

**Université Paul Sabatier
Toulouse**

Compte Rendu

*TP 2 : Identification, débruitage et analyse
temps-fréquence*

M1 EEA

- ✱ Module : Analyse spectrale des signaux et systèmes
- ✱ Réalisé par :
 - KABOU Abdeldjalil

TP2 : Identification, débruitage et analyse temps-fréquence

Objectif :

L'objectif de ce TP est d'explorer deux aspects essentiels du traitement du signal. Dans un premier temps, il s'agit de caractériser un filtre inconnu en estimant sa réponse impulsionnelle $y[n]$ ou sa réponse en fréquence $h^*(f)$ à partir de la sortie $y[n]$ mesurée pour une entrée $x[n]$ même en présence de perturbations. Cette étude repose sur des méthodes expérimentales basées sur l'estimation de la corrélation des signaux et trouve une application directe dans le débruitage en exploitant une référence du bruit. Dans un second temps, le TP aborde l'analyse temps-fréquence des signaux à l'aide de la transformée de Fourier à fenêtre glissante. Il s'agit de comprendre l'influence des paramètres de cette représentation sur des signaux simulés, notamment en ce qui concerne la localisation temporelle et fréquentielle, avant d'appliquer ces concepts à l'analyse de signaux réels.

Partie préparation

on a la fonction de transfert de notre filtre :

$$H(z) = \frac{1 - 0,5z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,729z^{-3}}$$

Numérateur
 $b = [1, -0,5, 1]$

Dénominateur
 $a = [1, 0, 0, -0,729]$

Q1 : la réponse en fréquence : $H(e^{j\omega}) = \sum_n h[n] \cdot e^{-j\omega n}$

⇒ avec freqZ on va tracer $\left\{ \begin{array}{l} \text{module } |H(e^{j\omega})| \\ \text{la phase } -\angle H(e^{j\omega}) \end{array} \right.$ à la fois.

Q2 : $h[n]$ réponse impulsionnelle = la sortie du filtre si une Dirac $\delta[n]$

ex: on a un système: $S[n] = h[n] * \overset{\text{entrée}}{e[n]} + \overset{\text{perturbation}}{b[n]}$.

$$\begin{cases} * R_{se}[m] = E[S[n]e[n-m]] \text{ (intercorrélation: sortie-entrée)} \\ = E[(h[n] * e[n] + b[n])e[n-m]] \\ * R_e[m] = E[e[n]e[n-m]] \text{ (autocorrélation de } e[n]) \\ * R_{be}[m] = E[b[n]e[n-m]] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R_{se}[m] &= E[h[n] * e[n] + b[n] \cdot e[n-m]] \\ &\overset{\text{+ par linéarité de l'espérance}}{=} \sum_k h[k] \cdot E[e[n-k] \cdot e[n-m]] + E[b[n]e[n-m]] \\ \Rightarrow R_{se}[m] &= \sum_k h[k] \cdot R_e[m-k] + R_{be}[m] \end{aligned}$$

Si $\begin{cases} e[n] \text{ et } b[n] \text{ non corrélés} \\ \text{et} \\ b[n] \text{ centrée (espérance nulle)} \end{cases}$ (1)

$$\Rightarrow R_{be}[m] = 0 \Rightarrow R_{se}[m] = (h * R_e)[m] = h[m] * R_e[m]$$

relation de convolution entre h et l'autocorrélation de l'entrée.

Q4:

on va que:

$$R_{sc}[m] = \sum_{k=0}^{P-1} h[k] \cdot R_c[m-k] \quad m = [0, 1, \dots, P-1]$$

cela peut s'écrire:

$$M \cdot h = C$$

 • $h = [h[0], h[1], \dots, h[P-1]]^T$ est le vecteur inconnu

 • $C = [R_{sc}[0], R_{sc}[1], \dots, R_{sc}[P-1]]^T$

 • M est une matrice Toeplitz formée de $R_c[m]$:

$$M = \begin{bmatrix} R_c[0] & R_c[1] & \dots & R_c[P-1] \\ R_c[1] & R_c[0] & \dots & R_c[P-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_c[P-1] & R_c[P-2] & \dots & R_c[0] \end{bmatrix}$$

 chaque ligne \rightarrow Décalage de R_c : $[h]_{m,k} = \sum_{k=0}^{P-1} M_{m,k} \cdot h[k] = R_{sc}[m]$

la TFD d'une convolution devient un produit:

$$F\{R_{sc}[m]\} = F\{h[m] * R_c[m]\} + F\{R_{bc}[m]\}$$

Donc:

$$\underbrace{S_{sc}(f)}_{\text{interspectre}} = \underbrace{H(f)}_{\substack{\text{réponse} \\ \text{fréquentielle} \\ \text{de l'entrée}}} \cdot \underbrace{S_c(f)}_{\substack{\text{densité} \\ \text{spectrale} \\ \text{de l'entrée}}} + \underbrace{S_{bc}(f)}_{\text{interspectre}}$$

Q7:

 on suppose $\left\{ \begin{array}{l} e[n], b[n] \text{ non corrélés} \\ S_{bc}(f) = 0 \end{array} \right. / \quad S_{sc}(f) = H(f) \cdot S_c(f) + S_{bc}(f)$

 Alors: on peut isoler $H(f)$. $\rightarrow H(f) = \frac{S_{sc}(f)}{S_c(f)}$

Condition de validité

1. $S_c(f) \neq 0$ (éviter div instables)
2. Signal stationnaire
3. bruit $b[n]$ non corrélé avec $e[n]$.
4. moyennage sur plusieurs fenêtres (welch) \rightarrow réduire la variance

Débruitage:

$$x[n] = s[n] + d[n].$$

$$d[n] = h[n] * b[n] = \sum_{k=0}^{P-1} h[k] \cdot b[n-k].$$

donc le signal mesuré est

$$x[n] = s[n] + \sum_{k=0}^{P-1} h[k] b[n-k].$$

$\Rightarrow s[n]$ et $b[n]$ non corrélés

$b[n]$ centré: $E[b[n]] = 0.$

la corrélation $R_{xb}[m]$:

$$R_{xb}[m] = E[x[n] \cdot b[n-m]].$$

en remplace $x[n]$:

$$R_{xb}[m] = E[(s[n] + d[n]) \cdot b[n-m]] = E[s[n] \cdot b[n-m]] + E[d[n] \cdot b[n-m]] \quad (3)$$

c

$$\Rightarrow E[s[n] \cdot b[n-m]] = 0 \text{ (non corrélés)}$$

$$\text{donc } \therefore R_{xb}[m] = E[d[n] \cdot b[n-m]]$$

$$\text{or } d[n] = \sum_{k=0}^{P-1} h[k] \cdot b[n-k] \Rightarrow$$

$$R_{xb}[m] = E\left[\left(\sum_{k=0}^{P-1} h[k] b[n-k]\right) \cdot b[n-m]\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{P-1} h[k] \cdot E[b[n-k] \cdot b[n-m]]$$

où:

$$\Rightarrow E[b[n-k] \cdot b[n-m]] = R_b[m-k]$$

Donc:

$$R_{xb}[m] = \sum_{k=0}^{P-1} h[k] \cdot R_b[m-k].$$

la forme matricielle $M \cdot h = C$.

Débruitage :

Une fois on trouve \hat{h} .

