Рассмотрим уравнение:
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$
с некоторым заданным начальным условием $u(x,0)$. Здесь $x \in [0,L]$, $t \in [0,T]$. Решим его методом разрывного Галеркина. Для начала разобьем область в пространстве на отрезки

$$\Omega = \bigcup_{\nu=0}^{N} \omega_\nu, \qquad \omega_\nu = [x_\nu, x_{\nu+1}],$$

и перейдем в пространство многочленов степени не выше p на отрезке ω_ν. Пусть в этом пространстве выбран некоторый базис $\varphi_l^{(\nu)}(x)$, где $l = 0,1,...,p$. Тогда нашу неизвестную функцию мы может разложить по этому базису с зависящими от времени коэффициентами $\hat{u}_l^{(\nu)}$:

$$u_h^{(\nu)}(x,t) = \hat{u}_l^{(\nu)}(t)\varphi_l^{(\nu)}(x).$$

Здесь как $u_h^{(\nu)}(x,t)$ мы обозначили конечномерную аппроксимацию исходной функции на некотором отрезке. Подставим ее в исходное уравнение:

$$\frac{\partial u_h^{(\nu)}}{\partial t} + a\frac{\partial u_h^{(\nu)}}{\partial x} = \Delta^{(\nu)}(x,t),$$

где $\Delta^{(\nu)}(x,t)$ — невязка, связанная с переходом к конечномерной аппроксимации. Семейство методов Галеркина строится на том, что эта невязка должна быть ортогональна выбранным нами ранее базисным функциям; поэтому, умножим обе части уравнения на $\varphi_k^{(\nu)}$ и проинтегрируем по ν-му отрезку:
$$\int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_k^{(\nu)}\frac{\partial u_h^{(\nu)}}{\partial t}dx + a\int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_k^{(\nu)}\frac{\partial u_h^{(\nu)}}{\partial x}dx = 0.$$
Второе слагаемое проинтегрируем по частям:

$$\int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_k^{(\nu)}\frac{\partial u_h^{(\nu)}}{\partial t}dx + a\varphi_k^{(\nu)}g^{(\nu)}|_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} - a\int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} u_h^{(\nu)}\frac{\partial \varphi_k^{(\nu)}}{\partial x}dx = 0.$$

В граничных точках отрезка решение определено не однозначно; допускается разрыв, поэтомы мы вводим функцию $g^{(\nu)}(x)$; она является некоторой функцией от значений u_L, u_R, где $u_R = u(x_\nu - 0), u_R = u(x_\nu + 0)$ — значений функции в пределе справа и слева от рассматриваемой точки. Грамотный выбор численного потока — та еще задача, связанная с решением задачи Римана, но, к счастью, для одномерного уравнения переноса можно спокойно выбрать $g^{(\nu)}(x) = u_L$ при a $>$ 0, и $g^{(\nu)}(x) = u_R$ при a $<$ 0.
Можно не считать интегралы от базисных функций на каждом отрезке, перейдя к отрезку $[-1;1]$ при помощи замены вида
$$x = \frac{x_{\nu+1} - x_\nu}{2}\xi + \frac{x_{\nu+1} + x_\nu}{2},$$
и обратной замены
$$\xi = \frac{2(x - x_\nu)}{x_{\nu+1} - x_\nu} - 1,$$
$$dx = \frac{x_{\nu+1} - x_\nu}{2}d\xi = Jd\xi \qquad (J = \frac{\partial x}{\partial \xi}).$$
Нужно выюрать новый базис $\varphi_k(\xi)$, определенный на отрезке $[-1;1]$. Теперь и разложение по базису будет немного другим:
$$u_h^{(\nu)}(t,\xi) = \tilde{u}_l^{(\nu)}(t)\varphi_l(\xi).$$

После этого перехода получим:

$$\frac{d\tilde{u}_l^{(\nu)}}{dt} J \int\limits_{-1}^{1} \varphi_l \varphi_k d\xi + a\varphi_k^{(\nu)} g^{(\nu)}|_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} - a\tilde{u}_l^{(\nu)} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \int\limits_{-1}^{1} \varphi_l \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi} d\xi = 0.$$

Введем такие обозначения:

$$M_{lk} = \int\limits_{-1}^{1} \varphi_l \varphi_k d\xi,$$

$$K_{lk} = \int\limits_{-1}^{1} \varphi_l \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi} d\xi.$$

Эти интегралы можно вычислить сразу для каждого отрезка при помощи, например, квадратурных формул Гаусса на необходимом количестве точек(помним, что квадратура Гаусса на n точках дает точный результат для полиномов степени не выше $2n-1$, а мы интегрируем полиномы степени до $2p$).
Раскроем, наконец, разность $\varphi_k^{(\nu)} g^{(\nu)}|_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}$ и обозначим ее как

$$G_k^{(\nu)} = \varphi_k^{(\nu)}(x_{\nu+1}) g^{(\nu)}(x_{\nu+1}) - \varphi_k^{(\nu)}(x_\nu) g^{(\nu)}(x_\nu).$$

В итоге численный метод принимает вид:

$$JM_{lk} \frac{d\tilde{u}_l^{(\nu)}}{dt} + aG_k^{(\nu)} - aK_{lk}\tilde{u}_l^{(\nu)} = 0,$$

$$\frac{d\tilde{u}_l^{(\nu)}}{dt} = \frac{a}{J} M_{lk}^{-1} \left(K_{lk}\tilde{u}_l^{(\nu)} - G_k^{(\nu)} \right).$$

(предположим, что с индексами тут все в порядке; вы же все прекрасно поняли, что тут происходит)
Получается обыкновенное дифференциальное уравнение, которое решается каким-нибудь из методов Рунге-Кутты.
Начальные коэффициенты задаются как:

$$\tilde{u}_l^{(\nu)}(0) = \frac{\int_{-1}^{1} u(\xi, 0)\varphi_l(\xi) d\xi}{\int_{-1}^{1} \varphi_l^2(\xi) d\xi}.$$

В качестве базиса на отрезке $[-1; 1]$ я выбрал полиномы Лежандра $P_n(x)$, а в качестве базиса на ν-м отрезке — $P_n\left(\frac{2(x-x_\nu)}{x_{\nu+1}-x_\nu} - 1\right)$. Так как они ортогональны, матрица M_{lk} является диагональной, что упрощает ее обращение.