

1 常识

正交阵 $A^T A = A A^T = E$, $A^{-1} = A^T$, $|A|^2 = 1$

实对称 $A^T = A$

反对称 $A^T = -A$

A 为实矩阵, 若 $A^T A = 0$ 则 $a_i = 0$, $A = 0$

正交向量内积为 0

n 阶行列式全部展开式总共 $n!$ 项, 每行取自不同行不同列的乘积

$n \geq 2$ 时, $n!$ 是偶数

逆对角线正负号 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$(A^*)^* = |A|^{n-2} A$

$|2En| = 2^n$

$A + A^T$ 是对称矩阵, $A - A^T$ 是反对称矩阵

已知 $a_{ij} = A_{ij}$, 所以 $A^* = A^T$,

特征量不能为零

$r(A^T A) = r(A)$

可逆矩阵首先是方阵

2 合同

定义 C 可逆, $B = C^T A C$

标准型只有平方项

规范型只有 0 1 -1

3 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-2} & \vdots & x_3^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

4 拉普拉斯展开式

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} O & A_{n \times n} \\ B_{m \times m} & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| |B| \\
 & \begin{vmatrix} A_{mm} & O \\ O & B_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A| |B| \\
 & A = \begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & & \\ & & A_2 & \\ & & & \\ & \ddots & & \\ A_n & & & \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_n^{-1} \\ & & & \\ & & \ddots & \\ & & A_2^{-1} & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

5 初等变换

单位矩阵经过一次初等变换称初等矩阵

初等矩阵都是可逆矩阵

可逆矩阵可表示一系列初等矩阵的乘积

6 向量组等价

等价向量组，相互线性表出

向量组和它的极大线性无关组是等价向量组

向量组 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_s$ 线性无关, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_s, b$ 相关, b 可由 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_s$ 线性表出, 表法唯一

向量组线性无关, 增加一维的延伸向量组无关

延伸向量组相关, 原向量组相关

含有零向量或成比例的向量组线性相关

7 矩阵等价

存在可逆矩阵 PQ 使 $PAQ = B$, 则 $A \cong B$
 两个同型矩阵等价的充分必要条件是秩相等

8 相似

9 施密特正交化

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1 \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1 \\ \beta_n &= \alpha_n - \frac{(\alpha_n, \beta_{n-1})}{(\beta_{n-1}, \beta_{n-1})} \beta_{n-1} - \frac{(\alpha_n, \beta_{n-2})}{(\beta_{n-2}, \beta_{n-2})} \beta_{n-2} - \cdots - \frac{(\alpha_n, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1\end{aligned}$$

10 迹

迹 Tr 方阵对角线所有元素之和

$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, $\text{Tr}(ABC)\text{Tr}(BAC)$ 增加 C 不成立

11 秩

设 A 为 $m \times n$ 矩阵

$$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$$

$$AB=O \quad r(A)+r(B) \leq n$$

$$r(A) + r(B) \leq r \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \leq r(A) + r(B) + r(C)$$

$$r(A+B) \leq r(A|B) \leq r(A) + r(B)$$

$r(A) < n-1$, 则 $|A|$ 的全部代数余子式都为 0

$$|A^*| = |A|^{n-1}$$

$r(A)=r$ 个独立未知量, $n-r$ 个自由未知量, 解向量