1. 点到直线

$$\frac{|AX_0+BX_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

2. 和差化积

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

3. 积化和差

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

4. 万能公式

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

5. 半角公式

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\left(\frac{1-cos\alpha}{2}\right)}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\left(\frac{1+cos\alpha}{2}\right)}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\left(\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}\right)}$$

6. f(×)关于x=T对称 充要条件 f(x)=f(2T-×) ；f(T+x)=f(T-x)
7. 奇函数与偶函数的表达
   1.1. 奇 F(x)=f(x)-f(-x)
   1.1. 偶 F(x)=f(x)+f(-x)
   1.1. 任意 f(x)=1/2[f(x)-f(-x)]+1/2 f(x)+f(-x)]
8. 最大值&最小值
   Max{f(x),g(x)}=1/2[f(x)+g(x) +|f(x)-g(x)|]
   Min{f(x),g(x)}=1/2[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]
9. f(x) g(x)互为反函数
   f(g(x))=x $\rightarrow$ g(f(x))

数列收敛于A,则任意子数列收剑于A
单调数列的某一子数列收敛于A,则该数列收敛于A
数列{2n}与{2n+1}都收敛于A,则数列必收敛于A

1. 单调有界数列必有极限

1. 连续的定义

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) - f(x) = 0$$

2. 常用等价无穷小 $x \to 0$
   $\sin x \sim x$; $\tan x \sim x$; $\arcsin x \sim x$; $\arctan x \sim x$; $\ln(1+x) \sim x$; $e^x - 1 \sim x$; $a^x - 1 \sim x \ln a$; $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$; $(1+x)^a - 1 \sim ax$
3. f(0)=1 时 等价无穷小

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(x)dt}{x} = 1$$

4. 极限比较

$$f(x) \geq g(x) \to \lim f(x) \geq \lim g(x)$$

$$\lim f(x) > \lim g(x) \to f(x) > g(x)$$

5. 敛散
   $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^{\alpha+1}} = \begin{cases} 0, (a < -1) \\ 1, (a = -1) \\ \infty, (a > -1) \end{cases}$

$$[u(x)v(x)w(x)]' = u'(x)v(x)w(x) + u(x)v'(x)w(x) + u(x)v(x)w'(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0 \ \leftrightarrow df(x,y) \equiv 0$$

1. 常数和基本初等函数的导数公式

(1) $(C)' = 0$, (2) $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$,

(3) $(\sin x)' = \cos x$, (4) $(\cos x)' = -\sin x$,

(5) $(\tan x)' = \sec^2 x$, (6) $(\cot x)' = -\csc^2 x$,

(7) $(\sec x)' = \sec x \tan x$, (8) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$,

(9) $(a^x)' = a^x \ln a \ (a>0, a \neq 1)$, (10) $(e^x)' = e^x$,

(11) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \ (a>0, a \neq 1)$, (12) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,

(13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, (14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

(15) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, (16) $(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

6. 球体积

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

7. 表面积

$$S = 4\pi R^2$$

1. 定积分定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right)(b-a)}{n}$$

1. 连续函数必有原函数
    1.1. 含有第一类间断点，无穷间断点的函数在包含间断点的区间没有原函数
    1.1. 跳跃间断点可以有原函数

1. 基本积分表

二、基本积分表

既然积分运算是微分运算的逆运算，那么很自然地可以从导数公式得到相应的积分公式.

例如，因为$\left(\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)'=x^{\mu}$，所以$\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$是$x^{\mu}$的一个原函数，于是

$$\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C\quad(\mu\neq-1).$$

类似地可以得到其他积分公式. 下面我们把一些基本的积分公式列成一个表，这个表通常叫做基本积分表.

① $\int k\mathrm{d}x=kx+C$（k 是常数），

② $\int x^{\mu}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$（$\mu\neq-1$），

③ $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$，△ $\ln|x|+C$.

