Université Paul Sabatier
Toulouse

Compte Rendu

Analyse spectrale des signaux et systèmes

M1 EEA

- Module : Analyse Spectrale des signaux et systèmes
- Réalisé par :

  - KABOU Abdeldjalil

2024 / 2025

TP1 : Outils d'analyse spectrale des signaux déterministes et aléatoires

Objectif :

Ce TP porte sur l'analyse spectrale des signaux. La première partie concerne les signaux déterministes, où l'on utilise la Transformée de Fourier Discrète (TFD) pour étudier leur spectre, en prenant en compte les erreurs de fréquence et d'amplitude, ainsi que les techniques de bourrage de zéros et de fenêtrage pour améliorer l'analyse.

La seconde partie traite des signaux aléatoires, avec l'étude des estimateurs de l'autocorrélation et de la densité spectrale de puissance (DSP), tout en analysant leurs propriétés statistiques (biais, variance).

L'objectif est de comprendre et d'appliquer ces outils pour mieux analyser les signaux en fréquence.

I. *Analyse spectrale des signaux déterministes*

1) *Analyse spectrale d'une sinusoïde :*

a. *Partie préparation*

Fenêtrage :

1. d'après le cours "page 30, 31, 32" on a :

si on multiplie le signal par une fenêtre $w(n)$

$$x_w(n) = x(n) \cdot w(n)$$

$\Rightarrow$ en fréquence, cela correspond à une convo entre TFSD $\hat{x}(f)$ et celle de la fenêtre $W(f)$:

$$\hat{X}_w(f) = \hat{x}(f) * W(f)$$

Effets :

* les raies spectrales deviennent plus larges
* la fuite spectrale

On peut pas distinguer les raies très proches (perte de résolution spectrale)

Propriétés : on a vu ça dans le cours "page 32"

* réduire la fuite spectrale (atténuation des lobes secondaires)
* garder une bonne résolution (largeur du lobe principale réduite)

1.

$$R_x[m] = E\{x[n+m]\,x[n]\}$$

$$x[n] = B[n] + 1 \Rightarrow R_x[m] = R_b[m] + 1$$

$$\Rightarrow R_{x_1}[m] = E\{x[n]\,x[n+m]\}$$

$$= E\{B[n]\,B[n+m]\} + E\{B[n]\} + E[B[n+m]] + 1$$

$$= R_b[m] + 1$$

$$R_x[m] = \begin{cases} \sigma^2 + 1 & \text{si } m = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E\{R_x[m]\} = \frac{N-|m|}{N} R_x[m]$$

2.

$$R_x[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=1}^{N-m} x[n+m]\,x[n] \quad m \geq 0$$

$$E\{R_x[m]\} = R_x[m] \Rightarrow B\{R_x[m]\} = 0$$

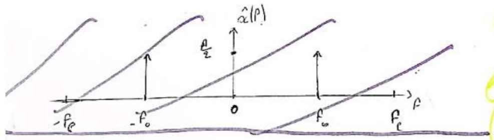
$$R_x b[m] = \frac{1}{N} \sum x[n+m]\,x[n]$$

$$B\{R_x[m]\} = \frac{N-m}{N} R_x[m]$$

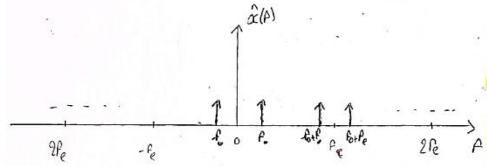
$$\begin{cases} \frac{|m|}{N} R_x[m] & m \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

DSP bruit blanc $S_b(f) = \sigma^2 \quad \forall f$

$\boxed{\text{le pérodogramme : il est biaisé pour 1 seul cas "bruit blanc"}}$



ces pics se répètent à $f_0 + Kf_e$ et $-f_0 + Kf_e$



TFD :

$$f_k = K \cdot \Delta f = K \frac{F_e}{N}$$

$$\Rightarrow K = \frac{f_K}{\Delta f} = \frac{f_K N}{F_e} \Rightarrow K_0 = \frac{f_0 N}{F_e} \Big\} \in \text{indice } 1$$

$$N - K_0 \Big\} \text{ indice } 2$$

dans ce cas : $K_0 = \frac{f_0 \times 100}{1000} = \frac{f_0}{10}$

Si $f_0 = 100$ donc $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} K_0 = 10 \\ N - K_0 = 90 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} f_{10} = 100\,Hz \\ f_{90} = 900\,Hz \end{matrix}$

ce qu'on a trouvé en TD :

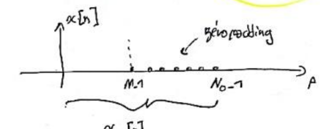
Erreur relative sur l'amplitude $\Big\} \nearrow$ $\Delta a_r = \frac{|\hat{w}_r(0)| - |\hat{w}_r(\frac{F_e}{2N})|}{|\hat{w}_r(0)|}$

et après calcule on a trouvé :

$$\Delta a_r = \frac{N - \frac{2N}{\pi}}{N} = 1 - \frac{2}{\pi} = 0,36 = 36\%$$

presque ce qu'on a en TP

7.



$$x[K] = \sum_{n=0}^{N_0-1} x_{zp}[n]\, e^{-j2\pi \frac{nK}{N_0}} \qquad K = 0, \dots, N_0-1$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi \frac{nK}{N_0}} \qquad K = 0, \dots, N_0-1$$

$$\hat{x}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi n \frac{f}{F_e}}$$

égalité si $\frac{f}{F_e} = \frac{K}{N_0} \Rightarrow f = \frac{K F_e}{N_0}$ $\quad K = 0, \dots, N_0-1$

donc : $X[K] = \hat{x}(f) \Big|_{f = K\frac{F_e}{N_0}}$. on obtient plus de points dans le spectre.

