# 1 常识

$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}=\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}$
$\int_0^x \frac{1}{1+t^3}dt=\int_0^x \frac{1-t^2+t^2}{1+t^3}dt$
$\ln n \ll n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$

# 2 数列敛散性

数列收敛于 A, 则任意子数列收剑于 A
单调数列的某一子数列收敛于 A, 则该数列收敛于 A
数列 2n 与 2n+1 都收敛于 A, 则数列必收敛于 A

# 3 连续的定义

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$
$$\lim_{\Delta\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)-f(x)=0$$

# 4 常用等价无穷小

$x\to 0$ $\sin x\sim x$ ; $\tan x\sim x$ ; $\arcsin x\sim x$ ; $\arctan x\sim x$ ; $\ln(1+x)\sim x$ ;
$e^x-1\sim x$ ; $a^x-1\sim x\ln a$ ; $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$ ; $(1+x)^a-1\sim ax$

f(0)=1 时等价无穷小

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x)dt}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0} x\ln x=0$$
$$\lim_{t\to 0} te^t=0$$
$$\lim_{x\to 0^+} x^x=1$$
$$(x^x)'=x^x(1+\ln x)$$

## 5 极限比较

$$f(x) \geq g(x) \rightarrow \lim f(x) \geq \lim g(x)$$
$$\lim f(x) > \lim g(x) \rightarrow f(x) > g(x)$$

## 6 函数敛散

$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^{+1}} = \begin{cases} 0, (a < -1) \\ 1, (a = -1) \\ \infty, (a > -1) \end{cases}$

正项级数 Un 收敛 $Un^2$ 收敛

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n{}^2$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 绝对收敛（$\left|\frac{u_n}{n}\right| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + \frac{1}{n^2})$）

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0 \ \leftrightarrow df(x, y) \equiv 0$$

## 7 敛散比较

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = p$

## 8 基本函数求导公式

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

## 9 球体积 & 表面积

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$
$$S = 4\pi R^2$$

# 10 定积分定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)(b-a)}{n}$$

# 11 连续函数必有原函数

含有第一类间断点，无穷间断点的函数在包含间断点的区间没有原函数
跳跃间断点可以有原函数

# 12 基本积分表

## 二、基本积分表

既然积分运算是微分运算的逆运算，那么很自然地可以从导数公式得到相应的积分公式.

例如，因为$\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)'=x^\mu$，所以$\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$是$x^\mu$的一个原函数，于是

$$\int x^\mu \mathrm{d}x=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C \quad (\mu\neq -1).$$

类似地可以得到其他积分公式. 下面我们把一些基本的积分公式列成一个表，这个表通常叫做基本积分表.

① $\int k\mathrm{d}x=kx+C$ （$k$ 是常数），

② $\int x^\mu \mathrm{d}x=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$ （$\mu\neq -1$），

③ $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$， △ $\ln|x|+C$.

④ $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C$，

⑤ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$，

⑥ $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$，

⑦ $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$，

⑧ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int \sec^2 x\mathrm{d}x=\tan x+C$，



⑨ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=\int \csc^2 x\mathrm{d}x=-\cot x+C$，

⑩ $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x=\sec x+C$，

⑪ $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x=-\csc x+C$，

⑫ $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$，

⑬ $\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C$. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$

$$= \int \frac{\cos t dt}{\sin t + \cos t} = \frac{1}{2} \int \frac{\cos t + \sin t + \cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln|\sin t + \cos t| + C$$

当 x=a+b-t

$\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(a+b-t)d(a+b-t) = \int_a^b f(a+b-t)dt = \int_a^b f(a+b-x)dx$

$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}[f(x) + f(a+b-x)]dx$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int cotx dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

$$\int \csc x dx = \ln|cscx - \cot x| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

# 13 泰勒公式

$e^{1+x} = e + ex + e\frac{x^2}{2!} + e\frac{x^3}{3!} + e\frac{x^4}{4!}$

$(1+x)^{\frac{1}{x}} \sim e - \frac{e}{2}x + \frac{11}{24}ex^2 + o(x^2)$

【注 2】几个重要函数的麦克劳林展开式

①$e^u=1+u+\frac{1}{2!}u^2+\cdots+\frac{1}{n!}u^n+o(u^n)$. $\rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n!}u^k$

②$\sin u=u-\frac{u^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(u^{2n+1})$. $\rightarrow \sum_{k=1}^{n}(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$

