1 点到直线

$\frac{|AX_0+BX_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

2 和差化积

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

3 积化和差

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$
$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$
$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$

4 万能公式

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$
$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$
$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

5 半角公式

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\left(\frac{1-cos\alpha}{2}\right)}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\left(\frac{1+cos\alpha}{2}\right)}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\left(\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}\right)}$$

6 函数对称

f(×)关于x=T对称充要条件
f(x)=f(2T-×)；f(T+x)=f(T-x)

7 奇函数与偶函数的表达

奇F(x)=f(x)-f(-x)
偶F(x)=f(x)+f(-x)
任意f(x)=1/2[f(x)-f(-x)]+1/2 f(x)+f(-x)]

8 最大值&最小值

Maxf(x),g(x)=1/2[f(x)+g(x) +—f(x)-g(x)—]
Minf(x),g(x)=1/2[f(x)+g(x)-—f(x)-g(x)—]

9 反函数

f(x) g(x)互为反函数
f(g(x))=x → g(f(x))

10 数列敛散性

数列收敛于A,则任意子数列收剑于A
单调数列的某一子数列收敛于A,则该数列收敛于A
数列2n与2n+1都收敛于A,则数列必收敛于A

11 连续的定义

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$
$$\lim_{\Delta\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) - f(x) = 0$$

12 常用等价无穷小

$x \to 0$ $\sin x \sim x$; $\tan x \sim x$; $\arcsin x \sim x$; $\arctan x \sim x$; $\ln(1+x) \sim x$; $e^x - 1 \sim x$; $a^x - 1 \sim x\ln a$; $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$; $(1+x)^a - 1 \sim ax$

f(0)=1 时等价无穷小

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(x)dt}{x} = 1$$

13 极限比较

$$f(x) \geq g(x) \to \lim f(x) \geq \lim g(x)$$
$$\lim f(x) > \lim g(x) \to f(x) > g(x)$$

14 敛散

$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^{+1}} = \begin{cases} 0, (a < -1) \\ 1, (a = -1) \\ \infty, (a > -1) \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0 \ \leftrightarrow df(x,y) \equiv 0$$

15 基本函数求导公式

$(a^x)' = a^x \ln a$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

16 球体积&表面积

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$
$$S = 4\pi R^2$$

17 定积分定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right)(b-a)}{n}$$

18 连续函数必有原函数

含有第一类间断点，无穷间断点的函数在包含间断点的区间没有原函数
跳跃间断点可以有原函数

19 基本积分表

二、基本积分表

既然积分运算是微分运算的逆运算，那么很自然地可以从导数公式得到相应的积分公式.

例如，因为$\left(\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)'=x^{\mu}$，所以$\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$是$x^{\mu}$的一个原函数，于是

$$\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C \quad (\mu\neq-1).$$

类似地可以得到其他积分公式. 下面我们把一些基本的积分公式列成一个表，这个表通常叫做基本积分表.

① $\int k\mathrm{d}x=kx+C$（k 是常数），

② $\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$（$\mu\neq-1$），

③ $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$，△ $\ln|x|+C$.

④ $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C$，

⑤ $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$，

⑥ $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$，

⑦ $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$，

⑧ $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$，

⑨ $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$，

⑩ $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$，

⑪ $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$，

⑫ $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$，

⑬ $\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int cotx dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x dx = \ln|cscx - \cot x| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$$

20 泰勒公式

$e^{1+x} = e + ex + e\frac{x^2}{2!} + e\frac{x^3}{3!} + e\frac{x^4}{4!}$

【注 2】几个重要函数的麦克劳林展开式

①$e^u=1+u+\frac{1}{2!}u^2+\cdots+\frac{1}{n!}u^n+o(u^n)$. $\rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n!}u^k$

②$\sin u=u-\frac{u^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(u^{2n+1})$. $\rightarrow \sum_{k=1}^{n}(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$

③$\cos u=1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!}+o(u^{2n})$. $\rightarrow \sum_{k=1}^{n}(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!}$

