

问题：

计算单层介质（左右两个界面，介电常数和磁导率为 ϵ_1 和 μ_1 ,厚度为 d ）的透射率。

思路：

假设左边（入射端）为 $A_1 \exp(ik_0 z) + B_1 \exp(-ik_0 z)$ ，介质层为 $A_2 \exp(ik_0 z) + B_2 \exp(-ik_0 z)$ ，右边为 $A_3 \exp(ik_0 z)$ ，整个透射系数为 $t = A_3/A_1$, $r = B_1/A_1$ ，用MATLAB画出 $T=|t|^2$ 和 R 与 ω 的关系。核心技巧：设 $A_3 = 1$, 推出 A_2, B_2, A_1, B_1 。

公式推导：

$$\text{入射波: } \begin{cases} \vec{E}_1 = [A_1 \exp(ik_0 z) + B_1 \exp(-ik_0 z)] \vec{e}_x \\ \vec{H}_1 = \frac{[A_1 \exp(ik_0 z) - B_1 \exp(-ik_0 z)] \vec{e}_y}{\eta_0} \end{cases}$$

$$\text{介质中的波: } \begin{cases} \vec{E}_2 = [A_2 \exp(ik_1 z) + B_2 \exp(-ik_1 z)] \vec{e}_x \\ \vec{H}_2 = \frac{[A_2 \exp(ik_1 z) - B_2 \exp(-ik_1 z)] \vec{e}_y}{\eta_1} \end{cases}$$

$$\text{出射波: } \begin{cases} \vec{E}_3 = A_3 \exp(ik_0 z) \vec{e}_x \\ \vec{H}_3 = \frac{A_3 \exp(ik_0 z) \vec{e}_y}{\eta_0} \end{cases}$$

令 $A_3 = 1$

在右界面($z=d$)出，由边界条件 $E_{2x}(d) = E_{3x}(d)$ 和 $H_{2y}(d) = H_{3y}(d)$

$$\begin{cases} A_2 \exp(ik_0 d) + B_2 \exp(-ik_0 d) = \exp(ik_0 d) \\ \frac{A_2 \exp(ik_0 d) - B_2 \exp(-ik_0 d)}{\eta_1} = \frac{\exp(ik_0 d)}{\eta_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = \frac{\eta_0 + \eta_1}{2\eta_0 \exp(ik_0 d)} \\ B_2 = \frac{\eta_0 - \eta_1}{2\eta_0 \exp(-ik_0 d)} \end{cases}$$

在左边界($z=0$)出，由边界条件 $E_{1x}(0) = E_{2x}(0)$ 和 $H_{1y}(0) = H_{2y}(0)$

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ \frac{A_1 - B_1}{\eta_0} = \frac{A_2 - B_2}{\eta_1} \end{cases}$$

将 A_2, B_2 代入上式利用欧拉公式化简可得

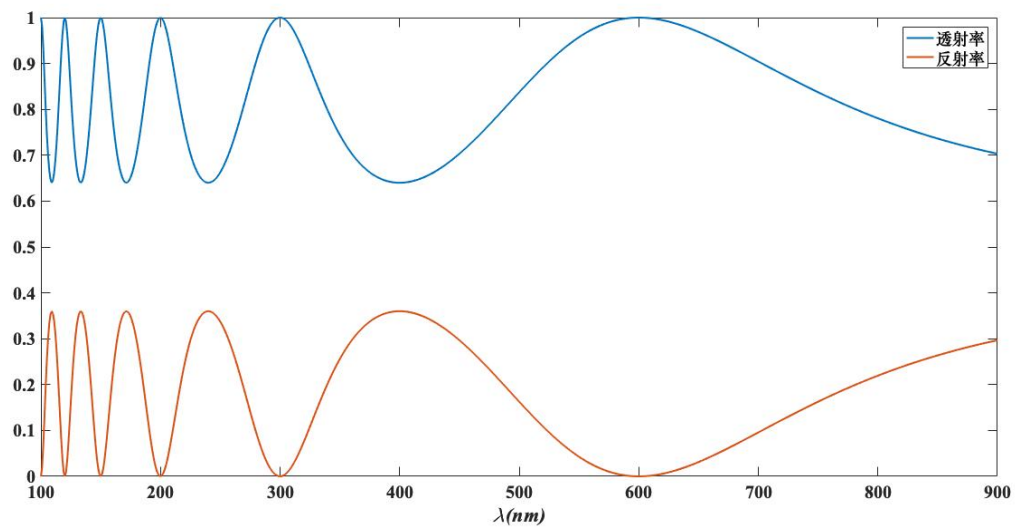
解得

$$\begin{cases} A_1 = \cos(k_1 d) - \frac{i \sin(k_1 d)(\eta_0^2 + \eta_1^2)}{2\eta_0 \eta_1} \\ B_1 = \frac{i \sin(k_1 d)(\eta_0^2 - \eta_1^2)}{2\eta_0 \eta_1} \end{cases}$$

