

# Analyse spectrale des signaux et systèmes

[Shahram.Hosseini@irap.omp.eu](mailto:Shahram.Hosseini@irap.omp.eu)

Université Paul Sabatier  
M1 EEA-SIA2 et IdS-IM  
2024-2025

# **Plan du cours:**

Introduction

**Chapitre 1:** Rappel sur les outils pour la représentation fréquentielle des signaux

**Chapitre 2:** Analyse spectrale des signaux déterministes par TFD

**Chapitre 3:** Rappel sur les signaux aléatoires

**Chapitre 4:** Analyse spectrale des signaux aléatoires

**Chapitre 5:** Introduction à l'analyse temps-fréquence et temps-échelle

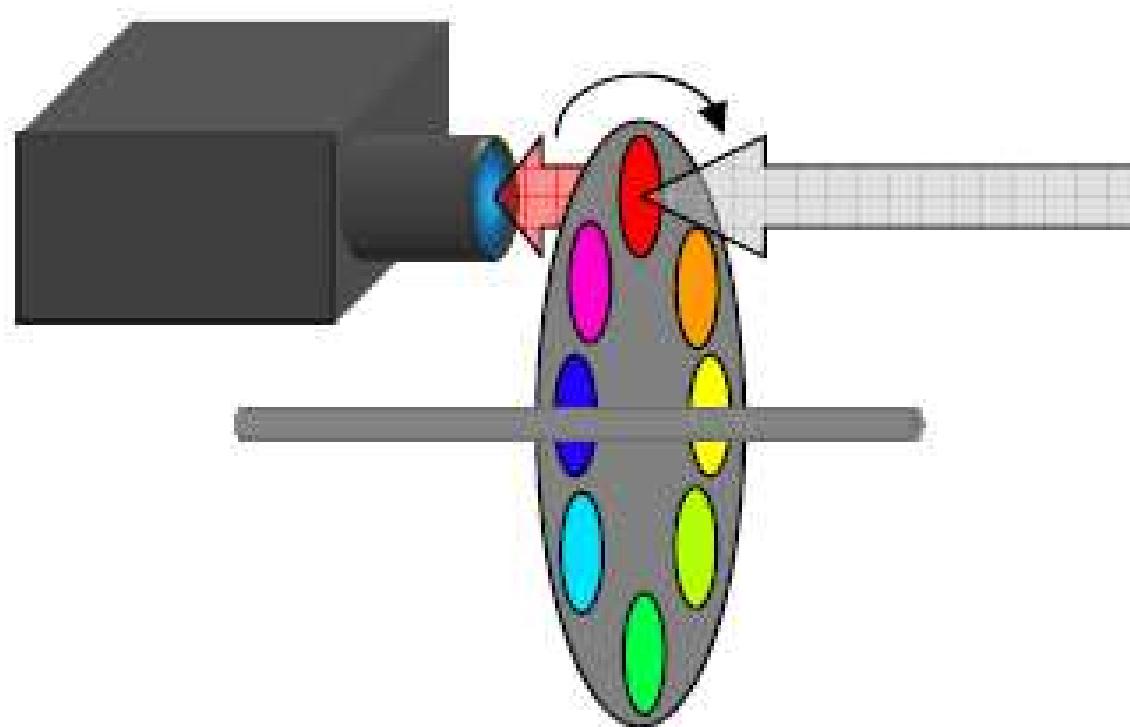
## **Exemple introductif: la notion de représentation spectrale en imagerie**

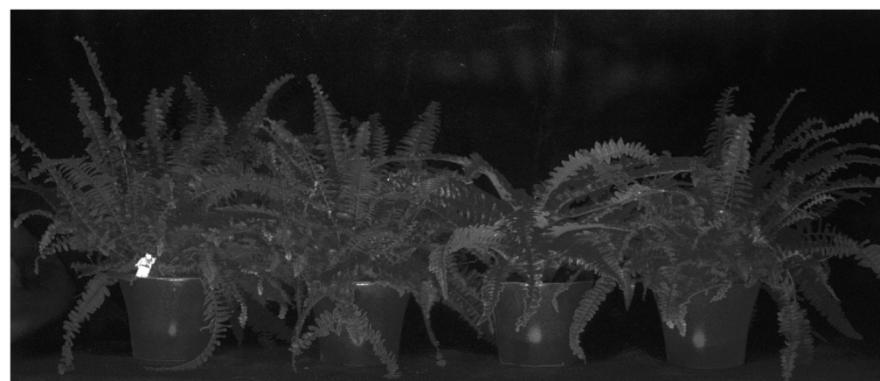
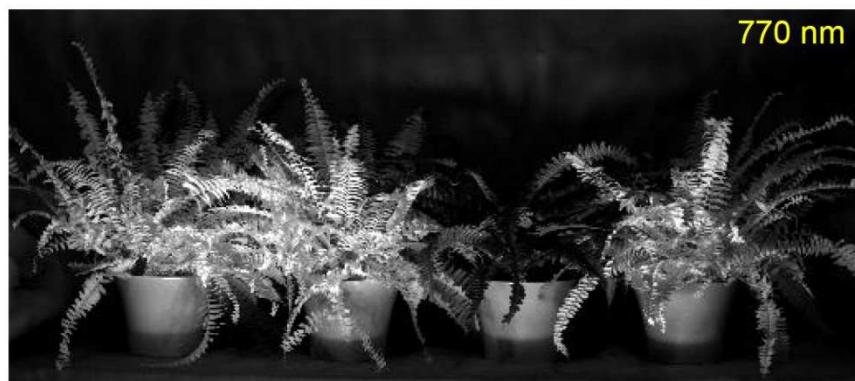
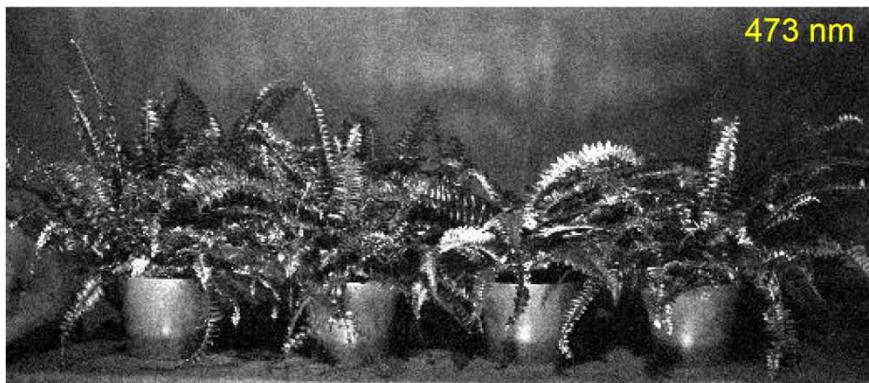
Trouver dans cette image:

- \* la plante artificielle
- \* le petit personnage en LEGO

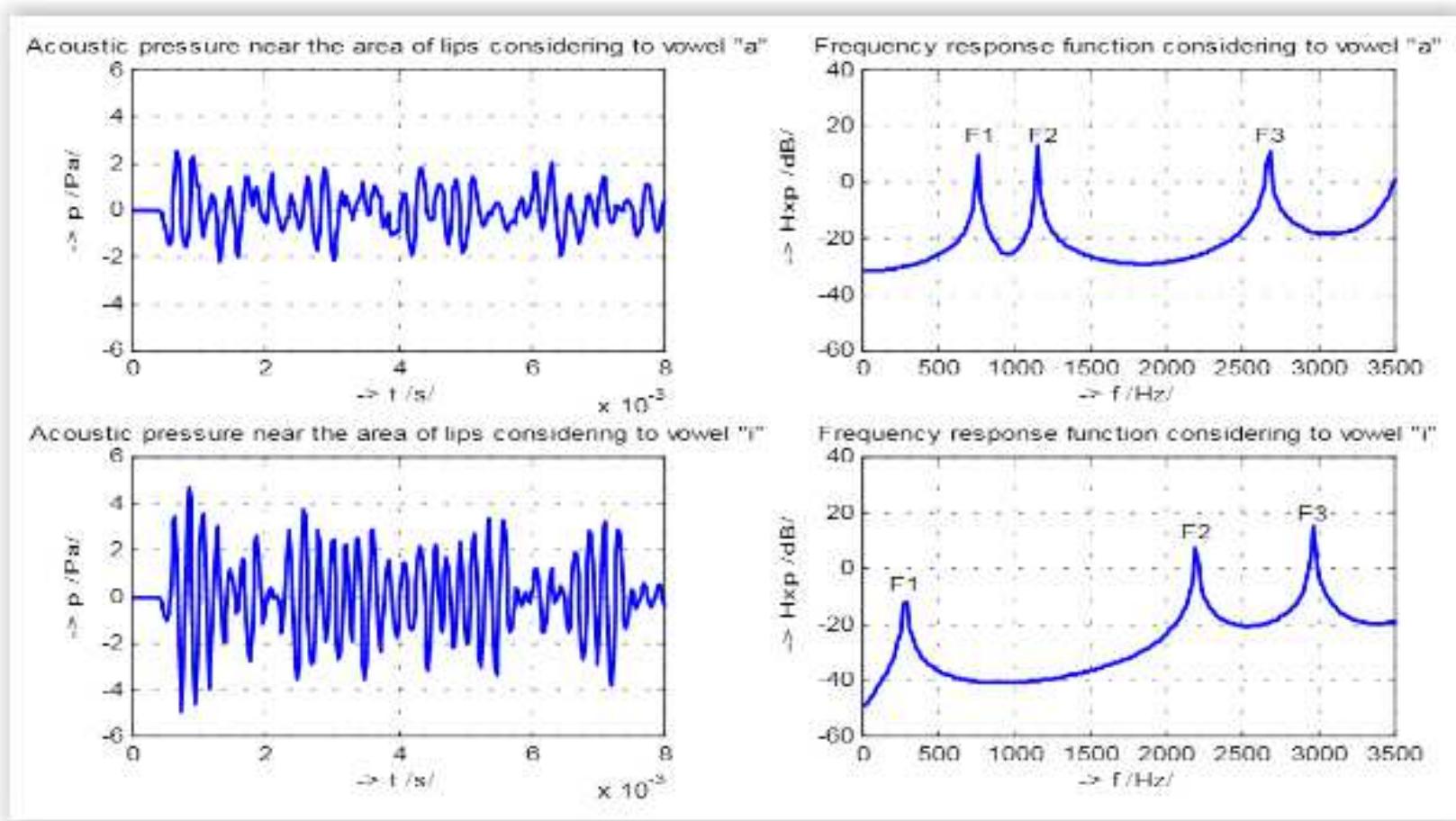


## Image observée en plusieurs bandes spectrales: Roue à filtres optiques



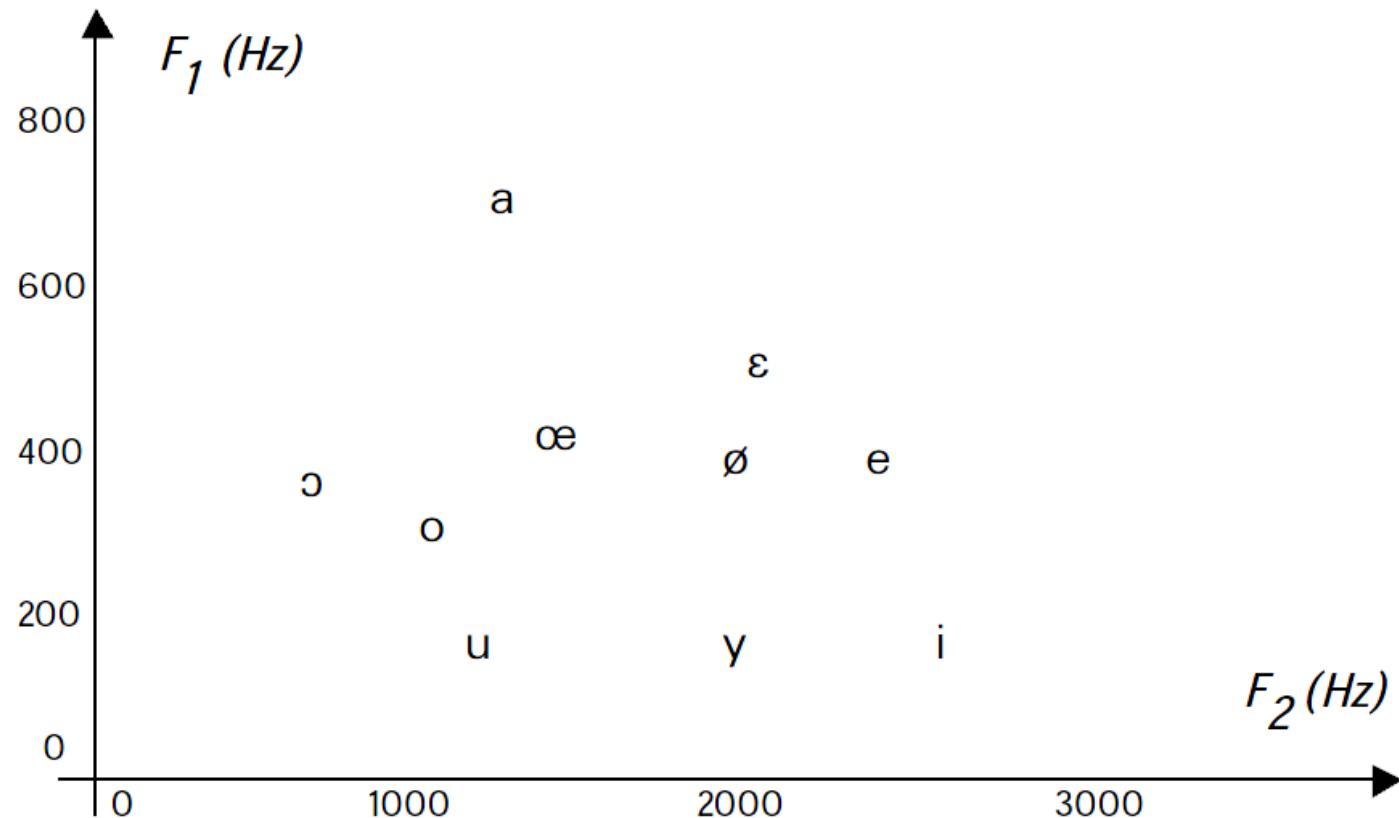


# Exemple pour des signaux temporels: Parole



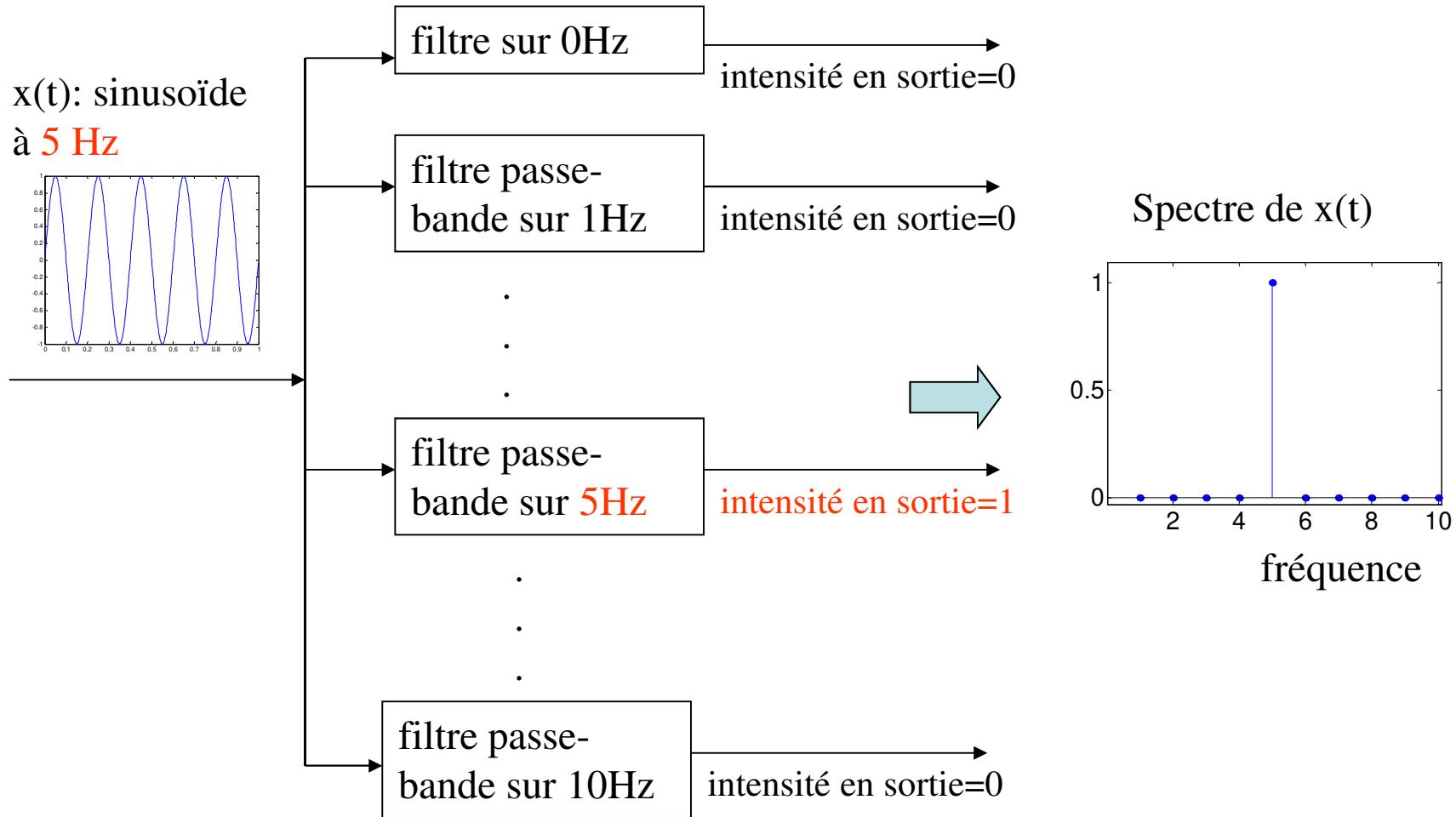
A gauche: Représentation temporelle des sons « a » (en haut) et « i » (en bas)

A droite: leurs représentations fréquentielles (enveloppe spectrale)



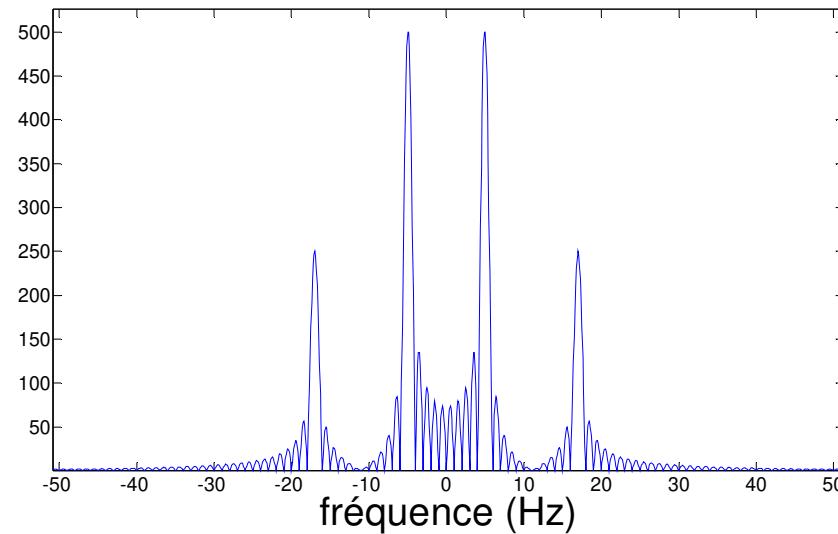
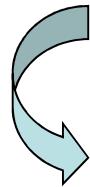
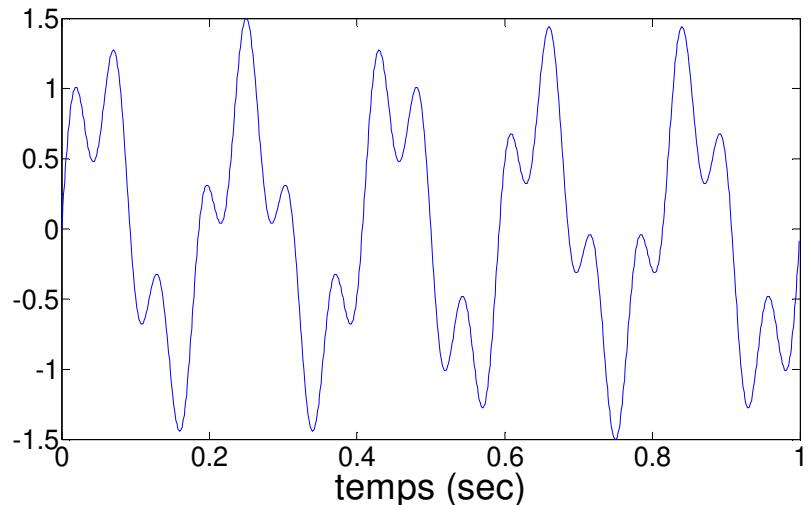
Représentation des voyelles dans le plan  $F_1$ - $F_2$  (fréquences du premier et du deuxième formants)

# Une méthode possible pour obtenir le spectre d'un signal temporel: banc de filtres



Il existe des méthodes plus efficaces pour obtenir le spectre (la suite du cours ...)!

# Analyse spectrale: Description des signaux et systèmes dans le domaine des fréquences



## Signaux déterministes et aléatoires

- \* Un signal déterministe est un signal parfaitement connu.
- \* Un signal est aléatoire si seules ses probabilités de réalisation sont connues.

Exemple 1: Bruit thermique

Exemple 2: Sinusoïde à phase aléatoire

Exemple 3: Signaux naturels (Parole, ECG, signaux de télécom, ...) pour « le récepteur ».

# Chapitre 1: Rappel sur les outils pour la représentation fréquentielle des signaux

## 1.1. Décomposition en série de Fourier des signaux périodiques continus

\* Si  $x(t)$  est un signal périodique de période  $T_0$  (de fréquence  $f_0$  et de pulsation  $\omega_0=2\pi/T_0$ ), sa décomposition en série de Fourier s'écrit

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt.$$

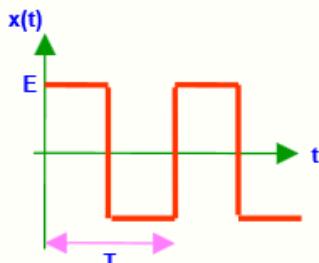
\* Si  $x(t)$  est réel, on peut aussi écrire :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

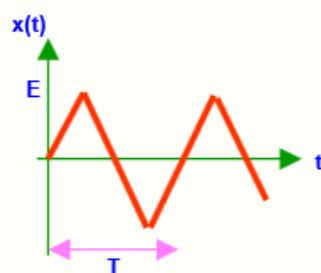
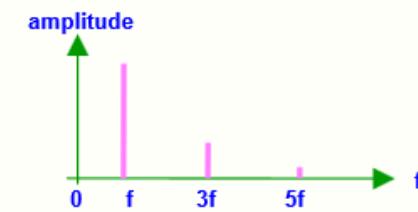
avec

$$c_0 = a_0 \quad c_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n)$$

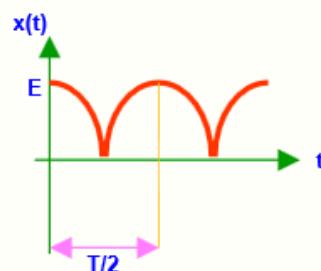
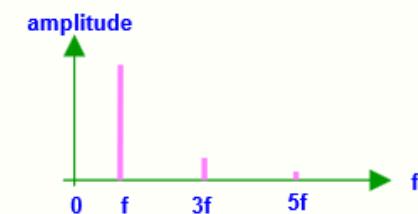
## Quelques exemples [J. P. Muller]



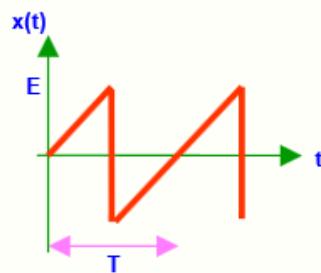
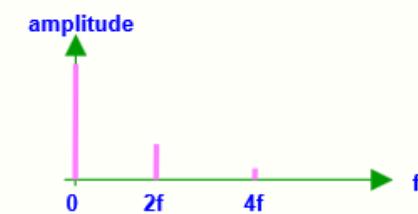
$$x(t) = \frac{4E}{\pi} \left[ \sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \dots \right]$$



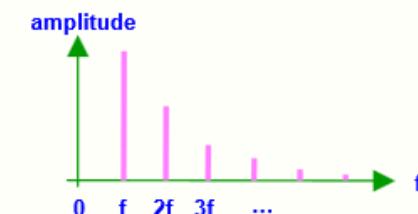
$$x(t) = \frac{8E}{\pi^2} \left[ \sin(\omega t) - \frac{\sin(3\omega t)}{3^2} + \frac{\sin(5\omega t)}{5^2} - \dots \right]$$



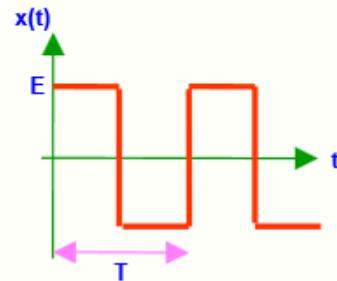
$$x(t) = \frac{2E}{\pi} \left[ 1 + \frac{2 \cos(2\omega t)}{3} - \frac{2 \cos(4\omega t)}{15} + \dots \right]$$



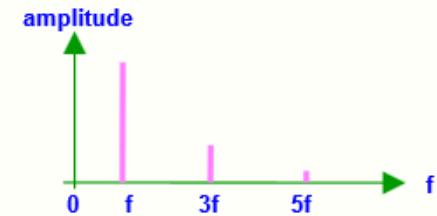
$$x(t) = \frac{2E}{\pi} \left[ \sin(\omega t) - \frac{\sin(2\omega t)}{2} + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \dots \right]$$



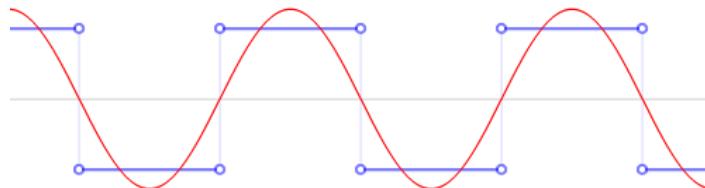
# Phénomène de Gibbs



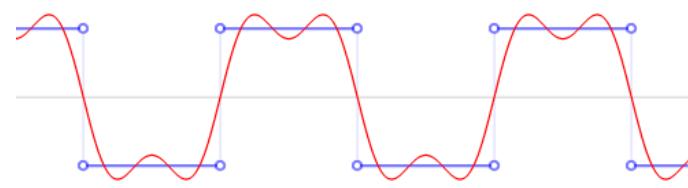
$$x(t) = \frac{4E}{\pi} \left[ \sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \dots \right]$$



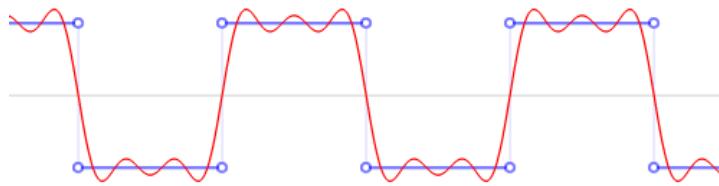
Reconstruction d'un signal carré à partir de ses N premiers harmoniques



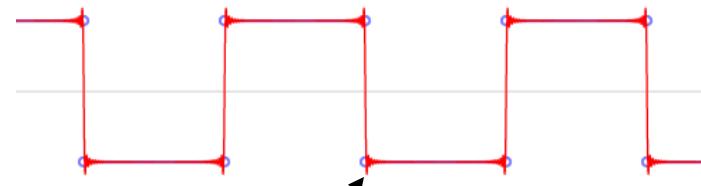
N = 1



N = 2



N = 3



N = 50

Phénomène de Gibbs

## 1.2. Transformée de Fourier des signaux continus

La transformée de Fourier (TF) d'un signal  $x(t)$  est définie par

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

lorsque l'intégrale converge. La formule inverse permet de calculer le signal temporel à partir de sa transformée de Fourier :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

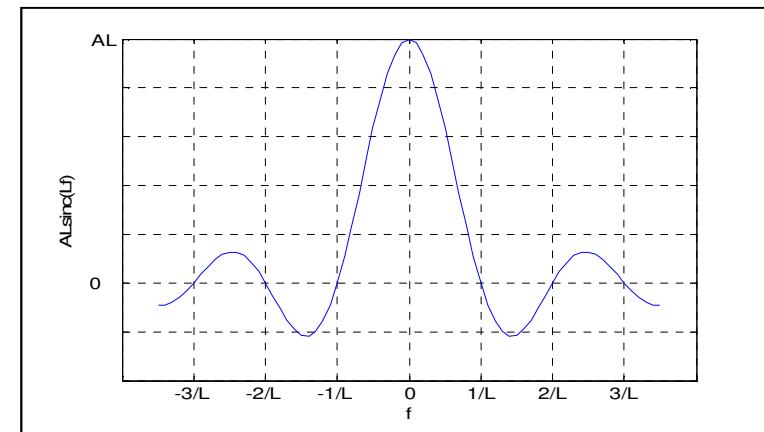
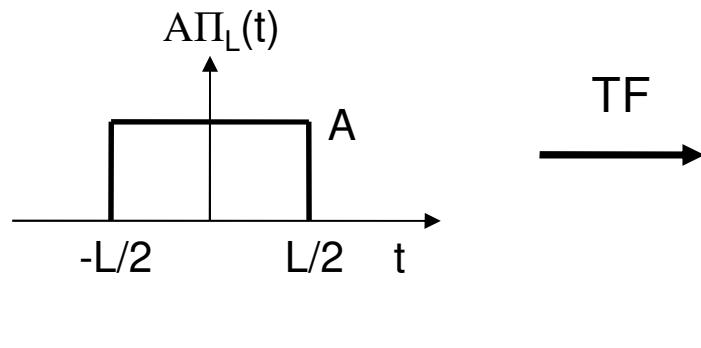
*Remarque :* On utilise parfois les formules suivantes, exprimées par rapport à la pulsation au lieu de la fréquence :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

*Exemple:* la TF d'une porte symétrique de largeur  $L$  et d'amplitude  $A$  :

$$x(t) = A \Pi_L(t)$$

$$X(f) = AL s\text{inc}(Lf)$$



## Propriétés de la transformée de Fourier

Propriété	Fonction	Transformée
linéarité	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(f) + bX_2(f)$
réciprocité	$X(t)$	$x(-f)$
translation en temps	$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$
translation en fréquence	$x(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$X(f - f_0)$
parité	$x(-t)$	$X(-f)$
conjugaison	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
dilatation	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X(\frac{f}{a})$
dérivation en temps	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
dérivation en fréquence	$-j2\pi t x(t)$	$\frac{dX(f)}{df}$
convolution	$x(t) * y(t)$	$X(f)Y(f)$
multiplication	$x(t)y(t)$	$X(f)^* Y(f)$
intégration	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} X(0)\delta(f)$

## Symétrie Hermitienne

Si  $x(t)$  est réel alors  $X(-f)=X^*(f)$ . On en déduit que:

- Le module de  $X(f)$ , noté  $|X(f)|$ , est pair
- La phase de  $X(f)$ , notée  $\arg(X(f))$ , est impaire

## Egalité de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df$$

et en particulier pour  $x(t)=y(t)$  :

$$Ex = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \quad (\text{Conservation d'énergie})$$

## Transformée de Fourier des signaux de base

Fonction	Transformée
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$
$u(t)$	$\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f)$
$A\Pi_\tau(t)$ (porte symétrique)	$A\tau \text{sinc}(\pi f)$
$A w \text{sinc}(wt)$	$A\Pi_W(f)$ (porte symétrique)
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-at} u(t)$ , $\Re e\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t)$ , $\Re e\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)^n}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$	$\frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{T_0})$

## 1.3. Echantillonnage

consiste à multiplier un signal à temps continu  $x(t)$  par un peigne de Dirac (une suite d'impulsions périodique de période  $T_e$ ):

$$x_e(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e)$$

\* Ensuite, on définit  $x[n] = x(nT_e)$ .

