

1 数列敛散性

数列收敛于A,则任意子数列收敛于A
 单调数列的某一子数列收敛于A,则该数列收敛于A
 数列 $2n$ 与 $2n+1$ 都收敛于A,则数列必收敛于A

2 连续的定义

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) - f(x) = 0$$

3 常用等价无穷小

$$x \rightarrow 0 \sin x \sim x ; \tan x \sim x ; \arcsin x \sim x ; \arctan x \sim x ; \ln(1+x) \sim x$$

$$; e^x - 1 \sim x ; a^x - 1 \sim x \ln a ; 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 ; (1+x)^a - 1 \sim ax$$

$f(0)=1$ 时等价无穷小

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t e^t = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$$

$$(x^x)' = x^x(1 + \ln x)$$

4 极限比较

$$f(x) \geq g(x) \rightarrow \lim f(x) \geq \lim g(x)$$

$$\lim f(x) > \lim g(x) \rightarrow f(x) > g(x)$$

5 敛散

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^{+1}} = \begin{cases} 0, & (a < -1) \\ 1, & (a = -1) \\ \infty, & (a > -1) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0 \leftrightarrow df(x, y) \equiv 0$$

6 基本函数求导公式

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

7 球体积&表面积

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$S = 4\pi R^2$$

8 定积分定义

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{f(a + \frac{b-a}{n} i)(b-a)}{n}$$

9 连续函数必有原函数

含有第一类间断点，无穷间断点的函数在包含间断点的区间没有原函数

跳跃间断点可以有原函数

10 基本积分表

二、基本积分表

既然积分运算是微分运算的逆运算,那么很自然地可以从导数公式得到相应的积分公式.

例如,因为 $\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)' = x^\mu$,所以 $\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$ 是 x^μ 的一个原函数,于是

$$\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1).$$

类似地可以得到其他积分公式.下面我们把一些基本的积分公式列成一个表,这个表通常叫做基本积分表.

$$① \int kdx = kx + C \quad (k \text{ 是常数}),$$

$$② \int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1),$$

$$③ \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad \ln|x| + C.$$

$$④ \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C,$$

$$⑤ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$⑥ \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$⑦ \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$⑧ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C,$$

· 188 ·

$$⑨ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C,$$

$$⑩ \int \sec x \tan x dx = \sec x + C,$$

$$⑪ \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C,$$

$$⑫ \int e^x dx = e^x + C,$$

$$⑬ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C. \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$= \int \frac{\cos t dt}{\sin t + \cos t} = \frac{1}{2} \int \frac{\cos t + \sin t + \cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln |\sin t + \cos t| + C$$

当 $x=a+b-t$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(a+b-t) d(a+b-t) = \int_a^b f(a+b-t) dt = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}[f(x) + f(a+b-x)]dx$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

11 泰勒公式

$$e^{1+x} = e + ex + e \frac{x^2}{2!} + e \frac{x^3}{3!} + e \frac{x^4}{4!}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} \sim e - \frac{e}{2}x + \frac{11}{24}ex^2 + o(x^2)$$

【注 2】 几个重要函数的麦克劳林展开式

$$\begin{aligned} \textcircled{1} e^u &= 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \dots + \frac{1}{n!}u^n + o(u^n). \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} u^k \\ \textcircled{2} \sin u &= u - \frac{u^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(u^{2n+1}). \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \textcircled{3} \cos u &= 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!} + o(u^{2n}). \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{u^{2k}}{(2k)!} \\ \textcircled{4} \frac{1}{1-u} &= 1 + u + u^2 + \dots + u^n + o(u^n). \sum_{k=0}^{\infty} u^k \\ \textcircled{5} \frac{1}{1+u} &= 1 - u + u^2 - \dots + (-1)^n u^n + o(u^n). \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u^k \\ \textcircled{6} \ln(1+u) &= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1} + o(u^{n+1}). \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{u^k}{k} \\ \textcircled{7} (1+u)^\alpha &= 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} u^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} u^n + o(u^n). \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+k)}{n!} u^n \end{aligned}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