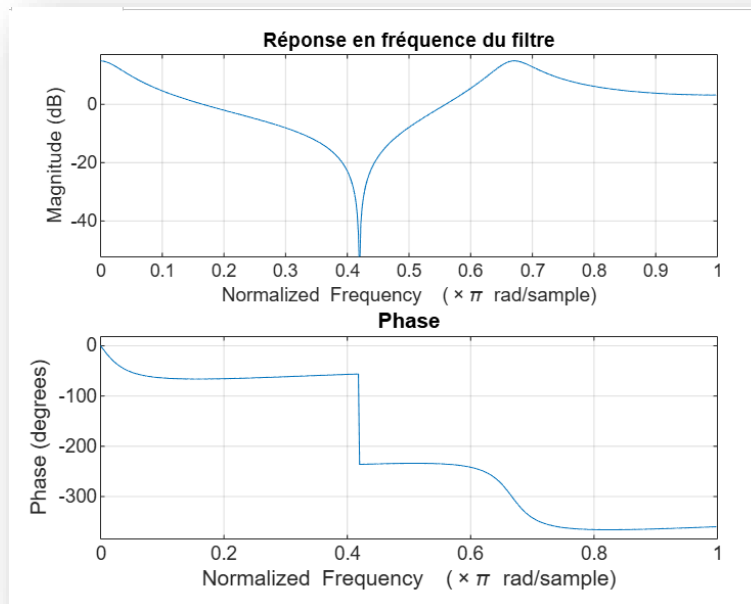
1) reconstituer bruit estimé : $\hat{d}[n] = \hat{h} \times b[n]$.

2) Soustraction du bruit du signal mesuré : $\hat{s}[n] = x[n] - \hat{d}[n]$

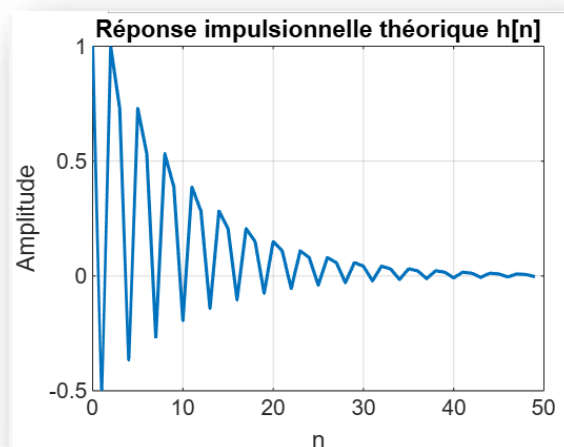
↑
estimation du signal
utile

1) Etude du filtre :

a. Traçage de la réponse en fréquence de ce filtre



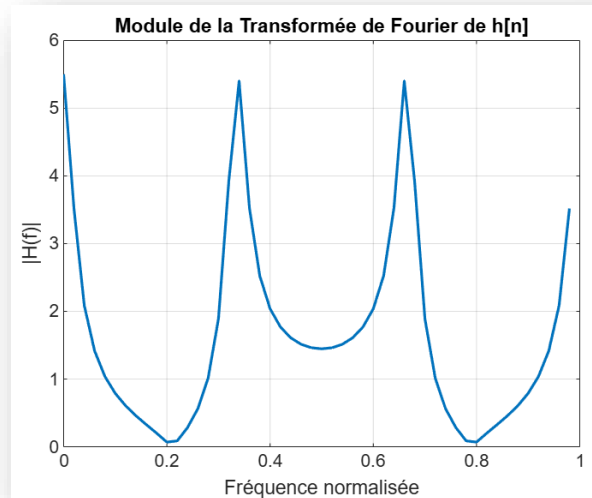
b. Traçage de la réponse impulsionnelle $h[n]$:



Commentaires :

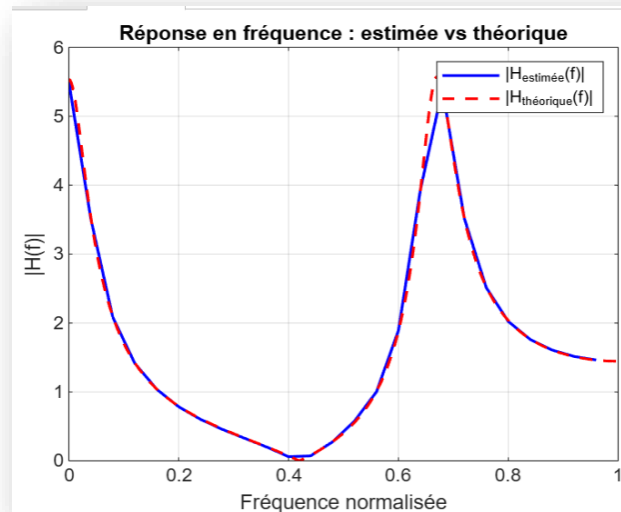
L'approximation par un filtre RIF d'ordre $P=50$ signifie que l'on suppose que la réponse impulsionnelle du filtre d'origine est essentiellement finie et négligeable au-delà de $n=50$. Cette approximation est valable si l'atténuation des coefficients de $h[n]$ est suffisante après 50 échantillons.

