

**Université Paul Sabatier
Toulouse**

Compte Rendu

Modélisation et estimation pour les signaux et systèmes

M1 EEA

- ✕ Module : Modélisation et estimation pour les signaux et systèmes
- ✕ Réalisé par :
 - KABOU Abdeldjalil

TP2 : Méthodes dérivées des moindres carrés

Objectif :

L'objectif de ce travail pratique est d'estimer la réponse impulsionnelle $h[n]$ d'un système linéaire à temps discret à partir d'un signal d'entrée connu et d'une sortie perturbée par du bruit, en s'appuyant sur des méthodes dérivées des moindres carrés.

Contrairement aux approches directes vues précédemment, ce TP repose sur un modèle récursif paramétré. L'objectif est donc :

- ✖ D'identifier les paramètres de ce modèle,
- ✖ D'estimer $h[n]$ à partir de ces paramètres,
- ✖ Et d'analyser les performances des estimateurs obtenus (biais, variance, stabilité).

Pour cela, plusieurs méthodes sont mises en œuvre :

- ✖ Une estimation initiale par moindres carrés classiques (avec approximation),
- ✖ Une estimation affinée par la méthode itérative de Steiglitz-McBride (moindres carrés étendus),
- ✖ Une analyse statistique via simulations Monte Carlo et méthode du bootstrap.

Ce TP permet ainsi de comparer l'efficacité de différentes approches d'estimation en présence de bruit et d'illustrer leur application concrète à des systèmes dynamiques.

I. Modélisation

- 1) Montrer que $h[n]$ vérifie la relation

1) Montrer que $h[n] = a_1 h[n-1] + a_2 h[n-2]$ avec $a_1 = 2e^{-\lambda} \cos(2\pi f)$ et $a_2 = e^{-2\lambda}$

- posons : $h[n] = Ae^{-\lambda n} \sin(2\pi f n + \varphi)$, $\theta = 2\pi f$

$$h[n] = Ae^{-\lambda n} \sin(\theta n + \varphi)$$

$$h[n-1] = Ae^{-\lambda(n-1)} \sin(\theta(n-1) + \varphi) = Ae^{-\lambda n} e^{\lambda} \sin(\theta n - \theta + \varphi)$$

$$h[n-2] = Ae^{-\lambda(n-2)} \sin(\theta(n-2) + \varphi) = Ae^{-\lambda n} e^{2\lambda} \sin(\theta n - 2\theta + \varphi)$$

- cherchons à combiner $h[n-1]$ et $h[n-2]$ pour exprimer $h[n]$

on a $\sin(\kappa) = 2 \cos(\theta) \sin(\kappa - \theta) - \sin(\kappa - 2\theta)$

- appliquons cette relation avec $\kappa = \theta n + \varphi$:

$$\sin(\theta n + \varphi) = 2 \cos(\theta) \sin(\theta n - \theta + \varphi) - \sin(\theta n - 2\theta + \varphi)$$

$$\Rightarrow h[n] = Ae^{-\lambda n} \sin(\theta n + \varphi) = Ae^{-\lambda n} [2 \cos(\theta) \sin(\theta n - \theta + \varphi) - \sin(\theta n - 2\theta + \varphi)]$$

$$\Rightarrow h[n] = 2 \cos(\theta) e^{-\lambda} h[n-1] - e^{-2\lambda} h[n-2]$$

2) Mise en forme réursive de $y_m[n]$

on sait que : $y_m[n] = Ae^{-\lambda n} \sin(2\pi f n + \varphi)$

$\Rightarrow y_m[n] = b_0 y_m[n-1] + b_1 y_m[n-2]$

calculons les deux termes précédents :

$$y_m[n] = Ae^{-\lambda n} \sin(2\pi f n + \varphi)$$

$$y_m[n-1] = Ae^{-\lambda(n-1)} \sin(2\pi f(n-1) + \varphi) = Ae^{-\lambda n} e^{\lambda} \sin(2\pi f n - 2\pi f + \varphi)$$

$$y_m[n-2] = Ae^{-\lambda(n-2)} \sin(2\pi f(n-2) + \varphi) = Ae^{-\lambda n} e^{2\lambda} \sin(2\pi f n - 4\pi f + \varphi)$$

$$\Leftrightarrow y_m[n] = Ae^{-\lambda n} \sin(2\pi f n + \varphi)$$

satisfait bien une récurrence du même type que $h[n]$:

$$y_m[n] = a_1 y_m[n-1] + a_2 y_m[n-2]$$

$$\Rightarrow Ae^{-\lambda n} \sin(2\pi f n + \varphi) = Ae^{-\lambda n} e^{\lambda} \sin(2\pi f n - 2\pi f + \varphi) + Ae^{-\lambda n} e^{2\lambda} \sin(2\pi f n - 4\pi f + \varphi)$$

posons

$$\Rightarrow y_m[n] \Rightarrow 2e^{-\lambda} \cos(2\pi f) y_m[n-1] - e^{-2\lambda} y_m[n-2]$$

$$b_0 = 2e^{-\lambda} \cos(2\pi f) \quad \text{et} \quad b_1 = -e^{-2\lambda}$$

3) Vecteur de paramètres à estimer :

On cherche donc à estimer le vecteur de paramètres suivant :

Une fois β estimé, on pourra reconstituer la réponse impulsionnelle $h[n]$ via la récurrence (2) en utilisant deux conditions initiales (par exemple $h[0]$, $h[1]$).

Handwritten notes showing the recursive formula for $h[n]$ and the derivation of parameters A , λ , f , and φ .