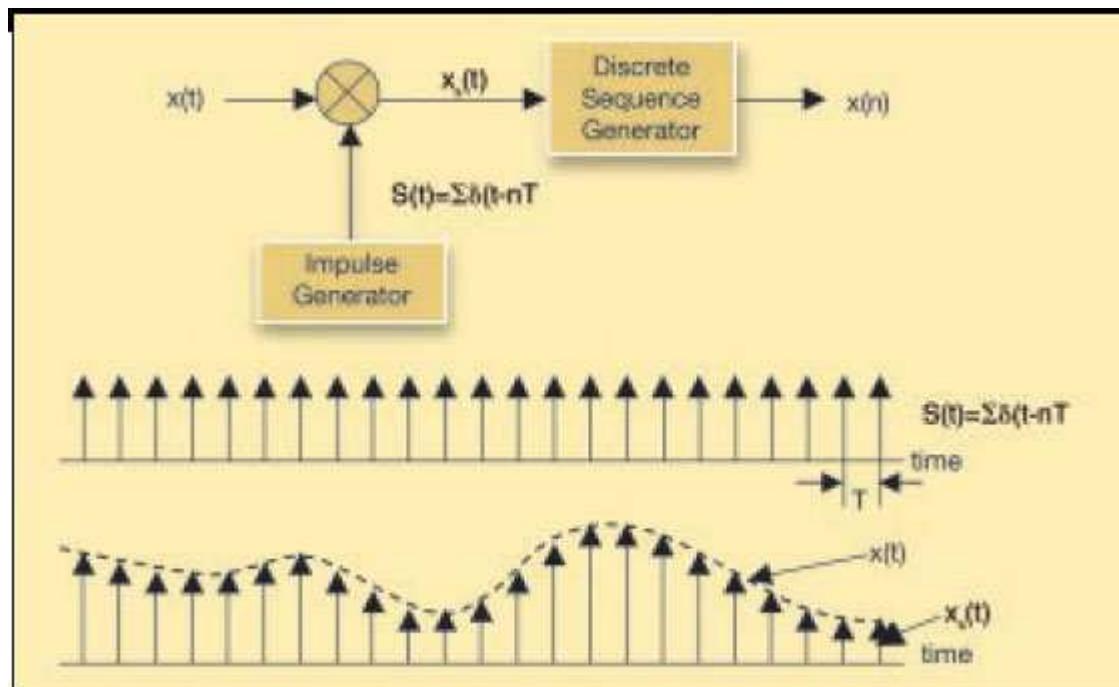
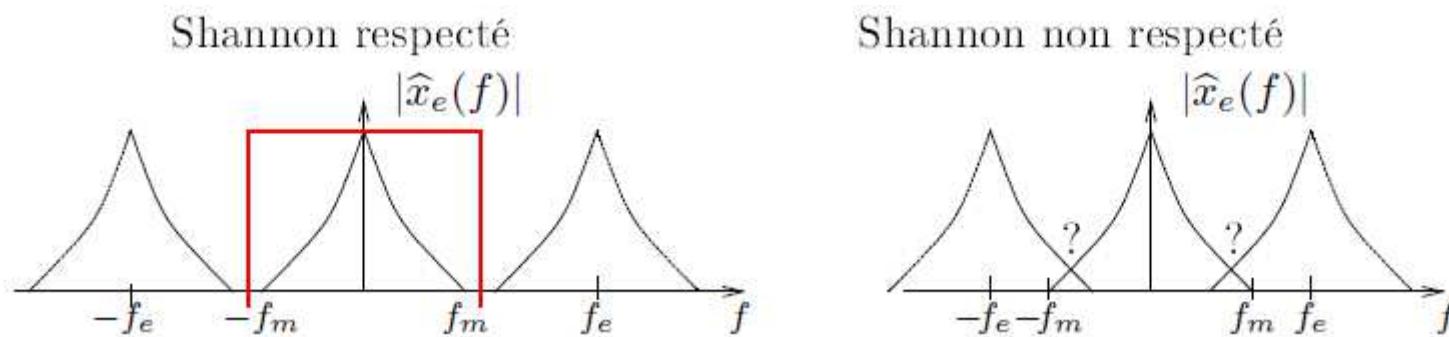
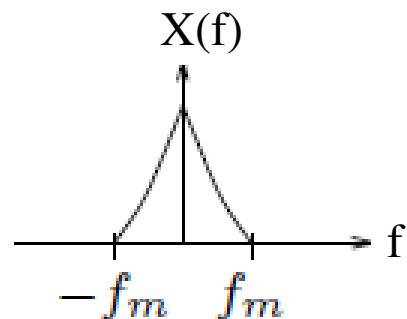


Figure 4. A sampler multiplies the continuous analog signal  $x(t)$  with the sampling pulse train  $s(t)$ .

- Le spectre du signal échantillonné est périodique de période  $F_e = 1/T_e$ :

$$X_e(f) = F_e \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kF_e)$$

\* **Théorème de Shannon:** pour éviter le repliement de spectre, il faut que  $F_e > 2f_m$  avec  $f_m$  la fréquence maximale du signal  $x$ .

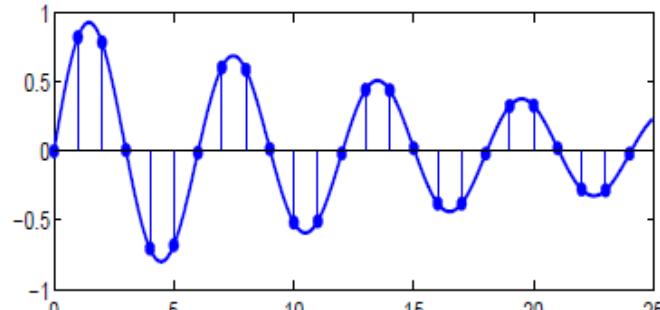


Reconstruction du signal analogique par un filtre passe-bas idéal:

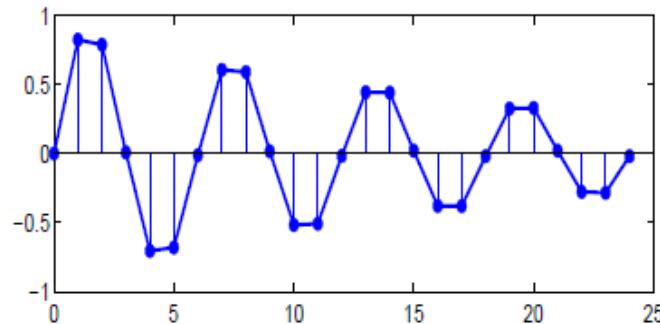
$$H(f) = \frac{1}{F_e} \Pi_{F_e}(f) = \begin{cases} 1/F_e & \text{si } |f| < F_e/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$X(f) = X_e(f)H(f) \quad \rightarrow \quad x(t) = \sum_n x(nT_e) \operatorname{sinc}(F_e(t - nT_e))$$

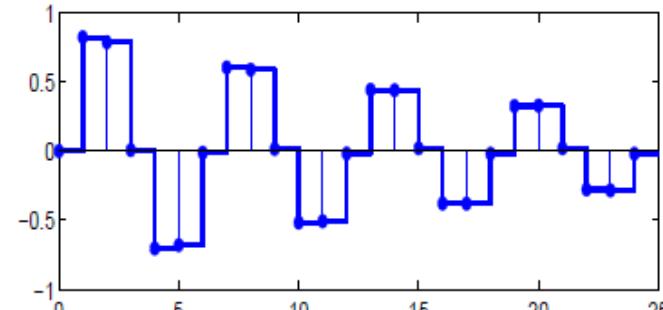
Signal original et échantillonné



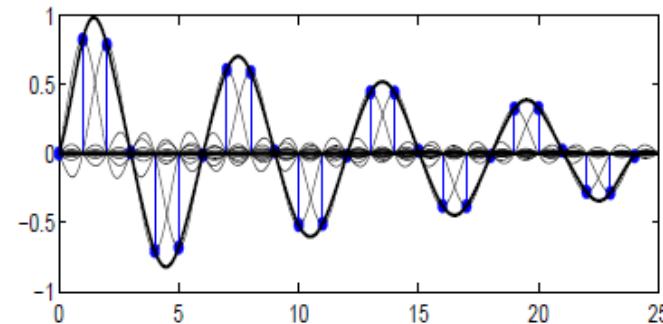
Interpolation linéaire



Reconstruction par bloqueur



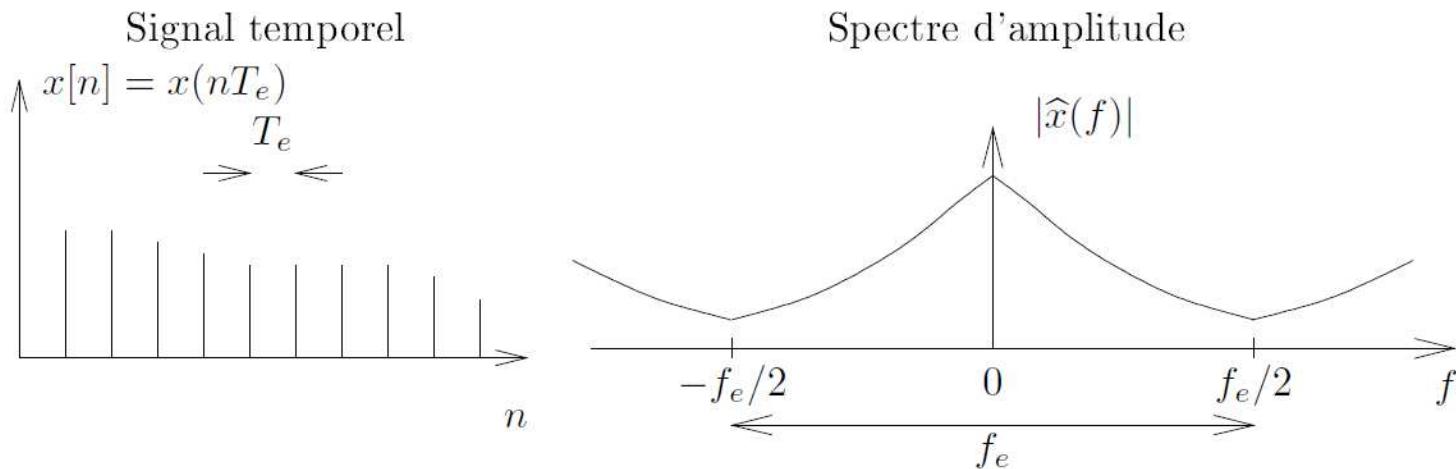
Formule de reconstruction



## 1.4. Transformée de Fourier des Signaux Discrets (TFSD)

$$\hat{x}(f) = TF\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi \frac{nf}{F_e}}$$

- 1)  $x[n]$  est à temps discret mais sa TF est une fonction continue de  $f$ .
- 2) la TF est périodique de période  $F_e$ .
- 3) les basse-fréquences sont autour de  $f=0$  et les haute-fréquences autour de  $f=\pm F_e/2$ .



## Lien entre la TFSD et la transformée en Z:

TZ: 
$$X(z) = TZ\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

→  $\hat{x}(f) = X(z) \Big|_{z=e^{j2\pi f/F_e}}$  Si la TZ converge pour cette valeur de z.

## Formule inverse de la TFSD:

$$x[n] = TF^{-1}\{\hat{x}(f)\} = \frac{1}{F_e} \int_{-F_e/2}^{F_e/2} \hat{x}(f) e^{j2\pi \frac{nf}{F_e}} df$$

## Inconvénient majeur de la TFSD:

La TFSD est une fonction continue → Elle n'est pas calculable sur ordinateur. On utilise alors la TFD (Chapitre suivant)

# Propriétés de la TFSD

## ■ Propriétés

- Linéarité :  $\alpha x[n] + \beta y[n] \longrightarrow \alpha \hat{x}(f) + \beta \hat{y}(f)$
- Translation :  $x[n - k] \longrightarrow e^{-2i\pi kf/f_e} \hat{x}(f))$
- Modulation :  $e^{2i\pi nf_0/f_e} x[n] \longrightarrow \hat{x}(f - f_0)$
- Convolution :  $(x * y)[n] \stackrel{\Delta}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k] \longrightarrow \hat{x}(f)\hat{y}(f)$   
 $x[n]y[n] \longrightarrow \hat{x} \circledast \hat{y}(f) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{F_e} \int_{-\frac{F_e}{2}}^{+\frac{F_e}{2}} \hat{x}(\nu)\hat{y}(f-\nu)d\nu$
- Égalité de Parseval :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]|^2 = \frac{1}{f_e} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{+\frac{f_e}{2}} |\hat{x}(f)|^2 df$$

- Exemple : signal porte

$$x[n] = \mathbf{1}_{\{0, \dots, N-1\}}[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq n < N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \Rightarrow \hat{x}(f) = e^{-i\pi(N-1)\frac{f}{f_e}} \frac{\sin(\pi N \frac{f}{f_e})}{\sin(\pi \frac{f}{f_e})}$$

- Exemple : Kronecker  $\delta[n] = \mathbf{1}_{\{0\}}[n] = 1 \text{ si } n=0, \delta[n]=0 \text{ sinon} \Rightarrow \hat{\delta}(f) = 1$

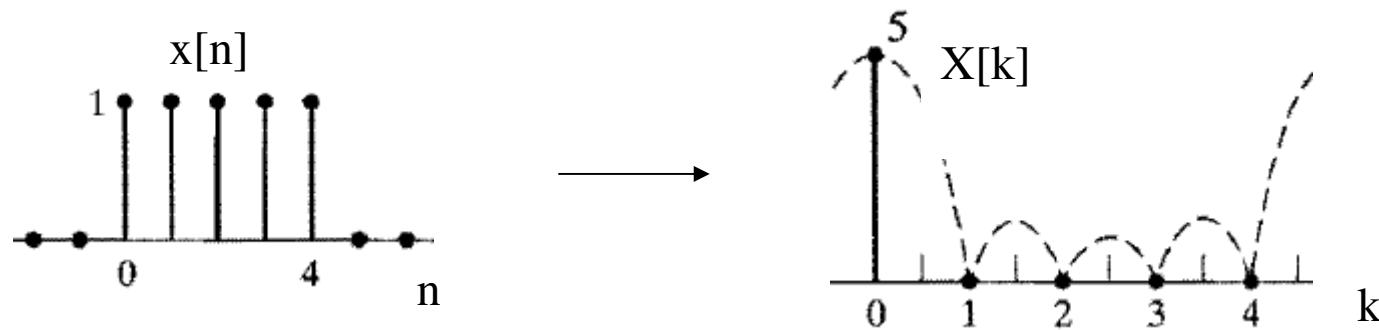
# Chapitre 2: Analyse spectrale des signaux déterministes par TFD

## 2.1 Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Soit  $x[n]$  un signal discret de durée finie  $N$ , tel que  $x[n]=0$  pour  $n < 0$  et  $n > N-1$ . La TFD de ce signal est définie par

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

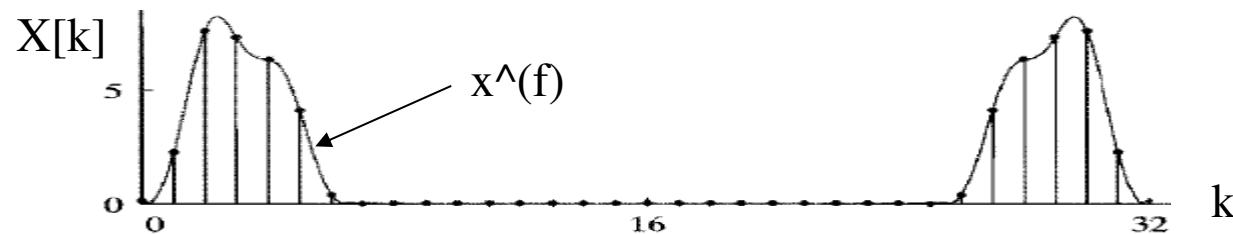
La formule inverse:  $x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi \frac{nk}{N}} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$



## Lien entre la TFD et la TFSD

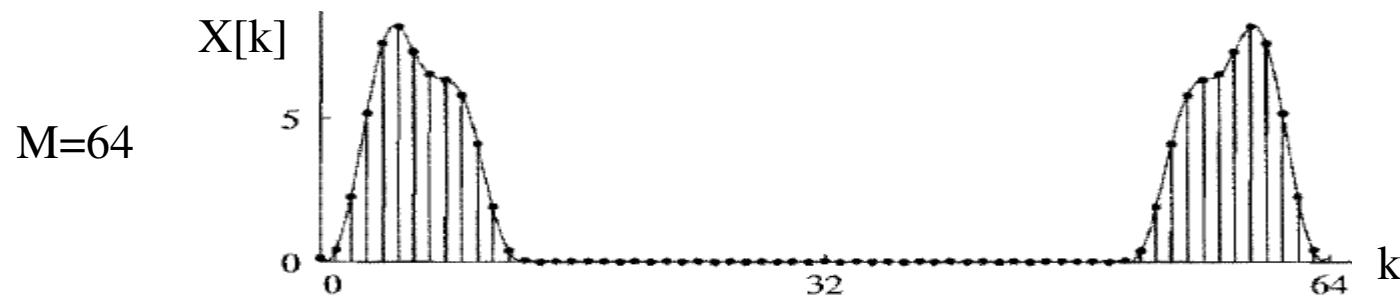
Si  $x[n]$  est un signal à durée finie:  $X[k] = \hat{x}(f) \Big|_{f=\frac{kF_e}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$

→ La TFD est une version échantillonnée de la TFSD



**Zero padding:** On ajoute  $M-N$  zéros à la fin de  $x[n]$  et on calcule la TFD sur  $M$  points → Echantillonnage plus fin de la TFSD

$$X[k] = \hat{x}(f) \Big|_{f=\frac{kF_e}{M}} \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$



## Propriétés de la TFD

- Linéarité :  $\alpha x_N[n] + \beta y_N[n] \longrightarrow \alpha X_N[k] + \beta Y_N[k]$
- Translation circulaire :  $x_N[n - n_0] \longrightarrow e^{-2i\pi \frac{k n_0}{N}} X_N[k]$
- Modulation :  $e^{2i\pi \frac{n k_0}{N}} x_p[n] \longrightarrow X_p[k - k_0]$
- Convolution circulaire (signaux de période  $N$ ) :  
$$(x_p \circledast y_p)[n] \triangleq \sum_{k=0}^{N-1} x_p[k] y_p[n - k] \longrightarrow X[k]Y[k]$$
$$x_N[n]y_N[n] \longrightarrow (X_N \circledast Y_N)[k]$$
- Égalité de Parseval :  $\sum_{k=0}^{N-1} |x_p[k]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$

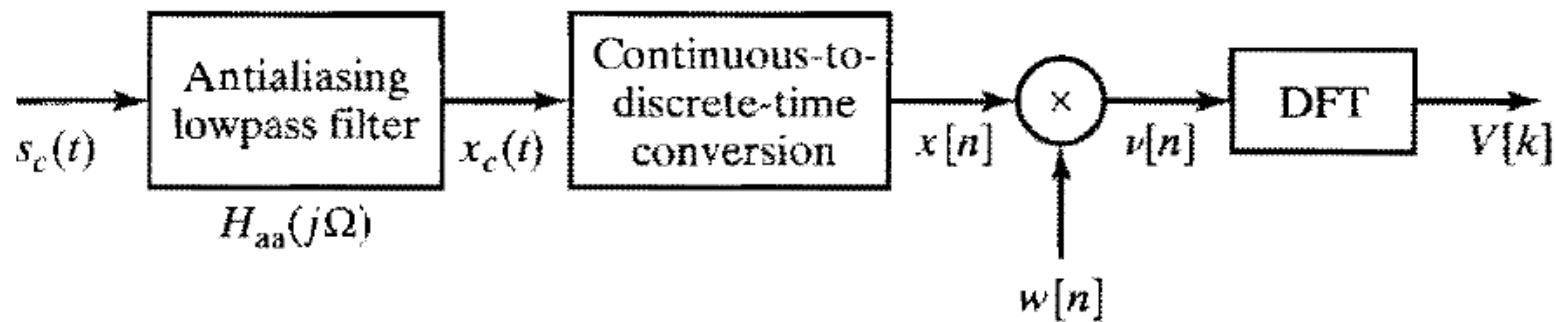
## Mise en œuvre algorithmique rapide: FFT (Fast Fourier Transform)

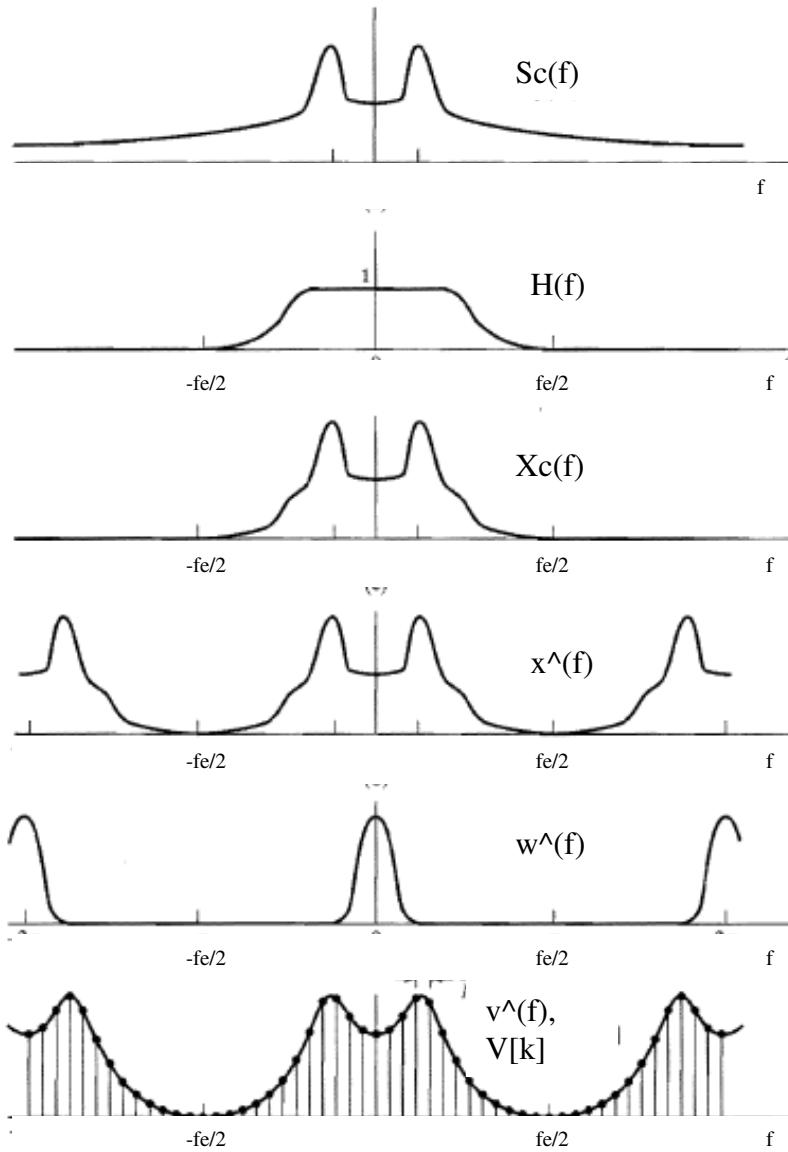
Si  $N$  est une puissance de 2, FFT nécessite seulement  $Mog_2(N)$  multiplications au lieu de  $N^2$  multiplications nécessaires avec la mise en œuvre naïve (utilisant la définition de la TFD).

## 2.2. Système utilisé pour l'analyse spectrale

- En pratique, le signal que l'on veut analyser est un signal continu
- La TFD ne peut être utilisée que pour les signaux discrets de durée finie (et assez courte)

[Oppenheim]





Exemple des spectres des signaux dans le schéma-bloc de la page précédente [Oppenheim]

## 2.3. Effet de fenêtrage

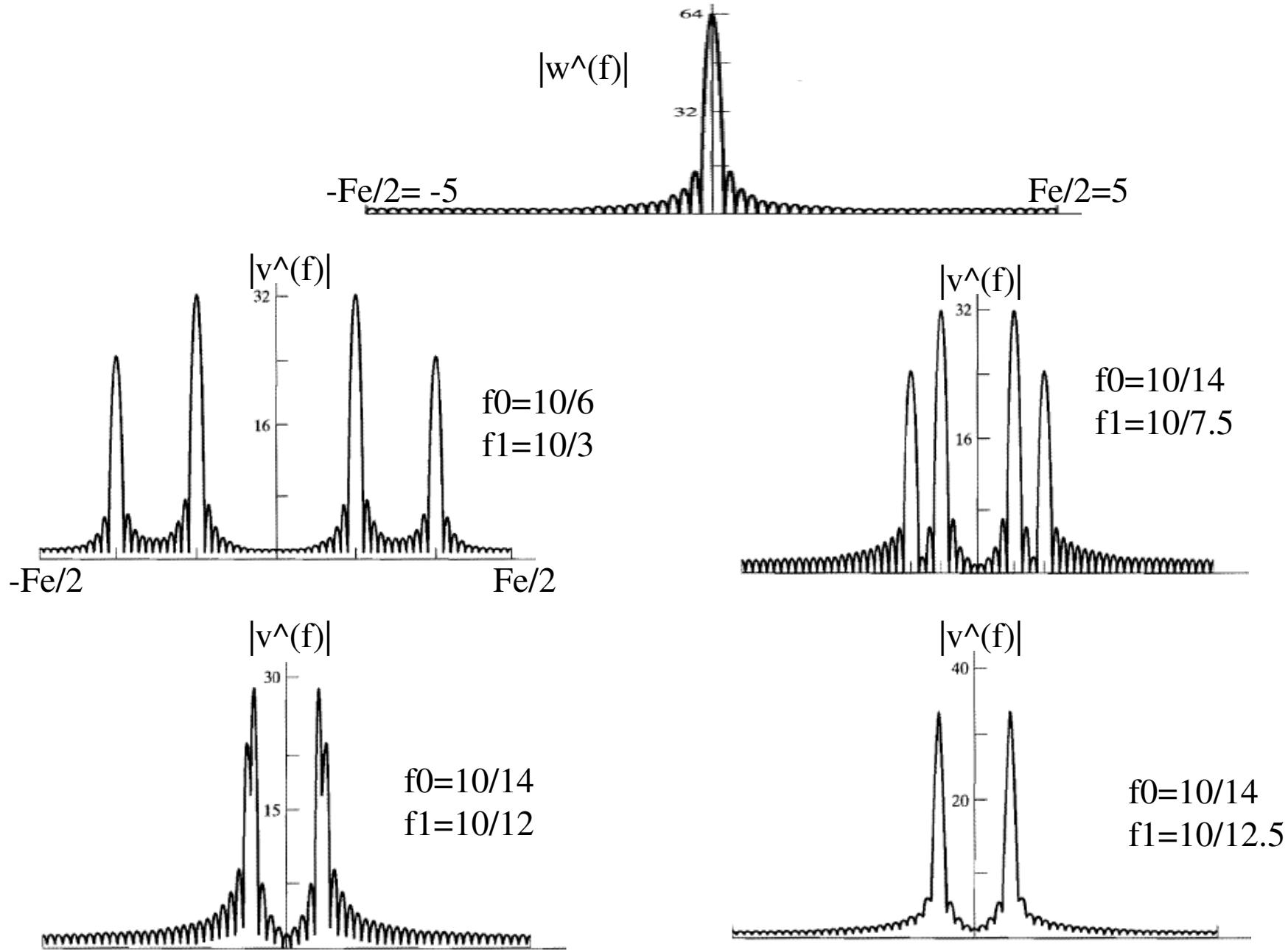
On étudie l'effet du fenêtrage temporel sur les résultats obtenus avec un exemple simple:

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) + 0.75 \cos(2\pi f_1 t) \quad -\infty < t < \infty$$

$$x[n] = \cos(2\pi \frac{f_0}{Fe} n) + 0.75 \cos(2\pi \frac{f_1}{Fe} n) \quad -\infty < n < \infty$$

Dans la suite, on considère le système d'analyse spectrale précédent pour Fe=10.

Dans un premier temps, on choisit une fenêtre  $w[n]$  rectangulaire de largeur  $N=64$ , et on représente la TFSD de la fenêtre ainsi que la TFSD du signal fenêtré  $v[n]=x[n]w[n]$  pour différentes valeurs des fréquences  $f_0$  et  $f_1$ .



Tronquer le signal = multiplication par  $w[n]$  nul en dehors de  $\{0, \dots, N-1\}$

Troncature: convolution entre la TFSD du signal et celle de la fenêtre

## Effets de fenêtrage

- Les raies spectrales deviennent plus larges
  - L'amplitude de chaque raie est affectée par l'amplitude des raies voisines: cet effet est appelé « la fuite spectrale » (*spectral leakage*)
  - On ne peut pas distinguer les raies très proches (perte de *Résolution spectrale*)
- ➔ Choisir une autre fenêtre de pondération que « rectangulaire »
- La résolution dépend principalement de la **largeur du lobe principal** de la TFSD de la fenêtre :  $\Delta_{lp}$
  - Le degré de fuite spectrale dépend de **l'amplitude relative du premier lobe secondaire** (par rapport à l'amplitude du lobe principal) :  $A_{ls}$

Ces deux paramètres ( $\Delta_{lp}$  et  $A_{ls}$ ) sont principalement déterminés par la forme de la fenêtre et sa largeur.