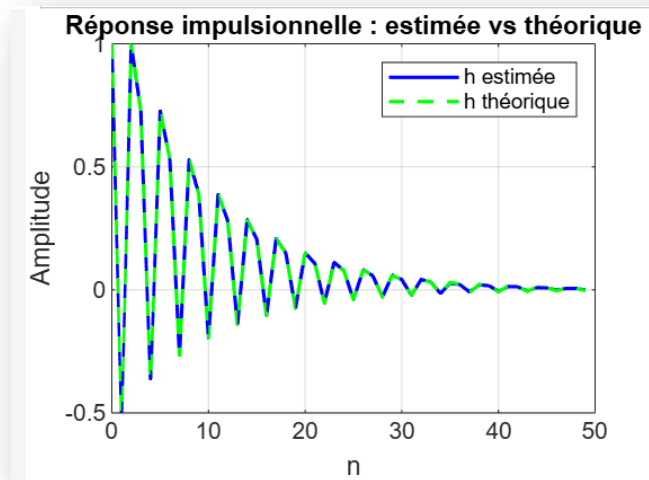
J'ai même tracé le module de la Transformée de Fourier de $h[n]$:



0

c. Estimation de la réponse impulsionnelle et en fréquence :

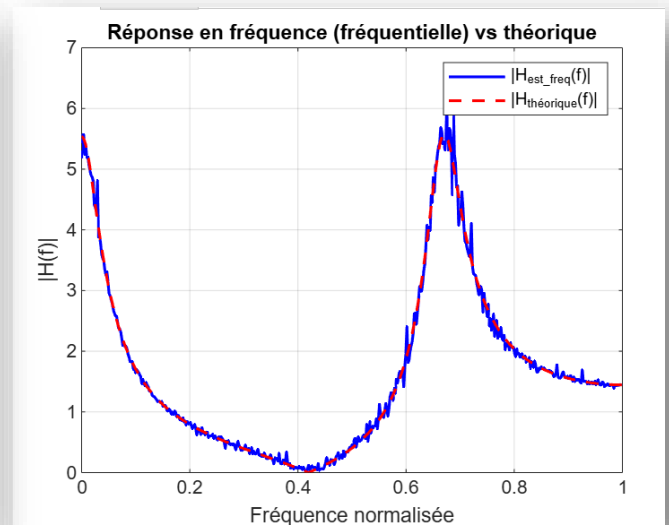
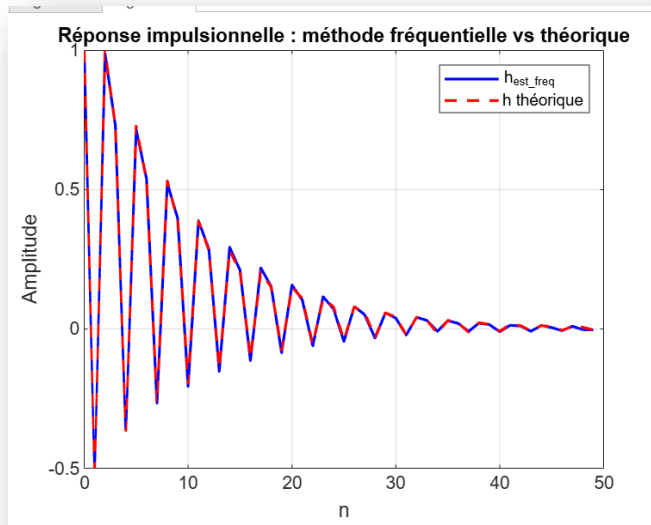




Conclusions :

