Université Paul Sabatier
Toulouse

Compte Rendu

Signaux et Systèmes

M1 EEA

- Module KEAX7AH1 : Signaux et Systèmes
- Réalisé par :

  - KABOU Abdeldjalil
  - IAICHE Achour Mehdi Anis

2024 / 2025

TP2 : Détection de cibles par corrélation

I. Corrélation

D'un point de vue théorique, l'autocorrélation d'un signal aléatoire stationnaire x[n] est d´définie par $R_x[m] = E\{x[n + m]x[n]\}$, et l'intercorrélation entre deux signaux y[n] et x[n] conjointement stationnaires est d´définie par $R_{yx}[m] = E\{y[n + m]x[n]\}$.

1) *Rappel de l'expression de la fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc :*

1) l'expression de la fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc :

Un bruit blanc est un signal aléatoire dont les échantillons sont indépendants, avec une variance σ^2 et une espérance $\mu = 0$

$$R_x[m] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{pour } m = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

car :

$\cdot\ R_x[0] = E\{x[n]^2\} = \sigma^2$

pour $m \neq 0$, $x[n+m]$ et $x[n]$ sont indépenndants, donc leur produit a une espérance nulle.

2) Calcule de la fonction d'autocorrélation d'une sinusoïde à phase aléatoire *:*

2)

$x(n) = A\cos[2\pi f_0 n + \phi]$ ... (1)

$R_x[m] = E[x(n+m)x(n)]$

$x(n+m) = A\cos[2\pi f_0(n+m) + \phi]$ ... (2)

(1) × (2) $\Rightarrow$ $x[n+m]x[n] = A^2\cos(2\pi f_0(n+m) + \phi)\cos(2\pi f_0 n + \phi)$

$x(n+m)x(n) = \frac{A^2}{2}\left[\cos(2\pi f_0 m) + \cos(4\pi f_0 n + 2\phi + 2\pi f_0 m)\right]$

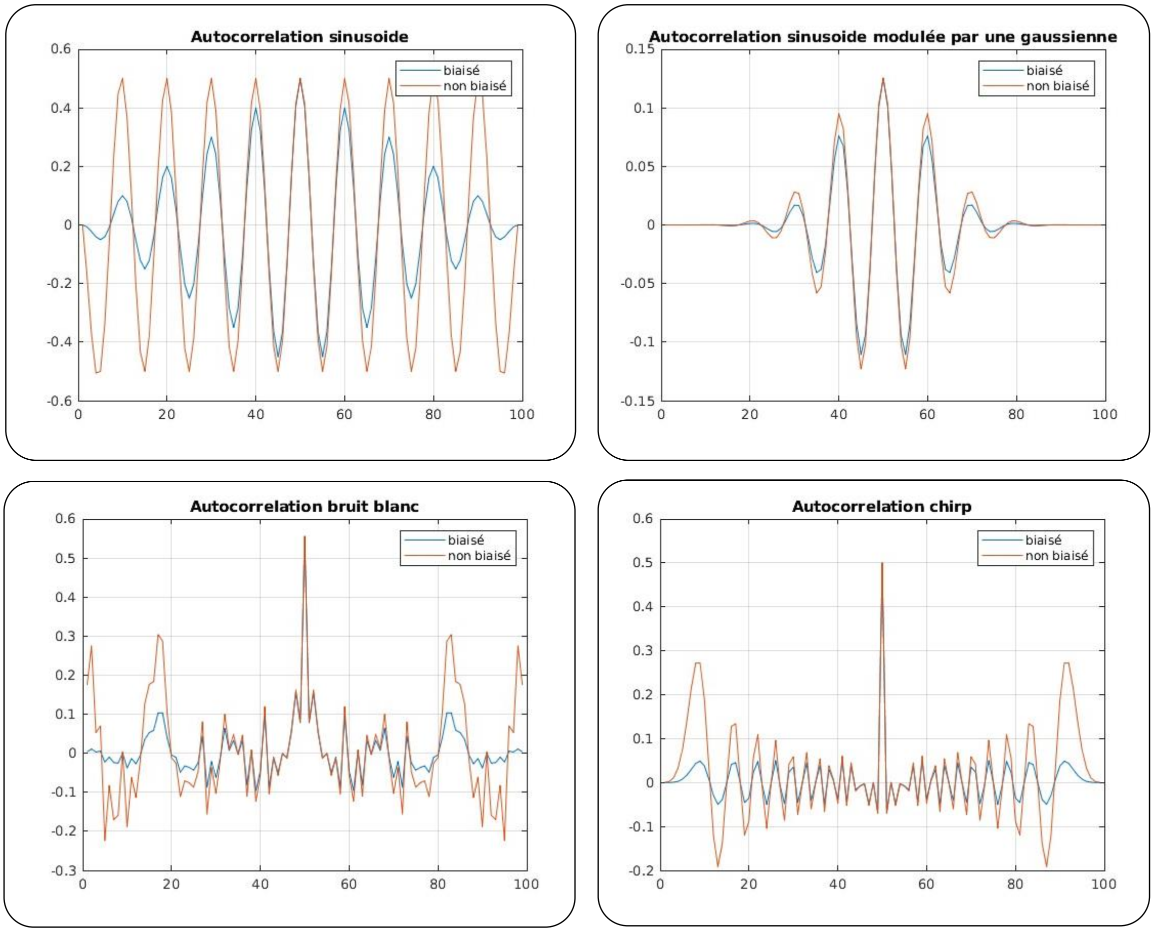
$\boxed{\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]}$