12 几个初等函数的n阶导数公式

【注】(1) 几个初等函数的 n 阶导数公式.

$$(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n; \quad (e^x)^{(n)} = e^x;$$

$$(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos\left(kx + n \cdot \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \quad (x > 0);$$

$$[\ln(1+x)]^{(n)} = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (x > -1);$$

$$[(x+x_0)^m]^{(n)} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(x+x_0)^{m-n};$$

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}.$$

(2) 根据以上所述, 考生应掌握下面这样的计算题.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & n \text{ 为正偶数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} & n \text{ 为大于1的正奇数} \end{cases}$$

13 经典不等式

$$e^x \geq x + 1; x - 1 \geq \ln x; \frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

$$e^x \gg x^b \gg \ln^y x$$

$$2|ab| \leq a^2 + b^2$$

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

当 $x \geq 0, y \geq 0, p \geq 0, q \geq 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \rightarrow xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$$

当 $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 时; $\left| \int_a^b f(x) \cdot g(x)dx \right| \leq \left[\int_a^b |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int_a^b |g(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}}$

14 定理

- 若 $f^{(n-1)}(x)$ 最多只有一个实零点, 则 $f(x)$ 最多只有 n 个不同实零点
- $f^2(x) \neq 0$ 且连续 $f(x)$ 单调
- 连续的**奇**函数的**一切**原函数都是**偶**函数
- 连续的**偶**函数的**仅有**一个**原函数都是**奇**函数
- 可积函数在区间内必有界 (二元也成立)
- $f(x)$ 是以 T 为周期的可积函数

15 常见正弦积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$$

16 积分递归解法

【注】若 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续，则有

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &\stackrel{x = -t}{=} \int_a^{-a} [-f(-t)] dt = \int_{-a}^a f(-t) dt = \int_{-a}^a f(-x) dx \\ \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a [f(x) + f(-x)] dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx. \end{aligned}$$

上述结果也可以利用下列命题得到：

定义在 $[-a, a]$ 上任意函数，可以表示为一个奇函数与一个偶函数之和：

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)] + \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)].$$

因为 $\int_{-a}^a [f(x) - f(-x)] dx = 0$ ，所以有

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a [f(x) + f(-x)] dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx.$$

这就是使用方法三的实质。

17 极值判定充分条件

$f'(x_0)$ 左右异号 \rightarrow 极值点

$$f' = 0 \tag{1}$$

$$f''(x_0) \neq 0 \tag{2}$$

\rightarrow 极值点

当 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

1. n 为偶

$f^{(n)}(x_0) \leq 0 \rightarrow$ 极大值

$f^{(n)}(x_0) \geq 0 \rightarrow$ 极小值

2. n 为奇

拐点

18 多元函数极值与最值

1. 二元函数取极值的必要条件设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0)

$$\text{一阶偏导数存在} \quad (3)$$

$$\text{取极值} \quad (4)$$

则, $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$

2. 多元函数极值与最值问题的理论依据

(1) 二元函数取极值的必要条件(类比一元函数).

设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) {一阶偏导数存在, 则 $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$.
取极值,

【注】该必要条件同样适用于三元及以上函数.

(2) 二元函数取极值的充分条件.

$$\begin{aligned} &\text{记 } \begin{cases} f''_{xx}(x_0, y_0) = A, \\ f''_{xy}(x_0, y_0) = B, \\ f''_{yy}(x_0, y_0) = C, \end{cases} \text{ 则 } \Delta = B^2 - AC \end{aligned}$$