## Différents types de fenêtres (avec M=N-1) [Oppenheim]

*Rectangular*

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

*Bartlett (triangular)*

$$w[n] = \begin{cases} 2n/M, & 0 \leq n \leq M/2, \quad M \text{ even} \\ 2 - 2n/M, & M/2 < n \leq M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

*Hann*

“Hanning”

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n/M), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

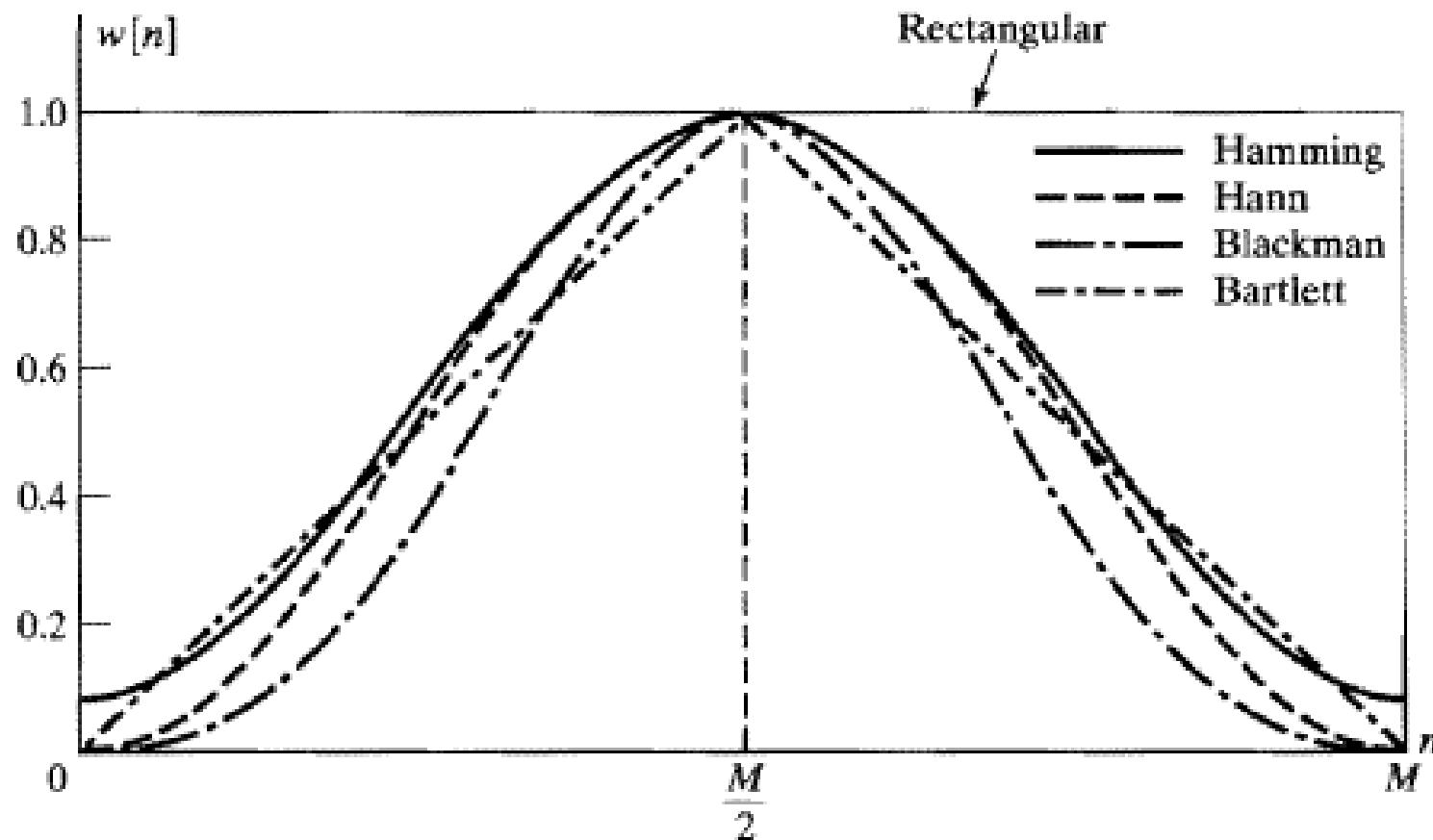
*Hamming*

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n/M), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

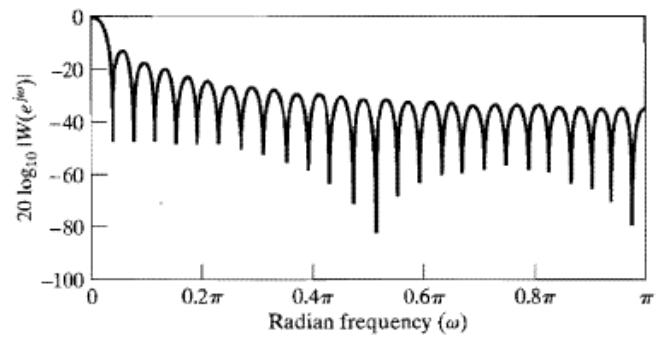
*Blackman*

$$w[n] = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos(2\pi n/M) + 0.08 \cos(4\pi n/M), & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

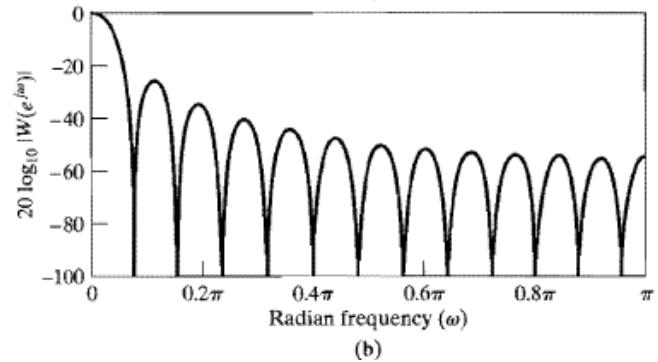
## La forme (temporelle) des fenêtres



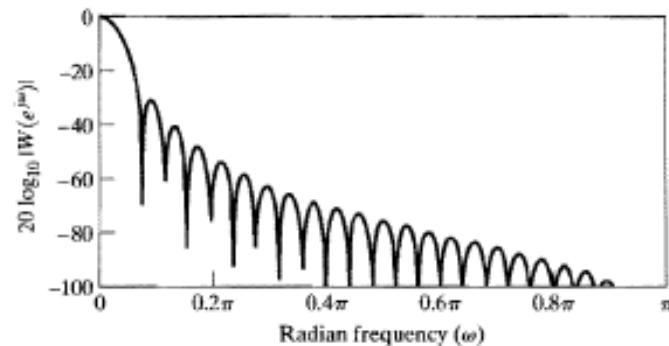
## La TFSD des fenêtres



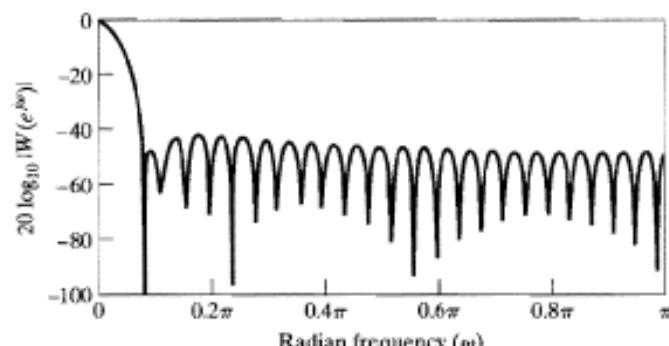
(a)



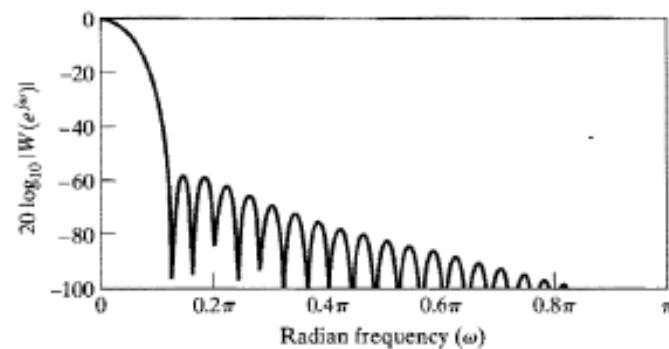
(b)



(c)



(d)



(e)

- a) Rectangulaire
- b) Bartlett
- c) Hanning
- d) Hamming
- e) Blackman

## Comparaison des fenêtres

	Largeur lobe principal ( $\Delta_{lp}$ )	Amplitude relative du lobe secondaire ( $A_{ls}$ )
Rectangulaire	2Fe/N	-13 dB
Bartlett	4Fe/N	-25 dB
Hanning	4Fe/N	-31 dB
Hamming	4Fe/N	-41 dB
Blackman	6Fe/N	-57 dB

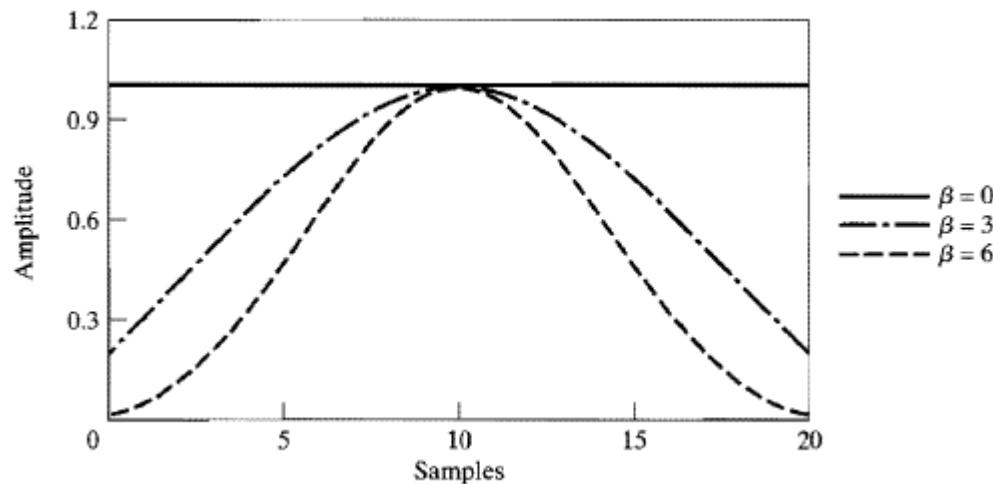
La fenêtre rectangulaire a le lobe principal le plus étroit mais les lobes secondaires les plus hauts.

Chacune de ces fenêtres n'a qu'un seul degré de liberté (sa largeur) → Pour une fenêtre donnée, il n'est pas possible de trouver un compromis entre  $\Delta_{lp}$  et  $A_{ls}$

## Fenêtre de Kaiser

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0[\beta(1 - [(n - \alpha)/\alpha]^2)^{1/2}]}{I_0(\beta)}, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

où  $\alpha=M/2$  et  $I_0()$  est une fonction de Bessel d'ordre zéro.

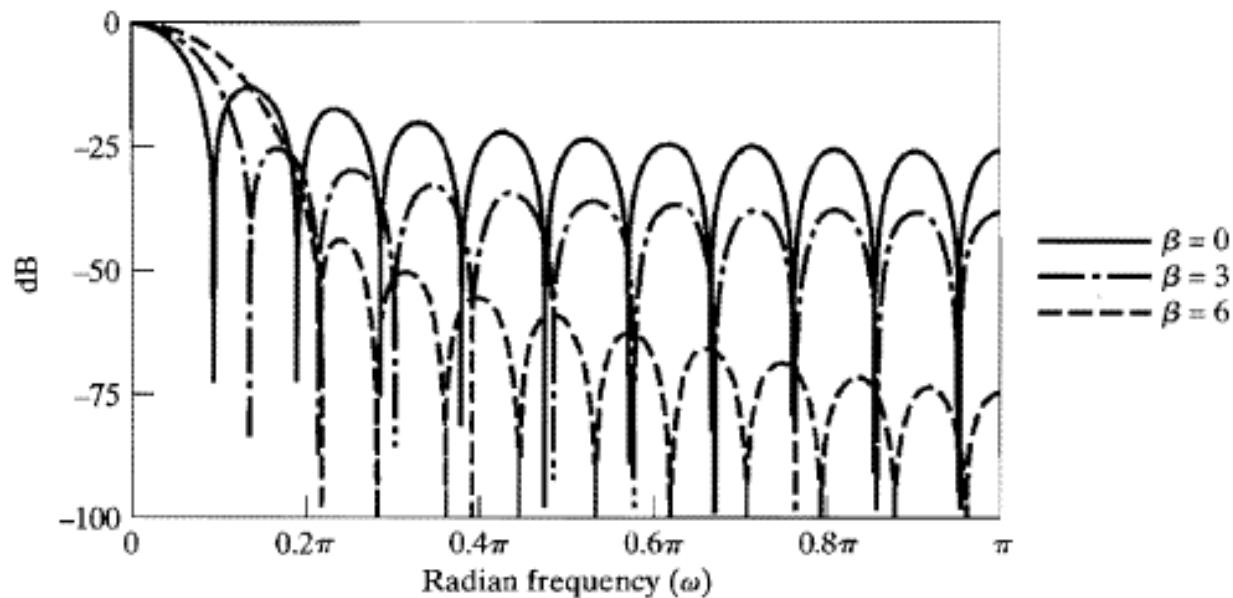


Cette fenêtre est définie par deux paramètres:  $M$  (largeur) et  $\beta$  (forme). Le choix de ces paramètres permet de trouver un compromis entre  $\Delta_{lp}$  et  $A_{ls}$ .

Pour des valeurs données de  $\Delta_{lp}$  et  $A_{ls}$ , on détermine les valeurs des deux paramètres  $\beta$  et  $M$  avec les équations ci-dessous:

$$\beta = \begin{cases} 0 & |A_{ls}| \leq 13.26 \\ 0.76609(|A_{ls}| - 13.26)^{0.4} + 0.09834(|A_{ls}| - 13.26) & 13.26 < |A_{ls}| \leq 60 \\ 0.12438(|A_{ls}| + 6.3) & 60 < |A_{ls}| \leq 120 \end{cases}$$

$$M \approx \frac{24\pi(|A_{ls}| + 12)}{155\Delta_{lp}} + 2$$



## 2.4. Effet de l'échantillonnage spectral

On considère le même exemple

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) + 0.75 \cos(2\pi f_1 t) \quad -\infty < t < \infty$$

$$x[n] = \cos\left(2\pi \frac{f_0}{F_e} n\right) + 0.75 \cos\left(2\pi \frac{f_1}{F_e} n\right) \quad -\infty < n < \infty$$

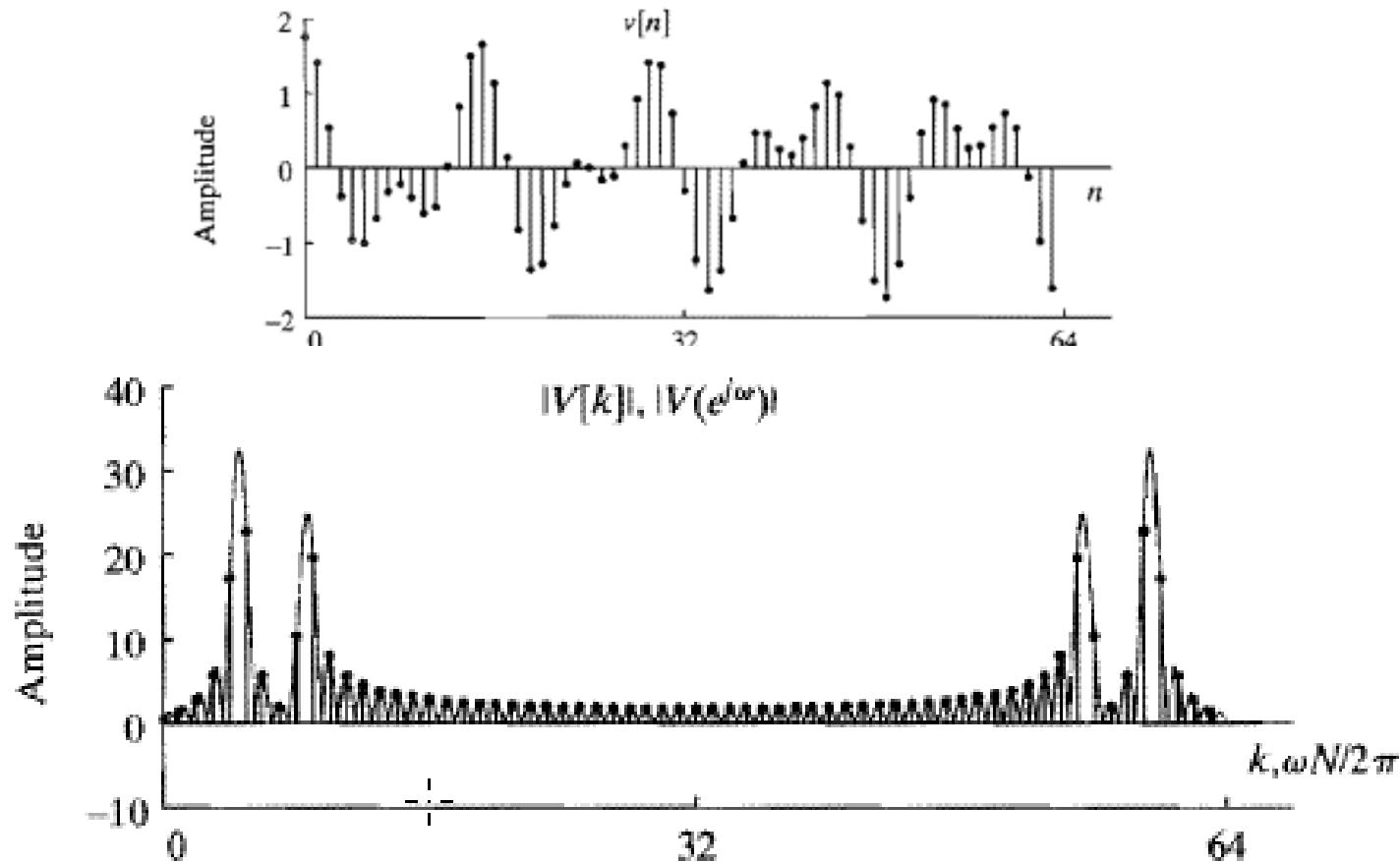
avec  $F_e=10$  kHz, et  $N=64$ .

On s'intéresse au résultat de la TFD.

La TFD correspond à l'échantillonnage de la TFSD et peut aboutir à une interprétation erronée de spectre.

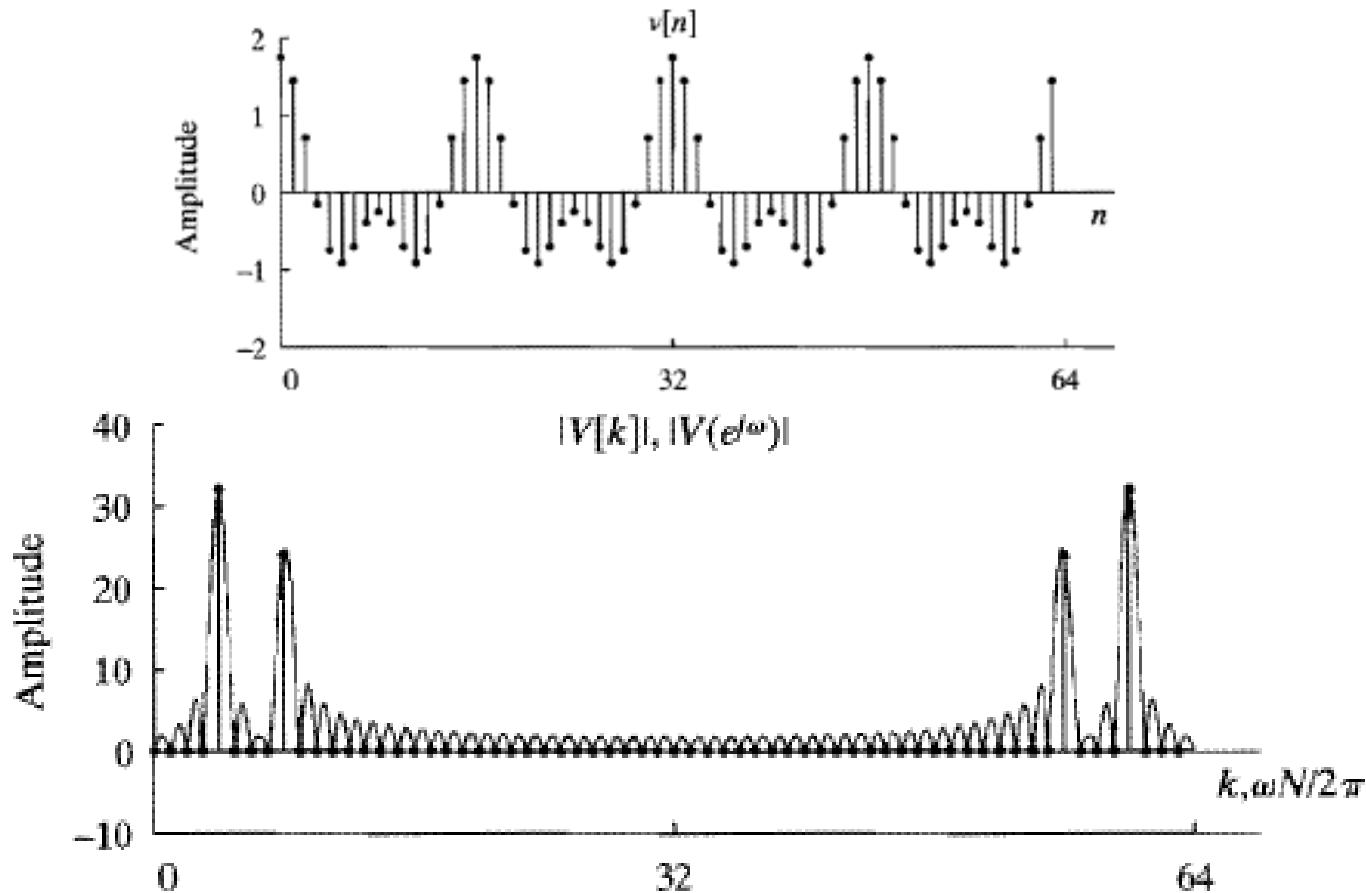
Dans la suite, on choisit une fenêtre  $w[n]$  rectangulaire, et on représente la TFD et la TFSD du signal fenêtré  $v[n]=x[n]w[n]$  pour différentes valeurs des fréquences  $f_0$  et  $f_1$ .

## Cas 1: $f_0 = \text{Fe}/14$ et $f_1 = \text{Fe}/7.5$



$v[n]$  ne contient pas un nombre entier de périodes  $\rightarrow$  La position des pics de la TFD (les échantillons) ne correspond pas à celle des pics de la TFSD (courbes en continu): Plus de détails en TD

## Cas 1: $f_0=Fe/16$ et $f_1=Fe/8$



$v[n]$  contient un nombre entier de périodes  $\rightarrow$  La position des pics de la TFD (les échantillons) correspond à celle des pics de la TFSD (courbes en continu): Plus de détails en TD

Pour la représentation complète d'un signal de taille N, une TFD de N points est suffisante car le signal d'origine peut être restitué à partir de cette TFD de façon exacte (sans perte d'information).

Un simple examen de la TFD à N points peut aboutir à une interprétation erronée de spectre.

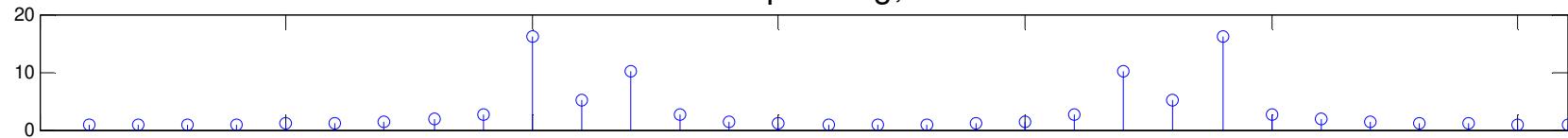
Il est commun d'appliquer le *zero padding* pour sur-échantillonner le spectre et faire apparaître des caractéristiques importantes de spectre.

Après le calcul de TFD avec *zero padding*, on peut utiliser une simple interpolation linéaire pour obtenir une courbe en continu pouvant par exemple être utilisée pour une meilleure représentation visuelle.

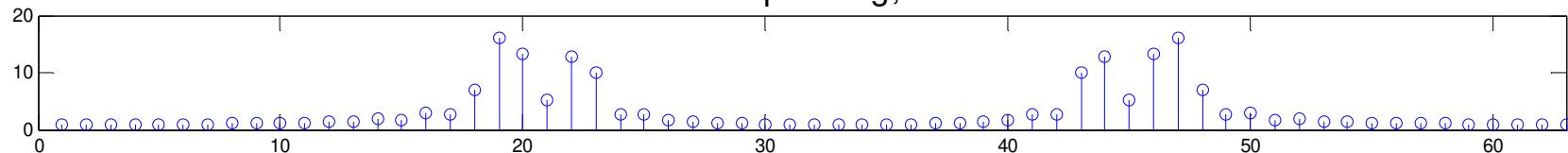
Attention: le zero padding ne permet pas d'éviter la confusion des raies proches (qui dépend de la taille et la forme de la fenêtre) .

Exemple de la page suivante correspond à la TFD de la somme de 2 sinusoïdes pondérée par une fenêtre de Blackman de largeur N=32, d'abord sans zero-padding (M=32), puis avec différentes valeurs de zero-padding (M=64,512), et enfin après l'interpolation linéaire pour M=512.

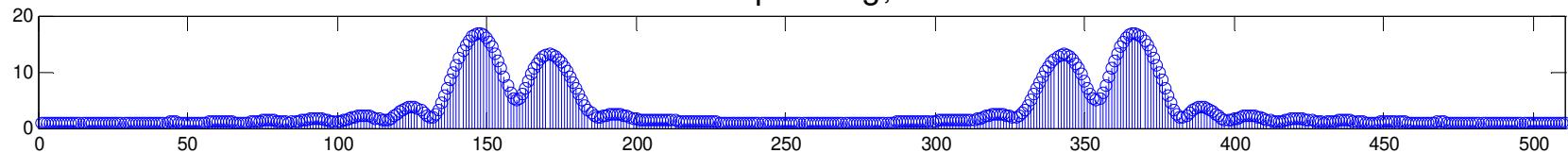
sans zero-padding, M=32



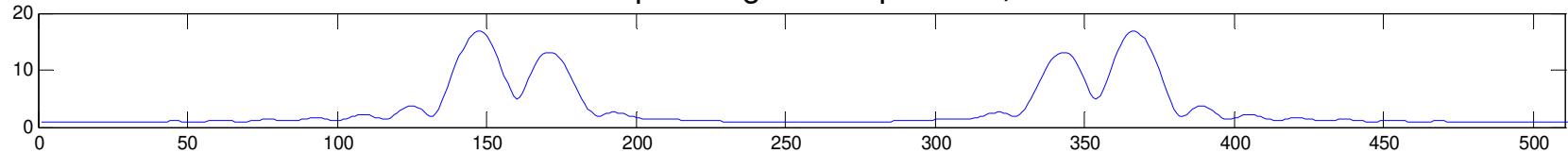
avec zero-padding, M=64



avec zero-padding, M=512



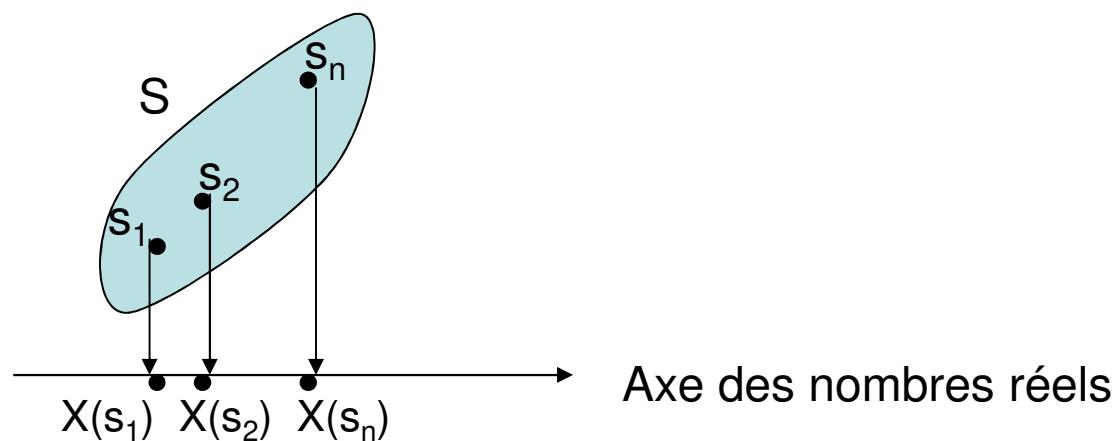
avec zero-padding et interpolation, M=512



# Chapitre 3: Rappel sur les signaux aléatoires

## 3.1 Variable aléatoire

Dans une expérience aléatoire, si on affecte une valeur numérique à chaque point de l'espace d'échantillonnage (c-à-d à chacun des résultats de l'expérience), on obtient une fonction sur cet espace, appelée « variable aléatoire » (**v.a.**).



*Exemple:* On lance deux fois une pièce de monnaie

$$S=\{FF, FP, PF, PP\}$$

On définit une v.a.  $X$  représentant le nombre de faces obtenues.

Résultat	FF	FP	PF	PP
Valeur de $X$	2	1	1	0

*Remarque:* Sur le même espace, on peut définir de nombreuses autres variables aléatoires, par exemple: le carré du nombre de faces obtenues.

### Deux types de v.a.:

- 1) V.a. à **valeur discrète**: prend un nombre « fini » ou « dénombrable infini » de valeurs (que l'on peut numérotter) . *Exemple:* lancer de dé.
- 2) V.a. à **valeur continue**: prend un nombre « infini, non-dénombrable » de valeurs. *Exemple:* poids, taille, age, ... d'un échantillon tiré au hasard dans une population.

## Fonction de répartition d'une v.a. X

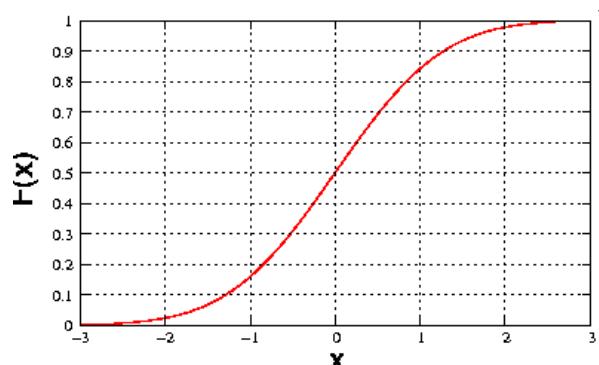
$$F_X(x) = P\{X \leq x\}$$

Une v.a. est entièrement caractérisée par sa fonction de répartition.

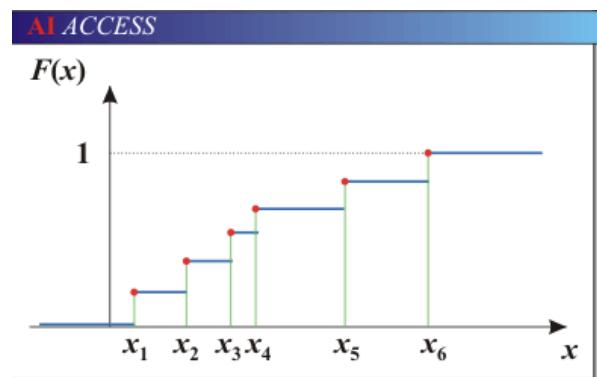
*Remarque:* dans la suite, on utilise des **lettres majuscules** pour désigner les v.a. et des **lettres minuscules** pour désigner leurs valeurs.

*Exemple:*  $F_X(1) = P\{X \leq 1\}$

*Remarque:*  $F_X(x)$  est une fonction croissante de  $x$ , toujours comprise entre 0 et 1.



