1 逆関数法

累積分布関数（分布関数）$F(x)$ の逆関数を用いて、様々な乱数を生成する手法。一様分布に従う乱数から得敵の乱数を生成することができる。一般に $F(x)$ は単調非減少関数であり

$$F^{-1}(y) = \inf\{x \mid F(x) \geq y\}, \quad 0 \leq y \leq 1 \tag{1}$$

で逆関数を定義すると[*1]、

$$X = F^{-1}(U) \tag{2}$$

とすればよい。

1.1 ex.11.4 指数分布

期待値 μ の指数分布の分布関数は

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}}, \quad x \geq 0 \tag{3}$$

である。念の為計算しておくと、確率密度関数は

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{1}{\mu}e^{-\frac{x}{\mu}} \tag{4}$$

で与えられ、期待値は

$$\begin{aligned} E[x] &= \int_0^\infty xf(x)dx & (5)\\ &= \frac{1}{\mu}\left(\left[x(-\mu e^{-x/\mu})\right]_0^\infty + \mu\int_0^\infty e^{-x/\mu}dx\right) & (6)\\ &= \mu & (7) \end{aligned}$$

となり、たしかに期待値は μ である。一様分布に従う確率変数を U とすると

$$X = -\mu\log(1-U) \tag{8}$$

である。$1-U$ も同様に $[0,1]$ の一様分布に従うので

$$X = -\mu\log U \tag{9}$$

と書き直すことができる。

1.2 標準正規分布

教科書の式（11.15 11.17）に従って乱数を振ってみた結果。

[*1] https://ja.wikipedia.org/wiki/逆関数法

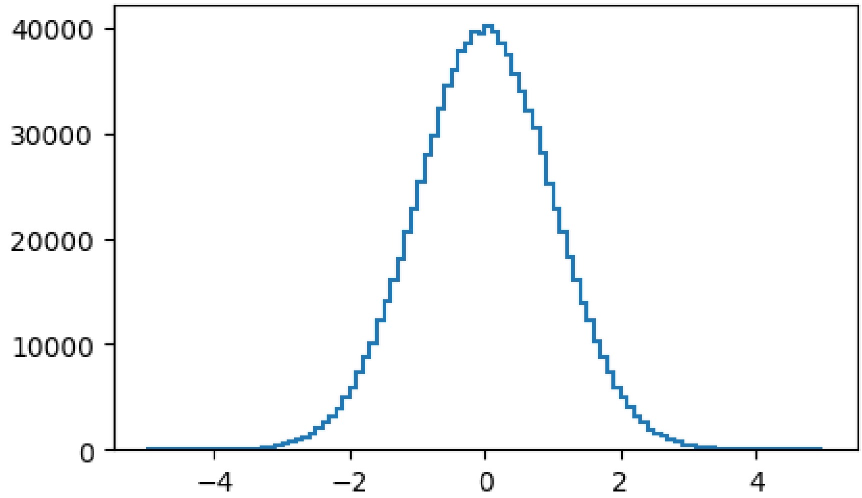

図 1　山内の近似式に従って乱数を振ってみた結果

```python
def yamauchi_norm():
    y = np.random.rand()
    z = -1 * np.log(4*y*(1-y))
    w = np.sqrt( z * (2.0611786 - 5.7262204/(z+11.640595)) )
    if y < 0.5 : return -1*w
    else : return w

samples = [yamauchi_norm() for _ in range(1000000)]
fig, ax = plt.subplots(figsize=(5,3))
ax.hist(samples, bins=100, range=(-5,5), histtype="step", linewidth=1.5)
plt.show()
```

1.3　幾何分布

幾何分布

$$P(X = n) = p(1-p)^{1-n} \tag{10}$$

の指数分布の分布関数は、初項 p、公比 $1-p$ の等比数列であることに留意して

$$\begin{aligned} F(X = n) &= \sum_{k \leq n} P(X = k) && (11) \\ &= \sum p(1-p)^{1-k} && (12) \\ &= 1 - (1-p)^n && (13) \end{aligned}$$

となる。逆関数法を用いるために

$$1-(1-p)^{n-1} < U \leq 1-(1-p)^n \tag{14}$$
$$-(1-p)^{n-1} < U-1 \leq (1-p)^n \tag{15}$$
$$(1-p)^n \leq U-1 < (1-p)^{n-1} \tag{16}$$
$$(1-p)^n \leq U < (1-p)^{n-1} \tag{17}$$

として（最後の変形では $1-U \to U$ の置き換えを、これまで同様に行った)、これを満たす n を X 値とすれば良い。

2　ガンマ分布

ガンマ分布の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\lambda\Gamma(\alpha)}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-x/\lambda} \tag{18}$$

であり、$Ga(\alpha, 1/\lambda)$ で表される[*2]。α は形状パラメータ、λ は尺度パラメータと呼ばれるパラメータである。

ガンマ分布に従う乱数生成の際に、形状パラメータ α が整数・半整数か、それ以外かで生成の方法が異なる。

2.1　形状パラメータが整数・半整数のとき

2.1.1　形状パラメータが整数のとき

ガンマ分布 $G(1, 1/\lambda)$ は

$$Ga(1, 1/\lambda) = \frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda} \tag{19}$$

となり、期待値 λ の指数分布に等しい。指数乱数の生成方法と同様に、$Ga(1, 1/\lambda)$ に従う乱数は

$$X_1 = -\lambda \log U_1 \tag{20}$$

と与えられる。またガンマ分布の再生性から、共通の尺度パラメータを持っていれば

$$X_1 + X_2 \sim G(\alpha_1 + \alpha_2, 1/\lambda) \tag{21}$$

であるので、

$$X = -\lambda \log U_1 - \lambda \log U_2 + ... - \lambda \log U_n = -\lambda \log U_1 U_2 ... U_n \tag{22}$$

は $G(n, 1/\lambda)$ に従うガンマ乱数を与えることになる。

2.1.2　形状パラメータが半整数のとき

形状パラメータが半整数のときには、$2/\lambda Z^2$ が $G(1/2, 1/\lambda)$ に従うので

$$X = -\lambda \log U_1 U_2 ... U_n + (\lambda/2) Z^2 \tag{23}$$

が $GA(n+1/2, 1/\lambda)$ に従うガンマ乱数を与える。

[*2] 教科書 p.17 と λ の意味が異なることに留意。

2.2　ポワソン分布

$X_1, X_2, X_3 ... \sim Ex(\lambda)$ ならば

$$Y = \sup\{n \mid X_1 + X_2 + ... + X_n \leq 1\} \tag{24}$$

はパラメータ λ のポワソン分布に従う。指数乱数は逆関数法で作成すると

$$-\frac{1}{\lambda}\log U_1 - \frac{1}{\lambda}\log U_2 - ... < 1 \tag{25}$$

$$\log U_1 + \log U_2 + ... > -\lambda \tag{26}$$

$$U_1 U_2 ... U_n > e^{-\lambda} \tag{27}$$

で与えられる。