③$\cos u=1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!}+o(u^{2n})$. $\rightarrow \sum_{k=1}^{n}(-1)^n\frac{u^{2n}}{(2n)!}$

④$\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+\cdots+u^n+o(u^n)$. $\sum_{k=1}^{n}u^n$

⑤$\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-\cdots+(-1)^n u^n+o(u^n)$. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^n u^n$

⑥$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{u^{n+1}}{n+1}+o(u^{n+1})$. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^n\frac{u^{n+1}}{n+1}$

⑦$(1+u)^\alpha=1+\alpha u+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}u^n+o(u^n)$. $\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}u^n$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

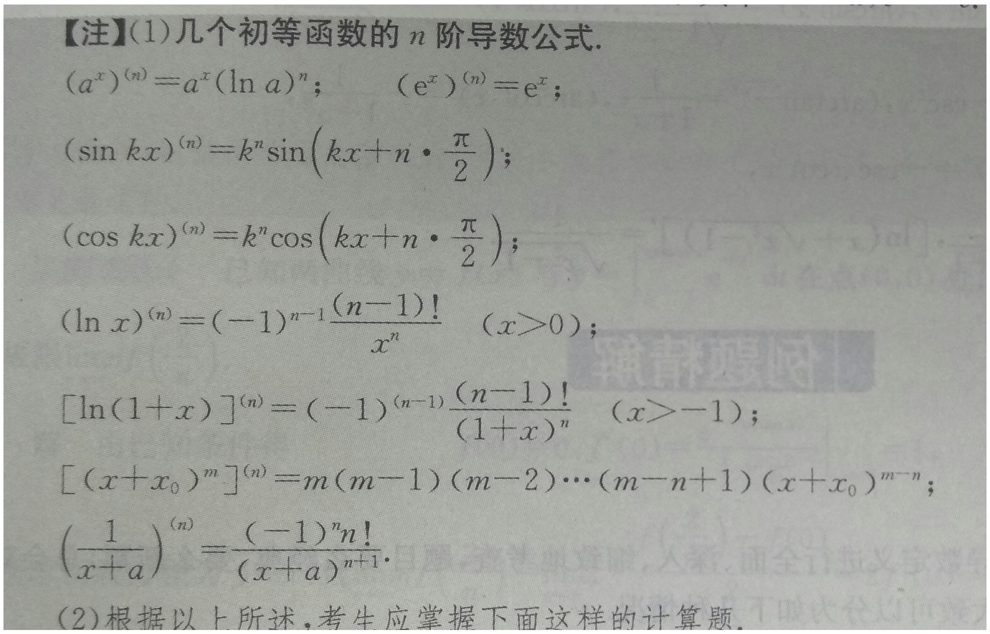
$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

$$\arcsin x = x+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$$

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

## 14 几个初等函数的 n 阶导数公式



**【注】**(1)几个初等函数的 $n$ 阶导数公式.

$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n$; $(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$;

$(\sin kx)^{(n)}=k^n\sin\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$;

$(\cos kx)^{(n)}=k^n\cos\left(kx+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$;

$(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}\quad(x>0)$;

$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\quad(x>-1)$;

$[(x+x_0)^m]^{(n)}=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(x+x_0)^{m-n}$;

$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$.

(2)根据以上所述，考生应掌握下面这样的计算题.

## 15 经典不等式

$$e^x \geq x+1; x-1 \geq \ln x; \frac{1}{1+x} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$
$$e^t + e^{-t} \geq 2 + t^2$$

$$e^x \gg x^b \gg \ln^y x$$

$$2\,|ab| \leq a^2 + b^2$$

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|$$

$$||a| - |b|| \leq |a-b|$$

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

当 x>0,y>0,p>0,q>0,$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \to xy \leq \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$$

$$[\int_a^b f(x)g(x)dx]^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$$

当$p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$时；$\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right| \leq \left[\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right]^{\frac{1}{q}}$