Fonc. de répartition d'une v.a. continue



Fonc. de répartition d'une v.a. discrète 46

**Fonction de densité de probabilité d'une v.a. continue**  
est égale à la dérivée de sa fonction de répartition :

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

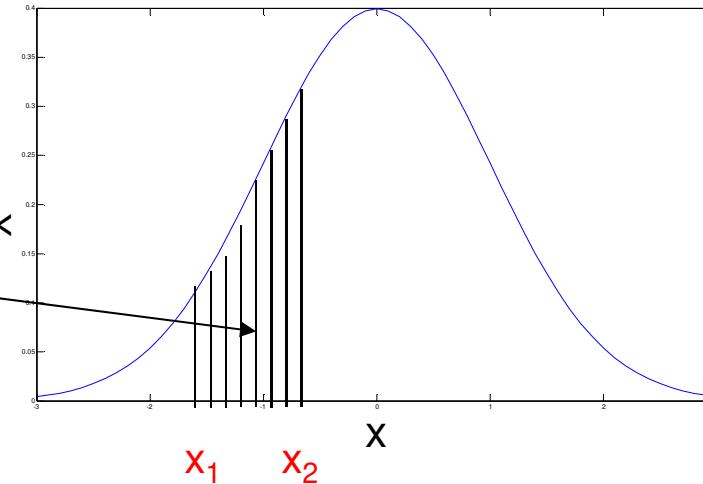
Propriétés:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(u)du = 1 \quad , \quad f_x(x) \geq 0$$

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_x(u)du$$

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f_x(u)du$$

$$f_X(x)$$



# Espérance mathématique d'une v.a.

## a) Espérance mathématique (ou moyenne) d'une v.a. continue

$$\mu_X = E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx$$

*Remarque :* Une variable est dite « **centrée** » si sa moyenne est nulle.

## b) Espérance mathématique d'une fonction d'une v.a. continue

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

### cas particulier:

**Variance:**  $\sigma_X^2 = Var(X) = E\{(X - \mu_X)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x)dx$

*Remarque:* La variance mesure la distance moyenne entre une v.a. et sa moyenne. Elle est donc une caractéristique de dispersion.

**Remarque :** L'espérance mathématique est une opération linéaire, c-à-d si  $X$  et  $Y$  sont deux v.a. et  $a$  et  $b$  deux constantes, on peut écrire :

$$E\{aX+bY\}=aE\{X\}+bE\{Y\}.$$

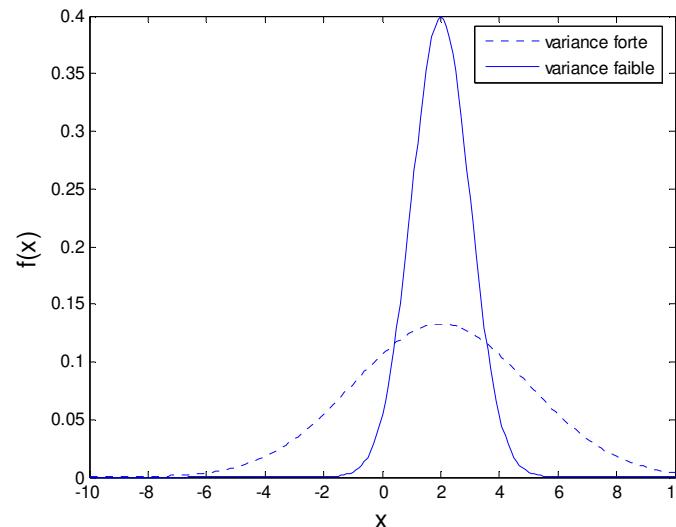
**Remarque:** si  $Y=aX+b$  alors  $\mu_Y = a\mu_X + b$  et  $\sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2$ .

**Remarque:**

Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont  $n$  variables aléatoires indépendantes de moyennes respectives  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  et de variances respectives  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ , alors la variable  $Y=X_1+X_2+\dots+X_n$  est de moyenne  $\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n$  et de variance  $\sigma_1^2+\sigma_2^2+\dots+\sigma_n^2$ .

**V.a. normale ou gaussienne**

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$



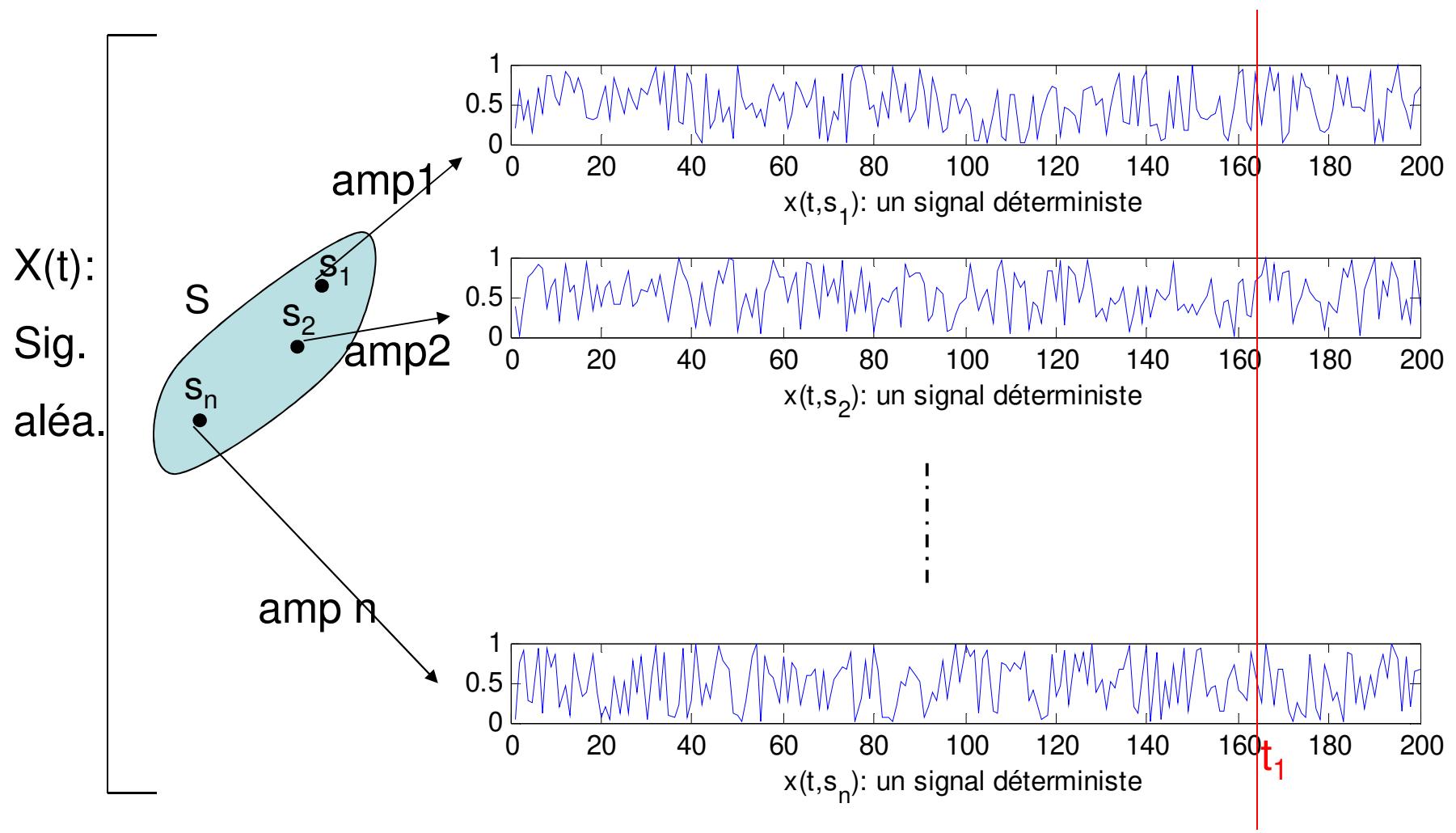
## 3.2. Définition formelle d'un signal aléatoire

Un signal temporel  $X(t)$  est aléatoire si

vision 1) sa valeur à chaque instant  $t_1$  (notée  $X(t_1)$ ) est une variable aléatoire

vision 2) il est obtenu en associant une fonction temporelle déterministe (notée  $x(t)$ ), appelée une « réalisation », à chacun des résultats d'une expérience aléatoire.

**Exemple:** On choisit au hasard un amplificateur opérationnel dans un stock d'amplificateurs ayant le même numéro de série, et on regarde la tension de bruit  $X(t)$  en sortie de l'amplificateur.



$X(t_1)$ : une  
v.a.

### 3.3. Statistiques d'un s.a.

#### a) Statistiques concernant un seul échantillon temporel du signal

Soit  $X[n]$  un signal aléatoire réel et numérique. Pour chaque instant  $n$ , il définit une v.a. La fonction de répartition de cette v.a. dépend en général de  $n$ .

- Fonction de répartition d'ordre 1 du s.a. est définie par

$$F_X(x; n) = P\{X[n] \leq x\}$$

Exemple:  $F_X(4; 2) = P\{X[2] \leq 4\}$

- Fonction de densité de probabilité d'ordre 1 du s.a. est définie par

$$f_X(x; n) = \frac{\partial F_X(x; n)}{\partial x}$$

- Moyenne du s.a.  $\mu_X[n] = E\{X[n]\} = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x; n)dx$
- Puissance du s.a.  $P_X[n] = E\{X^2[n]\}$
- Variance du s.a.  $\sigma_X^2[n] = E\{(X[n] - \mu_X[n])^2\} = P_X[n] - \mu_X^2[n]$

**b) Statistiques concernant deux échantillons temporels du signal**  
Soit  $X[n]$  un s.a. Ses valeurs aux instants  $n_1$  et  $n_2$  sont deux v.a.

- Fonction de répartition d'ordre 2

$$F_X(x_1, x_2; n_1, n_2) = P\{X[n_1] \leq x_1, X[n_2] \leq x_2\}$$

- Densité de probabilité d'ordre 2

$$f_X(x_1, x_2; n_1, n_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2; n_1, n_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

*Remarque:* On peut étendre ces notions pour définir les fonctions de répartition et de densité d'ordre quelconque.

- Fonction d'autocorrélation du s.a.

$$R_X[n_1, n_2] = E\{X[n_1]X[n_2]\}$$

- Fonction d'autocovariance du s.a.

$$C_X[n_1, n_2] = E\{[X[n_1] - \mu_X[n_1]][X[n_2] - \mu_X[n_2]]\} = R_X[n_1, n_2] - \mu_X[n_1]\mu_X[n_2]$$

*Remarque:* Ces deux fonctions mesurent la **corrélation** (ou le *lien*) entre deux échantillons d'un signal. En particulier, si  $C_X[n_1, n_2]=0$ , les deux échantillons ne sont pas corrélés.

*Remarque:* Pour un signal centré (c-à-d  $\mu_X[n]=0$ ),

$$C_X[n_1, n_2] = R_X[n_1, n_2]$$

## 3.4. Stationnarité et ergodicité

### Stationnarité au Sens Strict

Un s.a. est **Stationnaire au Sens Strict (SSS)** si toutes ses densités de probabilité (de tout ordre) sont invariants par décalage temporel, c-à-d:

$$f_X(x_1, \dots, x_k; n_1, \dots, n_k) = f_X(x_1, \dots, x_k; n_1 + N_0, \dots, n_k + N_0) \quad \forall N_0, k$$

*Remarque:* En pratique, la stationnarité au sens strict est généralement impossible à vérifier car cela nécessite la connaissance de toutes les densités de probabilité du signal.

### Stationnarité au Sens Large

On dit qu'un s.a.  $X[n]$  est **Stationnaire au Sens Large (SSL)** si

- 1) Sa moyenne ne dépend pas de  $n$  (elle est constante):

$$\mu_X[n] = E\{X[n]\} = \mu_X$$

2) Sa fonction d'autocorrélation  $R_X[n_1, n_2]$  ne dépend que de  $m = n_1 - n_2$  :

$$R_X[n_1, n_2] = R_X[m] = E\{X[n+m]X[n]\}$$

*Remarque:* Pour un signal SSL, on peut montrer que

a)  $R_X[m] = R_X[-m]$

b)  $|R_X[m]| \leq R_X[0]$

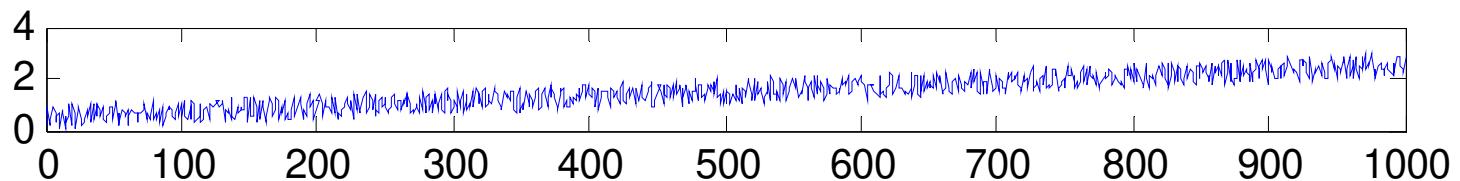
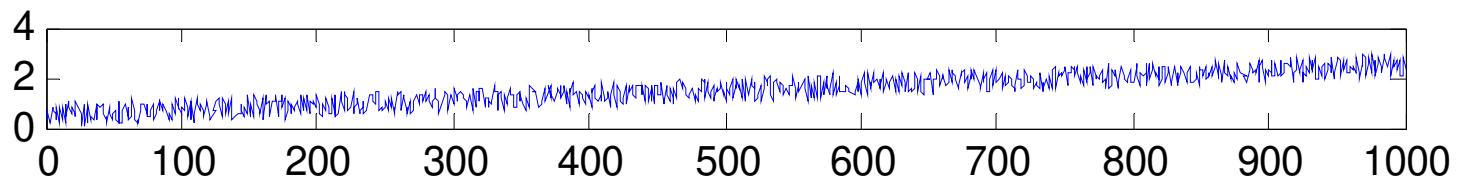
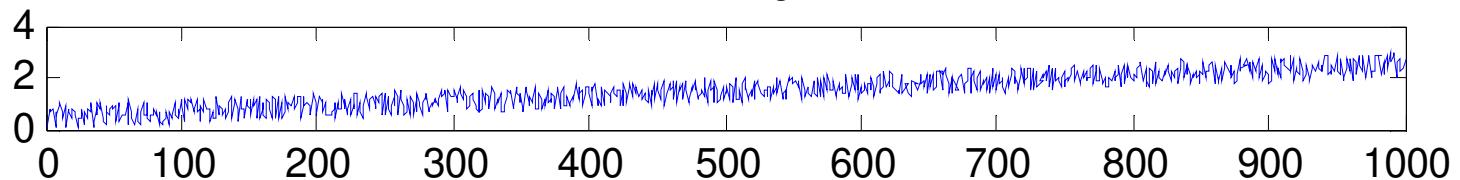
c)  $P_X = R_X[0]$

d)  $\sigma_X^2 = R_X[0] - \mu_X^2$

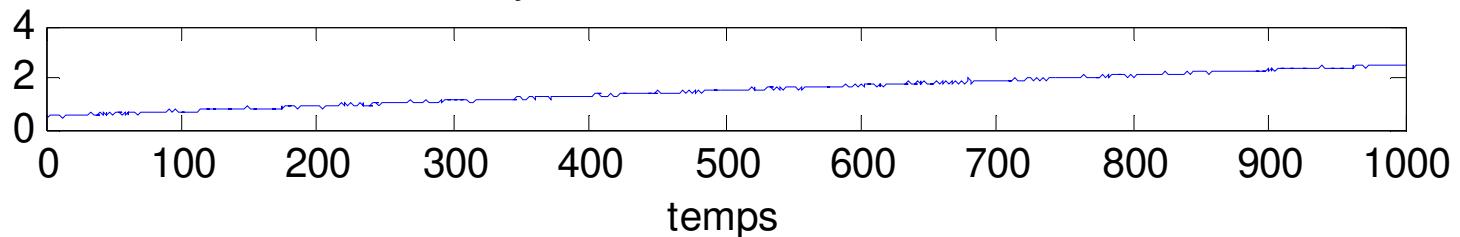
→ La puissance et la variance d'un signal SSL sont constantes.

## Exemple 1 d'un signal non stationnaire

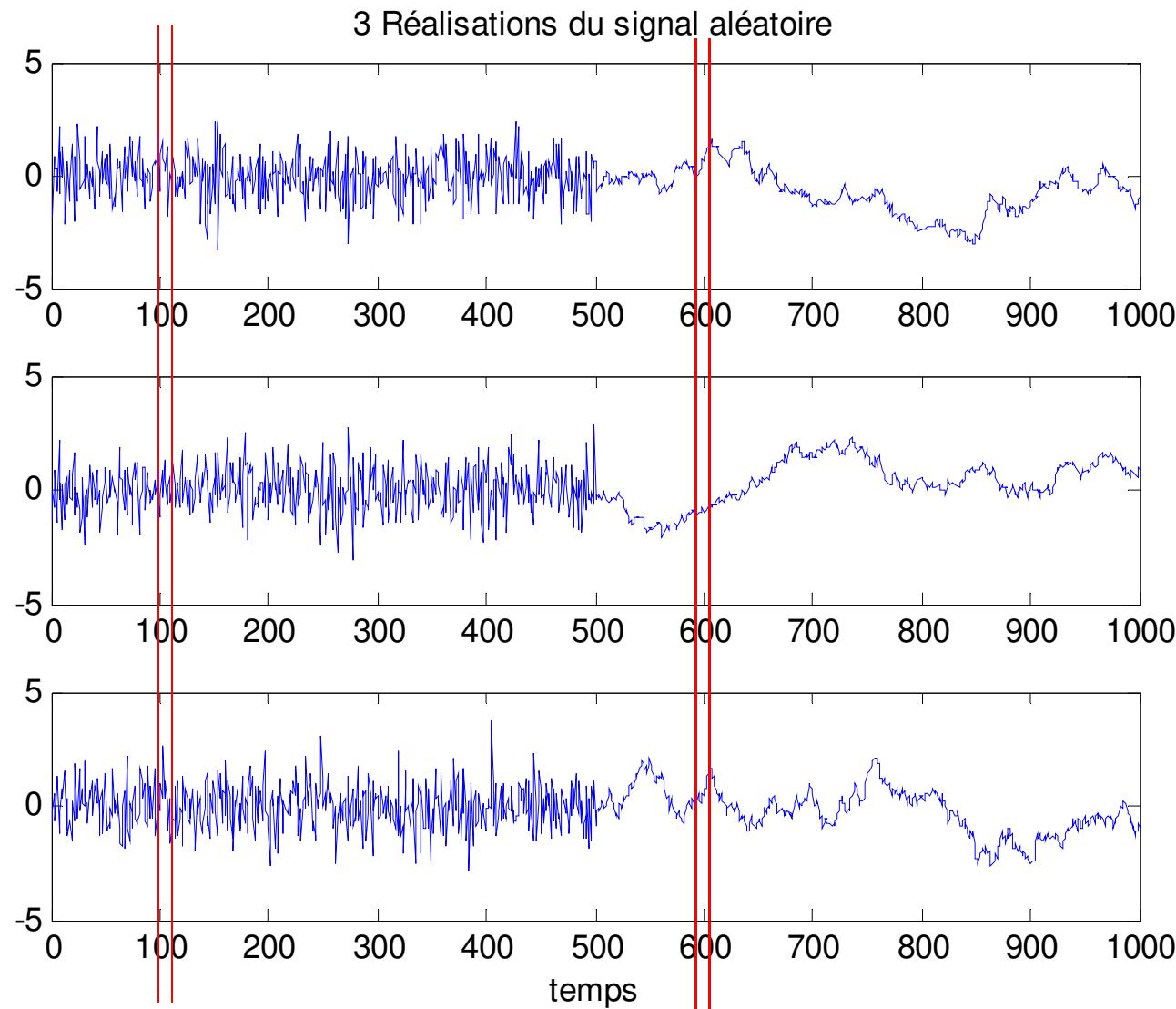
3 Réalisations du signal aléatoires



Moyenne sur 100 réalisations



## Exemple 2 d'un signal non stationnaire



$$R_X[100,110] \approx 0$$

$$R_X[590,600] \approx 0.9$$

Même si  $110-100=600-590$

Problème de l'utilisation de l'espérance mathématique: la nécessité de connaître les densités de probabilité du signal.

Et si les densités ne sont pas connues?

Deux cas possibles:

- 1) Plusieurs réalisations du s.a. sont connues (c-à-d  $x[n; s_i]$ ,  $i=1, \dots, K$ ).  
Dans ce cas, on estime l'espérance mathématique par une « moyenne d'ensemble »:

$$E\{g(X[n])\} \approx \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K g(x[n, s_i])$$

- 2) Une seule réalisation  $x[n]$  du s.a. est connue → la seule moyenne réalisable est la moyenne *temporelle* de cette réalisation (déterministe):

$$\langle g(x[n]) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N g(x[n])$$

## Ergodicité (ou ergodisme) d'un s.a.

- \* On dit qu'un s.a. SSL  $X[n]$  est **ergodique en moyenne** si sa moyenne temporelle d'une réalisation, définie par

$$\langle x[n] \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]$$

est égale à sa moyenne statistique:  $\langle x[n] \rangle = E\{X[n]\}$ .

- \* On dit qu'un s.a. SSL  $X[n]$  est **ergodique en puissance** si sa puissance temporelle moyenne d'une réalisation, définie par

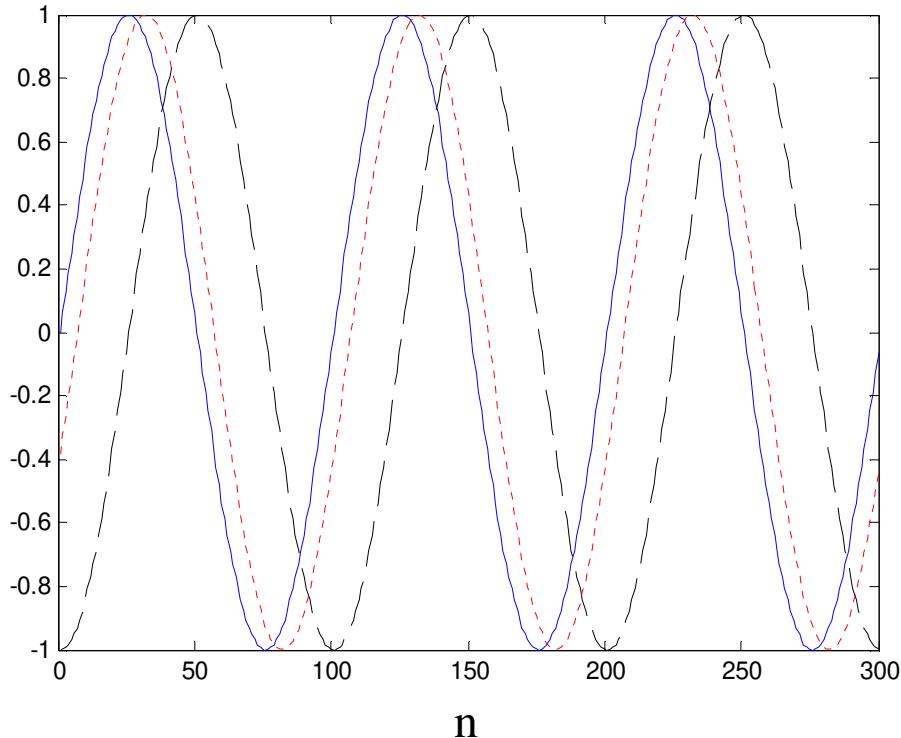
$$\langle x^2[n] \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^2[n]$$

est égale à sa puissance statistique:  $\langle x^2[n] \rangle = E\{X^2[n]\}$ .

- \* On peut également définir l'ergodicité par rapport à la fonction d'autocorrélation ou d'autres statistiques d'un s.a.

## Exemple d'un signal aléatoire

Sinusoïde à phase aléatoire:  $X[n]=a\cos(\omega_0n+\Phi)$  où  $a$  et  $\omega_0$  sont deux constantes et  $\Phi$  est une v.a. uniforme sur  $[0,2\pi[$ .



$$E\{X[n]\}=0$$

$$R_X[m]=a^2 \cos(\omega_0 m)/2$$

$$P_X = R_X[0] = a^2/2$$

$$\langle x[n] \rangle = 0$$

$$\langle x^2[n] \rangle = a^2/2$$

Ce signal est SSL et ergodique en moyenne et en puissance.

### 3.5. Densité Spectrale de Puissance (DSP) d'un s.a. SSL

Si  $X[n]$  est stationnaire avec la fonction d'autocorrélation  $R_X[m]$ , la Transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation est appelée « densité spectrale de puissance (DSP) »:

$$S_X(f) = TF\{R_X[m]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_X[m] e^{-j2\pi f m}$$
$$R_X[m] = TF^{-1}\{S_X(f)\} = \int_{-1/2}^{1/2} S_X(f) e^{j2\pi f m} df$$

[en supposant  $F_e=1$ ]

## Propriétés de DSP (pour les signaux réels et numériques)

- $S_X(f)$  est périodique de période 1 (on suppose  $F_e=1$ )
- $S_X(f)$  est réelle et paire
- $S_X(f) \geq 0$
- $P_X = E\{X^2(t)\} = \int_{-1/2}^{1/2} S_X(f) df$
- $\int_{f_1}^{f_2} S_X(f) df$  donne la puissance moyenne du signal dans la bande  $[f_1, f_2]$

### 3.6. Couple de signaux aléatoires

On considère conjointement deux s.a.  $X[n]$  et  $Y[n]$ .

- L'intercorrélation de deux s.a. est définie par

$$R_{XY}[n_1, n_2] = E\{X[n_1]Y[n_2]\}$$

- L'intercovariance de deux s.a. est définie par

$$\begin{aligned} C_{XY}[n_1, n_2] &= E\{[X[n_1] - \mu_X[n_1]][Y[n_2] - \mu_Y[n_2]]\} \\ &= R_{XY}[n_1, n_2] - \mu_X[n_1]\mu_Y[n_2] \end{aligned}$$

*Remarques:*

- 1) Ces deux fonctions mesurent la corrélation entre deux échantillons de deux s.a.
- 2) Si  $C_{XY}[n_1, n_2] = 0$ , alors  $X[n_1]$  et  $Y[n_2]$  ne sont pas corrélés.

- Deux s.a. sont *conjointement stationnaires au sens large* si chacun d'eux est stationnaire au sens large et que leur intercorrélation ne dépend que de  $m=n_1-n_2$ .  
Elle vaut alors

$$R_{XY}[m] = E\{X[n+m]Y[n]\}$$

*Remarque:*  $R_{XY}[-m] = R_{YX}[m]$

Densité interspectrale de puissance:

$$S_{XY}(f) = TF\{R_{XY}[m]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{XY}[m] e^{-j2\pi fm}$$

→  $R_{XY}[m] = TF^{-1}\{S_{XY}(f)\}$

### 3.7. Bruit blanc

Un s.a. centré SSL  $B[n]$  est un *bruit blanc* si sa DSP est constante (d'où le vocable blanc):

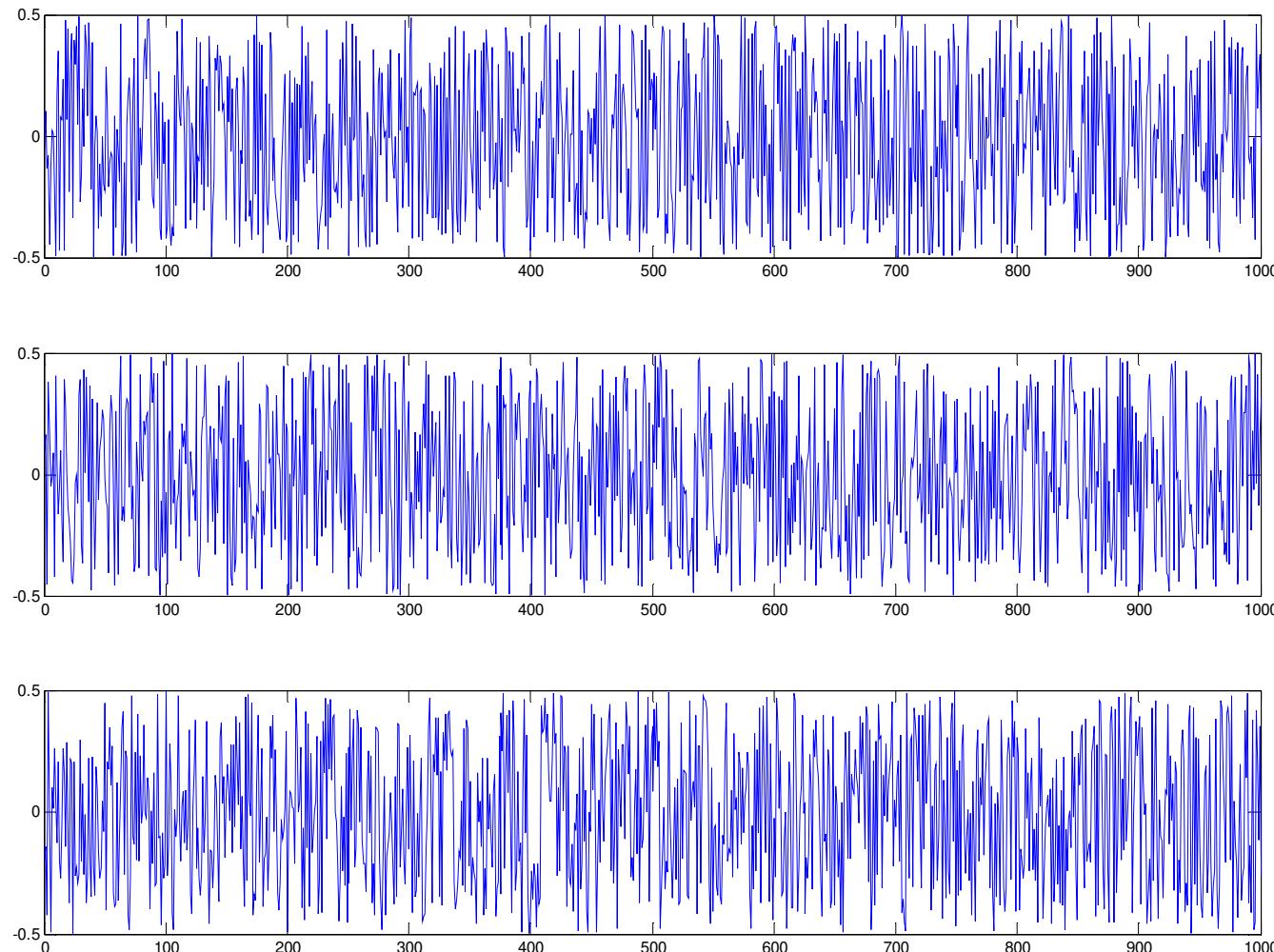
$$S_B(f) = \sigma^2 \quad \forall f$$

→ pour un s.a. à temps discret  $R_B[m] = T F^{-1}\{S_B(f)\} = \sigma^2 \delta[m]$

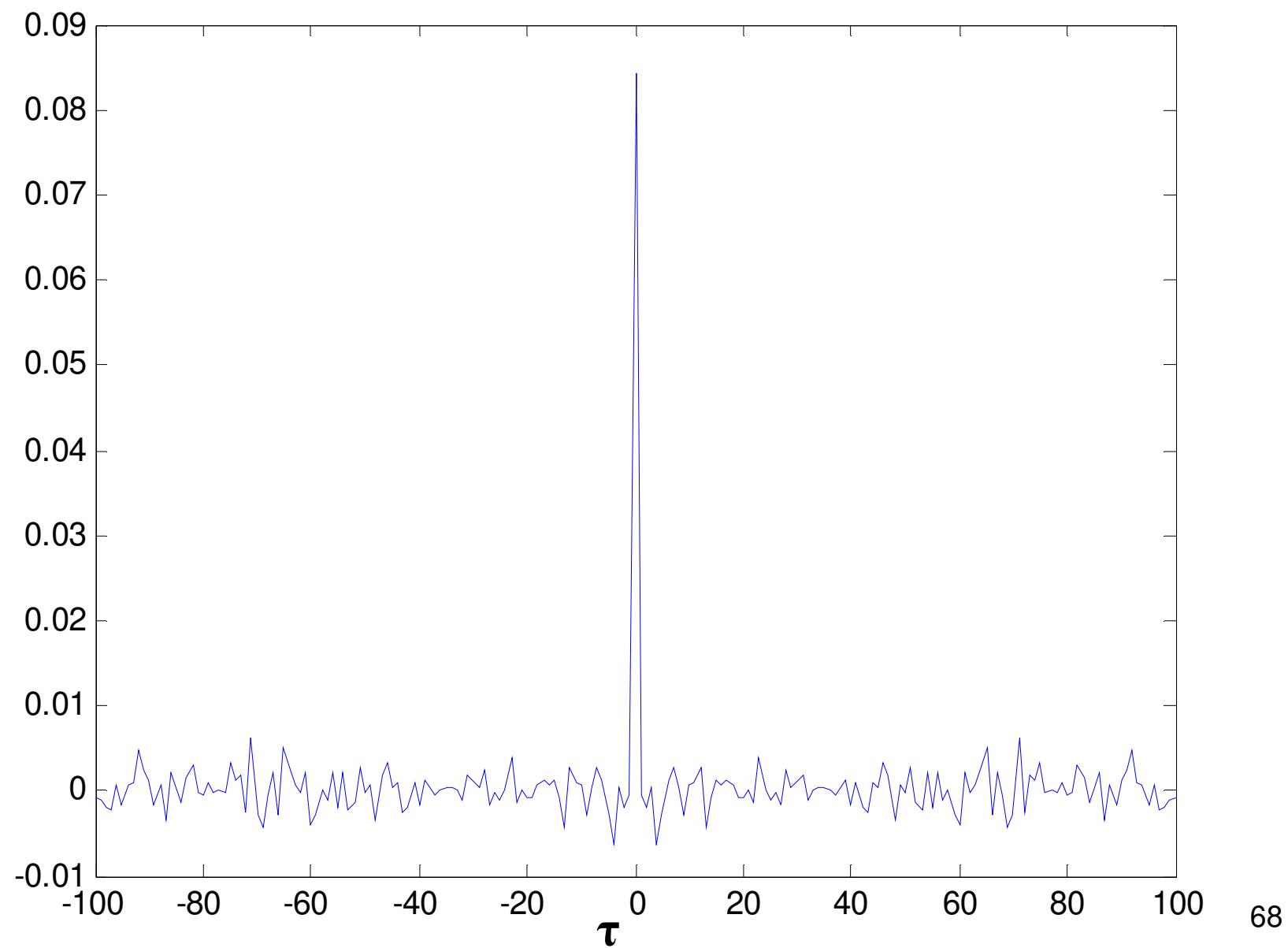
*Remarque 1:* Comme  $R_B[m] = 0 \quad \forall m \neq 0$ ,  $B[n_1]$  et  $B[n_2]$  sont non-corrélés  $\forall n_1 \neq n_2$ . Il n'y a donc aucune corrélation entre deux échantillons d'un bruit blanc. Par conséquent, la connaissance de la valeur d'un bruit blanc à un instant ne donne aucune information sur sa valeur à un autre instant.