1. Le théorème de Shannon $\Rightarrow$ $2f_0 < F_e$

Fréquence max du signal

Fréquence d'échanti

Ici on a : $F_e = 1\,KHz$

- pour respecter le théorème de Shannon, f_0 doit être : $f_0 < \frac{F_e}{2} = \frac{1000}{2} = 500$

donc : $f_0 < 500\,Hz$

2. d'après le cours "page 26", et d'après le TD 2 partie "Transformée de Fourier Discrète du signal échantillonné" on a :

$$\text{TFD} \Rightarrow X[K] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \quad ; k = 0, \dots, N-1$$

$$\text{TFSD} \Rightarrow \hat{x}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi \frac{nf}{F_e}}$$

Egalité si $\frac{K}{N} = \frac{f}{F_e} \Rightarrow f = K\frac{F_e}{N}$

donc : $X[K] = \hat{x}(f) \Big|_{f = K\frac{F_e}{N}}$ $\quad ; K = 0, 1, \dots, N-1$

Alors : TFD est une version échantillonnée de la TFSD, avec un pas d'échantillonnage $= \frac{F_e}{N}$

①

donc on peut déduire la précision fréquentielle que l'on peut obtenir par TFD en calculant le pas :

$$\Delta f = \frac{F_e}{N} = \frac{1000}{100} = 10\,Hz$$

3.

$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \qquad -\infty \leq t \leq \infty$

Discrétisé $\Big($ $x[n] = x[nT_e] = A\cos(2\pi f_0 n T_e) \qquad 0 \leq n \leq N-1$

TFSD : $\hat{x}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j2\pi n \frac{f}{F_e}}$

$$\hat{x}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} A\cos(2\pi f_0 n T_e)\, e^{-j2\pi n \frac{f}{F_e}}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{A}{2}\left[e^{+j2\pi f_0 n T_e} + e^{-j2\pi f_0 n T_e}\right] e^{-j2\pi n \frac{f}{F_e}}$$

$$= \frac{A}{2}\left[e^{j2\pi f_0 \frac{n}{F_e}} e^{-j2\pi n \frac{f}{F_e}} + e^{-j2\pi f_0 n/F_e} e^{-j2\pi n \frac{f}{F_e}}\right]$$

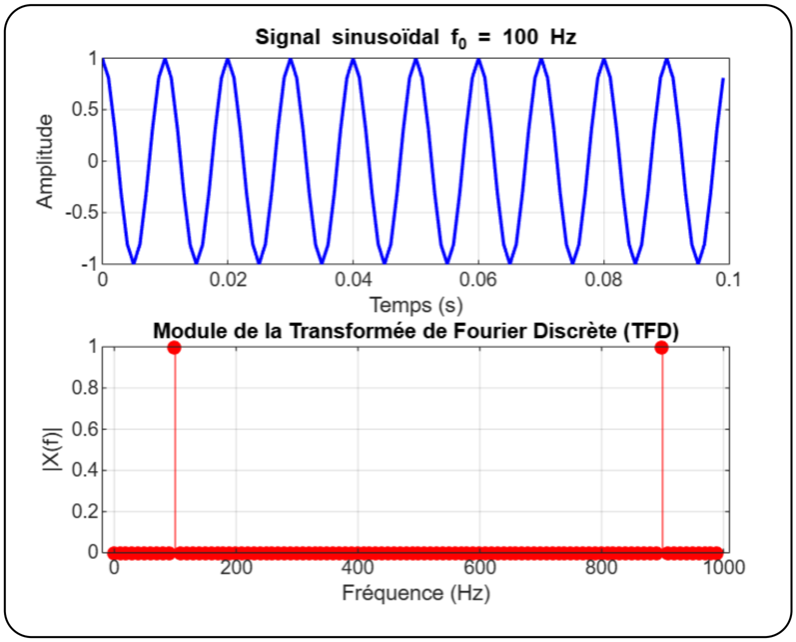
$$= \frac{A}{2}\left[e^{-j2\pi (f_0+f)\frac{n}{F_e}} + e^{-j2\pi (f_0+f)\frac{n}{F_e}}\right]$$

$$= \frac{A}{2}\left[e^{-j2\pi (f-f_0)\frac{n}{F_e}} + e^{-j2\pi (f-f_0)\frac{n}{F_e}}\right]$$

$$\hat{x}(f) = \frac{A}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]$$

②

b. Traçage de la représentation temporelle d'un tel signal pour f0 = 100 Hz. Et sa TFD



