线性代数

2017年9月11日　　16:50

拉普拉斯展开式

$$-\begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A||B|$$

$$\begin{vmatrix} A_{m\times m} & O \\ O & B_{n\times n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

n阶行列式全部展开式总共n!项

每项是取自不同行不同列的乘积

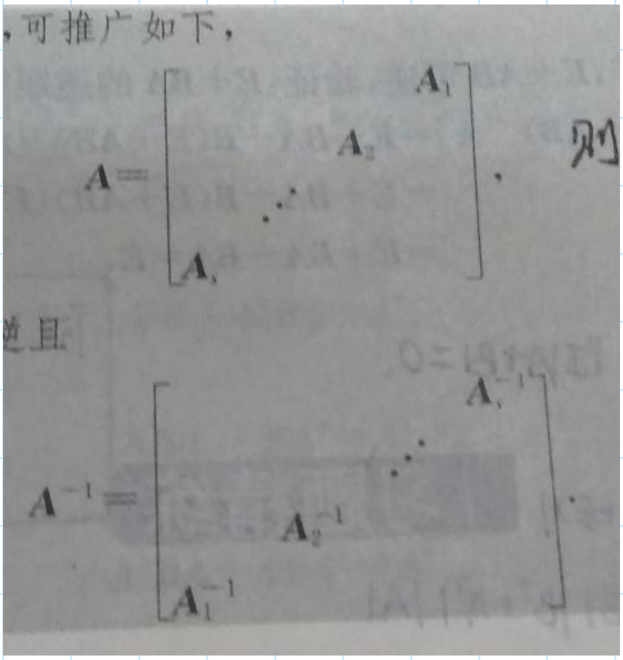
n!是偶数,n≥2时

逆对角线正负号 $(-1)^{n(n-1)/2}$

? $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

$A+A^T$对称矩阵　$A-A^T$反对称\

对角阵乘对角阵可交换



,可推广如下,

$$A=\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ A_s & & & \end{bmatrix},$$ 则

逆且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} & & & A_s^{-1} \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{n} = \begin{bmatrix} A^{n} & O \\ O & B^{n} \end{bmatrix}$$

单位矩阵经过一次初等变换称初等矩阵

初等矩阵都是可逆矩阵,

可逆矩阵可表示一系列初等矩阵的乘积

等价向量组，相互线性表出

向量组和它的极大线性无关组是等价向量组

向量组$a_1,a_2,a_3 \ldots a_s$线性无关，$a_1,a_2,a_3 \ldots a_s$, b相关，b可由$a_1,a_2,a_3 \ldots a_s$线性表出，表法唯一

向量组线性无关，增加一维的廷伸向量组无关

廷伸向量组相关，原向量组相关

含有零向量或成比例的向量组线性相关

存在可逆矩阵PQ使PAQ=B,AB等价$A \cong B$

两个同型矩阵等价的充分必要条件是秩相等

4. 施密特标准正交化(又称正交规范化)过程

线性无关向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的标准正交化公式(又称正交规范化)为

$$\beta_1=\alpha_1,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$$

$$\cdots$$

$$\beta_n=\alpha_n-\frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1}-\frac{(\alpha_n,\beta_{n-2})}{(\beta_{n-2},\beta_{n-2})}\beta_{n-2}-\cdots-\frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1,$$

得到的 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是正交向量组.

将 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 单位化,得 $\eta_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|},\eta_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|},\cdots,\eta_n=\frac{\beta_n}{\|\beta_n\|}$,则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是一组标准正交向量组.

迹Tr 方阵对角线所有元素之和/

Tr(AB)=Tr(BA)，Tr(ABC)≠Tr(BAC)_增加C不成立

设A为m*n矩阵

r(AB)<=min{r(A),r(B)}
AB=O r(A)+r(B)<=n

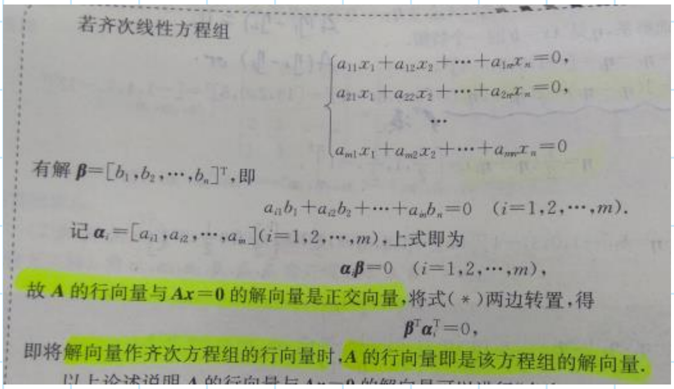
$r(A)+r(B)<=r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}<=r(A)+r(B)+r(C)$