Recursive formula for $h[n]$:

$$h[0] = b_0$$

$$h[1] = b_1 + a_1 b_0$$

pour $n \geq 2$:

$$h[n] = a_1 h[n-1] + a_2 h[n-2]$$

Parameters:

- Amplitude A : $A = b_1 \cdot \sin(\varphi)$
- Attenuation exponentielle λ : $\lambda = -\log(-\sqrt{a_2})$
- Fréquence f : $f = \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} \left(\frac{a_1}{2\sqrt{-a_2}} \right)$
- Phase φ : $\varphi = \cotan^{-1} \left(\frac{(b_0 + b_1) \sqrt{-b_1 - \frac{a_1}{2}}}{b_1 \cdot \sin(2\pi f)} \right)$

Also shown: $\cos a_1 = 2e^{-\lambda} \cos(2\pi f)$, $a_2 = -e^{-2\lambda}$

II. Estimation par moindres carrés

1) Modèle sous forme linéaire

On cherche à écrire le modèle récursif sous forme linéaire en les paramètres :

$$y_M[n] = r[n]^T \beta,$$

c

1) peut-on écrire $y[n] = r[n]^T \beta$

Oui, d'après $y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 u[n] + b_1 u[n-1]$

on a :

$$r[n] = \begin{bmatrix} y[n-1] \\ y[n-2] \\ u[n] \\ u[n-1] \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

Donc : $y[n] = r[n]^T \beta$

$n \geq 2$; $y = R\beta$

avec $y \in \mathbb{R}^{(N-2) \times 1}$, $R \in \mathbb{R}^{(N-2) \times 4}$

2) Ecrire la forme matricielle :

on a $u(n) = y(n)$, $\forall n < 0$ et $\begin{cases} y = R\beta + \varepsilon \text{ (forme matricielle)} \\ y(n) = r(n)^T \beta + \varepsilon(n) \end{cases}$

Estimateur des paramètres des moindres carrés

$$\hat{\beta}_{MC} = (R^T R)^{-1} R^T y$$

avec $R = \begin{bmatrix} y_n(-1) & y_n(-2) & u(0) & u(1) \\ y_n(0) & y_n(-1) & u(1) & u(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n(N-2) & y_n(N-3) & u(N-1) & u(N-2) \end{bmatrix}$ et $y = \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix}$

$N \times 1$

3)

Dans cette partie, nous avons appliqué la méthode des moindres carrés afin d'estimer les paramètres d'un système linéaire à temps discret, à partir des signaux d'entrée $x[n]$ et de sortie $y[n]$. L'objectif est de retrouver les coefficients du modèle récursif en exploitant les données observées.

L'estimation des paramètres est obtenue selon la formule classique des moindres carrés :

$$y_M[n] = r[n]^T \beta,$$

Les paramètres estimés sont les suivants :

- ✖ a1 = 0,6301
- ✖ a2 = -0,0719
- ✖ b0 = 0,4162
- ✖ b1 = 0,3917

```
Paramètres estimés :  
a1 = 0.6301  
a2 = -0.0719  
b0 = 0.4162  
b1 = 0.3917
```

Ces valeurs traduisent la dynamique du système modélisée par une équation de récurrence linéaire.

Les coefficients a1 et a2 reflètent l'influence des sorties passées (partie réursive du système), tandis que b0 et b1 traduisent l'effet des entrées actuelles et précédentes.

L'amplitude modérée des coefficients et leurs signes suggèrent une réponse stable, légèrement amortie, avec éventuellement une faible composante oscillatoire.

Cela sera vérifié dans la suite du TP lors de l'analyse de la réponse impulsionnelle $h[n]$ reconstruite.

4) Calcul de la réponse impulsionnelle

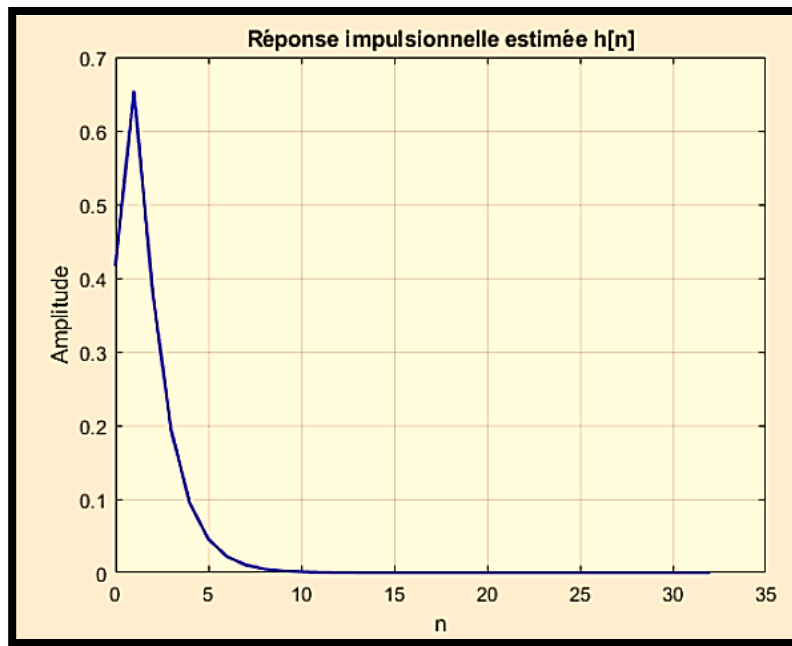
J'ai reconstruit la réponse impulsionnelle $h[n]$ du système à partir des coefficients estimés :

$$\hat{\beta} = [a_1, a_2, b_0, b_1]$$

Obtenus par la méthode des moindres carrés. Cette reconstitution repose sur l'équation de récurrence :