# 16 定理

若 $\int^{(n-1)}(x)$ 最多只有一个实零点, 则 f(x) 最多只有 n 个不同实零点

$f\ (x)$ 0 且连续 f(x) 单调

连续的 ** 奇 ** 函数的 ** 一切 ** 原函数都是 ** 偶 ** 函数

连续的 ** 偶 ** 函数的 ** 仅有一个 ** 原函数都是 ** 奇 ** 函数

可积函数在区间内必有界（二元也成立）

f(x) 是以 T 为周期的可积函数

# 17 常见正弦积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$$

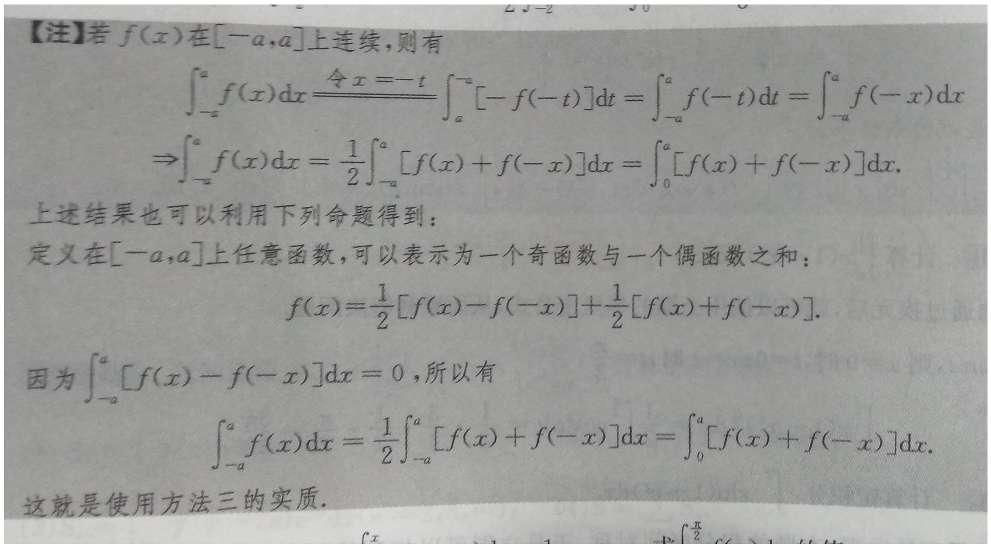
$$\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta = \begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \text{ n 为正偶数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} \text{ n 为大于 1 的正奇数} \end{cases}$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

# 18 积分递归解法



【注】若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，则有

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令 } x=-t} \int_{a}^{-a}[-f(-t)]\mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} f(-x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x.$$

上述结果也可以利用下列命题得到：

定义在 $[-a,a]$ 上任意函数，可以表示为一个奇函数与一个偶函数之和：

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)].$$

因为 $\int_{-a}^{a}[f(x)-f(-x)]\mathrm{d}x = 0$，所以有

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x.$$

这就是使用方法三的实质.

# 19 极值判定充分条件

$f'(x_0)$ 左右异号 $\rightarrow$ 极值点

$$f' = 0 \tag{1}$$

$$f''(x_0) \neq 0 \tag{2}$$

$\rightarrow$ 极值点

当 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

1. n 为偶

$f^{(n)}(x_0) \leq 0 \rightarrow$ 极大值

$f^{(n)}(x_0) \geq 0 \rightarrow$ 极小值

2. n 为奇

拐点

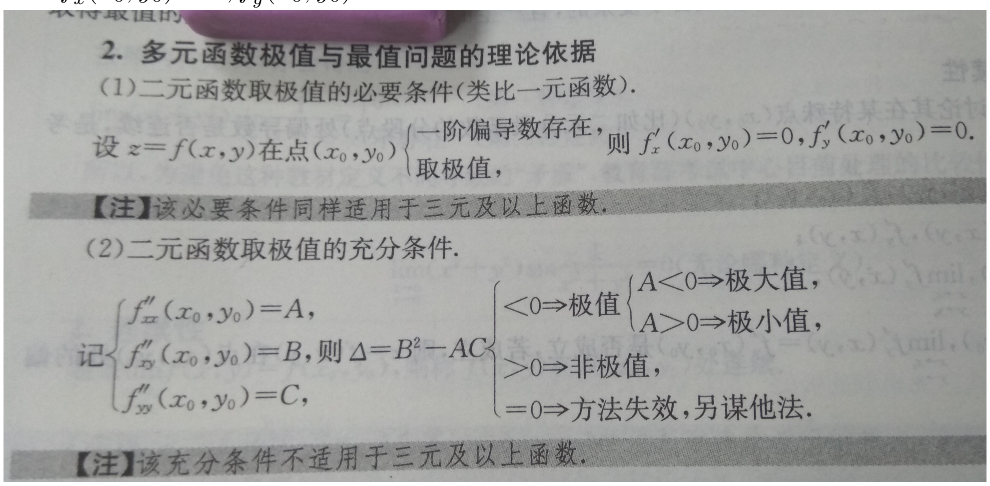
# 20 多元函数极值与最值

1. 二元函数取极值的必要条件设 z=f(x,y) 在点 $(x_0, y_0)$

$$\text{一阶偏导数存在} \tag{3}$$

$$\text{取极值} \tag{4}$$

则，$f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$



**2. 多元函数极值与最值问题的理论依据**

(1)二元函数取极值的必要条件(类比一元函数).