Donc $E\{\cos(4\pi f_0 n + 2\phi + 2\pi f_0 m)\} = 0$

car ϕ est une VA uniforme $[0, 2\pi]$

il reste que le premier terme : $\boxed{R_x[m] = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 m)}$

3) *Traçage les fonctions d'autocorrélation*



- Bruit blanc : L'autocorrélation montre un pic unique et central (1 pour m=0 et 0 ailleurs).
- Sinusoïde : L'autocorrélation produit une sinusoïde de fréquence doublée : $Rx[m]=A^2\cos(2\pi f0m)$.

II. <u>Etude de corrélation pour la détection de cible</u>

1) *Calculer l'intercorrélation entre le signal reçu et le signal envoyé*

3) $y(n) = a x(n - n_0)$; $x(n)$

l'intercorrélation entre $y(n)$ et $x(n)$:

$\Rightarrow R_{yx}(m) = E\{y(n+m)\, x(n)\}$

$\Rightarrow y(n+m) = a x(n+m-n_0)$

$\Rightarrow R_{yx}(m) = a\, E\{x(n+m-n_0)\, x(n)\}$

Par définition : $\left(R_x(n) = E\{x(n-m)\, x(n)\} \right)$

$E\{x(n+m-n_0)\, x(n)\}$ est l'autocorrélation $R_x(m-n_0)$

Donc : $\boxed{R_{yx}(m) = a.R_x(m-n_0)}$

2) Quand le signal envoyé est un bruit blanc

4) la relation devient :

$$R_{yx}(m) = \begin{cases} a.\sigma^2 & \text{pour } m = n_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Méthode :

- On calcule l'intercorrélation $R_{yx}(m)$
- On trouve l'indice m où $R_{yx}(m)$ est maximal
- On estime le retard τ_0 .
- On calcul la distance de la cible : $\Rightarrow d = \frac{c\tau_0}{2}$

où c est la vitesse de propagation du signal.

3) Quand le signal envoyé est une sinusoïde

5) $x(n)$ est une sinusoïde :

$$x(n) = A\cos(2\pi f_0 n T_e + \phi)$$

$$y(n) = a \cdot x(n-n_0) = a\, x(n-n_0) = a \cdot A\cos(2\pi f_0 (n-n_0) T_e + \phi)$$

L'intercorrélation entre $y(n)$ et $x(n)$ devient :

$$R_{yx}(m) = E\{ y[n+m]\, x(n) \}$$

$$R_{yx}(m) = E\{ aA^2 \cos(2\pi f_0 (n+m-n_0) T_e + \phi) \cdot \cos(2\pi f_0 n T_e + \phi) \}$$

$$R_{yx}(m) = \frac{aA^2}{2} E\{ \underbrace{\cos(2\pi f_0 (2n+m-n_0) T_e + 2\phi)}_{=0} + \cos(2\pi f_0 (m-n_0) T_e) \}$$

$$R_{yx}(m) = \frac{aA^2}{2} \cos(2\pi f_0 (m-n_0) T_e)$$

Donc l'intercorrélation $R_{yx}(m)$ n'est pas un pic net mais une sinusoïde. Cela rend difficile l'estimation directe du décalage n_0 car $R_{yx}(m)$ présente plusieurs maxima.

