

**Université Paul Sabatier
Toulouse**

Compte Rendu

Modélisation et estimation pour les signaux et systèmes

M1 EEA

- ✕ Module : Modélisation et estimation pour les signaux et systèmes
- ✕ Réalisé par :
 - KABOU Abdeldjalil

TP1 : Moindres carrés

Objectif :

L'objectif de ce TP est d'identifier un canal de transmission, c'est-à-dire d'estimer comment il modifie un signal qui le traverse. Pour cela, on cherche à déterminer les M premiers coefficients de la réponse impulsionnelle du canal, avec $M = 33$.

Le signal reçu est affecté par un bruit gaussien centré (ajouté aléatoirement) dont la variance est connue ($\sigma^2 = 0,3$).

Le TP se déroule en plusieurs étapes :

- a. *Estimation avec une impulsion* : On envoie un signal très simple (une impulsion) pour voir directement comment le canal le transforme.
- b. Estimation par moindres carrés : On utilise un signal plus général pour estimer la réponse du canal en minimisant les erreurs. On analysera aussi le biais et la variance des estimateurs, c'est-à-dire leur précision et leur fiabilité.
- c. Cas des données aberrantes (optionnel) : Si on a le temps, on étudiera ce qui se passe quand certaines mesures sont très éloignées de la normale (erreurs grossières ou anomalies).

Avant tout, on commencera par modéliser le problème mathématiquement pour bien comprendre les différentes étapes de l'estimation.

I. Modélisation du problème

Cette partie concerne les questions de préparation des solutions mathématiques, qui ont déjà été vérifiées par le professeur de TP et déposées sur Moodle.

Préparation TP.

Nom : KABOU Abdeljalil "SIA"

1. a) $y_M[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k] x[n-k]$ Si $x[n] = \delta[n]$; avec $\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{pour } n=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc : $\delta[n-k] = \begin{cases} 1 & \text{pour } n=k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc quand on remplace $x[n] = \delta[n]$ dans l'équation

de notre modèle $y_M[n]$:

$$y_M[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k] \underbrace{\delta[n-k]}_{\rightarrow 1 \text{ si } k=n}$$

$$\begin{cases} y_M[n] = h[n] & \text{pour } 0 \leq n < M \\ y_M[n] = 0 & \text{pour } n \geq M \end{cases}$$

b) Dédution du \hat{Q}_{RE} de $h(n)$:

On a : $y[n] = y_M[n] + \varepsilon[n]$
 $\varepsilon[n]$: Bruit "perturbation"
 $y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k] x[n-k] + \varepsilon[n]$

donc le cas où $x[n] = \delta[n]$

$$y[n] = h[n] + \varepsilon[0]$$

on cherche à estimer $h(n)$:

$$\underline{Q} = [h(0), h(1), \dots, h(M-1)]^T$$

Si on représente ça sous forme matricielle on obtient :

$$\underline{Y} = R \underline{Q} + \underline{\varepsilon} \quad ; \text{ dans notre cas } (x[n] = \delta[n]) \Rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

1

Donc :

$$\Rightarrow \underline{y} = \underline{1} \underline{\theta} + \underline{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \underset{R_i}{\underline{\theta}} = \underline{y} = \begin{bmatrix} y[0] \\ \vdots \\ y[M-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] \\ \vdots \\ h[M-1] \end{bmatrix} + \underline{\varepsilon}$$

$$\underline{\theta}_{RL} = \underline{h} + \underline{\varepsilon}$$

$$\underline{\theta}_{RL} = [h[0], y[1], \dots, y[M-1]]^T$$

2.

$$\underline{\theta}_{RL} = \underline{h} + \underline{\varepsilon} = \underline{y}$$

a. donc le biais :

$$\text{Biais}(\underline{\theta}_{RL}) = E[\underline{\theta}_{RL}] - \underline{h}$$

$$= E[\underline{h} + \underline{\varepsilon}] - \underline{h}$$

$$= \underline{h} + E[\underline{\varepsilon}] - \underline{h}$$

$$= 0$$

avec $E[\underline{\varepsilon}] = 0$
page 68

Donc $\underline{\theta}_{RL}$ est un estimateur non biaisé.

