1 常规解法

第一类解法，投影第二类解法，参数式

2 解析几何

曲线 Γ 在点 P 处的切向量为 $\tau = \left\{ \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} \right\}$

3 两异面直线的距离

$$d = \frac{(\tau_1 \times \tau_2) \cdot \overrightarrow{P_1P_2}}{\tau_1 \times \tau_2} = \frac{\begin{Vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} i & j & k \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{Vmatrix}}$$

4 平面曲线积分与路径无关

4.1 第一组

D 是平面有界闭区域，PQ 在 D 上连续

1. 沿任意一条全在 D 内的分段光滑闭曲线 L，有 $\oint Pdx + Qdy = 0$
2. $\int_L Pdx + Qdy$ 在 D 内与路径无关，只与 l 的起点和终点有关
3. 在 D 内存在可微的单值函数 u（x,y), 使 Pdx+Qdy 是 u（x,y）的全微分，即 du=Pdx+Qdy
4. 矢量函数 $V = P(x,y)i + Q(x,y)j$ 为某单值函数 u(x,y) 的梯度，即 $\mathbf{grad}u = V = P(x,y)i + Q(x,y)j$
5. Pdx+Qdy=0 为全微分方程

4.2 第二组

D 是平面单连通区域，P（x,y) Q(x,y) 在 D 上连续且具有一阶连续偏导数

1. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内处处成立
2. 沿 D 中任意分段光滑闭曲线 L 有 $\int_L Pdx + Qdy = 0$
3. $\int_L Pdx + Qdy$ 在 D 内与路径无关，只与 l 的起点和终点有关
4. 在 D 内存在可微的单值函数 u（x,y), 使 Pdx+Qdy 是 u（x,y）的全微分，即 du=Pdx+Qdy
5. 矢量函数 $V = P(x,y)i + Q(x,y)j$ 为某单值函数 u(x,y) 的梯度，即 $\mathbf{grad}u = V = P(x,y)i + Q(x,y)j$
6. Pdx+Qdy=0 为全微分方程

4.3 第三组

D 是平面有界区域，P（x,y) Q(x,y) 在 D 上连续且具有一阶连续偏导数

1. $\int_L Pdx + Qdy$ 在 D 内与路径无关，只与 l 的起点和终点有关
2. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内处处成立

4.4 四

与路径无关 $\longleftrightarrow$ 存在原函数

5 形心

$\bar{x} = \frac{\iint_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D \rho(x,y)d\sigma}$

6 惯性矩

$I_x = \iiint_\Omega (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dv$
$I_o = \iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dv$

7 重力

$F_x = Gm \iint_D \frac{\rho(x,y)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} d\sigma$

8 解题技巧

$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$

$$\int x^3\sqrt{1+x^2}dx$$

$$x = t^2$$

$$\int t\sqrt{1+t}dt$$

$\lim_{x\to 0 y\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$
$\lim_{x\to 0 y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = NOT\exists$
$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} =$ 平行四边行面积
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le R^2} (x^2+y^2+z^2)dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r^2 \sin\varphi dr = \frac{4}{5}\pi R^5$$

8.1 斯托克斯公式

斯托克斯公式 设 Ω 为空间某区域，Σ 为 Ω 内的分片光滑有向曲面片，l 为逐段光滑的 Σ 的边界，它的方向与 Σ 的外法向成右手系，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$ 与 $R(x,y,z)$ 在 Ω 内具有连续的一阶偏导数，则有斯托克斯公式：

$$\oint_l P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\text{（此为第二型曲面积分形式）}$$

$$=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\mathrm{d}S\text{（此为第一型曲面积分形式）}$$

$$=\iint_\Sigma\left(\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right),\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right),\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_S(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}^\circ\,\mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{A}=(P,Q,R)$，$\boldsymbol{n}^\circ=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为 Σ 在相应方向的单位法向量.

8.2 格林公式

2. 格林公式法

格林公式 设平面有界闭区域 D 由分段光滑闭曲线 L 围成，$P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上连续，且具有一阶连续偏导数，L 取正向，则

$$\oint_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma.$$

L 取正向，是指当一个人沿着

逆时针方向

8.3 高斯公式

投影时 Σ 上的任何两点的投影点不能重合,请回看.

2. 高斯公式法

高斯公式 设空间有界闭区域 Ω 由有向分片光滑闭曲面 Σ 围成,$P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$,$R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数,则有公式

$$\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v.$$

此外,根据两类曲面积分之间的关系,高斯公式也可表为

$$\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v,$$

其中,Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧,$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 Σ 上点 (x,y,z) 处的法向量的方