4) *Parmi les 4 motifs présentés ci-dessus :*

Les deux meilleurs motifs pour la détection de cibles sont :

- Bruit blanc : pour sa simplicité et sa précision dans la localisation du retard.
- Chirp : grâce à sa fréquence variable et à sa capacité à fournir une localisation précise.

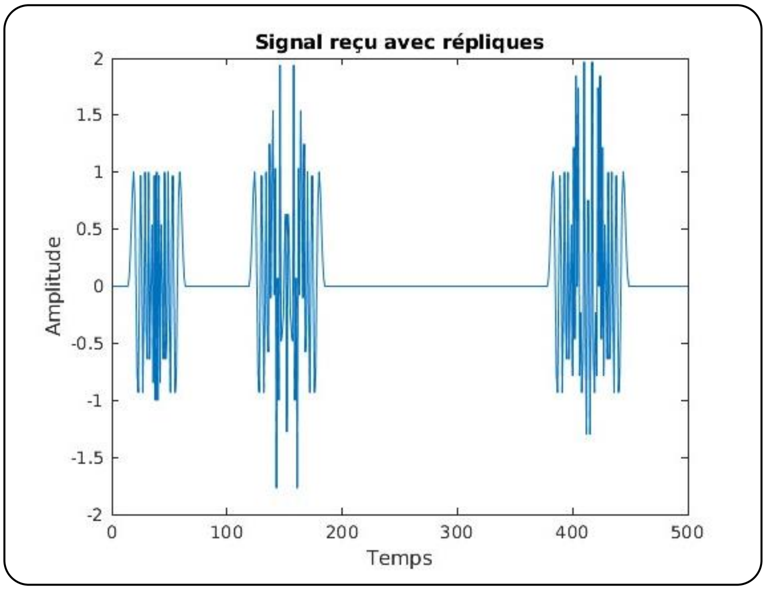
5) *Parmi les 4 motifs présentés ci-dessus :*

- L'estimateur biaisé est préférable pour la détection de cibles en raison de sa stabilité, (Dans le graph il ne présente pas l'effet de bords contrairement au celui qui est non biaisé).

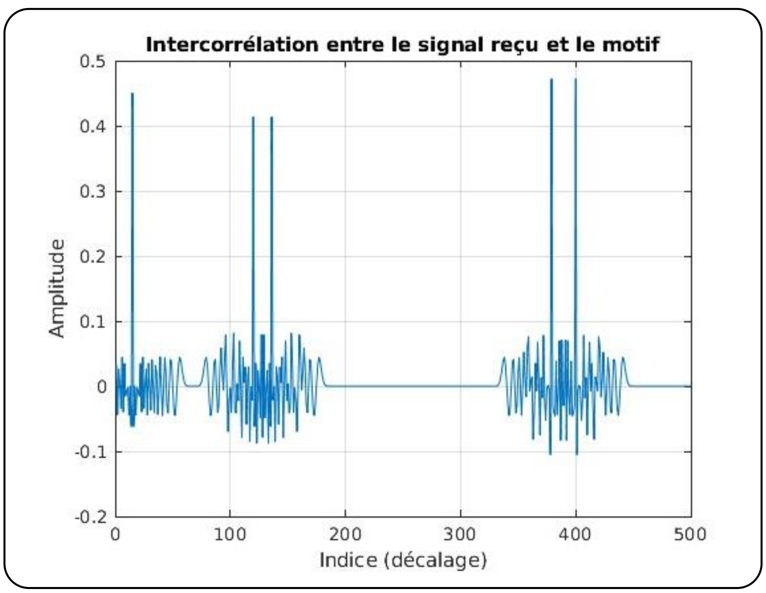
III. <u>Détection des cibles dans le cas non-bruité</u>

1) *Simulation du signal reçu :*

Signal Chirp :