La réponse impulsionnelle estimée $h_{est}[n]$ est proche de $h_{theo}[n]$, cela valide la méthode d'estimation. Et même en fréquence, il y a une bonne correspondance entre $|H_{est}(f)|$ et $|H_{theo}(f)|$ cela confirme que l'estimation est fiable.

d) Estimation de la réponse fréquentielle et la réponse impulsionnelle :



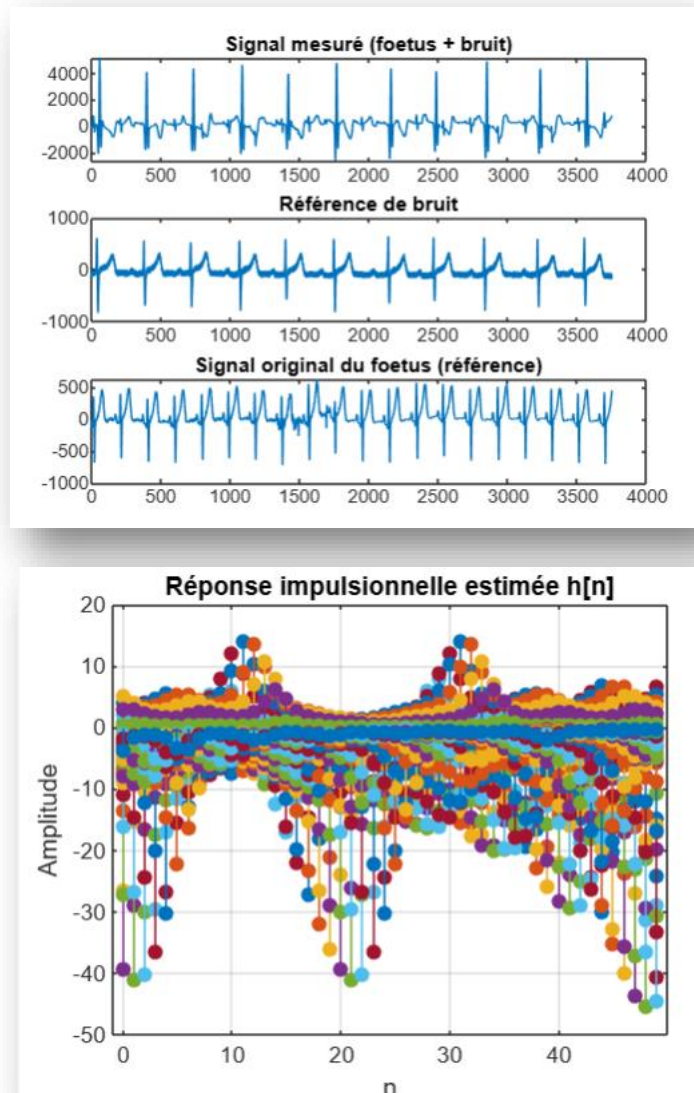
Conclusions :

J'observe que les résultats sont proches de la réponse théorique, mais qu'il y a un peu de bruit. Cela signifie que l'estimation de la réponse en fréquence et de la réponse impulsionnelle est généralement correcte, mais le bruit résiduel peut être dû à la présence de perturbations ou de limitations dans l'échantillonnage ou le calcul des densités spectrales.

Ce bruit peut également provenir de la méthode de calcul de la FFT ou d'une fenêtre trop petite pour capturer les détails des densités spectrales.

