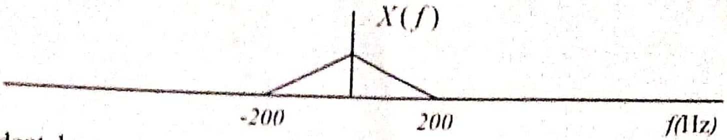
UPS, M1 SIA-AMS — Mai 2017 — Examen « Analyse spectrale des signaux et systèmes»

**Durée : 1h30**

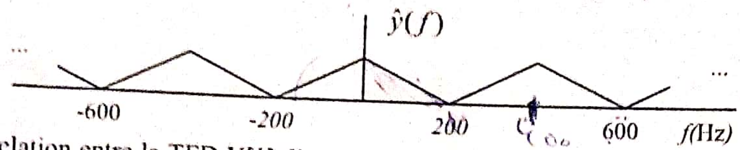
**Documents de cours, TD, TP autorisés**
**Livres, portables, et calculatrices interdits**

**Exercice I : Analyse spectrale d'un signal déterministe par TFD** (temps conseillé : 30 min)

On considère le signal analogique $x(t)$ dont le spectre est montré ci-dessous.



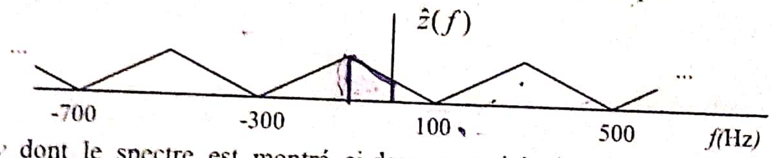

**1.** Le signal $y$ dont le spectre est montré ci-dessous a été obtenu à partir du signal $x$. Décrire brièvement, en temps et en fréquence, l'opération qui a été effectuée pour passer du signal $x$ au signal $y$, en précisant ses paramètres. Y a-t-il eu perte d'information dans cette étape ?



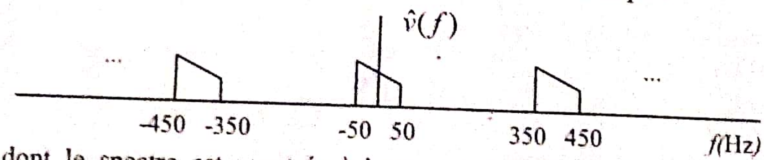

**2.** Rappeler la relation entre la TFD $Y[k]$ d'un signal $y[n]$ de durée finie $N$ et sa TFSD $\hat{y}(f)$. Y a-t-il perte d'information lorsque l'on calcule la TFD au lieu de la TFSD ? Justifiez votre réponse.

**3.** Quelle est la précision en fréquence (c'est-à-dire la largeur de l'intervalle de fréquence entre deux échantillons de la TFD), en Hz, obtenue par cette TFD pour $N$=100 ? Comment faut-il agir sur $F_e$ (la fréquence d'échantillonnage) et $N$ pour améliorer cette précision ? Quelles sont les limitations pratiques ?

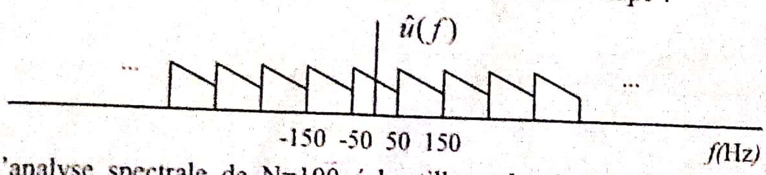
**4.** Le signal $z$ dont le spectre est montré ci-dessous a été obtenu à partir du signal $y$. Décrire brièvement en temps et en fréquence l'opération qui a été effectuée pour passer du signal $y$ au signal $z$, en précisant ses paramètres. Y a-t-il eu perte d'information dans cette étape ?




**5.** Le signal $v$ dont le spectre est montré ci-dessous a été obtenu à partir du signal $z$. Décrire brièvement en temps et en fréquence l'opération qui a été effectuée pour passer du signal $z$ au signal $v$, en précisant ses paramètres. Y a-t-il eu perte d'information dans cette étape ?



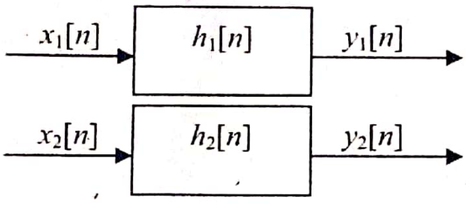

**6.** Le signal $u$ dont le spectre est montré ci-dessous a été obtenu à partir du signal $v$. Décrire brièvement en temps et en fréquence l'opération qui a été effectuée pour passer du signal $v$ au signal $u$, en précisant ses paramètres. Y a-t-il eu perte d'information dans cette étape ?