2) *Calcul et affichage de l'intercorrélation :*

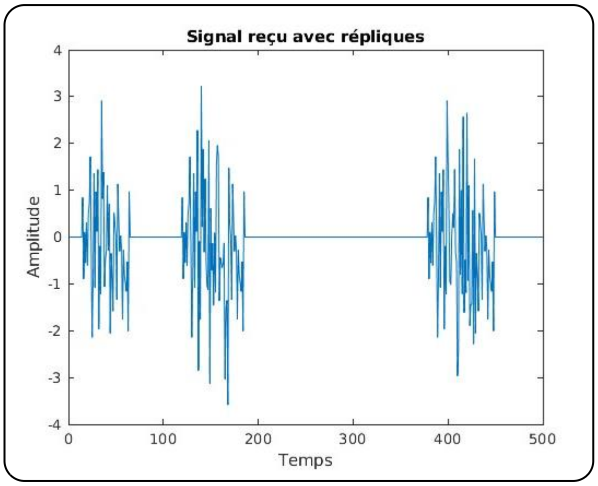


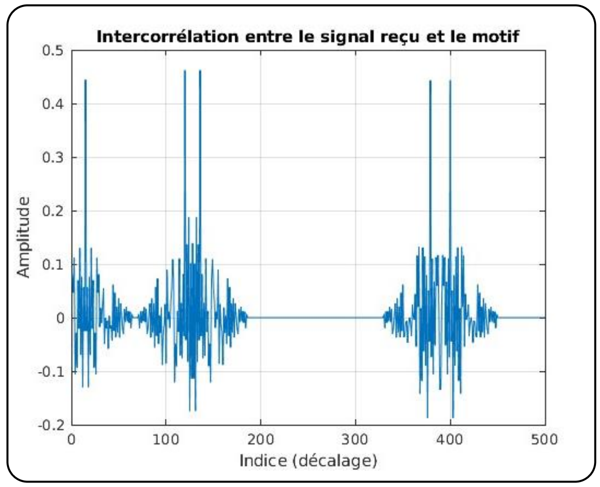
Observation : Les pics dans l'intercorrélation indiquent les positions des motifs dans le signal reçu.

3) *Comparaison des motifs :*

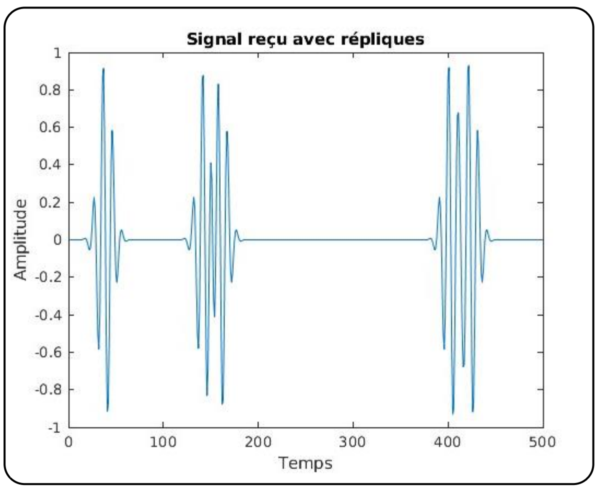
Répéter les étapes 1 et 2 pour chaque motif et observer :

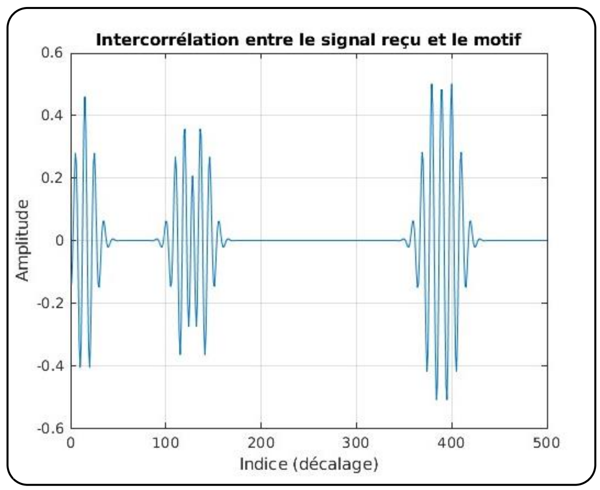
Bruit blanc :