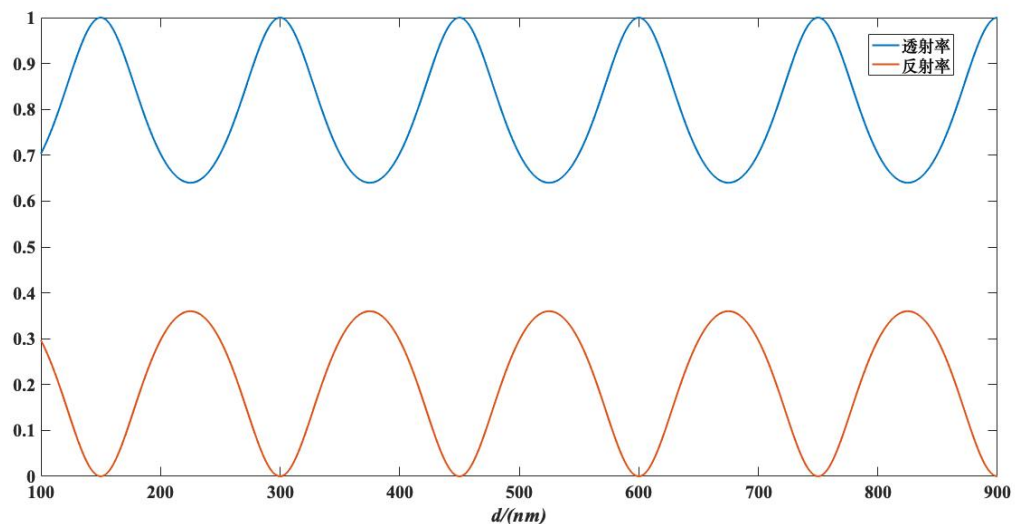
由 $t = A_3/A_1$ 可以看出 t 为复数，包含相位。由 $k_1 = 2\pi/\lambda$ 可以看出当 $d = m\lambda/2, m = 1, 2, 3 \dots$ 时透射率为1，当波长不变介质厚度变化时，透射率反射率呈周期性变化。

画图及分析（两侧介质折射率设为1）

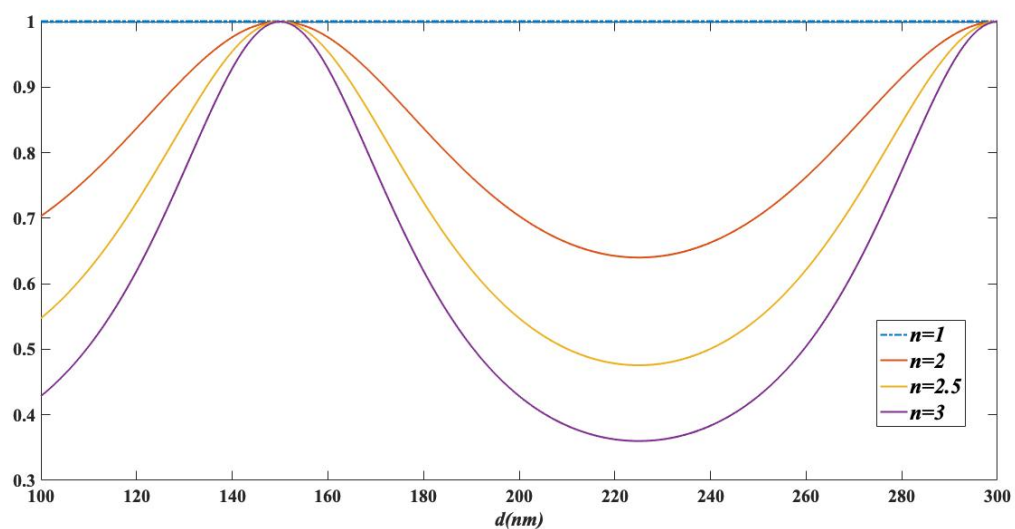
折射率为 $n=2$ ，厚度为 $d=300\text{nm}$ ，波长范围为 100nm 到 900nm 时的透射率和反射率， $\lambda = 2d/m, m = 1, 2, 3 \dots$ 时透射率为1，波长越小出现透射率为1的概率越大，与经验相符（比如X射线的透射性很强）。



