线性代数

2017年9月11日 16:50

正交阵 $A^TA=AA^T=E, A^{-1}=A^T$

实对称 $A^T=A$

反对称 $A^T=-A$

A实矩阵 $A^TA=0,a_i=0,A=O$

正交向量 内积为零

$$[A\xi_1, A\xi_2, A\xi_3] = A[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$$

合同 若有可逆矩阵C,使$B=C^TAC$,

标准型 只含有平方项

规范形 只有1,0,-1

范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} x_j - x_i)$$

拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} O & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

$$\begin{vmatrix} A_{m\times m} & O \\ O & B_{n\times n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

克拉默法则 方程根与 | A | 的关系

n阶行列式全部展开式总共n!项

每项是取自不同行不同列的乘积

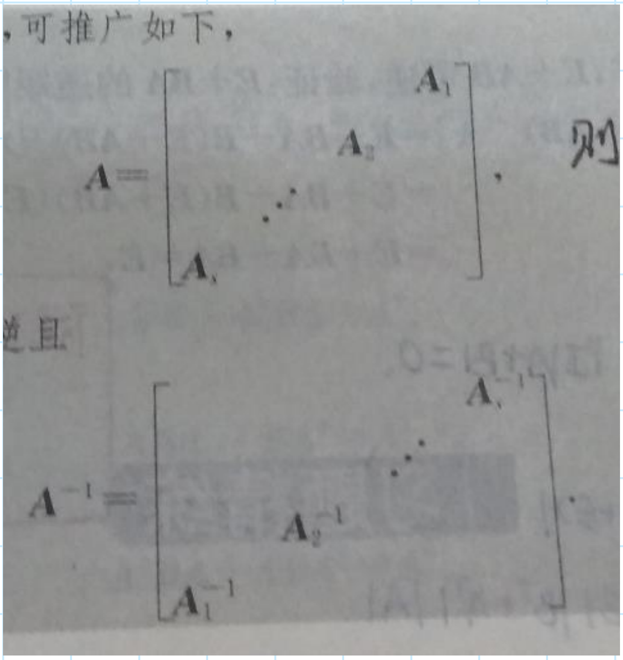
n!是偶数,n≥2时

逆对角线正负号 $(-1)^{n(n-1)/2}$

? $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

$A+A^T$对称矩阵 $A-A^T$反对称\

对角阵乘对角阵可交换



，可推广如下，

$$A=\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_s & & & \end{bmatrix}，则$$

逆且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{n} = \begin{bmatrix} A^{n} & O \\ O & B^{n} \end{bmatrix}$$

单位矩阵经过一次初等变换称初等矩阵

初等矩阵都是可逆矩阵,

可逆矩阵可表示一系列初等矩阵的乘积

等价向量组，相互线性表出

向量组和它的极大线性无关组是等价向量组

向量组$a_1,a_2,a_3...a_s$线性无关，$a_1,a_2,a_3...a_s$, b相关，b可由$a_1,a_2,a_3...a_s$线性表出，表法唯一

向量组线性无关，增加一维的廷伸向量组无关

廷伸向量组相关，原向量组相关

含有零向量或成比例的向量组线性相关

存在可逆矩阵PQ使PAQ=B,AB等价$A\cong B$

两个同型矩阵等价的充分必要条件是秩相等

4. 施密特标准正交化（又称正交规范化）过程

线性无关向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的标准正交化公式（又称正交规范化）为

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,$$

$$\cdots$$

$$\boldsymbol{\beta}_n=\boldsymbol{\alpha}_n-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_{n-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{n-1},\boldsymbol{\beta}_{n-1})}\boldsymbol{\beta}_{n-1}-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_{n-2})}{(\boldsymbol{\beta}_{n-2},\boldsymbol{\beta}_{n-2})}\boldsymbol{\beta}_{n-2}-\cdots-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,$$

得到的 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是正交向量组.

将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 单位化，得 $\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|},\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|},\cdots,\boldsymbol{\eta}_n=\frac{\boldsymbol{\beta}_n}{\|\boldsymbol{\beta}_n\|}$，则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 是一组标准正交向量组.