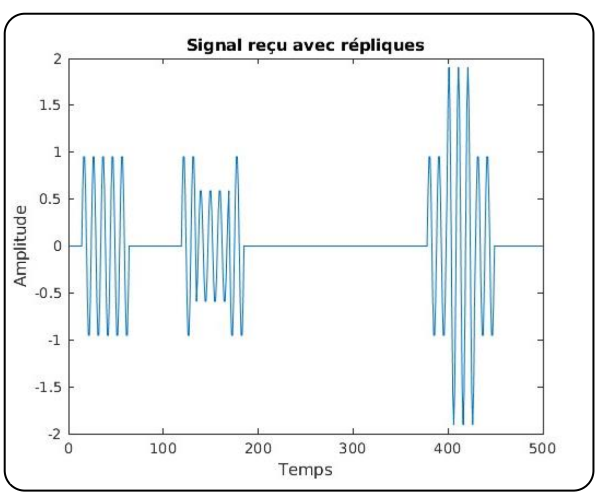


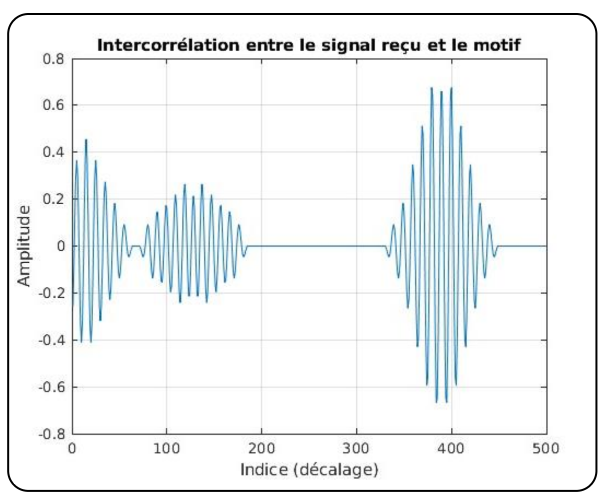
Sinusoïde modulée par une gaussienne :





Signal Sinusoïde :





Conclusion : Le chirp se prête généralement mieux à la détection grâce à sa diversité fréquentielle.

4) *Détection automatique des positions :*

Pour un seuil 0.7 :

```
dc =

    15   120   136   379   400


db =

    15   120   136   379   400
```

Observation : Les positions détectées doivent correspondre aux positions des cibles initiales, avec éventuellement de légères erreurs dues au bruit ou à la superposition.

IV. <u>Détection des cibles dans le cas bruité</u>

1) *Calcule l'intercorrélation entre le signal reçu et le signal envoyé :*

6)

$$y(n) = a\,x(n-n_0) + b(n)$$

$$R_{yx}(m) = E\{y(n+m)\,x(n)\}$$

$$R_{yx}(m) = E\{(a\,x(n+m-n_0) + b(n+m))\,x(n)\}$$

$$R_{yx}(m) = a\,\underbrace{E\{x(n+m-n_0)\,x(n)\}}_{= R_x(m-n_0)} + \underbrace{E\{b(n+m)\,x(n)\}}_{= 0}$$

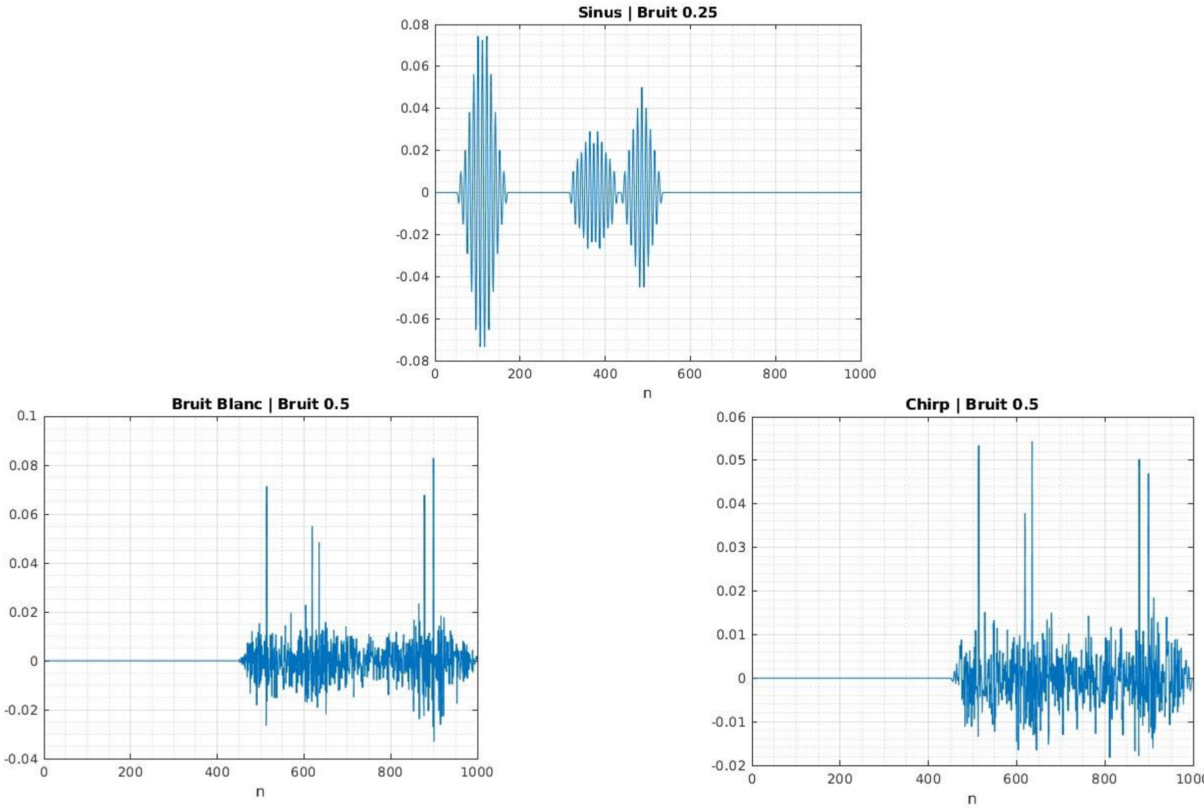
car $b(n)$ est centré et non corrélé à $x(n)$