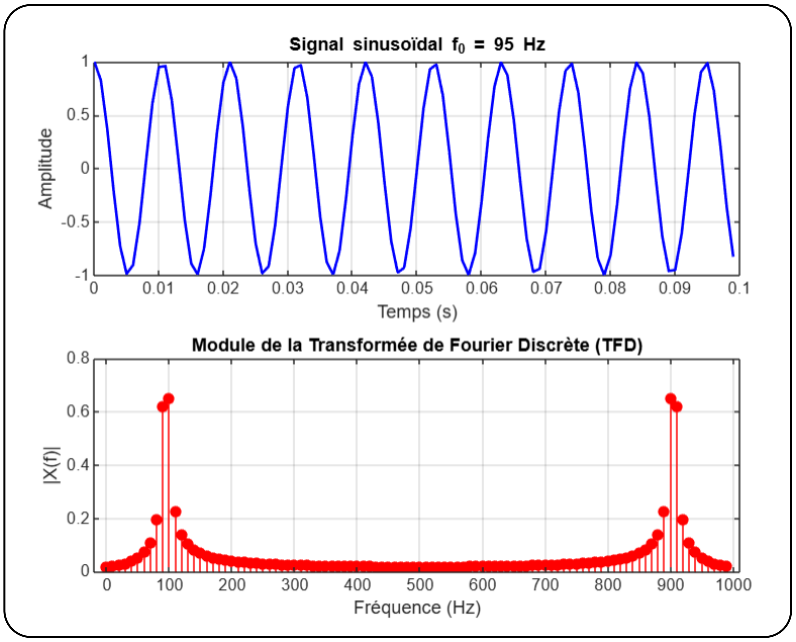
Oui, on peut retrouver la fréquence f0 *si et seulement* si elle correspond exactement à un des indices de la TFD. Si f0 est un multiple de *fe/N*, alors un pic apparaît exactement sur un échantillon fréquentiel. Sinon c-à-d f0 ne tombe pas exactement sur un de ces points, il y aura du bavement spectral (leakage) et la lecture sera moins précise.

En théorie, la TFD d'une sinusoïde donne des pics avec une amplitude de N/2 pour une sinusoïde de 1 d'amplitude. Donc comme on utilise *fft()*, MATLAB donne une amplitude brute (qui est N fois plus grande que l'amplitude réelle). C'est pour cela, il faut normaliser la TFD en divisant par N pour retrouver la vraie amplitude.

Et concernant l'amplitude maximale, non, pas directement. La TFD (FFT dans MATLAB) donne pas directement l'amplitude A de la sinusoïde. Il faut la normaliser.

Oui, on peut retrouver la phase à l'origine en prenant la phase du coefficient de la TFD correspondant à f0.

c. La même chose pour f0 = 95 Hz :



Commentaires :

- *Pour f0 = 100 Hz :* la TFD donne un pic net à 100 Hz et L'amplitude est bien restituée après normalisation.
- *Mais pour f0=95 Hz :* il n'existe pas de valeur exacte dans la TFD car la TFD ne peut discrétiser que des fréquences multiples de 10 Hz : 0,10, 20, ..., 90,100, ... Donc le pic n'est pas exactement à 95 Hz à cause de la résolution de 10 Hz. Cela signifie que La fréquence sera arrondie au plus proche, c'est-à-dire 90 Hz ou 100 Hz. Ce phénomène est appelé fuite spectrale. Et plus de ça l'amplitude est moins précise.

d. L'erreur relative en amplitude obtenue par l'analyse spectrale de la sinusoïde par TFD :

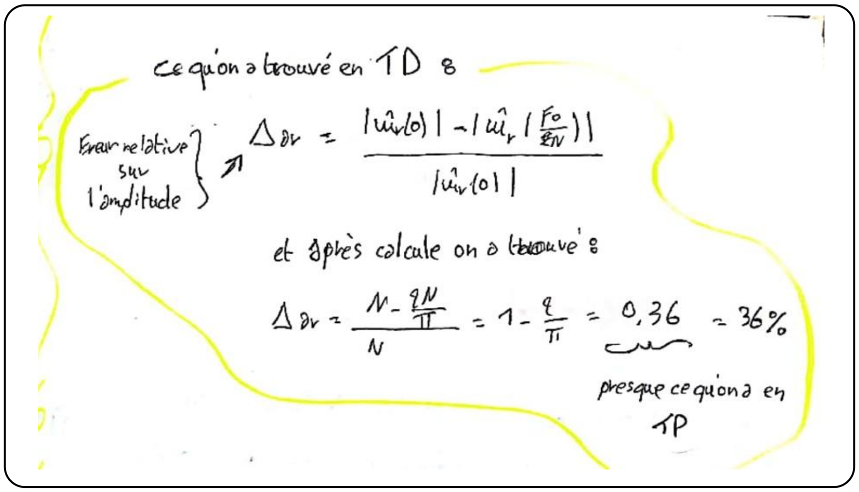
L'erreur relative est donnée par la formule :

$$\text{Erreur relative} = \frac{|\text{Amplitude réelle} - \text{Amplitude estimée}|}{\text{Amplitude réelle}}$$

Et j'ai obtenu exactement ce qu'on a trouvé en TD

```
Phase initiale estimée: -1.5401 radians
Amplitude réelle : 1
Amplitude estimée : 0.6511
Erreur relative : 34.8897 %
```

Et ce qu'on a calculé en TD :



Ce qu'on a trouvé en TD :

Erreur relative sur l'amplitude $\Delta a_r = \frac{|\hat{u}_r(0)| - |\hat{u}_r(\frac{F_e}{2N})|}{|\hat{u}_r(0)|}$