设 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)\begin{cases}\text{一阶偏导数存在,}\\ \text{取极值,}\end{cases}$ 则 $f'_x(x_0,y_0)=0, f'_y(x_0,y_0)=0$.

【注】该必要条件同样适用于三元及以上函数.

(2)二元函数取极值的充分条件.

$$\text{记}\begin{cases}f''_{xx}(x_0,y_0)=A,\\ f''_{xy}(x_0,y_0)=B,\\ f''_{yy}(x_0,y_0)=C,\end{cases}\text{则 } \Delta=B^2-AC\begin{cases}<0\Rightarrow\text{极值}\begin{cases}A<0\Rightarrow\text{极大值,}\\ A>0\Rightarrow\text{极小值,}\end{cases}\\ >0\Rightarrow\text{非极值,}\\ =0\Rightarrow\text{方法失效,另谋他法.}\end{cases}$$

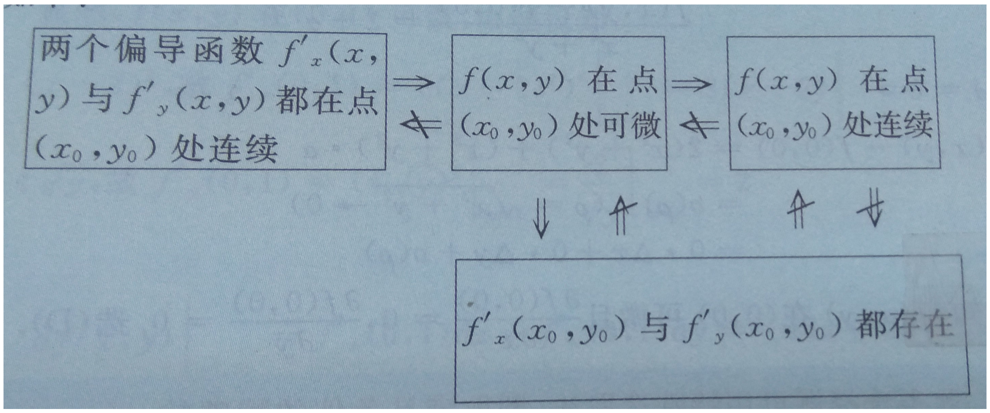
【注】该充分条件不适用于三元及以上函数.

# 21 凹凸性定义

1. 凹 $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

1. 凹 $f[x_1 + (1-)x_2] \le f(x_1) + (1-)f(x_2)$

## 22 极值点与拐点不要求导数存在




## 23 曲率半径

$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ R= $\frac{1}{k}=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$

## 24 弧长

L=$\int\sqrt{r^2()+[r'()]^2}d$

## 25 曲边扇形面积

S=$\frac{1}{2}\int|r_1^2()-r_2^2()|d$

# 26 极座标交换积分次续

**5. 极坐标系下交换积分次序**

**例 10.11** 交换 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}rf(r,\theta)\mathrm{d}r$ 的积分次序，其中 $f(r,\theta)$ 连续.

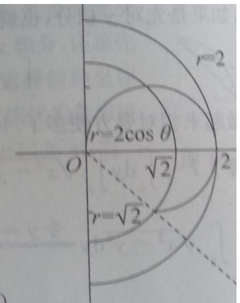



图 10-13

**解** $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}rf(r,\theta)\mathrm{d}r=\iint\limits_D rf(r,\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$,

其中，$D: -\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta$，如图 10-13 所示.

欲先积 $\theta$，后积 $r$，用 $r=$常数穿过区域 $D$.

当 $0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}$ 时，圆弧 $r=$常数是从 $\theta=-\frac{\pi}{4}$ 进入区域 $D$，从 $r=2\cos\theta(\theta>0)$ 穿出区域 $D$；

当 $\sqrt{2}\leqslant r\leqslant 2$ 时，圆弧 $r=$常数是从 $r=2\cos\theta(\theta<0)$ 进入区域 $D$，从 $r=2\cos\theta(\theta>0)$ 穿出区域 $D$，所以换序以后的积分为

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}rf(r,\theta)\mathrm{d}r=\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{r}{2}}rf(r,\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{\sqrt{2}}^{2}\mathrm{d}r\int_{-\arccos\frac{r}{2}}^{\arccos\frac{r}{2}}rf(r,\theta)\mathrm{d}\theta.$$

# 27 一阶微分方程

③一阶线性微分方程.

