим:

$$\frac{d}{dt}\sum_{\alpha,\nu} u_\alpha(t) v_\nu \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_\alpha(x)\varphi_\nu(x)dx + a[v_h(x_{i+1})\hat{u}(x_{i+1}) - v_h(x_i)\hat{u}(x_i)] - a\sum_{\alpha,\nu} u_\alpha(t) v_\nu \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_\alpha(x)\varphi'_\nu(x)dx = 0$$

Введем

$$M_{\alpha\nu} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_\alpha(x)\varphi_\nu(x)dx$$

$$K_{\alpha\nu} = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_\alpha(x)\varphi'_\nu(x)dx$$

Отобразим на отрезок $[-1, 1]$:

$$x = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\hat{x} + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$$

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_\alpha \varphi_\nu dx = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \int\limits_{-1}^{1} \hat{\varphi_\alpha} \hat{\varphi_\nu} d\hat{x},$$

где

$$\hat{\varphi_\alpha}(\hat{x}) = \varphi_\alpha \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \hat{x} + \frac{x_{i+1} + x_i}{2} \right)$$

Аналогично получим

$$\hat{K_{\alpha\nu}} = \int\limits_{-1}^{1} \hat{\varphi_\alpha} \hat{\varphi_\nu'} d\hat{x}$$

Эти элементы вычисляются по квадратурным формклам Гаусса-Лежандра. Также, в сиу ортогональности базисных функций, матрица $\hat{M}$ получается диагональной:

$$\hat{M} = diag \left\{ \int\limits_{-1}^{1} \hat{\varphi_0}^2 d\hat{x}, ..., \int\limits_{-1}^{1} \hat{\varphi_k}^2 d\hat{x} \right\}$$

Чтобы переписать член $a[v_h(x_{i+1})\hat{u}(x_{i+1}) - v_h(x_i)\hat{u}(x_i)]$ рассмотрим отображение отрезка $[-1, 1]$ на отрезок $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\hat{x} = \frac{2(x - x_i)}{x_{i+1} - x_i} - 1$$

$$\varphi_\alpha(x_{i+1}) = \hat{\varphi_\alpha} \left(\frac{2(x_{i+1} - x_i)}{x_{i+1} - x_i} - 1 \right) = \hat{\varphi_\alpha}(1) = 1$$

$$\varphi_\alpha(x_i) = \hat{\varphi_\alpha} \left(\frac{2(x_i - x_i)}{x_{i+1} - x_i} - 1 \right) = \hat{\varphi_\alpha}(-1) = (-1)^\alpha$$

Введем векторы

$$V = (v_0, v_1, ..., v_k)^T$$
$$U = (u_0, ..., u_k)^T$$
$$G = (\hat{u}(x_{i+1} + \hat{u}(x_i), ..., \hat{u}(x_{i+1}) + (-1)^\alpha \hat{u}(x_i), ..., \hat{u}(x_{i+1}) + (-1)^k \hat{u}(x_i))^T$$

Тогда выражение $a[v_h(x_{i+1})\hat{u}(x_{i+1}) - v_h(x_i)\hat{u}(x_i)]$ примет вид $V^T G$.
Выражения вида

$$\sum_{\alpha\nu} u_\alpha v_\nu \hat{M_{\alpha\nu}}$$

можно записать как $V^T \hat{M} U$; итого имеем нашу схему в векторном виде:

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \frac{d}{dt} V^T \hat{M} U + a V^T G - a V^T \hat{K} U = 0,$$

верное для любого V, что значит

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \frac{d}{dt} \hat{M} U + a G - a \hat{K} U = 0.$$

Пусть $C_i = \frac{2}{x_{i+1} - x_i}$, тогда на i-м отрезке:

$$\frac{d}{dt} U_i = C_i a \hat{M}^{-1} \hat{K} U_i - C_i a \hat{M}^{-1} G_i.$$

Это выражение и задает численный метод. Интегрирование по времени производится методом Рунге-Кутты 4-го порядка.
Начальные условиия задаются как:

$$u_\alpha^{(i)}(x, 0) = \int\limits_{-1}^{1} u(\hat{x}, 0) \hat{\varphi_\alpha} \hat{x} d\hat{x}.$$

Для положительных a выберем $\hat{u}(x_i)$ как $u(x_{Li})$.