④ $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C$，

⑤ $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$，

⑥ $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$，

⑦ $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$，

⑧ $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$，

⑨ $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$，

⑩ $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$，

⑪ $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$，

⑫ $\int e^x dx = e^x + C$，

⑬ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int cotx dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x dx = \ln|cscx - \cot x| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$$

1. 泰勒公式

   $e^{1+x} = e + ex + e\frac{x^2}{2!} + e\frac{x^3}{3!} + e\frac{x^4}{4!}$

【注 2】几个重要函数的麦克劳林展开式

①$e^u = 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \cdots + \frac{1}{n!}u^n + o(u^n)$. $\rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n!}u^k$

②$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(u^{2n+1})$. $\rightarrow \sum_{k=1}^{n}(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$

③$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!} + o(u^{2n})$. $\rightarrow \sum_{k=1}^{n}(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!}$

④$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + o(u^n)$. $\sum_{k=1}^{n}u^n$

⑤$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - \cdots + (-1)^n u^n + o(u^n)$. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^n u^n$

⑥$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \cdots + (-1)^n\frac{u^{n+1}}{n+1} + o(u^{n+1})$. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^n\frac{u^{n+1}}{n+1}$

⑦$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}u^n + o(u^n)$. $\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}u^n$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$\arcsin x =$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

2. 几个初等函数的n阶导数公式

【注】(1)几个初等函数的 n 阶导数公式.

$(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$； $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$；

$(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$；

$(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$；

$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} \quad (x>0)$；

$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (x>-1)$；

$[(x+x_0)^m]^{(n)} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(x+x_0)^{m-n}$；

$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$.

(2)根据以上所述，考生应掌握下面这样的计算题.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \text{ n为正偶数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} \text{ n为大于1的正奇数} \end{cases}$$

1. 经典不等式

$$e^x \geq x+1; x-1 \geq \ln x; \frac{1}{1+x} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

$$e^{\alpha x} \gg x^b \gg \ln^y x$$

$$2|ab| \leq a^2 + b^2$$

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

当 x>0,y>0,p>0,q>0,$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \to xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$$

$$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$$

$$当p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1时；\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right| \le \left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int_a^b |g(x)|^q dx\right]^{\frac{1}{q}}$$

1. 若$\int^{(n-1)}(x)$ 最多只有一个实零点,则f(x)最多只有n个不同实零点
2. $f'(x)\neq 0$ 且连续⇒ f(x)单调
3. 连续的**奇**函数的**一 切**原函数都是**偶**函数
4. 连续的**偶**函数的**仅有一个**原函数都是**奇**函数
5. 变限积分 存在必连续
6. 可积函数在区间内必有界 （ 二元也成立 ）
7. f(x)是以T为周期的可积函数

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$$

8. 积分递归解法

【注】若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，则有

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{令x=-t} \int_{a}^{-a}[-f(-t)]\mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} f(-x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x.$$

上述结果也可以利用下列命题得到：

定义在$[-a,a]$上任意函数，可以表示为一个奇函数与一个偶函数之和：

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)].$$

因为 $\int_{-a}^{a}[f(x)-f(-x)]\mathrm{d}x=0$，所以有

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x.$$

这就是使用方法三的实质.

9. 极值判定充分条件
   1. f '(x_0)左右异号→极值点
      $\begin{cases} f'=0 \\ f''(x_0)\neq 0 \end{cases} \rightarrow 极值点$
   2. 当$f^{(n)}(x_0)\neq 0$
      1. n为偶
         $f^{(n)}(x_0)\le 0 \rightarrow$ 极大值
         $f^{(n)}(x_0)\ge 0 \rightarrow$ 极小值

2. n为奇
   拐点

10. 多元函数极值与最值
    1.1. 二元函数取极值的必要条件 设z=f(x,y)在点(x_0, y_0) $\begin{cases}\text{一阶偏导数存在} \\ \text{取极值}\end{cases}$ 则，$\boxed{\text{f\_x\^{}'(x\_0,y\_0)=0 , f\_y\^{}'(x\_0,y\_0)=0}}$

2. 多元函数极值与最值问题的理论依据

(1)二元函数取极值的必要条件(类比一元函数).

设 $z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$$\begin{cases}\text{一阶偏导数存在,} \\ \text{取极值,}\end{cases}$ 则 $f'_x(x_0,y_0)=0, f'_y(x_0,y_0)=0.$

【注】该必要条件同样适用于三元及以上函数.