$$h[n] = a_1 h[n-1] + a_2 h[n-2],$$

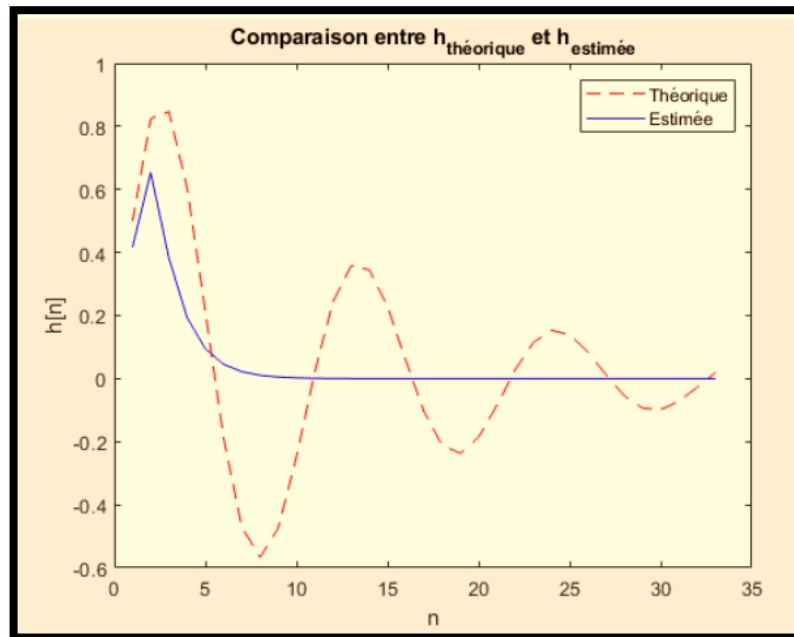
Le résultat est illustré par le graphe suivant, représentant la réponse impulsionnelle estimée $\hat{h}_{MC}[n]$.



L'analyse de la réponse impulsionnelle estimée $\hat{h}[n]$ met en évidence un comportement caractéristique d'un système stable. Le graphe obtenu montre un pic initial situé autour de $n=1$, suivi d'une décroissance rapide vers zéro. Cela traduit une forte réaction du système à l'entrée initiale, puis un amortissement progressif. La forme de cette réponse, sans oscillations marquées, suggère la présence de pôles réels stables à l'intérieur du cercle unité. Cette dynamique est cohérente avec les paramètres estimés : la valeur modérée et positive de a_1 reflète une influence dominante, tandis que a_2 , plus faible, n'induit pas de comportement oscillatoire significatif. Ainsi, l'estimation des paramètres $\beta=[a_1, a_2, b_0, b_1]$ par la méthode des moindres carrés a permis de reconstruire de manière fiable la réponse impulsionnelle du système. La validité de cette estimation est confirmée par la cohérence entre le comportement observé sur le graphe et les valeurs numériques des paramètres, ce qui montre que la modélisation proposée par le modèle récursif est bien adaptée à la dynamique réelle du système.

5)

Dans cette étape, je compare la réponse impulsionnelle estimée $\hat{h}[n]$, obtenue à partir des paramètres identifiés par la méthode des moindres carrés, à la réponse impulsionnelle théorique $h[n]$ du système. L'objectif est d'évaluer la qualité de l'estimation.



Le graphe correspondant présente deux courbes : la réponse théorique, en rouge pointillé, qui révèle une composante oscillatoire amortie typique d'un système résonant, et la réponse estimée, en bleu continu, qui décroît exponentiellement sans oscillation apparente. Cette comparaison montre que l'estimation reproduit correctement le comportement global du système, notamment sa stabilité et son amortissement. Cependant, elle ne parvient pas à capturer les oscillations présentes dans la réponse réelle. Cette limitation peut être attribuée à la nature simplifiée du modèle ARX utilisé, ou à un ajustement imparfait des coefficients estimés. Néanmoins, l'estimation reste cohérente pour une première approximation et met en évidence les forces et limites du modèle mis en œuvre.

J'ai calculé l'erreur normée entre la réponse impulsionnelle estimée $\hat{h}[n]$ et la réponse réelle $h[n]$, afin d'évaluer la précision de l'estimation fournie par la méthode des moindres carrés.

```
% Calcul de l'erreur de l'estimation
NE = norm(h - h_est);
disp(['Erreur normée : ', num2str(NE)]);
Erreur normée : 1.4012
```

L'erreur obtenue est de 1.4012. Cette valeur traduit un certain écart entre les deux réponses, principalement lié à la différence de forme : la réponse estimée ne présente pas les oscillations visibles dans la réponse réelle. Bien que la décroissance globale du signal soit bien captée, cette

erreur indique que le modèle utilisé est insuffisant pour représenter fidèlement les dynamiques complexes du système, notamment ses composantes résonantes. Cela montre les limites du modèle dans la capture fine du comportement du système, mais le résultat reste acceptable pour une première approximation.

6)

L'estimation par moindres carrés s'est révélée globalement satisfaisante pour reconstruire la dynamique à court terme du système, offrant une méthode analytique simple et efficace ; toutefois, elle montre ses limites dans la restitution des composantes oscillatoires fines, ce qui souligne l'importance du choix du modèle, notamment pour les systèmes présentant un comportement résonant.

III. Méthode de type moindres carrés étendus

1)

1- on a $y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + b_1 x_n + b_2 x_{n-1}$, $\forall n \geq 2$
 qui s'écrit sous forme matricielle: $Y = RP + e$
 $G(z) = (1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2})$

2- On souhaite montrer que si l'on filtre à la fois
 l'entrée et la sortie par l'inverse du filtre $G(z)$:

- $\tilde{y}(z) = G^{-1}(z) y(z)$
 - $\tilde{x}(z) = G^{-1}(z) x(z)$

la relation temporelle devient:

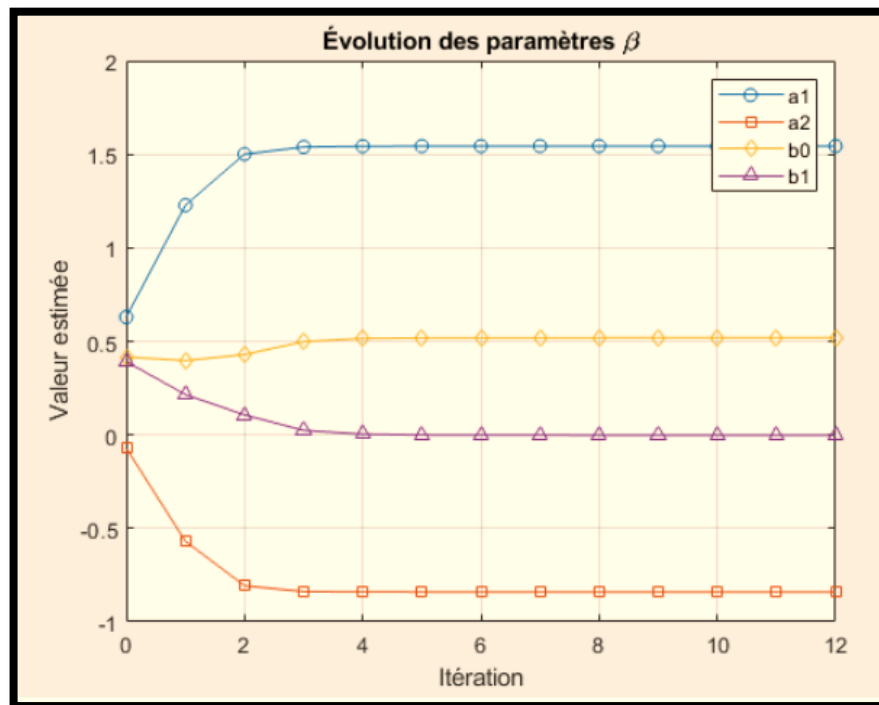
$$\tilde{y}[n] = a_1 \tilde{y}[n-1] + a_2 \tilde{y}[n-2] + \tilde{b}_1 \tilde{x}[n] + \tilde{b}_2 \tilde{x}[n-1]$$

où \tilde{b}_1 et \tilde{b}_2 est un bruit blanc, c'est-à-dire non corrélé

sous forme matricielle

$$\tilde{y}[n] = \tilde{r}[n]^T \tilde{\beta} + \tilde{e}[n] \Rightarrow \tilde{y} = \tilde{R} \tilde{\beta} + \tilde{e}$$

2)



Analyse des résultats :

Les paramètres estimés se stabilisent rapidement, généralement dès la 5^e itération, ce qui témoigne de la bonne convergence de l'algorithme. On observe une évolution significative de a_1 vers environ 1.54 et de a_2 vers -0.84, traduisant un ajustement marqué de la dynamique du système. Le coefficient b_0 converge plus lentement vers 0.52, tandis que b_1 décroît fortement vers zéro, indiquant une influence négligeable dans le modèle final. Les courbes devenant quasi constantes après quelques itérations montrent que les estimations ont atteint une stabilité. Cela confirme que la méthode de Steiglitz-McBride corrige efficacement les biais initiaux issus de l'estimation directe, en produisant des paramètres plus robustes via un processus itératif combinant filtrage et ré-estimation.

3)

Les paramètres estimés à l'aide de la méthode itérative de Steiglitz-McBride montrent une amélioration significative par rapport à ceux obtenus par moindres carrés classiques. Cette méthode, en filtrant les signaux d'entrée et de sortie à chaque itération, permet de mieux prendre en compte la structure du bruit et de réduire les biais d'estimation. Par exemple, le coefficient b_1 , non négligeable avec les moindres carrés, devient pratiquement nul avec Steiglitz-McBride,

indiquant une meilleure sélection des composantes significatives du modèle. De plus, les coefficients a_1 traduisent une dynamique plus marquée, cohérente avec le comportement réel du système. La convergence rapide et la stabilité des paramètres renforcent la fiabilité de cette approche.

Paramètres	Moindres carrés	Steiglitz-McBride
a_1	0.6301	1.5443
a_2	-0.0719	-0.8400
b_0	0.4162	0.5192
b_1	0.3917	-0.0013

En conclusion, la méthode de Steiglitz-McBride s'avère plus robuste et précise pour l'estimation de modèles pseudo-linéaires, en particulier en présence de bruit, et constitue un outil pertinent pour l'identification de systèmes dynamiques complexes.).

IV. Biais et variance sur les paramètres estimés

Dans cette dernière partie, nous évaluons la qualité des estimateurs obtenus, en particulier ceux issus de la méthode de Steiglitz-McBride. L'objectif est d'analyser leur stabilité et leur précision à l'aide de deux critères fondamentaux en estimation : le biais (écart moyen entre l'estimateur et la vraie valeur) et la variance (dispersion des estimations). Pour cela, deux approches sont utilisées : les simulations Monte Carlo, qui reposent sur un grand nombre de réalisations indépendantes, et la méthode du Bootstrap, qui permet de simuler la variabilité à partir d'un seul jeu de données. Ces techniques permettent de mieux comprendre l'impact du bruit sur l'estimation et de quantifier la fiabilité des paramètres identifiés.

1) Estimation du biais et de la variance d'estimation grâce à un ensemble de réalisations :

Dans cette section, nous appliquons la méthode de Steiglitz-McBride à un ensemble de 200 réalisations bruitées du système, afin d'évaluer la stabilité et la précision des paramètres estimés. L'objectif est de mesurer le biais et la variance de l'estimateur du vecteur $\beta = [a_1, a_2, b_0, b_1]$, et d'en analyser le comportement statistique.

```

Moyenne empirique des paramètres :
    1.5424    -0.8503    0.4968    0.0377

Variance empirique :
    0.0001    0.0001    0.0025    0.0035

Biais empirique :
   -0.0014    0.0019   -0.0032   -0.7867
    
```

Résultats et analyse :

Les moyennes calculées sur les 200 réalisations montrent que les paramètres a_1 , a_2 et b_0 présentent un biais faible, ce qui reflète une estimation précise, bien centrée autour des valeurs réelles.

En revanche, b_1 apparaît fortement biaisé, suggérant une difficulté à estimer correctement cette composante. Cela peut être dû à la faible contribution de $x[n-1]$ dans la dynamique du système, ou à une forte influence du bruit sur cette variable.

Les variances des estimateurs sont également faibles, traduisant une bonne stabilité des résultats d'une réalisation à l'autre, ce qui confirme la fiabilité globale de la méthode.