Donc : $\boxed{R_{yx}(m) = a\,R_{x}(m-n_0)}$

- Théoriquement la puissance du bruit ne modifie le résultat de l'intercorrélation parce que $b(n)$ est non corrélé à $x(n)$.

2) *Répétition l'expérience de Section 4 pour un niveau de bruit plus ou moins élevé (bruit*

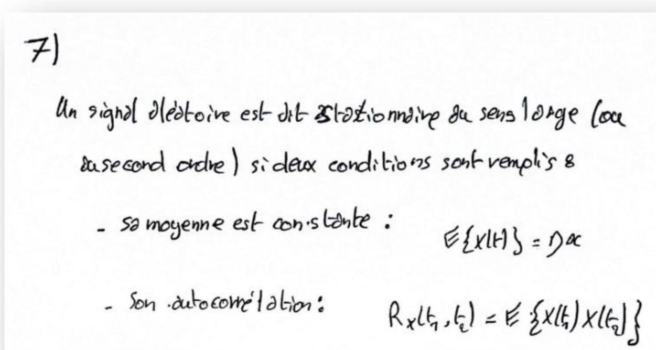
d'écart-type 0.25, 0.5 et 1) :



Avec un bruit faible (σ=0.25), l'intercorrélation est bien définie et la détection des cibles reste précise. Avec un bruit modéré (σ=0.5), l'intercorrélation devient moins nette, et la détection est moins fiable, mais il est encore possible de récupérer les positions des cibles.
Avec un bruit élevé (σ=1), la détection devient difficile, voire impossible, car le bruit masque complètement les signaux utiles. La détection de cibles devient de plus en plus difficile à mesure que le niveau de bruit augmente, c'est pour ça le filtrage ou l'utilisation de signaux à large bande (comme le chirp) peuvent aider à améliorer la détection dans des environnements bruyants.

V. <u>Stationnarité</u>

1) Rappelle de la définition d'un signal stationnaire au sens large



7)

Un signal aléatoire est dit stationnaire au sens large (ou au second ordre) si deux conditions sont remplis :

- sa moyenne est constante : $E\{x(t)\} = m_x$
- Son autocorrélation : $R_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\}$

2) On peut dire que la variance d'un signal stationnaire au sens large est constante

8)

oui car $E\{x(t)\} = \eta_x \Rightarrow$ constante

$$V = E(x + E(x)^2)$$
$$= E(x + \eta_x^2)$$
$$= E(x) + \eta_x^2$$
$$= \eta_x + \eta_x^2 \Longrightarrow \text{constante}$$

Donc la variance est constante.

3) La valeur moyenne mX[n] et la variance σ^2X[n] théoriques d'un tel signal.