**7.** On effectue l'analyse spectrale de N=100 échantillons du signal $u[n]$ par TFD. Quelle est la précision en fréquence ainsi obtenue ? Conclure sur l'intérêt d'une telle modification du signal (décrite dans les questions 4-6). Si on gagne en précision, a-t-on perdu sur un autre point ? Justifiez votre réponse.

**Exercice II :** **Identification d'un système par analyse spectrale** (temps conseillé : 30 min)

On considère les deux systèmes déterministes, linéaires et invariants ci-dessous de réponses impulsionnelles respectives $h_1[n]$ et $h_2[n]$. On suppose que les deux entrées conjointement SSL $x_1[n]$ et $x_2[n]$ sont corrélées. Leur intercorrélation et leur densité interspectrale de puissance sont respectivement notées $R_{x2x1}[m]$ et $S_{x2x1}(f)$.




1. En utilisant la définition de l'intercorrélation, calculer l'intercorrélation entre $y_2[n]$ et $x_1[n]$, notée $R_{y2x1}[m]=E\{y_2[n+m]x_1[n]\}$, en fonction de $R_{x2x1}[m]$. En déduire $S_{y2x1}(f)$ en fonction de $S_{x2x1}(f)$. Donner les détails de vos calculs.

2. Calculer $R_{y2y1}[m]$ en fonction de $R_{x2x1}[m]$, puis $S_{y2y1}(f)$ en fonction de $S_{x2x1}(f)$, en détaillant vos calculs.

3. Dans une expérience, on dispose uniquement des estimations de $R_{y2x1}[m]$, $R_{y1x2}[m]$ et $R_{y2y1}[m]$. Proposer une méthode pour estimer les réponses impulsionnelles $h_1[n]$ et $h_2[n]$ par analyse spectrale.

4. Si un bruit additif, centré, et non-corrélé avec les deux entrées est présent sur l'une des deux sorties, est-ce que la méthode proposée dans la question 3 fonctionne toujours ? Justifiez brièvement votre réponse.

**Exercice III** **Modèle MA** (temps conseillé : 30 min)

On considère le modèle MA d'ordre 2 suivant où $x[n]$ est un bruit blanc centrée et de puissance $\sigma^2=1$ :

$$y[n] = x[n]+0.5x[n-1]+0.5x[n-2]$$

**1.** Rappeler l'expression de la fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc $x[n]$ et celle de sa DSP.

**2.** Calculer la valeur numérique des 4 premiers échantillons de la fonction d'autocorrélation de la sortie $y[n]$, à savoir $R_y[0]$, $R_y[1]$, $R_y[2]$, $R_y[3]$.

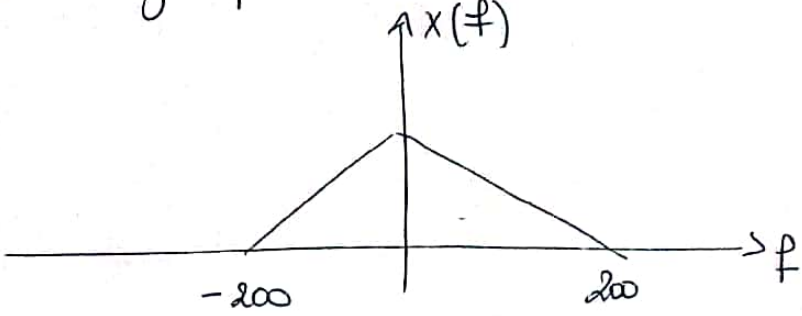
**3.** En déduire l'expression de la fonction d'autocorrélation $R_y[m]$ pour $m$ quelconque.