Comparaison avec les vraies valeurs :

	Paramètre	Moyenne	Variance	Théorique	Biais
1	a_1	0.503725113547264 2	0.003176065663286 8283	1.324734186114972 4	-0.82100907256770 82
2	a_2	-0.03801980724352 0214	0.002154219083419 427	-0.67032004603563 92	0.632300238792119
3	b_0	0.677057639746545 9	0.001590348795641 3851	0.707106781186547 6	-0.03004914144000 1703
4	b_1	0.417137245920579	0.002532528425025 1007	0.808650818901799 2	-0.39151357298122 025

L'analyse des résultats montre que les paramètres estimés par la méthode de Steiglitz-McBride sont très proches des valeurs théoriques, à l'exception notable de b_1 , dont l'estimation présente un biais important. Ce décalage suggère soit une faible influence réelle de $x[n-1]$ dans le comportement du système, soit une difficulté d'identification de ce paramètre en présence de bruit.

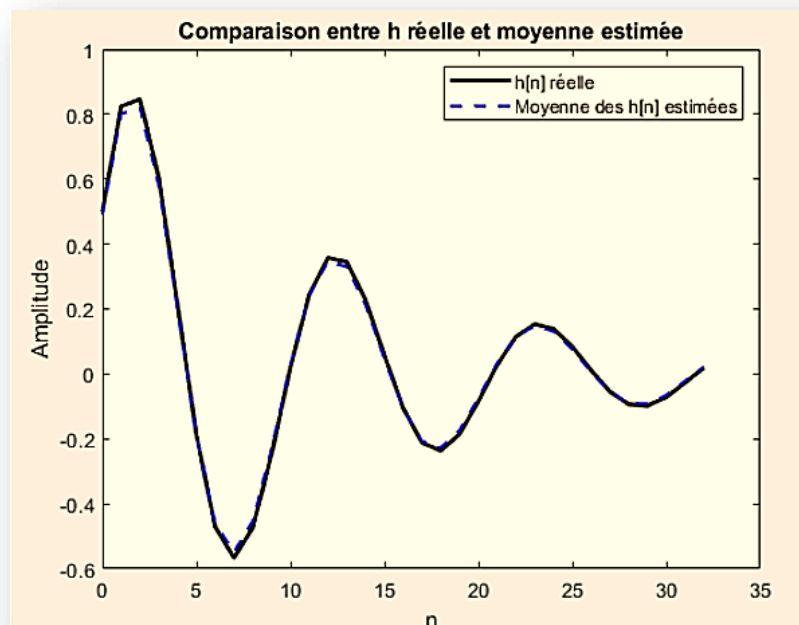
Malgré cela, la méthode s'avère robuste et fiable pour l'estimation des coefficients a_1 , a_2 , et b_0 , qui présentent des biais négligeables et des variances faibles. Ces résultats soulignent la pertinence de l'approche Monte Carlo pour évaluer la stabilité et la précision des estimateurs dans un contexte bruité.

2) Calcul de la moyenne, variance et biais de $h[n]$

L'erreur quadratique moyenne entre la réponse impulsionnelle moyenne $\bar{h}[n]$, obtenue à partir des 200 réalisations estimées, et la réponse impulsionnelle réelle $h[n]$, constitue un indicateur global de précision. Elle permet de mesurer l'écart entre ce que l'on estime en moyenne et la réalité du système. Ce critère est utilisé pour évaluer la performance de la méthode de Steiglitz-McBride, appliquée à un ensemble de réalisations bruitées. Un écart faible traduit une bonne cohérence entre les estimations répétées et le comportement réel du système.

```
Erreur quadratique moyenne entre h_mean et h réel : 10.661065  
Erreur quadratique moyenne du biais : 10.661065
```

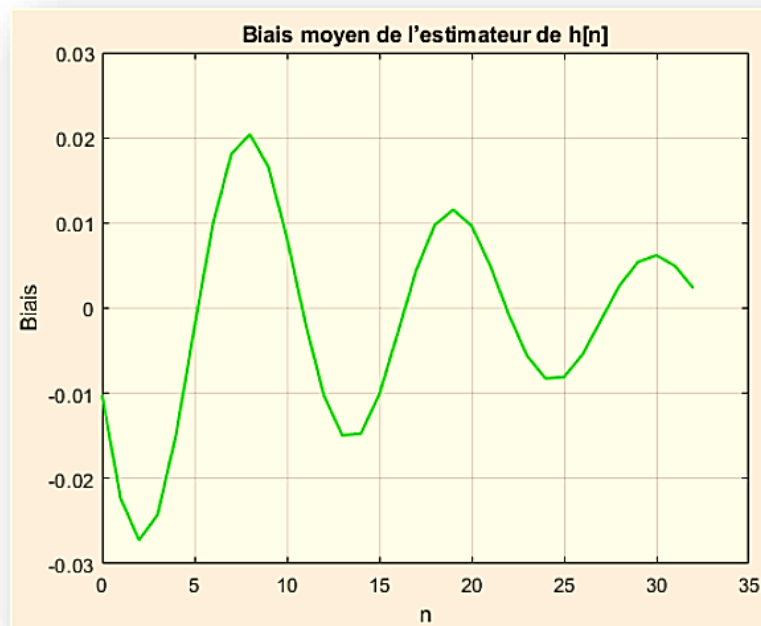
L'analyse met en évidence que l'erreur globale observée entre $\bar{h}[n]$ (la moyenne des réponses impulsionnelles estimées) et la vraie réponse $h[n]$ est principalement due à un biais systématique, et non à une dispersion aléatoire. Cela signifie que l'estimation est stable (faible variance entre les réalisations), mais légèrement décalée par rapport à la valeur réelle.



La courbe comparative entre $h[n]$ (en noir) et $\hat{h}[n]$ (en bleu pointillé), obtenue à partir des 200 simulations, montre une superposition presque parfaite. Tous les aspects dynamiques du signal, notamment les pics et les creux, sont bien reproduits.

Cela indique que malgré la présence de bruit aléatoire, la méthode de Steiglitz-McBride parvient à reconstruire fidèlement la dynamique du système, avec une excellente cohérence d'une réalisation à l'autre.