9)

Nous savons que la fonction :

$\cos(2\pi f_0 n + \phi) \Rightarrow$ est une fonction paire dont la fréquence $f_0 = 0$. et sa moyenne sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ est de 0

Donc

$$Var(X) = E(x^2) - \underbrace{E(x)^2}_{0}$$
$$Var(X) = E\left(\cos^2(2\pi f_0 n + \phi)\right)$$
$$= E\left(\frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(4\pi f_0 n + \phi\right)\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}E(1) + \frac{1}{2}\underbrace{E\left(\cos(4\pi f_0 n + \phi)\right)}_{0}$$
$$= \frac{1}{2}E(1) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Annexes

Corrélation

```
clear all;
close all;
clc
%%
x1 = randn(1,50); %bb
x2 = sin(2*pi*(1:50)*.1); %sin
x3 = sin(2*pi*(1:50)*.1).*exp(-(-24:25).^2/100);%sg
x4 = sin(2*pi*(1:50).^2/100);%chrip
Rxx1b=xcorr(x1,x1,'biased');
Rxx2b=xcorr(x2,x2,'biased');
Rxx3b=xcorr(x3,x3,'biased');
Rxx4b=xcorr(x4,x4,'biased');
Rxx1nb=xcorr(x1,x1,'unbiased');
Rxx2nb=xcorr(x2,x2,'unbiased');
Rxx3nb=xcorr(x3,x3,'unbiased');
Rxx4nb=xcorr(x4,x4,'unbiased');
figure;plot(Rxx1b);hold on;plot(Rxx1nb);grid;
title('Autocorrelation bruit blanc');
legend('biaisé','non biaisé')
figure;plot(Rxx2b);hold on;plot(Rxx2nb);grid
title('Autocorrelation sinusoide');
legend('biaisé','non biaisé')
figure;plot(Rxx3b);hold on;plot(Rxx3nb);grid
title('Autocorrelation sinusoide modulée par une gaussienne');
legend('biaisé','non biaisé')
figure;plot(Rxx4b);hold on;plot(Rxx4nb);grid
title('Autocorrelation chirp');
legend('biaisé','non biaisé')
```

Détection des cibles dans le cas non-bruité

1. *Simulation du signal reçu :*

```
x1 = randn(1,50); %bb
x2 = sin(2*pi*(1:50)*.1); %sin
x3 = sin(2*pi*(1:50)*.1).*exp(-(-24:25).^2/100);
x4 = sin(2*pi*(1:50).^2/100);
Rxx1b=xcorr(x1,x1,'biased');
Rxx2b=xcorr(x2,x2,'biased');
Rxx3b=xcorr(x3,x3,'biased');
Rxx4b=xcorr(x4,x4,'biased');
Rxx1nb=xcorr(x1,x1,'unbiased');
Rxx2nb=xcorr(x2,x2,'unbiased');
Rxx3nb=xcorr(x3,x3,'unbiased');
Rxx4nb=xcorr(x4,x4,'unbiased');
bruit25=randn(500,1)*0.25;
bruit5=randn(500,1)*0.5;
bruit1=randn(500,1)*1;
%%
sin15=zeros(1,500);sin15(15:15+length(x2)-1)=x2;
sin120=zeros(1,500);sin120(120:120+length(x2)-1)=x2;
sin136=zeros(1,500);sin136(136:136+length(x2)-1)=x2;
sin379=zeros(1,500);sin379(379:379+length(x2)-1)=x2;
sin400=zeros(1,500);sin400(400:400+length(x2)-1)=x2;
sin379(501:end)=[];
sin400(501:end)=[];
sin=sin15+sin120+sin136+sin379+sin400;
Rx2sinb=xcorr([x2,zeros(1,length(sin)-length(x2))],sin,'biased');
figure,plot(Rx2sinb);
grid;grid minor;title('Sinus | Bruit 0.25');xlabel('n');
%%
bb15=zeros(1,500);bb15(15:15+length(x1)-1)=x1;
bb120=zeros(1,500);bb120(120:120+length(x1)-1)=x1;
bb136=zeros(1,500);bb136(136:136+length(x1)-1)=x1;
bb379=zeros(1,500);bb379(379:379+length(x1)-1)=x1;
bb400=zeros(1,500);bb400(400:400+length(x1)-1)=x1;
bb=bb15+bb120+bb136+bb379+bb400+bruit5';
Rx2bbb=xcorr(bb,[x1,zeros(1,length(bb)-length(x1))],'biased');
figure,plot(Rx2bbb);
grid;grid minor;title('Bruit Blanc | Bruit 0.5');xlabel('n');
%%
c15=zeros(1,500);c15(15:15+length(x4)-1)=x4;
c120=zeros(1,500);c120(120:120+length(x4)-1)=x4;
c136=zeros(1,500);c136(136:136+length(x4)-1)=x4;
c379=zeros(1,500);c379(379:379+length(x4)-1)=x4;
c400=zeros(1,500);c400(400:400+length(x4)-1)=x4;
c=c15+c120+c136+c379+c400+bruit5';
Rx2cb=xcorr(c,[x4,zeros(1,length(c)-length(x4))],'biased');
figure,plot(Rx2cb);
grid;grid minor;title('Chirp | Bruit 0.5');xlabel('n');
```