b. matrice de covariance de $\underline{\theta}_{RL}$:

d'après ce qu'on a fait en cours :

$$\text{cov}(\underline{\theta}_{RL}) = E[(\underline{\theta}_{RL} - E[\underline{\theta}_{RL}])(\underline{\theta}_{RL} - E[\underline{\theta}_{RL}])^T]$$

d'après le calcul du biais, on a :

$$E\{\underline{\theta}_{RL}\} = \underline{h} \quad ; \quad \underline{\theta}_{RL} = \underline{h} + \underline{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \text{cov}(\underline{\theta}_{RL}) = E[(\underline{h} + \underline{\varepsilon} - \underline{h})(\underline{h} + \underline{\varepsilon} - \underline{h})^T] = E[\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}^T]$$

↳ d'après le cours (page 27)

$$E\{\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}^T\} = \underline{\Gamma}_{\varepsilon}$$

$$\text{donc } \text{cov}(\underline{\theta}_{RL}) = \underline{\Gamma}_{\varepsilon}$$

27

3.
$$y_m[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k] x[n-k]$$

d'après le cours "page 44", on a :

$$y_m(u, \alpha \theta^{(1)} + \beta \theta^{(2)}, t) = \alpha y_m(u, \theta^{(1)}, t) + \beta y_m(u, \theta^{(2)}, t)$$

↳ linéarité par rapport aux paramètres.

- Vérification dans notre cas :

$$\begin{aligned} y_m[n] &= \sum_{k=0}^{M-1} (\alpha h[k]^{(1)} + \beta h[k]^{(2)}) x[n-k] \\ &= \underbrace{\alpha \sum_{k=0}^{M-1} h[k]^{(1)} x[n-k]}_{y_m[n]^{(1)} \text{ avec } h[k]^{(1)}} + \underbrace{\beta \sum_{k=0}^{M-1} h[k]^{(2)} x[n-k]}_{y_m[n]^{(2)} \text{ avec } h[k]^{(2)}} \end{aligned}$$

$$y_m[n] = \alpha y_m[n]^{(1)} + \beta y_m[n]^{(2)}$$

donc le modèle $y_m[n]$, il est linéaire par rapport aux paramètres $h[k]$

4.

$$\underline{y}_m = R \underline{\theta}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} y_m[0] \\ y_m[1] \\ \vdots \\ y_m[N-1] \end{bmatrix}}_{\underline{y}_m = [N \times 1]} &= \underbrace{\begin{bmatrix} x[0] & x[1] & x[2] & \dots & x[1-M] \\ x[1] & x[0] & x[-1] & \dots & x[2-M] \\ x[2] & x[1] & x[0] & \dots & x[3-M] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N-1] & x[N-2] & x[N-3] & \dots & x[N-M] \end{bmatrix}}_{R = [N \times M]} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[M-1] \end{bmatrix}}_{\underline{\theta} = [M \times 1]} \quad M \end{aligned}$$

3

5. d'après le cours " Démarche pour le calcul de $\hat{\underline{\theta}}_{MV}$, page 52 et 53 } et d'après l'exercice 1 de

TD 4. on suppose que $\underline{e}[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$