(2)二元函数取极值的充分条件.

$$\text{记}\begin{cases} f''_{xx}(x_0,y_0)=A, \\ f''_{xy}(x_0,y_0)=B, \\ f''_{yy}(x_0,y_0)=C, \end{cases} \text{则 } \Delta=B^2-AC \begin{cases} <0 \Rightarrow \text{极值} \begin{cases} A<0 \Rightarrow \text{极大值,} \\ A>0 \Rightarrow \text{极小值,} \end{cases} \\ >0 \Rightarrow \text{非极值,} \\ =0 \Rightarrow \text{方法失效,另谋他法.} \end{cases}$$

【注】该充分条件不适用于三元及以上函数.

11. 凹凸性定义
    1. 凹 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
    2. 凹 $f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$
12. 极值点与拐点不要求导数存在

两个偏导函数 $f'_x(x,y)$与$f'_y(x,y)$都在点(x_0,y_0)处连续 $\Rightarrow$ / $\nLeftarrow$ $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处可微 $\Rightarrow$ / $\nLeftarrow$ $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处连续

$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处可微 $\Downarrow$ / $\not\Uparrow$ $f'_x(x_0,y_0)$与$f'_y(x_0,y_0)$都存在

$f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处连续 $\not\Uparrow$ / $\not\Downarrow$ $f'_x(x_0,y_0)$与$f'_y(x_0,y_0)$都存在

13. 曲率半径

    $k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

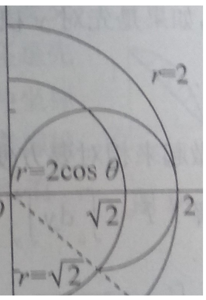
    R= $\frac{1}{k} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$
14. 弧长L=$\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta$
15. 曲边扇形面积 S=$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta |r_1^2(\theta) - r_2^2(\theta)| d\theta$
16. 极座标交换积分次续

5. 极坐标系下交换积分次序

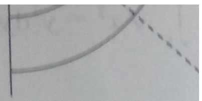
例 10.11 交换 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} rf(r,\theta)dr$ 的积分次序,其中 $f(r,\theta)$连续.

解 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} rf(r,\theta)dr = \iint_{D_1} rf(r,\theta)drd\theta$,

其中,D_1: $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\cos\theta$,如图 10-13 所示.



欲先积 θ,后积 r,用 $r=$常数穿过区域 D.



当 $0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}$ 时,圆弧 $r=$常数是从 $\theta=-\frac{\pi}{4}$ 进入区域 D,从 $r=2\cos\theta(\theta>0)$ 穿出区域 D;

图 10-13

当 $\sqrt{2}\leqslant r\leqslant 2$ 时,圆弧 $r=$常数是从 $r=2\cos\theta(\theta<0)$ 进入区域 D,从 $r=2\cos\theta(\theta>0)$ 穿出区域 D,所以换序以后的积分为

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{0}^{2\cos\theta}rf(r,\theta)dr=\int_{0}^{\sqrt{2}}dr\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{r}{2}}rf(r,\theta)d\theta+\int_{\sqrt{2}}^{2}dr\int_{-\arccos\frac{r}{2}}^{\arccos\frac{r}{2}}rf(r,\theta)d\theta.$$

4. 涉及二重积分概念的计算

17. 反常积分审敛

针对此类问题,我们需要掌握两个重要结论,并能够熟练地进行

(1)无穷区间的反常积分 $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{p}}$:在 $p>1$ 时收敛,在 $p\leqslant 1$ 时发散;

(2)无界函数的反常积分 $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^{p}}$(奇点 $x=0$):在 $p<1$ 时收敛,在 $p\geqslant 1$ 时发散.

18. 一阶微分方程

③一阶线性微分方程.

形如 $y'+p(x)y=q(x)$ 的方程,其中 $p(x),q(x)$ 为已知的连续函数.其计算公式为:

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)dx+C\right).$$

请大家一定要掌握公式的推导过程,这是一个很好的锻炼机会,不要错过.