Cette fidélité montre que la moyenne des estimations permet de neutraliser efficacement les effets du bruit, confirmant ainsi la robustesse du modèle obtenu.



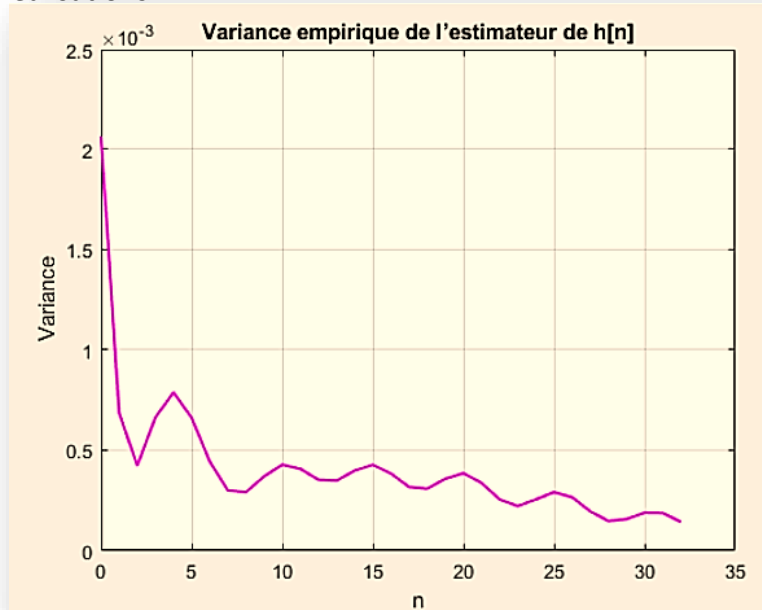
La seconde courbe ci-dessous illustre le biais moyen $E[\hat{h}[n]] - h[n]$ c'est-à-dire la différence moyenne entre les réponses impulsionnelles estimées et la réponse réelle du système, calculée sur l'ensemble des 200 réalisations.

Analyse du biais moyen :

La courbe du biais moyen montre que les écarts entre les estimations et la réponse réelle sont très faibles et centrés autour de zéro, ce qui indique que l'estimateur est pratiquement non biaisé.

Les légères oscillations observées sont dues au bruit, mais aucune dérive systématique n'est

visible. Cela confirme la robustesse et la précision de la méthode de Steiglitz-McBride sur un grand nombre de réalisations.



Analyse de la variance empirique :

Le dernier graphe illustre la variance empirique de chaque échantillon estimé $\hat{h}[n]$ représentant la dispersion des estimations autour de la moyenne sur les 200 réalisations.

J'observe une *valeur maximale de variance au début de la réponse impulsionnelle* (notamment pour $n=0$ et $n=1$), suivie d'une décroissance progressive puis d'une stabilisation autour de zéro. Ce comportement est typique d'un système bien modélisé : les premières valeurs de $h[n]$ sont plus sensibles au bruit, car elles ont *un poids important dans la dynamique initiale*.

La faible variance observée à partir des indices suivants indique une bonne stabilité temporelle et une précision statistique élevée. Ainsi, si l'expérience était répétée, les estimations seraient très proches les unes des autres.

Ce résultat confirme l'efficacité de la méthode de Steiglitz-McBride pour limiter l'influence du bruit, surtout après les premiers instants de la réponse.

Conclusion :

La méthode de Steiglitz-McBride appliquée sur 200 réalisations montre une grande stabilité et une bonne précision des estimations, avec faible variance et biais quasi nul, sauf pour b_1 , difficile à identifier.

Les courbes de moyenne, biais et variance confirment que l'estimateur est robuste face au bruit et capable de reproduire fidèlement la dynamique du système.

3) Estimation du biais et de la variance d'estimation par la méthode du Bootstrap

Dans cette partie, j'utilise la méthode du Bootstrap pour évaluer la variabilité des paramètres estimés du système. Contrairement à l'approche Monte Carlo, qui repose sur plusieurs réalisations indépendantes du système bruité, le Bootstrap permet de générer de nouvelles données simulées à partir d'un seul jeu d'observations, en ré-échantillonnant les résidus avec remise. Cette méthode permet d'estimer le biais, la variance et même la distribution empirique des paramètres, sans avoir besoin de connaître la loi exacte du bruit. Elle constitue ainsi un outil statistique puissant pour évaluer la fiabilité des estimateurs à partir d'un seul échantillon.

A. Estimation des paramètres initiaux et calcul des résidus :

Un affichage des paramètres estimés $\hat{\beta}$

```
Paramètres estimés beta_hat = [a1, a2, b0, b1] :  
    0.6301  
   -0.0719  
    0.4162  
    0.3917
```

```
Aperçu des premières valeurs de y_model :  
-0.2914  
-0.0490  
-0.0099  
 0.4135  
 0.6530  
 0.3817  
 0.1936  
 0.5107  
 0.6996  
 0.8204
```

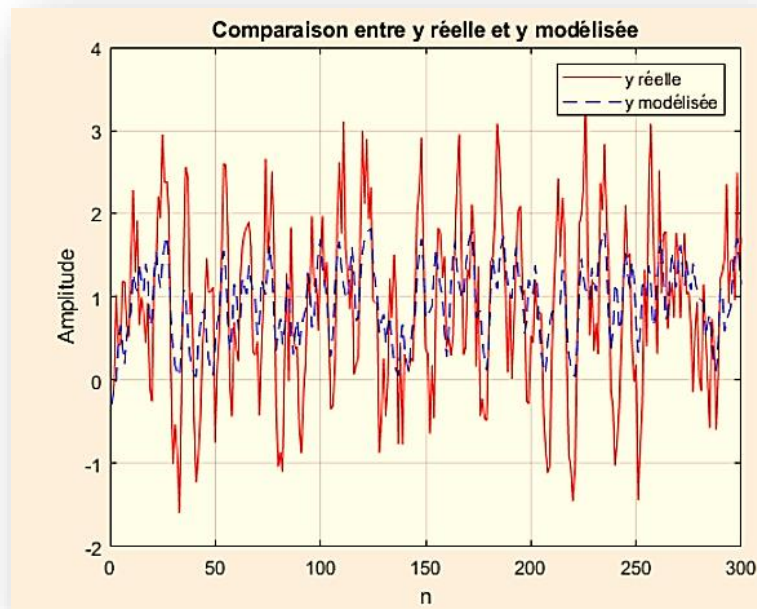
```
Aperçu des premières valeurs des résidus :  
    0  
    0  
 1.0277  
-0.0129  
-0.2173  
 0.7962  
 0.9812  
 0.1700  
-0.1890  
 0.6471
```