迹Tr 方阵对角线所有元素之和/

Tr(AB)=Tr(BA) , Tr(ABC)≠Tr(BAC)_增加C不成立

设A为m*n矩阵

r(AB)<=min{r(A),r(B)}

AB=O r(A)+r(B)<=n

$r(A)+r(B)\le r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}\le r(A)+r(B)+r(C)$

r(A+B)<=r(A|B)<=r(A)+r(B)

r(A)<n-1,则|A|的全部代数余子式都为0

$|A^*|=|A|^{n-1}$

r(A)=r 个 独立未知量

n-r 个 自由未知量,解向量

若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

有解 $\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T$，即

$$a_{i1}b_1+a_{i2}b_2+\cdots+a_{in}b_n=0 \quad (i=1,2,\cdots,m).$$

记 $\boldsymbol{\alpha}_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}](i=1,2,\cdots,m)$，上式即为

$$\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\beta}=0 \quad (i=1,2,\cdots,m),$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的行向量与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量是正交向量，将式（*）两边转置，得

$$\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}_i^T=0,$$

即将解向量作齐次方程组的行向量时，$\boldsymbol{A}$ 的行向量即是该方程组的解向量.

A相似B　r(A)=r(B),|A|=|B|,特征多项式/特征值相同

对称矩阵的两个特征值对应的特征向量正交

A是n阶对称矩阵,必有正交矩阵P,使$P^{-1}AP=P^{T}AP=\Lambda$

λ是A的特征方程的k重根,则矩阵A-λE的秩R=n-k,对应特征方程有k个线性无关特征向量

A、B均是实对称矩阵，A、B相似的充分必要条件是A、B有相同的特征值

可相似对角化， 有不同的特征值

A	KA	A^*	$f(A)$
λ	$K\lambda$	$\frac{\lvert A\rvert}{\lambda}$	$f(\lambda)$
ξ	ξ	ξ	ξ

A实对称 ，

必相似于对角阵，且存在正交阵Q，$Q^{-1}AQ=Q^{T}AQ$=对角阵

A特征值为实数，特征向量为实向量

属于不同特征值的特征向量正交

【注】 同理可以证明：n 阶矩阵 A 正定时，与 A 有关的矩阵 $kA(k>0)$，A^{T}，A^{k}，A^{-1}，A^{*}，$f(A)$（其中，$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 是多项式，$a_i>0,i=0,1,2,\cdots,n$）等均是正定矩阵；请读者证明.

A正定->A实对称

*A*正定-〉A正定　反之不成立*

任给二次型f ,总有正交变换X=Py,使f化标准型,若A^{T}=A,存在可逆变换×=Cz使f为标准型

【注】 (1)用配方法化二次型为标准形、规范形，若有平方项，应将平方项及其有关混合项配成完全平方(如上例)，没有平方项时，作可逆线性变换 $\begin{cases}x_1=y_1+y_2,\\x_2=y_1-y_2,\\x_3=y_3,\end{cases}$ 使其出现平方项，然后再配完全平方(如本例)。这样任何二次型，总可以用配方法化成标准形、规范形，且所作变换均是可逆线性变换。用矩阵的语言可表达为：任何实对称矩阵，必存在可逆阵 C，使得 $C^{T}AC=\Lambda$，其中 Λ 是对角阵，或对角元素只取 1，-1，0 的对角阵.

(2)配方是中学已经掌握的内容，并不困难。但为我们提供了①所作的可逆线性变换；②A 合同的对角阵；③二次型(或 A)的秩；④正、负惯性指数；⑤是否正定等二次型的重要信息，故在求上述问题时，别忘有一招是用配方法.

1. 二次型正定的充要条件

n 元二次型 $f=x^{T}Ax$ 正定 $\Leftrightarrow$ 对任意 $x\neq 0$，有 $x^{T}Ax>0$(定义) $\Leftrightarrow f$ 的正惯性指数 $p=n\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 D，使 $A=D^{T}D\Leftrightarrow A\simeq E\Leftrightarrow A$ 的特征值 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow A$ 的全部顺序主子式 >0.

2. 二次型正定的必要条件

(1)$a_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n)$；(2)$|A|>0$.

变的，p 称为正惯性指数，q 称为负惯性指数.

【注】 (1)若二次型的秩为 r，则 $r=p+q$，故知合同变换不改变正、负惯性指数；(2)两个二次型(或实对称阵)合同的充要条件是有相同的正、负惯性指数，或有相同的秩及正(或负)惯性指数.

A B 合同则

r(A) = r(B) |A| |B| 同号