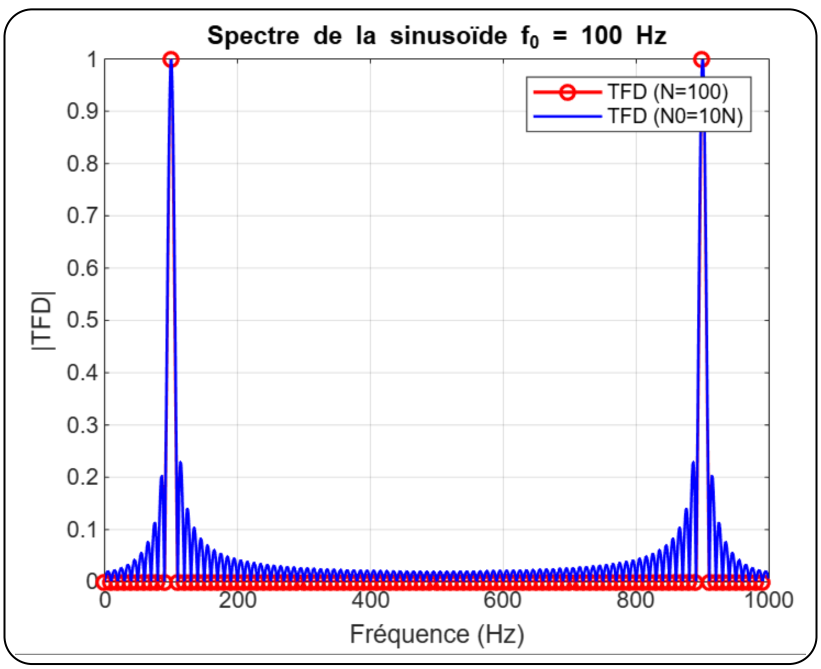
et après calcule on a trouvé :

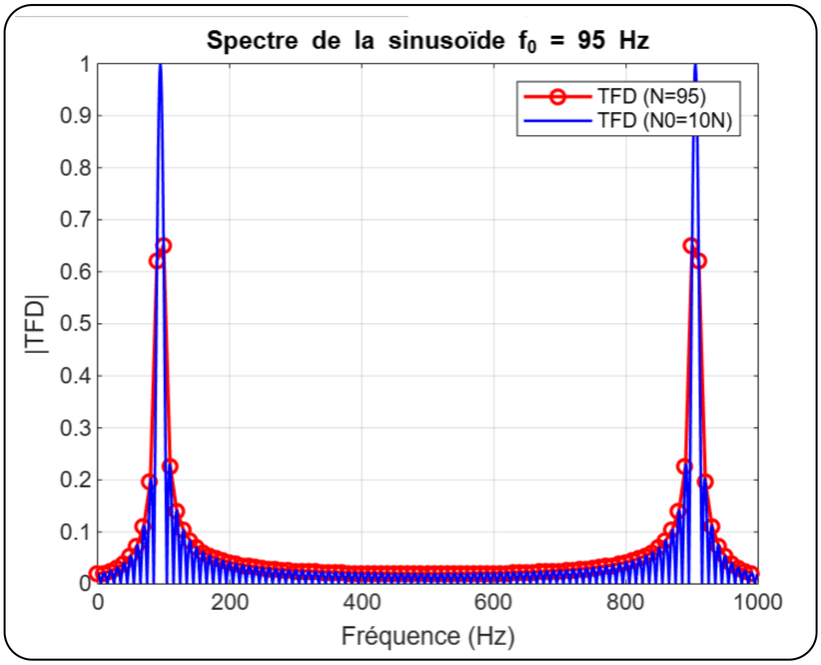
$$\Delta a_r = \frac{N - \frac{2N}{\pi}}{N} = 1 - \frac{2}{\pi} = 0,36 = 36\%$$

presque ce qu'on a en TP

On va maintenant effectuer du bourrage de zéros (zero padding), c'est-à-dire prolonger le signal étudié par des zéros avant d'en calculer sa TFD

Construction un signal qui est 10 fois plus long que le précédent en employant une telle technique et calcule sa TFD.





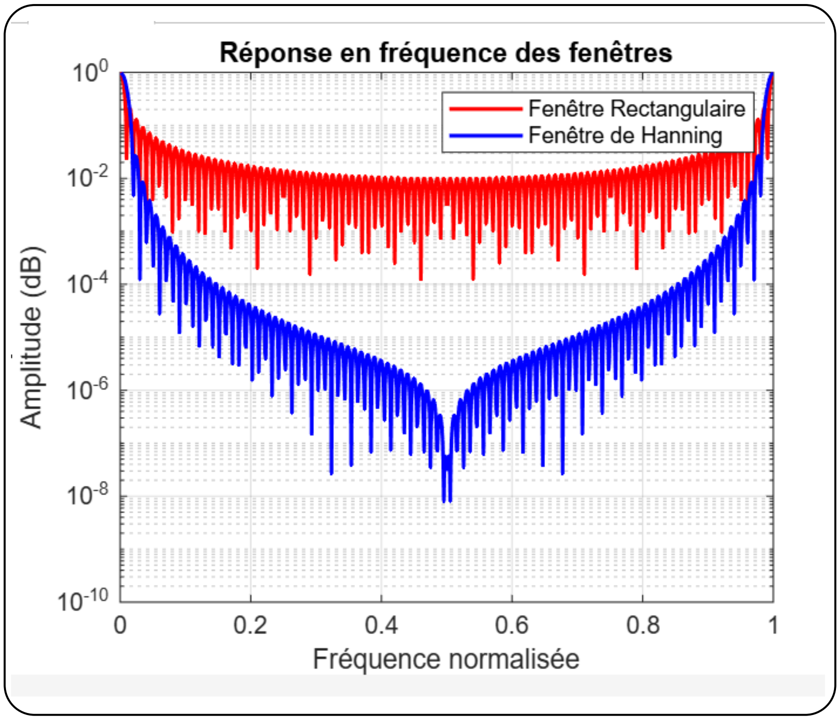
Donc avec le zéro padding on obtient plus de points dans le spectre, donc une meilleure résolution fréquentielle, sans modifier le contenu spectral. Donc on conclure :

