# 1 常识

正交阵 $A^TA = AA^T = E$, $A^{-1} = A^T$
实对称 $A^T = A$
反对称 $A^T = -A$
A 为实矩阵，若 $A^TA = 0$则$a_i = 0, A = 0$
正交向量内积为 0
n 阶行列式全部展开式总共 n！项，每行取自不同行不同列的乘积
n≥2 时，n！是偶数
逆对角线正负号 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$
$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$
$A + A^T$ 是对称矩阵，$A - A^T$ 是反对称矩阵

# 2 合同

定义 C 可逆，$B = C^TAC$
标准型只有平方项
规范型只有 0 1 -1

# 3 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-2} & \vdots & x_3^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - s_i)$$

# 4 拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} O & A_{n\times n} \\ B_{m\times m} & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

$$\begin{vmatrix} A_{mm} & O \\ O & B_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$A=\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_n & & & \end{bmatrix}, A^{-1}=\begin{bmatrix} & & & A_n^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{n}=\begin{bmatrix} A^{n} & O \\ O & B^{n} \end{bmatrix}$$

# 5 初等变换

单位矩阵经过一次初等变换称初等矩阵

初等矩阵都是可逆矩阵

可逆矩阵可表示一系列初等矩阵的乘积

# 6 向量组等价

等价向量组，相互线性表出

向量组和它的极大线性无关组是等价向量组

向量组 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_s$ 线性无关，$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_s, b$ 相关，b 可由 a1,a2,a3…as 线性表出，表法唯一

向量组线性无关，增加一维的延伸向量组无关

延伸向量组相关，原向量组相关

含有零向量或成比例的向量组线性相关

# 7 矩阵等价

存在可逆矩阵 PQ 使 $PAQ = B$，则 $A \cong B$

两个同型矩阵等价的充分必要条件是秩相等

# 8 相似

# 9 施密特正交化

$\beta_1 = \alpha_1$
$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$
$\beta_n = \alpha_n - \frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1} - \frac{(\alpha_n,\beta_{n-2})}{(\beta_{n-2},\beta_{n-2})}\beta_{n-2} - \cdots - \frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$

# 10 迹

迹 Tr 方阵对角线所有元素之和
Tr(AB)=Tr(BA) , Tr(ABC)Tr(BAC)_ 增加 C 不成立

# 11 秩

设 A 为 m*n 矩阵
r(AB)≤min{r(A),r(B)}
AB=O r(A)+r(B)≤n
$r(A) + r(B) \leq r \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \leq r(A) + r(B) + r(C)$
r(A+B)<=r(A|B)<=r(A)+r(B)
r(A)<n-1, 则 |A| 的全部代数余子式都为 0
$|A*| = |A|^{n-1}$
r(A)=r 个独立未知量, n-r 个自由未知量, 解向量