- Si le bruit blanc passe dans un filtre, on obtient en sortie un bruit *coloré*. *Exemple: Bruit rose* (en acoustique):  $S_X(f) = k/|f|$

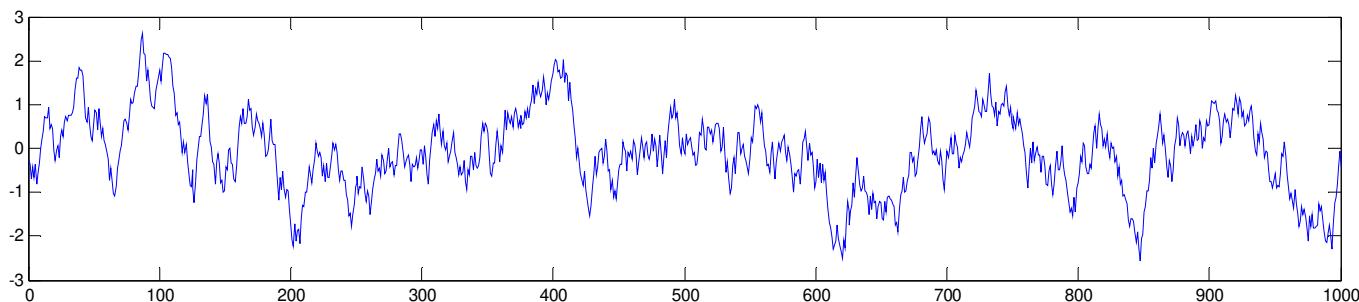
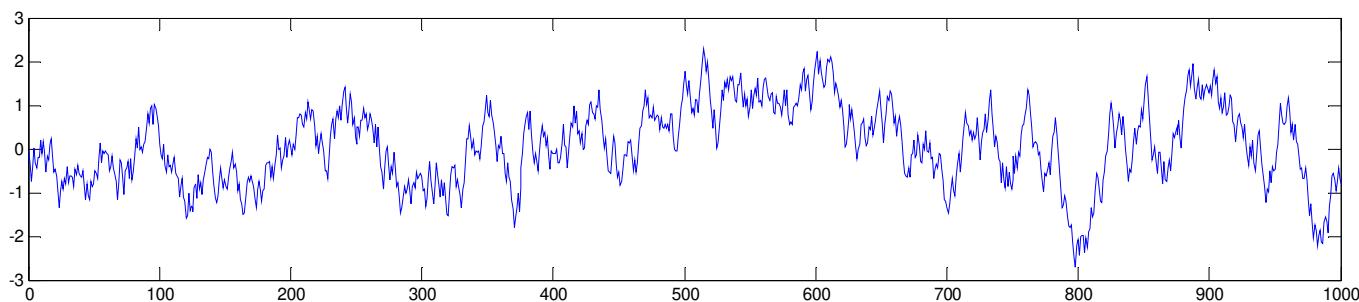
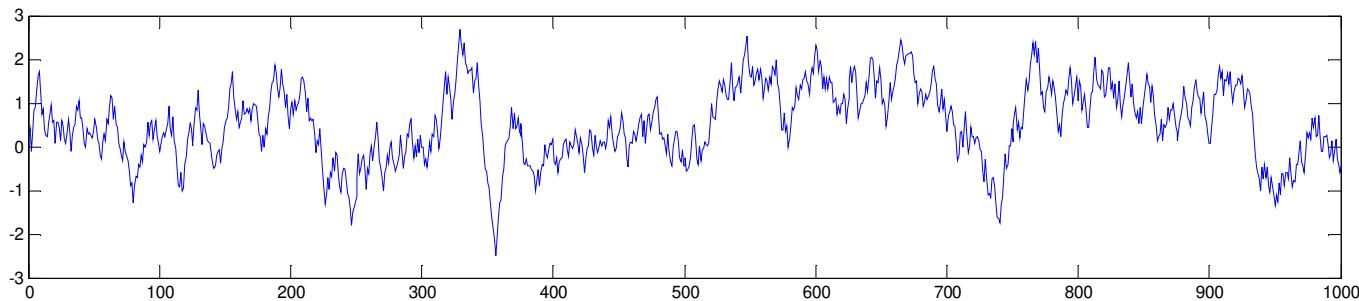
## Trois réalisations d'un bruit blanc



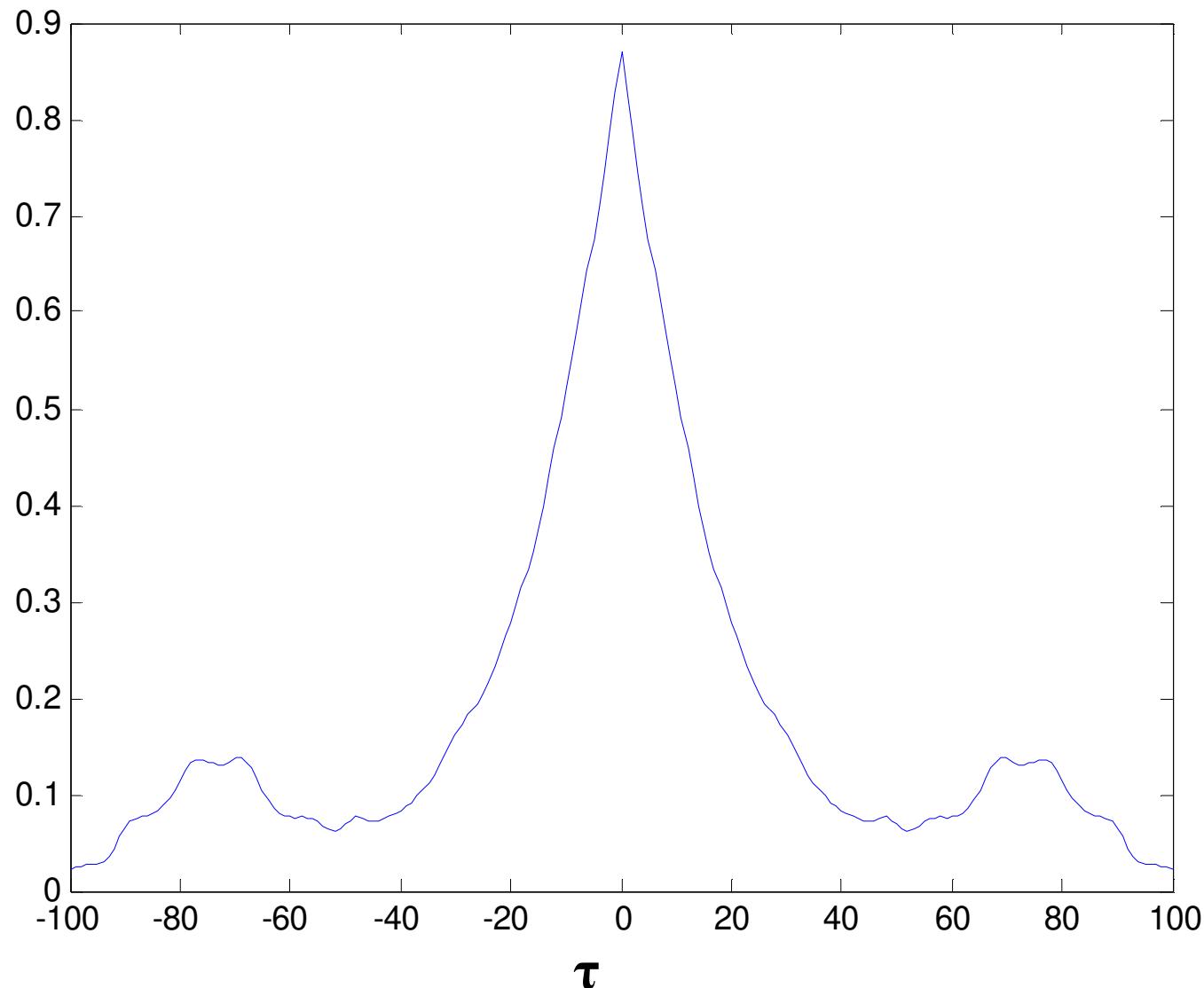
# Fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc



## Trois réalisations d'un bruit coloré



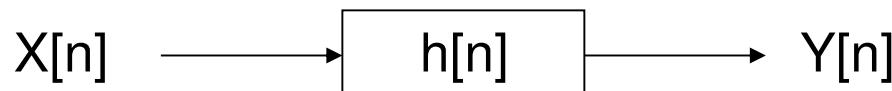
# Fonction d'autocorrélation d'un bruit coloré



### 3.8. Filtrage linéaire des signaux aléatoires

*Exemple:* bruit en entrée d'un système électrique

**Hypothèse:**  $X[n]$  est un s.a. SSL entrant dans un système déterministe linéaire et invariant dans le temps, de réponse impulsionnelle  $h[n]$ .



*convolution*

$$Y[n] = X[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[n-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]X[k]$$

**Objectif:** Calculer les statistiques de  $Y[n]$  à partir de celles de  $X[n]$ .

### a) Moyenne

Si  $X[n]$  est SSL, sa moyenne est constante:  $E\{X[n]\} = \mu_X$

On montre alors que la moyenne de  $Y[n]$  est aussi constante et égale à:

$$\mu_Y = \mu_X \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] = \mu_X \hat{h}(0)$$

avec  $\hat{h}(f)$  la transformée de Fourier de  $h[n]$ .

### b) Intercorrélation entre la sortie $Y[n]$ et l'entrée $X[n]$ du système

$$R_{YX}[m] = R_X[m] * h[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] R_X[m-k]$$

### c) Intercorrélation entre l'entrée $X[n]$ et la sortie $Y[n]$ du système

$$R_{XY}[m] = R_X[m] * h[-m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] R_X[m+k]$$

**d) Autocorrélation du signal de sortie Y[n]**

$$R_Y[m] = R_X[m]^* h[-m]^* h[m]$$

**e) Densité interspectrale des signaux entrée-sortie**

$$S_{YX}(f) = S_X(f) \hat{h}(f) \quad S_{XY}(f) = S_X(f) \hat{h}^*(f)$$

**f) DSP du signal de sortie**

$$S_Y(f) = S_X(f) |\hat{h}(f)|^2$$

**g) Puissance moyenne du signal de sortie**

$$P_Y = \int_{-1/2}^{1/2} S_X(f) |\hat{h}(f)|^2 df$$

# Chapitre 4: Analyse spectrale des signaux aléatoires

**Objectif:** On dispose de N échantillons d'une réalisation  $x[n]$  d'un s.a. SSL et ergodique  $X[n]$ . On souhaite estimer la fonction d'autocorrélation et la DSP de ce signal à partir de ces échantillons.

## Deux approches possibles

- 1. Estimation non-paramétrique:** On ne fait aucune hypothèse particulière sur la nature du signal  $X[n]$ .
- 2. Estimation paramétrique:** Le signal  $X[n]$  est décrit par un modèle paramétrique (il est considéré comme le résultat du filtrage d'un bruit blanc) → ses statistiques (en particulier  $R_x[m]$  et  $S_x(f)$ ) dépendent des paramètres du modèle.

## 4.1. Biais et Variance d'un estimateur

Soient  $s$  un paramètre que l'on souhaite estimer et  $\overset{o}{S} = g(X_1, X_2, \dots, X_N)$  son estimation à partir de  $N$  variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_N$ .

$\overset{o}{S}$  elle-même est une variable aléatoire de densité de probabilité  $f_{\overset{o}{S}}(s)$ .

Si  $x_1, x_2, \dots, x_N$  sont des réalisations de  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , alors  $\overset{o}{s} = g(x_1, x_2, \dots, x_N)$  est aussi une réalisation de la variable aléatoire  $\overset{o}{S}$ .

Le **biais** de l'estimateur est défini comme la différence entre la valeur moyenne de la v.a.  $\overset{o}{S}$  et la vraie valeur du paramètre  $s$ :

$$B_{\overset{o}{S}} = s - E\left\{\overset{o}{S}\right\}$$

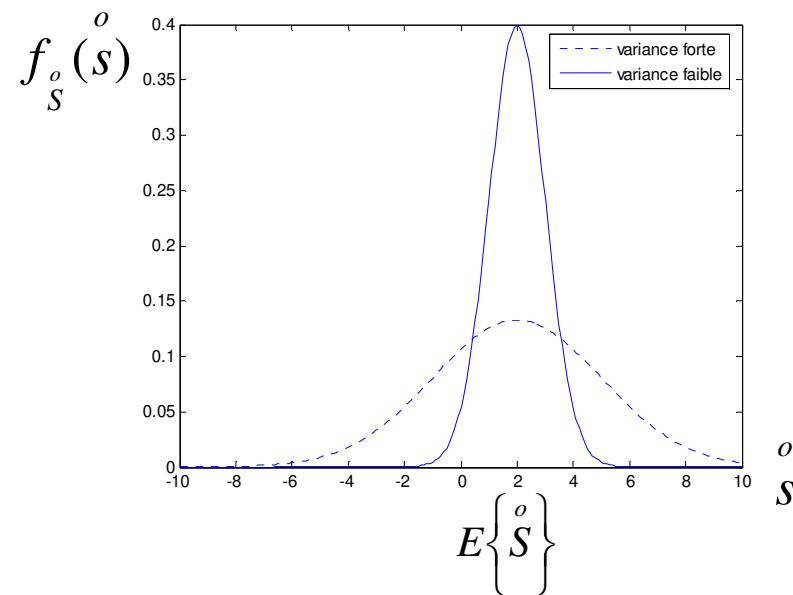
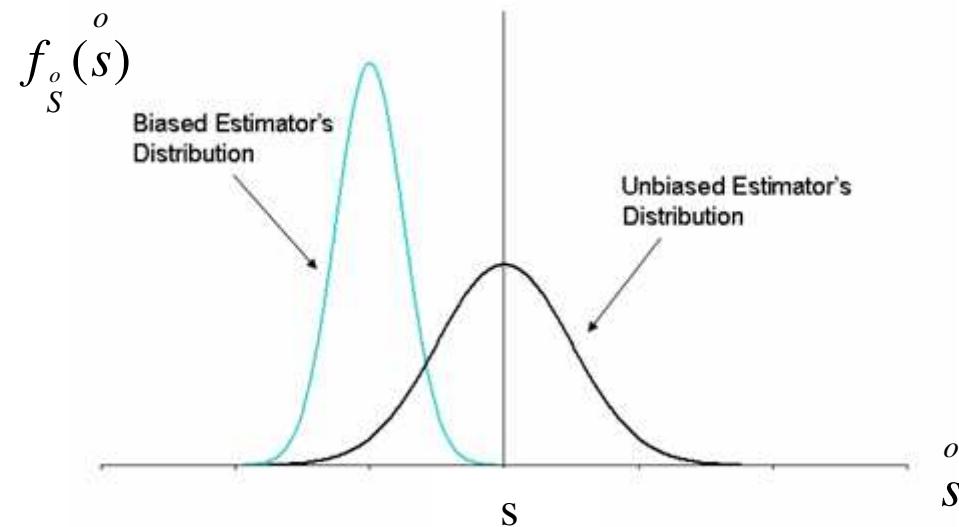
La **variance** de l'estimateur est une mesure de variations de  $\overset{o}{S}$  autour de sa moyenne:

$$Var\left\{\overset{o}{S}\right\} = E\left\{\left(\overset{o}{S} - E\left\{\overset{o}{S}\right\}\right)^2\right\} = \sigma_{\overset{o}{S}}^2$$

- \* Un estimateur **non-biaisé** a un biais nul. Dans ce cas, la densité de probabilité de  $\overset{o}{S}$  est centrée sur la vraie valeur de paramètre  $s$ .
- \* Une faible valeur de variance indique une concentration de la densité de probabilité autour de la valeur moyenne  $E\left\{\overset{o}{S}\right\}$ .
- \* Un estimateur satisfaisant doit posséder un biais et une variance aussi petits que possible. En général, la diminution de l'un provoque malheureusement l'augmentation de l'autre.
- \* Le compromis entre le biais et la variance peut être étudié à l'aide de **l'erreur quadratique moyenne**, définie par:

$$EQM_{\overset{o}{S}} = E\left\{\left(\overset{o}{S} - s\right)^2\right\} = \sigma_{\overset{o}{S}}^2 + B_{\overset{o}{S}}^2$$

- \* Si le biais et la variance tendent vers zéro lorsqu'on augmente le nombre N de variables observées, l'estimateur est appelé **consistant**.



## 4.2. Estimation non-paramétrique de l'autocorrélation

Le signal étant ergodique, on peut écrire

$$R_X[m] = E\{X[n+m]X[n]\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n+m]x[n]$$

En pratique, pourtant, on doit estimer l'autocorrélation à partir de  $N$  échantillons disponibles  $x[1], x[2], \dots, x[N]$ .

### a) Estimateur non-biaisé

$$\overset{o}{R}_X^{nb}[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=1}^{N-m} x[n+m]x[n] \quad m \geq 0$$

$$\overset{o}{R}_X^{nb}[-m] = \overset{o}{R}_X^{nb}[m]$$

**Biais:**  $E\left\{ \overset{o}{R}_X[m] \right\} = R_X[m] \Rightarrow B\left\{ \overset{o}{R}_X[m] \right\} = 0$

**Variance:** Le calcul de la variance est compliqué. Pour  $N \gg m$ , on peut utiliser l'approximation suivante

$$Var\left\{ \overset{o}{R}_X[m] \right\} \approx \frac{N}{(N - |m|)^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (R_X^2[l] + R_X[l+m]R_X[l-m])$$

Comme le biais est nul et  $\lim_{N \rightarrow \infty} Var\left\{ \overset{o}{R}_X[m] \right\} = 0$ , l'estimateur est consistant.

La variance augmente avec  $|m|$ .

## b) Estimateur biaisé

$$\overset{o}{R}_X[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-m} x[n+m]x[n] \quad m \geq 0 \quad \text{et} \quad \overset{o}{R}_X[-m] = \overset{o}{R}_X[m]$$

**Biais:**

$$E\left\{\overset{o}{R}_X[m]\right\} = \frac{N - |m|}{N} R_X[m] \Rightarrow B\left\{\overset{o}{R}_X[m]\right\} = \frac{|m|}{N} R_X[m] \neq 0$$

Asymptotiquement non-biaisé car

$$\lim_{N \rightarrow \infty} B\left\{\overset{o}{R}_X[m]\right\} = 0$$

**Variance:** pour  $N \gg m$

$$Var\left\{\overset{o}{R}_X[m]\right\} \equiv \frac{1}{N} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (R_X^2[l] + R_X[l+m]R_X[l-m])$$

Estimateur consistant.

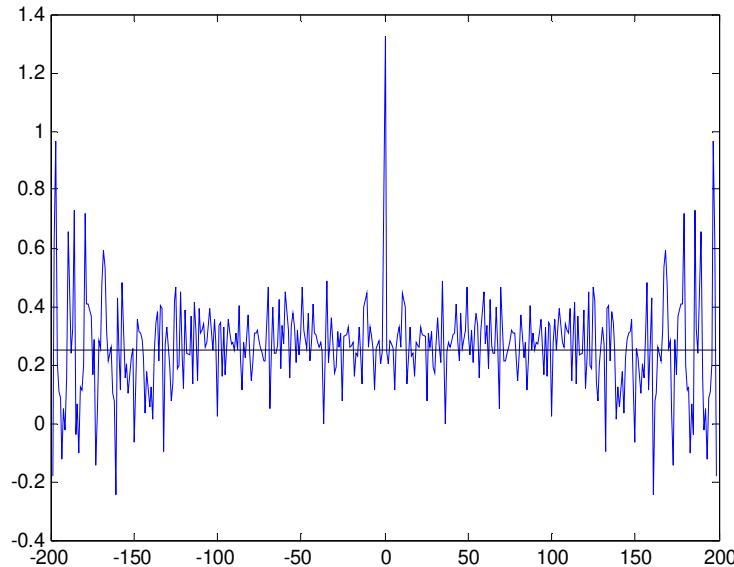
## Comparaison des deux estimateurs

- Quand  $m$  est petit (ou  $N$  est grand), les deux estimateurs sont presque équivalents et donnent une bonne estimation.
  - Pour les valeurs de  $m$  proches de  $N$  :
    - la variance de l'estimateur non-biaisé augmente considérablement (car l'autocorrélation est estimée à partir d'un faible nombre d'échantillons),
    - la variance de l'estimateur biaisé ne devient pas aussi grande (car elle ne dépend pas directement du décalage  $m$ ),
    - le biais de l'estimateur biaisé augmente.
- ==> Compromis biais-variance: il faut comparer les EQM.

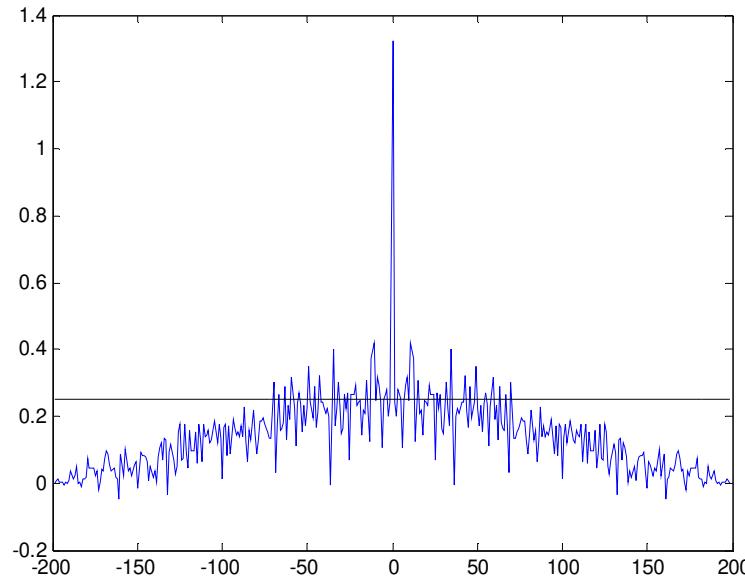
On montre que dans de nombreux cas, l'EQM de l'estimateur biaisé est nettement inférieure à celle de l'estimateur non-biaisé.

```
X=randn(200,1)+0.5
```

`xcorr(X,'unbiased')`



`xcorr(X,'biased')`



## 4.3. Estimation non-paramétrique de la DSP

Rappel:  $S_X(f) = TF\{R_X[m]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_X[m]e^{-j2\pi fm}$

On souhaite estimer la DSP à partir de N échantillons du signal.

### a) Corrélogramme

On calcule la transformée de Fourier de l'estimateur de l'autocorrélation.

#### a.1. TF de l'estimateur non-biaisé de l'autocorrélation

$$S_X^{cnb}(f) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} R_X^{nb}[m]e^{-j2\pi fm}$$

**Biais:**  $B = S_X(f) - TF\{R_X[m].w_1[m]\} = S_X(f) - S_X(f) * \hat{w}_1(f) \neq 0$

avec  $w_1[m]$  fenêtre rectangulaire de largeur  $2N-1$ .

\* Estimateur est biaisé et la positivité de  $S_X^{cnb}(f)$  non-assurée.

## a.2. TF de l'estimateur biaisé de l'autocorrélation

$$\overset{o}{S}_X^{cb}(f) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \overset{o}{R}_X^b[m] e^{-j2\pi fm}$$

**Biais:**  $B = S_X(f) - TF\{R_X[m].w_2[m]\} = S_X(f) - S_X(f)^* \hat{w}_2(f) \neq 0$

avec  $w_2[m]$  fenêtre triangulaire de largeur  $2N-1$  (fenêtre de Bartlett).

\* Estimateur est biaisé mais la positivité de  $\overset{o}{S}_X^{cb}(f)$  est assurée.

\* Les deux estimateurs sont asymptotiquement non-biaisés.

**b) Périodogramme**       $\overset{o}{S}_X^p(f) = \frac{1}{N} |\hat{x}(f)|^2$

avec  $\hat{x}(f) = \sum_{n=1}^N x[n] e^{-j2\pi f n}$  la transformée de Fourier du signal observé.

\* On peut montrer que  $\overset{o}{S}_X^p(f) = \overset{o}{S}_X^{cb}(f) = TF \left\{ \overset{o}{R}_X^b[m] \right\}$

$\Rightarrow$  mêmes propriétés que  $\overset{o}{S}_X^{cb}(f)$  (en particulier, même biais)

**Variance** dans le cas d'un bruit blanc gaussien (de DSP  $\sigma_X^2$ ):

$$Var \left\{ \overset{o}{S}_X^p(f) \right\} = \sigma_X^4 \left[ 1 + \left( \frac{\sin(2\pi f N)}{N \sin(2\pi f)} \right)^2 \right]$$

**Variance** dans le cas d'un bruit coloré gaussien (de DSP  $S_X(f)$ ):

$$Var \left\{ \overset{o}{S}_X^p(f) \right\} \cong S_X^2(f) \left[ 1 + \left( \frac{\sin(2\pi f N)}{N \sin(2\pi f)} \right)^2 \right]$$

\* On peut remarquer que quand  $N$  tend vers l'infini, la variance ne tend pas vers zéro.

==> Le périodogramme n'est pas un estimateur consistant.

\* Quel que soit  $N$ , la variance est proportionnelle au carré de la DSP cherchée.

## **Solutions pour réduire la variance du périodogramme**

### **a) Périodogramme moyené**

Pour réduire la variance d'un estimateur, on peut calculer la moyenne sur plusieurs estimateurs indépendants:

- on divise les  $N$  échantillons du signal observé en  $L$  sections  $x_l[n]$ , chacune de  $M=N/L$  échantillons,
- on calcule le périodogramme sur chaque section,
- on calcule la moyenne des périodogrammes.

$$\boxed{\underbrace{x[0] x[1] \dots x[M-1]}_{x_1[n]_{n=0\dots M-1}} \quad \underbrace{x[M] \dots x[2M-1]}_{x_2[n]_{n=0\dots M-1}} \quad \dots \quad \underbrace{x[N-M] \dots x[N-1]}_{x_L[n]_{n=0\dots M-1}}}$$

$$x_l[n] = x[n + (l-1)M] \quad \text{avec} \quad n = 0, \dots, M-1 \quad \text{et} \quad l = 1, \dots, L$$

\* Périodogramme de chaque section:

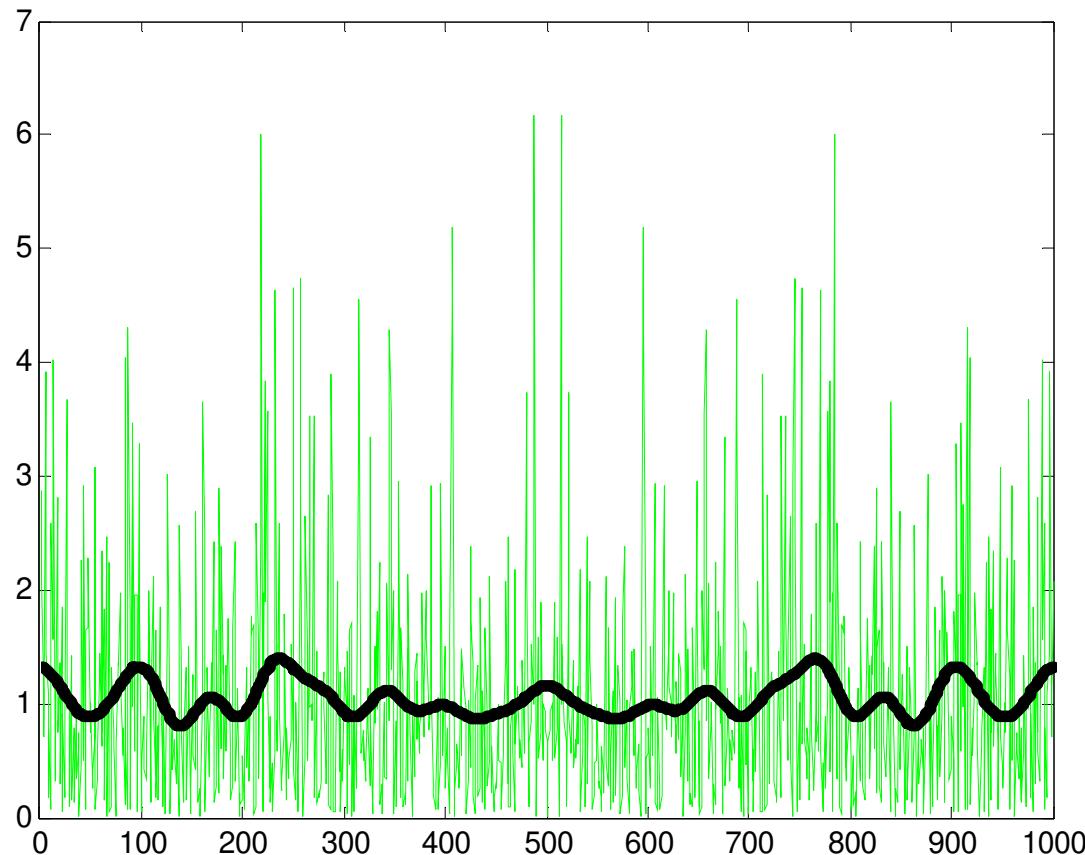
$$S_{X_l}^p(f) = \frac{1}{M} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_l[n] e^{-j2\pi fn} \right|^2$$

\* Périodogramme moyené:

$$S_X^{pm}(f) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L S_{X_l}^p(f)$$

La variance est divisée par L, mais le biais augmente.

```
X=randn(1000,1)
```



Périodogramme simple (courbe fine) et Périodogramme moyené (courbe épaisse) pour N=1000, L=50, M=20.