Pour f0=100 Hz : La TFD du signal original montre un pic à f0, mais la résolution est limitée. Avec le zero-padding, on observe le même pic **avec plus de points**.

Pour f0=95 Hz : La sinusoïde ne tombe plus exactement sur un des échantillons fréquentiels de la TFD. Sans zero-padding, le spectre est plus large. Avec zero-padding, on voit mieux la structure du spectre mais le leakage persiste.

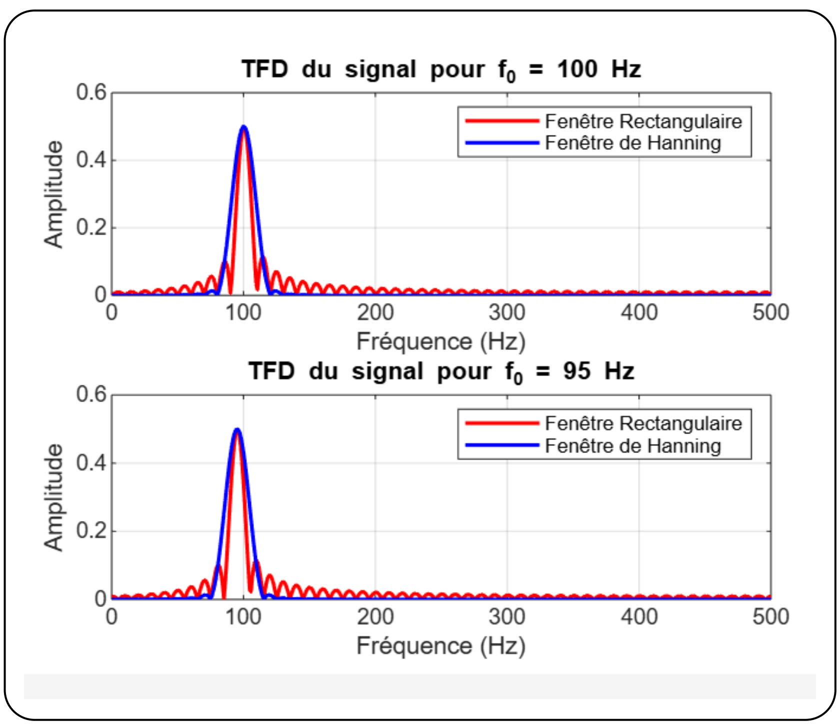
II. <u>Fenêtrage</u>

1) *Traçage de la réponse en fréquence des fenêtres rectangulaire et Hanning et les comparer*



On observe pour la fenêtre rectangulaire : il y a un pic principal très fin mais avec beaucoup de lobes secondaires c-à-d une fuite spectrale. Et pour la fenêtre de Hanning : le pic un peu plus large mais avec des lobes secondaires bien atténués.

2) Fenêtrage du signal sinusoïdal et tracer le module de sa TFD

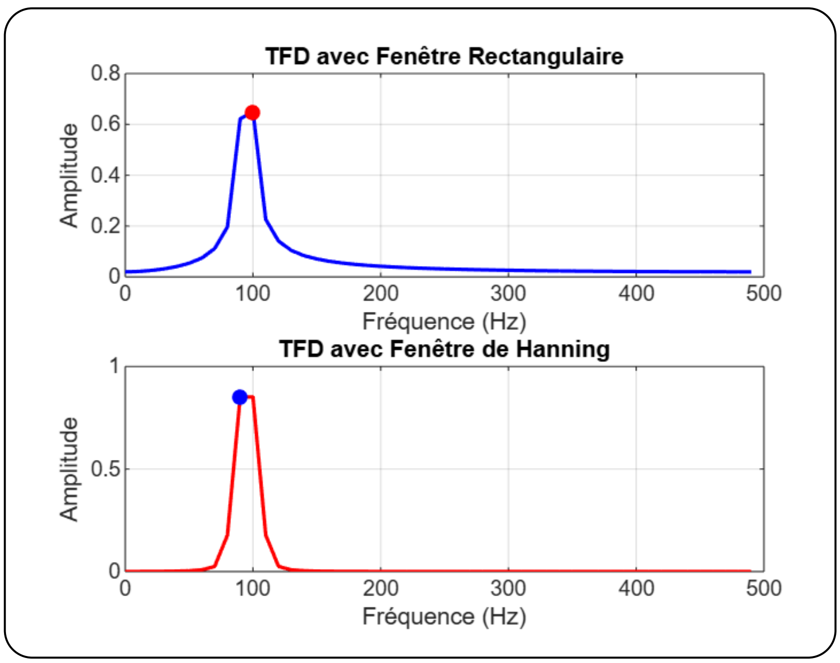


Pour l'effet de la fenêtre rectangulaire : La TFD présente des pics nets, mais elle souffre de fortes oscillations secondaires (fuite spectrale).