Estimateur de v.a. de $\underline{\theta}$

Vraisemblance = loi de $\underline{y} | \underline{\theta}$

$$\underline{e}[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2) \Rightarrow \underline{y}[n] \sim \mathcal{N}(R\underline{\theta}, \sigma_e^2)$$

page 53 :

$$p(\underline{y} | \underline{\theta}) = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_e} e^{-\frac{(y[n] - y_M[n])^2}{2\sigma_e^2}}$$

$$\log(\cdot), \log p(\underline{y} | \underline{\theta}) = -\frac{N}{2} \log(2\pi\sigma_e^2) - \frac{1}{2\sigma_e^2} \sum_{n=0}^{N-1} (y[n] - y_M[n])^2$$

|| page 53 :

$$J(\underline{\theta}) = \sum_{n=0}^{N-1} (y[n] - y_M[n])^2 \Rightarrow J(\underline{\theta}) = \|\underline{y} - R\underline{\theta}\|^2$$

$$\frac{\partial J(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} = -2R^T(\underline{y} - R\underline{\theta})$$

on annule (, $R^T(\underline{y} - R\underline{\theta}) = 0 \Rightarrow R^T \underline{y} = R^T R \underline{\theta}$

Donc l'estimateur du maximum de vraisemblance :

$$\hat{\underline{\theta}}_{MV} = (R^T R)^{-1} R^T \underline{y}$$

hypothèses utilisées pour arriver à l'expression de l'estimateur des moindres carrés $\hat{\underline{\theta}}_{MC}$:

- Modèle linéaire $\Rightarrow \underline{y} = R\underline{\theta} + \underline{\varepsilon}$
- Bruit centré $\Rightarrow E\{\underline{\varepsilon}\} = 0$

6. $\hat{\underline{\theta}}_{MC} = (R^T R)^{-1} R^T \underline{y} \quad ; \quad \underline{y} = R\underline{\theta} + \underline{\varepsilon}$

$$\hat{\underline{\theta}}_{MC} = \underbrace{(R^T R)^{-1} R^T R}_{\underline{I}} \underline{\theta} + R^T E (R^T R)^{-1} = \underline{\theta} + (R^T R)^{-1} R^T \underline{\varepsilon}$$

$$\hat{\underline{\theta}}_{MC} = \underline{\theta} + (R^T R)^{-1} R^T \underline{\varepsilon}$$

4

$$E\{\hat{\underline{\theta}}_{mc}\} = E\{\underline{\theta}\} + E\{(R^T R)^{-1} R^T \underline{\epsilon}\} \quad \text{si le bruit est centré } E\{\underline{\epsilon}\} = 0$$

$$E\{\hat{\underline{\theta}}_{mc}\} = E\{\underline{\theta}\} = \underline{\theta}$$

donc: $\text{Biais}(\hat{\underline{\theta}}_{mc}) = E[\hat{\underline{\theta}}_{mc}] - \underline{\theta} = 0$

$\hat{\underline{\theta}}_{mc}$ est un estimateur non biaisé

Matrice de covariance :

$$\text{Cov}(\hat{\underline{\theta}}_{mc}) = E[(\hat{\underline{\theta}}_{mc} - E[\hat{\underline{\theta}}_{mc}])(\hat{\underline{\theta}}_{mc} - E[\hat{\underline{\theta}}_{mc}])^T]$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 $\underline{\theta} \quad \quad \underline{\theta}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{(R^T R)^{-1} R^T \underline{\epsilon}}$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{\underline{\theta}}_{mc}) &= E[(R^T R)^{-1} R^T \underline{\epsilon} + \underline{\theta} - \underline{\theta})(R^T R)^{-1} R^T \underline{\epsilon} + \underline{\theta} - \underline{\theta})^T] \\ &= E[(R^T R)^{-1} R^T \underline{\epsilon} (R^T R)^{-1} R^T \underline{\epsilon}^T] \end{aligned}$$

$$= (R^T R)^{-1} R^T E\{\underline{\epsilon} \underline{\epsilon}^T\} R (R^T R)^{-1} ;$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $\sigma_\epsilon^2 \underline{I}$
 $\text{Cov}(\hat{\underline{\theta}}_{mc}) = \sigma_\epsilon^2 (R^T R)^{-1}$

- La variance de chaque paramètre $h[n]$ correspond aux diagonales de la matrice de covariance $\text{Cov}(\hat{\underline{\theta}}_{mc})$:

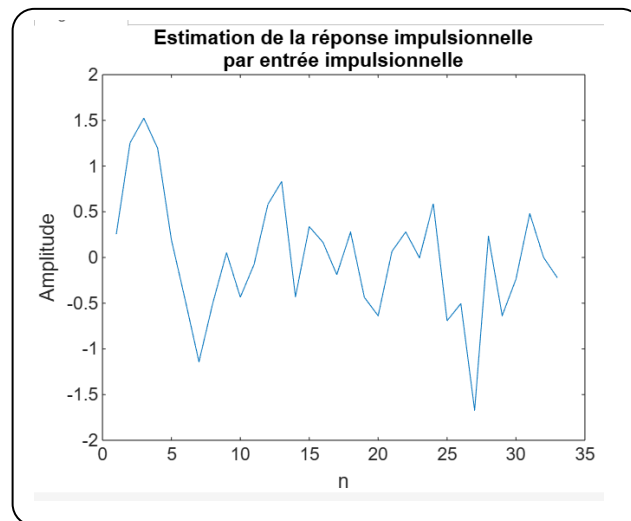
$$\text{Var}(h[n]) = \sigma_\epsilon^2 (R^T R)^{-1}_{nn}$$

$\nwarrow \quad \searrow$
 diagonales

$$\begin{bmatrix} \sigma_\epsilon^2 & & & 0 \\ & \sigma_\epsilon^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_\epsilon^2 \end{bmatrix}$$

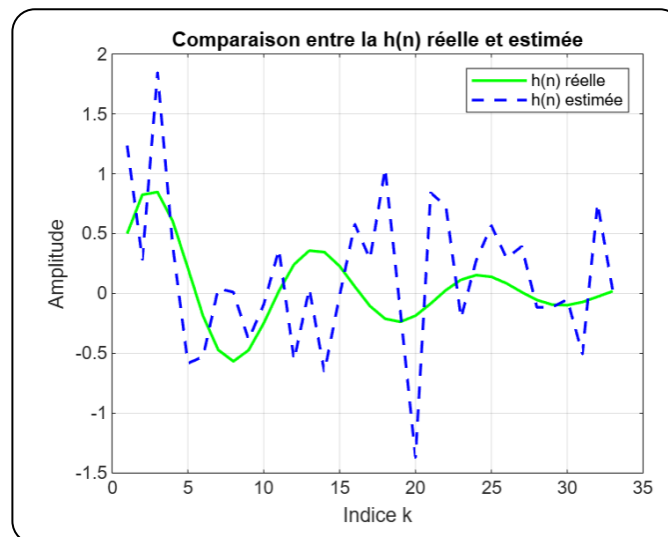
II. Estimation pour une entrée impulsionnelle

1)



Ce graphe met en évidence une instabilité marquée dans les valeurs estimées. En effet, celles-ci présentent des fluctuations importantes, variant entre -1.5 et +1.5, ce qui révèle une sensibilité accrue au bruit.

2)

