1 常识

正交阵 $A^TA = AA^T = E$, $A^{-1} = A^T, |A|^2 = 1$
实对称 $A^T = A$
反对称 $A^T = -A$
A 为实矩阵，若 $A^TA = 0$则$a_i = 0, A = 0$ $a_ij = A_ij \to A^* = A^T$

正交向量内积为 0
n 阶行列式全部展开式总共 n！项，每行取自不同行不同列的乘积
n≥2 时，n！是偶数
逆对角线正负号 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$
$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$
$(-A)^* = (-1)^{n-1}A^*$
$|2En| = 2^n$
$A + A^T$ 是对称矩阵，$A - A^T$ 是反对称矩阵
已知 $a_{ij} = A_{ij}$,所以$A^* = A^T$,
特征量不能为零
$r(A^TA) = r(A)$
可逆矩阵首先是方阵

2 合同

定义 C 可逆，$B = C^TAC$
标准型只有平方项
规范型只有 0 1 -1

3 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-2} & \vdots & x_3^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - s_i)$$

4 拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} O & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

$$\begin{vmatrix} A_{mm} & O \\ O & B_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\text{A}=\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_n & & & \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_n^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{n} = \begin{bmatrix} A^{n} & O \\ O & B^{n} \end{bmatrix}$$

5 初等变换

单位矩阵经过一次初等变换称初等矩阵

初等矩阵都是可逆矩阵

可逆矩阵可表示一系列初等矩阵的乘积

6 向量组等价

等价向量组，相互线性表出

向量组和它的极大线性无关组是等价向量组

两向量组等秩 $\nrightarrow$ 两向量组等价

向量组 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_s$ 线性无关，$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_s, b$ 相关，b 可由 a1,a2,a3 …as 线性表出，表法唯一

向量组线性无关，增加一维的延伸向量组无关

延伸向量组相关，原向量组相关

含有零向量或成比例的向量组线性相关

7 矩阵等价

存在可逆矩阵 PQ 使 $PAQ=B$，则 $A\cong B$
两个同型矩阵等价的充分必要条件是秩相等

8 相似

A 相似 B $\rightarrow$ r(A)=r(B),|A|=|B|, 特征多项式/特征值相同
对称矩阵的两个特征值对应的特征向量正交
A 是 n 阶对称矩阵, 必有正交矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=P^{T}AP=\Lambda$
λ 是 A 的特征方程的 k 重根, 则矩阵 A-λE 的秩 R=n-k, 对应特征方程有 k 个线性无关特征向量
A、B 均是实对称矩阵，A、B 相似的充分必要条件是 A、B 有相同的特征值
可相似对角化，有不同的特征值

9 施密特正交化

$\beta_1=\alpha_1$
$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$
$\beta_n=\alpha_n-\frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1}-\frac{(\alpha_n,\beta_{n-2})}{(\beta_{n-2},\beta_{n-2})}\beta_{n-2}-\cdots-\frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$

10 迹

迹 Tr 方阵对角线所有元素之和
Tr(AB)=Tr(BA) , Tr(ABC)Tr(BAC)_ 增加 C 不成立

11 秩

设 A 为 m*n 矩阵
r(AB)≤min{r(A),r(B)}
AB=O r(A)+r(B)≤n

$r(A)+r(B) \le r\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \le r(A)+r(B)+r(C)$
r(A+B)<=r(A|B)<=r(A)+r(B)
r(A)<n-1, 则 |A| 的全部代数余子式都为 0
r(A)=n-1 , |A|=0
$|A*| = |A|^{n-1}$
r(A)=r 个独立未知量, n-r 个自由未知量, 解向量

12 正定

A 实对称，

1. 必相似于对角阵，且存在正交阵 Q，$Q^{-1}AQ = Q^TAQ=$ 对角阵
2. A 特征值为实数，特征向量为实向量
3. 属于不同特征值的特征向量正交

A 正定时，$kA\ A^T, A^k, A^{-1}, A^*, f(A)$系数大于零 都正定

A 正定 →A 实对称
A^* 正定 →A 正定反之不成立
任给二次型 f , 总有正交变换 X=Py, 使 f 化标准型, 若 $A^T = A$, 存在可逆变换 Œ=Cz 使 f 为标准型

配方法 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ X_3 = y_3 \end{cases}$
A 正定充要

1. 对任意 $x \ne 0$ 有 $x^TAx > 0$
2. 正惯性 = n
3. 存在可逆矩阵 D 使 D^TD
4. $A \simeq E$

5. 特值全大于零
6. 顺序主子式全大于零

A 正定必要

1. $a_{ij} > 0$
2. |A| > 0

13 合同

合同不改变正负惯性指数
合同的充要条件有相同的正负惯性指数
A B 合同则 r(A)=r(B) ,|A| |B| 同号

14 ???

$XTAX = 0 \rightarrow A^T = -A$