II. Débruitage d'un signal avec référence de bruit

1) Application biomédicale

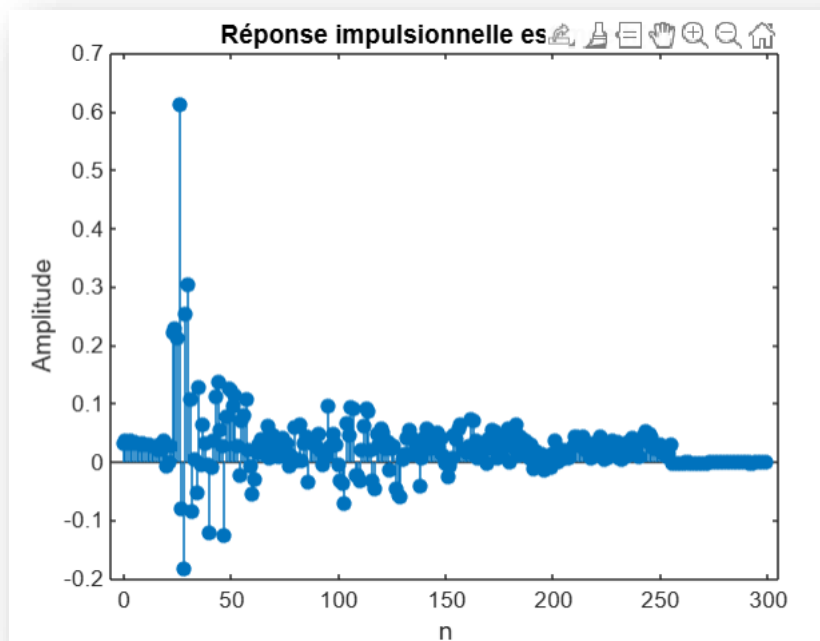


Le signal débruité peut être estimé en convoluant la réponse impulsionnelle $h[n]$ avec la référence de bruit.

La méthode utilisée pour estimer $h[n]$ est basée sur la corrélation croisée et l'autocorrélation. Cette estimation peut ne pas être parfaite en raison du bruit ou de l'interférence, mais elle permet généralement de bien capturer la dynamique du filtre.

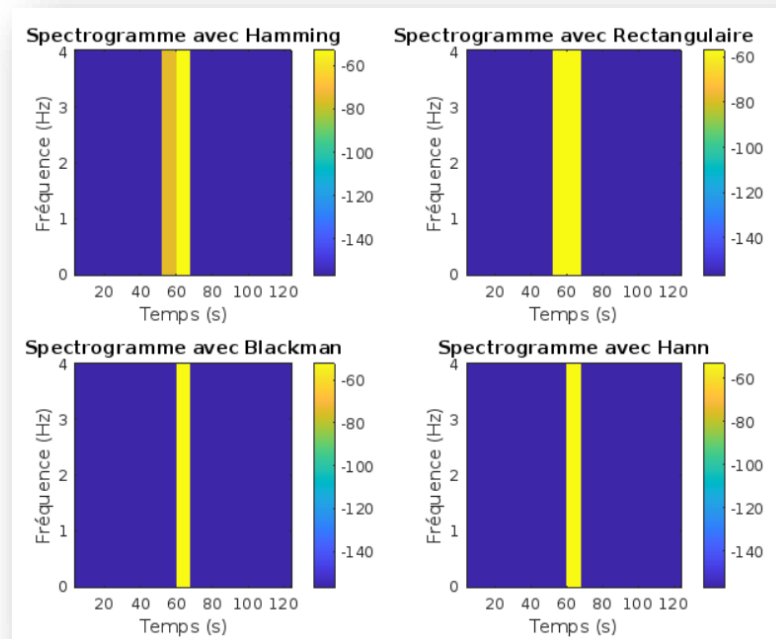
Le signal débruité obtenu en utilisant $h[n]$ devrait être proche du signal original, mais il peut toujours y avoir quelques imperfections dues aux limitations de l'estimation de la réponse impulsionnelle et aux propriétés du bruit.