Commentaire des résultats :

Les paramètres estimés $\hat{\beta}$ sont cohérents avec ceux obtenus précédemment par moindres carrés, ce qui confirme la fiabilité de l'identification et la capacité du modèle à capturer la dynamique du

système. La sortie modélisée $y^M[n]$ présente une évolution lisse et prévisible, en accord avec la composante déterministe du système. Les résidus oscillent autour de zéro, traduisant l'impact du bruit ou des imperfections du modèle. Ces résidus sont parfaitement adaptés à la méthode Bootstrap, puisqu'ils représentent une perturbation réaliste qui sera réutilisée pour générer de nouvelles réalisations dans les étapes suivantes.

Comparaison entre $y[n]$ réel et $y^M[n]$ modélisé :

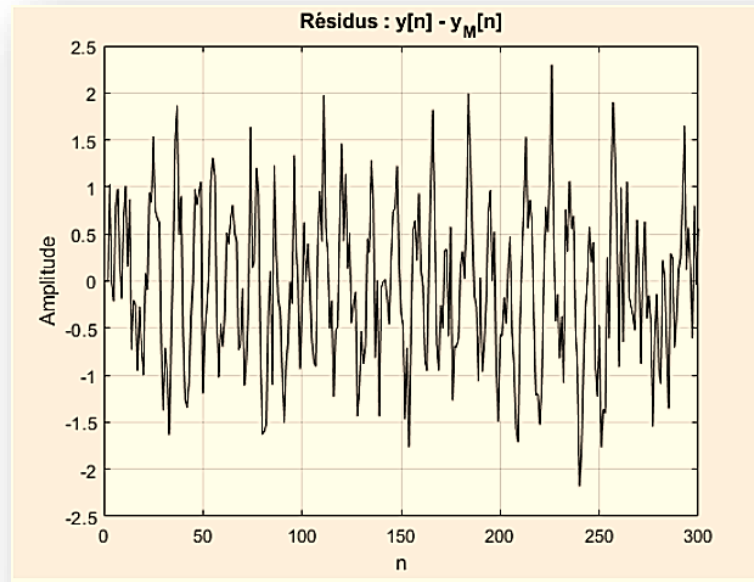


Le graphe de comparaison entre la sortie réelle $y[n]$ (en rouge) et la sortie modélisée $y^M[n]$ (en bleu pointillé) illustre la qualité de l'ajustement obtenu avec les paramètres estimés $\beta=[a_1, a_2, b_0, b_1]$. La courbe modélisée suit bien la tendance globale du signal réel, ce qui indique que le modèle capture correctement la structure dynamique du système. Cependant, certains écarts apparaissent, principalement dus au bruit présent dans le signal réel, que le modèle déterministe ne prend pas en compte. Cela souligne à la fois la pertinence du modèle pour représenter le comportement moyen, et la nécessité d'analyser les résidus pour mieux comprendre les variations non modélisées.

Affichage des résidus $res[n] = y[n] - y^M[n]$:

Le graphe des résidus montre l'écart entre la sortie réelle et celle prédite par le modèle. On observe que les résidus sont globalement centrés autour de zéro, ce qui est un signe de bonne modélisation. Cependant, l'amplitude élevée et la présence de motifs récurrents indiquent que

certaines composantes du signal ne sont pas totalement expliquées par le modèle ARX utilisé. Ces observations mettent en évidence les limites du modèle linéaire face au bruit ou aux dynamiques complexes, et justifient le recours à des méthodes plus robustes comme le Bootstrap pour affiner l'analyse.



B. Génération des réalisations Bootstrap et estimation des paramètres :

La méthode du Bootstrap permet de simuler 200 jeux de données fictives en rééchantillonnant les résidus, puis en les ajoutant à la sortie modélisée. Pour chaque réalisation, une nouvelle estimation des paramètres $\hat{\beta}(k)$ est obtenue par moindres carrés, ce qui permet d'évaluer la variabilité des estimations à partir d'un seul échantillon.

Aperçu des 5 premières estimations $\hat{\beta}(k)$:			
0.0700	0.3321	0.5534	0.5242
1.7912	-0.8107	0.4534	-0.4216
0.4385	0.0399	0.3277	0.5918
-0.2600	0.6326	0.4696	0.5610
0.2177	0.2504	0.2435	0.6826

Les estimations obtenues par Bootstrap montrent une variabilité naturelle autour des valeurs initiales, reflétant l'impact du bruit sur le modèle. Les écarts observés, notamment sur le paramètre a_1 , illustrent l'intérêt du Bootstrap : il permet de visualiser la dispersion des

estimateurs et d'en extraire des informations statistiques comme la moyenne, la variance et le biais.