r(A+B)<=r(A|B)<=r(A)+r(B)

r(A)<n-1,则|A|的全部代数余子式都为0

$|A^*|=|A|^{n-1}$

r(A)=r 个 独立未知量
n-r 个 自由未知量,解向量


若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

有解 $\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^T$,即

$$a_{i1}b_1+a_{i2}b_2+\cdots+a_{in}b_n=0 \quad (i=1,2,\cdots,m).$$

记 $\boldsymbol{\alpha}_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}](i=1,2,\cdots,m)$,上式即为

$$\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\beta}=0 \quad (i=1,2,\cdots,m),$$

故 A 的行向量与 $Ax=0$ 的解向量是正交向量,将式(*)两边转置,得

$$\boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{\alpha}_i^T=0,$$

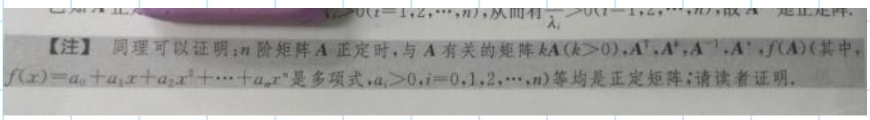
即将解向量作齐次方程组的行向量时,A 的行向量即是该方程组的解向量.

A相似B   r(A)=r(B),|A|=|B|,特征多项式/特征值相同

对称矩阵的两个特征值对应的特征向量正交
A是n阶对称矩阵,必有正交矩阵P,使$P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda$
λ是A的特征方程的k重根,则矩阵A-λE的秩R=n-k,对应特征方程有k个线性无关特征向量
A、B均是实对称矩阵,A、B相似的充分必要条件是A、B有相同的特征值
可相似对角化, 有不同的特征值

A	KA	A^*	$f(A)$
λ	$K\lambda$	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	$f(\lambda)$
ξ	ξ	ξ	ξ

A实对称,
必相似于对角阵,且存在正交阵Q,$Q^{-1}AQ=Q^TAQ$=对角阵
A特征值为实数,特征向量为实向量
属于不同特征值的特征向量正交


【注】 同理可以证明:n 阶矩阵 A 正定时,与 A 有关的矩阵 $kA(k>0)$,A^T,A^k,A^{-1},A^*,$f(A)$(其中,$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$是多项式,$a_i>0$,$i=0,1,2,\cdots,n$)等均是正定矩阵;请读者证明.

A正定->A实对称

*A*正定-〉A正定 反之不成立*

任给二次型f ,总有正交变换X=Py,使f化标准型,若$A^T=A$,存在可逆变换×=Cz使f为标准型

【注】 (1)用配方法化二次型为标准形、规范形，若有平方项，应将平方项及其有关混合项配成完全平方(如上例)，没有平方项时，作可逆线性变换$\begin{cases} x_1=y_1+y_2, \\ x_2=y_1-y_2, \\ x_3=y_3, \end{cases}$使其出现平方项，然后再配完全平方(如本例)。这样任何二次型，总可以用配方法化成标准形、规范形，且所作变换均是可逆线性变换。用矩阵的语言可表达为：任何实对称矩阵，必存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$，其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是对角阵，或对角元素只取 1，-1，0 的对角阵。

(2)配方是中学已经掌握的内容，并不困难。但为我们提供了①所作的可逆线性变换；②$\boldsymbol{A}$ 合同的对角阵；③二次型(或 $\boldsymbol{A}$)的秩；④正、负惯性指数；⑤是否正定等二次型的重要信息，故在求上述问题时，别忘有一招是用配方法。

1. 二次型正定的充要条件

n 元二次型 $f=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定⇔对任意 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$(定义)⇔$f$ 的正惯性指数 $p=n$⇔存在可逆矩阵 $\boldsymbol{D}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D}$⇔$\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{E}$⇔$\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$⇔$\boldsymbol{A}$ 的全部顺序主子式>0.

2. 二次型正定的必要条件

(1)$a_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n)$；(2)$|\boldsymbol{A}|>0$.

无论选取什么样的可逆线性变换，将二次型化成标准形或规范形，其正项之数……变的，p 称为正惯性指数，q 称为负惯性指数.

【注】 (1)若二次型的秩为 r，则 $r=p+q$，故知合同变换不改变正、负惯性指数；(2)两个二次型(或实对称阵)合同的充要条件是有相同的正、负惯性指数，或有相同的秩及正(或负)惯性指数.

A B 合同则

r(A) = r(B) |A| |B| 同号