④$\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+\cdots+u^n+o(u^n)$. $\sum_{k=1}^{n}u^n$

⑤$\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-\cdots+(-1)^n u^n+o(u^n)$. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^n u^n$

⑥$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{u^{n+1}}{n+1}+o(u^{n+1})$. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^n\frac{u^{n+1}}{n+1}$

⑦$(1+u)^\alpha=1+\alpha u+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}u^n+o(u^n)$. $\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}u^n$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

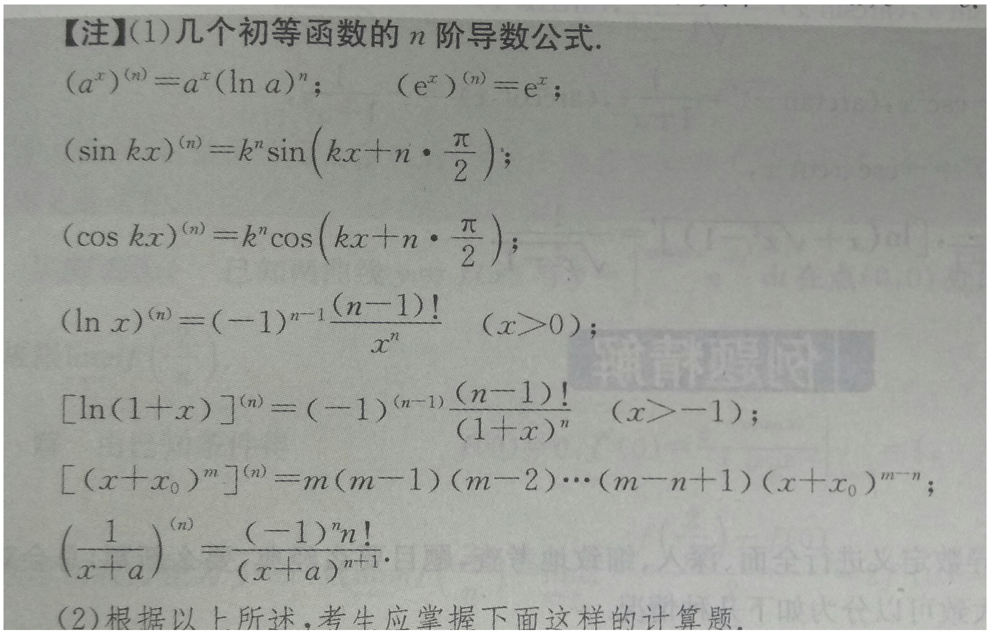
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

$$\arcsin x=x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

21 几个初等函数的n阶导数公式



【注】(1)**几个初等函数的 n 阶导数公式.**

$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n$； $(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$；

$$(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right);$$

$$(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right);$$

$$(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}\quad(x>0);$$

$$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\quad(x>-1);$$

$$[(x+x_0)^m]^{(n)}=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(x+x_0)^{m-n};$$

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}.$$

(2)根据以上所述，考生应掌握下面这样的计算题.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & \text{n为正偶数}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} & \text{n为大于1的正奇数}\end{cases}$$

22 经典不等式

$$e^x\geq x+1; x-1\geq\ln x; \frac{1}{1+x}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}$$

$$e^x\gg x^b\gg\ln^y x$$

$$2|ab|\leq a^2+b^2$$

$$|a\pm b|\leq|a|+|b|$$

$$||a|-|b||\leq|a-b|$$

$$\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

当x¿0,y¿0,p¿0,q¿0,$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \to xy \leq \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$$

$$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$$

当$p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$时； $\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right| \leq \left[\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right]^{\frac{1}{q}}$

1. 若$\int^{(n`1)}(x)$最多只有一个实零点,则f(x)最多只有n个不同实零点1. $f^2(x)$‘0 且连续f(x)单调1. 连续的**奇**函数的**一切**原函数都是**偶**函数1. 连续的**偶**函数的**仅有一个**原函数都是**奇**函数1. 变限积分存在必连续1. 可积函数在区间内必有界（二元也成立）1. f(x)是以T为周期的可积函数