

## 1 常识

正交阵  $A^T A = A A^T = E, A^{-1} = A^T, |A|^2 = 1$

实对称  $A^T = A$

反对称  $A^T = -A$

A 为实矩阵, 若  $A^T A = 0$  则  $a_i = 0, A = 0$   $a_{ij} = A_{ij} \rightarrow A^* = A^T$

正交向量内积为 0

n 阶行列式全部展开式总共 n! 项, 每行取自不同行不同列的乘积

n ≥ 2 时, n! 是偶数

逆对角线正负号  $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$(A^*)^* = |A|^{n-2} A$

$(-A)^* = (-1)^{n-1} A^*$

$|2En| = 2^n$

$A + A^T$  是对称矩阵,  $A - A^T$  是反对称矩阵

已知  $a_{ij} = A_{ij}$ , 所以  $A^* = A^T$ ,

特征量不能为零

$r(A^T A) = r(A)$

可逆矩阵首先是方阵

$AP = B$  P 为 A 到 B 的过渡矩阵

## 2 合同

定义 C 可逆,  $B = C^T A C \rightarrow A \simeq B$

标准型只有平方项

规范型只有 0 1 -1

## 3 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-2} & \vdots & x_3^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

## 4 拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} O & A_{n \times n} \\ B_{m \times m} & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| |B|$$

$$\begin{vmatrix} A_{mm} & O \\ O & B_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A| |B|$$

$$A = \begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \ddots & & \\ A_n & & & \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_n^{-1} \\ & & \ddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix}$$

## 5 初等变换

单位矩阵经过一次初等变换称初等矩阵

初等矩阵都是可逆矩阵

可逆矩阵可表示一系列初等矩阵的乘积

## 6 向量组等价

等价向量组，相互线性表出

向量组和它的极大线性无关组是等价向量组

两向量组等秩  $\nleftrightarrow$  两向量组等价

向量组  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_s$  线性无关,  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_s, b$  相关,  $b$  可由  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_s$  线性表出, 表法唯一

向量组线性无关，增加一维的延伸向量组无关

延伸向量组相关，原向量组相关

延伸向量组相关，原向量组相关

含有零向量或成比例的向量组线性相关

## 7 矩阵等价

存在可逆矩阵  $P, Q$  使  $PAQ = B$ , 则  $A \cong B$

两个同型矩阵等价的充分必要条件是秩相等

## 8 相似

$$P^{-1}AP = B \rightarrow A \sim B$$

$A$  相似  $B \rightarrow r(A)=r(B), |A|=|B|$ , 特征多项式/特征值相同

对称矩阵的两个特征值对应的特征向量正交

$A$  是  $n$  阶对称矩阵, 必有正交矩阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda$

$\lambda$  是  $A$  的特征方程的  $k$  重根, 则矩阵  $A - \lambda E$  的秩  $R = n - k$ , 对应特征方程有  $k$  个线性无关特征向量

$A, B$  均是实对称矩阵,  $A, B$  相似的充分必要条件是  $A, B$  有相同的特征值

可相似对角化, 有不同的特征值

## 9 施密特正交化

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$$

$$\beta_n = \alpha_n - \frac{(\alpha_n, \beta_{n-1})}{(\beta_{n-1}, \beta_{n-1})} \beta_{n-1} - \frac{(\alpha_n, \beta_{n-2})}{(\beta_{n-2}, \beta_{n-2})} \beta_{n-2} - \cdots - \frac{(\alpha_n, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$$

## 10 迹

迹  $\text{Tr}$  方阵对角线所有元素之和

$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ ,  $\text{Tr}(ABC) \text{Tr}(BAC)$  增加  $C$  不成立

## 11 秩

设  $A$  为  $m \times n$  矩阵

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$$

$$AB = O \quad r(A) + r(B) \leq n$$

$$r(A) + r(B) \leq r \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \leq r(A) + r(B) + r(C)$$

$$r(A+B) \leq r(A|B) \leq r(A) + r(B)$$

$r(A) < n-1$ , 则  $|A|$  的全部代数余子式都为 0

$$r(A) = n-1, |A| = 0$$

$$|A^*| = |A|^{n-1}$$

$r(A) = r$  个独立未知量,  $n-r$  个自由未知量, 解向量

## 12 正定

A 实对称,

1. 必相似于对角阵, 且存在正交阵 Q,  $Q^{-1}AQ = Q^T A Q =$  对角阵
2. A 特征值为实数, 特征向量为实向量
3. 属于不同特征值的特征向量正交

A 正定时,  $kA, A^T, A^k, A^{-1}, A^*, f(A)$  系数大于零 都正定

A 正定  $\rightarrow$  A 实对称

$A^*$  正定  $\rightarrow$  A 正定反之不成立

任给二次型 f, 总有正交变换  $X=Py$ , 使 f 化标准型, 若  $A^T = A$ , 存在可逆变换  $C=E$  使 f 为标准型

$$\text{配方法} \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

A 正定充要

1. 对任意  $x \neq 0$  有  $x^T A x > 0$
2. 正惯性 = n
3. 存在可逆矩阵 D 使  $D^T D$
4.  $A \simeq E$

5. 特值全大于零

6. 顺序主子式全大于零

A 正定必要

1.  $a_{ij} > 0$

2.  $|A| > 0$

## 13 合同

合同不改变正负惯性指数

合同的充要条件有相同的正负惯性指数

A B 合同则  $r(A)=r(B)$  ,  $|A|$   $|B|$  同号

## 14 ???

$$XTAX = 0 \rightarrow A^T = -A$$