Pour f_0 = 100 Hz, la fréquence est bien représentée car elle correspond exactement à une des fréquences discrètes de la TFD. Et pour f_0 = 95 Hz, la fréquence n'est pas bien capturée c-à-d il y a une distorsion plus forte et imprécision sur l'amplitude.

Pour l'effet de la fenêtre de Hanning : La fuite spectrale est beaucoup plus faible, car la transition en amplitude est progressive. Cependant, la largeur du lobe principal augmente, ce qui réduit la précision fréquentielle. L'amplitude du pic diminue légèrement, car l'énergie est redistribuée sur une bande plus large.

3) La précision relative en amplitude obtenue par Matlab pour l'analyse spectrale de la sinusoïde par TFD suivant la fenêtre prise en compte :




```
Fenêtre Rectangulaire : Amplitude max = 0.6511, Erreur relative = 34.89%
Fenêtre de Hanning    : Amplitude max = 0.8517, Erreur relative = 14.83%
```

Pour la fenêtre rectangulaire il y a une bonne précision en amplitude si f0 est bien échantillonné. Et pour la fenêtre de Hanning il y a moins de fuite spectrale, mais perte de précision en amplitude.

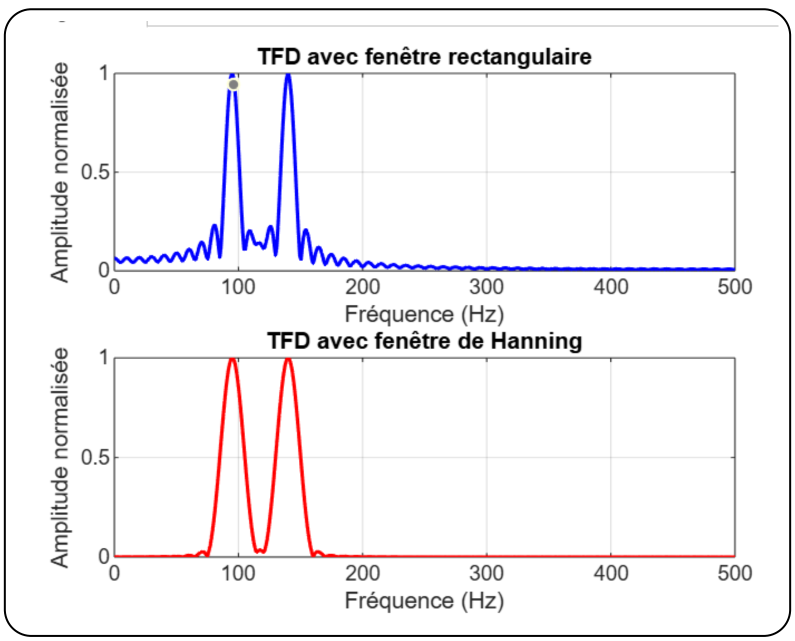
4) Résolution spectrale

a. La fréquence f2 peut être abaissée tout en distinguant clairement les deux fréquences jusqu'à :

La résolution théorique est donnée par $\Delta f = Fe / N = 1000 / 100 = 10Hz$. Donc si f1=95 Hz, la seconde fréquence doit être au moins à 95+10=105Hz pour être bien séparée. Avec fenêtre rectangulaire, f2 peut être abaissée jusqu'à environ 100 Hz. Et avec fenêtre de Hanning, la largeur du lobe principal est plus grande, donc il faut f2 ≥ 110 Hz pour distinguer les pics. Les amplitudes mesurées seront réduites à cause de la dispersion énergétique due au fenêtrage.

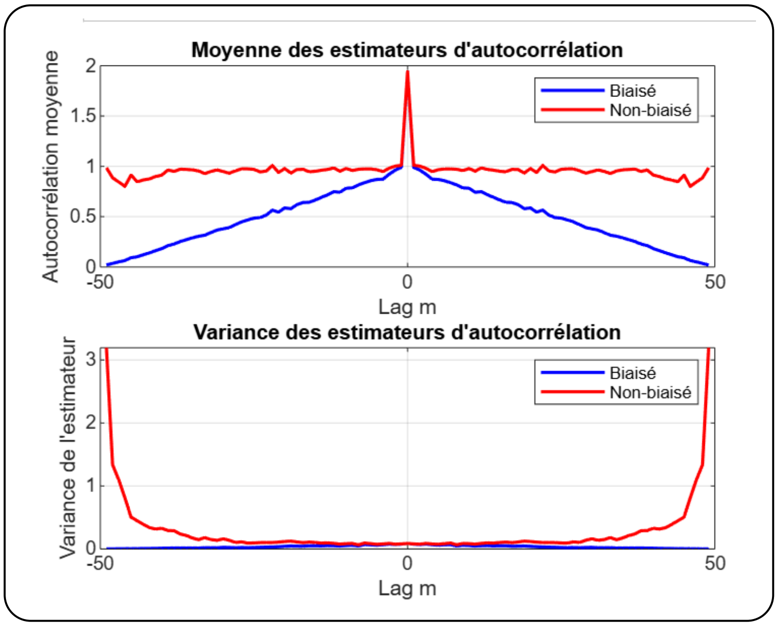
b. L'amplitude de f2 peut être abaissée tout en distinguant clairement les deux fréquences jusqu'à :