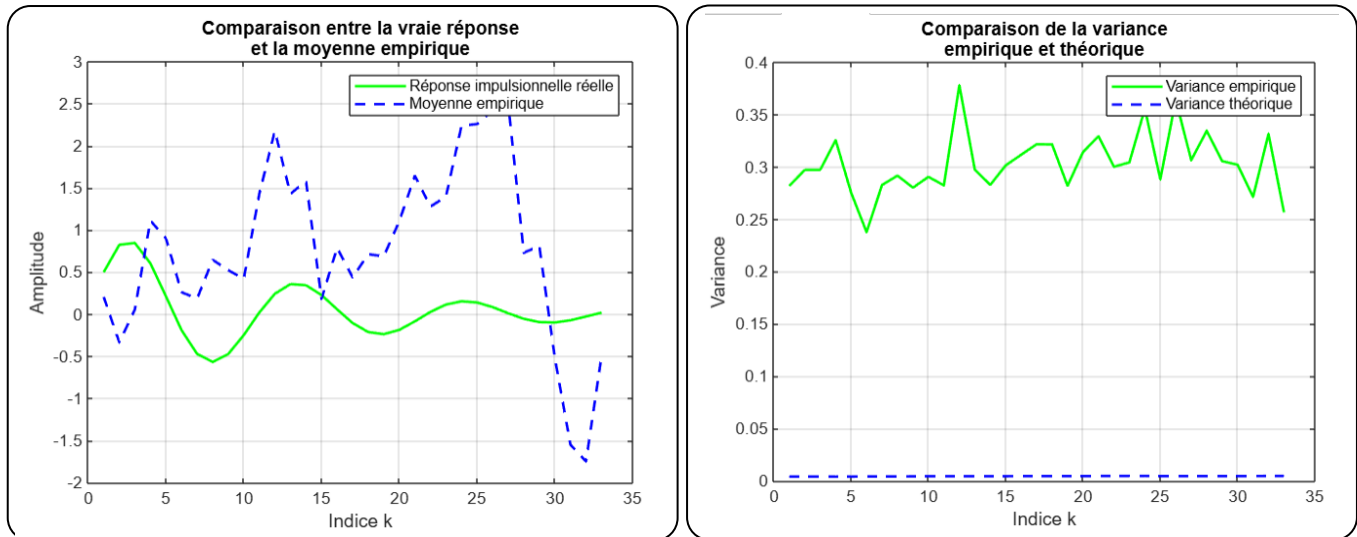


L'estimation n'est pas entièrement satisfaisante, car il y a une présence d'un écart notable entre la réponse impulsionnelle estimée et la vraie réponse.

Norme de l'erreur $||\theta - \theta_{RI}||$:
3.5982

3)

On étudie ici l'estimation du biais et de la variance de l'estimateur. Pour cela, on génère 200 réalisations de données bruitées en injectant une impulsion en entrée du système. Pour chaque réalisation, la réponse impulsionnelle estimée $\hat{\theta}^{RI}$ est calculée et stockée dans une matrice H_{RI} de dimensions $(200 \times M)$.



- ✗ Le biais théorique d'un estimateur est défini par : $B(\hat{\theta}) = \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta$
- ✗ Un estimateur non biaisé signifie que $B(\hat{\theta}) = 0$
- ✗ L'observation des écarts entre la moyenne empirique et la vraie réponse impulsionnelle confirme que l'estimateur n'est pas sans biais.
- ✗ L'estimation de la variance empirique d'un estimateur $\hat{\theta}$ est donnée par :

$$\text{Var}_{\text{emp}}(\hat{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\theta}_i - \bar{\theta})^2$$

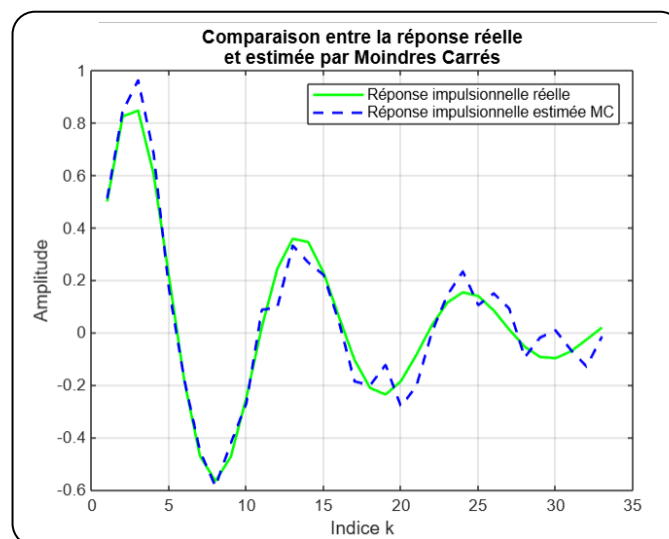
- ✗ La variance théorique (comme on a fait dans le cours) est définie par : $\text{Var}(\hat{\theta}) = \sigma^2(R^T R)^{-1}$
- ✗ J'observe que la variance empirique est plus élevée que la variance théorique, indiquant une forte dispersion des estimations due au bruit ou à des conditions non idéales. En revanche, la variance théorique, faible et constante, reflète un estimateur bien défini sous des hypothèses idéales. Cet écart montre que l'estimateur est plus sensible aux perturbations qu'attendu.