形如 $y'+p(x)y=q(x)$ 的方程，其中 $p(x),q(x)$ 为已知的连续函数. 其计算公式为：

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot q(x)\mathrm{d}x+C\right).$$

请大家一定要掌握公式的推导过程，这是一个很好的锻炼机会，不要错过.

**推导计算公式** 在等式两边同乘以 $\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$，得

$$\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot y'+\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}p(x)\cdot y=\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot q(x),$$

$$\left(\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot y\right)'=\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot q(x),$$

$$\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot y=\int\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot q(x)\mathrm{d}x+C,$$

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot q(x)\mathrm{d}x+C\right).$$

# 28 一阶微分方程

**解** 实际上有下述定理，在做选择题时可以拿来用.

设 $p(x),q(x),f(x)(f(x)\neq 0)$ 为连续函数，考虑二阶线性非齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

与对应的二阶线性齐次方程 $$y''+p(x)y'+q(x)y=0.$$

有下述论断：

(1)设 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 是方程①的 3 个解，$a,b,c$ 是常数，并设

$$y=ay_1(x)+by_2(x)+cy_3(x),$$

则方程③是方程①的解的充要条件是 $a+b+c=1$；方程③是方程②的解的充要条件是 $a+b+c=0$.

(2)设 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 是方程①的 3 个线性无关的解，$a,b,c$ 中两个为任意常数，则方程③是

通解的充要条件是 $a+b+c=1$；方程③是方程②的解的充要条件是 $a+b+c=0$.

(C)选项中 $C_1+C_2-C_1+1-C_2=1$，根据(2)，故选(C).

当 $u=\frac{y}{x}\Rightarrow y=ux\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

**4. 二阶常系数非齐次线性微分方程的特解**

对于 $y''+py'+qy=f(x)$，考研大纲规定我们需要掌握以下两种情况：

(1)自由项 $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$ 时，特解要设定为 $\boxed{y^*=e^{\alpha x}Q_n(x)x^k}$，

$$\text{其中，}\begin{cases} e^{\alpha x}\text{ 照抄，} \\ Q_n(x)\text{ 为 } x \text{ 的 } n \text{ 次一般多项式，} \\ k=\begin{cases} 0, & \alpha\neq\lambda_1,\alpha\neq\lambda_2, \\ 1, & \alpha=\lambda_1\text{ 或 }\alpha=\lambda_2, \\ 2, & \alpha=\lambda_1=\lambda_2. \end{cases} \end{cases}$$

(2)自由项 $f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$ 时，特解要设定为

$$\boxed{y^*=e^{\alpha x}[Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_l^{(2)}(x)\sin\beta x]x^k},$$

$$\text{其中}\begin{cases} e^{\alpha x}\text{ 照抄，} \\ l=\max\{m,n\},Q_l^{(1)}(x),Q_l^{(2)}(x)\text{ 分别为 } x \text{ 的两个不同的 } l \text{ 次一般多项式，} \\ k=\begin{cases} 0,\alpha\pm\beta i\text{ 不是特征根，} \\ 1,\alpha\pm\beta i\text{ 是特征根.} \end{cases} \end{cases}$$

**3. 二阶常系数齐次线性微分方程的通解**

对于 $y''+py'+qy=0$，其对应的特征方程为 $\lambda^2+p\lambda+q=0$，求其特征根，有以下三种情况请大家牢记.

以下 $C_1,C_2$ 为任意常数.

(1)若 $p^2-4q>0$，设 $\lambda_1,\lambda_2$ 是特征方程的两个不等实根，即 $\lambda_1\neq\lambda_2$，可得其通解为

$$\boxed{y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}}.$$

(2)若 $p^2-4q=0$，设 $\lambda_1,\lambda_2$ 是特征方程的两个相等的实根，即二重根，令 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，可得其通解为

$$\boxed{y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}}.$$

(3)若 $p^2-4q<0$，设 $\alpha\pm\beta i$ 是特征方程的一对共轭复根，可得其通解为

$$\boxed{y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)}.$$