## b) Périodogramme lissé (fenêtrage)

Pour réduire les variations rapides du périodogramme, on peut le « filtrer » en le convoluant par une fonction  $\hat{w}(f)$ .

Cela consiste à multiplier l'estimateur de la fonction d'autocorrélation par une fenêtre  $w[m]$ .

## c) Périodogramme de Welch

Combine les deux méthodes précédentes (moyennage et fenêtrage):

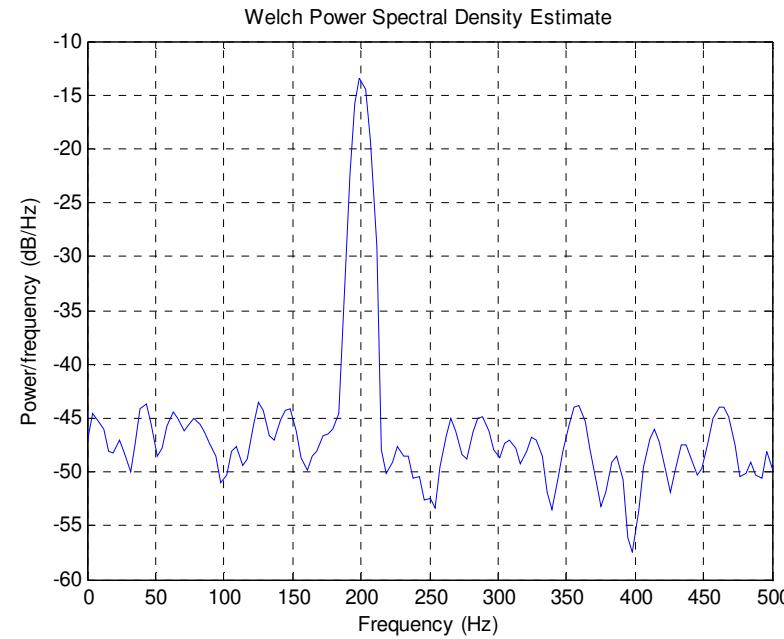
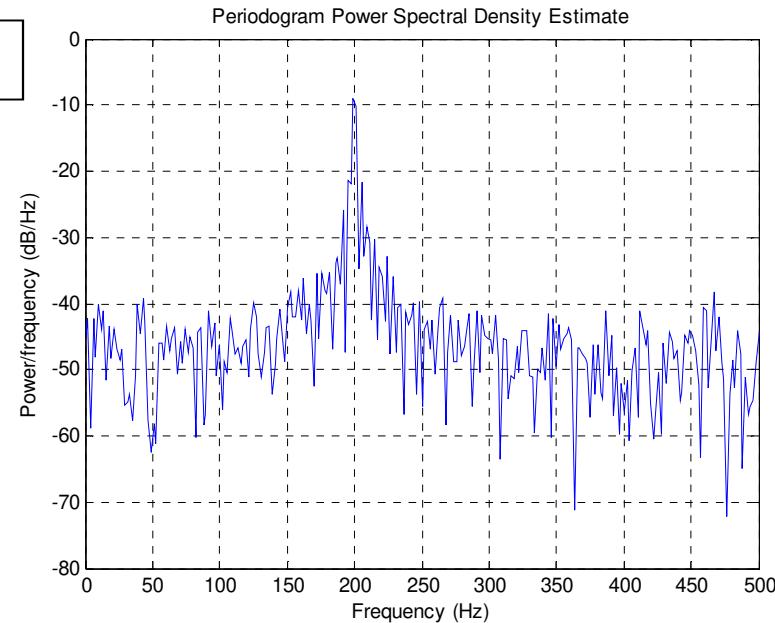
- On divise le signal en L sections de M échantillons,
- chaque section est multipliée par une fenêtre  $w[n]$ ,
- on calcule le périodogramme de chaque section fenêtrée,
- on calcule la moyenne de ces périodogrammes.

$$S_X^{pw}(f) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L S_{X_l}^{pw}(f) \quad \text{avec} \quad S_{X_l}^{pw}(f) = \frac{1}{MP} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_l[n] w[n] e^{-j2\pi f n} \right|^2$$

```
x = cos(2*pi*t*200)+0.1*randn(size(t));
```

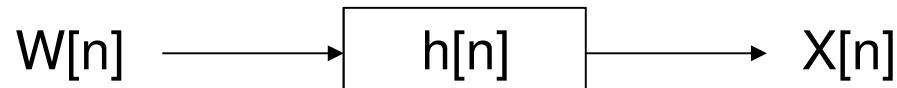
```
periodogram(x,[],'onesided',512,Fs)
```

```
pwelch(x,128,120,[],Fs,'onesided')
```



## 4.4. Estimation paramétrique de DSP

Le signal  $X[n]$  est décrit par un modèle paramétrique: il est considéré comme le résultat du filtrage d'un bruit blanc  $W[n]$ .



→ ses statistiques dépendent des paramètres du modèle.

### Procédure:

- 1) Calculer une estimation non-paramétrique de la fonction d'autocorrélation de  $X$  à partir des  $N$  échantillons disponibles d'une réalisation de  $X[n]$ ,
- 2) Identifier les paramètres du modèle à partir de cette estimation de l'autocorrélation,
- 3) Estimer la DSP de  $X$  en utilisant la formule  $S_X(f) = \sigma_w^2 |\hat{h}(f)|^2$

## a) Modèle AR (AutoRégressif)

Considérons l'équation de récurrence suivante

$$X[n] + a_1 X[n-1] + a_2 X[n-2] + \dots + a_N X[n-N] = W[n]$$

où  $W[n]$  est un **bruit blanc** centré de puissance  $\sigma_W^2$  (c-à-d  $E\{W[n]\}=0$ ,  $E\{W^2[n]\}=\sigma_W^2$  et  $E\{W[n]W[n-i]\}=0$  si  $i\neq 0$ ). Le s.a.  $X[n]$  est appelé un processus AR d'ordre N.

\* En prenant la transformée en Z de l'équation de récurrence, on peut obtenir la fonction de transfert de ce modèle:

$$H(z) = \frac{X(z)}{W(z)} = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}}$$

Le système est **stable** si tous les pôles de  $H(z)$  sont à l'intérieur du cercle unité (de module inférieur à 1).

### Remarques:

- 1) Pour  $i > 0$ :  $E\{x[n-i]w[n]\} = E\{x[n-i]\}E\{w[n]\} = 0$  (car le système est causal et  $w[n]$  est un bruit blanc centré)
- 2) Pour  $i=0$ :  $E\{x[n]w[n]\} = E\{(-a_1x[n-1]-\dots-a_Nx[n-N]+w[n])w[n]\}$   
 $= -a_1E\{x[n-1]w[n]\}-\dots-a_NE\{x[n-N]w[n]\} + E\{w^2[n]\} = \sigma_w^2$

### **Identification des paramètres du modèle**

Exemple pour un modèle AR1:  $X[n] + a_1X[n-1] = W[n]$

On montre que les paramètres du modèle ( $a_1$  et  $\sigma_w^2$ ) sont les solutions du système d'équations linéaire ci-dessous (Equations de Yule-Walker):

$$R_X[0] + a_1R_X[1] = \sigma_w^2 \quad R_X[1] + a_1R_X[0] = 0$$

Ayant estimé  $R_X[0]$  et  $R_X[1]$  à partir des échantillons du signal, on peut identifier les paramètre du modèle en résolvant le système ci-dessus et estimer ensuite la DSP en utilisant cette formule:

$$S_x(f) = \sigma_w^2 |\hat{h}(f)|^2 = \frac{\sigma_w^2}{|1 + a_1 e^{-j2\pi f}|^2}$$

## b) Modèle MA (Moving Average ou *Moyenne mobile*)

Un s.a.  $X[n]$  est un processus **MA d'ordre M** s'il satisfait l'équation suivante

$$X[n] = W[n] + b_1 W[n-1] + \cdots + b_M W[n-M]$$

où **W[n]** est un bruit blanc centré de variance  $\sigma_W^2$ .

\* En prenant la transformée en Z de cette équation, on peut obtenir la **fonction de transfert** de ce modèle:

$$H(z) = \frac{X(z)}{W(z)} = 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_M z^{-M} \quad (\text{filtre RIF})$$

Cette fonction de transfert possède M pôles à l'origine: **le système est donc toujours stable.**

**Exemple:** Pour un MA d'ordre 1, on peut montrer que

$$R_X[0] = (1 + b_1^2) \sigma_W^2 \quad R_X[1] = b_1 \sigma_W^2$$

$$R_X[k] = 0 \quad \forall k > 1$$

## Comparaison entre AR et MA

- MA est plus facile à simuler (pas d'équation de récurrence), *mais*
- Les paramètres d'un modèle MA sont plus difficiles à estimer (la relation entre la fonction d'autocorrélation et les paramètres n'est pas linéaire).

## C) Modèle ARMA

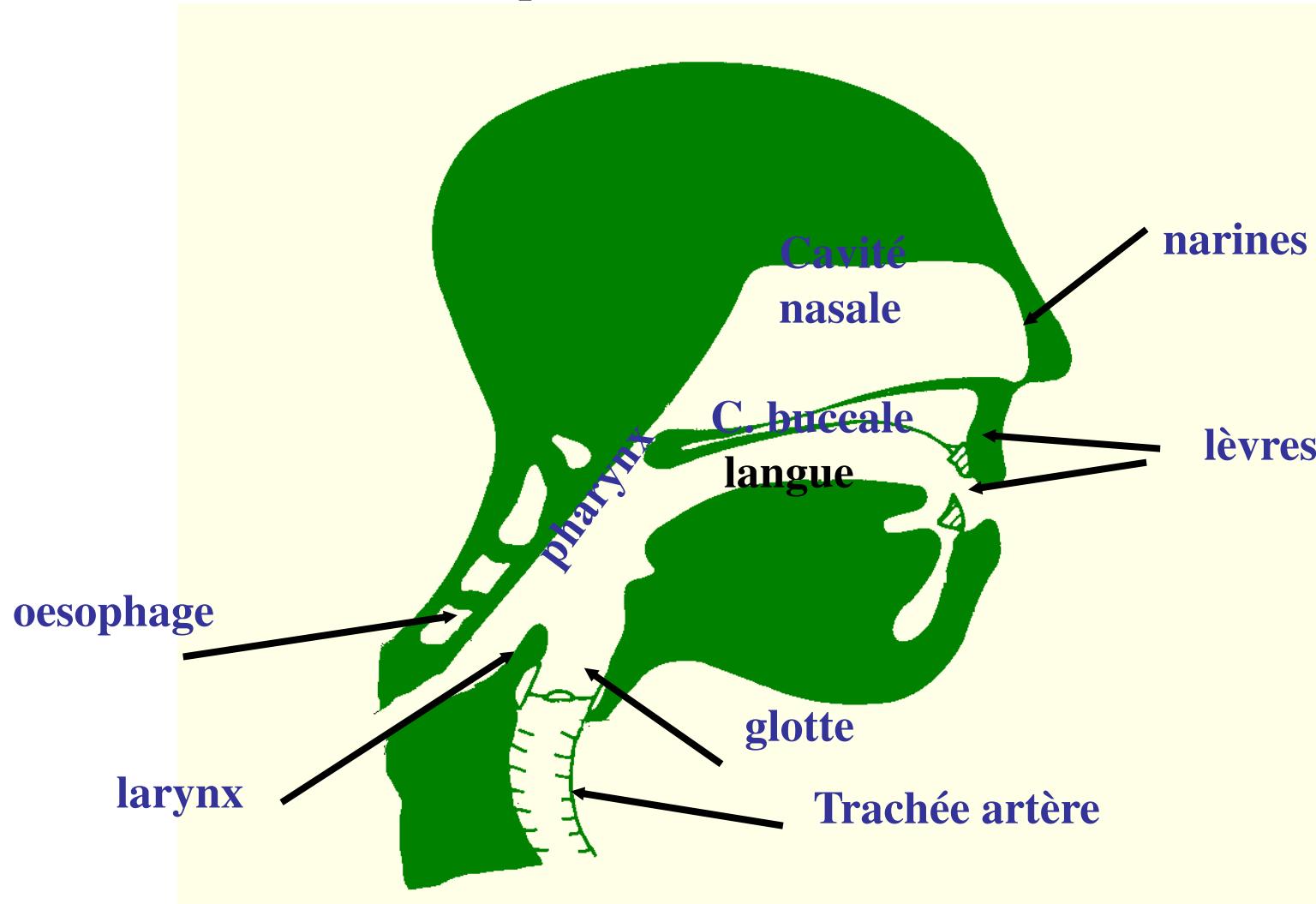
$$X[n] + a_1 X[n-1] + \dots + a_N X[n-N] = W[n] + \dots + b_M W[n-M]$$

$$H(z) = \frac{X(z)}{W(z)} = \frac{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-N}}$$

- Ce système est stable si tous ses pôles sont dans le cercle unité
- Il est plus général que les deux autres modèles mais possède les inconvénients des deux: difficile à simuler et à estimer

# Exemple d'application en traitement de la parole

Production naturelle de la parole



Larynx

Cordes  
vocales

épiglotte

muqueuse

glotte

L'appareil respiratoire fournit l'énergie nécessaire à la production de sons en poussant de l'air.

Le larynx module la pression de l'air avant son application au conduit vocal.

Pendant la phonation des **sons non-voisés** (exemples: f, k, p, s, t), les cordes vocales sont écartées et l'air y passe librement.

Les **sons voisés** (exemples: voyelles, b, d, g, v, z) résultent au contraire d'une vibration périodique des cordes vocales.

La **fréquence fondamentale (pitch)** de la parole est fixée par la fréquence de vibration des cordes vocales.

Dans la prononciation des **sons nasals**, la cavité nasale viens s'ajouter au système.

On peut considérer le conduit vocal comme un instrument de musique:

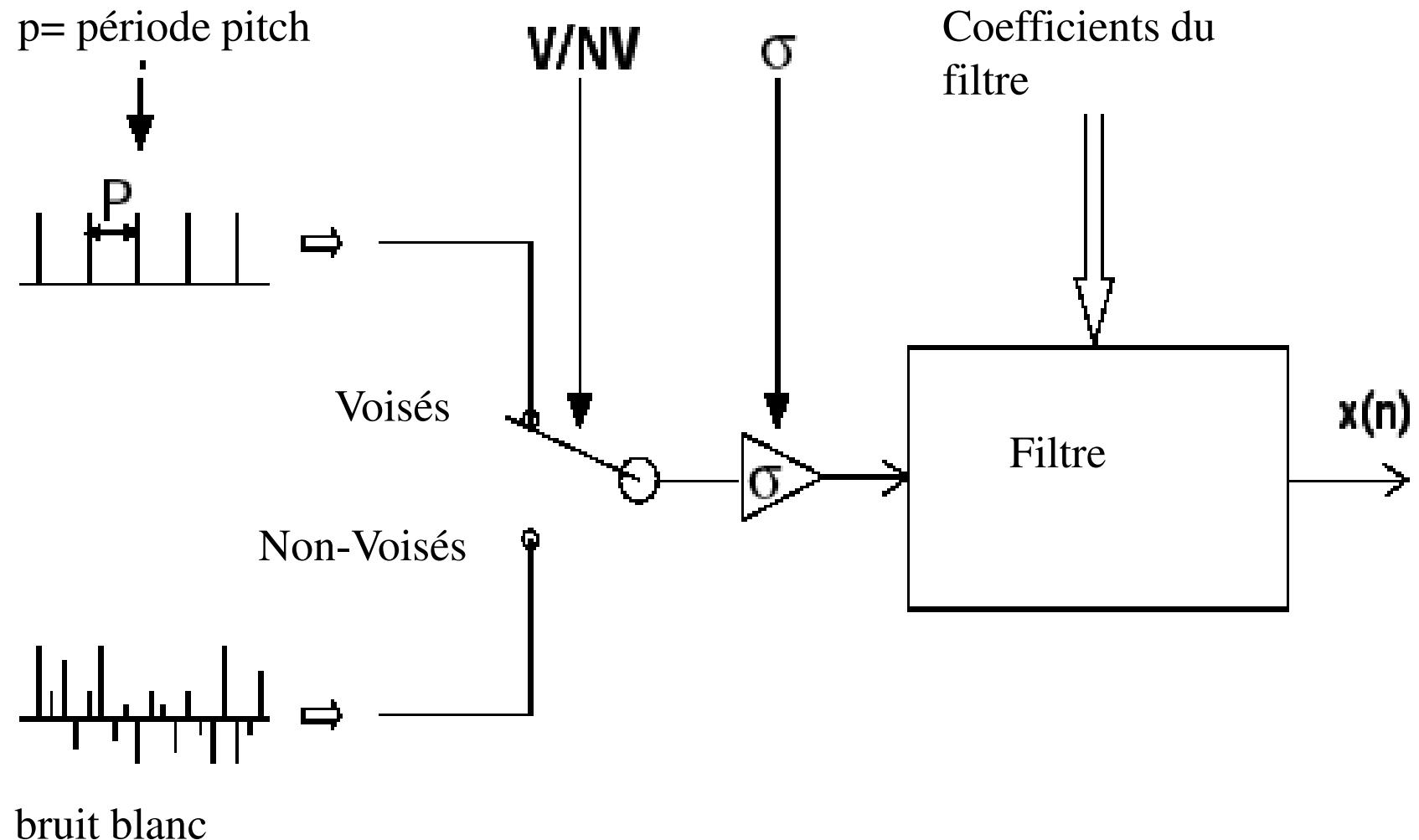
- il y a une partie qui fait le son (corde, anche, ...)
- et il y a une partie qui donne la forme à ce son (corps d'un violon, tube d'une clarinette)

Dans la production de la parole:

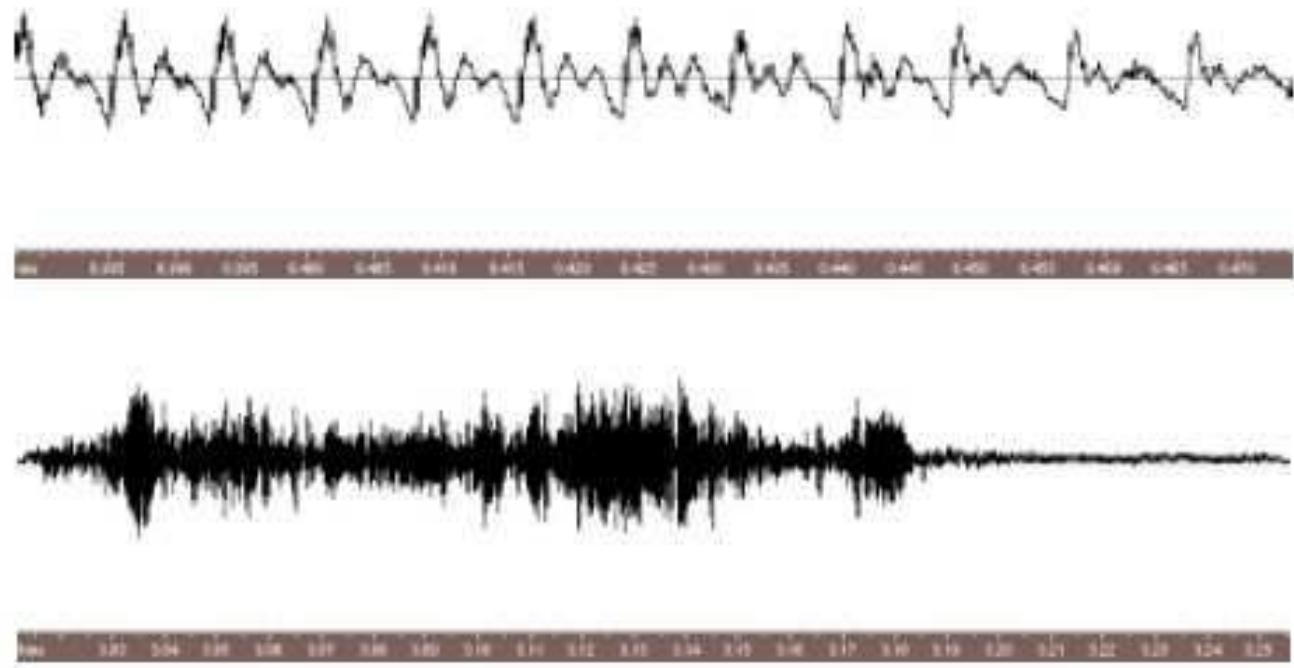
- **la source** vient de l'air, modulé éventuellement par les cordes vocales (constitué ainsi d'une fréquence fondamentale et des harmoniques)
- l'énergie fournie par la source est ensuite "filtrée" par le conduit vocal (qui amplifie certaines fréquences et atténue d'autres).

La source peut être modélisée par **une suite d'impulsions** dans le cas des **sons voisés** et par **un bruit blanc** dans le cas des **sons non-voisés**.

## Modèle de production de la parole



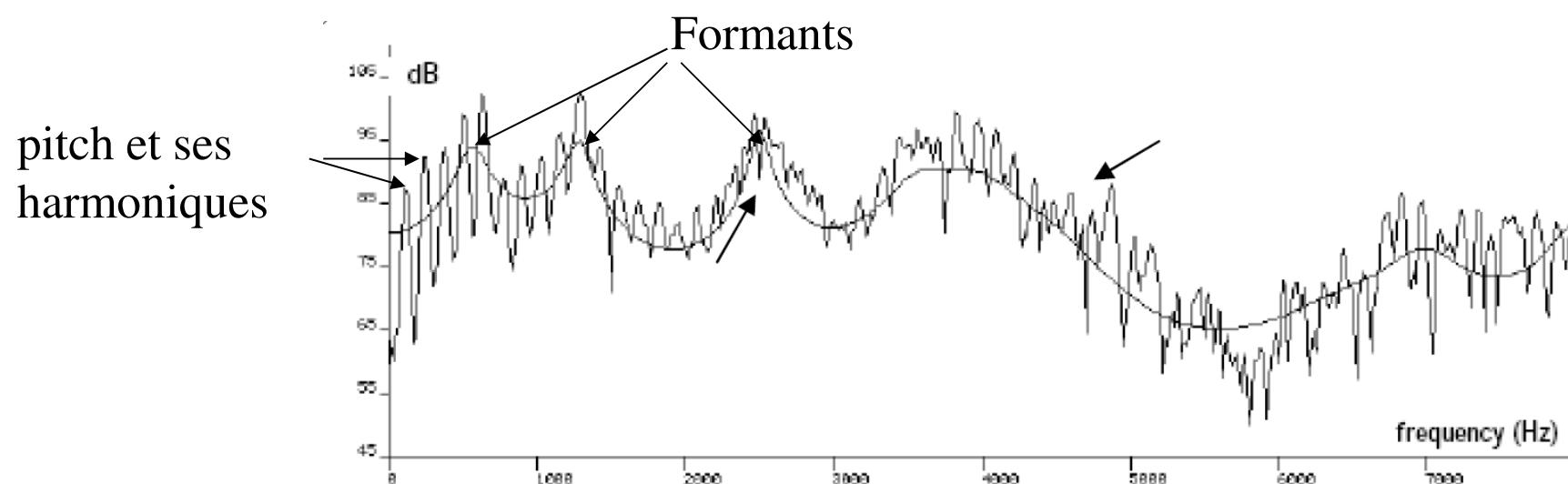
## Audiogramme d'un signal de parole: Evolution temporelle du signal



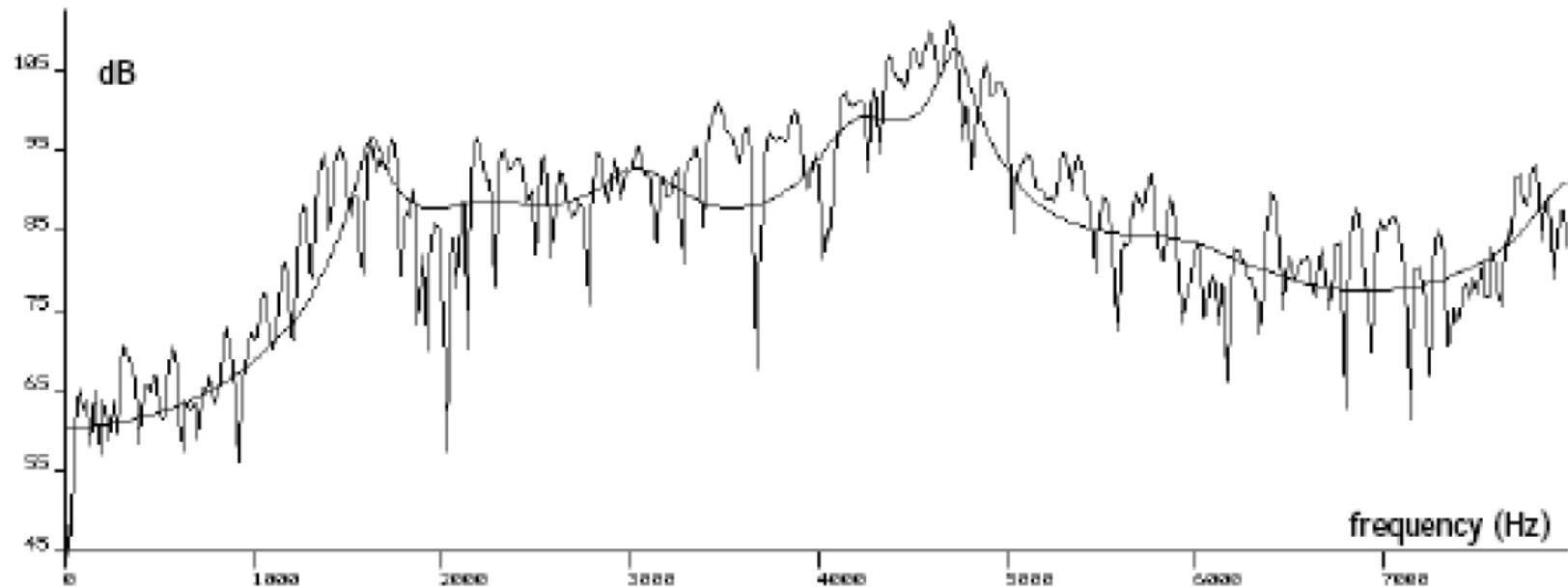
En haut: Son voisé (quasi-périodique, période pitch),  
En bas: Son non-voisé (bruit)

## Représentation spectrale

Transformée de Fourier d'une petite tranche du signal (30 ms en pratique, car sur cette durée le signal de parole est quasi-stationnaire).



TF d'une tranche voisée (le son « a ») et son enveloppe spectral



TF d'une tranche non-voisée (le son « ch ») et son enveloppe spectral

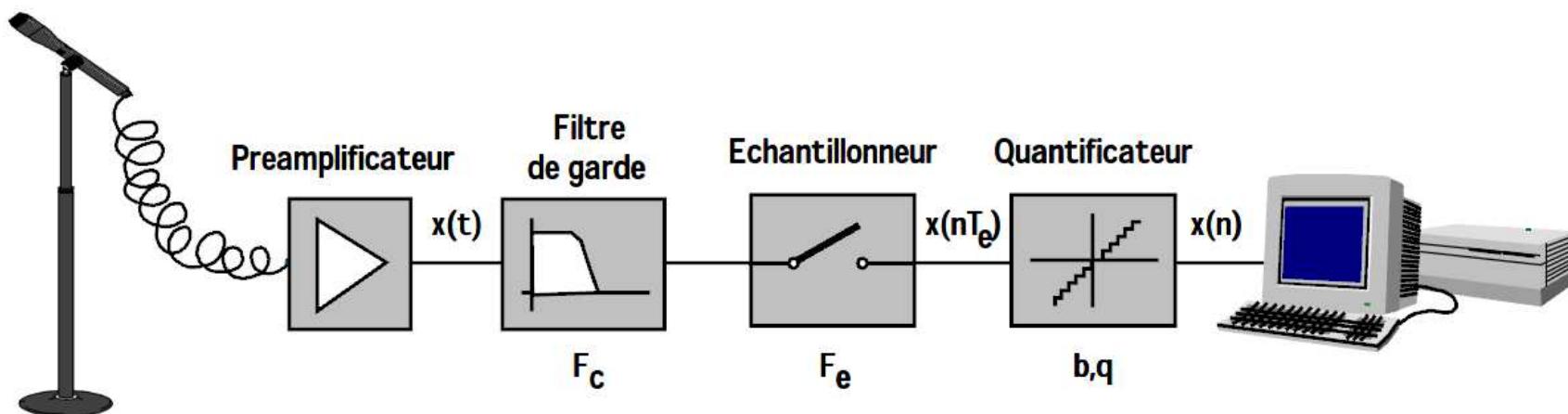
Dans la TF d'une tranche du signal de parole (son spectre):

- \* Les **parties voisées** apparaissent sous la forme de successions de pics spectraux marqués, dont les fréquences centrales sont multiples de la fréquence fondamentale.
- \* Le spectre d'une **partie non-voisée** ne présente aucune structure particulière

La forme général de ces spectres (**enveloppe spectrale**) présente elle-même des pics et des creux qui correspondent aux résonances et aux anti-résonances du conduit vocal et sont appelés **formants** et anti-formants. L'évolution temporelle de leur fréquence centrale et de leur largeur de bande détermine le **timbre** du son.

# Codage de la parole

Enregistrement numérique d'un signal acoustique



## Echantillonnage de la parole

Le spectre du signal de parole peut s'étendre jusqu'à **12 kHz**. Mais pour les applications courantes (téléphonie), une qualité suffisante peut être obtenue en limitant le spectre à **3400 Hz**.