2) Application audio

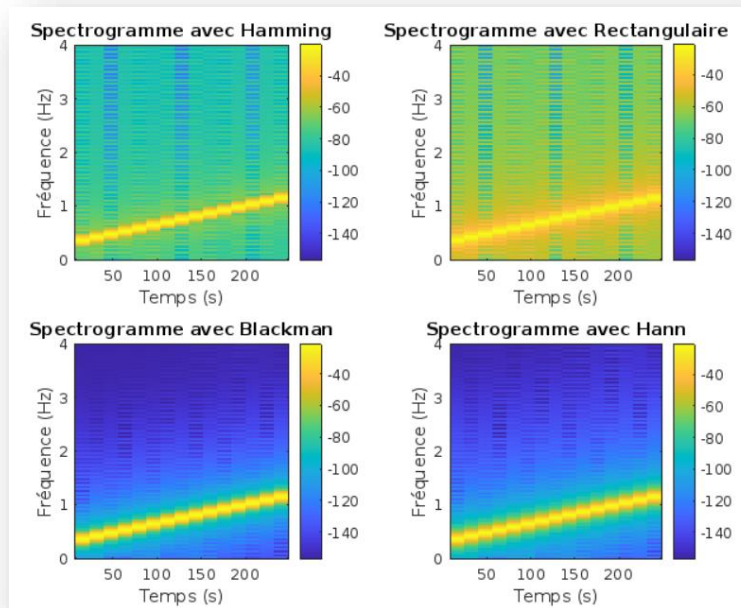


Analyse temps-fréquence

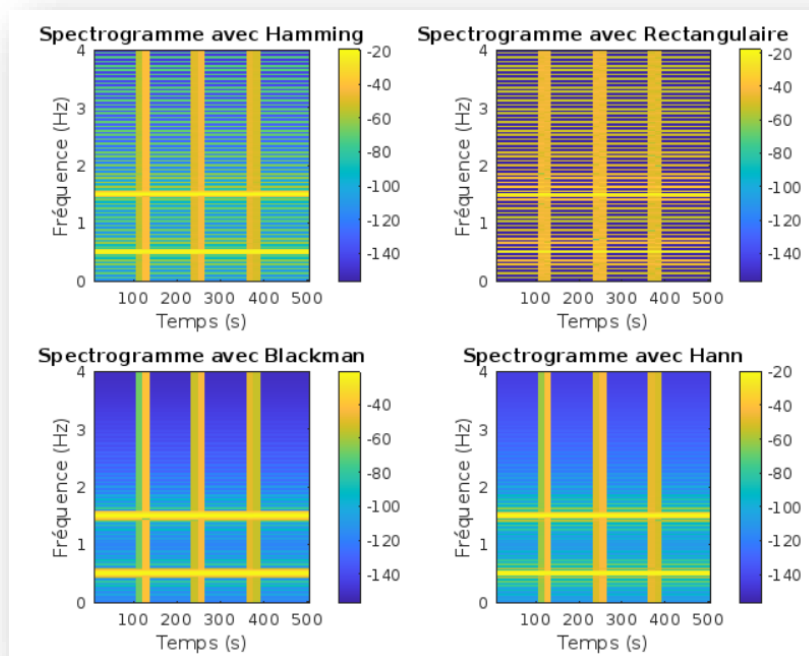
1) Compréhension sur des signaux simulés :



Pour la fenêtre rectangulaire : Bonne résolution temporelle mais mauvaise résolution fréquentielle (effet de fuites spectrales). Et pour la fenêtre Hamming et Hann : Bon compromis entre localisation en temps et en fréquence. Et pour la fenêtre Blackman : Meilleure localisation fréquentielle mais moins bonne localisation temporelle. L'impact du choix de la fenêtre est donc crucial pour l'analyse temps-fréquence.



- ✗ La fenêtre rectangulaire a des artefacts en fréquence (fuites spectrales), mais elle suit bien la variation temporelle.
- ✗ La fenêtre Blackman offre une meilleure précision en fréquence, mais avec une dégradation de la localisation temporelle.
- ✗ Les fenêtres Hamming et Hann fournissent un bon compromis entre temps et fréquence.
- ✗ Pour des fréquences plus élevées, la précision fréquentielle est souvent meilleure, mais la localisation temporelle est plus difficile à conserver.