À f2 = 140 Hz, les sinusoïdes sont séparées en fréquence, donc il faut voir si A2 est assez grand pour être visible. Avec fenêtre rectangulaire, on peut descendre jusqu'à A2 ≈ 0.1 avant qu'elle ne soit masquée par les lobes secondaires. Et avec la fenêtre de Hanning, l'atténuation des lobes secondaires permet de détecter A2 plus bas. Les amplitudes observées ne sont pas exactes à cause de la distorsion due au fenêtrage.



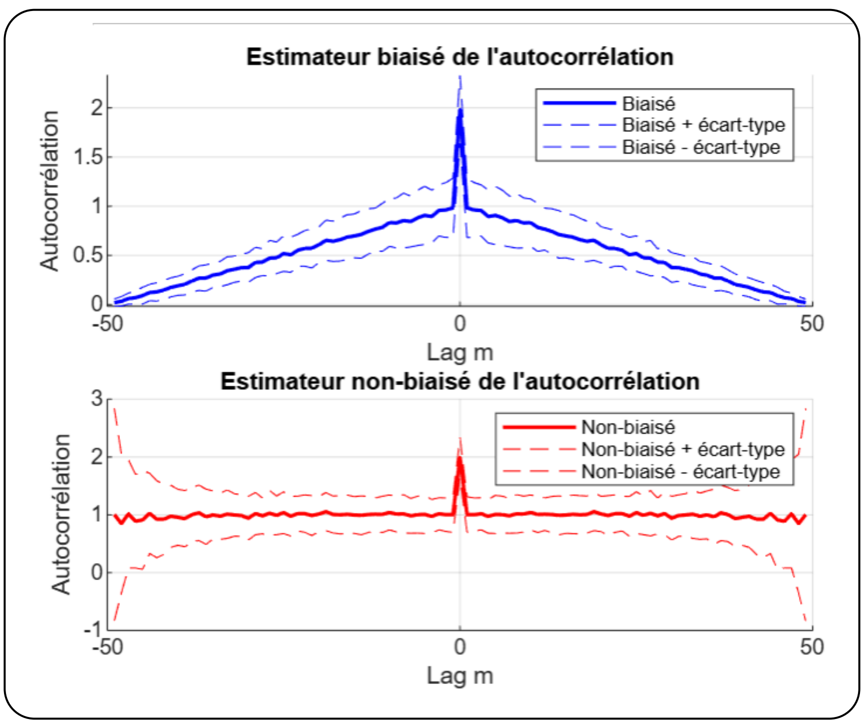
IV. Analyse spectrale des signaux aléatoires :

1) En utilisant la fonction Matlab *xcorr*, on calcule les estimateurs biaisés et non-biaisé :



Observation : L'estimateur biaisé est plus stable, L'estimateur non biaisé est plus fidèle en moyenne, mais sa variance est plus grande par contre à celle de l'estimateur biaisé.

2) Traçage sur un même graphique la valeur moyenne ainsi que la valeur moyenne plus ou moins l'écart-type de ces estimateurs.



Pour L'estimateur biaisé : il est plus stable (variance plus faible), mais il a une légère sous-estimation systématique (biais). Et L'estimateur non biaisé : il donne en moyenne une meilleure approximation de l'autocorrélation théorique, mais il présente une variance plus importante, surtout pour des valeurs de lag élevées.

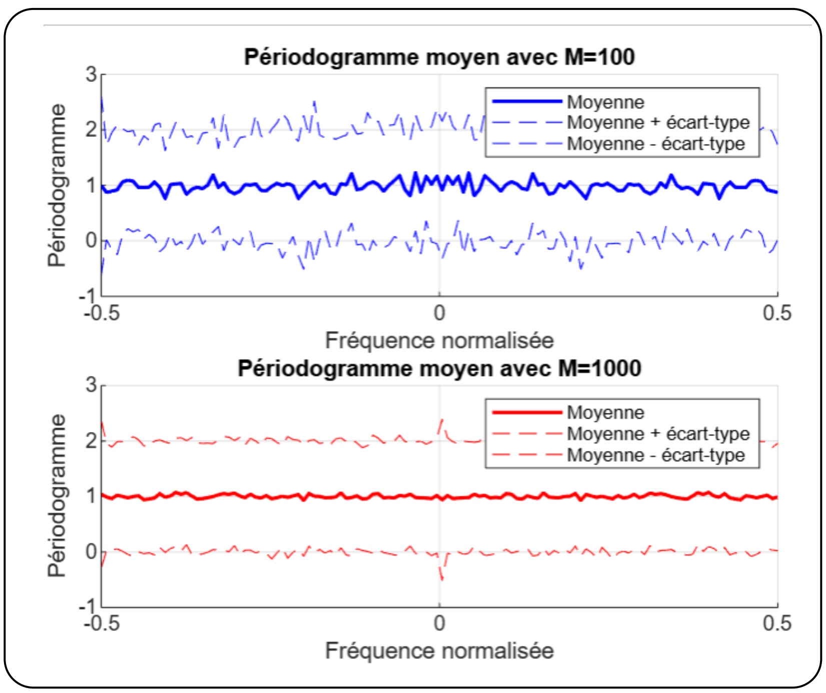
L'affichage des écarts-types montre l'incertitude associée à chaque estimateur :

- L'intervalle moyenne +et- écart-type est plus étroit pour l'estimateur biaisé.
- Pour l'estimateur non biaisé, l'incertitude est plus grande pour les lag m élevés.