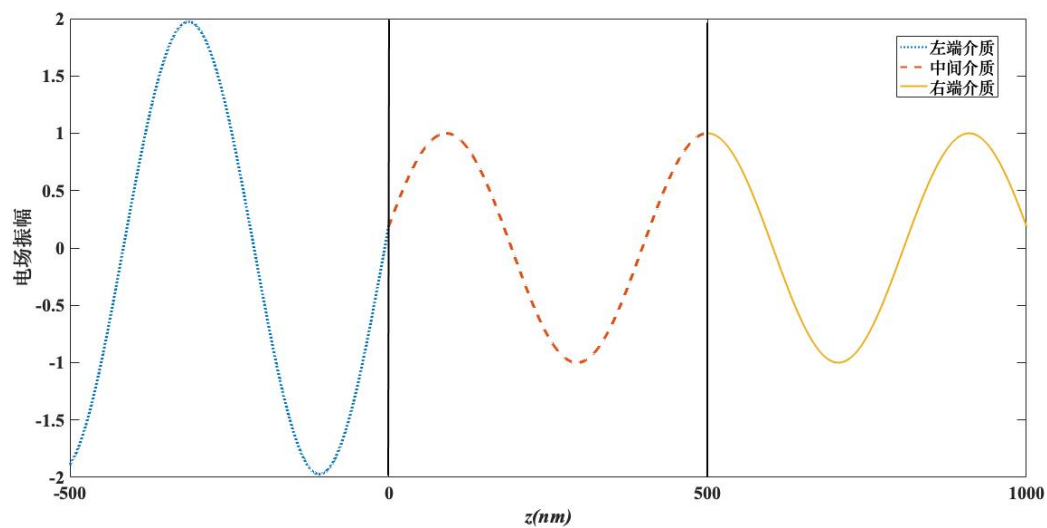
折射率为2，波长为 300nm ，厚度为 100nm 到 300nm ，折射率变化时的透射率， $d = m\lambda/2, m = 1, 2, 3 \dots$ 时透射率为1且透射率呈周期性变化。



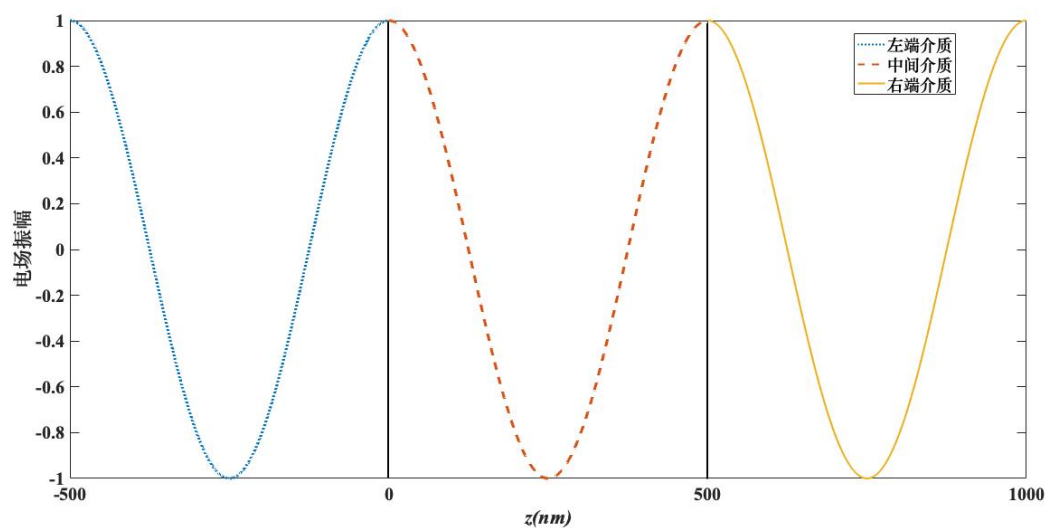
折射率为 $n=1.5, 2.0, 2.5, 3.0$ ，波长为 300nm ，厚度范围为 100nm 到 300nm 时的透射率和反射率，当折射率大于1时折射率越小时整体透射率越大，两侧介质折射率为1时，中介质的折射率为 n 和 $1/n$ 时透射率相同，更一般的，可以根据 A_1 的表达式推出，设两端折射率为 n_0 ，则中间折射率为 n 和 n_0^2/n 时透射率相同。



折射率为2，厚度为500nm，波长为410nm的场分布图，此时透射率不为1。



折射率为2，厚度为500nm，波长为500nm的场分布图，此时 $m=2$ ，可以看出透射率为1，符合前面的推导。



MATLAB代码

```
%计算单层介质透反率
close all;clear;
lambda=300;
d=100:500;
yeta1=1;
yeta2=1/2;
A3=1;
A1=cos(2*pi./lambda*d)-1i*sin(2*pi./lambda*d)*
(yeta1^2+yeta2^2)/(2*yeta1*yeta2);
plot(d,1./power(abs(A1),2));
hold on
plot(d,1-1./power(abs(A1),2));
```

```
%画出场分布图
lambda=410;
d=500;
z1=-500:0;
z2=0:d;
z3=d:1000;
yeta1=1;
yeta2=1/2;
A3=1;
A1=cos(2*pi./lambda*d)-1i*sin(2*pi./lambda*d)*
(yeta1^2+yeta2^2)/(2*yeta1*yeta2);
B1=1i*sin(2*pi./lambda*d)/2/yeta1/yeta2*(power(yeta1,2)-power(yeta2,2));
A2=(yeta1+yeta2)/2/yeta1;
B2=(yeta1-yeta2)/2/yeta1;
E1=A1*exp(1i*2*pi./lambda.*z1)+B1*exp(-1i*2*pi./lambda.*z1);
%取实后E2等于E3
E2=A2*exp(1i*2*pi./lambda.*(z2-d))+B2*exp(-1i*2*pi./lambda.*(z2-d));
E3=A3*exp(1i*2*pi./lambda.*(z3-d));
plot(z1,E1)
hold on
plot(z2,E2)
plot(z3,E3)
```