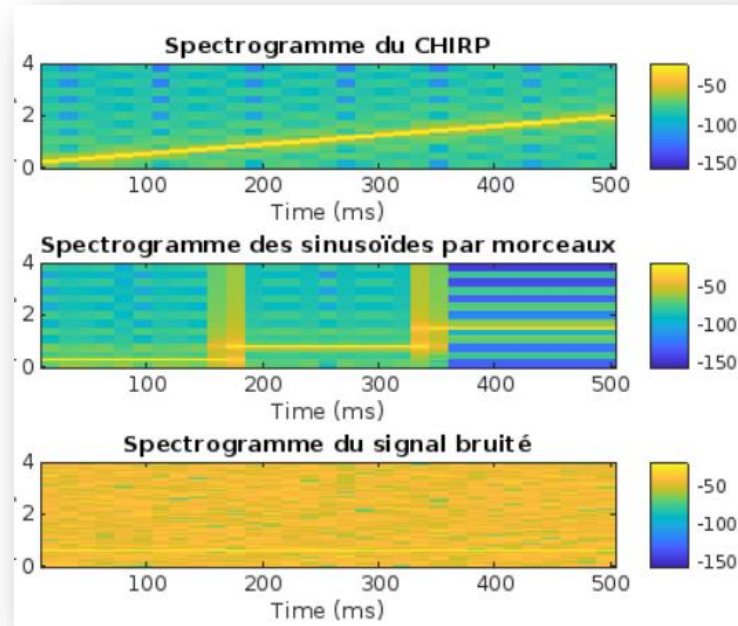


Événements ponctuels (pics temporels) :

- ✗ Mieux visibles avec fenêtres courtes (ex : rectangulaire).
- ✗ Mais les sinusoïdes deviennent floues.

Fréquences pures (sinusoïdes continues) :

- Mieux définies avec fenêtres longues (ex : Blackman).
- Mais les impulsions sont mal localisées en temps.



Chirp :

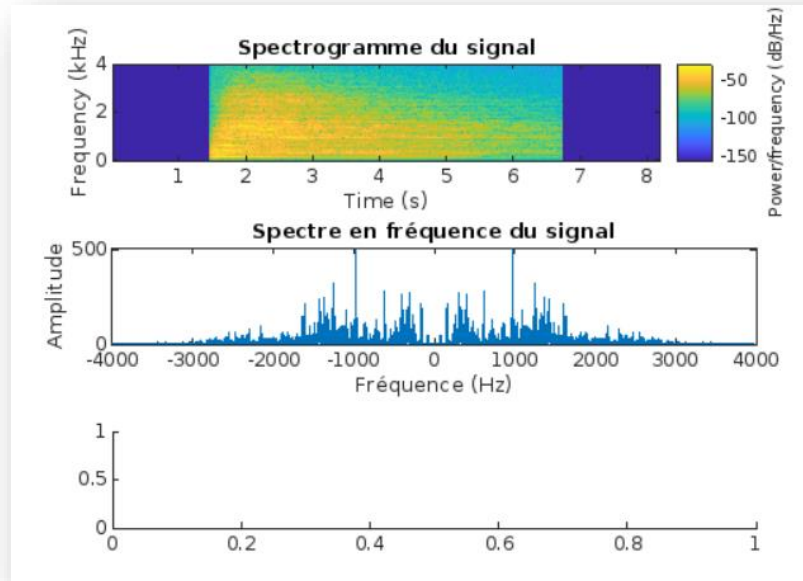
- ✗ Signal où la fréquence augmente linéairement (200 Hz → 2000 Hz).
- ✗ Le spectrogramme montre une bande qui monte progressivement en fréquence.

Sinusoïdes par morceaux :

- ✗ Trois parties : 300 Hz, 800 Hz, 1500 Hz.
- ✗ Le spectrogramme affiche des transitions nettes entre les fréquences.

Signal bruité :

- Sinusoïde 600 Hz + bruit blanc.
- Le spectrogramme montre une composante principale (600 Hz), avec du bruit diffus en fond.



- ✗ Représentation temporelle nous permet de voir la structure du signal.
- ✗ Transformée de Fourier (TFD) : Montre quelles fréquences dominant dans le signal (par exemple pics nets = tons purs, large bande = bruit).
- ✗ Spectrogramme : Permet d'analyser l'évolution des fréquences en fonction du temps (Malheureusement, je n'ai pas réussi à afficher le spectrogramme et je n'ai pas pu identifier l'erreur.)