Modélisation et estimation pour les signaux et systèmes
TP 3 : Méthodes dérivées des moindres carrés

Il est indispensable d'avoir préparé le TP avant la séance.

Les questions marquées du signe † doivent être résolues avant la séance et vos réponses doivent être déposées sous Moodle.

Les listing de tous les programmes doivent être joints au rapport.

Tous les résultats et courbes doivent être commentés.

I Présentation du TP

L'objectif de ce TP est d'illustrer une méthode d'estimation s'appuyant sur la méthode des moindres carrés, dans le cas d'un modèle non linéaire en les paramètres, sur un cas pratique d'estimation des signaux et systèmes.

Avant d'arriver en séance, vous devez impérativement avoir assimilé les notions théoriques concernant :

- la problématique de l'estimation (espace des données, espace des paramètres, estimateurs, perturbations…) ;
- la modélisation matricielle des modèles linéaires en les paramètres ;
- la technique des moindres carrés ;
- la notion de biais et variance des estimateurs.

Comme dans le TP précédent, on s'intéresse à un système modélisé par une relation entrée/sortie de type convolution bruitée :

$$y[n] = y_{\mathcal{M}}[n] + \epsilon[n] \quad \text{avec} \quad y_{\mathcal{M}}[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k],$$

où $h[n]$ est la réponse impulsionnelle (causale) du système et $\epsilon[n]$ correspond aux perturbations. On considère le cas où les perturbations sont indépendantes gaussiennes centrées de variance connue σ_ϵ^2 (en pratique, on prendra $\sigma_\epsilon^2 = 0,3$).

L'objectif visé dans ce TP est d'estimer la réponse impulsionnelle du système pour un signal d'entrée connu. **Contrairement au premier TP, où l'on s'intéressait au cas d'une réponse impulsionnelle finie, on s'intéresse ici au cas ou l'on dispose d'une forme paramétrique pour la réponse impulsionnelle et l'on cherche à estimer ses paramètres.**

Dans un premier temps on étudiera en § II la modélisation du problème. Le modèle n'étant pas linéaire vis-à-vis des paramètres, on ne peut en théorie appliquer la méthode des moindres carrés. Néanmoins, dans un premier temps, on mettra en œuvre en § III la méthode des moindres carrés, en effectuant une approximation sur le modèle. Dans un deuxième temps, on étudiera et mettra en œuvre en § IV une méthode itérative de type moindres carrés étendus, s'appuyant sur les moindres carrés. Enfin on étudiera en § V le biais et la variance sur les paramètres estimés. **Cette dernière partie n'est pas fondamentale pour la bonne compréhension des outils étudiés en cours et ne sera effectuée que si le reste a pu être effectué en séance.**

En pratique, comme lors du premier TP, la sortie d'un tel système pour une entrée quelconque x sera calculée avec la fonction `syst`. La réponse impulsionnelle `h` de l'étude, ainsi que ses paramètres, sont contenus dans le fichier `dataMC_2025.mat`, de même que le signal d'entrée `x`.

II Modélisation

On considère pour la réponse impulsionnelle le modèle paramétrique :

$$h[n] = Ae^{-\lambda n}\sin(2\pi f n + \phi). \tag{1}$$

On pourrait essayer d'estimer directement les paramètres A, λ, f et ϕ à partir des données, mais on préfère exploiter un modèle récursif pour $h[n]$. On va ainsi pouvoir en déduire un modèle récursif pour $y[n]$ et pouvoir estimer les paramètres de ce modèle et les coefficients de la réponse impulsionnelle $h[n]$.

1.† Montrer que la réponse impulsionnelle du modèle de l'équation (1) vérifie une équation de récurrence de la forme (voir TD 2, exercice 1) :
$$h[n] = a_1 h[n-1] + a_2 h[n-2], \ \ \forall n \geq 2, \tag{2}$$
avec $a_1 = 2e^{-\lambda}\cos(2\pi f)$ et $a_2 = -e^{-2\lambda}$.

2.† Déduire (voir TD 4, exercice 4) de la relation (2) que $y_{\mathcal{M}}[n]$ vérifie l'équation de récurrence :
$$y_{\mathcal{M}}[n] = a_1 y_{\mathcal{M}}[n-1] + a_2 y_{\mathcal{M}}[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1], \ \ \forall n \geq 2.$$
Quelles sont les expressions des coefficients b_0 et b_1 ?

