TD 1 : Introduction à l'estimation

Exercice 1 : Calcul matriciel

1. Calculer les produits suivants : *a)* $[3,1]\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$, *b)* $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}[2,4]$, et **c)** $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$.
2. Calculer les produits suivants : *a)* $[3,1]\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, *b)* $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}[3,1]$, *c)* $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$.
3. Calculer les produits suivants : *a)* $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, *b)* $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$, *c)* $\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0\\0&4\end{bmatrix}$,
4. Soit la matrice $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$, calculer $\mathbf{A}^{-1}$ ainsi que les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathbf{A}$.
5. Soient les vecteurs colonnes $\underline{\boldsymbol{x}}=[x_1,x_2,\dots x_N]^T$ et $\underline{\boldsymbol{y}}=[y_1,y_2,\dots y_N]^T$, calculer les produits suivants : *a)* $\underline{\boldsymbol{x}}^T\underline{\boldsymbol{y}}$, *b)* $\underline{\boldsymbol{x}}^T\underline{\boldsymbol{y}}^T$, *c)* $\underline{\boldsymbol{x}}^H\underline{\boldsymbol{y}}$, *d)* $\underline{\boldsymbol{x}}\ \underline{\boldsymbol{y}}^T$.

Exercice 2 : Sur la loi de Poisson

Soit une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre λ : $P_X[k]=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{\lambda}$.

1. Vérifier que la loi de Poisson est bien normalisée.
2. Calculer la valeur moyenne $m_X=E\{X\}$.
3. Calculer $E\{X(X-1)\}$ et en déduire la variance σ_X^2 de X.
4. Soit un vecteur aléatoire $\underline{\boldsymbol{X}}=[X_1,X_2,\dots X_N]^T$ constitué de N variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Donner l'expression de la loi de $\underline{\boldsymbol{X}}$, calculer sa moyenne $E\{\underline{\boldsymbol{X}}\}$. et sa matrice de covariance $\boldsymbol{\Gamma}_X$.

Exercice 3 : Transformation affine d'un vecteur Gaussien

Soit $\underline{\boldsymbol{x}}\propto\mathcal{N}\{\underline{\boldsymbol{m}}_x,\Gamma_x\}$ un vecteur aléatoire Gaussien de moyenne $\underline{\boldsymbol{m}}_x$ et de matrice de covariance Γ_x. Soit $\underline{\boldsymbol{y}}$ le vecteur aléatoire issu d'une transformation affine de $\underline{\boldsymbol{x}}$: $\underline{\boldsymbol{y}}=\mathbf{A}\underline{\boldsymbol{x}}+\underline{\boldsymbol{b}}$ avec $\mathbf{A}$ (Matrice carrée supposée inversible) et $\underline{\boldsymbol{b}}$ (vecteur) connus.

1. En se rappelant que toute transformation affine d'un vecteur Gaussien conserve la propriété de gaussianité, déduire la loi de probabilité du vecteur $\underline{\boldsymbol{y}}$ du calcul de sa moyenne et de sa matrice de covariance.
2. Retrouver ce résultat en utilisant la formule de changement de variable dans les lois de probabilité des vecteurs aléatoires.

Exercice 4 : Estimateur de la moyenne

Soient $\{Y_n\}_{n=1\dots N}$ des variables aléatoires indépendantes de même moyenne θ et de variance $\{\sigma_n^2\}_{n=1\dots N}$ dont on dispose une réalisation $\{y_n\}_{n=1\dots N}$. En suivant l'exemple vu en cours (pour des variables indépendantes mais chacune de variance σ_n^2), $\overset{o}{\theta}_1=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}y_n$ est un estimateur non biaisé de la moyenne θ et de variance $V_{\overset{o}{\theta}_1}=\dfrac{1}{N^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\sigma_n^2$.

Il paraît naturel de « pondérer » les données suivant leur variance (plus la variance est faible, plus on peut accorder de confiance à la valeur correspondante). Soit l'estimateur $\overset{o}{\theta}_2=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\dfrac{y_n}{\sigma_n^2}$.

1. Calculer le biais de cet estimateur $\overset{o}{\theta}_2$ et proposer un estimateur $\overset{o}{\theta}_3$ non biaisé.
2. Calculer la variance de cet estimateur non biaisé $\overset{o}{\theta}_3$ et la comparer à celle de l'estimateur $\overset{o}{\theta}_1$. Quel estimateur vous parait être le meilleur ?
3. Dans le cas ou les variables aléatoires $\{y_n\}_{n=1\dots N}$ sont gaussiennes, écrire la loi des observations $f(\boldsymbol{y}|\theta)$. Donner l'expression de l'estimateur $\overset{o}{\theta}_{\mathrm{MV}}$ maximisant cette loi par rapport à θ (estimateur du maximum de vraisemblance).
4. Toujours dans le cas ou les variables aléatoires sont gaussiennes, calculer la borne de Cramer-Rao pour les estimateurs de la moyenne non biaisés. L'estimateur du maximum de vraisemblance est-il à variance minimale ? Est-ce toujours le cas ?

Exercice 5 : Estimateur à variance nulle

Soit Y une variable aléatoire de moyenne m_Y dont on dispose de N réalisations indépendantes $y_1,y_2,\dots y_N$. On souhaite estimer la moyenne m_Y à partir de ces réalisations. On nous propose pour cela deux estimateurs : $\overset{o}{m}_1=c$, avec c valeur constante, et $\overset{o}{m}_2=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}y_n$

1. Pour chacun des estimateurs, calculer le biais, la variance et l'erreur quadratique moyenne (EQM).
2. Dans le cas ou cette moyenne m_Y est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[a,b]$, calculez l'EQM moyenne (par rapport à m_Y) des deux estimateurs.
3. Quelle valeur faut-il donner à c pour que l'EQM moyenne de l'estimateur $\overset{o}{m}_1$ soit minimale ? Dans ce cas, dans quelles situations cet estimateur sera-t-il « meilleur » que l'estimateur $\overset{o}{m}_2$?