4) *Interprétation en termes de biais et variance :*

L'estimateur utilisé présente une variance élevée et un biais important. Il ne converge pas vers la variance théorique attendue, ce qui le rend peu fiable pour estimer correctement la vraie variance. Ce manque de précision et de stabilité limite son utilisation dans des contextes nécessitant des estimations robustes et précises.

III. Estimation par moindres carrés

1)



L'estimation de la réponse impulsionnelle à l'aide de l'estimateur par moindres carrés se révèle être beaucoup plus précise que celle obtenue précédemment.

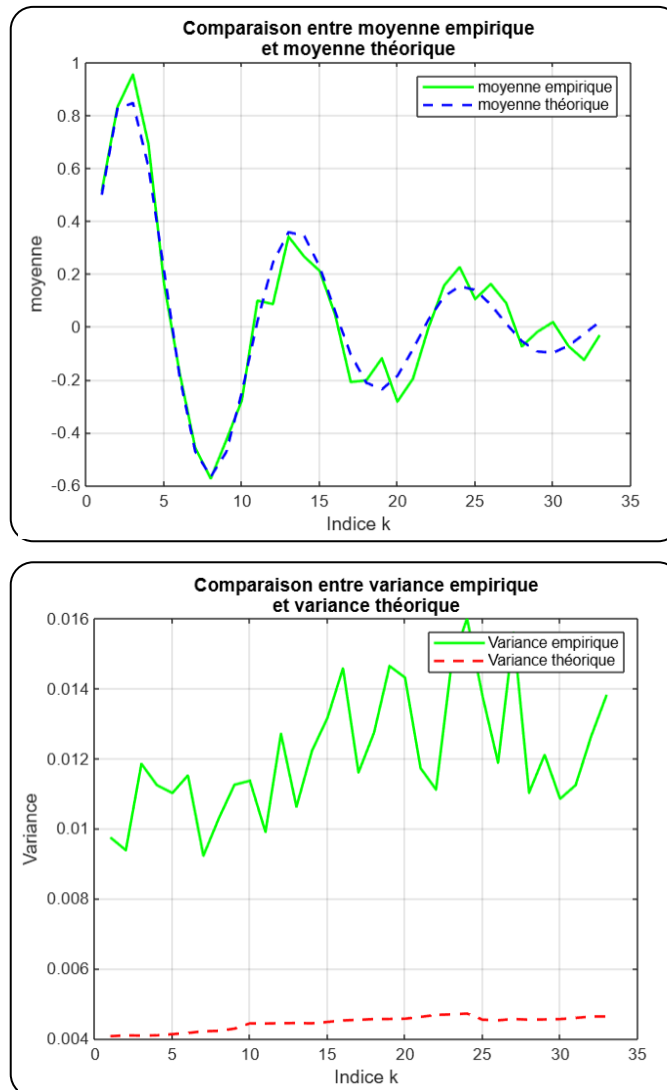
Norme de l'erreur entre $h[k]$ et θ_{MC} :
0.3910

En effet :

- ✗ La réponse impulsionnelle estimée est visuellement très proche de la réponse réelle.
- ✗ La norme de l'erreur, égale à (0.3910), est nettement plus faible que celle de l'estimateur précédent (3.5982), indiquant une meilleure précision.

Ces résultats montrent que l'approche par moindres carrés est plus robuste face au bruit et permet une estimation fiable de la réponse impulsionnelle du système.