3.† Connaissant les paramètres a_1, a_2, b_0 et b_1, donner l'expression permettant de calculer la réponse impulsionnelle $h[n], \forall n$.

Dans ce TP, on va essayer d'estimer les paramètres du vecteur $\underline{\boldsymbol{\beta}} = [a_1,\ a_2,\ b_0,\ b_1]^T$. Cela nous permettra d'en déduire une valeur estimée de la réponse impulsionnelle $\{h[n]\}_n$.

III Estimation par moindres carrés

On va essayer d'estimer les paramètres $\underline{\boldsymbol{\beta}}$ de ce modèle récursif par moindres carrés. **Attention, on ne suppose pas ici que les signaux sont causaux**, et on dispose des signaux $x[n]$ et $y[n]$ uniquement pour $n = 0$ à $N-1$.

1.† Peut-on écrire la relation entre le modèle et les paramètres sous la forme scalaire $y_{\mathcal{M}}[n] = \underline{\boldsymbol{r}}[n]^T\underline{\boldsymbol{\beta}}$, ou sous la forme matricielle $\underline{\boldsymbol{y}}_{\mathcal{M}} = \mathbf{R}\underline{\boldsymbol{\beta}}$, avec le régresseur $\underline{\boldsymbol{r}}[n]^T$ et la matrice $\mathbf{R}$ contenant des données connues ?

En première approximation, on peut remplacer le modèle $y_{\mathcal{M}}[n]$ dans le régresseur $\underline{\boldsymbol{r}}[n]$ ou dans la matrice $\mathbf{R}$ par les données $y[n]$. On peut alors estimer les paramètres $\overset{o}{\underline{\boldsymbol{\beta}}}_{MC}$ par moindres carrés.

2[†] Écrire la relation matricielle vérifiée par cet estimateur en spécifiant les matrices et vecteurs entrant en jeu **ainsi que leur dimension**.

3. Écrire le programme Matlab réalisant l'estimation des paramètres $\overset{o}{\underline{\boldsymbol{\beta}}}_{MC}$ en acceptant cette approximation.
4. Écrire le programme Matlab permettant de retrouver les coefficients de la réponse impulsionnelle $\overset{o}{h}_{MC}[n]$ à partir des paramètres estimés $\overset{o}{\underline{\boldsymbol{\beta}}}_{MC}$.
5. Tracer la réponse impulsionnelle $\overset{o}{h}_{MC}[n]$ estimée et la comparer à la réponse impulsionnelle théorique. Calculer la norme de l'erreur entre les réponses impulsionnelles théoriques et estimés $NE(\underline{\boldsymbol{h}}, \overset{o}{\underline{\boldsymbol{h}}}_{MC}) = ||\underline{\boldsymbol{h}} - \overset{o}{\underline{\boldsymbol{h}}}_{MC}||$.
6. Cette estimation de la réponse impulsionnelle vous parait-elle satisfaisante ? Vous pourrez par exemple comparer cet estimateur à ceux du premier TP...

IV Méthode de type moindres carrés étendus

L'approximation précédente ne donnant pas des résultats satisfaisants on va prendre en compte de façon plus rigoureuse le modèle récursif en une méthode de type moindres carrés étendue exploitant le caractère *pseudo-linéaire* du modèle.

1[†] Montrer (voir TD 4, exercice 4) que $y[n] = y_{\mathcal{M}}[n] + \epsilon[n]$ vérifie la relation de récurrence :

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + e[n], \quad \forall n \geq 2,$$

où $e[n]$ (bruit coloré) correspond au filtrage du bruit $\epsilon[n]$ par un filtre de fonction de transfert $G(z)$ que l'on précisera.

On peut alors écrire la relation liant la sortie aux paramètres sous la forme :

$$y[n] = \underline{\boldsymbol{r}}[n]^T \underline{\boldsymbol{\beta}} + e[n] \quad \text{ou} \quad \underline{\boldsymbol{y}} = \mathbf{R}\underline{\boldsymbol{\beta}} + \underline{\boldsymbol{e}}[n]$$

avec le régresseur $\underline{\boldsymbol{r}}[n]$ et la matrice $\mathbf{R}$ contenant des données connues, mais cette fois-ci, les perturbations $e[n]$ ne sont plus indépendantes. Le critère des moindres carrés ne correspond alors plus à celui du maximum de vraisemblance (l'estimateur est alors généralement biaisé).