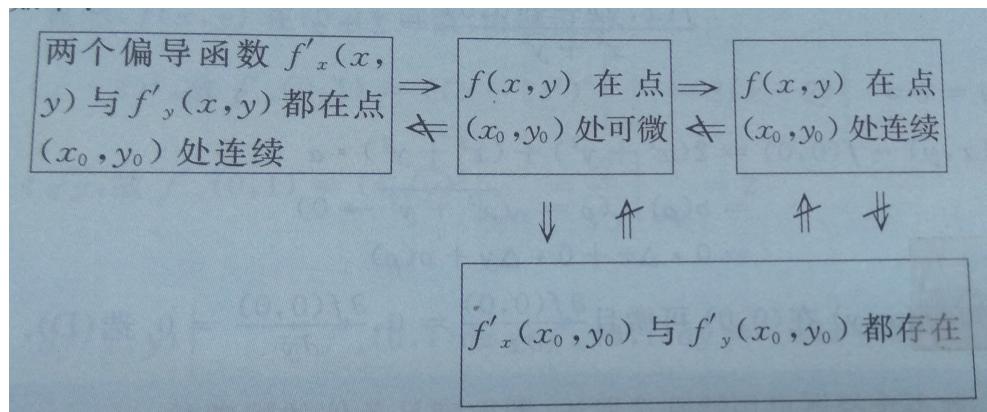
$\begin{cases} < 0 \Rightarrow \text{极值} \\ > 0 \Rightarrow \text{非极值} \end{cases}$	$\begin{cases} A < 0 \Rightarrow \text{极大值}, \\ A > 0 \Rightarrow \text{极小值}, \\ = 0 \Rightarrow \text{方法失效, 另谋他法.} \end{cases}$
---	--

【注】该充分条件不适用于三元及以上函数.

19 凸凹性定义

1. 凹 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
1. 凹 $f[x_1 + (1-\lambda)x_2] \leq f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$

20 极值点与拐点不要求导数存在



21 曲率半径

$$k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad R = \frac{1}{k} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

22 弧长

$$L = \int \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta$$

23 曲边扇形面积

$$S = \frac{1}{2} \int |r_1^2(\theta) - r_2^2(\theta)| d\theta$$

24 极坐标变换积分次续

5. 极坐标系下交换积分次序

例 10.11 交换 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} rf(r, \theta) dr$ 的积分次序, 其中 $f(r, \theta)$ 连续,

$$\text{解 } \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} rf(r, \theta) dr = \iint_D rf(r, \theta) dr d\theta,$$

其中, $D: -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}, 0 < r < 2\cos\theta$, 如图 10-13 所示.

欲先积 θ , 后积 r , 用 $r=$ 常数穿过区域 D .

当 $0 < r \leq \sqrt{2}$ 时, 圆弧 $r=$ 常数是从 $\theta = -\frac{\pi}{4}$ 进入区域 D , 从 $\theta = 2\cos\theta$ 穿出区域 D .

穿出区域 D :

当 $\sqrt{2} \leq r \leq 2$ 时, 圆弧 $r=$ 常数是从 $r = 2\cos\theta$ ($\theta < 0$) 进入区域 D , 从 $r = 2\cos\theta$ ($\theta > 0$) 穿出区域 D , 所以换序以后的积分为

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} rf(r, \theta) dr = \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{r}{2}} rf(r, \theta) d\theta + \int_{\sqrt{2}}^2 dr \int_{-\arccos\frac{r}{2}}^{\arccos\frac{r}{2}} rf(r, \theta) d\theta.$$

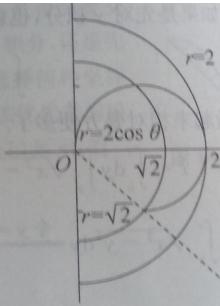


图 10-13

25 反常积分审敛

- (1) 无穷区间的反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$: 在 $p > 1$ 时收敛, 在 $p \leq 1$ 时发散;
- (2) 无界函数的反常积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ (奇点 $x = 0$): 在 $p < 1$ 时收敛, 在 $p \geq 1$ 时发散.

26 一阶微分方程

③一阶线性微分方程.