2)



L'analyse des résultats montre que l'estimateur par moindres carrés présente de bonnes propriétés statistiques :

- ✗ *La moyenne empirique* obtenue à partir des réalisations estimées suit de très près la *moyenne théorique*, ce qui indique que *l'estimateur est globalement non biaisé*.
- ✗ Bien que *la variance empirique* soit légèrement plus élevée que *la variance théorique*, elle reste cohérente et relativement stable, ce qui témoigne de la fiabilité de l'estimateur.
- ✗ Cela signifie que *l'estimateur par moindres carrés est relativement stable*, conforme aux attentes théoriques et présente une faible variance.

En conclusion, malgré une légère sensibilité au bruit, cet estimateur offre une bonne précision et constitue une approche fiable pour estimer la réponse impulsionnelle du système.

3) *Commentaire les résultats en termes d'estimation du biais et de variance de l'estimateur :*

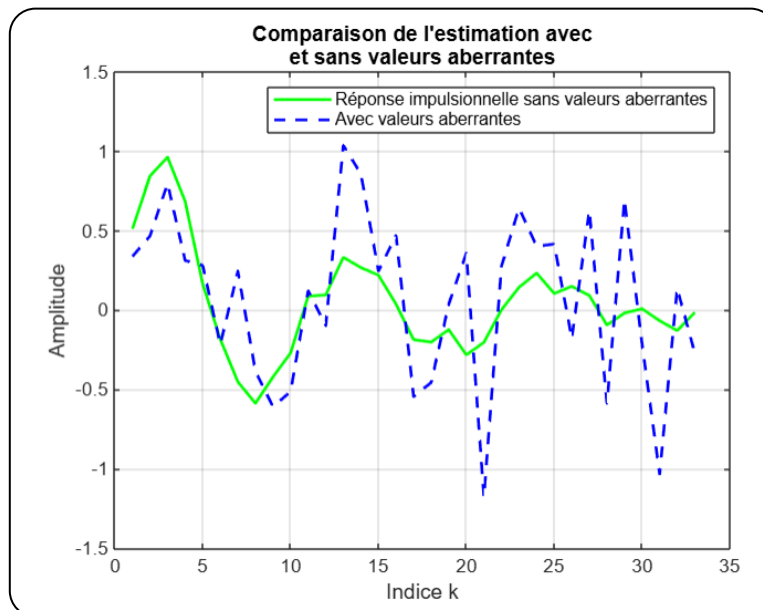
L'analyse des résultats permet d'évaluer les propriétés de l'estimateur par moindres carrés (MC) en termes de biais et de variance. Les courbes de moyenne et de variance confirment que l'estimateur par moindres carrés présente un biais quasi nul et une variance relativement faible. Ces deux propriétés assurent que c'est un bon estimateur, offrant une estimation précise et robuste de la réponse impulsionnelle du système.

4) *Commentaire les résultats en termes de biais et variance de l'estimateur ϑ_{MC} en particulier en comparaison de l'estimateur ϑ_{RI}*

L'estimateur par moindres carrés est plus précis, car il a un biais presque nul et une variance faible. Sa moyenne empirique est très proche de la moyenne théorique, ce qui montre qu'il est fiable. En revanche, l'autre estimateur présente un biais important et une variance élevée, rendant ses estimations moins stables. Ainsi, l'estimateur par moindres carrés est plus adapté pour estimer la réponse impulsionnelle.