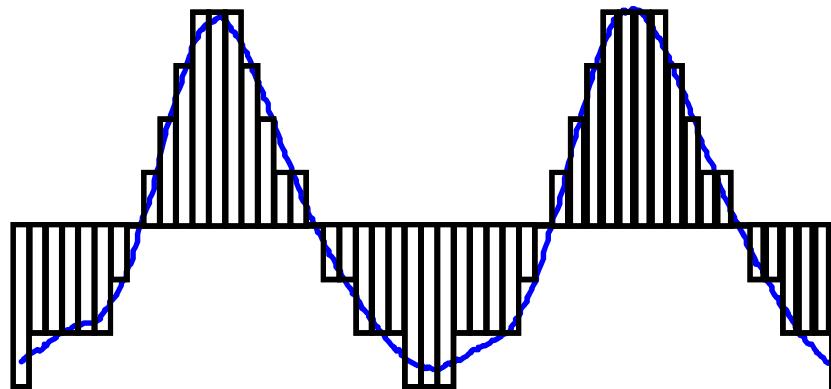
**Shannon:**  $F_e > 2f_m$

**Téléphonie:**  $F_e = 8000$  échantillons/sec

**Analyse, synthèse, reconnaissance:**  $F_e$  peut varier de 6000 à 16000 échantillons/sec

**Signal audio (parole+musique):**  $f_m = 20$  kHz et  $F_e = 44,1$  ou  $48$  k échantillons/sec

## Quantification de la parole



La quantification produit une erreur qui se comporte comme un bruit.  
Le pas de quantification est donc imposé par le rapport signal à bruit à garantir.

Lors de la transmission sans codage, chaque échantillon d'un signal de parole est représenté sur **8 bits** (256 valeurs) et chaque échantillon du signal musical sur **16 bits** (65536 valeurs)

## Conclusion:

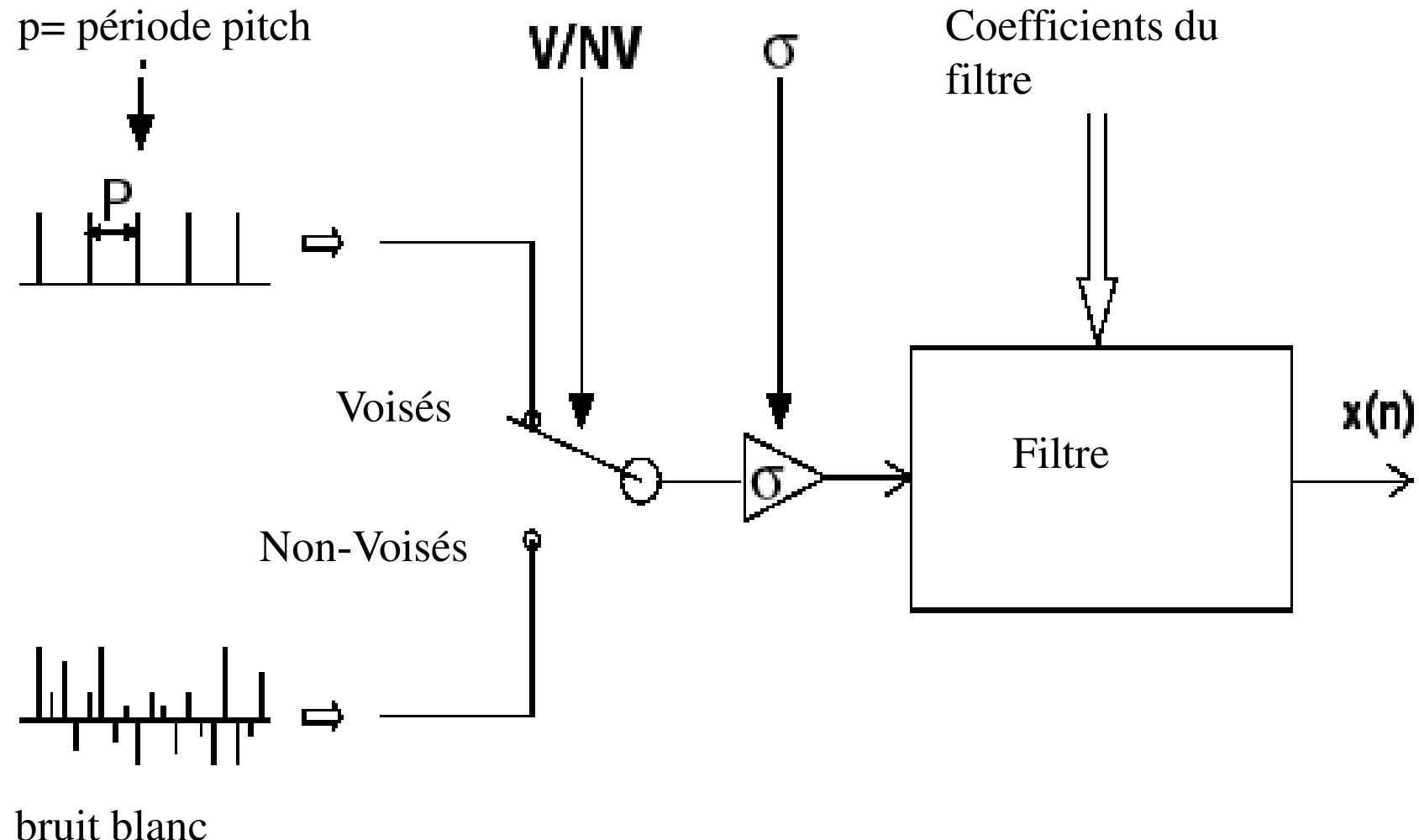
La transmission téléphonique classique (sans codage) exige un débit de **64000** bits/sec

La transmission ou l'enregistrement d'un signal audio (parole + musique) exige **768000** bits/sec (à multiplier par deux pour un signal stéréophonique)

- \* La **redondance** naturelle du signal de parole permet de réduire le débit binaire (en utilisant les **algorithme de codage**), au prix d'un traitement plus ou moins complexe et au risque d'une certaine dégradation de la qualité.

## Codage LPC (Linear Predictive Coding)

Cette méthode de codage est basée sur le modèle de production de la parole

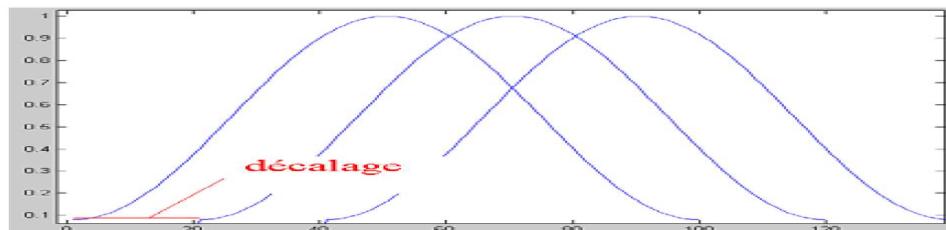


## Description de ce modèle:

- Un son  $x(n)$  voisé peut être modélisé par le passage d'un train d'impulsion périodique (de période pitch) à travers un filtre numérique.
- Un son  $x(n)$  non-voisé peut être modélisé par le passage d'un bruit blanc à travers d'un filtre numérique.
- Les coefficients du filtre dépendent du phonème prononcé, et donc de la position des formants pour ce phonème.
- Le signal de parole est stationnaire sur les tranches de 30-40 msec. La nature du son (voisé, non-voisé), la période pitch, et les coefficients de filtre ne changent pas sur cette tranche mais peuvent changer d'une tranche à l'autre.

## Idée

On coupe le signal de parole en tranches de 30-40 msec, avec un recouvrement de 10-20 msec entre deux fenêtres successives. On utilise généralement une fenêtre de **Hanning** pour compenser les effets de bord.



Pour chaque tranche, on calcule les paramètres suivants:

- **V/NV**: une valeur binaire (=1 si la tranche voisée, =0 sinon)
- **P**: Période pitch (si la tranche est voisée)
- **$\sigma^2$**  : puissance moyenne (intensité du signal)
- **$a_1, \dots, a_M$** : paramètres du filtre numérique

Au lieu d'envoyer les échantillons du signal, on transmet ces paramètres

Le récepteur reçoit ces paramètres.

1) Il génère d'abord un signal source de la façon suivante:

- si la tranche est déclarée comme voisée, il génère un train d'impulsions de période pitch,
- si la tranche est déclarée non-voisée, il génère un bruit blanc (ex: fonction *randn* de Matlab).

2) Il amplifie ce signal source par la valeur de  $\sigma$ .

3) Il réalise un filtre numérique à partir des coefficients reçus.

4) Il applique le signal source généré à l'entrée du filtre réalisé pour reconstruire une tranche du signal de parole.

## **Considérations pratiques:**

1) comment décider si une tranche est voisée ou non?

par exemple, en utilisant la fonction d'autocorrélation calculée sur la tranche: elle représente des pics pour une tranche voisée (puisque la tranche est quasi-périodique)

2) comment calculer la période pitch?

En regardant la position des pics dans la fonction d'autocorrélation

### 3) comment calculer la valeur de $\sigma$ ?

En mesurant la puissance moyenne de la tranche

### 4) quel model choisir pour le filtre?

On utilise généralement un filtre **autorégressif**, dont la fonction de transfert est donnée par

$$H(z) = \frac{X(z)}{E(z)} = \frac{1}{A_M(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^M a_i z^{-i}}$$

$$\Rightarrow x[n] = -\sum_{i=1}^M a_i x[n-i] + e[n]$$

*Modèle de prédiction linéaire*

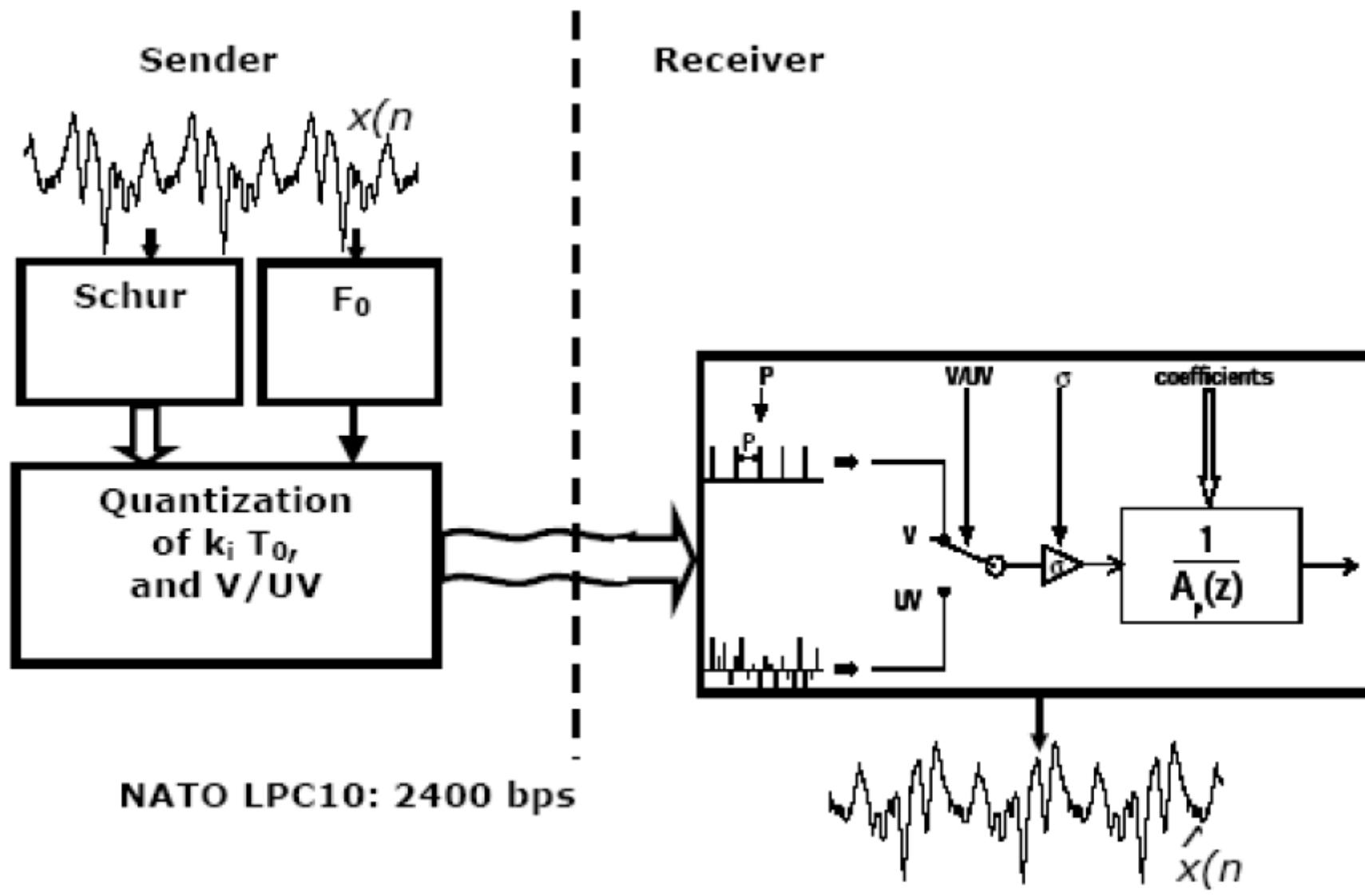
5) comment calculer les coefficients du filtre (c-à-d les coefficients  $a_i$  dans le modèle AR)?

on utilise les équations de Yule-Walker (Exemple déjà vu pour un filtre AR1, plus de détails en TD)

6) comment choisir l'ordre M de filtre?

L'ordre d'analyse conditionne le nombre de formants que l'analyse est capable de prendre en compte. On estime que la parole présente un formant par kHz, ce qui correspond à une paire de pôles pour la fonction de transfert. L'ordre du filtre dépend donc de la fréquence d'échantillonnage.

Les valeurs traditionnellement choisies sont M=10, 12 et 18.



Transmission de parole basée sur le codage LPC.

Une variante plus complexe du principe LPC est utilisée dans la communication mobile (**GSM**: Global System for Mobile Communication).

Les paramètres à envoyer sont quantifiés, c-à-d qu'ils sont codés sur un ensemble fini de nombres entiers (ce qui permet d'associer à chaque paramètre un nombre fini de bits par trame).

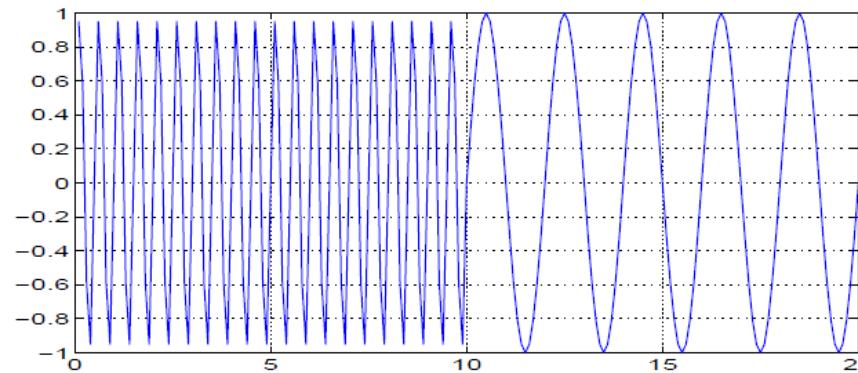
On arrive alors à un taux de transmission de **5600** bits/sec (à comparer avec le débit de **64000** bits/sec sans codage).

# Chapitre 5: Introduction à l'analyse temps-fréquence et temps-échelle

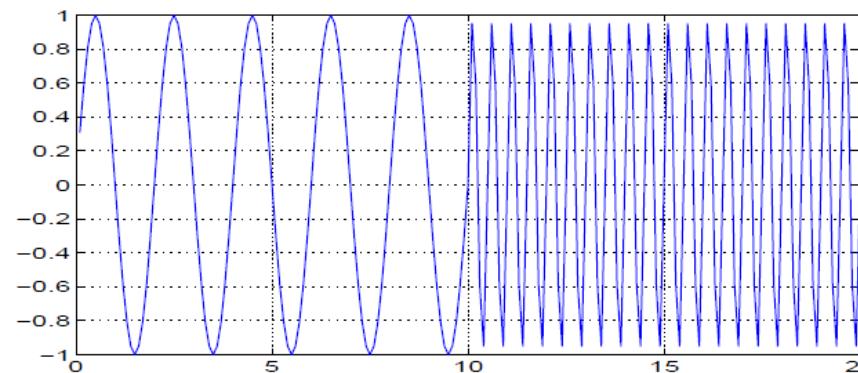
- \* La plupart des signaux du monde réel sont **non-stationnaires**  
==> L'**information** est contenue dans l'**évolution** de leurs caractéristiques
- \* La **Transformée de Fourier** est une approche globale (l'intégrale est calculée de moins l'infini à l'infini)  
==> Toute notion de **localisation temporelle** disparaît dans l'espace de Fourier

Exemple 1: Les deux signaux ci-dessous ont la même TF

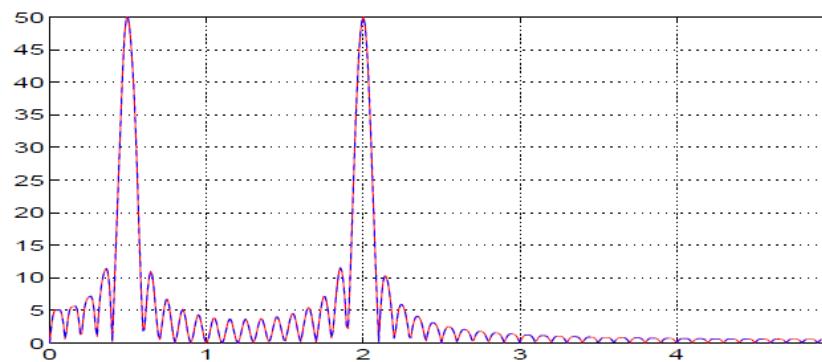
$x(t)$



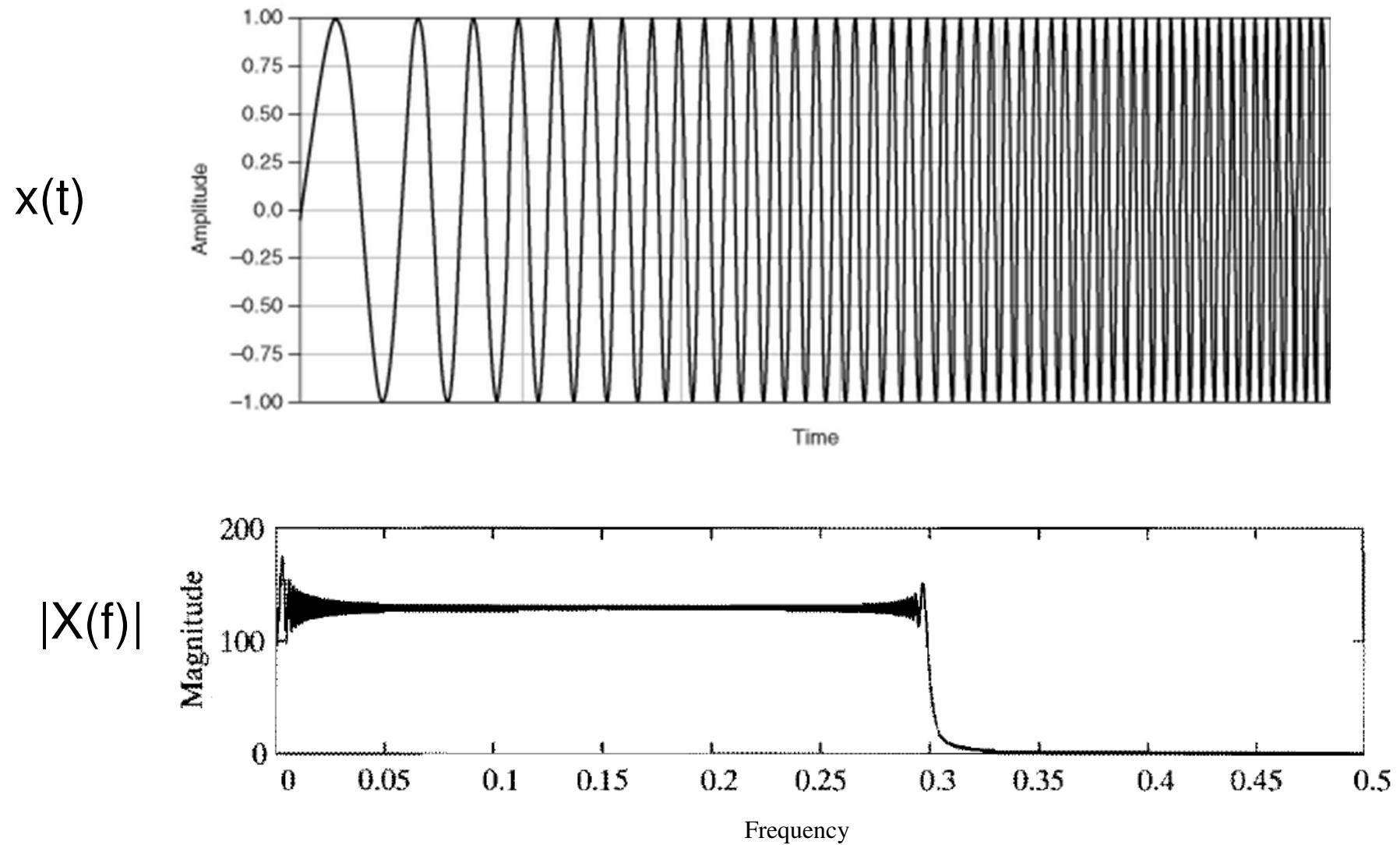
$y(t)$



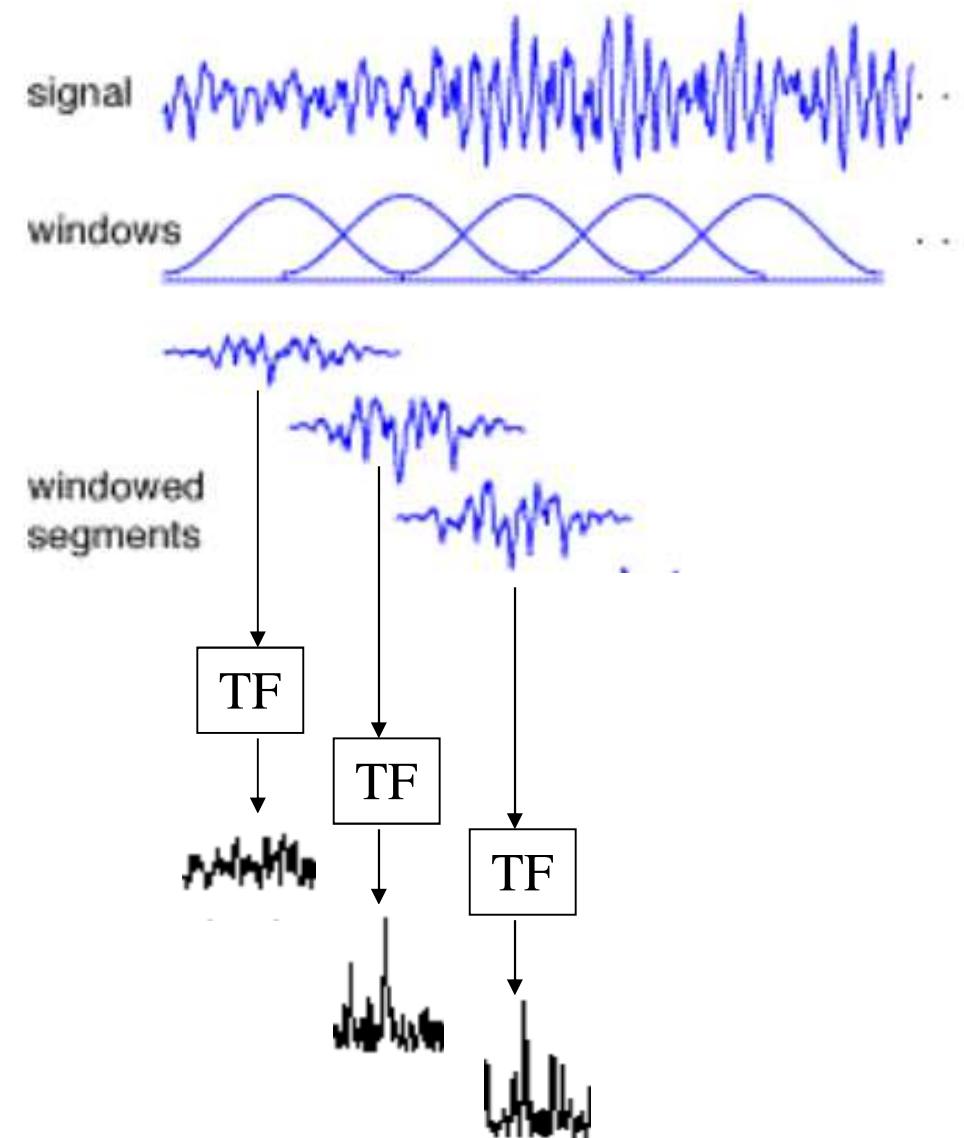
$|X(f)| = |Y(f)|$



Exemple 2: Signal **chirp** (sinus de fréquence croissante avec le temps)



# Transformée de Fourier à court terme (à fenêtre glissante)



## Transformée de Fourier à court terme

$$TFct\{x\} = C_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(\tau - t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

où  $g(t)$  est la **fonction de fenêtrage** (supposée à valeurs réelles).

\* Si on définit  $\psi_{t,f}(\tau) = g(\tau - t) e^{-j2\pi f\tau}$ , on obtient:

$$TFct\{x\} = C_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \psi_{t,f}^*(\tau) d\tau = \langle x, \psi_{t,f} \rangle$$

où  $\langle g, h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(\alpha) h^*(\alpha) d\alpha$  est défini comme le **produit scalaire**

de deux fonctions  $g$  et  $h$ .

On peut interpréter  $\langle x, \psi_{t,f} \rangle$  comme la projection du signal  $x$  sur  $\psi$ .

# Spectrogramme

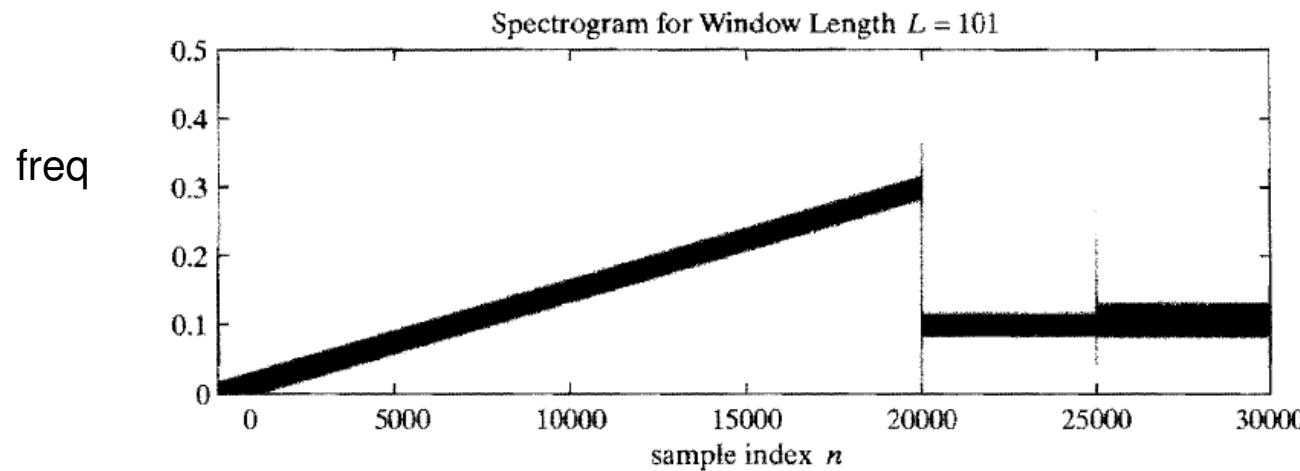
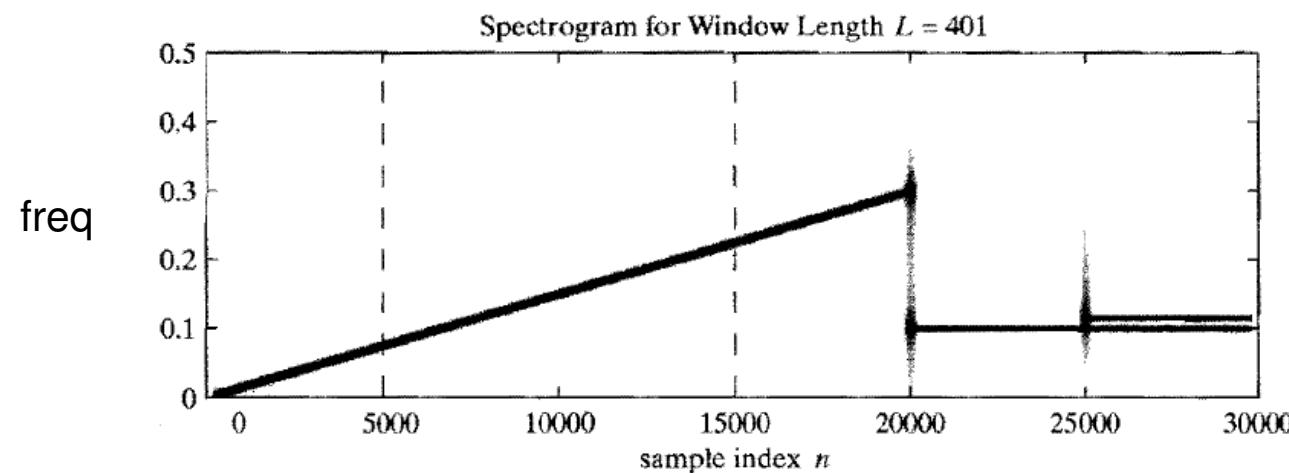
$$S_x(t, f) = |C_x(t, f)|^2$$

abscisse: temps, ordonnée: fréquence, niveau de gris (ou couleur): amplitude

exemple:

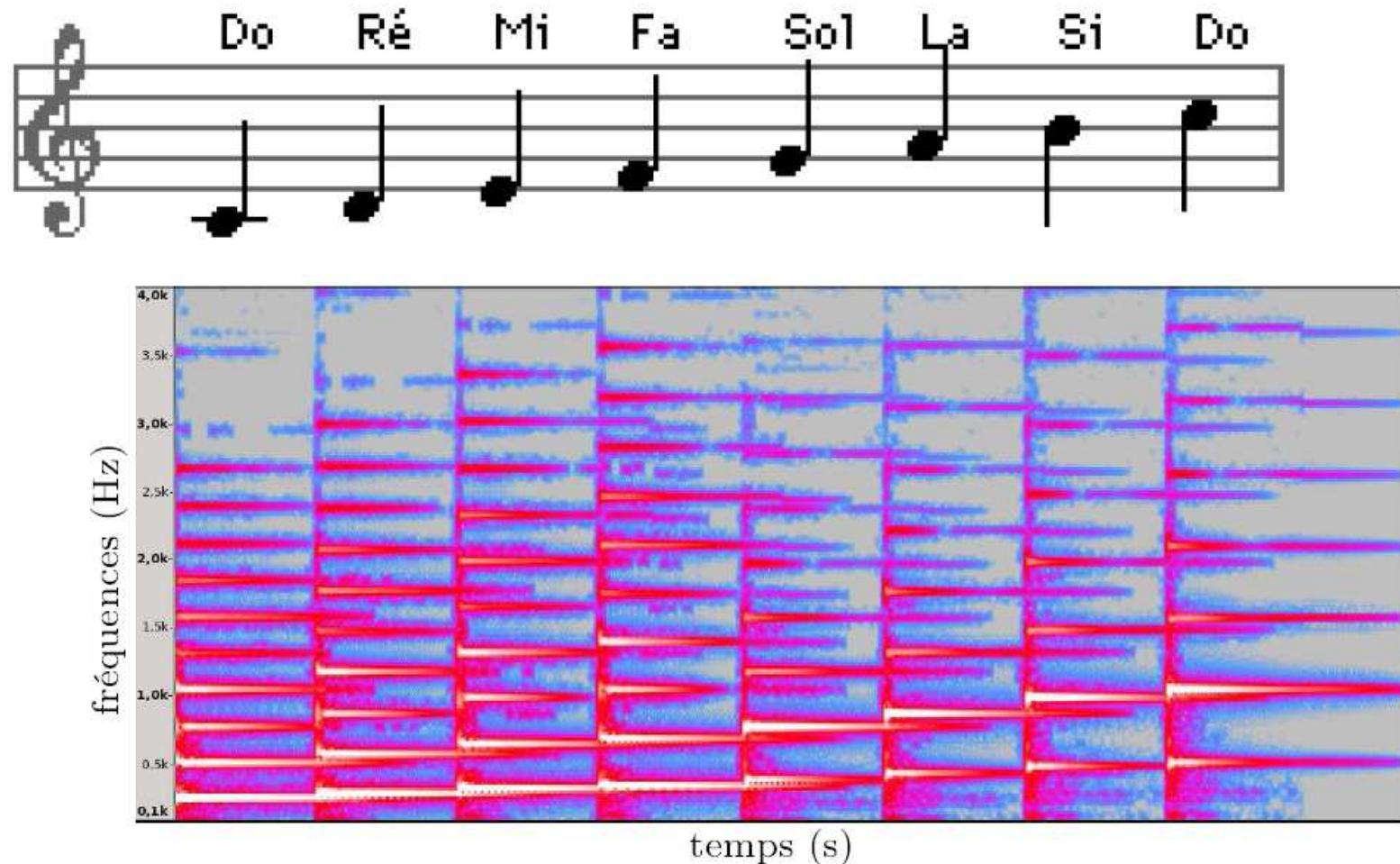
[Oppenheim]

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \cos(\alpha_0 n^2) & 0 \leq n \leq 20,000 \\ \cos(0.2\pi n) & 20,000 < n \leq 25,000 \\ \cos(0.2\pi n) + \cos(0.23\pi n) & 25,000 < n. \end{cases}$$



Un exemple :

- Sonogramme :



# Transformée de Gabor

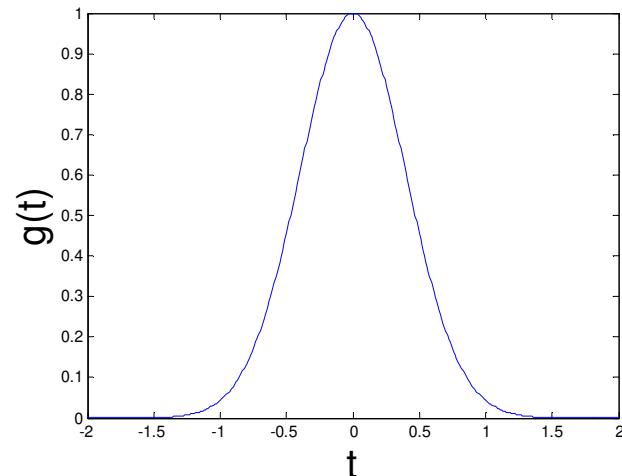
Cas particulier de la Transformée de Fourier à court terme quand la fonction **fenêtre** est une **gaussienne**:

$$g(\tau) = e^{-c\tau^2} \quad \psi_{t,f}(\tau) = e^{-c(\tau-t)^2} e^{j2\pi f\tau}$$

$$G_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-c(\tau-t)^2} e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \langle x, \psi_{t,f} \rangle$$

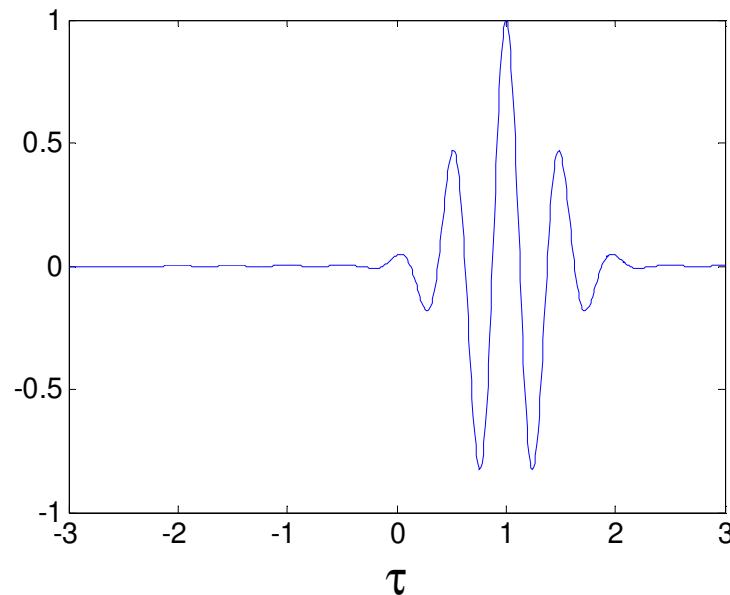
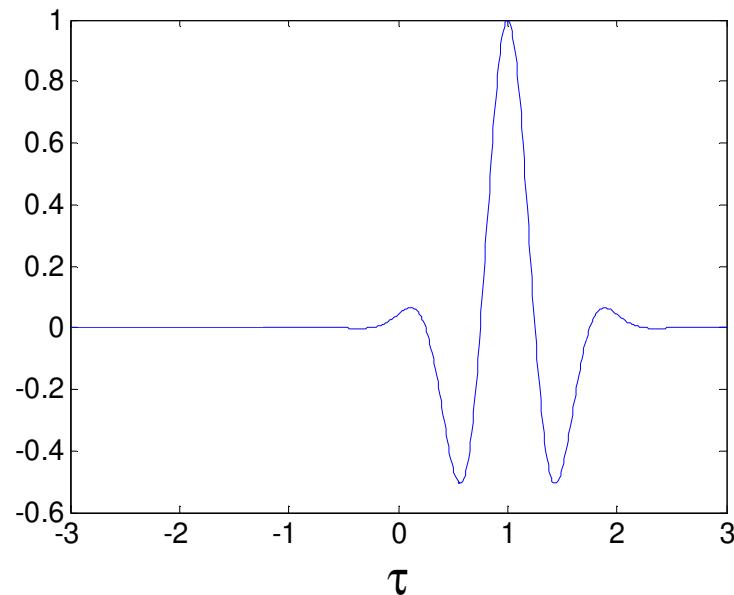
Rappel:

- La TF d'une gaussienne est gaussienne.
- Plus la gaussienne temporelle est **concentrée**, plus sa transformée de Fourier (la gaussienne fréquentielle) est **dispersée**.



Les fonctions  $\psi_{t,f}(\tau) = e^{-c(\tau-t)^2} e^{j2\pi f\tau}$  sont appelées des « Gaborettes ».

Les figures ci-dessous montrent la partie réelle des Gaborettes pour  $t=1$ ,  $c=\pi$ , et deux fréquences différentes ( $f=1$  à gauche et  $f=2$  à droite):



L'étendue temporelle de la fonction est indépendante de la fréquence analysée par cette fonction.

## Relation d'incertitude de Gabor-Heisenberg

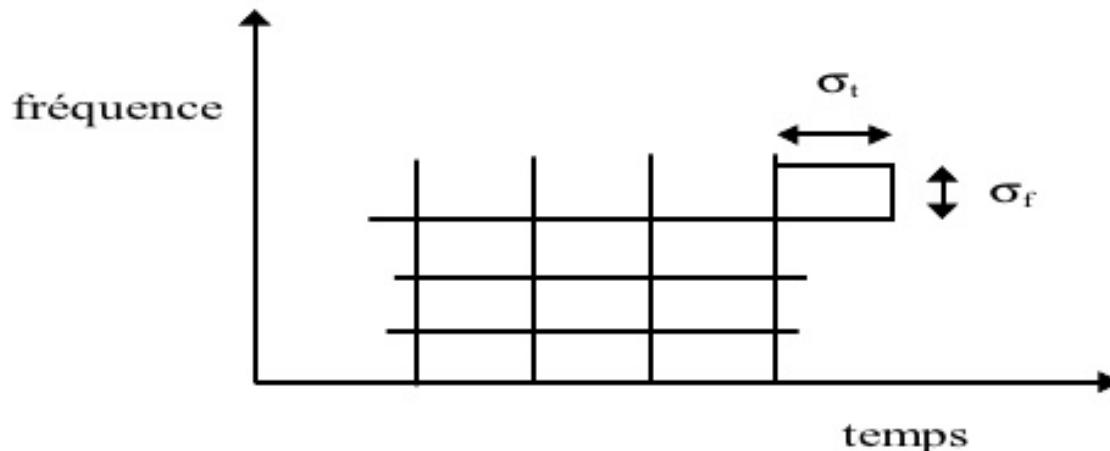
$$\sigma_t \cdot \sigma_f \geq \frac{1}{4\pi}$$

où  $(\sigma_t)^2 = \frac{1}{Ex} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt$  mesure la dispersion en temps et

$(\sigma_f)^2 = \frac{1}{Ex} \int_{-\infty}^{\infty} f^2 |X(f)|^2 df$  mesure la dispersion en fréquence

\* Egalité  $\sigma_t \cdot \sigma_f = \frac{1}{4\pi}$  est vérifiée pour un signal gaussien:

$$x(t) = A \exp(-\alpha t^2)$$

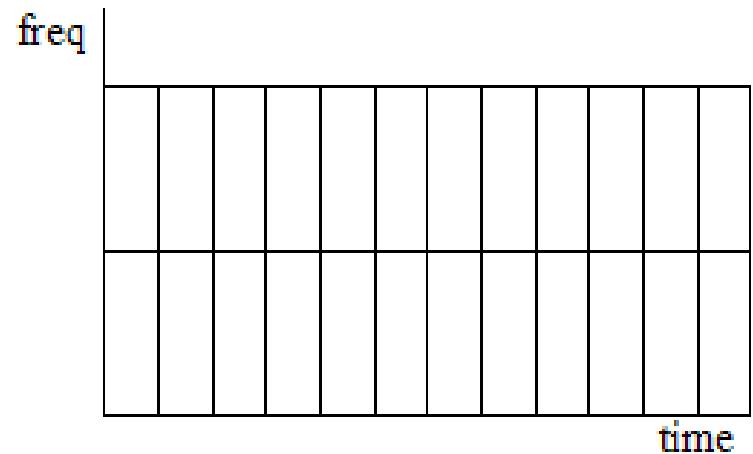


Pavage temps-fréquence avec  
La transformée de Gabor.

La surface de chaque  
« atome » temps-  
fréquence est constante

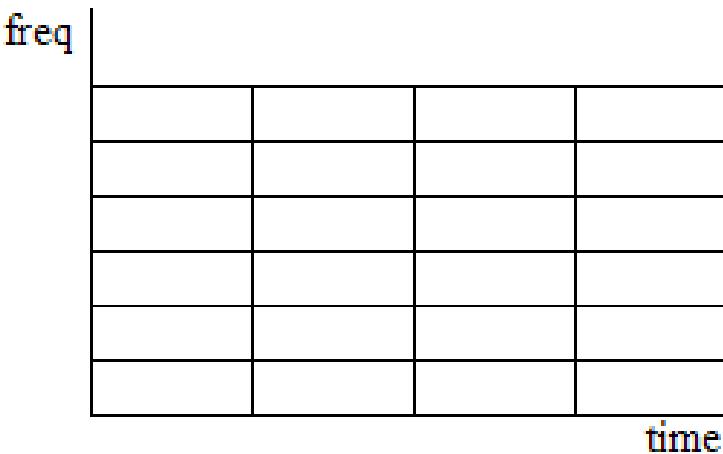
$$\sigma_t \downarrow \rightarrow \sigma_f \uparrow$$

$$\sigma_f \downarrow \rightarrow \sigma_t \uparrow$$



Bonne résolution temporelle

Mauvaise résolution fréquentielle



Mauvaise résolution temporelle

Bonne résolution fréquentielle

Le pavage temps-fréquence est **régulier** (même taille de fenêtre partout) → Analyse « **mono-résolution** »

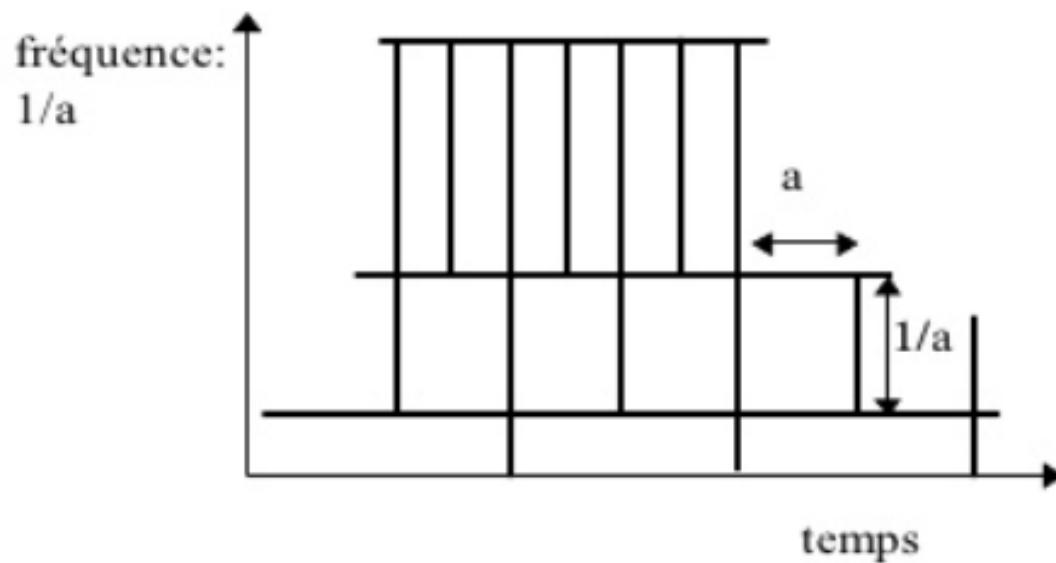
Rappel: L'étendue temporelle d'une Gaborette est indépendante de la fréquence analysée par cette fonction.

# Inconvénient de la Transformée de Fourier à court terme

Le pavage temps-fréquence est **régulier**.

Ce n'est pas idéal car:

- Détection des basses-fréquences nécessite des **fenêtres longues**
  - Détection des hautes-fréquences (transitoires) nécessite des **fenêtres courtes**
- Les **ondelettes** (analyse multi-résolution)



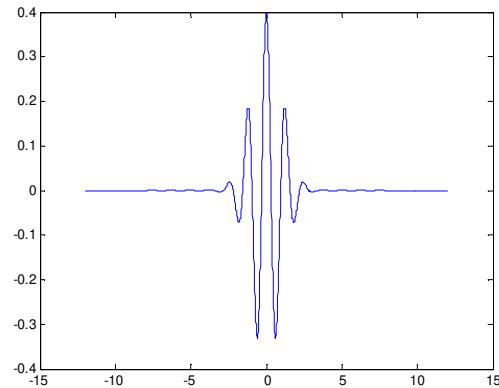
La surface de chaque « atome » temps-fréquence est constante

Les atomes n'ont pas tous la même largeur temporelle ou fréquentielle

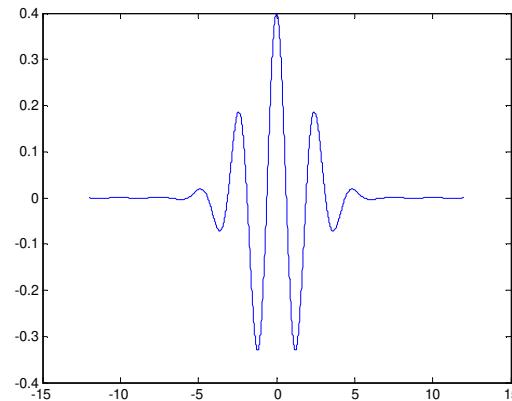
## Rappel: Dilatation d'une fonction

Considérons la fonction  $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} \cos(\omega_0 t)$  pour  $\omega_0=5$ .

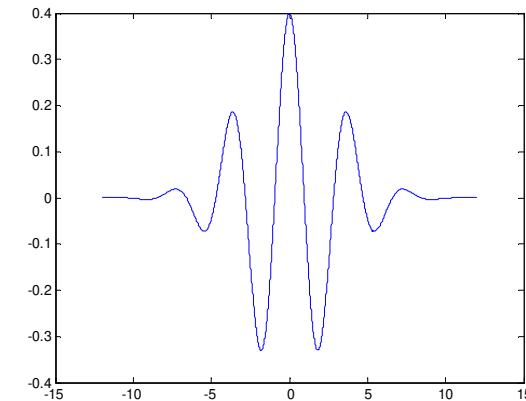
Les figures ci-dessous montrent  $\psi\left(\frac{t}{a}\right)$  pour trois valeurs de  $a$ .



$$a=1$$



$$a=2$$



$$a=3$$

Quand  $a$  (facteur de dilatation) **augmente**, la largeur temporelle de la fonction d'analyse **augmente** et la fréquence d'analyse **diminue**.

A comparer avec les Gaborettes!

## Transformée en ondelettes (*Wavelet Transform*)

$$T_x(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt$$

Dans cette équation,  $a$  est le **facteur d'échelle** et  $b$  le **paramètre de translation**.

La variable  $a$  joue le rôle de **l'inverse de la fréquence**: plus  $a$  est petit, moins l'ondelette  $\psi$  est étendue temporellement, et plus la fréquence centrale de son spectre est élevée.

On peut aussi interpréter cette expression comme une projection du signal sur une famille de **fonctions analysantes**  $\psi_{a,b}$  construite à partir d'une ondelette « mère »  $\psi$ :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left( \frac{t-b}{a} \right)$$

$$T_x(a,b) = \langle x, \psi_{a,b} \rangle$$

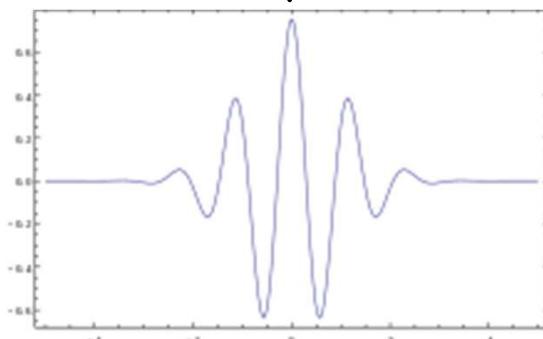
## Propriétés des ondelettes

moyenne nulle:  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$

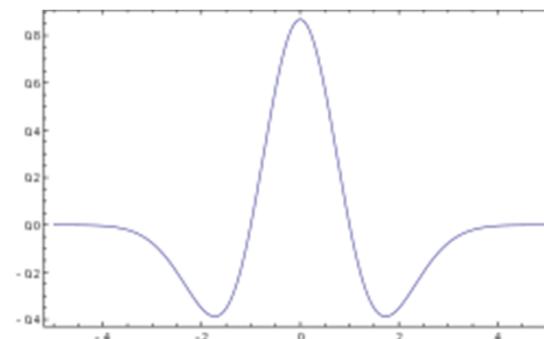
norme unitaire:  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1$

## Exemples des ondelettes mère

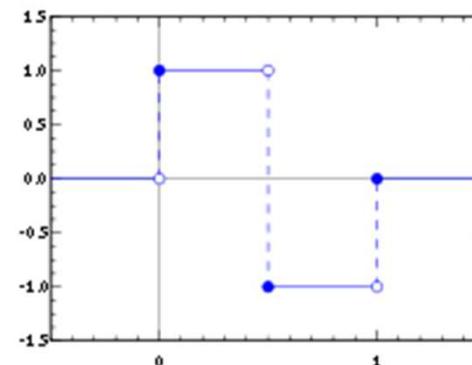
Morlet  $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} e^{i\omega_0 t}$



Chapeau mexicain  $\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (1-t^2) e^{-t^2/2}$



Haar  $\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{pour } \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



## Discrétisation des paramètres d'ondelettes

Le facteur d'échelle  $a$  et le pas de translation  $b$  sont des **réels** et la transformations en ondelette est **continue**.

Pour discrétiser ces paramètres, on pose:

$$a = a_0^m \quad b = nb_0 a_0^m \quad \text{avec} \quad a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$$

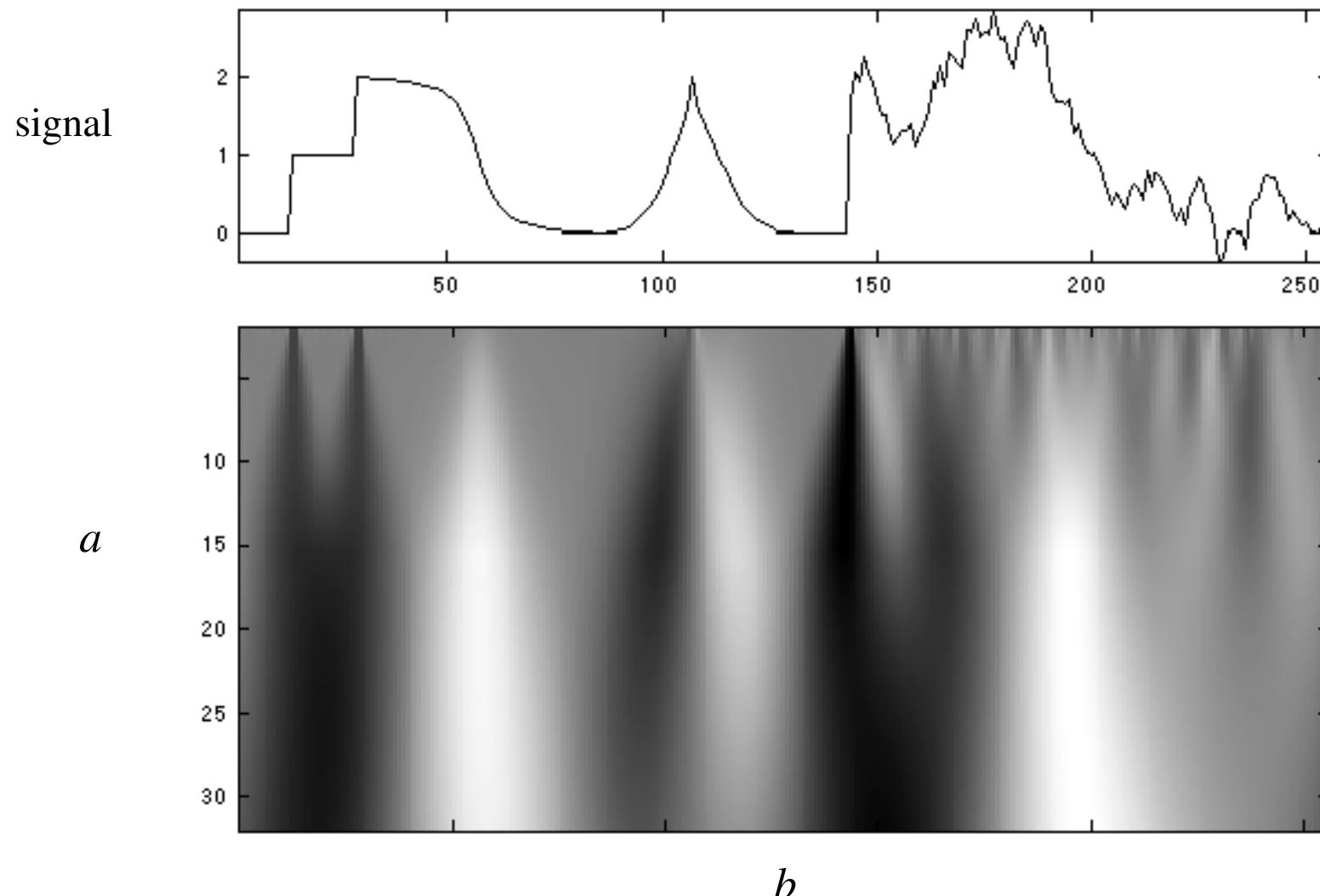
et on obtient

$$T_x(m, n) = a_0^{\frac{-m}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^*(a_0^{-m}t - nb_0) dt$$

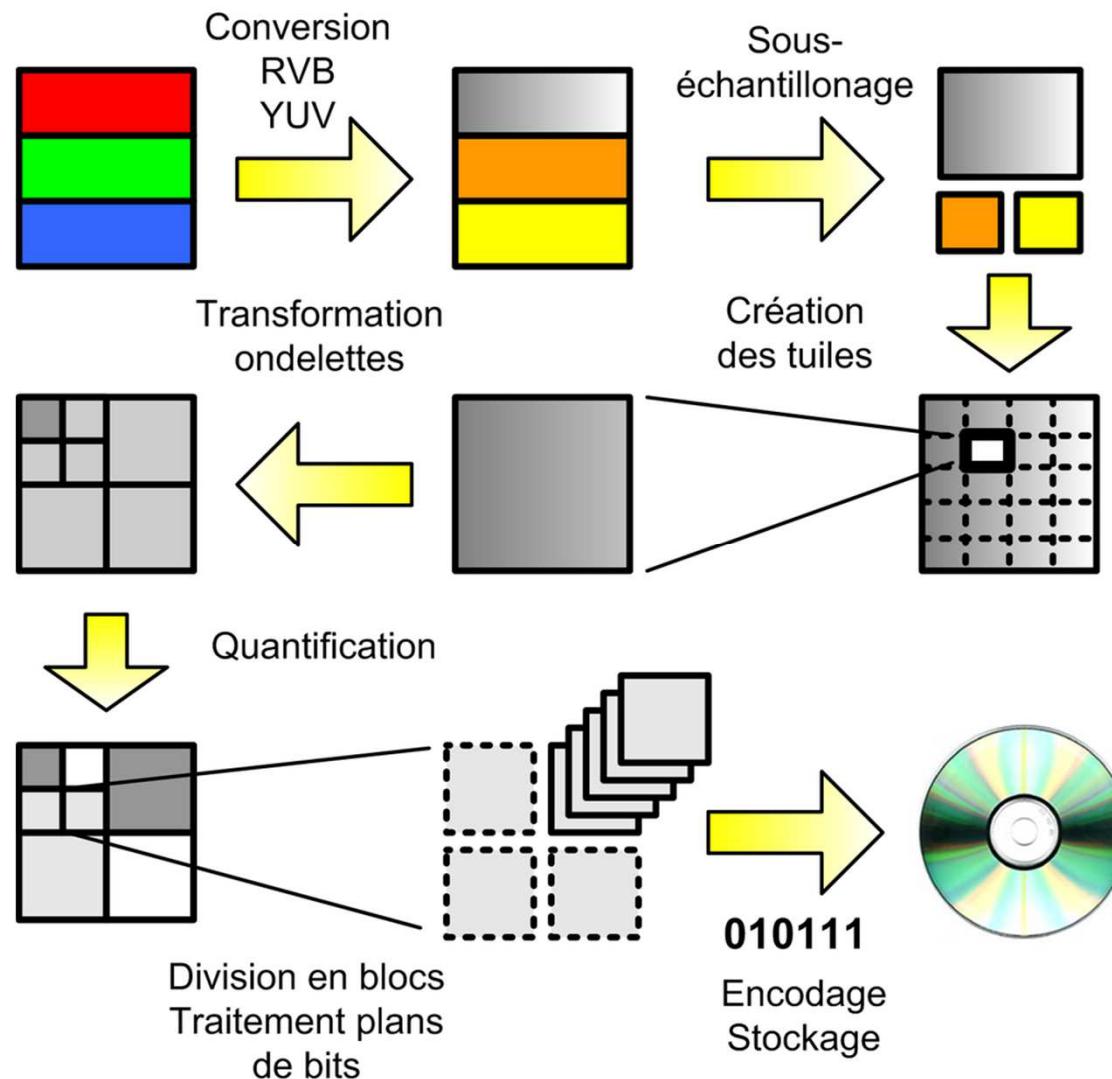
Si on choisit  $a_0=2$  et  $b_0=1$ , on parle de la transformée **dyadique**.

# Quelques applications des ondelettes

## 1) Analyse des signaux



## 2) Compression des images (JPEG2000)

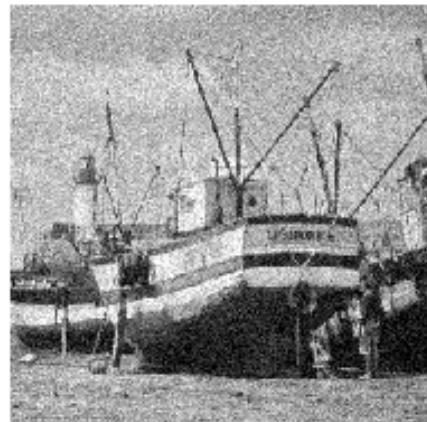


### 3) Débruitage des images

Original



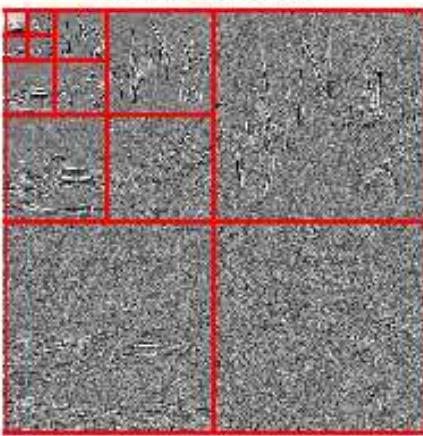
Noisy



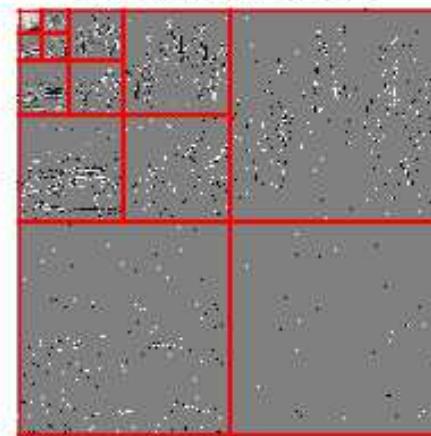
Hard denoising, SNR=20.7



Noisy coefficients



Thresholded coefficients



## Références

- [1] A. Papoulis, S. U. Pillai, "Probability, random variables and stochastic processes", 4th edition, McGraw-Hill, 2002.
- [2] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer, "Discrete-time signal processing", Prentice-Hall, 2010.
- [3] M. Kunt, "Traitement numérique des signaux", Presses polytechniques et universitaires Romandes, 1996.
- [4] S. M. Kay, "Modern Spectral Estimation: Theory and Application", Prentice Hall, 1999.
- [5] F. Truchetet, "Ondelettes pour le signal numérique", Hermès, 1998.
- [6] S. Mallat, "A wavelet tour of signal processing", Academic Press, 1999.
- [7] P. Flandrin, Temps-fréquence, Hermès, 1998.
- [8] F. Castanié et al., Digital spectral analysis, Wiley, 2011.
- [9] S. A. Broughton & K. Bryan, Discrete Fourier Analysis and Wavelets, Wiley, 2018.