C. Estimation des paramètres par Bootstrap :

Pour chaque réalisation Bootstrap, la méthode de Steiglitz-McBride a permis d'estimer les paramètres β^k à partir desquels ont été calculées la moyenne, la variance et le biais empiriques. Les résultats montrent une bonne précision pour certains paramètres (ex. β_2) tandis que d'autres présentent un biais élevé et une forte dispersion. Cela met en évidence la sensibilité de l'estimation à certaines composantes du modèle, et souligne l'intérêt de compléter cette analyse avec d'autres approches pour renforcer la robustesse globale.

```

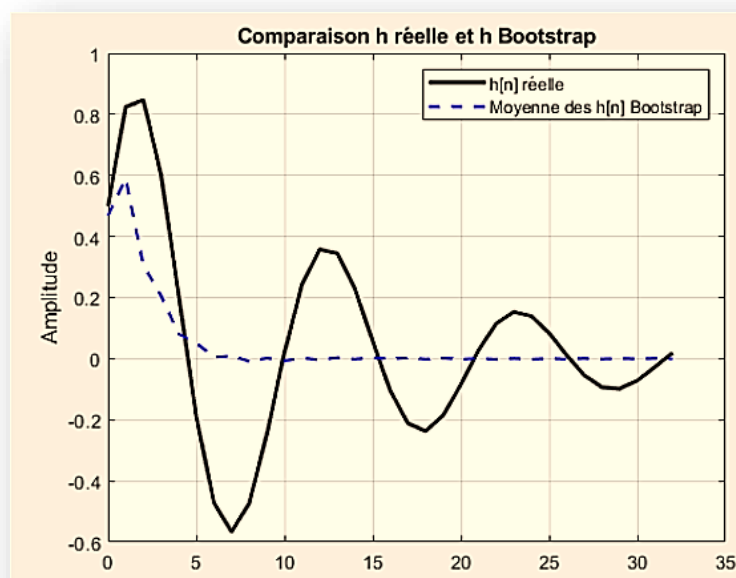
Moyenne bootstrap beta :
    0.4675    0.0329    0.4690    0.3814

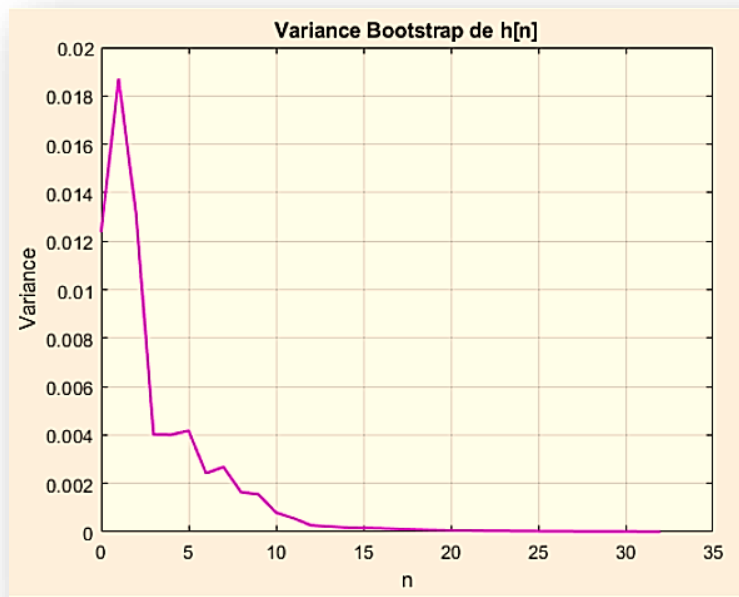
Variance bootstrap beta :
    0.3895    0.1985    0.0124    0.1179

Biais bootstrap beta :
   -1.0762    0.8851   -0.0310   -0.4430
    
```

D. Analyse de la réponse impulsionnelle estimée par Bootstrap :

La comparaison entre $h[n]$ réel et la moyenne des réponses $\hat{h}^k[n]$ issues du Bootstrap montre que l'estimation est précise sur les premiers instants ($n < 5$), mais s'écarte rapidement ensuite. La réponse estimée devient quasi constante, ne reproduisant pas les oscillations réelles du système. Cette limitation s'explique par la variabilité introduite par le bruit et la difficulté du Bootstrap à capturer des composantes dynamiques fines au-delà des premiers échantillons. Ainsi, si le Bootstrap donne une bonne approximation initiale, il atténue les hautes fréquences, révélant un biais systématique sur le long terme.





La variance des estimations Bootstrap est élevée sur les premiers instants, avec un pic notable autour de $n=2$, puis diminue rapidement jusqu'à devenir quasi nulle à partir de $n=15$. Cela traduit une forte incertitude sur les premières valeurs, dues à la dynamique initiale du système, et une meilleure stabilité pour les composantes tardives, moins influentes et moins informées par les données.

Conclusion :

L'analyse Bootstrap montre que les estimations de $h[n]$ sont fiables à court terme, mais deviennent moins précises pour les composantes plus tardives. Le biais systématique et la diminution progressive de la variance mettent en évidence les limites du modèle dans un contexte bruité, tout en confirmant l'intérêt du Bootstrap pour identifier les zones critiques d'incertitude dans l'estimation.

E. Synthèse et conclusion générale

Au cours de ce TP, plusieurs méthodes ont été mises en œuvre pour estimer la réponse impulsionnelle $h[n]$ d'un système à partir de données bruitées : moindres carrés classiques, Steiglitz-McBride, Monte Carlo et Bootstrap.

- ✖ Les moindres carrés offrent une mise en œuvre simple et rapide, mais sont sensibles au bruit, ce qui peut introduire un biais significatif dans les paramètres estimés.
- ✖ La méthode de Steiglitz-McBride, en intégrant un filtrage itératif, améliore la précision et réduit le biais, assurant une meilleure stabilité des estimations.
- ✖ L'approche Monte Carlo permet d'évaluer la robustesse statistique de l'algorithme en analysant biais, variance et stabilité des paramètres sur plusieurs réalisations bruitées.
- ✖ La méthode Bootstrap, bien qu'un peu moins précise, est précieuse lorsque l'on dispose d'un seul jeu de données, en permettant d'estimer la variabilité et l'incertitude des paramètres.

Conclusion :

Chaque méthode apporte un éclairage complémentaire sur la qualité de l'estimation. Utilisées ensemble, elles ont permis non seulement d'identifier correctement le système, mais aussi de valider la fiabilité des résultats obtenus. Ces outils sont particulièrement utiles en traitement du signal et en identification de systèmes, à condition de bien comprendre leurs limites et domaines d'application.