IV. Estimation par moindres carrés et données aberrantes

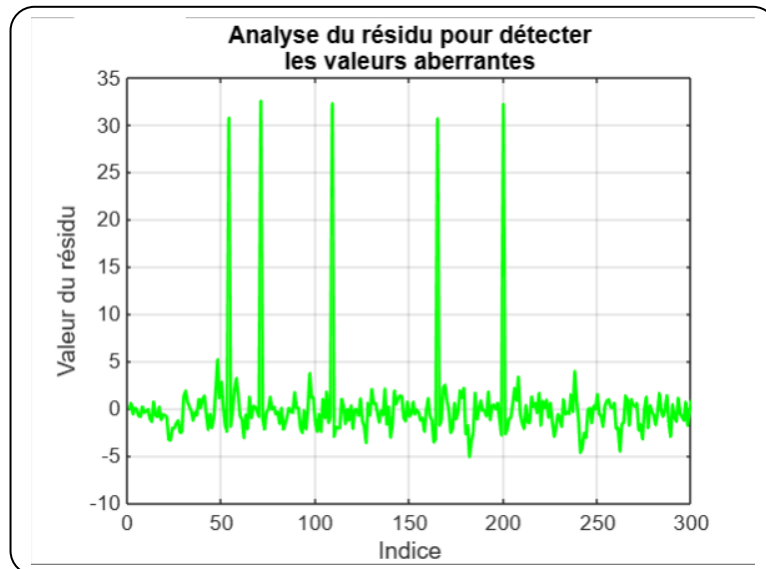
1)



Norme de l'erreur entre θ_{MC} sans et avec valeurs aberrantes :
2.5170

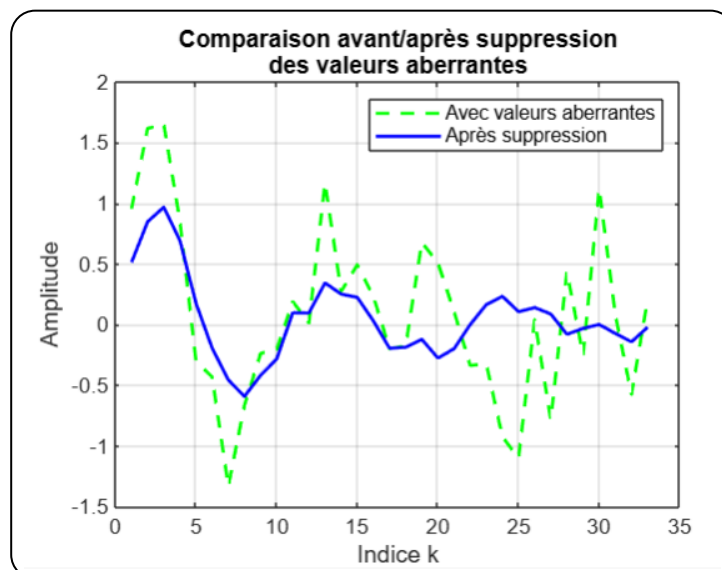
L'estimation par moindres carrés est sensible aux valeurs aberrantes. En comparant les deux courbes, je vois que l'ajout de seulement cinq valeurs aberrantes perturbe fortement l'estimation, surtout aux pics. La norme de l'erreur entre les deux estimations est de 2.5170.

2)



L'utilisation du résidu permet de détecter les valeurs aberrantes dans les données. Le résidu est défini comme la différence entre le signal observé et la sortie estimée par convolution. En analysant le graphe du résidu, je remarque que la plupart des valeurs se situent entre -5 et +5, correspondant au bruit normal, tandis que certains pics atteignent environ 35, indiquant des anomalies. Ces écarts marqués permettent d'identifier automatiquement les valeurs aberrantes, en considérant tout résidu dépassant largement le niveau du bruit comme suspect.

3)



La suppression des valeurs aberrantes permet *d'améliorer significativement l'estimation* de la réponse impulsionnelle. En comparant les graphes, je constate que l'estimation corrigée (courbe bleu) se rapproche beaucoup plus de la réponse réelle attendue, tandis que l'estimation avec aberrations (courbe vert) présente des pics exagérés. Cette amélioration s'explique par la sensibilité de l'algorithme des moindres carrés aux valeurs extrêmes, qui peuvent fausser les résultats même en faible quantité. Ainsi, un nettoyage des données permet d'obtenir une estimation plus fiable et précise

4)

Au lieu de supprimer les valeurs aberrantes après coup, on peut utiliser *une méthode plus robuste dès le départ*. Par exemple, les *méthodes bayésiennes* prennent en compte l'incertitude et réduisent l'impact des valeurs extrêmes, ce qui améliore la précision de l'estimation.