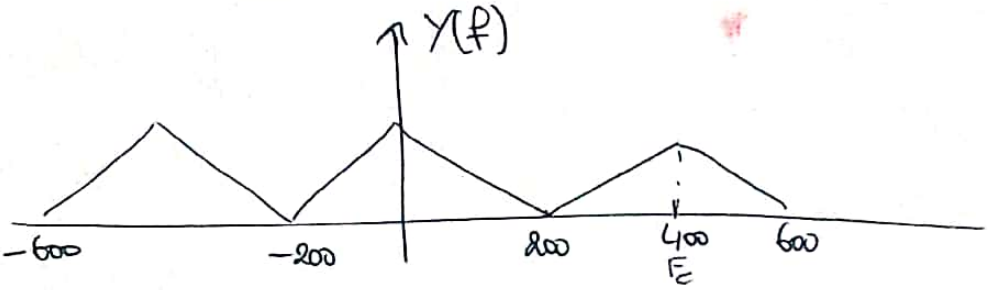
**4.** Calculer l'intercorrélation $R_{xy}[0]$.

**5.** Quelle est la DSP de $y$ ?

Examen du TD

*) **Exercice n°=1 :** Analyse spectrale d'1 signal déterministe par TFD




- L'opération qui a été effectué pour passer du signal x à y :

TFSD → périodisation.

on applique l'échantillonnage ~~x~~(H avec Fe=400Hz. après on applique TFSD.

Th. de Shannon ⇒ Echantillonnage ⇒ périodisation Temporelle.

- On aura pas de pertes en fr $f_e \geq 2 f_{max}$ et $f_{max} = 200$ H

$\hat{X}(f) = \sum x(n) e^{-j2\pi n \frac{f}{fe}}$

$X(k) = \sum x(n) e^{-j2\pi n \frac{k}{N}}$

(2) - a) Relation entre TFD et TFSD :

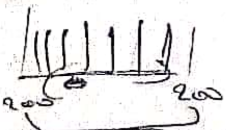
$$\boxed{X[k] = \hat{X}(f)\Big/_{f = k\frac{fe}{N}}}$$

$\frac{k}{N} = \frac{f}{fe}$

$f = k\frac{fe}{N}$

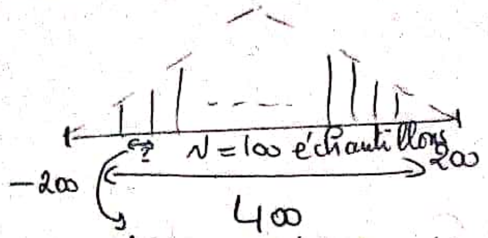
(3) b) Il n y aura pas de pertes d'Infos, car une Représentation d'une TFD à N points est suffisante ~~pour~~ le signal d'origine ~~peut être~~ restituer réstitaer.

③ – Calculer la précision en fréquence




$\frac{400}{100} = 4$

- précision = largeur de l'intervalle de fréquence entre 2 échantillons

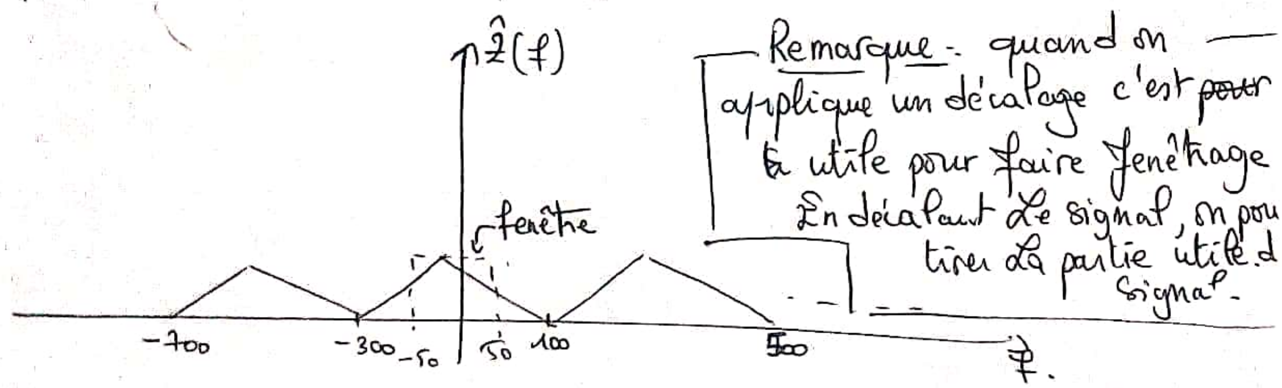



$\Delta f = \frac{400}{100} \Rightarrow$ précision $= 4$.

- Afin d'améliorer la précision on fait augmenter le nbr $N \nearrow$ et par la suite le rapport : $\frac{fe}{N} \downarrow$ donc ce qui va diminuer $\Delta f$. et donc on aura une meilleure précision.

- Pour les limitations pratiques : il faut faire en sorte que notre fe soit petite et en ~~restant~~ respectant Shannon.