2. *Détection automatique des positions*

```
dc=find(Rx2cb(500:end)>(0.7*max(Rx2cb)))
db=find(Rx2bbb(500:end)>(0.7*max(Rx2bbb)))
```

Détection des cibles dans le cas bruité

```
clear all;
close all;
clc
%%
x1 = randn(1,50); %bb
x2 = sin(2*pi*(1:50)*.1); %sin
x3 = sin(2*pi*(1:50)*.1).*exp(-(-24:25).^2/100);
x4 = sin(2*pi*(1:50).^2/100);
Rxx1b=xcorr(x1,x1,'biased');
Rxx2b=xcorr(x2,x2,'biased');
Rxx3b=xcorr(x3,x3,'biased');
Rxx4b=xcorr(x4,x4,'biased');
Rxx1nb=xcorr(x1,x1,'unbiased');
Rxx2nb=xcorr(x2,x2,'unbiased');
Rxx3nb=xcorr(x3,x3,'unbiased');
Rxx4nb=xcorr(x4,x4,'unbiased');
bruit25=randn(500,1)*0.25;
bruit5=randn(500,1)*0.5;
bruit1=randn(500,1)*1;

sin15=zeros(1,500);sin15(15:15+length(x2)-1)=x2;
sin120=zeros(1,500);sin120(120:120+length(x2)-1)=x2;
sin136=zeros(1,500);sin136(136:136+length(x2)-1)=x2;
sin379=zeros(1,500);sin379(379:379+length(x2)-1)=x2;
sin400=zeros(1,500);sin400(400:400+length(x2)-1)=x2;
sin379(501:end)=[];
sin400(501:end)=[];
sin=sin15+sin120+sin136+sin379+sin400;
Rx2sinb=xcorr([x2,zeros(1,length(sin)-length(x2))],sin,'biased');
figure,plot(Rx2sinb);
grid;grid minor;title('Sinus | Bruit 0.25');xlabel('n');

bb15=zeros(1,500);bb15(15:15+length(x1)-1)=x1;
bb120=zeros(1,500);bb120(120:120+length(x1)-1)=x1;
bb136=zeros(1,500);bb136(136:136+length(x1)-1)=x1;
```

```
bb379=zeros(1,500);bb379(379:379+length(x1)-1)=x1;
bb400=zeros(1,500);bb400(400:400+length(x1)-1)=x1;
bb=bb15+bb120+bb136+bb379+bb400+bruit5';
Rx2bbb=xcorr(bb,[x1,zeros(1,length(bb)-length(x1))],'biased');
figure,plot(Rx2bbb);
grid;grid minor;title('Bruit Blanc | Bruit 0.5');xlabel('n');

c15=zeros(1,500);c15(15:15+length(x4)-1)=x4;
c120=zeros(1,500);c120(120:120+length(x4)-1)=x4;
c136=zeros(1,500);c136(136:136+length(x4)-1)=x4;
c379=zeros(1,500);c379(379:379+length(x4)-1)=x4;
c400=zeros(1,500);c400(400:400+length(x4)-1)=x4;
c=c15+c120+c136+c379+c400+bruit5';
Rx2cb=xcorr(c,[x4,zeros(1,length(c)-length(x4))],'biased');
figure,plot(Rx2cb);
grid;grid minor;title('Chirp | Bruit 0.5');xlabel('n');


dc=find(Rx2cb(500:end)>(0.7*max(Rx2cb)))
db=find(Rx2bbb(500:end)>(0.7*max(Rx2bbb)))
```

Stationnarité

```
clear all
close all
clc
n=1:1000;
x=cos(2*pi*0.1*n+2*pi*rand);
moy=mean(x)
var=var(x)
```

Comparaison avec les valeurs Théoriques :

```
clear all
close all
clc
num_realis= 1000;
for i = 1:num_realis
 n=1:1000;
 x=cos(2*pi*0.1*n+2*pi*rand);
 moy(i) = mean(x);
 var1(i) = var(x);
```

```
end
moy_globale = mean(moy);
vari_globale = mean(var1);
fprintf('Moyenne globale: %.4f\n', moy_globale);
fprintf('Variance globale: %.4f\n', vari_globale);
```