形如 $y' + p(x)y = q(x)$ 的方程, 其中 $p(x), q(x)$ 为已知的连续函数. 其计算公式为:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + C \right).$$

请大家一定要掌握公式的推导过程, 这是一个很好的锻炼机会, 不要错过.

推导计算公式 在等式两边同乘以 $e^{\int p(x)dx}$, 得

$$e^{\int p(x)dx} \cdot y' + e^{\int p(x)dx} p(x) \cdot y = e^{\int p(x)dx} \cdot q(x),$$

$$\left(e^{\int p(x)dx} \cdot y \right)' = e^{\int p(x)dx} \cdot q(x),$$

$$e^{\int p(x)dx} \cdot y = \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + C,$$

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + C \right).$$

积分, 得

2017-10-24 16:46

27 一阶微分方程

解 实际上有下述定理,在做选择题时可以拿来用.

设 $p(x), q(x), f(x)$ 为连续函数, 考虑二阶线性非齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

与对应的二阶线性齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

有下述论断:

(1) 设 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 是方程①的 3 个解, a, b, c 是常数, 并设

$$y = ay_1(x) + by_2(x) + cy_3(x),$$

则方程③是方程①的解的充要条件是 $a+b+c=1$; 方程③是方程②的解的充要条件是 $a+b+c=0$.

(2) 设 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 是方程①的 3 个线性无关的解, a, b, c 中两个为任意常数, 则方程③是方程①的解的充要条件是 $a+b+c=1$; 方程③是方程②的解的充要条件是 $a+b+c=0$.

通解的充要条件是 $a+b+c=1$; 方程③是方程②的解的充要条件是 $a+b+c=0$.

(C) 选项中 $C_1 + C_2 - C_3 + 1 - C_4 = 1$, 根据(2), 故选(C).

4. 二阶常系数非齐次线性微分方程的特解

对于 $y'' + py' + qy = f(x)$, 考研大纲规定我们需要掌握以下两种情况:

(1) 自由项 $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ 时, 特解要设定为 $y^* = e^{\alpha x}Q_n(x)x^k$,

其中,

$$\begin{cases} e^{\alpha x} \text{ 照抄}, \\ Q_n(x) \text{ 为 } x \text{ 的 } n \text{ 次一般多项式}, \\ k = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \lambda_1, \alpha \neq \lambda_2, \\ 1, & \alpha = \lambda_1 \text{ 或 } \alpha = \lambda_2, \\ 2, & \alpha = \lambda_1 = \lambda_2. \end{cases} \end{cases}$$

(2) 自由项 $f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos \beta x + P_n(x)\sin \beta x]$ 时, 特解要设定为

其中,

$$\begin{cases} e^{\alpha x} \text{ 照抄}, \\ l = \max\{m, n\}, Q_l^{(1)}(x), Q_l^{(2)}(x) \text{ 分别为 } x \text{ 的两个不同的 } l \text{ 次一般多项式}, \\ k = \begin{cases} 0, & \alpha \pm \beta i \text{ 不是特征根}, \\ 1, & \alpha \pm \beta i \text{ 是特征根}. \end{cases} \end{cases}$$

则 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 是 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的一个特解.

3. 二阶常系数齐次线性微分方程的通解

对于 $y'' + py' + qy = 0$, 其对应的特征方程为 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, 求其特征根, 有以下三种情况:

以下 C_1, C_2 为任意常数.

(1) 若 $p^2 - 4q > 0$, 设 λ_1, λ_2 是特征方程的两个不等实根, 即 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 可得其通解为

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

(2) 若 $p^2 - 4q = 0$, 设 λ_1, λ_2 是特征方程的两个相等的实根, 即二重根, 令 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, 可得其通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}.$$

(3) 若 $p^2 - 4q < 0$, 设 $\alpha \pm \beta i$ 是特征方程的一对共轭复根, 可得其通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$