④ –



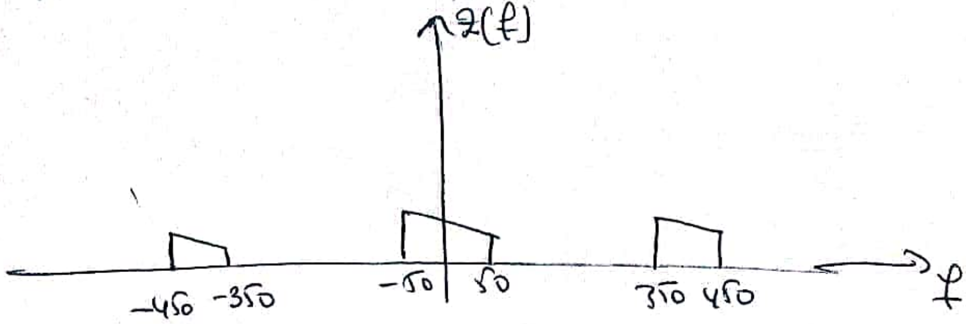

Remarque : quand on applique un décalage c'est ~~pour~~ utile pour faire fenêtrage. En décalant le signal, on pourra tirer la partie utile du signal.

- L'opération qui a été effectué sur $\hat{Y}(f)$ pour obtenir $\hat{Z}(f)$ est une Translation en temps $\rightarrow x(t-t_0) = X(f)\, e^{-j2\pi f t_0}$
- Ainsi que pour l'opération en fréquence, on applique une Translation en fréquence $\Rightarrow x(t)\, e^{j2\pi f_0 t} = X(f-f_0)$ avec $\boxed{f_0 = 100Hz}$

↳ Cette opération ne mène pas à une perte d'information car on retrouve toujours le même spectre.

④ 

5)- L'opération qui été effectuée pour obtenir signal $v$ à partir de $z$




$\Rightarrow$ Application d'une fenêtre réctangulaire en fréquentiel.

Supposition (pas sûr!) :

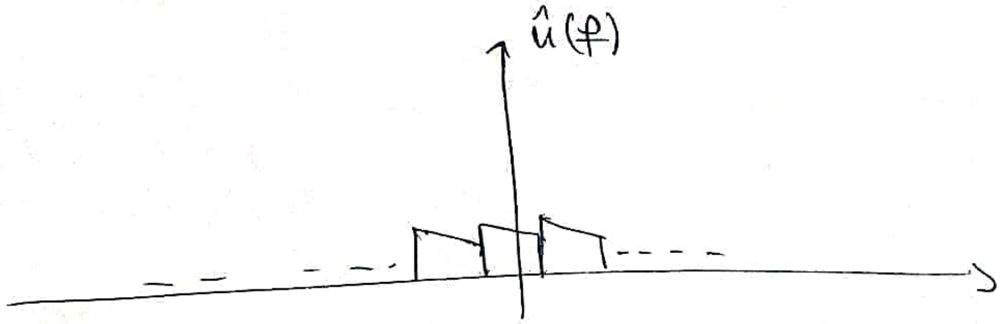
Dans temporel $\rightarrow$ $v(n) = z(n) \cdot w(n)$

$$\hat{V}(f) = \hat{z}(f) * \hat{w}(f)$$

Sachant que $\hat{w}(f) = TFSD\{w(n)\}$ , $w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

on obtient $\hat{w}(f) =$ Sinc periodisé.

⑥-




on diminue la valeur de Fe

En temporel on a appliqué un filtrage de sorte qu'on diminue le nbr d'échantillon

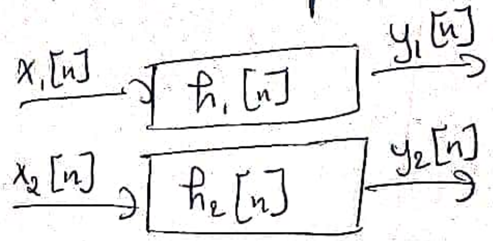
⑦- On effectue $N = 100$ échantillons. on calcul la nouvelle précision

$$\Delta f = \frac{50-(-50)}{100} = \frac{100}{100} = \boxed{1 \text{ Hz}}$$

(Remarque : le but de fenêtrage est qu'on a Fe de sorte à respecter Shannon)

↳ L'intéret est qu'on a amélioré la précision mais on a perdu en informations car on aura un signal plus lissé.

