TD 3 : Construction d'un estimateur

Exercice 1 : Estimation du paramètre d'une loi de Poisson

Le nombre de photons émis par une source céleste reçus sur un capteur dans un intervalle de temps fixé peut être modélisé par une loi de Poisson de paramètre λ : $P_Y[k] = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. On dispose de N réalisations indépendantes $\{y_n\}_{n=1\cdots N}$ d'une telle mesure Y et on cherche à estimer le paramètre λ.

1. Calculer la moyenne de la variable aléatoire Y et proposer un estimateur pour λ (méthode des moments).
2. Écrire la vraisemblance du paramètre λ : $L(\lambda;\underline{\boldsymbol{y}}) = P(\underline{\boldsymbol{y}}|\lambda)$.
3. En déduire l'expression de l'estimateur $\overset{o}{\lambda}_{\mathrm{MV}}$ maximisant cette vraisemblance (estimateur du maximum de vraisemblance).
4. Calculer le biais et la variance de cet estimateur.
5. Calculer la borne de Cramer-Rao pour un estimateur non biaisé de λ. L'estimateur du maximum de vraisemblance est-il de variance minimale ? Est-ce toujours le cas ?
6. Pour N grand, quelle est la loi de cet estimateur ?

On suppose maintenant *a priori* que λ suit une loi Gamma de paramètres α et β connus : $\lambda \sim \mathrm{Gamma}(\alpha,\beta)$, soit $f(\lambda) = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}$ avec $\Gamma(\cdot)$ la fonction Gamma donnant son nom à cette loi. Vous remarquerez qu'il existe deux paramétrisation de la loi Gamma, celle vue en cours, avec les paramètres k et θ et celle présentée ici avec les paramètres α et β. On sait que la moyenne de cette loi est en $E\{\lambda\} = \frac{\alpha}{\beta}$ et que la maximum de la loi est atteint pour $\lambda = \frac{\alpha-1}{\beta}$ lorsque $\alpha \geq 1$.

7. Écrire la loi *a posteriori* $f(\lambda|\underline{\boldsymbol{y}})$. Montrer que cette loi est également une loi $\mathrm{Gamma}(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})$ dont on précisera les paramètres $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$.
8. Écrire le critère à minimiser pour calculer l'estimateur du maximum *a posteriori* $\overset{o}{\lambda}_{\mathrm{MAP}}$. En déduire l'expression de l'estimateur $\overset{o}{\lambda}_{\mathrm{MAP}}$.
9. Quel est le lien entre cet estimateur $\overset{o}{\lambda}_{\mathrm{MAP}}$ et l'estimateur $\overset{o}{\lambda}_{\mathrm{MV}}$ lorsque $\alpha \to 1$ et $\beta \to 0$?
10. Donner l'expression de l'estimateur de la moyenne *a posteriori* $\overset{o}{\lambda}_{\mathrm{PM}}$.
11. Quel est le lien entre cet estimateur $\overset{o}{\lambda}_{\mathrm{PM}}$ et l'estimateur $\overset{o}{\lambda}_{\mathrm{MV}}$ lorsque $\alpha \to 1$ et $\beta \to 0$? Calculer le biais et la variance de cet estimateur…

Exercice 2 : Estimation des paramètres d'une loi gaussienne

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi gaussienne de moyenne θ et de variance σ_Y^2 et $\underline{\boldsymbol{y}}$ un vecteur constitué de N réalisations indépendantes $\{y_n\}_{n=1\ldots N}$ de la variable Y.

1. Par la méthode des moments, proposer un estimateur pour estimer les paramètres θ et σ_Y^2 à partir $\underline{\boldsymbol{y}}$.
2. Écrire la vraisemblance des paramètres σ_Y^2 à partir $\underline{\boldsymbol{y}}$: $L(\theta,\sigma_Y^2;\underline{\boldsymbol{y}}) = f(\underline{\boldsymbol{y}}|\theta,\sigma_Y^2)$.
3. Écrire l'anti-log-vraisemblance des paramètres θ et σ_Y^2 à partir $\underline{\boldsymbol{y}}$:
$$NLL(\theta,\sigma_Y^2;\underline{\boldsymbol{y}}) = -\log L(\theta,\sigma_Y^2;\underline{\boldsymbol{y}}).$$
4. Donner le système d'équations à résoudre pour minimiser l'anti-log-vraisemblance (annuler sa dérivée par rapport à θ et σ_Y^2). Est-il simple de calculer la solution de ce système ?

On s'intéresse par la suite uniquement à l'estimation du paramètre θ (ou de façon équivalente on considère que le paramètre σ_Y^2 est connu).

5. Calculer l'estimateur $\overset{o}{\theta}_{\mathrm{MV}}$ maximisant cette vraisemblance (estimateur du maximum de vraisemblance) ou de façon équivalent minimisant l'anti-log-vraisemblance.
6. Calculer le biais et la variance de cet estimateur.
7. Dans ce cadre, calculer la borne de Cramer-Rao pour un estimateur non biaisé de θ. L'estimateur du maximum de vraisemblance $\overset{o}{\theta}_{\mathrm{MV}}$ est-il de variance minimale ? Est-ce toujours le cas ?

On suppose maintenant *a priori* que θ suit une loi gaussienne de moyenne θ_0 et de variance σ^2 connus.

8. Écrire la loi *a posteriori* $f(\theta|\underline{\boldsymbol{y}})$.
9. Écrire le critère à minimiser pour calculer l'estimateur du maximum *a posteriori* $\overset{o}{\theta}_{\mathrm{MAP}}$. En déduire l'expression de l'estimateur $\overset{o}{\theta}_{\mathrm{MAP}}$.
10. Calculer le biais de cet estimateur…

Exercice 3 : MV pour des perturbations multiplicatives

Soit le modèle prenant en compte des perturbations multiplicatives : $y[n] = \phi_n(\underline{\boldsymbol{\theta}})\epsilon[n]$, où les $\epsilon[n]$ sont supposés gaussiens centrées *i.i.d.* de variance connue σ^2.

1. Exprimer la vraisemblance et le critère à minimiser pour calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance des paramètres $\underline{\boldsymbol{\theta}}$.
2. Exprimer ce critère dans le cas du débruitage, c'est-à-dire pour le modèle $y[n] = x[n]\epsilon[n]$ où l'on cherche à restituer le signal $x[n]$ à partir de ses valeurs mesurées bruitées $y[n]$. Quels sont les inconvénients d'un tel estimateur ?