2[†] Montrer (voir TD 4, exercice 4) que si l'on considère la sortie filtrée : $\widetilde{Y}(z) = G^{-1}(z)Y(z)$ et l'entrée filtrée $\widetilde{X}(z) = G^{-1}(z)X(z)$ dans la relation précédente, on peut cette fois-ci écrire :

$$\widetilde{y}[n] = a_1 \widetilde{y}[n-1] + a_2 \widetilde{y}[n-2] + b_0 \widetilde{x}[n] + b_1 \widetilde{x}[n-1] + \epsilon[n].$$

Ce qui s'écrit bien sous la forme $\widetilde{y}[n] = \underline{\widetilde{\boldsymbol{r}}}[n]^T \underline{\boldsymbol{\beta}} + \epsilon[n]$ ou de façon équivalente $\underline{\widetilde{\boldsymbol{y}}} = \widetilde{\mathbf{R}}\underline{\boldsymbol{\beta}} + \underline{\boldsymbol{\epsilon}}$, avec le régresseur contenant des données connues et des perturbations indépendantes. Notons qu'en filtrant ainsi l'entrée et la sortie, on a *blanchi* les perturbations.

La relation précédente entre parfaitement dans le cadre d'application des moindres carrés. Cependant mais **les paramètres de $G^{-1}(z)$ sont liés aux paramètres que l'on cherche à estimer** et sont donc inconnus. La méthode proposée consiste alors, partant de l'approximation effectuée en III, à estimer les paramètres $\overset{o}{\underline{\boldsymbol{\beta}}}_{MC}$ par moindres carrés, à filtrer les données avec le filtre construit à partir de ces paramètres estimés, puis à itérer l'estimation par moindres carrés à partir des données $\widetilde{y}[n]$ et des entrées $\widetilde{x}[n]$ filtrées. La convergence n'est pas garantie, mais est assez rapide en général. Cette méthode peut être résumée comme suit :

> Initialisation $p = 0$,
> $\underline{\boldsymbol{\beta}} = \overset{o}{\underline{\boldsymbol{\beta}}}_{MC}$ correspondant à l'estimation de $\underline{\boldsymbol{\beta}}$ par moindres carrés effectuée en III.
> 1) Calculs de $\widetilde{y}[n]$ et $\widetilde{x}[n]$ par filtrage de $x[n]$ et $y[n]$ par le filtre G^{-1} construit à partir des paramètres $\underline{\boldsymbol{\beta}}$.
> 2) Calcul de $\underline{\boldsymbol{\beta}}$ correspondant à l'estimation des paramètres par moindres carrés d'après la relation $\underline{\widetilde{\boldsymbol{y}}} = \widetilde{\mathbf{R}}\underline{\boldsymbol{\beta}} + \underline{\boldsymbol{\epsilon}}$.
> $p = p + 1$.

3. Écrire le programme Matlab mettant en œuvre cette méthode pour estimer les paramètres $\underline{\boldsymbol{\beta}}$. On pourra utiliser la fonction Matlab `filter` pour filtrer les signaux.
4. Étudier les résultats donnés par cette méthode au cours des itérations. Vous pourrez par exemple tracer l'évolution de la réponse impulsionnelle $\overset{o}{h}[n]$ et calculer la norme de l'erreur sur $h[n]$ au cours des itérations...
   Combien d'itérations vous semblent nécessaires pour que les paramètres estimés n'évoluent plus ?
5. Comparer les résultats de cette méthode aux résultats précédents et aux résultats du premier TP...

V Biais et variance sur les paramètres estimés

Dans le cas des moindres carrés, pour un modèle linéaire en les paramètres, on dispose d'une expression analytique pour la variance des paramètres estimés. Nous avons pu illustrer cela lors de la première séance. Mais dans les autres cadres d'estimation on dispose rarement d'une telle expression. Il est néanmoins important de pouvoir donner une idée de cette variance d'estimation, problème que l'on va aborder ici...

V.1 Estimation du biais et de la variance d'estimation grâce à un ensemble de réalisations

Si l'on dispose d'un ensemble de réalisations $\underline{\boldsymbol{y}}^{(r)}$ des données (produites à partir du même signal d'entrée $\underline{\boldsymbol{x}}$), on peut aisément les exploiter pour estimer la moyenne et la variance d'estimation sur les paramètres.