## Exercice n°2 : Identification d'1 système par Analyse Spectrale.




① - Calculer l'Intercorrélation entre $y_2$ et $x_1$ ($R_{y_2x_1}[m] = E\{y_2[n+m]\,x_1[n]\}$)
En fct de $R_{x_2x_1}[m]$

Soit : $y_2[n] = x_2[n] * h_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2[n-k]\, h_2[k]$ .

$$R_{y_2x_1}[m] = E\{y_2[n+m]\, x_1[n]\} = E\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(x_2[n+m-k]\, h[k]\right) x_1[n]\right\}$$

$$= \left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(\underbrace{x_2(n+m-k)\, x_1(n)}_{n+m-k-n}) \cdot h(k)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{x_2x_1}(m-k) \cdot h_2(k)$$

$$\boxed{R_{y_2x_1}[m] = R_{x_2x_1}[m] * h_2[k]}$$

$\Downarrow \Uparrow$ TF

$$\boxed{S_{y_2x_1}(f) = S_{x_2x_1}(f) \cdot H_2(f)}$$

② - Calculer $R_{y_2y_1}[m]$ en fonction de $R_{x_2x_1}[m]$ :

$$R_{y_2y_1}[m] = E\left[y_2[n+m]\, y_1[n]\right] = E\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2(n+m-k)\, h_2(k) \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} x_1(n-k')\, h(k')\right]$$

$$R_{y_2y_1}[m] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_2(k)\, h_1(k')\, E\left[\underbrace{x_2(n+m-k)\, x_1(n-k')}_{n+m-k-n+k'}\right]$$ (à revoir)

$$\boxed{R_{y_2y_1}[m] = h_2(m) * h_1(m) * R_{x_2x_1}[m]}$$

$\Downarrow \Uparrow$ TF

$$\boxed{S_{y_2y_1}(f) = H_2(f) \cdot H_1(f) \cdot S_{x_2x_1}(f)}$$

## Exercice n° 3 Modèle MA

$x[n]$ : bb centré, de puissance $\sigma^2 = 1$

On a : $y[n] = x[n] + 0{,}5\, x[n-1] + 0{,}5\, x[n-2]$ .... (*)

① - L'expression de la fonction d'auto-corrélation d'un bruit blanc $x[n]$ et DSP.

$\boxed{R_x[m] = \sigma_x^2\, \delta(m)}$ avec $\delta(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$

$S_x(f) = TF\left[R_x[m]\right] =$

$\boxed{S_x(f) = \sigma_x^2}$

② - Calculer la valeur numérique des 4 premiers échantillons :

$R_y[0] = E\left[(*)^2\right] \Rightarrow E\left[y^2(n)\right] = E\left[\left[x(n) + 0{,}5\, x(n-1) + 0{,}5\, x(n-2)\right]\left[x(n) + 0{,}5\, x(n-1) + 0{,}5\, x(n-2)\right]\right]$

$E[y^2[n]] = E\Big[x^2[n] + 0{,}5\, x(n)\, x(n-1) + 0{,}5\, x(n)\, x(n-2) + 0{,}5\, x(n-1)\, x(n) + 0{,}25\, x^2(n-1) + 0{,}25\, x(n-2)\, x(n-1) + 0{,}5\, x(n-2)\, x(n) + 0{,}25\, x(n-2)\, x(n-1) + 0{,}25\, x(n-1)\, x(n-2) + 0{,}25\, x^2(n-2)\Big]$

$E[y^2[n]] = E\Big[x^2[n] + x(n)\, x(n-1) + x(n)\, x(n-2) + 0{,}25\, x^2(n-1) + 0{,}5\, x(n-1)\, x(n-2) + 0{,}25\, x^2(n-2)\Big]$

$n-1 \to n+2$

$= E\left[x^2[n]\right] + E\left[x(n)\, x(n-1)\right] + E\left[x(n)\, x(n-2)\right] + 0{,}25\, E\left[x^2(n-1)\right]$

$\to E[x[n]]\, E[x(n-2)]$

$= \cancel{R_x[0] + R_x[1] + R_x[2] + 0{,}25}$

$R_y[0] = \sigma^2 + 0{,}25\,\sigma^2 + 0{,}25\,\sigma^2 = 1{,}5\,\sigma^2$

$R_y[1] = 0{,}75\,\sigma^2$

$R_y[2] = 0{,}5\,\sigma^2$

$R_y[3] = 0$.

$R_x\{\tau\} = R\{x(n+\tau)\, x(n)\}$

$x(n)\, x(n)$