推导计算公式 在等式两边同乘以 $e^{\int p(x)dx}$,得

$$e^{\int p(x)dx}\cdot y'+e^{\int p(x)dx}p(x)\cdot y=e^{\int p(x)dx}\cdot q(x),$$

$$\left(e^{\int p(x)dx}\cdot y\right)'=e^{\int p(x)dx}\cdot q(x),$$

积分,得

$$e^{\int p(x)dx}\cdot y=\int e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)dx+C,$$

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)dx+C\right).$$

2017-10-24 16:46

19. 一阶微分方程

当 $u=\frac{y}{x}\Rightarrow y=ux\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

解 实际上有下述定理,在做选择题时可以拿来用.

设 $p(x),q(x),f(x)(f(x)\neq0)$ 为连续函数,考虑二阶线性非齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \quad ①$$

与对应的二阶线性齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0. \quad ②$$

有下述论断:

(1)设 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 是方程①的 3 个解,a,b,c 是常数,并设

$$y=ay_1(x)+by_2(x)+cy_3(x), \quad ③$$

则方程③是方程①的解的充要条件是 $a+b+c=1$;方程③是方程②的解的充要条件是 $a+b+c=0$.

(2)设 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 是方程①的 3 个线性无关的解,a,b,c 中两个为任意常数,则方程③是方程①的通解的充要条件是 $a+b+c=1$;方程③是方程②的解的充要条件是 $a+b+c=0$.

(C)选项中 $C_1+C_2-C_1+1-C_2=1$,根据(2),故选(C).

4. 二阶常系数非齐次线性微分方程的特解

对于 $y''+py'+qy=f(x)$,考研大纲规定我们需要掌握以下两种情况:

(1)自由项 $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$ 时，特解要设定为 $\boxed{y^*=e^{\alpha x}Q_n(x)x^k}$，

其中，
$$\begin{cases} e^{\alpha x}\text{照抄}, \\ Q_n(x)\text{为 } x \text{ 的 } n \text{ 次一般多项式}, \\ k=\begin{cases} 0, & \alpha\neq\lambda_1, \alpha\neq\lambda_2, \\ 1, & \alpha=\lambda_1 \text{ 或 } \alpha=\lambda_2, \\ 2, & \alpha=\lambda_1=\lambda_2. \end{cases} \end{cases}$$

(2)自由项 $f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$ 时，特解要设定为

$$\boxed{y^*=e^{\alpha x}[Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_l^{(2)}(x)\sin\beta x]x^k},$$

其中，
$$\begin{cases} e^{\alpha x}\text{照抄}, \\ l=\max\{m,n\}, Q_l^{(1)}(x), Q_l^{(2)}(x)\text{分别为 } x \text{ 的两个不同的 } l \text{ 次一般多项式}, \\ k=\begin{cases} 0, \alpha\pm\beta i \text{ 不是特征根}, \\ 1, \alpha\pm\beta i \text{ 是特征根}. \end{cases} \end{cases}$$

则 $y_1^*(x)+y_2^*(x)$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y$ …

3. 二阶常系数齐次线性微分方程的通解

对于 $y''+py'+qy=0$，其对应的特征方程为 $\lambda^2+p\lambda+q=0$，求其特征根，有以下三种情况请大家牢记

以下 C_1, C_2 为任意常数.

(1)若 $p^2-4q>0$，设 λ_1, λ_2 是特征方程的两个不等实根，即 $\lambda_1\neq\lambda_2$，可得其通解为

$$\boxed{y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}}.$$

(2)若 $p^2-4q=0$，设 λ_1, λ_2 是特征方程的两个相等的实根，即二重根，令 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，可得其通解为

$$\boxed{y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}}.$$

(3)若 $p^2-4q<0$，设 $\alpha\pm\beta i$ 是特征方程的一对共轭复根，可得其通解为

$$\boxed{y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)}.$$

隐藏 [comment]: <> (This is a comment, it will not be included) [comment]: <> (in the output file unless you use it in) [comment]: <> (a reference style link.) [//]: <> (This is also a comment.) [//]: # (This may be the most platform independent comment)