1. Pour $N_r = 200$ réalisations **différentes** des données $\underline{\boldsymbol{y}}^{(r)}, r = 1 \dots N_r$, calculer les paramètres estimés $\overset{o}{\underline{\boldsymbol{\beta}}}^{(r)}$ par la méthode de type moindres carrés étendus.
2. A partir de chaque paramètre $\overset{o}{\underline{\boldsymbol{\beta}}}^{(r)}$ calculer la réponse impulsionnelle estimée $\overset{o}{h}^{(r)}[n]$. Calculer la moyenne empirique et la variance empirique des réalisations $\overset{o}{h}^{(r)}[n]$. En déduire une estimation du biais et de la variance de cet estimateur de $h[n]$. Comparer ces résultats à ceux de la séance précédente. Conclusions...

V.2 Estimation du biais et de la variance d'estimation par la méthode du *Boostrap*

Lorsqu'on ne peut disposer de plusieurs réalisation des données, on peut s'appuyer sur des méthodes de Monte-Carlo, générant de façon aléatoires des données fictives, les plus proches possibles des réalisations du systèmes. La méthode du *Boostrap* est un exemple d'une telle méthode.

Pour une réalisation des données $\underline{\boldsymbol{y}}$, on peut estimer une valeur $\overset{o}{\underline{\boldsymbol{\beta}}}$ des paramètres On peut alors calculer la sortie du modèle $\underline{\boldsymbol{y}}_{\mathcal{M}}$ correspondant à ces paramètres et l'erreur de modèle, appelée résidus : $\mathrm{res}[n] = y[n] - y_{\mathcal{M}}[n]$. L'idée de la méthode du *boostrap* est de générer des réalisation fictives du système à partir de la sortie du modèle et d'une répartition aléatoire des erreurs du modèle. Ainsi, une réalisation fictive $\underline{\boldsymbol{y}}_f^{(r)}$ sera générée comme la sortie du modèle $\underline{\boldsymbol{y}}_{\mathcal{M}}$ à laquelle s'ajoute une réalisation d'un bruit dont les éléments sont tirés au hasard parmi les valeurs des résidus.

1. Pour une réalisation des données $\underline{\boldsymbol{y}}$, estimer par la méthode de type moindres carrés étendus la valeur des paramètres $\overset{o}{\underline{\boldsymbol{\beta}}}$ de la réponse impulsionnelle. Calculer la **sortie du modèle** $\underline{\boldsymbol{y}}_{\mathcal{M}}$ correspondant à ces paramètres estimés et en déduire les résidus $\mathrm{res}[n] = y[n] - y_{\mathcal{M}}[n]$ (soit le vecteur `res = y - y_M`).
2. Pour N_r réalisations du bruit tirées au hasard parmi $\{\mathrm{res}[n]\}_n$ (on construira pour, cela pour chaque réalisation, le vecteur : `res_r = res(randi(N,1,N));`), construire N_r réalisation fictives des données $\underline{\boldsymbol{y}}_f^{(r)} = \underline{\boldsymbol{y}}_{\mathcal{M}} + \underline{\mathbf{res}}^{(r)}, r = 1 \dots N_r$.
3. Pour chacune de ces données fictives $\underline{\boldsymbol{y}}_f^{(r)}$, calculer les paramètres estimés $\overset{o}{\underline{\boldsymbol{\beta}}}{}^{(r)}$ par la méthode de type moindres carrés étendus et la réponse impulsionnelle $\overset{o}{h}{}^{(r)}[n]$ correspondante.
4. Calculer la moyenne empirique et la variance empirique de ces réalisations $\overset{o}{h}{}^{(r)}[n]$. En déduire une estimation du biais et de la variance de cet estimateur de $h[n]$. Comparer ces résultats à ceux de la section précédente.

VI Synthèse

Comparer les résultats d'estimation de la réponse impulsionnelle $h[n]$ par les différentes méthodes utilisées **lors des deux séances de TP**. Donner les avantages et inconvénients de toutes ces méthodes. Conclure sur leur utilisation lors de ce TP et la possibilité de les appliquer sur des données réelles...

VII Annexe

VII.1 Fonction `filter`

Vous trouverez ci-dessous l'aide en ligne simplifiée de la fonction Matlab `filter`.

```
filter - 1-D digital filter
   This MATLAB function filters the input data x using a rational transfer
   function defined by the numerator and denominator coefficients b and a.

   Syntax
     y = filter(b,a,x)

   Input Arguments
     b - Numerator coefficients of rational transfer function
       vector
     a - Denominator coefficients of rational transfer function
       vector
     x - Input data
       vector | matrix | multidimensional array

   Output Arguments
     y - Filtered data
       vector | matrix | multidimensional array
```