Je conclure de ce que j'ai obtenu que si on privilégie une faible variance, on utilise l'estimateur biaisé. Si on cherche une estimation fidèle en moyenne, on utilise l'estimateur non biaisé, mais avec plus d'incertitude.

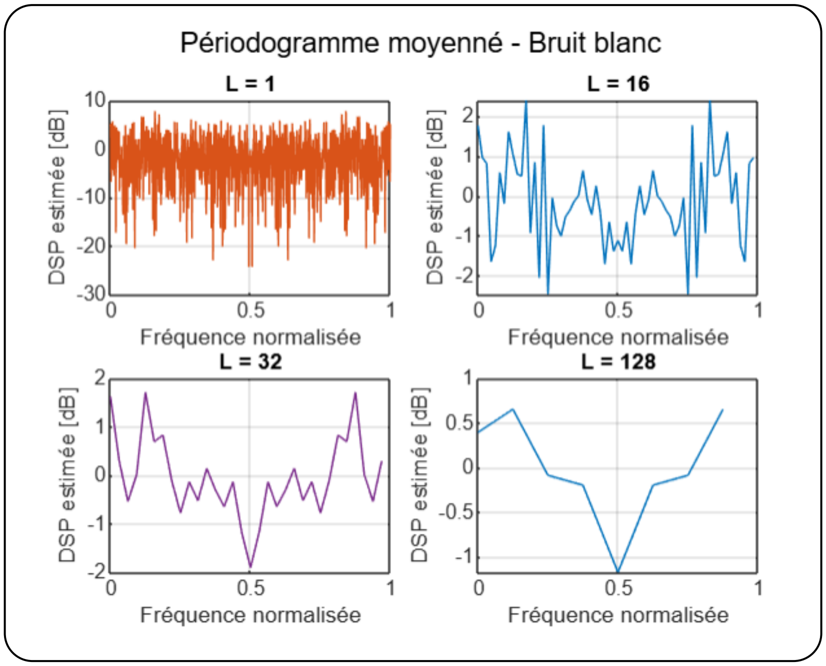
Analyse spectrale non-paramétrique

1) Périodogramme :



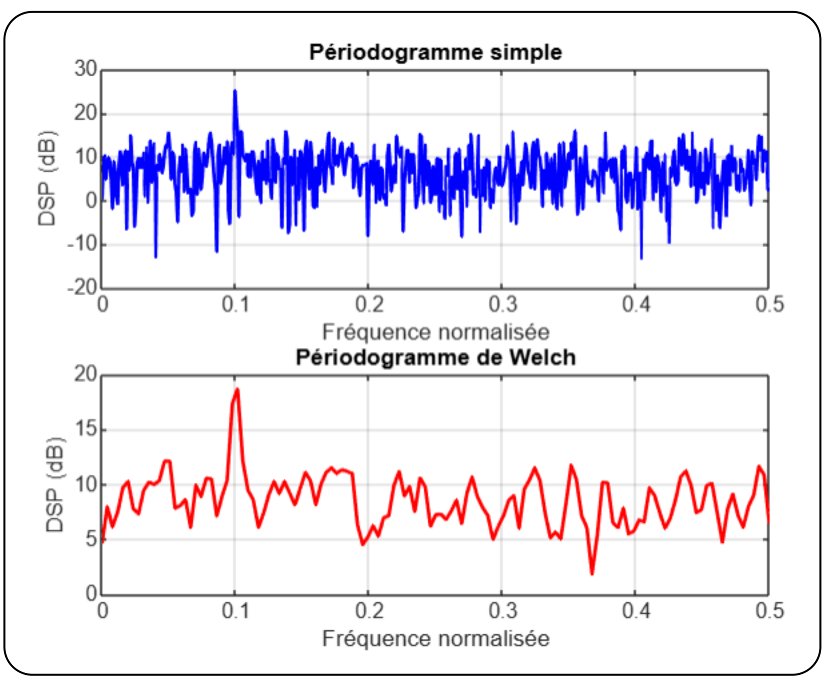
Je conclure que le périodogramme est un estimateur biaisé pour le cas de « Bruit blanc ». Et concernant l'effet du nombre de réalisations : Avec M=100, la variance du périodogramme est élevée. Par contre avec M=1000, l'écart-type diminue, montrant que l'estimation devient plus stable.

2) Périodogramme moyenné :



Je conclure que pour le bruit blanc : une valeur élevée de L est préférable pour obtenir une estimation stable et proche de la DSP théorique. Et par contre pour la sinusoïde : une valeur intermédiaire de *L* est préférable pour ne pas trop lisser et garder une bonne résolution spectrale.

3) Périodogramme de Welch



Pour le périodogramme simple montre des variations brusques dans la DSP (haute variance). Par contre le périodogramme de *Welch* est plus lissé et stable (est toujours bien visible) , mais les pics peuvent être légèrement élargis à cause du fenêtrage.